KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ BETA MÜDAHALELİ (s,S) TİPLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çisem ÖCAL

ARALIK 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ BETA MÜDAHALELİ (s,S) TİPLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

Çisem ÖCAL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
“YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10.12.2013
Tezin Savunma Tarihi : 30.12.2013

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Çisem ÖCAL tarafından hazırlanan

GENELLEŞTİRİLMİŞ BETA MÜDAHALELİ (s,S) TİPLİ RASGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 10/12/2013 gün ve 1533 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. İhsan ÜNVER**	**…....……………………………**
Üye	**: Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK**	**…....……………………………**
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN**	**…....……………………………**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, literatürde önemli bir yer tutan (s,S) tipli yarı-Markov modeller sınıfından olan “Genelleştirilmiş beta müdahaleli (s,S) tipli rastgele yürüyüş süreci’’ ele alınmış ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Tez konumu belirleyip, tezde ortaya çıkan problemlerin çözümünde yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Tülay Kesemen’e en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmalar sürecinde öneri ve yardımlarından dolayı KTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. İhsan Ünver’e; İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyeleri Doç. Dr. Zafer Küçük ve Doç. Dr. Türkan Erbay Dalkılıç’a teşekkür ederim.

Ayrıca tez oluşturmam sürecinde maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve de teşekkürü bir borç bilirim. Bu tez TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Çisem ÖCAL

Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Genelleştirilmiş Beta Müdahaleli (s,S) tipli Rastgele Yürüyüş Süreci" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tülay Kesemen'in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim 10/12/2013

Çisem Öcal

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ BETA MÜDAHALELİ (s,S) TİPLİ RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

Çisem ÖCAL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN
2013, 44 Sayfa, 9 Sayfa Ek

Bu çalışmada, kesikli şans karışımlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci $\left(X(t)\right)$ ele alınmıştır. Bu süreç matematiksel olarak tanımlanmış ve ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeler elde edilmiştir. Bunlardan yararlanarak, $\{\zeta_n\}, n \geq 0$ rastgele değişkenler dizisinin dağılımı $s, S, \alpha, \beta > 0,\ 0 < s \leq S < \infty$ olmak üzere (s, S, α, β) parametreli genelleştirilmiş beta dağılımına sahip olması durumunda ve $E(\zeta_n) \to \infty$ iken sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir. Bunlara ilaveten, bu asimptotik sonuçlardan yararlanarak, sürecin ergodik dağılımının çarpıklık ve basıklık katsayıları için de asimptotik açılımlar bulunmuştur. Son olarak elde edilen asimptotik açılımların doğruluğu Monte Carlo simülasyon metoduyla test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci, kesikli müdahale, asimptotik açılımlar, genelleştirilmiş beta dağılımı.

Master Thesis

SUMMARY

ASYMPTOTIC RESULTS FOR THE SEMI-MARKOVIAN RANDOM WALK WITH GENERALIZED BETA DISTRIBUTED INTERFERENCE OF CHANCE

Çisem ÖCAL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Assist. Prof. Tülay KESEMEN
2013, 44 Pages, 9 Appendix

In this paper a semi-Markov random walk process $(X(t))$ with a generalized beta distributed of chance is considered. $X(t)$ is constructed mathematically and exact formulas for the first four moments of the ergodic distribution of the process are obtained. Using these expressions the asymptotic expansions for the first four moments of the ergodic distribution of the process are found as $E(\zeta_n) \to \infty$ when the random variable ζ_n has a generalized beta distribution with parameters (s, S, α, β), $0 < s \leq S < \infty$. Moreover, the asymptotic expansions for the skewness and kurtosis of the ergodic distribution of the process X(t) are established. Finally, the accuracy of the approximation formula is tested by the Monte Carlo simulation method.

Key Words: Semi-Markov random walk process, discrete interference of chance, asymptotic expansions, generalized beta distribution.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

E(ξ)	ξ rasgele değişkenin beklenen değeri
E(ξ^n)	ξ rasgele değişkenin n. başlangıç momenti
$E\|\xi\|$	ξ rasgele değişkeninin mutlak momenti
$f_1 * f_2$	f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
f^{*n}	f fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
İnf A	A kümesinin infumumu
SupA	A kümesinin supremumu
$\text{Lim}_{x\to\infty} f(x)$	x , ∞' a giderken f(x) fonksyonunun limiti
P{.}	{.} olayının olasılığı
P_z {.}	{.} olayının koşullu olasılığı
Var(ξ)	ξ rasgele değişkenin varyansı
Var_z (ξ)	ξ rasgele değişkenin koşullu varyansı
$I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}$	A kümesinin indikatör fonksiyonu
a(x)∽ $b(x)$	a(x)'ın b(x)' e asimptotik denkliği
g(x)=o($\varphi(x)$)	$\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)}{\varphi(x)}\right) = 0$
g(x)=O($\varphi(x)$)	$\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)}{\varphi(x)}\right) \leq C < \infty$
$\widetilde{M}$ (s)	M(t) fonksiyonun Laplace dönüşümü
$M^*(s)$	M(t) fonksiyonun Laplace-Stiltijes dönüşümü
a<∞	a sonludur

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Mühendislik, iktisat, fizik, kimya ve biyoloji gibi bilim alanlarında yapılan çalışmalarda ortaya çıkan birçok problemin incelenmesinde, ifade edilmesinde ve çözülmesinde yenileme, ödüllü yenileme, rastgele yürüyüş süreçleri ve onların türevleri geniş bir ölçüde kullanılmakta ve böylece büyük kolaylıklar sağlanmaktadır.

Olasılık kuramı rastgele olayların analizi ile ilgilenen bir bilim dalıdır. Olasılık kuramının ana öğeleri rastgele değişkenler, rastgele süreçler, olaylar olarak sayılabilir. Bunlar ya tek olarak ortaya çıkan ya da bir zaman dönemi içinde gelişerek meydana gelen, ilk görünüşü rastgele bir şekilde olan deterministik olmayan olayların veya ölçülebilir miktarların matematiksel soyutlamalarıdır. Matematiksel olasılık kuramının tarihsel kökleri 16. yy’da Gerolamo Cardano ve 17. yy’da Pierre de Fermat ile Blaise Pascal tarafından yapılan şans oyunlarının matematiksel incelemelerine kadar dayanır.

Başlangıçta, olasılık kuramı genellikle ayrık olayları incelemek için geliştirilmiş ve kullanılan yöntemler genel matematik kurallarına dayandırılmıştır. Fakat, giderek matematik analiz görüşleri daha ağır basarak olasılık kuramına sürekli değişkenlerin incelenmesinin de katılması gerekmiştir. Bu gelişmenin şu andaki en son aşamasının temelleri, Andrey Nikolaevich Kolmogorov tarafından, ölçüm kuramına bağlantılı olan modern olasılık kuramı olarak ortaya çıkartılmıştır. Kolmogorov Richard Von Mises tarafından ortaya atılan örneklem uzayı kavramlarını ölçüm kuramı kavramları ile birleştirerek 1933'te modern olasılık kuramı için esas olan Kolmogorov aksiyomlarını ortaya konmuştur. Bu gelişme kısa zamanda, bilim dünyası tarafından modern olasılık kuramının ana aksiyom sistemi olarak benimsenmiştir. İstatistik bilim dalının matematiksel temelini oluşturan olasılık kuramı, büyük veri serilerinin niceliksel analizini gerektiren birçok insan faaliyetinin incelenebilmesi ve anlaşılabilmesi için temel esasları oluşturur. Bunun yanısıra olasılık kuramı, olasılık kuramının yöntemleri ve durumları hakkında sadece kısmen bilgimiz olabilecek (örneğin istatistiksel mekanik gibi) karmaşık sistemlerin tanımlanmasına da uygulanabilir.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ise ilk kez bu teorinin kurucularından olan J. Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç (1868-1913)' in büyük katkısıyla 20. yy'ın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır. Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov A. Y. Hinçin gibi ünlü bilim adamları tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreçler olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken, A. Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Stokastik süreçlerin tam olarak belirlenmesi için çok sayıda küme ortalamaları (durum ortalaması) gerekir. Fakat, bu işlem hem karmaşık hem de pahalıdır. Bu nedenle az sayıda gözlem kümesiyle yetinilir. Bunun için rastgele süreç oluşturan kaynağı temsil eden fiziksel mekanizma sağlanabilir ve bazı temel şartlar altında zaman ortalamalarının durum ortalamasına yakınsadığı gösterilebilir. Bu amaçla, Gihman ve Skorohod (1975) kesikli müdahaleli yarı-Markov süreçleri için genel ergodik teoremi ifade etmişlerdir. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Stokastik modellerin özellikle de Markov ve yarı-Markov stokastik modellerin uygulama alanları hızla genişlemektedir. Güvenirlilik teorisinin, stok kontrol teorisinin, risk teorisinin ve matematiksel biyolojinin birçok önemli problemi Markov veya yarı-Markov modellerinin yardımıyla çözülebilir.

Literatürde, Markov ve yarı-Markov modelleri ile ilgili birçok teorik çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların, bir kısmı uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek nitelikte olsa da birçoğundaki sonuçlar uygulama için yararlı olabilecek nitelikte değildir. Çünkü, ele alınan modeller gereğinden fazla idealize edilmişlerdir. Ayrıca, müdahaleyi ifade eden rastgele değişkenler geniş bir sınıfa ait olduklarından sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur. Fakat asimptotik yaklaşım yöntemi bu zorluğu biraz olsun ortadan kaldırmaktadır. Son yıllarda matematiğin birçok alanında olduğu gibi olasılık teorisinde de büyük rağbet gören bu yöntem yardımıyla elde edilen sonuçlar, yaklaşık formüller olmalarına rağmen birçoğu bilginin büyük kısmını içermekte, diğer yandan, araştırmacıların kolaylıkla kullanabilecekleri sadeliğe sahip olmakta, ele alınan süreçler sınıfını daraltmayan ve dolayısıyla da büyük sınıflar için genel kuralların elde edilmesine imkan sağlamaktadır. Bu nedenle son yıllarda asimptotik yöntemler uygulanarak yaklaşık, fakat pratik öneme sahip olan birçok değerli çalışma ortaya konulmuştur. Örneğin, Kesemen (2006) doktora tezinde borç alma stratejisi olarak yorumlanan ζ_1 rastgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli Üstel, ikinci ve üçüncü mertebeden Erlang ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımlarına sahip olması durumunda sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin formüller ve asimptotik açılımlar elde etmiştir. Mammadova (2011) doktora tezinde, normal müdahaleli rastgele yürüyüş sürecini matematiksel olarak tanımlayıp, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ve asimptotik sonuçlar elde etmiştir. Gamma müdahaleli süreçler incelenirken ortaya çıkan integraller genellikle yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü yardımıyla ifade edilebilirler. Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesinde ise literatürde yer alan Miller teoreminden yararlanılır, fakat genelleştirilmiş beta müdahaleli süreçler henüz bu açıdan incelenmemiştir. (α, β) parametrelerinden dolayı esnek bir yapıya sahip olan Genelleştirilmiş Beta müdahaleli süreçlerin araştırılması hem bilimsel hem de pratik öneme sahiptir. Bu nedenle bu çalışmanın temel amacı, asimptotik yöntemleri kullanarak, Genelleştirilmiş Beta müdahaleli rastgele yürüyüş sürecinin olasılık ve sayısal karakteristikleri için pratik öneme sahip olan yaklaşık ifadeler elde etmektir. Bu maksatla, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için analitik ve asimptotik formüller elde edilmiştir. Bunlardan yararlanarak sürecin ergodik dağılımının çarpıklık, basıklık katsayıları için de asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilen yaklaşık formüllerin doğruluğu test edilmiştir.

1.2. Literatür Araştırması

Bu tezde, stokastik süreçlerin önemli bir sınıfını oluşturan “Genelleştirilmiş Beta Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci” ele alınmıştır. Bu amaçla, arz-talep miktarlarını ve onların ortaya çıkma anlarını rastgele değişkenler dizisi yardımıyla ifade ettikten sonra, belirli yenileme ve rastgele yürüyüş süreçlerini tanımlayarak, bu kavramların aracılığıyla fiziksel model yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci biçiminde matematiksel olarak tanımlanacaktır. Bu nedenle, yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin son yıllardaki gelişimi hakkında bilgi verilsin.

Yarı-Markov süreç kavramı, Levy (1987), Smith (1965-1966) ve Takacs (1997) gibi olasıkçılar tarafından ortaya atılmıştır. Yarı-Markov süreçlerinin tamamında durum uzayı sonlu olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlendiğinden bu kavramın genelleştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla Çınlar (1986), Gihman ve Skorohod (1975), Serfoza (1971), Ezhov (1967) ve Korolyuk (1981) çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci tanımlarını vermişlerdir. Bu süreçlerle ilgili birçok önemli problemleri ise Borovkov (1986), Korolyuk ve Borovskikh (1981), Çınlar (1968, 1975), Takacs (1954, 1977), Kemperman (1963), Kovalenko vd. (1983), Shurenkov vd. (1984,1989) çalışmalarında ayrıntılı bir biçimde incelemişlerdir.

Yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve bu süreçlerin ergodik dağılımları teorik ve uygulama bakımından önem arz etmektedir. 1975 yılında Smith (1958,1959) yarı-Markov sınıfına ait olan yenileme süreçleri için esas ergodik teoremi ispatlamıştır. Ezhov ve Shurevkov (1977) tarafından yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca Shurenkov (1989) yarı-Markov süreçlerin ergodik dağılımının varlığı için gerek ve yeter şartları elde etmiştir. Anisimov (1995,1999), Dzhafarov vd. (2003), Korolyuk ve Svichchuk (1967) tarafından yarı-Markov süreçler için en genel durumda limit teoremleri verilmiştir. Skorohod ve Slobodenyuk (1970), Nasirova (1984,1998) ve Harlamov (1973) ise rastgele yürüyüş süreçleri için limit teoremlerini vermişlerdir.

Yarı-Markov süreçlerinin incelenmesinden sonra uygulamada karşılaşılan bir takım problemlerin incelenmesi ve çözümlenmesi için yarı-Markov sürecinin değişik tipleri, yani bariyerli tipleri incelenmeye başlandı. Bunlar ise bir bariyerli veya iki bariyerli olarak sınıflandırılabilir. Bu bariyerlerde ortaya çıkan somut problemlere bağlı olarak yansıtan, tutan, yutan vs. olabilir. Nasirova (1984), sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip olan bir bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecini kurmuştur. İki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri hem pratik hem uygulama bakımından önemli olmalarından dolayı bu süreçler hakkında Korolyuk ve Borovskikh (1981), Lotov (1982,1991), Prabhu (1981), Zhang (1992), El-Shehawey (1992), Weesakul (1961), Kastenbaum (1966), vs. tarafından birçok ilmi çalışmalar yapılmıştır. Ancak yapılan bu çalışmaların çoğu sonlu durum uzayına sahip rastgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemleriyle ilişkilendirilmiştir. Khaniyev (1984,1986) ise iki tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecini kurmuş ve incelemiştir. Khaniyev (1984,1986) bu süreç için, sürecin dağılımını, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını, sürecin beklenen değeri, varyansı gibi bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamış ve süreç için ergodik teoremini ifade ve ispat edip, bu süreç için limit teoremlerini vermiş ve sürecin asimptotik durumunu incelemiştir. Ayrıca Nasirova, Yapar ve Khaniyev (1998) sıfır seviyesinde yansıtan ve $\beta > 0$ seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecini kurmuş ve bu sürecin dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümü ile sürecin ilk kez yansıma anının dağılımlarını vermişlerdir. Ayrıca süreç için seriler şeklinde limit teoremlerini ispatlamışlardır.

Kesemen (2001) yüksek lisans tezinde ele aldığı modeli bir bariyerli Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olarak incelemiş ve $\mathrm{X(t)}$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin yardımıyla ifade edip sürecin ergodik dağılımının ilk iki momenti için kesin formüller elde etmiştir. Kesemen (2006)' in doktora tezinde, borç alma stratejisi olarak yorumlanan ζ_1 rastgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel, ikinci ve üçüncü mertebeden Erlang ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımlarına sahip olması durumunda sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin formüller ve asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Kesemen (2013), Weibull müdahaleli rasgele yürüyüş sürecinin ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde etmiştir. Ayrıca, yine bu süreç için zayıf yakınsama teoremini ispat etmiştir. Kesemen ve Yetim (2013) gecikmeli ve pareto müdahaleli rastgele yürüyüş süreci için ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde etmiştir ve bu süreç için zayıf yakınsama teoremi ispat etmiştir. Mammadova (2011) doktora tezinde normal müdahaleli rastgele yürüyüş sürecini matematiksel olarak tanımlayıp, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ve asimptotik sonuçlar elde etmiştir.

Bu çalışmada mevcut çalışmalardan farklı olarak genelleştirilmiş beta dağılımı ele alınmıştır. Çünkü, beta dağılımının sürekli dağılım fonksiyonları ailesi içerisinde diğer dağılım fonksiyonlarından daha esnek bir yapıya sahip olması reel uygulamalarda daha pratik olarak kullanılabilme avantajını kazandırmaktadır. α ve β parametrelerinin farklı seçimleriyle beta fonksiyonunun grafiği de esnek bir şekilde değişim gösterir. Bunun yanı sıra son yıllardaki araştırmalarda bu esnekliğin daha fazla sağlanabilmesi için beta dağılımı üzerinde bir takım genelleştirmelere gidilerek farklı fonksiyonel formlarda dağılım fonksiyonları elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş beta dağılımıyla ilgili ilk olarak çalışan James B. McDonald ve Xu J. Yexiao (1994) dır. Bu araştırmacıları Simon C. Parker takip etmektedir. Simon C. Parker (1998) genelleştirilmiş beta dağılımını ABD` nin gelir vergisi verilerine uygulayarak pareto ve lognormal dağılımdan daha esnek bir yapıya sahip olduğunu göstermiştir. Beta dağılımının, böyle esnek bir yapıya sahip oluşu ve bundan dolayı da reel hayatta ortaya çıkan problemlere karşı daha fazla uyumlu olabileceğinden bu çalışma, hem teorik hem uygulama açısından önem arz etmektedir. Bu çalışmada fiziksel model, bir rastgele yürüyüş süreci yardımıyla ifade edildikten sonra, bu süreç bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir

$\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak inşa edilmiştir. Ayrıca, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik sonuçlar elde edilip, bu asimptotik sonuçlardan yararlanarak, sürecin ergodik dağılımının çarpıklık ve basıklık katsayıları için de asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Son olarak elde edilen asimptotik açılımların doğruluğu Monte Carlo simülasyon metoduyla test edilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Genelleştirilmiş Beta Müdahaleli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi

2.1.1. Fiziksel Model

Bu çalışmada, ele alınan stokastik süreç oluşturmadan önce aşağıdaki gerçek modeller incelensin:

Model 1. Merkez Bankasındaki para rezervlerinin optimal yönetilmesi:

Merkez Bankasındaki para rezervlerini belirli aralıklarla artırarak kritik eşiğe inmesini önlemek ve dolayısıyla dünya ve ülkemizde olabilecek olağanüstü durumlarda Merkez bankasının ve ona bağlı olan kuruluşların zor duruma düşmesini önlemek için bu çalışmada elde edilecek sonuçların uygulanması mümkün olacaktır. Ayrıca bu sonuçlar göz önünde bulundurularak merkez bankası ve hazinede bulunan para stoklarının işletilip en uygun şekilde dağıtılmasını sağlamak için optimal ölçütler çıkarılabilecektir.

Model 2. Su barajlarındaki stok miktarının optimal kullanımı:

Barajdaki su birikimi, barajı besleyen kaynaklardan elde edilen miktara bağlı olarak zamanla değişim gösterir. Bu değişimde bölgeye yağan kar ve yağmurlar etkilidir. Buna karşın, sulama, buharlaşma, yanlara sızma ve çeşitli amaçlar için su sıkıntısı olan bölgelere aktarılan su miktarı barajlardaki su seviyesinin azalmasına neden olan başlıca etmenlerdir. Bu faktörlerin hemen hemen hepsi rastgele zamanlarda ve miktarlarda olduğundan dolayı barajdaki su seviyesinin her zaman daha önce belirlenen alt ve üst eşikler arasında gerçekleşmesi beklenmemektedir. Bu nedenle, su miktarının arzu edilen eşikler arasında kalmasını sağlamak için, stok miktarı üst eşiğe ulaştığında baraj kanallarının açılması, alt eşiğe yaklaştığında ise sahip olunan stok miktarının tasarruflu kullanılması ya da ek kaynak arama yoluna gitme gibi yöntemlere başvurulabilmektedir. Bu çalışma kapsamında sözü edilen önlemler ve sakıncalı durumların çözülmesine bilimsel katkılar sağlanabilecektir.

Model 3. Sigorta şirketlerinin çalışması:

Sigorta şirketlerinin anaparası müşterilerinden alınan primlerle artar, rastgele anlarda gerçekleşen kazalar sonucu oluşan zarardan dolayı müşteriye ödenen miktarlarla da azalır. Şansa bağlı olarak girdiler çıktılardan fazla ise şirketlerde işler iyi gider ve para kazanırlar. Şansa bağlı olduğundan dolayı çıktıların fazla olma durumunda ise zarar ederler. Bu durumla karşılaşmak istemeyen sigorta şirketleri zamanında ek önlemler almak zorunda kalırlar. Bu model Şekil 1'de grafiksel olarak verilmiştir. Bu çalışma, sigorta şirketlerindeki ana paranın optimal şekilde yönlendirilmesinin (şansa bırakılmaksızın) matematiksel algoritmasını da geliştirmiş olacaktır.

Yukarıda açıklanan gerçek modelleri ifade edecek stokastik süreç, matematiksel olarak kurulmaya çalışılsın.

2.1.2. X(t) Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\zeta_n\}, n \geq 1$ dizileri bağımsız rastgele değişkenler dizisi olsunlar. Ayrıca, her bir dizinin elemanları da kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsunlar. $\{\xi_n\}, n \geq 1$ sadece pozitif, $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ hem pozitif hem negatif değerler alabilen rastgele değişkenler dizisi olsun. $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ rastgele değişkenleri ise (s, S) aralığında değerler alabilen ve $\zeta_0 = z\,; z \in (s, S)\,, s > 0$ seviyesinden başlayan ve (s, S, α, β) parametreli genelleştirilmiş beta dağılımına sahip rastgele değişkenler olsun. Ayrıca ξ_n, η_n ve ζ_n rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları belli olup sırasıyla $\Phi_\xi(t)\,, F_\eta(x), \pi(z)$ olsun. Yani ;

$$\phi_\xi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}, \qquad F_\eta(x) = P\{\eta_1 \leq x\}, \qquad \pi(z) = \{\zeta_1 \leq z\}$$

$\{\xi_n\}, n \geq 1$ dizisinden yararlanılarak aşağıdaki yenileme dizisi inşa edilsin:

$$T_0 = 0\ , T_1 = \xi_1\ , T_2 = \xi_1 + \xi_2\ , \dots, T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ \ ; n \geq 1$$

$\{\eta_n\}, n \geq 1$ dizisinin yardımı ile de aşağıdaki rastgele yürüyüş süreci kurulsun:

$$S_0 = 0\ , S_1 = \eta_1\,, S_2 = \eta_1 + \eta_2, \dots, S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\ \ ; n \geq 1$$

Tam değerli $\{N_n\}, n \geq 1$ rastgele değişkenler dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_0 = 0, \qquad N_{n+1} = inf\{k \geq N_n + 1 : \zeta_n - S_k + S_{N_n} < s\}, n \geq 0,$$

Ayrıca,

$$\zeta_0 = z \in [s,S],\ \zeta_n = T_{N_1+N_2+\cdots+N_n},\ n \geq 1 \text{ ve } \upsilon(t) \equiv \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\};\ t > 0$$

dır. Burada,

$$S_{N(z)} \equiv \sum_{i=1}^{N(z)} \eta_i \quad ;\ L_m = N_1 + N_2 + \cdots + N_m \ \ ;\ m \geq 1\ ;\ z \in (s,S)\ ;\ s > 0$$

dır.$\{N_n\}, n \geq 0$ rastgele değişkenler dizisinden yararlanarak aşağıdaki pozitif değerli rastgele değişkenler inşa edilsin:

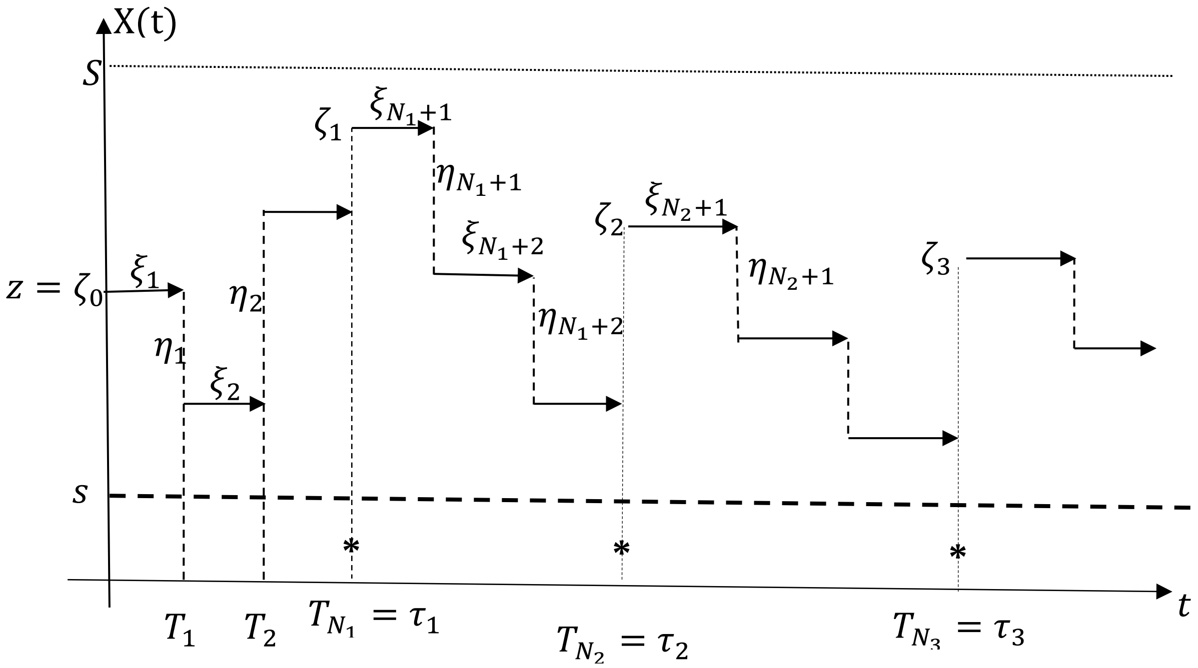
$$\tau_0 \equiv 0\ ;\ \tau_1(z) = \sum_{i=1}^{N(z-s)} \xi_i \ ;\ \tau_m = \sum_{i=1}^{L_m} \xi_i \ ;\ \ m \geq 1$$

Burada τ_1 rastgele değişkeni sürecin s kontrol seviyesinin altına ilk kez düşme anı olarak yorumlanır. Ayrıca, $\{\xi_n\},\ n \geq 1$ rastgele değişkenler dizisinin ürettiği yenileme süreci, $\upsilon(t) \equiv max\{n \geq 0 : T_n < t\}; t > 0$ olsun.

Bu bilgilerden yararlanarak bu çalışmanın temel amacı olan $X(t)$ süreci aşağıdaki şekilde kurabilir. $\forall\ t \in [\tau_n, \tau_{n+1}),\ n \geq 0$ için,

$$\mathrm{X(t)} = max\{s, \zeta_n + S_{\nu(t)} - S_{N_n}\} \tag{1}$$

(1) ile tanımlanan X(t) süreci yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecidir. Bu süreç kesikli şans karışımlı bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olarak bilinen bir stokastik modelin matematiksel ifadesidir.



Şekil 1. Genelleştirilmiş Beta müdahaleli rastgele yürüyüş sürecinin bir gösterimi

2.2. X(t) Sürecinin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu ile Karakteristik Fonksiyonu İçin Kesin İfadeler

Bu bölümün temel amacı, $X(t)$ sürecinin ergodikliğini ve ergodik dağılımını asimptotik yöntemlerle incelemektir. Bu maksatla öncelikle ele alınan $X(t)$ sürecinin hangi koşullar altında ergodik olduğu incelensin.

Teorem 2.2.1. $\{\xi_n\}; \{\eta_n\}; \{\zeta_n\}$; $n = 1,2,3, ...$ rastgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları da sağlasınlar:

1) $0 < E(\xi_1) < \infty$,

2) $E(\eta_1) > 0$, $E(\eta_1^2) < +\infty$,

3) η_1 rastgele değişkeni aritmetik olmayan bir rastgele değişken ,

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, S, α, β) $s, S, \alpha, \beta > 0$ parametreli genelleştirilmiş beta dağılımına sahip olsun.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat: Ele alınan $X(t)$ süreci literatürde "Kesikli Şans Karışımlı Yarı-Markov Süreçleri" diye adlandırılan genel bir stokastik süreçler sınıfına aittir. Bu sınıf için literatürde Smith'in "anahtar yenileme teoremi" tipli genel ergodik teoremi bilinmektedir (Gihman ve Skohorod, 1975). Fakat, bu teoremin şartları ve ifadesi oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu kısımda, sürecin özelliklerinden yararlanılarak, zayıf şartlar altında süreç için ergodik teorem ispatlanmaya çalışılacaktır. Ele alınan süreç için ergodik teoremini ispatlamak Teorem 2.2.1' in koşulları sağlandığında, yukarıda adı geçen genel ergodik teoremin şartlarının da sağlandığı göstermek anlamına gelmektedir. Bu nedenle, $X(t)$ sürecinin ergodik olabilmesi için aşağıdaki iki varsayımın sağlanması gerekmektedir.

1.Varsayım: $X(t)$ sürecinin içinde gömülü ergodik bir Markov zinciri mevcut olmalıdır.

İncelenen durumda, bir Markov zinciri kurmak için öncelikle, 1 olasılığı ile, monoton artan pozitif değerli bir rastgele değişkenler dizisi belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, yukarıda tanımlanan $\{\tau_n\}$, n=1,2,… rasgele değişken dizisi kullanılabilir. Çünkü tanımı gereği, 1 olasılığı ile $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \tau_{n+1} < \cdots < \infty$ dır. Hatırlatalım ki , τ_n rastgele değişkenleri $X(t)$ sürecinin kontrol seviyesine düşme anlarıdır ve tanımları gereği Markov momentleridir. $X(t)$ sürecinin bu noktalardaki değerleri $\aleph_n$ ile gösterilsin. Yani $\aleph_n \equiv X(\tau_n + 0)$ olsun. $X(t)$ sürecinin matematiksel kuruluşuna göre , 1 olasılığı ile, $\aleph_n \equiv \zeta_n$ dir. $\{\zeta_n\}$, n=1,2,3… bağımsız rastgele değişkenler dizisi olduğu için $\{\aleph_n\}$ dizisi bir Markov zinciri oluşturmuş olur. Ayrıca ζ_n rastgele değişkenleri (s, S, α, β)

parametreli genelleştirilmiş beta dağılımına sahip olduklarından $\{\aleph_n\}$ zinciri $\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}; s \leq z \leq S$ durağan dağılıma sahip bir ergodik zincirdir ve bu zincirin durağan dağılımı şu şekildedir:

$$\pi(z) = \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)} \int_s^z (x-s)^{\alpha-1}(S-x)^{\beta-1}dx \ ; \ z \in (s,S)$$

O halde Teorem 2.2.1.'in koşulları altında genel ergodik teoremin ilk varsayımı sağlanmış olur.

2.Varsayım: $\{\tau_n\}$, $n = 1,2,3,...$ Markov momentleri arasında geçen zaman sürelerinin beklenen değeri sonlu olmalıdır. Yani, her $n = 1,2,3,...$ için;

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty \tag{2}$$

olmalıdır. $\tau_n - \tau_{n-1}$, $n = 2,3,...$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduklarından, (2) koşulunun sağlanması için

$$E[\tau_1(z)] < \infty \text{ ve } E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^\infty E[\tau_1(z)]d\pi(z) < \infty \ ; \ n = 2,3,... \tag{3}$$

integralinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. $E[\tau_1(z)] < \infty$ dur, çünkü,

$\tau_1;\ \tau_2 - \tau_1;\ \tau_3 - \tau_2; ...$ aynı dağılıma sahiptirler ve Wald özdeşliğine göre,

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$$

ve

$$E[\tau_1(z)] = E\left(\sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i\right) = E(\xi_1)E[N_1(z)] \tag{4}$$

dir. Burada,

$$E[N_1(z)]) = \int_s^S E[N(z-s)]d\pi(z) \tag{5}$$

dir. Ayrıca Teorem 2.2.1'in şartlarına göre göre $E(\xi_1) < \infty$ sağlanır. Bu durumda (2) koşulunun sağlanması için

$$E[N_1(z)] < \infty \tag{6}$$

olması yeterlidir. Şimdi bunu gösterelim. Hatırlatalım ki,

$$\mathrm{E}[\mathrm{N}(\mathrm{z}-\mathrm{s})] \equiv \mathrm{U}_{\eta}(\mathrm{z}-\mathrm{s}) = 1 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{F}_{\eta}^{*\mathrm{n}}(\mathrm{z}-\mathrm{s}) \tag{7}$$

dır. Burada $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rastgele değişkenlerinin tanımladığı yenileme süreci $U_\eta(x)$ ile gösterilmiştir. $U_\eta(x)$ her sonlu x için sonludur (Feller, 1971).

Diğer taraftan $U_\eta(x)$ yenileme süreci pozitif değerli ve azalmayan fonksiyondur. Böylece her $\mathrm{z} \in (\mathrm{s}, \mathrm{S})$ için $\mathrm{U}_\eta(\mathrm{z}-\mathrm{s}) \leq \mathrm{U}_\eta(\mathrm{S}-\mathrm{s})$ eşitsizliği elde edilir. O halde;

$$\mathrm{E}[\mathrm{N}_1(\mathrm{z})] = \int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}} \mathrm{E}[\mathrm{N}(\mathrm{z}-\mathrm{s})] d\pi(\mathrm{z}) = \int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}} \mathrm{U}_\eta(\mathrm{z}-\mathrm{s}) d\pi(\mathrm{z})$$

$$\leq \int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}} \mathrm{U}_\eta(\mathrm{S}-\mathrm{s}) d\pi(\mathrm{z}) = \mathrm{U}_\eta(\mathrm{S}-\mathrm{s}) \int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{S}} d\pi(\mathrm{z}) = \mathrm{U}_\eta(\mathrm{S}-\mathrm{s}) < \infty \tag{8}$$

olur. Dolayısıyla her $0 \leq s \leq S < \infty$ için (2) koşulunun sağlandığı gösterilmiş olur. Böylece ikinci varsayım da sağlanmış oldu.

Sonuç olarak , Teorem 2.2.1' in şartları altında genel ergodik teoremin varsayımları sağlanmış olur. Bu, $X(t)$ sürecinin ergodik olduğunu gösterir ve bu teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2. Teorem 2.2.1.'in koşulları sağlanmış olduğunda her bir sınırlı, ölçülebilir f(x) fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u))\, du = \frac{1}{E[N_1(\zeta_1)]} \int_0^\infty f(x) d_x\, [E(A(x, \zeta_1)] \tag{9}$$

$$E[N_1(\zeta_1)] = \int_0^\infty E[N_1(z)]\, d\pi(z); \quad E[A(x, \zeta_1)] = \int_0^\infty A(x, z) d\pi(z) \tag{10}$$

$$A(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x, z); \quad a_n(x, z) = P\{z - S_i > 0; \quad i = \overline{1, n}; z - S_n \leq x\} \tag{11}$$

Sonuç 2.2.1. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $\left(Q_x(x)\right)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$Q_x(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\} = \frac{E\left(A(x, \zeta_1)\right)}{E\left(N_1(\zeta_1)\right)} \tag{12}$$

İspatı. Teorem 2.2.2 de f(x) fonksiyonun yerine gösterge (indikatör) fonksiyonunu yazılarak, (12) eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.2.2. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\left(\varphi_x(\theta)\right)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\varphi_x(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E(\exp\left(i\theta X(t)\right) = \frac{1}{E(N_1(\zeta_1))}\int_0^{\infty} e^{i\theta x}\, d_x E\left(A(x,\zeta_1)\right) \qquad (13)$$

Not. Sonuç 2.2.1 ve Sonuç 2.2.2 den de göründüğü gibi, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_x(x)$ ve karakteristik fonksiyonunu $\varphi_x(\theta)$ hesaplayabilmek için A(x,z) fonksiyonunu bilmek gerekir. Fakat A(x,z) fonksiyonu en basit durumlarda bile çok zor hesaplanabilen bir fonksiyondur. Bu nedenle $Q_x(x)$ ve $\varphi_x(\theta)$ için alternatif gösterimlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu zorluğu aradan kaldırmak için rastgele yürüyüş sürecinin temel özdeşliğinden ve Sonuç 2.2.2 den yararlanarak, $\varphi_x(\theta)$ için aşağıdaki alternatif gösterimi ortaya koymak mümkündür (Feller,1971).

Sonuç 2.2.3. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_x(\theta)$ karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rastgele değişkeninin karakteristik fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_x(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E(\exp\left(i\theta X(t)\right) = \frac{1}{E\left(N_1(\zeta_1)\right)}\int_0^{\infty} e^{i\theta x}\frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1}\, d\pi(z) \qquad (14)$$

Burada,

$$\varphi_\eta(-\theta) = E(\exp(-i\theta\eta_1));\ \varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)E\left(\exp\left(-i\theta\varphi_{N(z)}\right)\right);\ \theta \in R/\{0\} \qquad (15)$$

dır.

İspatı. Rastgele yürüyüş süreci için temel özdeşliği (Feller, 1971), Sonuç 2.2.2'de yerine yazıp, gerekli hesaplamalar yapılarak, (14) eşitliği elde edilir.

Not. Sonuç 2.2.3 de $\varphi_x(\theta)$ karakteristik fonksiyonunun, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin uygun karakteristiği ile ifade edilmesinin temel nedeni, literatürde sınır fonksiyoneli ile bağlı birçok değerli sonuçların mevcut olmasıdır (Borovkov, 1965), (Feller, 1971) ve (Rogozin vd., 1964). (12) eşitliğinden yola çıkarak, $X(t)$ sürecinin momentlerinin asimptotik davranışları incelenebilir. Bu amaç için öncelikle $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momenti için kesin ifadeler elde edilsin:

2.3. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti İçin Kesin İfadeler

Sonuç 2.2.3 de $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_X(\theta)$ karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu ile (14) formülündeki gibi ifade edilmiştir. Bu formülden yararlanarak, bu bölümde $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentini $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile ifade edilecektir. Bu amaçla aşağıdaki notasyonları tanımlansın:

$$\varphi_\eta(m_k) = E(\eta_1^k),\ M_k(z) = E(S_{N(z)}^k),\ m_{k1} = \frac{m_k}{km_1};\ M_{k1}(z) = \frac{M_k(z)}{M_1(z)};\ k = \overline{1,5} \tag{16}$$

$$\overline{X}(t) = X(t) - s;\ E(X^k) = \lim_{t\to\infty} E\big((X(t))^k\big), k = 1,2,3,4 \tag{17}$$

Bu notasyonları göz önünde bulundurarak, aşağıdaki teoremleri verilsin.

Teorem 2.3.1. Teorem 2.2.1 in koşullarına ek olarak $E(|\eta_1|^3) < \infty$ olsun. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının 1 ve 2. momentleri sonludur. Ayrıca $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti,

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\left\{E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - \frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))\right\} + A_1, \tag{18}$$

$$E(\overline{X}^2) = \frac{1}{E\big(M_1(\zeta_1)\big)}\left\{\left[E\big(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\big) - E\big(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\zeta_1)\big)\right]\right.$$

$$\left. +2A_1\left[E((\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\zeta_1)\big)\right]\right\} + A_2, \tag{19}$$

dır. Burada;

$$A_1 = \frac{m_{21}}{2};\quad A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$$

dır (Kesemen, 2006).

Teorem 2.3.2. Teorem 2.2.1 in koşullarına ilaveten $E(|\eta_1|^5) < \infty$ koşulu da sağlandığında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının 3 ve 4. momentleri sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti,

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}^3) = \frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{M}_1(\zeta_1))}\Big\{\Big[\mathrm{E}\big(\zeta_1^3\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \frac{3}{2}\mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + \mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big) -$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_4(\zeta_1)\big)\Big] + \mathrm{A}_1\big[3\mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - 3\mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + \mathrm{E}\big(\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big)\big]$$

$$+3\mathrm{A}_2\left[\mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big)\right]\Big\} + 3\mathrm{A}_3, \tag{20}$$

$$E(\overline{\mathrm{X}}^4) = \frac{1}{\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big)}\big\{\big[\mathrm{E}\big(\zeta_1^4\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - 2\mathrm{E}\big(\zeta_1^3\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + 2\mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big)$$

$$-\mathrm{E}\,\big(\zeta_1\mathrm{M}_4(\zeta_1)\big) + \frac{1}{5}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_5(\zeta_1)\big)\Big]$$

$$+2\mathrm{A}_1\left[2\mathrm{E}\big(\zeta_1^3\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - 3\mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + 2\mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_4(\zeta_1)\big)\right]$$

$$+6\mathrm{A}_2\left[\mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big)\right]$$

$$+6\mathrm{A}_3\big[2\mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \mathrm{E}\big(\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big)\big]\big\} + 3\mathrm{A}_4\,, \tag{21}$$

Burada;

$$\mathrm{A}_3 = \frac{\mathrm{m}_{41}}{12} - \frac{\mathrm{m}_{31}\mathrm{m}_{21}}{3} + \frac{\mathrm{m}_{21}^3}{4} \tag{22}$$

$$\mathrm{A}_4 = \frac{\mathrm{m}_{21}^4}{4} - \frac{\mathrm{m}_{31}\mathrm{m}_{21}^2}{2} + \frac{\mathrm{m}_{41}\mathrm{m}_{21}}{6} + \frac{\mathrm{m}_{31}^2}{9} - \frac{\mathrm{m}_{51}}{30} \tag{23}$$

dır (Kesemen, 2006).

İspat: Teorem 2.3.1. ve Teorem 2.3.2. koşulları altında $\mathrm{S}_{\mathrm{N(z)}}$ sınır fonksiyonelin ilk beş momentleri mevcut ve sonludur (Feller,1971). $\mathrm{S}_{\mathrm{N(z)}}$ ve η_1 rastgele değişkenlerinin karakteristik fonksiyonları için Taylor seri açılımları kullanılarak kesin ifadeleri (18), (19), (20) ve (21) deki gibi elde edilir.

2.4. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti için Asimptotik Açılımlar

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentleri için elde edilen kesin formüller, karmaşık matematiksel yapıda olduklarından pratik problemlerin çözümlenmesinde kullanışlı değillerdir. Bu nedenle, pratikte daha kolay uygulanabilir formüllerin elde edilmesi gerekir. Bu formüller genelde aşağıdaki yöntemlerle elde edilebilir:

1. Özel durumları ele alarak, daha küçük sınıflar için açık ve pratik formüllerin elde edilmesi,
2. Simülasyon yöntemlerin yardımıyla nümerik sonuçların elde edilmesi,
3. Asimptotik yöntemlerin uygulanması ile yaklaşık formüllerin elde edilmesi.

Ayrıca belirtilmelidir ki;

Birinci yöntem ele alınan süreçler sınıfını daraltır. Dolayısıyla hem teorik, hem de pratik yönden önemli olan birçok problemlerin çözümünde araştırmacıya yardımcı olamaz. İkinci yöntem, sayısal veriler talep ettiği için ve sonuçları sayısal biçimde ortaya koyduğu için somut bir problemin çözümünde faydalı olsa da genelleme yapılmasına imkan sağlamaz. Üçüncü yöntem olan asimptotik yaklaşım, son yıllarda matematiğin bir çok alanında olduğu gibi olasılık teorisinde de büyük ilgi görmektedir. Çünkü bu yöntemin yardımıyla elde edilen sonuçlar, yaklaşık formüller olmalarına rağmen çoğu zaman da bilginin büyük kısmını içermekte, diğer taraftan ise araştırmacıların kolaylıkla kullanabilecekleri sadeliğe sahip olmakta ve çoğu zaman ele alınan süreçler sınıfını daraltmayan ve dolayısıyla, büyük sınıflar için genel kuralların elde edilmesine imkan sağlamaktadır.

Bu nedenlerden dolayı, bu çalışmada ele alınan $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Bu incelemeyi yapabilmek için basamak değişkenlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, hatırlatma amacıyla, basamak değişkenlerin tanımı ve onlarla ilgili birçok ilginç özellikler aşağıda verilecektir. Öncelikle, $\{\eta_n\}, n \geq 1$, rasgele değişkenler dizisinin yardımıyla aşağıdaki rasgele yürüyüş sürecini tanımlansın:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, , n \geq 1, \ \ S_0 = 0 \tag{24}$$

ve bu sürecin basamak değişkenlerini aşağıdaki gibi verilsin:

$$v_1^+ = \min\{\, n \geq 1, \ \ S_n > 0\}, \tag{25}$$

$$v_{n+1}^+ = \inf\{k \geq 1 \colon S_{v_{n+k}} > S_{v_n}\}, n \geq 1 \tag{26}$$

$$\chi_{n+1}^+ = S_{\sum_{i=1}^{n+1} v_i} - \sum_{i=1}^{n} \chi_i \tag{27}$$

her $n \geq 1$ için;

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i, \tag{28}$$

tam değerli rasgele değişkenlerine n. (yukarı) basamak anı;

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \tag{29}$$

pozitif değerli rasgele değişkenine ise n.(yukarı) basamak yüksekliği denir.

Ayrıca, $n \geq 1$ için (v_n^+, χ_n^+) ler bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi oluşturduğu bilinmektedir (Feller, 1971).

(v_n^+, χ_n^+) çiftine ise (yukarı) basamak değişkenleri denir. Basamak değişkenleri, özellikle birinci basamak anı (v_1^+) ve birinci basamak yüksekliği (χ_1^+) rasgele yürüyüş sürecinin incelenmesinde önemli rol oynamaktadır.

N(z) sınır fonksiyonelini basamak değişkenleri yardımıyla ifade edebilmek için H(z) yenileme süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$H(z) = \min\left\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \geq z\right\}, z \geq 0. \tag{30}$$

Kolayca görmek mümkündür ki, her $z > 0$ için H(z) süreci, $\{\chi_n^+\}$, $n \geq 1$, dizisinin oluşturduğu bir yenileme sürecidir. Diğer taraftan N(z) nın tanımına göre,

$$N(z) = \sum_{i=1}^{H(z)} v_i^+$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda, N(z) süreci ödüllü yenileme süreci olur. Bu sürecin olasılık karakteristikleri literatürde iyi bilinmektedir (Brown, 1975). Bunların yardımıyla $S_{N(z)}$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(X)} \chi_i^+ \tag{31}$$

Bu bilgiler dikkate alınarak aşağıdaki yardımcı teorem verilebilir:

Yardımcı Teorem 2.4.1. χ_1^+ rastgele değişkenin ilk üç momenti mevcut ve sonlu olduğu taktirde $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E\big(M_1(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1) + \frac{\mu_{21}}{2} + o(\gamma) \tag{32}$$

$$E\left(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\right) = E(\zeta_1^2) + \frac{\mu_{21}}{2} E(\zeta_1) + o(1) \tag{33}$$

$$E\big(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^3) + \frac{1}{2}\mu_{21} E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{34}$$

$$E\big(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^4) + \frac{\mu_{21}}{2} E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \tag{35}$$

$$E\big(\zeta_1^4 M_1(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^5) + \frac{\mu_{21}}{2}\, E(\zeta_1^4) + o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) \tag{36}$$

$$E\big(M_2(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^2) + \mu_{21} E(\zeta_1) + \frac{\mu_{31}}{3} + o(1) \tag{37}$$

$$E\big(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^3) + \mu_{21} E(\zeta_1^2) + \frac{\mu_{31}}{3} E(\zeta_1) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{38}$$

$$E\big(\zeta_1^3 M_2(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^5) + \mu_{21}\, E(\zeta_1^4) + \frac{\mu_{31}}{3} E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) \tag{39}$$

$$E\big(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^4) + \mu_{21} E(\zeta_1^3) + \frac{\mu_{31}}{3} E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \tag{40}$$

$$E\big(M_3(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^3) + \frac{3\mu_{21}}{2} E(\zeta_1^2) + \mu_{31} E(\zeta_1) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{41}$$

$$E\big(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^4) + \frac{3\mu_{21}}{2}\, E(\zeta_1^3) + \mu_{31} E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \tag{42}$$

$$E\big(\zeta_1^2 M_3(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^5) + \frac{3\mu_{21}}{2}\, E(\zeta_1^4) + \mu_{31} E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) \tag{43}$$

$$E\big(M_4(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^4) + 2\mu_{21} E(\zeta_1^3) + 2\mu_{31}\, E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \tag{44}$$

$$E\big(\zeta\_1 M_4(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^5) + 2\mu_{21} E(\zeta_1^4) + 2\mu_{31} E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) \tag{45}$$

$$E\big(M_5(\zeta_1)\big) = E(\zeta_1^5) + \frac{5\mu_{21}}{2} E(\zeta_1^4) + \frac{10\mu_{31}}{3} E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) \tag{46}$$

Burada;

$$\mu_k = E(\chi^+)^k;\ \mu_k = \frac{\mu_k}{k\mu_1}; M_k(x) = E\big(S_{N(x)}^k\big); k = \overline{1,5}$$

dır (Mammadova, 2011).

Yardımcı Teorem 2.4.2: Sınırlı, ölçülebilir , $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olan her $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $u \epsilon [s, S]$ için aşağıdaki limit sağlanır (Khaniyev vd., 2011).

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int_u^S g(z)f(z; s, S, \alpha, \beta)dz = 0 \tag{47}$$

Burada, $\gamma = \frac{S-s}{2}$ dır.

İspat: (47) eşitliğindeki integralde bulunan $f(z; s, S, \alpha, \beta)$ genelleştirilmiş beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu hakkında bilgi verilsin. Öncelikle; genelleştirilmiş beta rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu:

$$\pi(z) = P\{\zeta_n \leq z\} = \int_s^z f(z; s, S, \alpha, \beta)dx, \tag{48}$$

$$\pi(z) = C_{2\gamma} \int_s^z (x - s)^{\alpha-1}(S - x)^{\beta-1}dx\,, \tag{49}$$

$$C_{2\gamma} = \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta)} \quad ; \; 0 \leq s \leq z \leq S < \infty \; ; \alpha, \beta > 0\,. \tag{50}$$

O halde bu bilgilerden yararlanarak genelleştirilmiş beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$f(z; s, S, \alpha, \beta) = \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta)}(z - s)^{\alpha-1}(S - z)^{\beta-1} \tag{51}$$

Şimdi,

$$I = \int_u^S g(z)f(z; s, S, \alpha, \beta)dz \tag{52}$$

integraline,

$$t = \frac{z - s}{2\gamma}$$

dönüşümünü uygulansın. Sınırlar $z = u$ için $t = \frac{u-s}{2\gamma}$ ve $z = S$ için $t = 1$ olarak bulunur.

$$z = 2\gamma t + s$$

olup,

$$dz = 2\gamma dt$$

dir.

Bunlar, I integralinde yani (52) eşitliğinde yerlerine yazılırsa:

$$\mathrm{I} = \frac{(2\gamma)^{-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_{\frac{u-s}{2\gamma}}^{1} g(2\gamma t + s) \left(\frac{z-s}{2\gamma}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{S-z}{2\gamma}\right)^{\beta-1} 2\gamma dt$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_{\frac{u-s}{2\gamma}}^{1} g(2\gamma t + s)(t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \tag{53}$$

elde edilir. Amaç, her $\varepsilon > 0$ ve $\gamma \to \infty$ için $|\mathrm{I}| \leq \varepsilon$ olduğunu göstermektir. Çünkü böylece;

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int_{u}^{S} g(z) f(z; s, S, \alpha, \beta) dz = 0 \tag{54}$$

olup ispat tamamlanır. Bunun için başta elde edilen bilgilerden de yararlanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazılabilir:

$$\left| \int_{u}^{S} g(z) f(z; s, S, \alpha, \beta) dz \right| \leq \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_{\frac{u-s}{2\gamma}}^{1} g(2\gamma t + s)(t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \tag{55}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi, sabitlenmiş, pozitif bir sayı, K bir takım işlemlerden sonra, sonradan belirlenebilecek olan sabitlenmiş bir tam sayı ve

$$\delta(\varepsilon) = \sup\left\{\delta > 0 : \int_{0}^{\delta} (t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \leq \frac{\varepsilon}{K}\right\} > 0 \tag{56}$$

olmak üzere;

$$\mathrm{I}_1(\varepsilon) := \int_{0}^{\delta(\varepsilon)} |g(2\gamma t + s)|\, (t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \tag{57}$$

$$\mathrm{I}_2(\varepsilon) := \int_{\delta(\varepsilon)}^{1} g(2\gamma t + s)(t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt \tag{58}$$

şeklinde tanımlanırsa (55) eşitsizliği,

$$\left| \int_{u}^{S} g(z) f(z; s, S, \alpha, \beta) dz \right| \leq \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} [\mathrm{I}_1(\varepsilon) + \mathrm{I}_2(\varepsilon)] \tag{59}$$

şeklini alır. Diğer taraftan,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

olduğundan, γ parametresini öyle büyük seçilebilir ki,

$$z(\varepsilon) = \inf\left\{z > 0 : \sup_{u\geq z}|g(u)| \leq \frac{\varepsilon}{K}\right\} \tag{60}$$

olur. Ayrıca g sınırlı fonksiyon olarak verildiğinden en az bir M pozitif sayısı mevcuttur öyleki $\sup_{x\geq 0}|g(x)| \equiv M < \infty$ sağlanır. Böylece, (57) ve (58) denklemlerini göz önüne alınırsa;

$$I_1(\varepsilon) \leq M\frac{\varepsilon}{K} \tag{61}$$

ve

$$I_2(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{K}\int_{\delta(\varepsilon)}^{1}(t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{K}\int_{0}^{1}(t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{K}B(\alpha,\beta)$$

$$I_2(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{K}B(\alpha,\beta) \tag{62}$$

olur. (61) ve (62) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp (59) da yerine yazılırsa;

$$\left|\int_u^S g(z)f(z;s,S,\alpha,\beta)dz\right| \leq \frac{\varepsilon}{K}\left(\frac{M}{B(\alpha,\beta)}+1\right) \tag{63}$$

elde edilir.

$$K \equiv \frac{M}{B(\alpha,\beta)} + 2 \tag{64}$$

seçilirse;

$$\frac{M + B(\alpha,\beta)}{KB(\alpha,\beta)} \leq 1 \tag{65}$$

olacağından, seçilen (64)' te seçilen K sabiti (63)' te yerine yazılırsa, seçilen keyfi $\varepsilon > 0$ ve $\gamma \to \infty$ için;

$$\left|\int_u^S g(z)f(z;s,S,\alpha,\beta)dz\right| \leq \varepsilon \tag{66}$$

doğru olacağından her $\varepsilon > 0$ ve $\gamma \to \infty$ için de (66) sağlanır. Böylece,

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int_u^S g(z) f(z; s, S, \alpha, \beta) dz = 0 \tag{67}$$

olur ki, bu da ispatı tamamlar (Khaniyev vd., 2011).

Sonuç 2.1.5.1: g(x) fonksiyonu, Yardımcı Teorem 2.4.2 deki gibi tanımlansın ve $R_n(x)$ fonksiyonu $R_n(x) = x^n g(x),\ \ n = -1,0,1,2, ...$ olsun. Her $\alpha > 0$ ve $\gamma \to \infty$ iken, aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\int_0^\infty R_n\left(\frac{\gamma}{t^{1/\alpha}}\right) dt = o\left(\frac{\gamma^n}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \tag{68}$$

Teorem 2.4.1: $\{\xi_1, \zeta_1, \eta_1\}$ rastgele değişkenler dizisi aşağıdaki ek koşulları da sağlasın.

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 aritmetik olmayan rastgele değişken,

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, S) aralığında (s, S, α, β) parametreli genelleştirilmiş beta dağılımına sahip olsun.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için $\gamma = \frac{S-s}{2}$ $ve\ \gamma \to \infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$\overline{X}(t) = X(t) - s \tag{69}$$

$$E(\overline{X}) = C_{21}(\alpha,\beta)\gamma + B_{11}(\alpha,\beta) + B_{12}(\alpha,\beta)\frac{1}{\gamma} + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{70}$$

$$E(\overline{X}^2) = C_{31}(\alpha,\beta)\gamma^2 + B_{21}(\alpha,\beta)\gamma + B_{22}(\alpha,\beta) + o(1) \tag{71}$$

$$E(\overline{X}^3) = C_{41}(\alpha,\beta)\gamma^3 + B_{31}(\alpha,\beta)\gamma^2 + B_{32}(\alpha,\beta)\gamma + o(\gamma) \tag{72}$$

$$E(\overline{X}^4) = C_{51}(\alpha,\beta)\gamma^4 + B_{41}(\alpha,\beta)\gamma^3 + B_{42}(\alpha,\beta)\gamma^2 + o(\gamma^2) \tag{73}$$

Burada;

$$E(\zeta_1^k) = C_k(\alpha,\beta)\gamma^k \qquad k = \overline{1,5} \tag{74}$$

$$C_k(\alpha,\beta) = \frac{2^k\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)\Gamma(\alpha)} \ \ ;\ \ k = \overline{1,5} \tag{75}$$

$$C_{k1}(\alpha,\beta)=\frac{C_k(\alpha,\beta)}{kC_1(\alpha,\beta)}\quad;\ k=\overline{1,5} \tag{76}$$

$$B_{11}(\alpha,\beta)=\frac{m_{21}}{2}-\frac{\mu_{21}C_{21}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)} \tag{77}$$

$$B_{12}(\alpha,\beta)=\frac{1}{2C_1(\alpha,\beta)}\left(\frac{\mu_{21}^2C_{21}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)}-\frac{\mu_{31}}{3}\right) \tag{78}$$

$$B_{21}(\alpha,\beta)=m_{21}C_{21}(\alpha,\beta)-\frac{\mu_{21}C_{31}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)} \tag{79}$$

$$B_{22}(\alpha,\beta)=\frac{\mu_{21}^2C_{31}(\alpha,\beta)}{4C_1^2(\alpha,\beta)}-\frac{\mu_{21}m_{21}C_{21}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)}+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6} \tag{80}$$

$$B_{31}(\alpha,\beta)=\frac{3m_{21}C_{31}(\alpha,\beta)}{2}-\frac{\mu_{21}C_{41}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)} \tag{81}$$

$$B_{32}(\alpha,\beta)=\frac{C_{21}(\alpha,\beta)}{2}(3m_{21}^2-2m_{31})+\frac{\mu_{21}^2C_{41}(\alpha,\beta)}{4C_1^2(\alpha,\beta)}-\frac{3\mu_{21}m_{21}C_{31}(\alpha,\beta)}{4C_1(\alpha,\beta)} \tag{82}$$

$$B_{41}(\alpha,\beta)=6C_{41}(\alpha,\beta)(m_{21}-\mu_{21})-\frac{\mu_{21}C_{51}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)} \tag{83}$$

$$B_{42}(\alpha,\beta)=3C_{31}(\alpha,\beta)\left(2m_{21}\mu_{21}-\mu_{31}+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{3}\right)$$

$$+\frac{\mu_{21}^2C_{51}(\alpha,\beta)}{4C_1^2(\alpha,\beta)}-\frac{3\mu_{21}C_{41}(\alpha,\beta)(m_{21}-\mu_{21})}{C_1(\alpha,\beta)} \tag{84}$$

Burada

$$\mu_k=E\left(\chi_1^k\right)\quad;\ \mu_{k1}=\frac{\mu_k}{k\mu_1}\quad;\ k=\overline{1,3}$$

$$m_k=E\left(\eta_1^k\right)\quad;\ m_{k1}=\frac{m_k}{km_1}\quad;k=\overline{1,3}$$

dır.

İspat: Öncelikle, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilsin. Ayrıca Teorem 2.3.1 de $E(\overline{X})$ için kesin formül aşağıdaki gibi elde edilmişti:

$$E(\overline{X})=\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\left\{E(\zeta_1M_1(\zeta_1))-\frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))\right\}+A_1 \tag{85}$$

Burada:

$$J(\gamma) = E(\zeta_1 M_1(\zeta_1)) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\zeta_1)\big) \tag{86}$$

olarak seçilsin. Ayrıca,

$$A_1 = \frac{m_{21}}{2}; \quad A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$$

dır.

Yardımcı Teorem 2.4.1 deki (33) ve (37) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (86) da yerine yazılırsa:

$$J(\gamma) = E(\zeta_1^2) + \frac{1}{2}\mu_{21}E(\zeta_1) + o(1) - \frac{1}{2}E(\zeta_1^2) - \frac{1}{2}\mu_{21}E(\zeta_1) - \frac{1}{6}\mu_{31} + o(1) \tag{87}$$

$$J(\gamma) = \frac{1}{2}\,E(\zeta_1^2) - \frac{1}{6}\mu_{31} + o(1)$$

(74) ifadesi (87) eşitliklerinde yerine yazılırsa;

$$J(\gamma) = \frac{C_2(\alpha,\beta)}{2}\gamma^2 - \frac{\mu_{31}}{6} + o(1)$$

$$= C_2(\alpha,\beta)\gamma^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_{31}}{6C_2(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2} + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \tag{88}$$

$$D(\gamma) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} \tag{89}$$

$$D(\gamma) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} = \frac{1}{E(\zeta_1) + \frac{1}{2}\mu_{21} + o(\gamma)} = \frac{1}{\left[C_1(\alpha)\gamma + \frac{1}{2}\mu_{21} + o(\gamma)\right]}$$

$$= \frac{1}{C_1(\alpha,\beta)\gamma\left[1 + \frac{1}{2}\mu_{21}\frac{1}{C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + o(\frac{1}{\gamma})\right]}$$

$$= \frac{1}{C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\mu_{21}}{C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + o(\frac{1}{\gamma})\right]} \tag{90}$$

$$D(\gamma) = \frac{1}{C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma}\left[1 - \frac{\mu_{21}}{2C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + \left(\frac{\mu_{21}}{2C_1(\alpha,\beta)}\right)^2\frac{1}{\gamma^2} + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \tag{91}$$

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}) = \mathrm{D}(\gamma)\mathrm{J}(\gamma) + \frac{1}{2}\mathrm{m}_{21}$$

$$= \frac{\mathrm{C}_2(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)}\gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{\mu_{21}}{\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{8}\frac{\mu_{21}^2}{\mathrm{C}_1^2(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{6}\frac{\mu_{31}}{\mathrm{C}_2(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{12}\frac{\mu_{21}\mu_{31}}{\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)\mathrm{C}_2(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^3}\right.$$
$$\left. + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\gamma^3}\right)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{m}_{21}$$

$$= \frac{\mathrm{c}_2(\alpha,\beta)}{\mathrm{c}_1(\alpha,\beta)}\gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{\mu_{21}}{\mathrm{c}_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + \left(\frac{1}{8}\frac{\mu_{21}^2}{\mathrm{c}_1^2(\alpha,\beta)} - \frac{1}{6}\frac{\mu_{31}}{\mathrm{c}_2(\alpha,\beta)}\right)\frac{1}{\gamma^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{m}_{21} \tag{92}$$

$$= \frac{\mathrm{c}_2(\alpha,\beta)}{2\mathrm{c}_1(\alpha,\beta)}\gamma + \frac{1}{2}\left[\mathrm{m}_{21} - \frac{\mathrm{c}_2(\alpha,\beta)\mu_{21}}{2\mathrm{c}_1^2(\alpha,\beta)}\right] + \left(\frac{1}{8}\frac{\mathrm{c}_2(\alpha,\beta)\mu_{21}^2}{\mathrm{c}_1^3(\alpha,\beta)} - \frac{1}{6}\frac{\mathrm{c}_2(\alpha,\beta)\mu_{31}}{\mathrm{c}_2(\alpha,\beta)\mathrm{c}_1(\alpha,\beta)}\right)\frac{1}{\gamma} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$C_k(\alpha,\beta) = \frac{2^{\mathrm{k}}\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)\Gamma(\alpha)} \quad ; \quad k = \overline{1,5}$$

olduğu hatırlanırsa;

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\gamma + \left(\frac{\mathrm{m}_{21}}{2} - \frac{1}{4}\frac{(\alpha+1)(\alpha+\beta)\mu_{21}}{(\alpha)(\alpha+\beta+1)}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{16}\frac{(\alpha+1)(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2(\alpha+\beta+1)}\mu_{21}^2 - \frac{1}{12}\frac{\mu_{31}(\alpha+\beta)}{\alpha}\right)\frac{1}{\gamma} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{93}$$

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}) = \mathrm{C}_{21}(\alpha,\beta)\gamma + \mathrm{B}_{11}(\alpha,\beta) + \mathrm{B}_{12}(\alpha,\beta)\frac{1}{\gamma} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

olur. Şimdi de, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti için $\gamma \longrightarrow \infty$, asimptotik açılımlar elde edilsin. Ayrıca, Teorem 2.3.1 de $\mathrm{E}(\bar{X}^2)$ için kesin formül aşağıdaki gibi elde edilmişti:

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}^2) = \frac{1}{\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big)}\left\{\left[\mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big)\right] + \right.$$
$$\left. +2\mathrm{A}_1\left[\mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big)\right]\right\} + \mathrm{A}_2 \tag{94}$$

$$\mathrm{J}_1(\gamma) = \mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big) \tag{95}$$

Yardımcı Teorem 2.4.1' deki (34), (38) ve (41) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (95) yerine yazılırsa,

$$J_1(\gamma) = E(\zeta_1^3) + \frac{1}{2}\mu_{21}E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) - E(\zeta_1^3) - \mu_{21}E(\zeta_1^2) - \frac{1}{3}\mu_{31}E(\zeta_1)$$

$$+o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \;+\frac{1}{3}E(\zeta_1^3) + \frac{1}{2}\mu_{21}E(\zeta_1^2) + \frac{1}{3}\mu_{31}E(\zeta_1) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{96}$$

$$J_1(\gamma) = \frac{1}{3}E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{97}$$

$$J_2(\gamma) = m_{21}\left[E\big(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\zeta_1)\big)\right] \tag{98}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.4.1 deki (33) ve (37) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (98) yerine yazılırsa;

$$J_2(\gamma) = m_{21}\left[E\big(\zeta_1^2\big) + \frac{\mu_{21}}{2}E\big(\zeta_1\big) - \frac{E\big(\zeta_1^2\big)}{2} - \frac{\mu_{21}E\big(\zeta_1\big)}{2} - \frac{\mu_{31}}{6}\right] \tag{99}$$

$$J_2(\gamma) = \left[\frac{m_{21}E\big(\zeta_1^2\big)}{2} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6}\right]$$

$$J'(\gamma) = J_1(\gamma) + J_2(\gamma) \tag{100}$$

$$J'(\gamma) = \frac{1}{3}E\big(\zeta_1^3\big) + \frac{m_{21}E\big(\zeta_1^2\big)}{2} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6} + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{101}$$

$$E\big(\zeta_1^3\big) = \frac{8\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\gamma^3 = C_3(\alpha,\beta)\gamma^3$$

ve

$$E(\zeta_1^2) = \frac{4\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\gamma^2 = C_2(\alpha,\beta)\gamma^2$$

eşitlikleri (101)'de yerine yazılırsa;

$$J'(\gamma) = \frac{c_3(\alpha,\beta)\gamma^3}{3} + \frac{m_{21}c_2(\alpha,\beta)\gamma^2}{2} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6} + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) \tag{102}$$

$$= c_3(\alpha,\beta)\gamma^3\left[\frac{1}{3} + \frac{m_{21}c_2(\alpha,\beta)}{2c_3(\alpha,\beta)\gamma} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6c_3(\alpha,\beta)\gamma^3} + o\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right]$$

$$E(\overline{X}^2) = J'(\gamma)D(\gamma) + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} \tag{103}$$

(102) ve (91) eşitlikleri (103)'de yerine yazılıp düzenleme yapılırsa;

$$E(\overline{X}^2)=\frac{c_3(\alpha,\beta)\gamma^2}{c_1(\alpha,\beta)}\left[\frac{1}{3}+\frac{m_{21}c_2(\alpha,\beta)}{2c_3(\alpha,\beta)\gamma}-\frac{\mu_{21}}{6c_1(\alpha,\beta)\gamma}-\frac{m_{21}\mu_{21}c_2(\alpha,\beta)}{4c_3(\alpha,\beta)c_1(\alpha,\beta)\gamma^2}+\frac{\mu_{21}^2}{12c_1^2(\alpha,\beta)\gamma^2}+o(\frac{1}{\gamma^2})\right]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$$

$$=\frac{c_3(\alpha,\beta)\gamma^2}{c_1(\alpha,\beta)}\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{m_{21}c_2(\alpha,\beta)}{2c_3(\alpha,\beta)}-\frac{\mu_{21}}{6c_1(\alpha,\beta)}\right)\left(\frac{1}{\gamma}\right)+\left(\frac{\mu_{21}^2}{12c_1^2(\alpha,\beta)}-\frac{m_{21}\mu_{21}c_2(\alpha,\beta)}{4c_3(\alpha,\beta)c_1(\alpha,\beta)}\right)\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)+o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$$

$$=\frac{c_3(\alpha,\beta)\gamma^2}{c_1(\alpha,\beta)}\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{m_{21}c_2(\alpha,\beta)}{2c_3(\alpha,\beta)}-\frac{\mu_{21}}{6c_1(\alpha,\beta)}\right)\left(\frac{1}{\gamma}\right)+\left(\frac{\mu_{21}^2}{12c_1^2(\alpha,\beta)}-\frac{m_{21}\mu_{21}c_2(\alpha,\beta)}{4c_3(\alpha)c_1(\alpha,\beta)}\right)\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)+o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$$

$$E(\overline{X}^2)=\frac{c_3(\alpha,\beta)\gamma^2}{3c_1(\alpha,\beta)}+\left(\frac{m_{21}c_2(\alpha,\beta)}{2c_1(\alpha,\beta)}-\frac{c_3(\alpha,\beta)\mu_{21}}{6c_1^2(\alpha,\beta)}\right)\gamma+\left(\frac{c_3(\alpha,\beta)\mu_{21}^2}{12c_1^3(\alpha,\beta)}-\frac{m_{21}\mu_{21}c_2(\alpha,\beta)}{4c_1^2(\alpha,\beta)}+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}\right)+o(1) \quad (104)$$

$$C_k(\alpha,\beta)=\frac{2^k\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)\Gamma(\alpha)} \quad ; \quad k=\overline{1,5}$$

olduğu hatırlanırsa;

$$E(\overline{X}^2)=\frac{4}{3}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\gamma^2+\left(\frac{m_{21}(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)}-\frac{\mu_{21}}{3}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)\alpha}\right)\gamma+\left(\frac{1}{12}\mu_{21}^2\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)\alpha^2}-\frac{m_{21}\mu_{21}}{2}\frac{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+1)^2(\alpha+\beta+2)}+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}\right)+o(1) \quad (105)$$

$$E(\overline{X}^2)=C_{31}(\alpha,\beta)\gamma^2+B_{21}(\alpha,\beta)\gamma+B_{22}(\alpha,\beta)+o(1)$$

elde edilir.

Teorem 2.4.2: $\{\xi_1, \zeta_1, \eta_1\}$ rastgele değişkenler dizisi aşağıdaki ek koşulları da sağlasın.

1) $0 < E(\xi_1) < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 aritmetik olmayan rastgele değişken,

4) ζ_1 rastgele değişkeni (s, S) aralığında (s, S, α, β), $0 < s < S < \infty$ parametreli genelleştirilmiş beta dağılımına sahip olsun.

Bu takdirde, $\overline{X}(t)$ süreci ergodiktir ve sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için $\gamma = \frac{S-s}{2}$ ve $\gamma \to \infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(\overline{X}^3) = C_{41}(\alpha,\beta)\gamma^3 + B_{31}(\alpha,\beta)\gamma^2 + B_{32}(\alpha,\beta)\gamma + o(\gamma) \tag{106}$$

$$E(\overline{X}^4) = C_{51}(\alpha,\beta)\gamma^4 + B_{41}(\alpha,\beta)\gamma^3 + B_{42}(\alpha,\beta)\gamma^2 + o(\gamma^2) \tag{107}$$

Burada,

$$\overline{X}(t) = X(t) - s$$

$$B_{31}(\alpha,\beta) = \frac{3m_{21}C_{31}(\alpha,\beta)}{2} = -\frac{\mu_{21}C_{41}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)} \tag{108}$$

$$B_{32}(\alpha,\beta) = \frac{C_{21}(\alpha,\beta)}{2}(3m_{21}^2 - 2m_{31}) + \frac{\mu_{21}^2 C_{41}(\alpha,\beta)}{4C_1^2(\alpha,\beta)} - \frac{3\mu_{21}m_{21}C_{31}(\alpha,\beta)}{4C_1(\alpha,\beta)} \tag{109}$$

$$B_{41}(\alpha,\beta) = 6C_{41}(\alpha,\beta)(m_{21} - \mu_{21}) - \frac{\mu_{21}C_{51}(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)} \tag{110}$$

$$B_{42}(\alpha,\beta) = 3C_{31}(\alpha,\beta)\left(2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{3}\right)$$

$$+\frac{\mu_{21}^2 C_{51}(\alpha,\beta)}{4C_1^2(\alpha,\beta)} - \frac{3\mu_{21}C_{41}(\alpha,\beta)(m_{21} - \mu_{21})}{C_1(\alpha,\beta)} \tag{111}$$

dır.

İspat: Öncelikle, $E(\overline{X}^3)$ için ispat verilsin. Teorem 2.3.2' de $E(\overline{X}^3)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$E(\overline{X}^3) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\Bigg\{\left[E\big(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\big) - \frac{3}{2}E\big(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\big) + E\big(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\big) - \frac{1}{4}E\big(M_4(\zeta_1)\big)\right]$$

$$+A_1\left[3E\big(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\big) - 3E\big(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\big) + E\big(M_3(\zeta_1)\big)\right]$$

$$+3A_2\left[E\big(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\zeta_1)\big)\right]\Bigg\} + 3A_3 \tag{112}$$

$$J_3(\gamma) = E\big(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\big) - \frac{3}{2}E\big(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\big) + E\big(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\big) - \frac{1}{4}E\big(M_4(\zeta_1)\big) \tag{113}$$

Yardımcı Teorem 2.4.1 deki (35), (40), (42) ve (44) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (113) de yerine yazılırsa;

$$J_3(\gamma) = E(\zeta_1^4) + \frac{\mu_{21}}{2}E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) - \frac{3}{2}E(\zeta_1^4) - \frac{3\mu_{21}}{2}E(\zeta_1^3) - \frac{\mu_{31}}{2}E(\zeta_1^2)$$

$$+o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) + E(\zeta_1^4) + \frac{3\mu_{21}}{2}\,E(\zeta_1^3) + \mu_{31}E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}E(\zeta_1^4) - \frac{1}{2}\mu_{21}E(\zeta_1^3) - \frac{1}{2}\mu_{31}\,E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$J_3(\alpha) = \frac{1}{4}E(\zeta_1^4) + \ o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) \tag{114}$$

$$J_4(\gamma) = A_1\big[3E\big(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\big) - 3E\big(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\big) + E\big(M_3(\zeta_1)\big)\big] \tag{115}$$

Yardımcı Teorem 2.4.1 deki (34), (38) ve (41) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (115) yerine yazılırsa;

$$J_4(\gamma) = A_1\left[3E(\zeta_1^3) + \frac{3\mu_{21}}{2}E(\zeta_1^2) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) - 3E(\zeta_1^3) - 3\mu_{21}E(\zeta_1^2)\right.$$

$$\left. -\mu_{31}E(\zeta_1) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) + E(\zeta_1^3) + \frac{3\mu_{21}}{2}E(\zeta_1^2) + \mu_{31}E(\zeta_1) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right] \tag{116}$$

$$J_4(\gamma) = A_1 E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$J_5(\gamma) = 3A_2\left[E\big(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_2(\zeta_1)\big)\right] \tag{117}$$

olur. Yardımcı Teorem 2.4.1 deki (33) ve (37) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (117) yerlerine yazılıp düzenlenirse;

$$J_5(\gamma) = 3A_2\left[E(\zeta_1^2) + \frac{\mu_{21}}{2}E(\zeta_1) + o(1) - \frac{1}{2}\,E(\zeta_1^2) - \frac{\mu_{21}}{2}E(\zeta_1) - \frac{\mu_{31}}{6} + o(1)\right]$$

$$= 3A_2\left[\frac{1}{2}\,E(\zeta_1^2) - \frac{\mu_{31}}{6} + o(1)\right]$$

$$J_5(\gamma) = \frac{3A_2}{2}\,E(\zeta_1^2) - \frac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1) \tag{118}$$

$$J''(\gamma) = J_3(\gamma) + J_4(\gamma) + J_5(\gamma) \tag{119}$$

olur. Yukarıda elde edilen (114), (116) ve (118) eşitlikleri (119) da yerlerine yazılırsa;

$$J''(\gamma) = \frac{1}{4}E(\zeta_1^4) + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right) + A_1E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \frac{3A_2}{2}E(\zeta_1^2) - \frac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1)$$

$$J''(\gamma) = \frac{1}{4}E(\zeta_1^4) + A_1E(\zeta_1^3) + \frac{3A_2}{2}E(\zeta_1^2) - \frac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1) \tag{120}$$

şeklini alır.$E(\zeta_1^4) = C_4(\alpha)\gamma^4$ olduğu hatırlanırsa,

$$J''(\gamma) = \frac{C_4(\alpha,\beta)\gamma^4}{4} + A_1C_3(\alpha,\beta)\gamma^3 + \frac{3A_2c_2(\alpha,\beta)\gamma^2}{2} - \frac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1) \tag{121}$$

$$= C_4(\alpha,\beta)\gamma^4\left[\frac{1}{4} + \frac{A_1C_3(\alpha,\beta)}{C_4(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + \frac{3A_2c_2(\alpha,\beta)}{2C_4(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2}\right]$$

$$D(\gamma) = \frac{1}{E\big(M_1(\zeta_1)\big)}$$

$$= \frac{1}{C_1(\alpha,\beta)\gamma}\left[1 - \frac{\mu_{21}}{2C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + \frac{\mu_{21}^2}{4c_1^2(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2} + o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \tag{122}$$

$$E(\overline{X}^3) = J''(\gamma)D(\gamma) + 3A_2 \tag{123}$$

$$E(\overline{X}^3) = \frac{C_4(\alpha,\beta)\gamma^3}{C_1(\alpha,\beta)}\left[\frac{1}{4} - \frac{\mu_{21}}{8C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} + \frac{\mu_{21}^2}{16c_1^2(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2}\right.$$

$$\left. + \frac{m_{21}C_3(\alpha,\beta)}{2C_4(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_3(\alpha,\beta)}{4C_4(\alpha,\beta)C_1(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2} + \frac{3A_2c_2(\alpha,\beta)}{2C_4(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2}\right] \tag{124}$$

$$= \frac{C_4(\alpha,\beta)\gamma^3}{C_1(\alpha,\beta)}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{m_{21}C_3(\alpha,\beta)}{2C_4(\alpha,\beta)} - \frac{\mu_{21}}{8C_1(\alpha,\beta)}\right)\frac{1}{\gamma}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu_{21}^2}{16c_1^2(\alpha,\beta)} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_3(\alpha,\beta)}{4C_4(\alpha,\beta)C_1(\alpha,\beta)} + \frac{3A_2c_2(\alpha,\beta)}{2C_4(\alpha,\beta)}\right)\frac{1}{\gamma^2}\right]$$

$$= \frac{C_4(\alpha,\beta)\gamma^3}{4C_1(\alpha,\beta)} + \left(\frac{m_{21}C_3(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)} - \frac{\mu_{21}C_4(\alpha,\beta)}{8c_1^2(\alpha,\beta)}\right)\gamma^2$$

$$+ \left(\frac{\mu_{21}^2C_4(\alpha,\beta)}{16c_1^3(\alpha,\beta)} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_3(\alpha,\beta)}{4c_1^2(\alpha,\beta)} + \frac{3A_2c_2(\alpha,\beta)}{2C_1(\alpha,\beta)}\right)\gamma + o(\gamma)$$

$$C_k(\alpha,\beta) = \frac{2^k\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)\Gamma(\alpha)}\ ;\ \ k = \overline{1,5}$$

olduğunu hatırlayıp (124) eşitliğinde yerlerine yazılırsa;

$$E(\overline{X}^3) = \frac{2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}\gamma^3$$

$$+\left(\frac{2m_{21}(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)} - \frac{\mu_{21}(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{2(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}\right)\gamma^2$$

$$+\left(\frac{\mu_{21}^2(\alpha+\beta)^2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{8\alpha^2(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} - \frac{m_{21}\mu_{21}(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\alpha+2}{4\alpha(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\right.$$

$$\left.+\frac{3A_2(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)}\right)\gamma + o(\gamma) \tag{125}$$

$$E(\overline{X}^3) = C_{41}(\alpha,\beta)\gamma^3 + B_{31}(\alpha,\beta)\gamma^2 + B_{32}(\alpha,\beta)\gamma + o(\gamma)$$

olur. $E(\overline{X}^4)$ için asimptotik ifade elde etmek için Teorem 2.3.2 de $E(\overline{X}^4)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmişti:

$$E(\overline{X}^4) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\Big\{E\big(\zeta_1^4 M_1(\zeta_1)\big) - 2E\big(\zeta_1^3 M_2(\zeta_1)\big) + 2E\big(\zeta_1^2 M_3(\zeta_1)\big) - E\big(\zeta_1 M_4(\zeta_1)\big)$$

$$+\frac{1}{5}E\big(M_5(\zeta_1)\big) + 2A_1\left[2E\big(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\big) - 3E\big(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\big) + 2E\big(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_4(\zeta_1)\big)\right]$$

$$+6A_2\left[E\big(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\big) - E\big(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}E\big(M_3(\zeta_1)\big)\right]$$

$$+6A_3\big[2E\big(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\big) - E\big(M_2(\zeta_1)\big)\big]\Big\} + 3A_4 \tag{126}$$

$$J_8(\gamma) = E\big(\zeta_1^4 M_1(\zeta_1)\big) - 2E\big(\zeta_1^3 M_2(\zeta_1)\big) + 2E\big(\zeta_1^2 M_3(\zeta_1)\big)$$

$$-E\big(\zeta_1 M_4(\zeta_1)\big) + \frac{1}{5}E\big(M_5(\zeta_1)\big) \tag{127}$$

Yardımcı Teorem 2.4.1'deki (36), (40), (43), (45) ve (46) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (127)' de yerine yazılıp düzenlenirse;

$$J_8(\gamma) = \frac{1}{5}E(\zeta_1^5) - \frac{3\mu_{21}}{2}E(\zeta_1^4) - \mu_{31}E(\zeta_1^3) + o\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) \tag{128}$$

elde edilir.

$$J_9(\gamma) = 2A_1\left[2E\big(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\big) - 3E\big(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\big) + 2E\big(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\big) - \frac{1}{2}E\big(M_4(\zeta_1)\big)\right] \tag{129}$$

Yardımcı Teorem 2.4.1 deki (35), (39), (42) ve (44) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (129) de yerine yazılıp düzenlenirse;

$$\mathrm{J}_9(\gamma) = 2\mathrm{A}_1\left[\frac{3}{2}\mathrm{E}(\zeta_1^4) + 2\mu_{21}\,\mathrm{E}(\zeta_1^3) + 2\mu_{31}\mathrm{E}(\zeta_1^2)\right] \tag{130}$$

elde edilir.

$$\mathrm{J}_{10}(\gamma) = 6\mathrm{A}_2\left[\mathrm{E}\big(\zeta_1^2\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big) + \frac{1}{3}\mathrm{E}\big(\mathrm{M}_3(\zeta_1)\big)\right] \tag{131}$$

Yardımcı Teorem 2.4.1 deki (34), (38) ve (41) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (131) yerine yazılırsa;

$$\mathrm{J}_{10}(\gamma) = 2\mathrm{A}_2\mathrm{E}(\zeta_1^3) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\gamma^3}\right) \tag{132}$$

elde edilir.

$$\mathrm{J}_{11}(\gamma) = 6\mathrm{A}_3\big[2\mathrm{E}\big(\zeta_1\mathrm{M}_1(\zeta_1)\big) - \mathrm{E}\big(\mathrm{M}_2(\zeta_1)\big)\big] \tag{133}$$

Yardımcı Teorem 2.4.1'deki (33) ve (37) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte yani (133) te yerine yazılırsa;

$$\mathrm{J}_{11}(\gamma) = 6\mathrm{A}_3\left[\mathrm{E}(\zeta_1^2) - \frac{\mu_{31}}{3}\right] \tag{134}$$

elde edilir.

$$\mathrm{J}'''(\gamma) = \mathrm{J}_8(\gamma) + \mathrm{J}_9(\gamma) + \mathrm{J}_{10}(\gamma) + \mathrm{J}_{11}(\gamma) \tag{135}$$

Yukarıda elde edilen (128), (130), (132) ve (134) eşitlikleri (135)' de yazılırsa;

$$\mathrm{J}'''(\gamma) = \frac{1}{5}\mathrm{E}(\zeta_1^5) + \left(\frac{3\mathrm{m}_{21}}{2} - \frac{3\mu_{21}}{2}\right)\mathrm{E}(\zeta_1^4) + (2\mathrm{m}_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2\mathrm{A}_2)\mathrm{E}(\zeta_1^3)$$

$$+(6\mathrm{A}_3 + 2\mathrm{m}_{21}\mu_{31})\,\mathrm{E}(\zeta_1^2) \tag{136}$$

elde edilir. Diğer yandan;

$\mathrm{E}(\zeta_1^4) = \mathrm{C}_4(\alpha,\beta)\gamma^4$ ve $\mathrm{E}(\zeta_1^5) = \mathrm{C}_5(\alpha,\beta)\gamma^5$

olduğu hatırlanırsa;

$$\mathrm{J}'''(\gamma) = \mathrm{C}_5(\alpha,\beta)\gamma^5\left\{\frac{1}{5} + \left(\frac{3}{2}\mathrm{m}_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)\frac{\mathrm{C}_4(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_5(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma}\right.$$

$$\left.+(2\mathrm{m}_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2\mathrm{A}_2)\frac{\mathrm{C}_3(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_5(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^2} + (6\mathrm{A}_3 + 2\mathrm{m}_{21}\mu_{21})\frac{\mathrm{C}_2(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_5(\alpha,\beta)}\frac{1}{\gamma^3}\right\} \tag{137}$$

$$\mathrm{D}(\gamma)=\frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{M}_1(\zeta_1))}=\frac{1}{\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)\gamma}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)\gamma}+\frac{\mu_{21}^2}{4c_1^2(\alpha,\beta)\gamma^2}+o\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)\right] \qquad (138)$$

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}^4)=\mathrm{J}'''(\gamma)\mathrm{D}(\gamma)$$

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}^4)=\frac{1}{5}\frac{\mathrm{C}_5(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)}\gamma^4+\left(\left(\frac{3}{2}\mathrm{m}_{21}-\frac{3}{2}\mu_{21}\right)\frac{\mathrm{C}_4(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)}-\frac{1}{10}\mu_{21}\frac{\mathrm{C}_5(\alpha,\beta)}{C_1^2(\alpha,\beta)}\right)\gamma^3$$

$$+\left(\frac{1}{20}\mu_{21}^2\frac{\mathrm{C}_5(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_1^3(\alpha,\beta)}+(2\mathrm{m}_{21}\mu_{21}-\mu_{31}+2\mathrm{A}_2)\frac{\mathrm{C}_3(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_1(\alpha,\beta)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\mathrm{m}_{21}-\frac{3}{2}\mu_{21}\right)\mu_{21}\frac{\mathrm{C}_4(\alpha,\beta)}{\mathrm{C}_1^2(\alpha,\beta)}\right)\gamma^2+o(\gamma^2) \qquad (139)$$

$$C_k(\alpha,\beta)=\frac{2^k\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)\Gamma(\alpha)} \quad ; \quad k=\overline{1,5}$$

olduğu hatırlanırsa;

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}^4)=\left[\frac{16}{5}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)}\right]\gamma^4$$

$$+\left[\frac{12(\mathrm{m}_{21}-\mu_{21})(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}\right.$$

$$\left.-\frac{4}{5}\mu_{21}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{\alpha(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)}\right]\gamma^3$$

$$+\left[\frac{\mu_{21}^2(\alpha+\beta)^2(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5\alpha^2(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)}\right.$$

$$+\frac{4(2\mathrm{m}_{21}\mu_{21}-\mathrm{m}_{31}+2\mathrm{A}_2)(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}$$

$$\left.+\frac{3(\mathrm{m}_{21}-\mu_{21})\mu_{21}(\alpha+\beta)(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\alpha(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}\right]\gamma^2+o(\gamma^2) \qquad (140)$$

Yukarıda, $\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{t})$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu momentlerden yararlanarak $\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{t})$ sürecinin ergodik dağılımının birçok karakteristiklerini hesaplamak mümkündür. Bu karakteristikler içerisinden hem teorik hem pratik açıdan önemli olanlardan ikisi asimetri (çarpıklık) ve basıklık katsayılarıdır. Aşağıda bu karakteristiklerle ilgili asimptotik açılımlar elde edilmiştir:

$$\gamma_3 = \frac{E(\overline{X} - a)^3}{\sigma^3}$$

$$\gamma_4 = \frac{E(\overline{X} - a)^4}{\sigma^4}$$

Burada, $\sigma^2 = Var(\overline{X})$; $a = E(\overline{X})$ dır.

Sonuç 2.4.2: Teorem 2.4.2' nin koşulları altında $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının asimetri ve basıklık katsayıları için $\gamma \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılımlar, sırasıyla yazılabilir:

$$\gamma_3 = \frac{E\left(\overline{X} - E(\overline{X})\right)^3}{\sigma^3} = \frac{C_{41} - 3C_{31}C_{21} + 2C_{21}^3}{(C_{31} - C_{21}^2)\sqrt{C_{31} - C_{21}^2}} + O(\gamma)$$

$$\gamma_4 = \frac{E(\overline{X} - a)^4}{\sigma^4}$$

$$= \frac{C_{51}(\alpha) + 6C_{31}(\alpha)C_{21}^2(\alpha) - 4C_{21}(\alpha)C_{41}(\alpha) - 3C_{21}^4(\alpha)}{\left(C_{31}(\alpha) - C_{21}^2(\alpha)\right)^2} - 3 + O(\gamma)$$

Bu bölümde, (93), (105), (125), (140) açılımlarındaki ilk üç terimi kullanılarak, sürecin n=1,2,3,4 ergodik momenti için yaklaşık ifadeler oluşturulacaktır. Oluşturulan bu ifadelere ergodik momentler için asimptotik değerler denilecektir. Bu değerler sembolik olarak $\widetilde{E}(\overline{X}^n)$ ile gösterilecektir. Benzer şekilde, $\widehat{E}(\overline{X}^n)$ ile n. ergodik moment için Monte Carlo benzetim yöntemini kullanarak elde edilen simülasyon değerleri gösterilecektir. Ayrıca, her bir simülasyon değeri $n = 10^8$ realizasyonu (izi) üretilerek elde edilmiştir. Bu değerlerden aşağıdaki tablolar ilk dört ergodik momentleri için oluşturulmuştur. Bununla birlikte, Δ_n, δ_n, AP_n notasyonları ile sırasıyla mutlak hatalar, nispi hatalar ve uyum yüzdeleri gösterilmiştir. Yani ;

$$\Delta_n = \left|\widetilde{E}(\overline{X}^n) - \widehat{E}(\overline{X}^n)\right|; \quad \delta_n = \frac{\Delta_n}{\widehat{E}(\overline{X}^n)} 100\% \, ; \quad AP_n = (100 - \delta_n)\%$$

dir. γ parametresinin çeşitli değerleri için düzenlenmiş tablolar aşağıda verilmiştir.

Tablo 1. $E(\overline{X})$ için asimptotik ve simülasyon değerlerinin karşılaştırılması

γ	$\widehat{E}(\overline{X})$	$\widetilde{E}(\overline{X})$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
3	2,9000	2,8897	0,0102	0,3523	99,64
4	3,7034	3,7013	0,0020	0,0557	99,94

Tablo 1'in devamı

5	4,5089	4,5082	0,0006	0,0140	99,98
6	5,3159	5,3128	0,0030	0,0566	99,94
7	6,1172	6,1161	0,0010	0,0164	99,98
8	6,9169	6,9186	0,0017	0,0255	99,97
9	7,7174	7,7205	0,0031	0,0413	99,95
10	8,5230	8,5221	0,0008	0,0101	99,98

Tablo 2. $E(\overline{X}^2)$ için asimptotik ve simülasyon değerlerinin karşılaştırılması

Γ	$\widehat{E}(\overline{X}^2)$	$\widetilde{E}(\overline{X}^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
3	11,3000	11,2843	0,0156	0,1387	99,86
4	18,5899	18,5852	0,0047	0,0252	99,97
5	27,6670	27,6622	0,0048	0,0173	99,98
6	38,5716	38,5151	0,0565	0,1464	99,85
7	51,1902	51,1441	0,0461	0,0900	99,90
8	65,5457	65,5491	0,0034	0,0051	99,99
9	81,7160	81,7297	0,0137	0,0167	99,98
10	99,7876	99,6867	0,1009	0,1011	99,89

Tablo 3. $E(\overline{X}^3)$ için asimptotik ve simülasyon değerlerinin karşılaştırılması

Γ	$\widehat{E}(\overline{X}^3)$	$\widetilde{E}(\overline{X}^3)$	Δ_3	$\delta_3(\%)$	$AP_3(\%)$
3	51,300	50,2017	1,0983	2,1409	97,85
4	107,1051	106,9484	0,1567	0,1463	99,85
5	195,1455	195,1295	0,0160	0,0081	99,99
6	322,1749	321,6018	0,5731	0,1778	99,82
7	493,5821	493,2221	0,3600	0,0729	99,92
8	716,1316	716,8472	0,7156	0,0999	99,90
9	998,0837	999,3339	1,2502	0,1252	99,87
10	1348,3000	1347,539	0,7610	0,0564	99,94

3.BULGULAR

Bu çalışmada Yarı-Markov süreçlerin önemli bir sınıfı olan “Genelleştirilmiş Beta Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci” ele alınmıştır. Bu sürecin matematiksel tanımı verilip, süreç için ergodik teorem ispat edilmiştir. Daha sonra bu sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar ortaya konulmuştur. Elde edilen bu bilgilerden yararlanarak sürecin ergodik dağılımının varyansı ile çarpıklık ve basıklık katsayıları için de asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak ergodik momentlerin değerleri elde edilmiştir. Elde edilen bu simülasyon değerleri asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda elde edilen asimptotik açılımların simülasyon sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir.

4.İRDELEME

Literatürde, Markov ve yarı-Markov modelleri ile ilgili birçok teorik çalışmalar mevcuttur. Fakat bu çalışmaların çoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olmalarına karşın uygulama açısından elverişli değillerdir. Çünkü, ele alınan modeller gereğinden fazla idealize edilmişlerdir. Ayrıca, müdahaleyi ifade eden rastgele değişkenler geniş bir sınıfa ait olduklarından sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur. Yöntem olan asimptotik yaklaşım bu zorluğu biraz olsun ortadan kaldırmaktadır. Son yıllarda matematiğin birçok alanında olduğu gibi olasılık teorisinde de büyük rağbet gören bu yöntem yardımıyla elde ettiğimiz sonuçların yaklaşık formüller olmalarına rağmen, çoğu zaman bilginin büyük kısmını içermekte, diğer yandan, araştırmacıların kolaylıkla kullanabilecekleri sadeliğe sahip olmakta, ele alınan süreçler sınıfını daraltmayan ve dolayısıyla büyük sınıflar için genel kuralların elde edilmesine imkan sağlamaktadır. Bu nedenle son yıllarda asimptotik yöntemler uygulanarak yaklaşık, fakat pratik öneme sahip olan birçok değerli çalışmalar ortaya konulmuştur. Örneğin, T. Kesemen' in doktora tezinde Üstel, Erlang ve Gamma müdahaleli rastgele yürüyüş süreçlerinin ergodik dağılımlarının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu tezde, müdahale dağılımı genelleştirilmiş beta olarak alınmıştır. Çünkü, Beta dağılımı, sürekli dağılım fonksiyonları ailesi içerisinde diğer dağılım fonksiyonlarından daha esnek bir yapıya sahip olması reel uygulamalarda daha pratik olarak kullanılabilme avantajını kazandırmaktadır. Ayrıca, bu çalışmadaki model, diğer çalışmalardan farklı olarak, depoya önceden belirlenmiş miktarda ek stok ilave etmeye gerek yoktur. Sadece eklemelerden sonra seviyenin $0 < s, S < \infty$ olmak üzere (s, S) aralığında olması yeterlidir. Bu çalışmadaki söz konusu model, bir bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilmiştir. Bu $X(t)$ süreci, $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş süreci yardımıyla inşa edilmiştir. Ayrıca, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir.Bu çalışma, yeni bir çalışma olmasına rağmen varsayımlarla oynayarak bazı değişiklikler yapmak mümkündür. ζ_1 rastgele değişkeni incelenen dağılımlardan başka bir dağılım seçilebilir. Reel hayata uygulanabilirliğin artması açısından müdahaleler arasına gecikme zamanları eklenebilir. Çalışmayı daha kuvvetlendirmek için de, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremleri ispat edilip limit dağılımının aşikar şekli bulunabilir.

5. SONUÇLAR

Fiziğin, kimyanın, biyolojinin, ekolojinin, iktisadın ve teknolojik sistemlerin pek çok ilginç problemleri Markov ve yarı-Markov modellerin yardımıyla ifade edilmekte ve gerekli biçimde çözümlenmektedir. Bu çalışmada ele alınan "Rasgele hacimli genişletilmiş (s, S) tipli modeller" in rastgele yürüyüş süreçlerinin incelenmesi hem teorik hem de uygulama bakımından önemlidir. Özellikle elde edilen sonuçların, su barajlarındaki su miktarının kontrol edilmesine, ülkenin petrol, gaz ve bankadaki para rezervleri ile askeri mühimmatın optimal biçimde kullanılması, dolayısıyla ülke ekonomisine önemli oranda katkıları olacaktır. Bu nedenle bu çalışmada, $X(t)$ süreci, bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak inşa edilmiştir ve bu süreçle ilgili aşağıdaki teorik sonuçlar elde edilmiştir.

1. İlgilenilen fiziksel modelleri ifade eden stokastik süreçler, matematiksel olarak oluşturuldu.
2. Bu süreç için ergodik teorem ispat edildi ve ergodik dağılımının aşikar şekli bulundu.
3. Ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir.
4. Genelleştirilmiş Beta Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci' nin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.
5. Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rastgele değişkeninin $s, S, \alpha, \beta > 0$ olmak üzere (s, S, α, β) parametreli genelleştirilmiş beta dağılımına sahip olması durumunda sürecin ergodik dağılımının varyansı ile birlikte çarpıklık ve basıklık katsayıları için, $\gamma = \frac{S-s}{2}$ $\gamma \to \infty$ iken asimptotik formüller elde edildi.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, stokastik süreç teorisindeki bir eksikliği giderebileceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmanın aşağıdaki aşağıdaki yönlerde de geliştirilebilmesi mümkündür:

1. Kesikli müdahaleyi ifade eden rastgele değişkenin dağılımı mevcut incelenmiş dağılımlardan farklı bir dağılım alınarak benzer analitik ve asimptotik özelliklerin incelenmesi.
2. Ele alınan süreç için toplamsal fonksiyonların olasılık karakteristiklerinin bulunması.
3. $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmesi.
4. Başlangıç rastgele değişkenlerinin bağımlı olması durumunda ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi.
5. Sonsuz varyanslı rastgele değişkenler için benzer problemlerin incelenmesi.

7. KAYNAKLAR

Abramowitch, M. ve Stegun, I.A., 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, John Wiley, New York.

Afanasyeva, L. G.ve Bulinskaya, E.V., 1984. Some asymptotic results for random walks in a stript,Theory of Probability and Its Applications, 29, 654-668.

Aliyev, R.T., 2010. Stokastik süreçler teorisine giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Aliyev, R.T, Khaniyev, T.A. ve Kesemen, T, 2010. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with gamma distributed interference of chance, Communications in Statistics-Theory and Methods, 39, 1, 130-143.

Alsmeyer, G., 1991. Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12, 19-27.

Alsmeyer, G., 1994. On the Markov renewal theorem, Stochastic Processes and Their Application, 50, 37-56.

Anisimov, V. V. ve Artelojo, J.R., 2001. Analysis of Markov multi-server retrial queues with negative arrivals, Queuing Systems: Theory and Applications, 39, 157-182.

Aras, G. ve Woodroofe, M., 1993. Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21, 503-519.

Asmussen, S., 1987. Applied Probability and Queues, Wiley, New York.

Borovkov, A. A., 1965. On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theory of Probability and its Appl., 10, 331-334.

Borovkov, A. A., 1986. Theory of Probability, Nauka, Moskov.

Brown, M. ve Ross, S.M., 1972. Asymptotic proporties of processes, SIAM Journal of Applied Mathematics, 22, 1, 93-105.

Chang, J. T.ve Peres, Y., 1997. Gaussian random walks and the Riemann zeta function, Annals of Probability, 25, 787-802.

Chang, J. T., 1992. On moments of the first ladder height of random walks with small drift, Annals of Applied Probability, 2 ,714-738.

Çınlar, E., 1986. Some joint distributions for Markov renewal processes, Australian Journal of Statistics, 10, 1.

Çınlar, E., 1975. Introduction to Stochastic Processes, Englewood Cliffs, New Jersey.

El-Shehawey, M. A., 1992. Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Ind. Soc. Oper.Res., 13, 1-4 , 63-72.

Ezhov, I. I. ve Korolyuk, V.S., 1967. Semi-Markovian processes and their applications, Cybernetica, 5 , 58-65.

Ezhov, I.I. ve Shurenkov, V.S., 1977. Ergodic theorems connected with the Markov property of random processes, Theory of Probability and Its Applications, 21, 620-624.

Feller, W., 1971. An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, John Wiley, New York.

Feller, W., 1964. On semi-Markov processes, Proceding of National Academy of Sciences, USA, 51, 4,130-145.

Gever, B., 2011. Genelleştirilmiş Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Gihman, I. I. ve Skorohod, A.V., 1975. Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlang, Berlin.

Gnedenko, I. I. ve Kovalenko, I. N., 1968. Introduction to Queuing Theory, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.

Goovaerts, M., Dhaene, J. ve De Schepper, A., 2000 . Stochastic upper bounds for present value functions, Journal of Risk and Insurance, 67,1,1-14.

Gusak, D. V. ve Korolyuk, V. S., 1968. On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 13 , 448-456.

Gusak, D.V. ve Korolyuk, V. S., 1969. On the joint distribution of the Process with stationary movements and its maximum, Theory Probability and Its Applications, 14 , 400-469.

Gusak, D. V., 1969. On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous process with independent increments, Theory of Probability and Its Applications, 14 , 14-23.

Grubel, R., 1986. On harmonic renewal measures, Probability Theory and Related Fields, 71, 393-403.

Harlamov, B. P., 1977. On convergence of semi-Markov walks to a continuous semi-Markov process, Theory of Probability and Its Applications, 21, 482-498.

Jewell, W. S., 1967. Fluctuation of a Renewal-Reward Process, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19, 309-329.

Janssen, A.J.E.M. and Van Leewarden, J.S.H., 2007. Cumulants of the maximum of the Gaussian random walk, Stochastic Processes and Their Applications, 117, 1928-1959.

Kastenbaum, M. A., 1966. A dialysis system with one absorbing and one semi refleting state, J.Appl.Probab., 3, 363-371.

Kemperman, J.H. B., 1963. A Wiener-Horf type method for a general random walk with a two-sided boundary, Ann. Math.Statistics, 34 , 1168-1193.

Kesemen, T., 2001. Genişletilmiş (s,S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kesemen, T., 2006. Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modellerin analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kesemen, T. ve Yetim, F. 2012. Weak convergence theorem for a semi-markovian random walk with delay and Pareto distributed interference of chance, First İnternational Conference On Analysis and Applied Mathematics, American Institue of Physics Conference Proceeding, 1470 , 255-258.

Kesemen, T., 2013. On the semi-Markovian random walk with delay and Weibull distributed interference of chance, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics ,42, 3, 299-307.

Kesemen, T., Aliyev, R.T. ve Khaniyev, T.A., 2013. Limit distribution for semi-Markovian random walk with Weibull distributed interference of chance, Journal of Inequalities and Applications, 134, 1, 1-8.

Khaniyev, T.A., Ünver, İ. ve Kesemen, T., 2002. Certain asymtotic result for extended model of (s,S), Theory of Stochastic Processes, 8, 24, 1-2, 192-200.

Khaniyev, T.A., Kesemen, T., Kesemen, O. ve Aliyev, R.T., 2006. The asymptotic results for the stationary characteristics of the semi-Markovian random walk with a barrier, Automatic Control and Computer Sciences , 1, 31-43.

Khaniev, T. A., 2003. Some asymptotic results for the semi-Markov random walk with a special barrier, Turkish Journal of Mathematics, 27, 2, 251-272.

Khaniev, T. A. and Kucuk, Z., 2004. Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics and Probability Letters, 69, 1, 91-103.

Khaniyev, T.A., 2005. About moments of generalized renewal process, Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phys. Tech., and Math. Sciences, 25, 95-100.

Khaniyev, T.A., ve Mammadova, Z.I., 2006. On the Stationary Characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 861-874.

Khaniyev, T. A., Kesemen, T., Kesemen, O. ve Aliyev, R.T., 2006. Some asymptotic results for the stationary characteristics of the semi-Markov random walk with a barrier, Automatic Control and Computer Sciences, 1, 31-43.

Khaniyev, T.A. ve Aksop,C., 2011. Asymptotic results for an inventory model of type (s,S) , with a generalized beta interference of chance, TWMS J.App. Eng. Math., 1, 2, 223-236.

Korolyuk, V.S. ve Borovskikh, Y. V., 1981. Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev.

Kovalenko, I. N., Kuznetchov, N. ve Shurenkov, V. M., 1983. Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev.

Levy, J.B. ve Taqqu, M.S., 1987. On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards, Ann. Sci. Math. Queues, 11,1, 95–110.

Levy, J.B. ve Taqqu, M.S., 2000. Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli, 6, 1, 23–44.

Lotov, V.I., 1996. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, Annals of Probability, 24, 4, 2154-2171.

Lotov, V. I., 1991. On random walks within a stripe, Theory Probability and Its Applications, 36, 1, 160-165.

Mammadova Z.I., 2011. Normal Müdahaleli Yarı-Markov Süreçlerinin Asimtotik yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimler Enstitüsü, Trabzon.

Mammadova Z.I., Khaniyev, T.A. ve Gever, B., 2011. Üçgensel Müdahaleli (s,S) tipli Yarı-Markov modeli için asimtotik sonuçlar, 12. Uluslarası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırması Sempozyumu, Mayıs, Denizli, Bildiriler Kitabı II: 285.

Nasirova, T. I., 1984. Processes of Semi- Markovian Random Walk, Elm, Baku.

Nasirova, T.I., Yapar, C. ve Khaniyev, T.A., 1998. On the probability characteristics of the stock level in the model of the type (s,S), Cybernetics and System Analysis, 5, 69-76.

Prabhu, N.U., 1980. Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk and Dams, Springer , New York.

Rogozin, B.A., 1964. On the distribution of the first jump, Theory of Probability and Its Applications , 9, 450-464.

Ross, S.M., 1996.Stochastic Processes, New York, John Wiley & Sons.

Senturia, L. ve Puri Prem, S.A., 1973. A semi-Markov storage model, Adv. Appl.Probab., 1, 2, 362-378.

Shurenkov, V. M., 1989. The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moscow.

Shurenkov, V. M., 1984. On the Markov renewal theory, Theory of Probability and Its Applications, 29, 2, 248-263.

Skorohod, A. V. ve Slobodenyuk, N. P, 1970. Limit Theorems for Random Walks, Naukova Dumka, Kiev.

Takacs, L., 1997. Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes, second edition, Robert E. Krieger Publishing, New York.

Unver, I., 1997. On distributions of the semi-Markovian random walk with reflecting and delaying barrier Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 89, 231-242.

Zhang, Y. L., 1992. Some problems on a one dimensional correlated random walk with various type of barrier, Journal of Applied Probability, 29, 196-201.

Weesakul, B., 1961. The random walk between a reflecting and an absorbing barier Ann. Math. Statist., 23 ,765-774 .

Woodroofe, M., 1932. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis, SIAM, Philadelhia.

8.EKLER

A. WALD ÖZDEŞLİĞİ

υ tam değerli rastgele değişkeni ve $\{\xi_n\}$ rastgele değişkenler dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış olsunlar. Ayrıca $\upsilon \geq 0$ ve ξ_n rastgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsunlar. $\Im_{k,n}$ ile $\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ rastgele değişkenlerinin ürettiği sigma cebir, yani $\Im_{k,n} = \sigma(\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ gösterilsin.

Tanım A.1. n=1,2,… için $\{\upsilon \leq n\}$ olayı, $\Im_{n+1,\infty}$ sigma cebirinden bağımsız olduğunda υ rastgele değişkenine "gelecekten bağımsız" rastgele değişken denir.

Tanım A.2. Her n=1,2,… için $\{\upsilon \leq n\} \in \Im_{1,n}$ olduğunda υ rastgele değişkenine "Markov rastgele değişkeni" veya "durdurma anı" denir.

Başka bir deyişle , bu durumda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ rastgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde $\{\upsilon \leq n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Markov rastgele değişkeni υ ; $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ rastgele değişkenler dizisi için gelecekten bağımsız rastgele değişkendir.

$S_\upsilon = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_\upsilon$ olsun. Bu durumda S_υ rastgele sayıda rastgele değişkenin toplamına eşittir (Borovkov, 1984).

B. GENELLEŞTİRİLMİŞ BETA DAĞILIMI

Genelleştirilmiş beta dağılım fonksiyonu (Khaniyev, 2011)

$$\pi(z) = P\{\zeta_n \leq z\} = \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)} \int_s^z (x-s)^{\alpha-1} (S-x)^{\beta-1} dx$$

şeklindedir . Olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$f(x; s, S, \alpha, \beta) = \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)} (x-s)^{\alpha-1} (S-x)^{\beta-1} \quad ; \ \alpha, \beta > 0; \ \gamma = \frac{S-s}{2}$$

şeklindedir. Bu bilgileri kullanılarak genelleştirilmiş beta dağılımının momentleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$E(X) = \int_s^S x \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)} (x-s)^{\alpha-1} (S-x)^{\beta-1} dx$$

İntegralini hesaplamak için kolaylık adına $t = \frac{x-s}{2\gamma}$ dönüşümü uygulansın:

$$\gamma = \frac{S-s}{2}; \quad t = \frac{x-s}{2\gamma} \ ; \quad dt = \frac{dx}{2\gamma}; \quad x = s \text{ için } t = 0 \text{ ve } x = S \text{ için } t = 1$$

$$E(X) = \int_s^S x \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)} (x-s)^{\alpha-1} (S-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{(2\gamma)^{-1}}{B(\alpha, \beta)} \int_s^S x \left(\frac{x-s}{2\gamma}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{S-x}{2\gamma}\right)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 (2\gamma t + s) t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

$$= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left[2\gamma \int_0^1 t^{\alpha} (1-t)^{\beta-1} dt + s \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \right]$$

$$= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [2\gamma B(\alpha+1, \beta) + sB(\alpha, \beta)]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} 2\gamma \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + s$$

$$E(X) = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \gamma + s$$

elde edilir veya $\gamma = \frac{S-s}{2}$ yerine yazılırsa;

$$E(X) = \frac{S\alpha + s\beta}{\alpha+\beta}$$

olarak bulunur. Yani, $X \sim GBeta(s, S, \alpha, \beta)$ ise

$$E(X) = \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \gamma + s$$

dır.

Benzer şekilde aynı $t = \frac{x-s}{2\gamma}$ dönüşümünü uygulanarak genelleştirilmiş beta dağılımının ilk dört momenti ve varyansı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X^2) = \int_s^S x^2 \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta)} (x-s)^{\alpha-1} (S-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 (4\gamma^2 t^2 + 4\gamma t s + s^2) t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

$$= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \left[4\gamma^2 \int_0^1 t^{\alpha+1} (1-t)^{\beta-1} dt + 4\gamma s \int_0^1 t^{\alpha} (1-t)^{\beta-1} dt + s^2 \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \right]$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}[4\gamma^2 B(\alpha+2,\beta) + 4\gamma s B(\alpha+1,\beta) + s^2 B(\alpha,\beta)]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[4\gamma^2 \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} + 4\gamma s \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + s^2 \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]$$

$$E(X^2) = \frac{4\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\gamma^2 + \frac{4s\alpha}{\alpha+\beta}\gamma + s^2$$

dır veya $\gamma = \frac{S-s}{2}$ yerine yazılırsa,

$$E(X^2) = \frac{(S\alpha + s\beta)^2 + (S^2\alpha + s^2\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

şeklinde elde edilir. Varyansı ise,

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{(S\alpha + s\beta)^2 + (S^2\alpha + s^2\beta)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{S\alpha + s\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha\beta(S-s)^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\gamma^2$$

şeklinde elde edilir. İlk iki momente benzer şekilde aynı $t = \frac{x-s}{2\gamma}$ dönüşümü uygulayarak X rastgele değişkeninin üçüncü ve dördüncü momentleri de aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(X^3) = \int_s^S x^3 \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)}(x-s)^{\alpha-1}(S-x)^{\beta-1}dx$$
$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 (2\gamma t + s)^3 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 (8\gamma^3 t^3 + 12\gamma^2 t^2 s + 6\gamma t s^2 + s^3)t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\left[8\gamma^3 \int_0^1 t^{\alpha+2}(1-t)^{\beta-1}dt + 12\gamma^2 s \int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt \right.$$
$$\left. + 6\gamma s^2 \int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt + s^3 \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt\right]$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}[8\gamma^3 B(\alpha+3,\beta) + 12\gamma^2 s B(\alpha+2,\beta) + 6\gamma s^2 B(\alpha+1,\beta)$$
$$+ s^3 B(\alpha,\beta)]$$

$$= \frac{8\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\gamma^3 + \frac{12s\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\gamma^2 + \frac{6s^2\alpha}{(\alpha+\beta)}\gamma + s^3$$

dır. Ayrıca ,

$$E(X^4) = \int_s^S x^4 \frac{1}{(2\gamma)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)}(x-s)^{\alpha-1}(S-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 (2\gamma t+s)^4 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 (16\gamma^4t^4 + 32\gamma^3t^3s + +24\gamma^2t^2s^2 + 8\gamma ts^3 + s^4)t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\Big[16\gamma^4\int_0^1 t^{\alpha+3}(1-t)^{\beta-1}dt + 32\gamma^3 s\int_0^1 t^{\alpha+2}(1-t)^{\beta-1}dt + 24\gamma^2s^2\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt + 8\gamma s^3\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt + s^4\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt\Big]$$

$$E(X^4) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}[16\gamma^4B(\alpha+4,\beta) + 32\gamma^3sB(\alpha+3,\beta) + 24\gamma^2s^2B(\alpha+2,\beta) + 8\gamma s^3B(\alpha+1,\beta) + s^4B(\alpha,\beta)]$$

$$= \frac{16\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}\gamma^4$$

$$+ \frac{32s\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\gamma^3 + \frac{24s^2\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\gamma^2 + \frac{8s^3\alpha}{\alpha+\beta}\gamma + s^4$$

Sonuç olarak, bu momentler aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir:

$$E\left(X^k\right) = \sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{\left((2\gamma)^{k-n}s^n\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha-n+k-1)\right)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta-n+k-1)};\quad k\geq 1$$

C. KESİKLİ MÜDAHALELİ YARI-MARKOV SÜREÇLERİ İÇİN GENEL ERGODİK TEOREM

Teorem C.1. (Genel Ergodik Teorem)

$X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı-Markov süreci olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1- $X(t)$ sürecinin $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ anlarındaki değerleri $(X(\tau_n), n = 1,2,\ldots,)$ ergodik bir markov zinciri olacak şekilde $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots < \infty$ artan zaman anları bulunsun.

2- $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ anları arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu olmuş olsun, yani her $n = 1,2, \dots$ için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun. Bu taktirde $X(t)$ süreci ergodiktir. (Gihman ve Skorohod, 1975)

Teorem C.2.

Teorem C.1'deki varsayımlar sağlandığında her sınırlı ölçülebilir f(x) fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(s)\big)ds = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x)P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z)$$

Burada $\pi(z)$ dağılımı $\{X(\tau_n)\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır (Gihman ve Skorohod, 1975).

Not: Bu teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığı ifade eden bir önermedir ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ifade eder.

D:KESİNLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME TEOREMİ

$\{\eta_n\}$, $n = 1,2, \dots$ rastgele değişkenler bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizinin yardımıyla aşağıdaki stokastik süreç inşa edilsin:

$$N(t) = \min\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \eta_i > t\}, t > 0$$

$N(t)$ sürecine literatürde "Yenileme Süreci" denir. $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine "Yenileme Fonksiyonu" denir ve genellikle $U(t)$ sembolü ile yani

$$U(t) = E(N(t))$$

dır. η_n, $n = 1,2, \dots$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(t)$ yani $F(t) = P\{\eta_1 \leq t\}$ şeklinde olduğunda $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$$

burada $F^{*n}(t)$ ile $F(t)$ dağılım fonksiyonunun n. mertebeden konvolüsyon çarpımı gösterilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$F^{*0}(t) = \varepsilon(t) \equiv \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} ;$$

$$F^{*1}(t) \equiv F(t);$$

$$F^{*n}(t) = F^{*(n-1)}(t) * F(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s)dF(s); \quad n = 2,3, \dots$$

$U(t)$ fonksiyonu, monoton azalmayan ,pozitif değerli bir fonksiyondur ve $U(0) = 1$ dır. Ayrıca, her sonlu t için $U(t) < \infty$'dur (Feller,1971). Ayrıca $U(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemini sağlamaktadır: (Feller,1971)

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)dF(s) \ , \qquad t \geq 0$$

$U(t)$ fonksiyonunun asimptotik fonksiyonunu incelemek, olasılık teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, $U(t)$ nin $t \to \infty$ iken asimptotik davranışı ile ilgili literatürde birçok önemli sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçlarının en önemlilerinden birisi "Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi" adı ile bilinmekte olup, Feller (1971) tarafından ispatlanmıştır. Aşağıda bu teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem D.1. (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi)

$F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, bu dağılımının beklenen değeri (μ) ve varyansı (σ^2) sonlu olsun. Bu taktirde, $t \to \infty$ iken

$$0 \leq U(t) - \left(\frac{t}{\mu}\right) \to \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu^2}$$

dır (Feller,1971).
Not: "Birinci Yenileme Teoremi" olarak bilinen aşağıda verilen Teorem D.2.den sadece $U(t) \sim \left(\frac{t}{\mu}\right)$ sonucuna ulaşılır. Aşağıdaki teorem, Birinci Yenileme Teoremi daha rahat anlaşılabilmesi için verilebilir.

Teorem D.2. (Birinci Yenileme Teoremi)

$F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca , bu dağılımının beklenen değeri (μ) sonlu olsun. Bu taktirde, $\forall\ h > 0$ sabiti için $t \to \infty$ iken,

$$U(t) - U(t-h) \to \frac{h}{\mu}$$

dır (Feller, 1971).

E: TAUBER-ABEL TEOREMİ

$F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri sırasıyla $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut olsun (en azından öyle bir $(-\alpha, \beta)$ aralığı mevcut olsun ki, her $\lambda \in (-\alpha, \beta)$; $\alpha, \beta > 0$ için $\tilde{F}(\lambda)$ ve $\tilde{G}(\lambda)$ mevcut ve sonlu olsun).

Ayrıca $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olduğunda $\lambda > 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ olur. Bu önermenin tersi de doğrudur, yani eğer $\lambda > 0$ iken $\tilde{F}(\lambda) \sim \tilde{G}(\lambda)$ ise $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ dır.

Burada "$\sim$" simgesi ile iki fonksiyonun asimptotik denkliği gösterilmiştir, yani "$F(t) \sim G(t)$" yazılabilmesi için

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(t)}{G(t)}=1$$

ve "$\tilde{F}(\lambda)\sim\tilde{G}(\lambda)$" yazılabilmesi için

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{G}(\lambda)}=1$$

olmalıdır. Bu önerme literatürde Tauber-Abel teoremi olarak bilinmektedir (Feller, 1971).

F:YAKINSAMA ÇEŞİTLERİ

Rastgele değişken dizilerinde yakınsamalara geçmeden önce reel sayı dizilerindeki yakınsamaları aşağıdaki gibi verilebilir. Elemanları reel sayılar olan bir dizi f_n olsun. Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \mathbb{R}$ olsun.

1. f_n elemanları reel sayılar olan bir dizi ve $f \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı var ve $n > n_0(\varepsilon)$ için $|f_n - f| < \varepsilon$ oluyorsa, f_n dizisi f noktasına yakınsıyor denir ve $f_n \to f$ (veya $\lim_{n\to\infty} f_n = f$) ile gösterilir.

2. Eğer $f_n \to 0$ ise, $f_n = o(1)$ ve $f_n/g_n \to 0$ ise $f_n = o(g_n)$ dir.

3. Sonlu bir M sayısı için M ye bağlı bir n_M sayısı var ve $n > n_M$ için $|f_n| < M$ oluyorsa f_n dizisi sınırlıdır denir ve $f_n = O(1)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $(f_n/g_n) = O(1)$ ise yani $f_n = O(g_n)$ dir.

Örneğin, $f_n = (4n+3)/n^2$ olduğu durumda, $n \to \infty$ iken $f_n \to 0$ olduğu açıktır. O halde $f_n = o(1)$ dir. Burada aslında $g_n = 1$ alınır ve $f_n/g_n \to 0$ dır ve sonuç olarak,

$$f_n = o(g_n) = o(1)$$

dır.

$$\frac{f_n}{g_n}=\frac{(4n+3)/n^2}{1/n}=4+\frac{3}{n}$$

olup $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{f_n}{g_n}\right|=\left|4+\frac{3}{n}\right|<5$$

yazılabilir. Dolayısıyla , $f_n/g_n = O(1)$ veya $\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{g_n} = 4$ olduğundan $f_n = O(g_n)$ dir.

$\{X_n, n = 1,2,\dots\}$ rasgele değişken dizisi ve X_0 rasgele değişkeni aynı bir olasılık uzayında $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tanımlanmış olsun. Bu taktirde, aşağıdaki yakınsaklık çeşitleri verilebilir.

Tanım F.1. (Olasılığa Göre Yakınsaklık) Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

olduğunda " X_n rasgele değişken dizisi X_0 rasgele değişkenine olasılığa göre yakınsar " denir. Kısaca n → ∞ iken $X_n \xrightarrow{P} X_0$ ile gösterilir.

Tanım F.2. (Ortalamaya Göre Yakınsaklık) Her $r > 0$ için $E(|X_n(\omega)|^r) < \infty$ ve $E(|X(\omega)|^r) < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n(\omega) - X(\omega)|^r) = 0$$

ise ,$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, X rasgele değişkenine " r.mertebeden orta manada yakınsaktır"tır denir. Özel olarak,

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n(\omega) - X(\omega)|^2) = 0$$

ise $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, X rasgele değişkenine "Ortalama karesel manada yakınsaktır"tır denir ve l.i.m. ile gösterilir.

Tanım F.3. (Dağılıma Göre Yakınsaklık) F(x)' in sürekli olduğu noktalar için

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

ise, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, X rasgele değişkenine "Dağılıma göre yakınsaklık"tır denir ve $X_n(\omega) \to X(\omega)$, n→∞ şeklinde yazılır. Literatürde bu yakınsaklık çeşidi, zayıf yakınsaklık olarak da bilinmektedir.

Tanım F.4. (1 Olasılığına ile Yakınsaklık) Ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1 \text{ veya } P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\} = 0$$

ise, 1 olasılığı ile $X_n(\omega) \underset{P}{\xrightarrow[n\to\infty]{}} X(\omega)$ ise $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, X rasgele değişkenine "1 olasılığı ile yakınsaktır"tır denir.

G. BÜYÜK SAYILAR KANUNU VE BÜYÜK SAYILARIN GÜÇLENDİRİLMİŞ KANUNU

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında $\{X_n, n = 1,2, \dots\}$ rasgele değişken dizisi verilmiş olsun. Bu dizinin yardımıyla aşağıdaki rastgele değişkenler dizisi ele alınsın (Aliyev, 2010)

$$\frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots X_n(\omega) - E[X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots X_n(\omega)]}{n}; \quad n = \overline{1,\infty}. \qquad (*)$$

Tanım G.1. Eğer $(*)$ dizisi, olasılığa göre sıfıra yakınsıyorsa $\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$ dizisi " büyük sayılar kanununa uyuyor" denir.

Tanım G.2. Eğer $(*)$ dizisi, 1 olasığı ile sıfıra yakınsıyorsa $\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$ dizisi "büyük sayıların güçlendirilmiş kanununa uyuyor" denir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(X_k(\omega) - E(X_k(\omega)) = 0\right\} = 1.$$

ÖZGEÇMİŞ

Çisem ÖCAL, 18.02.1989 tarihinde Ankara ili, Altındağ ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini İnönü İlköğretim Okulu'unda, lise öğrenimini ise Başkent Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi' nde (Ankara) tamamladı. 2007-2008 eğitim öğretim yılında Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik bölümünü kazandı. 2011 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt oldu. Orta düzeyde İngilizce bilmektedir.