KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GECİKMELİ VE PARETO MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN SINIR FONKSİYONLARININ İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şenol DEMİR

ARALIK 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GECİKMELİ VE PARETO MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN SINIR FONKSİYONLARININ İNCELENMESİ

Şenol DEMİR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11.11.2013
Tezin Savunma Tarihi : 13.12.2013

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Şenol DEMİR tarafından hazırlanan

GECİKMELİ VE PARETO MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN SINIR FONKSİYONLARININ İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 26/11/2013 gün ve 1531 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. İhsan ÜNVER …...……………………………

Üye : Doç. Dr. Türkan Erbay DALKILIÇ …...……………………………

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN …...……………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada “Gecikmeli ve Pareto Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci” olarak adlandıran Yarı-Markov bir modeli ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik sürecin sınır fonksiyonelleri geniş bir biçimde incelenmiştir.

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenerek, tez konunun belirlenmesinden, tezde ele alınan problemin çözümüne kadar olan bu süreçte, emeği, öneri ve yönlendirmeleri ile çok büyük katkısı bulunan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN’e, en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışma sürecinde görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK’e, seminerdeki katkıdan dolayı Prof. Dr. İhsan ÜNVER, Doç. Dr. Türkan Erbay DALKILIÇ hocalarıma teşekkür ederim.

Şenol DEMİR
Trabzon, 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Gecikmeli ve Pareto Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 11/11/2013

Şenol DEMİR

İÇİNDEKİLER

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

GEÇİKMELİ VE PARETO MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜREÇLERİNİN SINIR FONKSİYONLARININ İNCELENMESİ

Şenol DEMİR

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN
2013, 41 Sayfa, 11 Sayfa Ek

Bu çalışmada, gecikmeli ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan yarı-Markov bir model (X(t)) ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiştir. Bazı zayıf koşullar altında bu sürecin ergodik olduğu ispatlanmıştır. Bunlardan yararlanarak $\{\quad\}$, $\quad \geq 0$ rasgele değişkenler dizisinin dağılımı $(\ ,\ )$ parametreli Pareto dağılımına sahip olması halinde sürecin bir takım sınır fonksiyonellerine ait ilk dört momentlerinin asimptotik açılımları $(\quad) \to \infty$ iken elde edilmiştir. Sonuçta da, Monte Carlo simülasyon metoduyla elde edilen bu asimptotik sonuçlar test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ödüllü yenileme süreci, Yarı-Markov süreci, Sınır fonksiyoneli, Ergodiklik, Asimtotik açılım, Simülasyon.

Master Thesis

SUMMARY

ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR RENEWAL REWARD PROCESS WITH PARETO DISTRIBUTED INTERFERENCE OF CHANCE AND DELAY

Şenol DEMİR

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Assist. Prof. Tülay KESEMEN
2013, 41 Pages, 11 Pages Appendix

In this thesis, semi-Markov, a model called as "The renewal reward processes" is considered and the stochastic process expressed by this model is constructed mathematically. Under some weak assumptions, the ergodicity of this process is discussed. Using these results, the asymptotic expansions for the first four moments of the boundary functionals are established as $E(\zeta) \to \infty$ when random variable ζ has a Pareto distribution with parameters (α, λ). Finally, the accuracy of the approximation formula is tested by the Monte Carlo simulation method.

Key Words: Renewal reward process, Semi-Markov Process, Boundary functional, Ergodicity, Asymptotic expansion, Simulation.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

: Bir stokastik deneyin örnek uzayı

: Ω'nın alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş bir cebir

(, ,) : Olasılık uzayı

E( ) : rasgele değişkenin beklenen değeri

( ) : rasgele değişkenin koşullu beklenen değeri

E( ) : rasgele değişkenin n. başlangıç momenti

$| \; |$: rasgele değişkeninin mutlak momenti

$*$: ve fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı

* : f fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı

İnf A : A kümesinin infimumu

SupA : A kümesinin supremumu

$_{\to\infty}$ ( ) : x ,∞' giderken f(x) fonksyonunun limiti

P{.} : {.} olayının olasılığı

{.} : {.} olayının koşullu olasılığı

Var( ) : rasgele değişkenin varyansı

( ) : rasgele değişkenin koşullu varyansı

( ) = , ∈ ; , ∉ : A kümesinin karekteristik fonksiyonu

a(x)∽ ( ) : a(x)'ın b(x)' e asimptotik denkliği

g(x)=o(( )) : $\lim_{\to} \frac{(\ )}{(\ )} = 0$

g(x)=O(( )) : $\lim_{\to} \frac{(\ )}{(\ )} \leq \ < \infty$

(s) : M(t) fonksiyonun Laplace dönüşümü

*( ) : M(t) fonksiyonun Laplace-Stiltijes dönüşümü

a<∞ : a sonludur

F : F fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli

—[(,)] : F(x,y)'nin x değişkenine göre n. kısmi türevi

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR TARAMASI

Son yıllarda hızla gelişen teknolojiyle birlikte bilim adamları hergün değişik problemlerle karşılaşmakta ve bu problemlerin çözümü için yeni yöntemler geliştirmektedirler. Böylece her geçen gün yeni bilimsel gelişme ortaya çıkmaktadır. Yeni bilimsel gelişmelerin ortaya çıkmasının en önemli sebebi ise gerçek hayatta karşılaşabilen problemlerinin birçoğunun çözümlenmesinde bilinen medotların yetersiz kalması veya çok zor uygulanabilir olmasıdır.

Bütün bu gelişmelere parelel olarak olasılık teorisi kendini geliştirmiş ve hemen her bilim alanına girmiştir. Bugün olasılık teorisinin uygulanmadığı alan hemen hemen hiç yok gibidir. Yirminci yüzyılda olasılık teorisi modern bir aksiyomatik kuruluşa kavuşmuştur. Özellikle fen bilimlerinde zamandan zamana değişen olayların incelenmesiyle ilgili problemlerin çözülmesinde olasılık teorisinin önemli bir kısmını oluşturan stokastik süreçler teorisi kullanılmaktadır. Günümüzde hızla gelişmekte olan teknoloji ve ekonomiye parelel olarak stokların kontrol edilmesi ile ilgili birçok önemli problemler ortaya çıkmaktadır. Askeri stokların, kuyruk sistemlerinin v.s. kontrolünde ortaya çıkan bu tip problemler için ele alınan problemi tam olarak ihtiva eden stokastik süreçlerin matematiksel kuruluşlarının verilmesi oldukça önemlidir. Stok kontrol seviyesi, kuyruk teorisi ve güvenirlik teorisindeki problemlerin çoğu Yarı-Markov modeli ile ifade edilebilir.

Kuyruk teorisi, stokastik finans, güvenirlik teorisi, matematiksel sigorta, stok kontrol teorisi, fizik ve biyoloji gibi alanlarda birçok ilginç problemler yenileme ve ödüllü yenileme süreçleri ile ifade edilmektedir. Ödüllü yenileme süreçleri ile ilgili birçok teorik çalışmalar literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğunda sonuçlar teorik olarak önemli olmasına rağmen, uygulamanın ihtiyacını karşılayacak nitelikte değillerdir. Analitik sonuçların karmaşık yapısından kurtulmak için 1990 yılından itibaren araştırmacılar asimptotik yöntemleri kullanarak yüksek uyumluluğa sahip yaklaşık fakat daha sade sonuçlar elde etmişlerdir. Örneğin Alsmeyer (1991), Janseen ve Leewarden (2007), Chang ve Peres (1997), Lotov (1996), Khaniyev ve Aliyev (2008-2010), Khorsunav (1997) vs.

Khaniyev ve diğerleri 2000 yılından sonra elde ettiği sonuçlarda genellikle incelenen sürecin ergodik dağılımı ve ergodik momentleri ele alınmış ve bunlar asimptotik yöntemlerle incelemiştir. Şimdi, ödüllü yenileme sürecine ait son yıllarda yapılan bazı çalışmaları verelim. Okur Bekar (2006) yüksek lisans tezinde müdahaleyi ifade eden ( ) rasgele değişkenin üstel dağılıma sahip olduğu durumda sürecin ergodik dağılımının momentlerini, analitik ve asimptotik yöntemlerle incelemiştir. Okur Bekar (2012) doktora tezinde aynı sürecin ( ) rasgele değişkeni Gamma ve Weibull dağılımına sahip olduğu durumda sürecin sınır fonksiyonelleri ve sürecin ergodik dağılımının momentlerini asimptotik yöntemlerle incelemiştir.

Mammadova (2011) doktora tezinde normal müdahelleli ödüllü yenileme sürecin ergodik dağılımının momentlerini literatür de mevcut olan Miller teoreminden yararlanarak asimptotik yöntemlerle incelemiştir. Khaniyev ve Atalay (2010) çalışmasında müdahalenin üçgensel dağılıma sahip olduğu durumda sürecin ergodik dağılımının momentlerini detaylı bir biçimde incelemiştir. Khaniyev ve Aksop (2011) çalışmasında ödüllü yenileme sürecini inventory modellini uyarlayarak sürecin ergodik dağılımının momentlerini analitik ve asimptotik yöntemlerle incelemiştir. Ayrıca Monte Carlo simülasyon değerleri ile ne derece uyum sağladığını göstermişlerdir.

Yukarda ifade ettiğimiz gibi matematiksel sigorta teorisinin birçok problemlerinde Pareto dağılımı aktif bir şekilde kullanılır. Bundan dolayı bu tezde mevcut çalışmalardan farklı olarak gecikmeli ödüllü yenileme sürecini ele alınmıştır. Müdahaleyi ifade eden ζ rasgele değişkeni Pareto dağılımına sahip olduğu durumda sürecin sınır fonksiyonelleri analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Ayrıca benzetim yöntemini kullanarak elde edilen formüllerin yaklaşık doğruluğu test edilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Sistem, başlangıç anı olan = noktasından çalışmaya başlasın. Sistem rasgele bir süresi kadar kaldıktan sonra , mesafesi kadar azalsın (burada yalnız pozitif değerler alabilen bir rasgele değişkendir). Bu halde aşağıdaki iki farklı durum söz konusudur:

1. Kabul edelim ki sistem s seviyesinin altına inmemiş olsun. Bu durumda = + yeni pozisyonundan hareketine devam eder. Yani sistem durumunda süresince kaldıktan sonra mesafesi kadar azalarak , bir sonraki = + pozisyonuna ulaşmaya çalışacaktır.

2. Kabul edelim ki sistem s seviyesine altına inmiş olsun. Bu durumda , dışarıdan müdahale edilerek sistem yeni bir $\in [\ , +\infty)$ başlangıç durumundan harekete başlamaya mecbur edilir ve ondan sonraki hareketine yukardaki kurallara uygun olarak devam eder. Dolayısıyla, çalışmakta olan sistem s seviyesine ulaşmadığı sürece bir yenileme sürecine tabi olur. Daha sonra sistemin hareketi yukarıdaki koşullara benzer şekilde tekrarlanacaktır.

Dikkat edilmelidir ki, rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu uygun şekilde değiştirilerek özel bariyerli yarı – Markov süreci elde etmek mümkündür.

2.1. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

{ , , , } , n ≥1, dizisi (Ω ,$\Im$,) olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız ve aynı dağılıma dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca , , , rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve pozitif değerli değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları bilinsin ve sırasıyla, $\Phi(t), F(x), \pi(z), H(t)$ ile gösterilsin. Yani

$$\Phi(t) = P\{\xi \leq t\};$$

$$F(x) = P\{\eta \leq x\};$$

$$\pi(z) = P\{\zeta \leq z\};$$

$$H(t) = P\{\theta \leq t\}.$$

{ } ve { } başlangıç rasgele değişkenlerinin dizileri yardımıyla { } ve { } yenileme dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$= \quad ; \quad = \quad ; \quad \geq 1.$$

Burada,

$T = Y = 0$

dır.

Ayrıca tam değerler alan { }, $n \geq 0$ rasgele değişkenler dizisi aşağıdaki gibi verilsin:

$N = 0,$

$N = N(z) = \inf\{k \geq 1 : z - S < s\}, \quad z \geq 0$

$N = N (\zeta) = \inf\{k \geq N + 1 : S - S \geq \zeta - s\}, \quad n \geq 1.$

Burada $\inf(\emptyset) = +\infty$ olarak kabul edilmiştir. $\{N\}$, $n \geq 1$ tam değerli rasgele değişkenler dizisinden yararlanarak, aşağıdaki $\{\tau\}$, $n \geq 1$ dizisi inşa edilsin:

$= 0;$

$\tau = \tau(z) = T_{(\,)} = \xi \; ;$

$= (\quad) = \quad = \quad .$

$\gamma = \tau + \theta \; ; \quad n \geq 1,$ olsun ve ( ) yenileme süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$(\,) = \max\{ \geq 0 : \quad \leq \}, \quad > 0.$

Şimdi ele alınacak ( ) stokastik süreci aşağıdaki gibi verilebilir;

$\forall \; \gamma \leq t \leq \gamma_{;} \quad n \geq 0$ için $X(t) = \max\{s, s + \zeta - S_{(\,)} + S \}$

olsun. Burada,

$$= \quad > 0\,; \quad {}_{(\quad)} =$$

dır.

X(t) sürecinin yukardaki tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir:

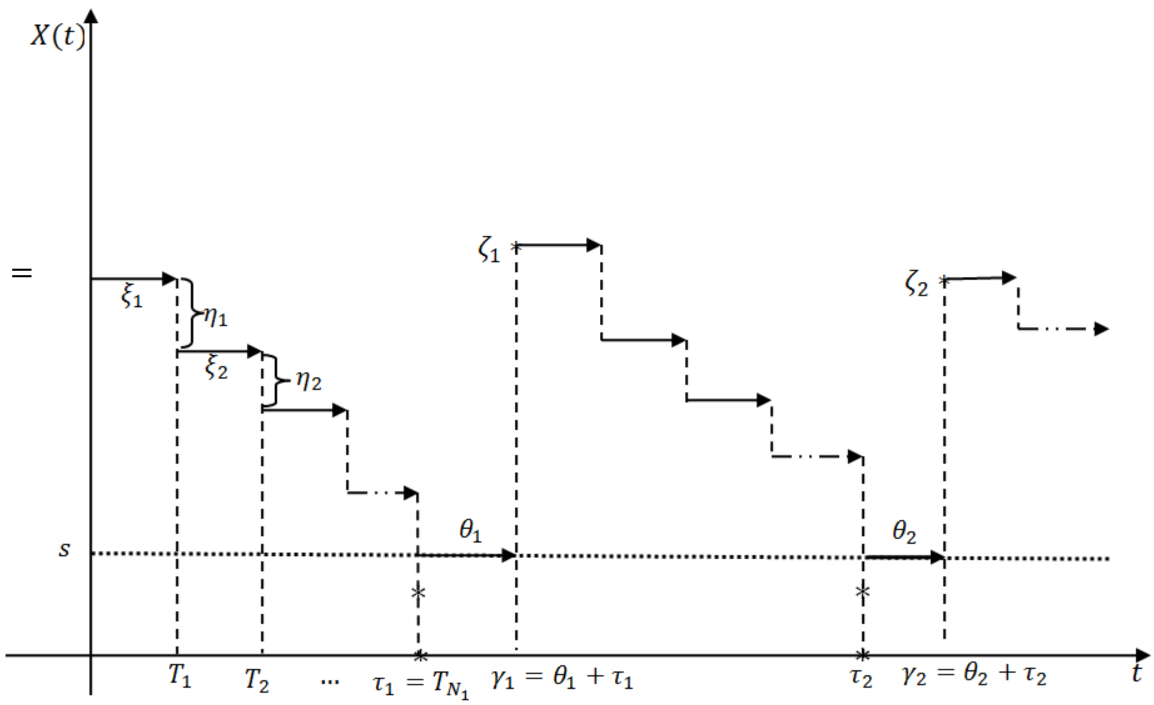
$$(\ ) = \quad \max\ s, \quad + \quad - \quad {}_{(\ )} + \quad I_{[\quad ;\quad)}(t)$$

Burada I (t) ile kümesinin indikatör fonksiyonu gösterilmiştir, yani

$$I\ (t) = \begin{matrix} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{matrix}$$

Bu şekilde tanımlanan X(t) sürecine, literatürde " kesikli müdahaleli ödüllü yenileme süreci" denir. Bu çalışmada , kesikli müdahaleliyi ifade eden rasgele değişkeninin [0,∞) aralığında (,) paremetli Pareto dağılıma sahip olduğu varsayılır. Bu nedenle, ele alınan ( ) sürecine "Pareto dağılıma sahip kesikli müdahaleli ödüllü yenileme süreci" veya kısaca "Pareto müdahaleli ödüllü yenileme süreci" denir.

X(t) sürecinin bir görünümü aşagıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 1. X(t) Gecikmeli ve Pareto Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Bir Görünümü

2.2. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İncelenmesi

rasgele değişkenine, "sürecin ilk kez kontrol seviyesine ulaşma anı" denir. N sınır fonksiyoneli de, anına kadar olan sıçramaların sayısını göstermektetir. Bu rasgele değişkenler birer sınır fonksiyoneli olup sürecin birçok karekteristiklerinin incelenmesinde büyük önem taşımaktadır. Özellikle sürecin ergodik dağılımlarının incelenmesi için bu rasgele değişkenlerin dağılımının ve bazı olasılık karekteristiklerinin bilinmesi gereklidir. Bu nedenle bu kısımda, sırasıyla N , τ ve θ sınır fonksiyonelleri incelenecektir.

2.2.1. Sürecin Sınır Fonksiyonellerin İlk Dört Momenti İçin Kesin Formüller

Bu kısımda sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti, rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu tarafından üretilen $(\ ) = \sum \ ^{*}(\ )$ yenileme fonksiyonu yardımıyla ifade edilecektir. Burada $(\ ) = \{ \ \leq \ )$, rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

Teorem 2.2.1.1. $U\ (x)$ yenileme fonksiyonun yardımıyla, $N\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$EN\ (x) = U\ (x), \tag{1}$$

$$EN\ (x) = 2U^{*}\ (x) + U\ (x), \tag{2}$$

$$EN\ (x) = 6U^{*}\ (x) + 6U^{*}\ (x) + U\ (x), \tag{3}$$

$$EN\ (x) = 24U^{*}\ (x) + 36U^{*}\ (x) + 14U^{*}\ (x) + U\ (x) \quad \text{(Feller,1971).} \tag{4}$$

Yardımcı teorem 2.2.1.1. ve başlangıç rasgele değişkenleri (2.1) koşullarına ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $a\ = E(\xi\ ) < \infty$, ii) $m\ = E(\eta\ ) < \infty$.

Bu taktirde, $\tau\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti ξ ve $N\ (x)$ rasgele değişkenlerinin momentleri yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$E\tau\ (x) = a\ EN\ (x), \tag{5}$$

$$E\tau\ (x) = a\ EN\ (x) + (a\ - a\ )EN\ (x), \tag{6}$$

$$E\tau\ (x) = a\ EN\ (x) + 3a\ (a\ - a\ )EN\ (x) + (2a\ - 3a\ a\ + a\ )EN\ (x), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} E\tau\ (x) = {} & a\ EN\ (x) + 6a\ (a\ - a\ )EN\ (x) + (11a\ - 18a\ a\ + 4a\ a \\ & + 3a\ )EN\ (x) + (a\ + 12a\ a\ - 4a\ a\ - 3a\ - 6a\ )EN\ (x), \end{aligned} \tag{8}$$

burada $a\ = E\ \xi\ ,\ k = 1{,}4$ dır (Aliyev vd., 2010).

Teorem 2.2.1.2. ve başlangıç rasgele değişkenleri (2.1) koşullarına ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $a\ = E(\xi\ ) < \infty$, ii) $m\ = E(\eta\ ) < \infty$.

Bu taktirde, ( ) sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti ( ) yenileme fonksiyonunun yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E\tau\ (x) = a\ U\ (x), \tag{9}$$

$$E\tau\ (x) = 2a\ U^{*}\ (x) + a\ U\ (x), \tag{10}$$

$$E\tau\ (x) = 6a\ U^{*}\ (x) + 6a\ a\ U^{*}\ (x) + a\ U\ (x), \tag{11}$$

$$E\tau\ (x) = 24a\ U^{*}\ (x) + 36a\ a\ U^{*}\ (x) + (8a\ a\ + 6a\ )U^{*}\ (x) + a\ U\ (x), \tag{12}$$

burada $a\ = E\ \xi\ ,\ k = 1{,}4$ dır. (Aliyev vd., 2010)

Sonuç 2.2.1.1. rasgele değişkeni mutlak sürekli dağılıma sahip olsun. Bu taktirde, teorem 2.2.1.2.'nin koşulları altında $E\tau\ (x)$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığının herhangi bir kapalı alt aralığında sınırlıdır.

2.2.2. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İlk Dört Momenti İçin Asimptotik Açılımlar

Önceki bölümde, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti ile U (x) yenileme fonksiyonu yardımıyla elde edildi. Fakat elde edilen bu formüllerin problemlerin çözümlenmesinde uygulanması oldukça zor olduğundan, pratikte daha kolay kullanılabilir formüllerin elde edilmesine ihtiyaç vardır.

Yardımcı Teorem 2.2.2.1. başlangıç rastgele değişkeninin ilk üç momenti mevcut ve sonlu olsun. Bu taktirde, $\to \infty$ iken U (x) yenileme fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$U\ (x) = \frac{x}{m} + \frac{m}{2m} + o\ \frac{1}{x}\ , \tag{13}$$

$$U^{*}\ (x) = \frac{x}{2m} + \ \frac{m}{m} - \frac{1}{m}\ \ x + \ \frac{3m}{4m} - \frac{m}{3m} - \frac{m}{2m}\ \ + o(1), \tag{14}$$

$$U^{*}\ (x) = \frac{x}{6m} + \ \frac{3m}{4m} - \frac{1}{m}\ \ x\ + \ \frac{3m}{m} - \frac{m}{2m} - \frac{2m}{m} + \frac{1}{m}\ \ x + o(x), \tag{15}$$

$$U^{*}\ (x) = \frac{x}{24m} + \ \frac{m}{3m} - \frac{1}{2m}\ \ x\ + \ \frac{5m}{4m} - \frac{7m}{12m} - \frac{9m}{4m} + \frac{3}{2m}\ \ x\ \ + o(x\ \ ), \tag{16}$$

burada $m\ \ = E\ \ \eta\ \ ,\ \ k = 1{,}3$ dır (Aliyev vd., 2010).

Teorem 2.2.2.1. $E(\eta\ \ ) < \infty$ olsun. Bu durumda $\to \infty$ iken ( ) sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri için iki terimli asimptotik açılımlar aşağıdaki gibi verilebilir:

$$1)\ EN\ \ (x) = \frac{x}{m} + \frac{m}{2m} + o(1), \tag{17}$$

$$2)\ EN\ \ (x) = \frac{x}{m} + \ \frac{2m}{m} - 1\ \ \frac{x}{m} + o(x), \tag{18}$$

$$3)\ EN\ \ (x) = \frac{x}{m} + \ \frac{9m}{2m} - 3\ \ \frac{x}{m} + o(x\ \ )\,, \tag{19}$$

$$4)\ EN\ \ (x) = \frac{x}{m} + \ \frac{8m}{m} - 6\ \ \frac{x}{m} + o(x\ \ ), \tag{20}$$

burada $m\ \ = E\ \ \eta\ \ ,\ k = 1{,}4$ dır (Aliyev vd.,2010).

Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, Teorem 2.2.2.1 de X(t) sürecinin $N\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri için elde edilen asimptotik açılımdaki ilk üç terim kullanılarak, bu momentler için yaklaşık değerler elde edilmiştir. Bunun için, η rasgele değişkeninin (2,20) paremetreli Erlang dağılımı göz önünde bulundurulmuş ve bu değerler sembolik olarak $EN\ (x)$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, bu momentler için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları ise $EN\ (x)$ ile gösterilmiştir. Ayrıca her bir simülasyon değeri, Matlab programı ile sürecin $n = 10$ sayıda realizasyonu üretilerek elde edilmiştir. Bu değerler yardımıyla , sürecin $N\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur. Burada Δ , δ ve AP sırasıyla bu momentlerin yaklaşık değerleri ile simülasyon değerleri arasındaki mutlak hatayı, nispi hatayı ve doğruluk yüzdelerini göstermektedir.

$$\Delta\ = EN\ (x) - EN\ (x)\ ;\ \delta\ = \frac{\Delta}{EN\ (x)} 100\%\ ;\ AP\ = 100\% - \delta\ , k = 1,2,3,4.$$

Tablo 1. $EN\ (x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$EN\ (x)$	$EN\ (x)$	Δ	δ	(%)Ap
2	20,753	20,75	0,003	0,014455741	99,98554426
3	30,748	30,75	0,002	0,006504488	99,99349551
4	40,749	40,75	0,001	0,002454048	99,99754595
5	50,736	50,75	0,014	0,027593819	99,97240618
6	60,749	60,75	0,001	0,001646118	99,99835388
7	70,749	70,75	0,001	0,001413448	99,99858655
8	80,751	80,75	0,001	0,001238375	99,99876163
9	90,7501	90,75	0,0001	0,000110193	99,99988981
10	100,751	100,75	0,001	0,000992546	99,99900745

Tablo 2. $EN\ (x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$EN\ (x)$	$EN\ (x)$	Δ	δ	(%)Ap
2	440,617	440,625	0,008	0,001815636	99,99818436
3	960,613	960,625	0,012	0,001249202	99,9987508
4	1680,609	1680,625	0,016	0,000952036	99,99904796
5	2600,621	2600,625	0,004	0,000153809	99,99984619

Tablo 2'nin devamı

6	3720,569	3720,625	0,056	0,001505146	99,99849485
7	5040,516	5040,625	0,109	0,002162477	99,99783752
8	6560,754	6560,625	0,129	0,001966237	99,99803376
9	8280,64	8280,625	0,015	0,000181145	99,99981885
10	10200,8	10200,625	0,175	0,001715552	99,99828445

Tablo 3. $EN(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$EN(x)$	$EN(x)$	Δ	δ	(%)Ap
2	9565,312	9565	0,312	0,003261786	99,99673821
3	30472,481	30472,5	0,019	6,23513E-05	99,99993765
4	70129,677	70130	0,323	0,000460575	99,99953942
5	134537,472	134537,5	0,028	2,0812E-05	99,99997919
6	229691,062	229695	3,938	0,001714477	99,99828552
7	361590,729	361602,5	11,771	0,003255338	99,99674466
8	536276,825	536260	16,825	0,003137372	99,99686263
9	759669,307	759667,5	1,807	0,000237867	99,99976213
10	1037854,471	1037825	29,471	0,002839608	99,99716039

Tablo 4. $EN(x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$EN(x)$	$EN(x)$	Δ	δ	(%)Ap
2	212093,445	212000	93,445	0,04405841	99,95594159
3	981124,659	981000	124,659	0,012705725	99,98729428
4	2960158,786	2960000	158,786	0,005364104	99,9946359
5	7025195,665	7025000	195,665	0,002785189	99,99721481
6	14291988,32	14292000	11,679	8,17171E-05	99,99991828
7	26116114,87	26117000	885,128	0,003389202	99,9966108
8	44098240,48	44096000	2240,48	0,005080656	99,99491934
9	70065508,06	70065000	508,057	0,000725117	99,99927488
10	106104736,8	106100000	4736,794	0,004464263	99,99553574

Teorem 2.2.2.2. ξ ve η başlangıç rasgele değişkenleri (2.1) koşullarına ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$i)E(\xi) < \infty, \quad ii)m = E(\eta) < \infty.$$

Bu taktirde, $x \to \infty$ iken $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir;

$$1)E\tau\ (x) = \frac{a}{m}x + \frac{m\ \ a}{2m} + o\ \ \frac{1}{x}\ , \tag{21}$$

$$2)E\tau\ \ (x) = \frac{a}{m}x\ \ + \ \ \frac{2m\ \ a}{m} + \frac{a\ \ - 2a}{m}\ \ x$$

$$+ \ \frac{3m\ \ a}{2m} - \frac{2m\ \ a}{3m} + \frac{m\ \ (a\ \ - 2a\ \ )}{2m}\ \ + o(1), \tag{22}$$

$$3)E\tau\ \ (x) = \frac{a}{m}x\ \ + \ \ \frac{9m\ \ a}{2m} + \frac{3a\ \ (a\ \ - 2a\ \ )}{m}\ \ x$$

$$+ \ \frac{9m\ \ a}{m} - \frac{3m\ \ a}{m} + \frac{6m\ \ a\ \ (a\ \ - 2a\ \ )}{m} + \frac{6a\ \ - 6a\ \ a\ \ + a}{m}\ \ x + o(x), \tag{23}$$

$$4)E\tau\ \ (x) = \frac{a}{m}x\ \ + \ \ \frac{8m\ \ a}{m} + \frac{6a\ \ (a\ \ - 2a\ \ )}{m}\ \ x$$

$$+ \ \frac{30m\ \ a}{m} - \frac{8m\ \ a}{m} + \frac{27m\ \ a\ \ (a\ \ - 2a\ \ )}{m} + \frac{36a\ \ - 36a\ \ + 4a\ \ a\ \ + 3a}{m}\ \ x$$

$$+ o(x\ \ )\ , \tag{24}$$

burada,

$a\ \ = E\ \xi\ \ \ ,\ m\ \ = E\ \eta\ \ \ ,\ k = 1,3$

dır (Okur Bekar, 2012).

Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, Teorem 2.2.2.2 de X(t) sürecinin $\tau\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için elde edilen asimptotik açılımdaki ilk üç terim kullanılarak, bu momentler için yaklaşık değerler oluşturulmuştur. Bunun için, η rasgele değişkeninin (2,20) paremetreli Erlang dağılımı göz önünde bulundurulmuş ve bu değerler sembolik olarak $E\tau\ (x)$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, bu momentler için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları ise $E\tau\ (x)$ ile gösterilmiştir. Ayrıca her bir simülasyon değeri, Matlab programı ile sürecin $n = 10$ sayıda realizasyonu üretilerek elde edilmiştir. Bu değerler yardımıyla, sürecin $\tau\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur. Burada $\Delta\ ,\delta$ ve AP sırasıyla bu momentlerin yaklaşık değerleri ile simülasyon değerleri arasındaki mutlak hatayı, nispi hatayı ve doğruluk yüzdelerini göstermektedir.

$$\Delta = E\tau \ (x) - E\tau \ (x) \ ; \delta = \frac{\Delta}{E\tau \ (x)} 100\% \ ; AP = 100\% - \delta \ , \qquad k = 1,2,3,4.$$

Tablo 5. Eτ (x) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	Eτ (x)	Eτ (x)	Δ	δ	(%)Ap
10	50,377	50,375	0,002	0,00397006570	99,9960299343
20	100,378	100,375	0,003	0,00298870270	99,9970112973
30	150,373	150,375	0,002	0,00133002600	99,9986699740
40	200,379	200,375	0,0040	0,00199621717	99,998003783
50	250,373	250,375	0,002	0,00079880818	99,9992011918
60	300,387	300,375	0,012	0,00399484665	99,9960051534
70	350,386	350,375	0,011	0,00313939484	99,9968606052
80	400,395	400,375	0,02	0,00499506737	99,9950049326
90	450,363	450,375	0,012	0,00266451729	99,9973354827
100	500,365	500,375	0,01	0,00199854107	99,9980014589

Tablo 6. Eτ (x) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	Eτ (x)	Eτ (x)	Δ	δ	(%)Ap
10	2575,542	2501,09	74,44825	2,89058574855	97,1094142514
20	10150,920	10001,84	149,07625	1,46859841275	98,5314015872
30	22724,794	22502,59	222,20025	0,97778774144	99,0222122586
40	40300,230	40003,34	296,88625	0,73668624224	99,2633137578
50	62874,336	62504,09	370,24225	0,58886069190	99,4111393081
60	90450,466	90004,84	445,62225	0,49266993273	99,5073300673
70	123033,143	122505,59	527,54925	0,42878629054	99,5712137095
80	160617,031	160006,34	610,68725	0,38021326020	99,6197867398
90	203164,472	202507,09	657,37825	0,32356949201	99,6764305080
100	250739,701	250007,84	731,85725	0,29187928640	99,7081207136

Tablo 7. Eτ (x) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	Eτ (x)	Eτ (x)	Δ	δ	(%)Ap
10	133594,919	133515,625	79,294	0,059354054	99,94064595
20	1034118,234	1033906,25	211,984	0,02049901	99,97950099
30	3451228,375	3451171,875	56,5	0,001637098	99,9983629
40	8135537,563	8135312,5	225,063	0,002766418	99,99723358
50	15836297,776	15836328,13	30,349	0,000191642	99,99980836
60	27304603,104	27304218,75	384,354	0,001407653	99,99859235
70	43293551,446	43288984,38	4567,071	0,010549079	99,98945092
80	64551547,524	64540625	10922,524	0,016920623	99,98307938
90	91802296,836	91809140,63	6843,789	0,007454921	99,99254508
100	125837042,34	125844531,3	7488,91	0,005951276	99,99404872

Tablo 8. $E\tau\ (x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$E\tau\ (x)$	$E\tau\ (x)$	Δ	δ	$(\%)Ap$
10	7028703,865	7027187,5	1516,365	0,021573892	99,97842611
20	106121021,113	106108750	12271,113	0,01156332	99,98843668
30	526717498,167	526744687,5	27189,333	0,005162033	99,99483797
40	1648431949,729	1648435000	3050,271	0,000185041	99,99981496
50	4000578412,683	4000679688	101274,817	0,002531504	99,9974685
60	8262964482,523	8262978750	14267,477	0,000172668	99,99982733
70	15266781552,312	15264832188	1949364,812	0,012768669	99,98723133
80	25991541754,000	25985740000	5801754	0,0223217	99,9776783
90	41550698398,508	41555202188	4503788,992	0,010839262	99,98916074
100	63247213173,060	63252718750	5505576,94	0,008704853	99,99129515

Teorem 2.2.2.3 $\xi\ ,\eta$ ve θ başlangıç değişkenleri (2.1) koşullarına ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) $a\ = E(\xi\ ) < \infty$,

ii) $m\ = E(\eta\ ) < \infty$,

iii) $E(\theta\ ) < \infty$.

Bu taktirde $x \to \infty$ iken $\gamma\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$1)E(\gamma\ ) = \frac{a}{m}x + \frac{m}{2m} + K\ \ a\ + o\ \frac{1}{x}\ , \tag{25}$$

$$2)E(\gamma\ ) = \frac{a}{m}x\ + \ \frac{2m\ a}{m} + \frac{a\ \ -2a\ \ +2K\ a}{m}\ x$$
$$+\ \frac{3m\ a}{2m} - \frac{2m\ a}{3m} + \frac{(m\ (a\ \ -2a\ ) + 2m\ a\ K\ )}{2m}\ \ + K\ a\ \ + o(1), \tag{26}$$

$$3)E(\gamma\ ) = \frac{a}{m}x\ + \ \frac{9m\ a}{2m} + \frac{(3a\ (a\ \ -2a\ ) + 3a\ K\ )}{m}\ x$$
$$+\ \frac{9m\ a}{m} - \frac{3m\ a}{m} + \frac{6m\ a\ (a\ \ -2a\ ) + 6m\ a\ K}{m}\ x$$
$$+\ \frac{6a\ \ -6a\ a\ \ +a\ \ +3(a\ \ -2a\ )a\ K\ \ +3a\ a}{m}\ x + o(x), \tag{27}$$

$$4)E(\gamma\ ) = \frac{a}{m}x\ \ + \ \ \frac{8m\ \ a}{m} + \frac{6a\ (a\ \ - 2a\ ) + 4a\ K}{m}\ \ x$$

$$+\ \ \frac{30m\ a}{m} - \frac{8m\ \ a}{m} + \frac{27m\ \ a\ (a\ \ - 2a\ \ ) + 18m\ \ a\ K}{m}\ \ x$$

$$+\ \ \frac{36a\ \ - 36a\ \ a\ \ + 4a\ \ a\ \ + 3a\ \ + 12a\ (a\ \ - 2a\ )K\ \ + 6a\ \ a\ \ K}{m}\ \ x$$

$$+o(x\ ), \tag{28}$$

burada,

$$a\ \ = E\ \xi\ \ \ ,\qquad m\ \ = E\ \eta\ \ \ ,\qquad K\ = \frac{E\ \ \theta}{E\ \ \xi}\ \ k = 1{,}3\ \ \text{ve}\ i = 1{,}2$$

dır.

İspat: Teorem 2.2.2.2 den elde edilen (1)-(4) eşitlikleri yardımıyla $\gamma\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentini yazalım:

$$E(\gamma\ ) = E(\tau\ \ + \theta\ ) = E(\tau\ ) + E(\theta\ )\ ; \tag{29}$$

burada $K\ \ = E(\theta\ )/E(\xi\ )$ olduğu literatürde bilinmektedir. $E(\theta\ ) = a\ \ K$ ve Teorem 2.2.2.2 nin (1) eşitliği (29) eşitliğinde yerine yazılır,

$$E(\gamma\ ) = E(\tau\ ) + E(\theta\ )$$

$$= \frac{a}{m}x + \frac{m\ \ a}{2m} + o\ \ \frac{1}{x}\ \ + a\ \ K$$

$$= \frac{a}{m}x + \frac{m\ \ a}{2m} + a\ \ K\ \ + o\ \ \frac{1}{x} \tag{30}$$

$$\gamma\ \ = \tau\ \ + \theta\ \ \ ;\ \ \gamma\ \ = (\tau\ \ + \theta\ )\ \ = \tau\ \ + 2\tau\ \theta\ \ + \theta \tag{31}$$

ve (31) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$E(\ \gamma\ ) = E(\tau\ ) + 2E(\tau\ )E(\theta\ ) + E(\theta\ ) \tag{32}$$

$$= \frac{a}{m}x\ \ + \ \ \frac{2m\ \ a}{m} + \frac{a\ \ - 2a}{m}\ \ x + \ \ \frac{3m\ \ a}{2m} - \frac{2m\ \ a}{3m} + \frac{m\ \ (a\ \ - 2a\ )}{2m}$$

$$+\frac{2K\ \ a}{m}x + \frac{2m\ \ a}{2m}K\ \ + K\ \ a\ \ + o(1) \tag{33}$$

$$= \frac{a}{m}x\ \ + \ \ \frac{2m\ \ a}{m} + \frac{a\ \ - 2a\ \ + 2K\ \ a}{m}\ \ x$$

$$+\ \ \frac{3m\ \ a}{2m} - \frac{2m\ \ a}{3m} + \frac{(m\ \ (a\ \ - 2a\ ) + 2m\ \ a\ \ K\ )}{2m}$$

$$+K\ \ a\ \ + o(1), \tag{34}$$

elde edilir. Burada ,

$$K = \frac{E(\theta\ )}{E(\xi\ )}, \qquad E(\theta\ ) = a\ K$$

dır.

Benzer şekilde $\gamma\ (x)$ sınır fonksiyonelinin üçüncü ve dördüncü momentlerinin asimptotik açılımları elde etmek münkündür.

Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, Teorem 2.2.2.3 de X(t) sürecinin $\gamma\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri için elde edilen asimptotik açılımdaki ilk üç terim kullanılarak, bu momentler için yaklaşık değerler oluşturulmuştur. Bunun için, η rasgele değişkeninin (2,20) paremetreli Erlang dağılımı göz önünde bulundurulmuş ve bu değerler sembolik olarak $E\gamma\ (x)$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, bu momentler için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları ise $E\gamma\ (x)$ ile gösterilmiştir. Ayrıca her bir simülasyon değeri, Matlab programı ile sürecin $n = 10$ sayıda realizasyonu üretilerek elde edilmiştir. Bu değerler yardımıyla, sürecin $\gamma\ (x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momentleri için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur. Burada $\Delta\ , \delta$ ve AP sırasıyla momentlerin yaklaşık değerleri ile simülasyon değerleri arasındaki mutlak hatayı, nispi hatayı ve doğruluk yüzdelerini göstermektedir.

$$\Delta\ = E\gamma\ (x)\ - E\gamma\ (x)\ ;\ \delta\ = \frac{\Delta}{E\gamma\ (x)} 100\%\ ;\ AP\ = 100\% - \delta\ , \qquad k = 1,2,3,4.$$

Tablo 9. $E\gamma\ (x)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	$E\gamma\ (x)$	$E\gamma\ (x)$	Δ	δ	(%)Ap
10	51,371	51,0375	0,3335	0,649198964	99,35080104
20	101,392	101,0375	0,3545	0,349633107	99,65036689
30	151,36	151,0375	0,3225	0,213068182	99,78693182
40	201,373	201,0375	0,3355	0,166606248	99,83339375
50	251,372	251,0375	0,3345	0,133069713	99,86693029
60	301,387	301,0375	0,3495	0,11596386	99,88403614
70	351,371	351,0375	0,3335	0,094913923	99,90508608
80	401,404	401,0375	0,3665	0,091304521	99,90869548
90	451,388	451,0375	0,3505	0,077649384	99,92235062
100	501,361	501,0375	0,3235	0,064524365	99,93547564

Tablo 10. Eγ (x) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	Eγ (x)	Eγ (x)	Δ	δ	(%)Ap
10	2677,599	2678,09375	0,49475	0,018477375	99,98152263
20	10356,251	10353,09375	3,15725	0,030486418	99,96951358
30	23028,116	23028,09375	0,02225	9,6621E-05	99,99990338
40	40703,14	40703,09375	0,04625	0,000113628	99,99988637
50	63376,583	63378,09375	1,51075	0,002383767	99,99761623
60	91060,481	91053,09375	7,38725	0,008112465	99,99188753
70	123724,936	123728,0938	3,15775	0,002552234	99,99744777
80	161426,340	161403,0938	23,24625	0,014400531	99,98559947
90	204090,453	204078,0938	12,35925	0,006055771	99,99394423
100	251737,996	251753,0938	15,09775	0,005997406	99,99400259

Tablo 11. Eγ (x) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	Eγ (x)	Eγ (x)	Δ	δ	(%)Ap
10	141571,040	141378,125	192,915	0,136267276	99,86373272
20	1065542,315	1064631,25	911,065	0,08550247	99,91449753
30	3520464,514	3519759,375	705,139	0,020029715	99,97997029
40	8257677,360	8256762,5	914,86	0,011078902	99,9889211
50	16026230,353	16025640,63	589,728	0,003679767	99,99632023
60	27581088,319	27576393,75	4694,569	0,017020971	99,98297903
70	43658818,429	43659021,88	203,446	0,000465991	99,99953401
80	65039239,292	65023525	15714,292	0,024161248	99,97583875
90	92436914,349	92419903,13	17011,224	0,018403063	99,98159694
100	126588476,827	126598156,3	9679,423	0,00764637	99,99235363

Tablo 12. Eγ (x) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

x	Eγ (x)	Eγ (x)	Δ	δ	(%)Ap
10	7590765,572	7613437,5	22671,928	0,298677752	99,70132225
20	110427045,718	110453750	26704,282	0,024182737	99,97581726
30	540834898,989	541020937,5	186038,511	0,034398392	99,96560161
40	1681466306,335	1681815000	348693,665	0,020737476	99,97926252
50	4064612215,234	4065335938	723722,266	0,017805444	99,98219456
60	8374631371,275	8374083750	547621,275	0,006539049	99,99346095
70	15438579861,397	15440558438	1978576,103	0,012815791	99,98718421
80	26253245760,095	26247260000	5985760,095	0,022800076	99,97719992
90	41930678557,332	41926688438	3990119,832	0,009515992	99,99048401
100	63750740348,896	63761343750	10603401,1	0,016632593	99,98336741

2.2.3. Müdahalenin Pareto Dağılımına Sahip Olması Durumunda X(t) Sürecinin Sınır Fonksiyonellerinin Momentleri İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda ζ rasgele değişkenin $(\alpha, \lambda), \alpha > 0, \lambda > 0$ paremetreli Pareto dağılımına sahip olması durumunda , $\tau\ (\zeta\ )$, $N(\zeta\ )$ ve $\gamma\ (\zeta\ )$ sınır fonksiyonellerinin bazı momentleri için asimptotik açılımlar elde edilecektir. Bunun için kısım 2.2.2 de verilen Teorem 2.2.2.1 ve Teorem 2.2.2.2 de $x \to \infty$ iken sürecin sınır fonksiyonelleri için elde edilen asimptotik açılımlar kullanacaktır. Burada ζ rasgele değişkeni (α, λ), $\alpha > 0, \lambda > 0$ paremetreli, Pareto dağılımına sahip olduğundan dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda}{x} \qquad \lambda > 0, \quad > 0\,; \quad \in [\ \ , +\infty). \tag{35}$$

$N(\zeta\ )$ sınır fonksiyonellinin ilk dört momenti için asimptotik açılımları incelenmeden önce aşağıdaki yardımcı teorem verilsin.

Yardımcı teorem 2.2.3.1 Eğer $g(x)$, $(g: R \ \to R)$ fonksiyonu sınırlı ve

$$\lim_{\to} \frac{g(x)}{x} = c \tag{36}$$

ise $(\alpha > 0, \ \in R)$ bu taktirde $\alpha > 0$ iken eşitlik (37) verilen bağıntı doğrudur.

$$\lim_{\to} \quad g\ \frac{\lambda}{t^{-}}\ dt = 0. \tag{37}$$

(Kesemen, Yetim 2012)

Sonuç: g(x) fonksiyonu, yardımcı teorem 2.2.3.1 deki gibi tanımlansın ve R (x) fonksiyonu $R\ (x) \equiv x\ \ g(x)$, $n = -1,0,1,2, \ldots$ olsun. Her $\alpha > 0$ ve $\lambda \longrightarrow 0$ iken eşitlik (38) verilen asimptotik bağıntı doğrudur.

$$R\ \left(\frac{\lambda}{t\ /}\right) dt = o(\lambda\ ). \tag{38}$$

Teoerem: 2.2.3.1. Kısım 2.2.2 de verilen Teorem 2.2.2.1 in koşulları sağlasın. Bu taktirde $\alpha > 1$ için $E(\zeta\ ) \to \infty$ iken $N(\zeta\ )$ sınır fonksiyonellinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar verilebilir:

$$1)EN\ (\zeta\ ) = \frac{\alpha}{m\ (\alpha - 1)}\lambda + \frac{m}{2m} + o\ \frac{1}{\lambda}\ , \tag{39}$$

$$2)EN\ (\zeta\ ) = \frac{\alpha}{m\ (\alpha - 2)}\lambda\ +\ \frac{2m}{m} - \frac{1}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha - 1}\lambda + \frac{3m}{2m} - \frac{2m}{3m} - \frac{m}{2m}\ + o(1), \tag{40}$$

$$3)EN\ (\zeta\ ) = \frac{\alpha}{m\ (\alpha - 3)}\lambda\ +\ \frac{9m}{2m} - \frac{3}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha - 2}\lambda$$

$$+\ \frac{9m}{m} - \frac{3m}{m} - \frac{6m}{m} + \frac{1}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha - 1}\lambda + o(\lambda), \tag{41}$$

$$4)EN\ (\zeta\ ) = \frac{\alpha}{m\ (\alpha - 4)}\lambda\ +\ \frac{8m}{m} - \frac{6}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha - 3}\lambda$$

$$+\ \frac{30m}{m} - \frac{8m}{m} - \frac{27m}{m} + \frac{7}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha - 2}\lambda\ + o(\lambda\ ), \tag{42}$$

İspat: $E(\eta\ ) < \infty$ koşulu altında, Teorem 2.2.2.1 den (17) eşitliğine göre aşağıdaki asimptotik açılım mevcuttur:

$$EN\ (x) = \frac{x}{m} + \frac{m}{2m} + R\ (x), \qquad x \to \infty \tag{43}$$

burada verilen $R\ (x) = g(x)$ ve $g(x) = o(1)$ dır. Bu durumda,

$$EN\ (\zeta\ ) = \quad EN\ (v)d\pi(v) = \quad EN\ (v)f_{\ ,}\ (v)dv$$

$$= \qquad \frac{v}{m} + \frac{m}{2m} + R\ (v)\quad f_{\ ,}\ (v)dv$$

$$= \frac{1}{m} \quad vf_{\ ,}\ (v)dv + \frac{m}{2m} \quad f_{\ ,}\ (v)dv + \quad R\ (v)f_{\ ,}\ (v)dv$$

$$= \frac{1}{m}E(\zeta\ ) + \frac{m}{2m} + E(R\ (\zeta\ ) \tag{44}$$

dir. Burada,

$$E(\zeta\ ) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\lambda \ \ ; \ \alpha > 1$$

olduğu olasılık teorisinden bilinmektedir. $E(R\ \ (\zeta\ \ )$ aşağıdaki gibi verilebilir:

$$E(R\ \ (\zeta\ ) = \quad R\ \ (v)\, f_{\ ,}\ (v)\, dv$$

$$= \alpha.\lambda \qquad v^{(\quad)} R\ \ (v) dv = \qquad \alpha.\lambda\ \ v^{(\quad)} g(v) dv$$

$$= \quad g\ \ \frac{\lambda}{t^{-}}\ \ dt\ , \tag{45}$$

bu durumda Yardımcı teorem 2.2.3.1 e göre (40) eşitliğinden her $\alpha > 1$ için

$$\lim_{\rightarrow} E(R\ \ (\zeta\ ) = 0\ ; \quad E(R\ \ (\zeta\ ) = \frac{1}{\lambda} \tag{46}$$

elde edilir. Bu durumda (46) eşitliği, (44) eşitliğinde yerine yazılırsa, $N\ (\zeta\ \ )$ sınır fonksiyonelinin birinci momenti, (39) eşitliği gibi yazılabilir.

Benzer şekilde, $N\ \ (\zeta\ \ )$ sınır fonksiyonelinin ikinci, üçüncü ve dördüncü momentleri için $\alpha > 1$ iken asimptotik açılımlar elde etmek münkündür. $E(\eta\ \ ) < \infty$ koşulları altında, Teorem 2.2.2.1 e göre sırasıyla (18), (19) ve (20) eşitliklerden

$$EN\ \ (\zeta\ ) = \frac{1}{m} E(\zeta\ ) + \quad \frac{2m}{m} - \frac{1}{m}\ \ E(\zeta\ ) + \quad \frac{3m}{2m} - \frac{2m}{3m} - \frac{m}{2m}\ \ + E\ \ R\ \ (\zeta\ \ )\ , \tag{47}$$

$$EN\ \ (\zeta\ ) = \frac{1}{m} E(\zeta\ ) + \quad \frac{9m}{2m} - \frac{3}{m}\ \ E(\zeta\ ) + \quad \frac{9m}{m} - \frac{3m}{m} - \frac{6m}{m} + \frac{1}{m}\ \ E(\zeta\ \ )$$
$$+ E\ \ R\ \ (\zeta\ \ )\ , \tag{48}$$

$$EN\ \ (\zeta\ ) = \frac{1}{m} E(\zeta\ ) + \quad \frac{8m}{m} - \frac{6}{m}\ \ E(\zeta\ ) + \quad \frac{30m}{m} - \frac{8m}{m} - \frac{27m}{m} + \frac{7}{m}\ \ E(\zeta\ \ )$$
$$+ E\ \ R\ \ (\zeta\ \ )\ , \tag{49}$$

elde edileceği açıkça görülmektedir. Burada

$$E(\zeta\ \ ) = \frac{\alpha}{\alpha - n}\lambda \ \ , n\ = 1,2, \ldots \tag{50}$$

olduğu olasılık teorisinden bilinmektedir. Bu durumda $E\,R\,(\zeta\,)$, $E\,R\,(\zeta\,)$ ve $E(R\,(\zeta\,))$ fonksiyonları hesaplanmalıdır. Her $\alpha > 1$ için $E(\zeta\,) \to \infty$ iken Yardımcı Teorem 2.2.3.1 kullanılarak

$$E\,R\,(\zeta\,) = o(1), \tag{51}$$

$$E\,R\,(\zeta\,) = o(\lambda), \tag{52}$$

$$E\,R\,(\zeta\,) = o(\lambda\,), \tag{53}$$

elde edilir. Son olarak sırasıyla (51)-(53) eşitlikleri (47)-(49) eşitliklerinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, Teorem 2.2.3.1 de X(t) sürecinin $N\,(\zeta\,)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için elde edilen asimptotik açılımdaki ilk üç terim kullanılarak, bu momentler için yaklaşık değerler oluşturulmuştur. Bunun için, η rasgele değişkeninin (2,20) paremetreli Erlang dağılımı göz önünde bulundurulmuş ve bu değerler sembolik olarak $EN\,(\zeta\,)$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, bu momentler için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları ise $EN\,(\zeta\,)$ ile gösterilmiştir. Ayrıca her bir simülasyon değeri, Matlab programı ile sürecin $n = 10$ sayıda realizasyonu üretilerek elde edilmiştir. Bu değerler yardımıyla, sürecin $N\,(\zeta\,)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur. Burada Δ, δ ve AP sırasıyla momentlerin yaklaşık değerleri ile simülasyon değerleri arasındaki mutlak hatayı, nispi hatayı ve doğruluk yüzdelerini göstermektedir.

$$\Delta = EN\,(\zeta\,) - EN\,(\zeta\,)\;;\; \delta = \frac{\Delta}{EN\,(\zeta\,)}100\%\;;\; AP = 100\% - \delta\,, \qquad k = 1,2,3,4.$$

Tablo 13. $EN\,(\zeta\,)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

	( )	( )	Δ		(%)
1	13,249	13,250	0,001	0,007547739	99,99245226
2	25,749	25,750	0,001	0,003883646	99,99611635
3	38,254	38,250	0,004	0,010456423	99,98954358

Tablo 14’ün devamı

4	50,742	50,750	0,008	0,015766032	99,98423397
5	63,246	63,250	0,004	0,006324511	99,99367549
6	75,748	75,750	0,002	0,002640334	99,99735967
7	88,246	88,250	0,004	0,004532783	99,99546722
8	100,760	100,750	0,010	0,009924573	99,99007543
9	113,237	113,250	0,013	0,011480347	99,98851965
10	125,744	125,750	0,006	0,004771599	99,9952284

Tablo 15. EN (ζ) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

λ	EN (ζ)	EN (ζ)	Δ	δ	(%)Ap
1	192,279	192,2916	0,0126	0,006552978	99,99344702
2	717,247	717,2916	0,0446	0,006218221	99,99378178
3	1575,435	1575,6250	0,19	0,012060161	99,98793984
4	2764,102	2767,2916	3,1896	0,115393716	99,88460628
5	4290,577	4292,2916	1,7146	0,039961991	99,96003801
6	6150,398	6150,625	0,227	0,003690818	99,99630918
7	8342,890	8342,2916	0,5984	0,007172574	99,99282743
8	10871,342	10867,2916	4,0504	0,03725759	99,96274241
9	13721,440	13725,625	4,185	0,030499714	99,96950029
10	16914,569	16917,2916	2,7226	0,016096183	99,98390382

Tablo 16. EN (ζ) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

λ	EN (ζ)	EN (ζ)	Δ	δ	(%)Ap
1	3165,580	3165,625	0,045	0,00142154	99,99857846
2	22559,852	22581,250	21,398	0,094849913	99,90515009
3	72939,678	73246,875	307,197	0,42116583	99,57883417
4	168881,249	170162,500	1281,251	0,75866978	99,24133022
5	327490,314	328328,125	837,811	0,255827719	99,74417228
6	562757,902	562743,750	14,152	0,002514758	99,99748524
7	889138,188	888409,375	728,813	0,081968473	99,91803153
8	1321924,706	1320325,000	1599,706	0,121013398	99,8789866
9	1871384,299	1873490,625	2106,326	0,112554434	99,88744557
10	2559862,448	2562906,250	3043,802	0,118904905	99,8810951

Tablo 17. $EN\ (\zeta\ )$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

λ	$EN\ (\zeta\ )$	$EN\ (\zeta\ )$	Δ	δ	(%)Ap
1	65923,872	66666,660	742,788	1,126736002	98,873264
2	901199,124	926666,666	25467,542	2,825961691	97,17403831
3	4190810,907	4470000,000	279189,093	6,661934866	93,33806513
4	12798130,83	13786666,670	988535,835	7,724064147	92,27593585
5	32038099,79	33166666,670	1128566,874	3,522577435	96,47742256
6	72150467,010	68100000,000	4050467,01	5,6139165	94,3860865
7	123238726,9	125276666,700	2037939,782	1,653652089	98,34634791
8	208572722	212586666,700	4013944,692	1,924482096	98,0755179
9	331683332,8	339120000,000	7436667,198	2,242098551	97,75790145
10	501102326,3	515166666,700	14064340,33	2,806680311	97,19331969

Teorem:2.2.3.2. Teorem 2.2.2.2 nin koşulları sağlansın. Bu taktirde, her $\alpha > 4$ için $E(\zeta\ ) \to \infty$ iken X(t) sürecinin $\tau\ (\zeta\ )$ sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$1)\ E\ \tau\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-1}\lambda + \frac{m\ a}{2m} + o\ \frac{1}{\lambda}\ , \qquad \alpha > 1 \qquad (54)$$

$$2)\ E\tau\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-2}\lambda\ +\ \frac{2m\ a}{m} + \frac{a\ -2a}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\lambda$$

$$+\ \frac{3m\ a}{2m} - \frac{2m\ a}{3m} + \frac{m\ (a\ -2a\ )}{2m}\ + o(1), \qquad \alpha > 2 \qquad (55)$$

$$3)E\tau\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-3}\lambda\ +\ \frac{9m\ a}{2m} + \frac{3a\ (a\ -2a\ )}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha-2}\lambda$$

$$+\ \frac{9m\ a}{m} - \frac{3m\ a}{m} + \frac{6a\ m\ (a\ -2a\ )}{m} + \frac{6a\ -6a\ a\ +a}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha-1}\lambda$$

$$+o(\lambda)\ , \qquad \alpha > 3 \qquad (56)$$

$$4)E\tau\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-4}\lambda\ +\ \frac{8m\ a}{m} + \frac{6a\ (a\ -2a\ )}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha-3}\lambda$$

$$+\ \frac{30m\ a}{m} - \frac{8m\ a}{m} + \frac{27m\ a\ (a\ -2a\ )}{m} + \frac{36a\ -36a\ a\ +4a\ a\ +3a}{m}\ \frac{\alpha}{\alpha-2}\lambda$$

$$+o(\lambda\ )\ , \qquad \alpha > 4 \qquad (57)$$

burada $a\ = E\ \xi\ $, $m\ = E\ \eta\ $, $k = 1,4$ dır.

İspat: Bu teoremin ispatı bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem:2.2.3.3. Teorem 2.2.2.3 nin koşulları sağlansın. Bu taktirde, her $\alpha > 4$ için $E(\zeta\ ) \to \infty$ iken X(t) sürecinin $\gamma\ (\zeta\ )$ sınır fonksiyonelinin ilk dört başlangıç momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$1)E\gamma\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-1}\lambda + \frac{m}{2m} + K\quad a\ + o\ \frac{1}{\lambda}\ ,\quad \alpha > 1 \tag{58}$$

$$2)E\gamma\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-2}\lambda\ + \ \frac{2m\ a}{m} + \frac{a\ \ -2a\ \ +2K\ a}{m}\ \ \frac{\alpha}{\alpha-1}\lambda$$

$$+\ \frac{3m\ a}{2m} - \frac{2m\ a}{3m} + \frac{(m\ (a\ \ -2a\ ) + 2m\ a\ K\ )}{2m}\quad + K\ a\ \ + o(1),\qquad \alpha > 2 \tag{59}$$

$$3)E\gamma\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-3}\lambda\ + \ \frac{9m\ a}{2m} + \frac{(3a\ (a\ \ -2a\ ) + 3a\ K\ )}{m}\ \ \frac{\alpha}{\alpha-2}\lambda$$

$$+\ \frac{9m\ a}{m} - \frac{3m\ a}{m} + \frac{6m\ a\ (a\ \ -2a\ ) + 6m\ a\ K}{m}\ \ \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$+\ \frac{6a\ \ -6a\ a\ \ +a\ \ +3(a\ \ -2a\ )a\ K\ \ +3a\ a}{m}\ \ \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$\lambda + o(\lambda),\qquad \alpha > 3 \tag{60}$$

$$4)E\gamma\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}\frac{\alpha}{\alpha-4}\lambda\ + \ \frac{8m\ a}{m} + \frac{6a\ (a\ \ -2a\ ) + 4a\ K}{m}\ \ \frac{\alpha}{\alpha-3}\lambda$$

$$+\ \frac{30m\ a}{m} - \frac{8m\ a}{m} + \frac{27m\ a\ (a\ \ -2a\ ) + 18m\ a\ K}{m}\ \ \frac{\alpha}{\alpha-2}\lambda$$

$$+\ \frac{36a\ \ -36a\ a\ \ +4a\ a\ \ +3a\ \ +12a\ (a\ \ -2a\ )K\ \ +6a\ a\ K}{m}\ \ \frac{\alpha}{\alpha-2}\lambda$$

$$+o(\lambda\ ),\qquad \alpha > 4 \tag{61}$$

burada,

$$a\ \ = E\ \xi\ \ ,\qquad m\ \ = E\ \eta\ \ ,\qquad K\ = \frac{E\ \theta}{E\ \xi}\quad k = 1{,}3\ \text{ ve } i = 1{,}2$$

dır.

İspat: $E(\eta\ ) < \infty$ koşulları altında, Teorem 2.2.2.3 den (25) eşitliğine göre aşağıdaki asimptotik açılım mevcuttur:

$$E(\gamma\ ) = \frac{a}{m}x + \frac{m}{2m} + K\quad a\ \ + R\ (x)\qquad x \to \infty \tag{62}$$

burada verilen $R\ (x) = g(x)$ ve $g(x) = o\ \ -$ dir. Bu durumda,

$$E\gamma\ (\zeta\ ) = \quad E\gamma\ (v)d\pi(v) = \quad E\gamma\ (v)f_{\ ,}\ (v)dv$$

$$= \quad \frac{a}{m}v + \frac{m}{2m} + K \quad a \ + R\ (v) \quad f_{\ ,}\ (v)dv$$

$$= \frac{a}{m} \quad vf_{\ ,}\ (v)dv + \frac{m}{2m} + K \quad a \quad f_{\ ,}\ (v)dv + \quad R\ (v)\, f_{\ ,}\ (v)dv$$

$$= \frac{a}{m}E(\zeta\ ) + \frac{m}{2m} + K \quad a \ + E(R\ (\zeta\ ) \tag{63}$$

dir, burada

$$E(\zeta\ ) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\lambda\ , \qquad \alpha > 1$$

olduğu olasılık teorisinden bilinmektedir ve $E(R\ (\zeta\ )$ aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$E(R\ (\zeta\ ) = \quad R\ (v)\, f_{\ ,}\ (v)\, dv$$

$$= \alpha.\lambda \qquad v^{(\quad)}R\ (v)dv = \quad \alpha.\lambda\ \ v^{(\quad)}g(v)dv$$

$$= \quad g\ \frac{\lambda}{t^{-}}\ \ dt \tag{64}$$

bu durumda Yardımcı teorem 2.2.3.1 e göre (46) eşitliğinden her $\alpha > 1$ için

$$\lim_{\to}\ E(R\ (\zeta\ ) = 0 \quad ; \quad E(R\ (\zeta\ ) = \frac{1}{\lambda} \tag{65}$$

elde edilir. Bu durumda (65) eşitliği, (63) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\gamma\ (\zeta\ )$ sınır fonksiyonelinin birinci momenti, (58) eşitliği gibi yazılabilir.

Benzer şekilde, $\gamma\ (\zeta\ )$ sınır fonksiyonelinin ikinci, üçüncü ve dördüncü momentleri için $\alpha > 4$ iken asimptotik açılımlar elde etmek münkündür. $E(\eta\ ) < \infty$ koşulu altında, Teorem 2.2.2.3 e göre sırasıyla (25),(26) ve (27) eşitliklerinden

$$2)\ E\gamma\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}E(\zeta\ ) + \frac{2m\ a}{m} + \frac{a\ -2a\ +2K\ a}{m}\ E(\zeta\ )$$

$$+ \frac{3m\ a}{2m} - \frac{2m\ a}{3m} + \frac{(m\ (a\ -2a\ ) + 2m\ a\ K\ )}{2m}$$

$$+K\ a\ + E\ R\ (\zeta\ )\ , \qquad \alpha > 2 \tag{66}$$

$$3)E\gamma\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}E(\zeta\ ) + \left(\frac{9m\ a}{2m} + \frac{(3a\ (a\ -2a\ ) + 3a\ K\ )}{m}\right)E(\zeta\ )$$

$$+\left(\frac{9m\ a}{m} - \frac{3m\ a}{m} + \frac{6m\ a\ (a\ -2a\ ) + 6m\ a\ K}{m}\right)E(\zeta\ )$$

$$+\frac{6a\ -6a\ a\ +a\ +3(a\ -2a\ )a\ K\ +3a\ a}{m}E(\zeta\ )$$

$$+E\ R\ (\zeta\ )\ , \qquad \alpha > 3 \tag{67}$$

$$4)E\gamma\ (\zeta\ ) = \frac{a}{m}E(\zeta\ ) + \left(\frac{8m\ a}{m} + \frac{6a\ (a\ -2a\ ) + 4a\ K}{m}\right)E(\zeta\ )$$

$$+\left(\frac{30m\ a}{m} - \frac{8m\ a}{m} + \frac{27m\ a\ (a\ -2a\ ) + 18m\ a\ K}{m}\right.$$

$$\left.+\frac{36a\ -36a\ a\ +4a\ a\ +3a\ +12a\ (a\ -2a\ )K\ +6a\ a\ K}{m}\right)E(\zeta\ )$$

$$+E\ R\ (\zeta\ )\ , \qquad \alpha > 4 \tag{68}$$

elde edileceği açıkça görülmektedir. Burada,

$$E(\zeta\ ) = \frac{\alpha}{\alpha - n}\lambda\ \ , n = 1,2,\ldots \tag{69}$$

olduğu olasılık teorisinden bilinmektedir. Bu durumda $E\ R\ (\zeta\ )$, $E\ R\ (\zeta\ )$ ve $E(R\ (\zeta\ ))$ fonksiyonları hesaplanmalıdır. Her $\alpha > 1$ için $E(\zeta\ ) \to \infty$ iken Yardımcı Teorem 2.2.3.1 kullanılır ise

$$E\ R\ (\zeta\ )\ = o(1), \tag{70}$$

$$E\ R\ (\zeta\ )\ = o(\lambda), \tag{71}$$

$$E\ R\ (\zeta\ )\ = o(\lambda\ ), \tag{72}$$

elde edilir. Son olarak sırasıyla (70)-(72) eşitlikleri (66)-(68) eşitliklerinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda, Teorem 2.2.3.3 de X(t) sürecinin $\gamma(\zeta)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için elde edilen asimptotik açılımdaki ilk üç terim kullanılarak, bu momentler için yaklaşık değerler oluşturulmuştur. Bunun için, η rasgele değişkeninin (2,20) paremetreli Erlang dağılımı göz önünde bulundurulmuş ve bu değerler sembolik olarak $E\gamma(\zeta)$ ile gösterilmiştir. Benzer şekilde, bu momentler için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilen simülasyon değerleri ise $E\gamma(\zeta)$ ile gösterilmiştir. Ayrıca her bir simülasyon değeri, Matlab programı ile sürecin $n = 10$ sayıda realizasyonu üretilerek elde edilmiştir. Bu değerler yardımıyla, sürecin $\gamma(\zeta)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur. Burada Δ, δ ve AP sırasıyla bu momentlerin yaklaşık değerleri ile simülasyon değerleri arasındaki mutlak hatayı, nispi hatayı ve doğruluk yüzdelerini göstermektedir.

$$\Delta = |E\gamma(\zeta) - E\gamma(\zeta)|;\ \delta = \frac{\Delta}{E\gamma(\zeta)}100\%\ ;\ AP = 100\% - \delta\ , \qquad k = 1,2,3,4.$$

Tablo 18. $E\gamma(\zeta)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

λ	$E\gamma(\zeta)$	$E\gamma(\zeta)$	Δ	δ	(%)Ap
5	32,624	32,2875	0,3365	1,03144924	98,96855076
6	38,881	38,5375	0,3435	0,883464931	99,11653507
7	45,123	44,7875	0,3355	0,743523259	99,25647674
8	51,366	51,0375	0,3285	0,639528093	99,36047191
9	57,628	57,2875	0,3405	0,59085861	99,40914139
10	63,886	63,5375	0,3485	0,545502927	99,45449707
11	70,125	69,7875	0,3375	0,481283422	99,51871658
12	76,374	76,0375	0,3365	0,440594967	99,55940503
13	82,631	82,2875	0,3435	0,41570355	99,58429645
14	88,871	88,5375	0,3335	0,375263022	99,62473698
15	95,132	94,7875	0,3445	0,362128411	99,63787159

Tablo 19. $E\gamma(\zeta)$ için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

λ	$E\gamma(\zeta)$	$E\gamma(\zeta)$	Δ	δ	(%)Ap
5	1153,958	1154,135417	0,177416667	0,015374621	99,98462538
6	1635,262	1634,34375	0,91825	0,056153081	99,94384692
7	2197,909	2197,885417	0,023583333	0,00107299	99,99892701
8	2843,246	2844,760417	1,514416667	0,053263652	99,94673635

Tablo 20’in devamı

9	3575,917	3574,96875	0,94825	0,026517674	99,97348233
10	4390,345	4388,510417	1,834583333	0,041786769	99,95821323
11	5285,55	5285,385417	0,164583333	0,003113836	99,99688616
12	6265,192	6265,59375	0,40175	0,006412413	99,99358759
13	7331,252	7329,135417	2,116583333	0,028870694	99,97112931
14	8475,047	8476,010417	0,963416667	0,011367685	99,98863231
15	9709,324	9706,21875	3,10525	0,031982144	99,96801786

Tablo 21. Eγ (ζ) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

λ	Eγ (ζ)	Eγ (ζ)	Δ	δ	(%)Ap
5	46171,295	45978,51563	192,779375	0,417530795	99,58246921
6	77620,436	77392,96875	227,46725	0,293050724	99,70694928
7	120789,619	120588,6719	200,947125	0,166361254	99,83363875
8	177306,190	177440,625	134,435	0,075820816	99,92417918
9	250343,547	249823,8281	519,718875	0,207602265	99,79239773
10	339886,508	339613,2813	273,22675	0,080387642	99,91961236
11	449495,719	448683,9844	811,734625	0,180587843	99,81941216
12	579107,065	578910,9375	196,1275	0,033867226	99,96613277
13	733100,690	732169,1406	931,549375	0,127069772	99,87293023
14	909865,279	910333,5938	468,31475	0,051470779	99,94852922
15	1115622,645	1115279,297	343,348125	0,030776367	99,969223633

Tablo 22. Eγ (ζ) için asimptotik ve simülasyon sonuçlarının karşılaştırılması

λ	Eγ (ζ)	Eγ (ζ)	Δ	δ	(%)Ap
5	2416203,871	2369359,375	46844,496	1,938764214	98,06123579
6	4634840,225	4761877,500	127037,275	2,740920265	97,25907973
7	8425423,962	8625194,375	199770,413	2,371042857	97,62895714
8	14150336,869	14465560,000	315223,131	2,227672273	97,77232773
9	22472687,441	22864224,375	391536,934	1,742279089	98,25772091
10	33475327,927	34477437,500	1002109,573	2,993576568	97,00642343
11	50850397,648	50036449,375	813948,273	1,600672385	98,39932761
12	69683667,220	70347510,000	663842,78	0,9526519	99,0473481
13	94756321,622	96291869,375	1535547,753	1,620522754	98,37947725
14	124661548,485	128825777,500	4164229,015	3,340427795	96,65957221
15	163562105,223	168980484,375	5418379,152	3,312735028	96,68726497

2.3. X(t) Sürecinin Ergodikliği

Bu bölümde sürecin ergodikliği incelecektir. Bu amaçla aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.3.1. Başlangıç rasgele değişkenler dizisi $\{(\xi\ ,\eta\ ,\zeta\ )\}$, $n \geq 1$ için aşağıdaki ek koşullar sağlansın:

1) $0 < E(\xi\ ) < \infty$,

2) $E(\eta\ ) > 0$,

3) $E\ \eta\ \ < +\infty$,

4) η aritmetik olmayan bir rasgele değişken,

5)$E(\theta\ ) < +\infty$,

6) ζ , rasgele değişkeni (α, λ) parametreli Pareto dağılımına sahip olsun.

Bu durumda X(t) süreci ergodiktir.

İspat: Ele alınan X(t) süreci literatürde "Kesikli Şans Karışımlı Yarı-Markov Süreçleri" diye adlandırılan genel bir stokastik süreçler sınıfına aittir. Bu sınıf için genel ergodik teorem A.N. Skohorod tarafından ispatlanmıştır (Gihman ve Skohorod, 1975). Bu kısımda, sürecin özelliklerinden yararlanılarak, yeterince zayıf şartlar altında süreç için ergodik teorem ispatlanmaya çalışılmıştır. Ele alınan süreç için ergodikliği ispatlamak Teorem 2.3.1 in koşulları sağlandığında, yukarıda adı geçen genel ergodik teoremin şartlarının da sağlandığı anlamına gelmektedir. Bu nedenle, X(t) sürecinin ergodik olabilmesi için aşağıdaki iki varsayımın sağlanması gerekmektedir.

1. Varsayım: X(t) sürecinin içinde gömülü ergodik bir Markov zinciri mevcut olmalıdır. Ele aldığımız durumda, bu zinciri kurmak için öncelikle, 1 olasılığı ile, monoton artan pozitif değerli bir rasgele değişkenler dizisi belirlemek gerekmektedir. Bu amaçla, yukarıda tanımladığımız $\{\tau\ \}$, $n = 1,2,3\ldots$ rasgele değişkenlerini kullanabiliriz. Çünkü tanım gereği, 1 olasılığı ile

$$0 \equiv \tau\ < \tau\ < \tau\ < \cdots < \tau\ < \tau\ \ < \cdots < \infty$$

dır.

Hatırlatalım ki, τ ler X(t) sürecinin kontrol seviyesine düşme anlarıdır ve tanımları gereği Markov momentleridir. Sürecin matematiksel kuruluşuna göre, X(t) sürecinin bu anlardaki değerleri 1 olasılığı ile, $X(\tau\ + 0) =$ dir. $\{\ \ \}$, $n = 1,2,\ldots$, bağımsız rasgele değişkenler dizisi olduğu için $\{X(\tau \; + 0)\}, n = 1,2,...,$ dizisi bir Markov zinciri oluşturur. Ayrıca rasgele değişkenleri (α, λ) parametreli Pareto dağılımına sahip olduklarına göre $\{X(\tau \; + 0)\},\; n = 1,2,...,$ zinciri $\pi(z) = P\,\zeta \; <$ durağan dağılıma sahip bir ergodik zincirdir ve bu zincirin durağan dağılımı,

$$\pi(z) = 1 - \frac{\lambda}{z} \quad , z \in [\lambda, +\infty)$$

dır. Dolayısıyla Teorem 2.3.1 in koşulları altında genel ergodik teoremin 1. Varsayımı sağlanmıştır.

2.Varsayım: $\{\tau\; \}, n = 1,2,3, ...$ Markov momentleri arasında geçen sürenin beklenen değeri sonlu olmalıdır, yani her $n = 1,2,3, ...$ için,

$$E(\tau \; - \tau \;\;) < \infty \tag{73}$$

olmalıdır. $\tau \; - \tau \;\; , n = 2,3, ...,$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduklarından, (2) koşulunun sağlanması için,

$$E\;\tau\;(z) \; < \infty \text{ ve } E(\tau \; - \tau \;\;) \equiv \int^{\infty} E\;\tau\;(z)\; d\pi(z) < \infty,\; n = 2,3, ... \tag{74}$$

integralinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Hatırlanmalıdır ki, Wald özdeşliğine göre,

$$E\;\tau\;(z) \; = E \sum^{(\;)} \xi \;\; = E(\xi\;)E\;N\;(z) \tag{75}$$

olur. Dolayısıyla,

$$E(\tau \; - \tau \;\;) = E(\xi\;) \int^{\infty} E\;N\;(z)\; d\pi(z) \tag{76}$$

olur. Teorem 1'in şartlarına göre $0 < E(\xi\;) < \infty$ dur. Bu durumda (74) koşulunun sağlanması için

$$E\;N\;(z) \; < \infty \qquad \text{ve} \qquad \int E\;N\;(z)\; d\pi(z) < \infty \tag{77}$$

olmalıdır. Bu problemi çözmek için $\{S\}, n \geq 0$, rasgele yürüyüş sürecinin basamak anlarını (v) ve basamak yüksekliklerini (χ) tanımlayalım:

$$\upsilon = \min\{n \geq 1: S > 0\};\ \chi = S = \eta \qquad (78)$$

$$\upsilon = \min\ n \geq 1: S > \chi\ ;\ \chi = S = \eta\ ; m = 1,2,\ldots \qquad (79)$$

olsun. v rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve v ile aynı dağılıma sahip; χ rasgele değişkenlerin de kendi aralarında bağımsız ve χ ile aynı dağılıma sahip oldukları bilinmektedir (Feller,1971). Bu durumda, E.Dynkin prensibine göre aşağıdaki eşitlikler

$$N(z) \equiv \overset{(\ )}{} \upsilon \quad \text{ve} \quad S_{(\ )} = \overset{(\ )}{} \chi \qquad (80)$$

verilebilir. Burada,

$$H(z) \equiv \min\ n \geq 1: \chi > z \qquad (81)$$

dir.

Wald özdeşliğine göre,

$$E(N(z)) = E(H(z))E(v) \qquad (82)$$

olur. $E(H(z))$ fonksiyonu, χ, $n \geq 1$ basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme fonksiyonudur. $E(\eta) > 0$ olduğu için $E(v) < \infty$ olur. Dolayısıyla $E(N(z))$' in sonlu olması için $E(H(z)) \equiv U(z)$ yenileme fonksiyonu sonlu olmalıdır. Bu ise her sonlu z için zaten doğrudur, yani, her $0 < \ < +\infty$ için $U(z) < +\infty$ dır (Feller,1971).

Burada amacımız,

$$U(z)d\pi(z) < \infty$$

olduğunu ispatlamaktır. Fakat her z için $U(z)$ nin sonlu olması burada yeterli değildir.

$$\pi(z) = 1 - \frac{\lambda}{z}^{\alpha}, \qquad z \in [\lambda, +\infty), \alpha > 1$$

olduğuna göre,

$$E\ U\ (\zeta\ ) = \quad U\ (z)d\pi(z) = \ _{\lambda} \ U\ (z)\alpha\lambda^{\alpha}\frac{1}{z^{\alpha}}dz \tag{83}$$

dır.

$E(\eta\ ) < +\infty$ iken , $\mu\ \equiv E(\chi\ \ ) < +\infty$ olduğundan, kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre (Feller,1964), $z \to \infty$ iken,

$$U\ (z) = \frac{z}{\mu} + \frac{\mu}{2\mu} + o(1) \tag{84}$$

olur. Notasyon kısaltmak için,

$$g(z) = U\ (z) - \frac{z}{\mu} - \frac{\mu}{2\mu}$$

olsun. Kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre,

$$\lim_{\to\infty} g(z) = 0$$

dır (Feller, 1964). Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $b \equiv b(\varepsilon)$ sayısı bulmak mümkündür ki, $0 < b(\varepsilon) < +\infty$ olmak üzere her $z \geq b(\varepsilon)$ için

$$0 \leq g(z) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Şimdi (83) ifadesindeki integrali iki kısma ayıralım.

$$E(U\ (\zeta\ )) = \ _{\lambda}^{(\varepsilon)} U\ (z)\alpha\lambda^{\alpha}\frac{1}{z^{\alpha}}dz + \ _{(\varepsilon)}^{\infty} U\ (z)\alpha\lambda^{\alpha}\frac{1}{z^{\alpha}}dz \equiv I\ (\varepsilon) + I\ (\varepsilon) \tag{85}$$

$U\ (z)$ monoton azalmayan bir fonksiyon olduğundan $0 \leq z \leq\ b(\varepsilon)$ için $U\ (z) \leq U\ (b(\varepsilon)\ ) < +\infty$ yazabiliriz. Bunun sonucunda;

$$I\ (\varepsilon) = \ _{\lambda}^{(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha}U\ (z)\frac{1}{z^{\alpha}}dz \ \leq U\ (b(\varepsilon)\ ) \ _{\lambda}^{(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha}z^{\ (\alpha\ \ )}dz \tag{86}$$

burada $\int_{\lambda}^{(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha}z^{\ (\alpha\ \ )}dz < \infty$ sonludur. Çünkü ,

$$\int_{\lambda}^{(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha} z^{(\alpha \quad)} dz = \alpha\lambda^{\alpha} \int_{\lambda}^{(\varepsilon)} z^{(\alpha \quad)} dz = 1 - \left(\frac{\lambda}{b(\varepsilon)}\right)^{\alpha}$$

$\lambda < b(\varepsilon)$ olmasından dolayı

$$\int^{(\varepsilon)} \alpha\lambda \; z^{(\quad)} dz = 1 - \frac{\lambda}{b(\varepsilon)} \equiv M(\varepsilon) > 0$$

dır. Buradan da

$$\int_{\lambda}^{(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha} z^{(\alpha \quad)} dz < \infty \tag{87}$$

olur. (86) ve (87) eşitsizlikleri birlikte gözönüne alınırsa,

$$I\;(\varepsilon) = \int_{\lambda}^{(\varepsilon)} U\;\;(z)\alpha\lambda^{\alpha} z^{(\alpha \quad)} dz \leq M(\varepsilon) U \;\; b(\varepsilon) \;\; < \infty \tag{88}$$

olur. Şimdi de (85) deki ifadenin ikinci kısmındaki ikinci integralin sonlu olduğunu gösterelim.

$$I\;(\varepsilon) = \int_{(\;)} U\;\;(z)\alpha\lambda\;\; z^{(\quad)} dz = \int_{(\;)} \left(\frac{z}{\mu} + \frac{\mu}{2\mu} + g(z)\right) \alpha\lambda\;\; z^{(\quad)}$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_{(\;)} z\alpha\lambda\;\; z^{(\quad)} dz + \frac{\mu}{2\mu} \int_{(\;)} \alpha\lambda\;\; z^{(\quad)} dz + \int_{(\;)} g(z)\alpha\lambda\;\; z^{(\quad)} dz$$

$$I\;(\varepsilon) = \frac{\alpha\lambda}{\mu} \int_{(\;)} z \quad dz + \frac{\mu}{2\mu} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha\lambda}{\mu\;(b(\varepsilon))} + \frac{\mu}{2\mu} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{89}$$

Burada olasılık yoğunluk fonksiyonunun özelliği kullanılmıştır. $b(\varepsilon)$ sayısının tanımından dolayı,

$$U \quad b(\varepsilon) \;\; \leq \frac{b(\varepsilon)}{\mu} + \frac{\mu}{2\mu} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{90}$$

dır. (88) eşitsizliği (90) eşitsizliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\int_{\lambda}^{(\varepsilon)} U\ (z)\alpha\lambda^{\alpha} z^{\ (\alpha\quad)} dz \le \frac{M(\varepsilon)b(\varepsilon)}{\mu} + \frac{M(\varepsilon)\mu}{2\mu} + \frac{M(\varepsilon)\varepsilon}{2} \tag{91}$$

elde edilir. (91) eşitsizliği ile (89) eşitsizliğini birlikte göz önünde bulundurursak,

$$\int_{\lambda}^{\infty} U\ (z)\alpha\lambda^{\alpha} z^{\ (\alpha\quad)} dz \le \frac{M(\varepsilon)b(\varepsilon)}{\mu} + \frac{M(\varepsilon)\mu}{2\mu} + \frac{M(\varepsilon)\varepsilon}{2} + \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{\mu\quad b(\varepsilon)^{\ \alpha}} + \frac{\mu}{2\mu} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan,

$$\int_{\lambda} U\ (z)\alpha\lambda^{\alpha} z^{\ (\alpha\quad)} dz < \infty \tag{92}$$

dır. (83) ve (92) eşitsizliklerini birlikte düşünürsek,

$$\int U\ (z)d\pi(z) < \infty \tag{93}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (93) ve (82) eşitsizliğini göz önünde bulundurursak;

$$E(N\ (z)) < \infty \text{ ve } \int E\ N\ (z)\ d\pi(z) < \infty \tag{94}$$

olur.

$$E(\tau\ (z)) < \infty \text{ ve } E(\tau\ - \tau\ ) \equiv \int^{\infty} E\ \tau\ (z)\ d\pi(z) < \infty, n = 2,3, \ldots$$

olduğu ispatlanmış olur. Bu da 2. varsayımın sağlandığını gösterir. Bu durumda genel ergodik teoreme göre ele aldığımız X(t) süreci, Teorem 2.3.1 in koşulları altında ergodiktir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3. BULGULAR

Bu çalışmada Yarı-Markov süreçlerinin önemli bir sınıfını oluşturan “ Gecikmeli ve Pareto Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci” olarak adlandıralan süreç ele alınmıştır. Bu sürecin fiziksel modeli verilmiş ve matematiksel olarak inşa edilmiştir. Bazı zayıf şartlar altında, sürecin Ergodik olduğunu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti kesin formüllerle ifade edilmiştir.

Ayrıca literatürde ki mevcut bilgilerden yararlanarak $\{\zeta \}$, $n \geq 0$ rasgele değişken dizisinin dağılımı (,) paremetreli Pareto dağılıma sahip olması halinde sürecin bir takım sınır fonksiyonellerine ait ilk dört momentinin asimptotik açılımları ( ) $\rightarrow \infty$ iken elde edilmiştir.

Bunlara ilaveten, elde edilen ilk dört momentin asimptotik sonuçlarının yardımıyla hesaplanan değerlerin, kesin değerlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için özel bir durum ele alınmış ve bu durum için Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak, ödüllü yenileme sürecinin müdahale anını gösteren sınır fonksiyonelinin momentleri ve gecikmeli Pareto müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için değerler elde edilmiş ve bu değerler asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, elde edilen asimptotik açılımların simülasyon sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir.

4. İRDELEME

Markov veya Yarı-Markov süreçleri ile ilgili olan birçok teorik çalışmalar literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğunda sonuçlar teorik bakımından önemli olsalar da uygulama ihtiyacını karşılayacak nitelikte değildir. Buna karşın kesin ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalar da vardır. Fakat bu çalışmaların eksik yönü ele alınan modellerin gereğinden fazla idealize edilmiş olmasıdır. Bu çalışmaların her yönüyle incelenmemesinin temel nedeni, bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristikleri çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahiptir. Özellikle müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler yeterince geniş bir sınıfa ait olduklarından sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur. Literatürde, son yıllarda asimptotik yöntemler uygulanarak yaklaşık, fakat pratik öneme sahip olan asimptotik sonuçlar elde etmeğe yönelik birçok değerli çalışmalar ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar genellikle sürecinin sınır fonksiyonelleri ile ilgilidirler. Fakat birçok pratik problemin çözümünde sınır fonksiyonellerinin yanı sıra sürecin ergodik dağılımının bilinmesi de büyük önem taşımaktadır.

Bu çalışmada model, bir bariyerli Yarı-Markov ödüllü yenileme süreçleri ile ifade edilmiştir. $X(t)$ süreci $\{\ \}$ ve $\{\ \}$ yenileme süreçleri yardımıyla matematiksel olarak ifade edilmiştir. Bu çalışmada $\{\ \}\ \geq 0$ rasgele değişkenler dizisinin dağılımı $(\ ,\ )$ parametreli Pareto dağılımına sahip olması halinde sürecin bir takım sınır fonksiyonellerine ait ilk dört momentleri için asimptotik açılımları $(\ ) \to \infty$ iken elde edilmiştir. Bu çalışmada, Monte Carlo simülasyon metoduyla elde edilen bu asimptotik sonuçlar test edilmiştir.

Bu çalışma kapsamında incelenen modelde bazı değişikliklerin yapılması mümkündür. $X(t)$ sürecini, iki bariyerli seçmek mümkündür. Ayrıca başlangıç rasgele değişkenlerinin bağımlı olması durumunda benzer problemler incelenebilir. Müdahale daha geniş sınıftan seçmek mümkün olabilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada stok kontol, kuyruk ve güvenirlik teoremlerdeki birçok problemin çözümlerinde kullanılan özel bir stokastik süreç ele alınmıştır. Bu tipten stokastik süreçler pek çok uygulama alanına sahip olmasına rağmen, literatür de yeteri kadar ele alınmamıştır. Bu nedenle, çalışmada "Gecikmeli ve Pareto Müdahaleli Ödüllü Yenileme süreci" olarak adlandırılan $X(t)$ süreci matematiksel olarak kuruldu ve bu süreç ile ilgili aşağıdaki teorik sonuçlar ortaya konuldu.

1) İlgilenilen fiziksel modelleri ifade eden stokastik süreçler, matematiksel olarak inşa edilmiştir.
2) Gecikmeli ve Pareto müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin sınır fonksiyonellerinin momentleri için literatürdeki mevcut bilgilerden yararlanarak kesin formüller elde edilmiş ve bu formülleri kullanarak $X(t)$ sürecinin sınır fonksiyonellerinin momentleri için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.
3) Gecikmeli ve Pareto müdahaleli ödüllü yenileme süreclerinin ergodikliği bazı zayıf şartlar altında ispatlanmıştır.
4) Ödüllü yenileme süreçlerinin müdahale anını temsil eden sınır fonksiyonellerinin momentleri için simülasyon sonuçları verilmiştir.
5) Gecikmeli ve Pareto müdahaleli ödüllü yenileme süreclerinin sınır fonksiyonellerinin momentleri için simülasyon sonuçları verilmiştir.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, Yarı-Markov süreçleri teorisindeki bir eksikliği giderebileceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmanın aşağıdaki yönlerde geliştirilebilmesi mümkündür:

1) $\{\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ \}$, $n \geq 1$, rasgele değişkenler dizisinin bileşenleri bağımlı olması durumunda sürecin yeniden ele alınması ve benzer çalışmaların yapılması.
2) Çalışmada ele alınan özel dağılımların dışındaki bazı dağılımlar içinde benzer hesapların yapılması.
3) Yapılan çalışmada ortaya konulmuş sonuçların uygulanabileceği alanların tesbiti ve uygulanması.

7. KAYNAKLAR

Abramowitch, M. ve Stegun, I.A., 1964. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, John Wiley, New York.

Afanasyeva, L.G. ve Bulinskaya, E.V., 1984. Some asymptotic results for random walks in a stript,Theory of Probability and Its Applications, 29 , 654-668.

Akdi, Y., 2005. Matematiksel İstatistiğe giriş, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Aliyev, R.T., 2010. Stokastik süreçler teorisine giriş, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Aliyev, R.T., 2009. Okur Bekar, N., Khaniyev T. ve Unver, I, Weak convergence theorem for the ergodic distribution of the renewal-reward process with a gamma distributed interference of chance, Theory of Stochastic Processes, 15 ,42-53.

Aliyev, R., Okur Bekar, N., Khaniyev, T. ve Unver, I., 2010. Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal reward process with a discrete interference if chance, Mathematical and Computational Applications, 15 ,117-126.

Alsmeyer, G., 1991. Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12 ,19-27.

Alsmeyer, G., 1994. On the Markov renewal theorem, Stochastic Processes and Their Application, 50 , 37-56.

Alsmeyer, G., 1996. Superposed continuous renewal processes: A Markov renewal approach, Stochastic Processes and Their Application, 61, 311–322.

Anisimov, V.V. ve Artelojo, J.R., 2001. Analysis of Markov multi-server retrial queues with negative arrivals, Queuing Systems: Theory and Applications, 39, 157-182.

Aras, G. ve Woodroofe, M., 1993. Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21, 503-519.

Borovkov, A.A., 1984. Asymptotic Methods in Queuing Theory, John Wiley,New York.

Borovkov, A.A., 1986. Theory of Probability, Nauka, Moskov.

Brown, M. ve Solomon, H., 1975. A second-order approximation for the variance of a renewal-reward process, Stochastic Processes and Their Applications, 3, 301-314.

Brown, M. ve Ross, S.M., 1972. Asymptotic proporties of processes, SIAM Journal of Applied Mathematics, 22 , 1, 93-105.

Chang, J.T. ve Peres, Y., 1997. Ladder heights, Gaussian random walks and the Riemann zeta function, Annals of Probability, 25 , 787-802.

Csenki, A., 2000. Asymptotic for renewal reward processes with retrospective reward structure, Oper.Res. Letter, 26 , 201-209.

Cox, D.R., 1962. Renewal Theory,London: Methun & Co.Ltd.

Çınlar, E., 1975. Introduction to Stochastic Processes, Englewood Cliffs, New Jersey.

Çınlar, E., 1975. Markov renewal theory, Advances in Applied Probability, 1, 123-187.

Erbay Dalkılıç, T., Kesemen, T., ve Tank, F., 2013. Nümerical characteritics of Pareto distribution under uncertainty, , Journal of the Turkısh Statistical a Association, 6, 2, 66-72.

Federyuk, M.V., 1984. Asymptotics for integrals and Series, Nauka, Moscow.

Feller,W., 1971. An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, John Wiley, New York.

Feller, W., 1964. On semi-Markov processes, Proceding of National Academy of Sciences, USA, 51, 4, 130-145.

Gever, B., Khaniyev, T., ve Mammadova Z., 2011. Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi, 12.Uluslararası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırma Sempozyumu, Denizli, Bildiriler Kitabı, 310-311.

Gever, B., 2011. Genelleştirilmiş Yansıtan Bariyerli Ödüllü Yenileme Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Gihman, I.I. ve Skorohod, A.V., 1975. Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlang, Berlin.

Goovaerts M., Dhaene J. and De Schepper A., 2000. Stochastic upper bounds for present value functions, Journal of Risk and Insurance, 67,1, 1-14.

Janssen, A.J.E.M. ve Van Leewarden, J.S.H., 2007. Cumulants of the maximum of the Gaussian random walk, Stochastic Processes and Their Applications, 117, 1928-1959.

Janson, S., 1983. Renewal Theory for m-dependent variables, Annals of Probability, 11, 558-568.

Jewell, W.S., 1967. Fluctuation of a Renewal-Reward Process, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19 , 309-329.

Kesemen, T. ve Yetim, F., 2012. Weak convergence theorem for a semi-markovian random walk with delay and Pareto distributed interference of chance, First İnternational Conference On Analysis and Applied Mathematics, American Institue of Physics Conference Proceeding, 1470 , 255-258.

Khaniyev, T.A., Unver, I. ve Maden, S., 2001. On the Semi-Markovian random walk with two refleting barriers, Stochastic Analysis and Applications,19 , 799-819.

Khaniyev, T.A., 2005. About moments of generalized renewal process, Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phys. Tech., and Math. Sciences, 25, 95-100.

Khaniyev, T. ve Aksop, C., 2011. Asymptotic results for an inventory model of type (s,S) , with a generalized beta interference of chance, TWMS J.App. Eng. Math., 1, 2, 223-236.

Khaniyev, T.A., ve Mammadova , Z.I., 2006. On the Stationary Characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 861-874.

Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z., ve Okur Bekar, N., 2008. On the distribution of a renewal reward process and its additive functional, Mathematical and Computational Applications ,13 , 41-50.

Khaniyev, T.A., ve Atalay, D.K., 2010. On the weak convergence of the ergodik distribution for an inventory model of type (s,S), Hacettepe Journal of Mathematics and Statisticals, 39-4, 599-611.

Khaniyev, T.A., Gever, B. ve Mammadova, Z., 2011. Genelleştirilmiş yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin momentleri için asimptotik açılımlar, 6.Ankara Matematik Günleri, Ankara, Bildiriler Kitabı, 114-115.

Khaniyev, T.A., Gever, B. ve Mammadova, Z., 2011. Yansıtan bariyerli ödüllü yenileme sürecinin durağan olmayan dağılımı üzerine, 10.Sempozyumu, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 117.

Khaniyev, T.A., Gever, B. ve Mammadova, Z., 2011. Investigation of a renewal reward process with a generalized reflenting barrier, The 4.congress of the Turkıc World Mathematical society (TWMS), Baku, Bildiriler Kitabı, 100.

Lotov, V.I., 1996. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, Annals of Probability, 24-4, 2154-2171.

Mammadova Z., 2011. Normal Müdahaleli Yarı-Markov Süreçlerinin Asimtotik yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimler Enstitüsü, Trabzon.

Mammadova Z., Khaniyev, T. ve Gever, B., 2011. Üçgensel Müdahaleli (s,S) tipli Yarı-Markov modeli için asimtotik sonuçlar, 12. Uluslarası Ekonometri, İstatistik ve Yöneylem Araştırması Sempozyumu, Denizli, Bildiriler Kitabı, 285.

Nasirova, T.I., Yapar, C. ve Khaniyev, T.A., 1998. On the probability characteristics of the stock level in the model of the type (s,S), Cybernetics and System Analysis, 5, 69-76.

Nasirova, T.I., Khaniyev, T.A., Yapar, C., Ünver, İ. ve Küçük, Z., 2009. Olasılık, KTÜ Matbaası, Trabzon.

Prabhu, N.U., 1980. Stochastic Storage Processes:Queues, Insurance Risk and Dams, Springer , New York.

Okur Bekar, N., 2006. Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Analitik ve Asimptotik yöntemlerle İncelenmesi,Yüksek Lisans, KTÜ, Fen Bilimler Enstitüsü, Trabzon.

Okur Bekar, N., 2012. Ödüllü Yenileme Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimler Enstitüsü, Trabzon.

Rogozin, B.A., 1964. On the distribution of the first jump, Theory of Probability and Its Applications, 9, 450-464.

Ross, S.M., 1996. Stochastic Processes, New York, John Wiley & Sons.

Smith, W.L., 1954. Asymptotic renewal theorems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Mathematical and Physical Sciences), 64, 9-48.

Smith, W.L., 1958. Renewal theorem and its ramifications, Journal Royal statist. Soc., 2, 243-302.

Woodroofe, M., 1932. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis, SIAM, Philadelhia.

8. EKLER

A: STOKASTİK SÜREÇLER

Tanım A.1. $\Omega \neq \emptyset$ bir küme olsun. Ω ‘in bir $\mathcal{F}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{F}$ sınıfına Ω üzerinde bir cebirdir denir.

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $E \in \mathcal{F}$ için $E \quad = \Omega \backslash E \in \mathcal{F}$,

(iii) $k = 1,2, \dots , n$ için

$$E \quad \in \mathcal{F} \Rightarrow \quad E \quad \in \mathcal{F},$$

eğer (iii) yerine her $n \in \mathbb{N}$ için

$$E \quad \in \mathcal{F} \Rightarrow \quad E \quad \in \mathcal{F}$$

şartı alınırsa $\mathcal{F}$ cebirine bir $\sigma -$ cebiri adı verilir. Bir $\sigma -$ cebiri , sayılabilir birleşim,kesişim ve tümleme işlemine göre kapalıdır.

Tanım A.2. $\mathbb{R}$ kümesindeki bütün açık (a,b) aralıklarının ürettiği $\sigma -$cebirine Borel Cebiri denir $\mathcal{B}(\mathbb{R} \quad)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel cebiri ile gösterilir. Borel cebirinin herbir elamanına “Borel kümesi” denir.

Tanım A.3. (Rasgele Fonksiyon) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı ve T bir indeksler kümesi, (U, R) herhangi bir ölçülebilir uzay olsun. İki değişkenli f fonksiyonu

$$f: \Omega x T \rightarrow U$$

tanımlanmış olsun. Eğer her $A \in R$ için

$$\{(\omega, t): f(\omega, t) \in A\} \in \sigma(\mathcal{F} x B \quad)$$

ise, bu taktirde $f(\omega, t)$ fonksiyonuna rasgele fonksiyon denir.
Burada, B sigma cebiri T’nin alt kümeleri üzerinde tanımlanmış bir $\sigma -$cebir ve $\sigma(\mathcal{F} x B \quad)$ ise T ve B sigma cebirlerin kartezyen çarpımlarını içeren en küçük bir $\sigma -$cebirdir.

Rasgele fonksiyonları en genel şekli ile incelemek bazen çok zordur. Bu nedenle, mevcut literatürde T indeksler kümesinin özel durumları ele alınmıştır. Özellikle $T \subseteq [0, +\infty)$ ve $U = R = (-\infty, +\infty)$ olduğunda ve $t \in T$ değişkeni zaman paremetresi olarak yorumlandığında, yukarda tanımlanan $f(\omega, t)$ rasgele fonksiyonuna stokastik süreç denir.

Bu burumda $U = R$ ve $T \subseteq [0, +\infty)$ olduğu için yukardaki genel tanımın daha basit bir şekilde ifadesi verilebilir.

Tanım A.4 (Stokastik Süreç) Eğer $f: \Omega x T \to R$ fonksiyonu her $A \in B$ için $\{(\omega, t): f(\omega, t) \in A\} \in \sigma(\mathcal{F} x B\ )$ ise , bu taktirde $f(\omega, t)$ fonksiyonuna bir stokastik süreç denir.

Tanım A.5 (Markov ve Yarı-Markov süreçler) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $T \subseteq [0, +\infty)$ olsun. $X(t) = X(\omega, t)$ ise $\Omega x T$ ' de tanımlanmış bir stokastik süreç olsun. Eğer

$$0 = t \ < t \ < \cdots < t \ < \infty,\ n = 1,2, \ldots,\ x\ , x\ , \ldots , x \ \in R \text{ için}$$

$$P\{X(t\ ) \leq x\ |X(t\ ) \leq x\ , \ldots , X(t\ \ ) \leq x\ \ \} = P\{X(t\ ) \leq x\ |X(t\ \ ) \leq x\ \ \}$$

sağlanıyorsa, $X(t)$ sürecine "**Markov süreci**" denir. Markov sürecinde zaman kesikli olduğunda ise o sürece "Markov zinciri" denir. Markov sürecinin t gelecek andaki değerinin dağılımı yalnız t şimdiki andaki değerine bağlı olup ondan önceki zaman anlarına bağlı değildir.

Sürecin herbir keyfi gelecek anındaki değerinin dağılımı, yalnız şimdiki andaki değerinin dağılımına bağlı olup , geçmişteki değerlerinin dağılımına bağlı olmaması durumda ise "Markov bağımlılığı" olarak ifade edilir. Bir stokastik süreç , bazı $t \in T$ 'ler için Markov bağımlılığa sahipse, o sürece "**Yarı-Markov Süreç**" denir.

Yenileme ve Ödüllü Yenileme Süreçleri

Tanım A.6.1 (Yenileme Süreci) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında $\{\xi\ \}$, $n \geq 1$ negatif olmayan birbirinden bağımsız ve aynı keyfi dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu durumda, n. Yenilemenin gerçekleşme anı,

$$T\ = 0,\ T\ = \quad \xi\ , n \geq 1$$

ve t anında veya t anından önce gerçekleşen yenilemelerinin sayısının maksimumu

$$N(t) = \max\{n: T\ \leq t\}$$

olmak üzere, $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine " **yenileme süreci**" denir.

Tanım A.6.2 (Ödüllü Yenileme Süreci) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında $\{\xi\ \}$, $n \geq 1$ aynı dağılıma sahip ,bağımsız ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi yardımıyla oluşturulan

$$N(t) = \max\{n: T\ \leq t, t > 0\}$$

yenileme süreci verilsin. Burada

$$T\ = 0,\ T\ = \quad \xi\ , n \geq 1$$

bunun yanı sıra, yenilemenin olduğu her bir zamanda bir ödül verildiği kabul edilsin. Bu durumda R ,n.yenileme anında kazanılan “ ödül” olmak üzere, $\{R\}, n \geq 1$ aynı dağılıma sahip, bağımsız rasgele değişkenler dizisi ve $(\xi\ ,R\ ), n \geq 1$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. Bu taktirde ,

$$R(t) = \overset{(\ )}{\quad} R$$

ile tanımlanan $\{R(t), t \geq 0\}$ sürecine , **“ödüllü yenileme süreci”** denir ve $R(t)$, t zamanına kadar kazanılan toplam ödüllü ifade eder . (Ross ,1996)

B: KESİKLİ MÜDAHALELİ YARI-MARKOV SÜREÇLERİ İÇİN GENEL ERGODİK TEOREMİ

Teorem.B.1(Genel Ergodik Teorem)

$X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı-Markov süreci olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

i) $X(t)$ sürecinin $\tau\ , \tau\ , \ldots$, anlardaki değerleri $(X(\tau\ ), n = 1,2, \ldots,)$ ergodik bir Markov zinciri olacak şekilde $\tau\ = 0 < \tau\ < \tau\ < \cdots < \tau\ < \cdots < \infty$ artan zaman anları bulunsun.

ii) $\tau\ , \tau\ , \ldots, \tau\ , \ldots$ anları arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu olmuş olsun, yani her $n = 1,2, \ldots$ için $E(\tau\ - \tau\ ) < \infty$ olsun.

bu taktirde $X(t)$ süreci ergodiktir. (Gihman ve Skorohod, 1975)

Teorem.B.2.

Teorem.B.1’deki varsayımları sağlanmış olsun. Bu taktirde, her sınırlı ölçülebilir f(x) fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{\to} \frac{1}{t} \quad f\ X(s)\ ds = S$$

burada S fonksiyoneli aşağıdaki gibidir:

$$S\ \equiv \frac{1}{E(\tau\ )} \qquad f(x)\, P\, \{\tau\ >\ ;\ \ (t) \in dx\} dt d\pi(z)$$

burada $\pi(z)$ dağılımı $\{X(\tau\ )\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır. (Gihman ve Skorohod, 1975)

Not: Bu teorem, zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığı ifade eden bir önermedir ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

C: WALD ÖZDEŞLİĞİ

υ tam değerli rasgele değişkeni $\{\xi\ \}$ dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış olsunlar. Ayrıca $\upsilon \geq 0$ ve ξ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsun. $\mathfrak{I}\ _{,}$ ile $\xi\ , \dots, \xi$ rasgele değişkemlerinin ürettiği sigma cebir ,yani $\mathfrak{I}\ _{,} = \sigma(\xi\ , \dots, \xi\ )$ ile gösterilsin.

Tanım C.1. Her $n = 1,2,3, \dots$ için $\{\upsilon \leq n\}$ olayı , $\mathfrak{I}\ \ _{,}$ sigma cebirinden bağımsız olduğunda υ rasgele değişkenine “gelecekten bağımsız rasgele değişken” denir.

Tanım C.2. Her $n = 1,2,3, \dots$ için $\{\upsilon \leq n\} \in \mathfrak{I}\ _{,}$ olduğunda υ rasgele değişkenine Markov rasgele değişkeni veya durdurma anı denir.
Başka bir deyişle , bu durumda $\xi\ , \dots, \xi$ rasgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde $\{\upsilon \leq n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Markov rasgele değişkeni $\upsilon\ , \xi$ rasgele değişkenler dizisi için “gelecekten bağımsız” rasgele değişkendir. (Borovkov, 1984)
$S\ = \xi\ + \cdots + \xi$ olsun . S , υ rasgele değişken sayısında rasgele değişkenlerinin toplamıdır.

Teorem C.1.(Wald özdeşliği)

$\xi\ , \xi\ , \dots$ rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılımına sahip, υ rasgele değişkeni ise “gelecekten bağımsız” bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $E(\xi\ ) < \infty$ ve $E(\upsilon) < \infty$ sağlansın. Bu durumda ,

$$E(S\ ) = E \qquad \xi \qquad = E(\xi\ )E(\upsilon)$$

olur. (C.1) eşitliğine Wald Özdeşliği denir. (Borovkov,1984)

D:KESİNLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME TEOREMİ

$\{\eta\ \}$, $n = 1,2, \dots$ ‘ler bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rasgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizinin yardımıyla aşağıdaki stokastik süreç inşa edilsin:

$$N(t) = \min\{n \geq 1: \qquad \eta\ > \ \}, \quad > 0$$

$N(t)$ sürecine literatürde “Yenileme Süreci” denir. $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine “Yenileme Fonksiyonu” denir ve genellikle $U(t)$ sembolü ile, yani

$$U(t) = E(N(t))$$

şeklinde yazılır. η , $n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(t)$, yani $F(t) = P\{\eta \ \le t\}$ şeklinde olsun. Bu taktirde, $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$U(t) = \quad F^{*} \ (t)$$

Burada $F^{*}\ (t)$ ile $F(t)$ dağılım fonksiyonunun n.konvolüsyon çarpımı gösterilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$F^{*}\ (t) = \varepsilon(t) \equiv \begin{matrix} 1 & ; t \ge 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{matrix} \ ;$$

$$F^{*}\ (t) \equiv F(t);$$

$$F^{*}\ (t) = F^{*(\quad)}(t) * F(t) = \quad F^{*(\quad)}(t-s)dF(s) \ \ n = 2,3,\ldots$$

$U(t)$ fonksiyonu, monoton azalmayan, pozitif değerli bir fonksiyondur ve $U(0) = 1$’ dır. Ayrıca , her sonlu t için $U(t) < \infty$’dur (Feller, 1971). $U(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral denklemini sağlamaktadır (Feller,1971):

$$U(t) = 1 + \quad U(t-s)dF(s) \ , \qquad t \ge 0$$

$U(t)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelemek, olasılık teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, $U(t)$’nin $t \to \infty$ iken asimptotik davranışı ile ilgili literatürde birçok önemli sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçlarının en önemlilerinden birisi “Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi” adı ile bilinmekte olup, Feller (1971) tarafından ispatlanmıştır. Aşağıdaki, bu teorem ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem D.1. (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi)

$F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, bu dağılımının beklenen değeri (μ) ve varyansı $(\sigma\ )$ sonlu olsun. Bu taktirde, $t \to \infty$ iken

$$0 \le U(t) - \frac{t}{\mu} \to \frac{\mu \ + \sigma}{2\mu}$$

Olur (Feller, 1971).

Not: “Birinci Yenileme Teoremi” olarak bilinen aşağıda verilen Teorem D.2.’den sadece $U(t) \sim \frac{\ }{\mu}$ sonucuna ulaşılır. Aşağıdaki teorem Birinci Yenileme Teoremi daha rahat anlaşılabilmesi için verilebilir.

Teorem D.2. (Birinci Yenileme Teoremi)

$F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım olsun. Ayrıca, bu dağılımının beklenen değeri (μ) sonlu olsun. Bu taktirde , her $h > 0$ sabiti için $t \to \infty$ iken,

$$U(t) - U(t-h) \to \frac{h}{\mu}$$

olur (Feller, 1971).

E: TAUBER-ABEL TEOREMİ

$F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının laplace dönüşümleri $F(\lambda)$ ve $G(\lambda)$ mevcut olsun (en azından öyle bir $(-\alpha, \beta)$ aralığı mevcut olsun ki, her $\lambda \in (-\alpha, \beta)$; $\alpha, \beta > 0$ için $F(\lambda)$ ve $G(\lambda)$ mevcut ve sonlu olsun).

Ayrıca $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olsun. Bu taktirde , $\lambda > 0$ iken $F(\lambda) \sim G(\lambda)$ olur. Bu önermenin tersi de doğrudur, yani eğer $\lambda > 0$ iken $F(\lambda) \sim G(\lambda)$ ise $t \to \infty$ iken $F(t) \sim G(t)$ olur.

Burada "$\sim$" simgesi ile iki fonksiyonun asimptotik denkliği gösterilmiştir, yani "$F(t) \sim G(t)$" yazılabilmesi için

$$\lim_{\to} \frac{F(t)}{G(t)} = 1$$

ve "$F(\lambda) \sim G(\lambda)$" yazılabilmesi için

$$\lim_{\to} \frac{F(\lambda)}{G(\lambda)} = 1$$

olmalıdır. Bu önerme literatürde Tauber-Abel teoremi olarak bilinmektedir (Feller, 1971).

F: YAKINSAMA ÇEŞİTLERİ

Rasgele değişken dizilerinde yakınsamalara geçmeden önce, reel sayı dizilerindeki yakınsamaları verelim. Elemanları reel sayılar olan bir dizi f olsun. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $f \in \mathbb{R}$ dir.

1) f elemanları reel sayılar olan bir dizi ve $f \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için bir $n(\varepsilon)$ sayısı var ve $n > n(\varepsilon)$ için $|f - f| <$ oluyorsa, f dizisi f noktasına yakınsıyor denir ve $f \to f$ (veya $\lim_{\to} f = f$) ile gösterilir.

2) Eğer $f \to 0$ ise, $f = o(1)$ ve $f/g \to 0$ ise $f = o(g)$ dir.

3-Sonlu bir M sayısı için M ye bağlı bir n sayısı var ve $n > n$ için $|f| <$ oluyorsa f dizisi sınırlıdır denir ve $f = O(1)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $(f/g) = O(1)$ ise yani $f = O(g)$ dir.

Örneğin, $f \;\; = (4n + 3)/n$ olsun. Bu durumda , $n \to \infty$ iken $f \;\; \to 0$ olduğu açıktır. O halde $f \;\; = o(1)$ dir. Burada aslında $g \;\; = 1$ alınır ve $f \;\, /g \;\; \to 0$ dır ve sonuç olarak,

$f \;\; = o(g \;\,)$ =o(1) dir.

$$\frac{f}{g} = \frac{(4n + 3)/n}{1/n} = 4 + \frac{3}{n}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{f}{g} \; = \; 4 + \frac{3}{n} \; < 5$$

yazılabilir. Dolayısıyla , $f \;\, /g \;\; = O(1)$ veya $\lim_{\to} \;\; — = 4$ olduğundan $f \;\; = O(g \;\,)$ dir.

$\{X \;\, , n = 1,2, \ldots\}$ rasgele değişken dizisi ve X rasgele değişkeni aynı bir olasılık uzayında $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tanımlanmış olsun. Bu taktirde, aşağıdaki yakınsaklık çeşitleri verilebilir (Akdi, 2005).

Tanım F.1.(Olasılığa Göre Yakınsaklık) Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{\to} P\{\omega : |X \;\, (\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$$

olduğunda “ X rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine olasılığa göre yakınsar” denir. Kısaca $n \to \infty$ iken $X \;\; \to X$ ile gösterilir (Okur Bekar, 2012).

Tanım F.2.(Ortalamaya Göre Yakınsaklık) Her $r > 0$ için $E(|X \;\, (\omega)| \;\,) < \infty$ ve $E(|X(\omega)| \;\,) < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_{\to} E(|X \;\, (\omega) - X(\omega)| \;\,) = 0$$

ise ,$\{X \;\, \}_{\in \mathbb{N}}$ rasgele değiken dizisi , X rasgele değişkenine “ r.mertebeden orta yakınsaktır” denir. Özel olarak,

$$\lim_{\to} E(|X \;\, (\omega) - X(\omega)| \;\,) = 0$$

ise $\{X \;\, \}_{\in \mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, X rasgele değişkenine “Ortalama karesel yakınsaktır” denir ve l.i.m. ile gösterilir (Okur Bekar, 2012).

Tanım F.3.(Dağılıma Göre Yakınsaklık) F(x)’ in sürekli olduğu noktalar için

$$\lim_{\to} F \;\, (x) = F(x)$$

ise , $\{X\}_{\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, X rasgele değişkenine “Dağılıma göre yakınsaklık” denir ve $X(\omega) \underset{\rightarrow}{-} X(\omega)$ şeklinde yazılır. Literatürde bu yakınsaklık çeşidi , zayıf yakınsaklık olarak da bilinmektedir (Okur Bekar, 2012).

Tanım F.4.(1 Olasılığına ile Yakınsaklık) Ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında

$$P\left(\lim_{\rightarrow} X(\omega) = X(\omega)\right) = 1 \ \text{ veya } \ P\left(\lim_{\rightarrow} X(\omega) \neq X(\omega)\right) = 0$$

ise , 1 olasılığı ile $X(\omega) \underset{\rightarrow}{-} X(\omega)$ ise $\{X\}_{\in\mathbb{N}}$ rasgele değişken dizisi, X rasgele değişkenine “ 1 olasılığı ile yakınsaktır”tır denir (Okur Bekar, 2012).

G:Büyük Sayılar Kanunu ve Büyük Sayıların Güçlendirilmiş kanunu

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında $\{X, n = 1,2,\dots\}$ rasgele değişken dizisi verilmiş olsun. Bu dizinin yardımıyla aşağıdaki rasgele değişkenler dizisini ele alalım:

$$\frac{X(\omega) + X(\omega) + \cdots X(\omega) - E[X(\omega) + X(\omega) + \cdots X(\omega)]}{n} \quad n = 1, \infty. \qquad (*)$$

Tanım G.1. Eğer $(*)$ dizisi, olasılığa göre sıfıra yakınsıyorsa $\{X, n = 1,2,\dots\}$ dizisi “ büyük sayılar kanununa uyuyor” denir.

Tanım G.2. Eğer $(*)$ dizisi, 1 olasığı ile sıfıra yakınsıyorsa $\{X, n = 1,2,\dots\}$ dizisi “büyük sayıların güçlendirilmiş kanununa uyuyor” denir. Bunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz (Nasirova vd., 2009).

$$P\left(\lim_{\rightarrow} (X(\omega) - E(X(\omega)) = 0\right) = 1.$$

H:DAĞILIMLAR

Tanım H.1 (PARETO DAĞILIMI)

Olasılık kuramı ve istastik bilim dallarında Pareto dağılımı bir çok pratik uygulaması bulunan ve “küçük” bir nesnenin bir “büyük” nesneye dağılımında kararlılık elde edildiği hallerde kullanılan bir sürekli olasılık dağılımı veya bir güç kuramıdır.

X bir pareto dağılımını gösteren rasgele değişken ise, X’in olasılık değerini herhangi bir reel sayı olan x’ den daha büyük olması yani $x \geq \lambda$ için aşağıdaki ifade verilebilir.

$$P(X > \ ) = \frac{\lambda}{x}$$

burada λ mutlaka X rasgele değişken için verilen en küçük değeri ve α ise pozitif değerde bir parametredir. Pareto dağılımları için iki tane sayısal parametre gerekmektedir. Bu parametreler α ve λ dir. Olasılık fonksiyonundan yararlanarak dağılım fonksiyonu verilebilir.

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda}{x} \qquad \lambda > 0, \quad > 0\ ; \quad \in [\ , +\infty)$$

olasılık teorisinden bilindiği üzere dağılım fonksiyonundan yararlanarak olasılık yoğunluk fonksiyonu bulabiliriz.

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \alpha \frac{x}{\lambda} = \frac{\alpha\lambda}{x}$$

Bir f fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekir.

$$1)\ f(x) \geq 0$$

$$)\quad f(x)dx = 1$$

özellikleri incelediğimizde birinci özellik kolayca görülebilir. İkinci özelliğin doğruluğunu gösterelim:

$$f(x)dx = \quad \alpha\lambda \frac{1}{x} dx = \alpha\lambda \quad \frac{1}{x} dx = \alpha\lambda \frac{1}{\alpha} \lambda \quad = 1$$

Pareto dağılımının beklenen değerine bakalım;

$$E(X) = \quad x\,\alpha\lambda \frac{1}{x} dx = \alpha\lambda \frac{1}{\alpha - 1}\lambda \quad = \frac{\alpha\lambda}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1\,.$$

Pareto dağlımının varyansını hesaplamadan önce kareli ortalamasının hesaplanması gerekir.

$$E(X\ ) = \quad x \quad \alpha\lambda \frac{1}{x} dx = \alpha\lambda \frac{1}{\alpha - 2}\lambda \quad = \frac{\alpha}{\alpha - 2}\lambda\ , \quad \alpha > 2.$$

$$V(X) = E(X\ ) - \{E(X)\}$$

sonuç olarak,

$$V(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 2}\lambda \; - \; \frac{\alpha\lambda}{\alpha - 1} \quad = \frac{\alpha\lambda}{(\alpha - 1)\;(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2.$$

Sıfır etrafındaki k.inci momenti hesaplanması yukardakilere benzer olarak verilebilir.

$$E\;X \quad = \quad x\;f(x)dx = \alpha\lambda\;\frac{1}{\alpha - k}\lambda \qquad = \frac{\alpha}{\alpha - k}\lambda\;, \qquad \alpha > \quad .$$

(Erbay Dalkılıç, Kesemen vd.,2013).

Tanım H.2 (ÜSTEL DAĞILIMI)

$X > 0$ olmak üzere sürekli bir rasgele değişken olsun. X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, > 0 olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e \quad , & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde ise f(x) fonksiyonuna üstel dağılım ve X rasgele değişkenine üstel dağılmış rasgele değişken denir.

X üstel dağılmış rasgele değişken iken, > 0 ve $\lambda e \quad > 0$ olduğuna göre, her x için f(x) $>$ 0 dır. Yanısıra,

$$\lambda e \quad dx = \lambda[-\frac{1}{\lambda}\lim_{\rightarrow} e \quad] + 1/\lambda = 1$$

olduğundan, $\int f(x)dx = 1$ özelliği de geçerlidir. Üstel dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F\;(x) = P(X \leq x) = \quad \lambda e \quad dt = 1 - e$$

olduğundan,

$$F\;(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e & , \quad x \geq 0 \\ 1 & , \quad x \rightarrow \infty \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Üstel dağılımın beklenen değeri ve varyansı aşağıki gibi verilebilir:

$$E(x) = \quad x\lambda e \quad dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$V(x) = E(X\;) - [E(X)] \;= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

olarak bulunur (Aliyev, 2010).

Tanım H.3 (ERLANG DAĞILIMI)

Erlang dağılımı sürekli olasılık dağılımı ve X bir Erlang dağılımını gösteren rasgele değişken olsun. Erlang dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu, $(\lambda, \alpha > 0)$ olmak üzere,

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda \;\, x \quad\;\; e}{(\alpha - 1)!} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

olarak bulunur. Erlang dağılımı için iki tane sayısal parametre gerekmektedir. Bu parametreler λ, α dır . Burada α=1 alındığında olasılık yoğunluk fonksiyonu üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu olur.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

elde edilir. Erlang dağılımının dağılım fonksiyonu aşağıki gibi verilebilir:

$$F \;\, (x) = P(X \leq x) = 1 - \quad \frac{e \quad^{-} \quad x}{\lambda \; i!},$$

elde edilir. Erlang dağılımının beklenen değeri ve varyansı aşağıki gibi verilebilir:

$$E(X) = \alpha\lambda,$$

$$V(X) = \alpha\lambda \;\, ,$$

olarak elde edilir (Aliyev, 2010).

ÖZGEÇMİŞ

Şenol Demir, 13.02.1989 tarihinde Ağrı ili Diyadin ilçesi Kuşburnu Köyü'nde doğdu. İlk öğremini Kuşburnu Köyü İlkokulunda ve Orta öğremini Ağrı Diyadin İlçesinde tamamladı. Lise öğremini Aziziye Anadolu Lisesi Erzurum'da tamamladı. 2006 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. 2010 yılında lisans eğitimini tamamladı. Aynı yıl içerisinde Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimler Ensititüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptı. 2011 yılında Gençlik ve Spor Bakanlığında Gençlik Eğitmeni olarak işe başladı. Halen bu görevi devam etmektedir. Orta düzeyde İngilizce bilmektedir.