KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUBUN PİCARD GRUBUNDAKİ NORMALLİYENİNİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazlı YAZICI

ARALIK 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUBUN PİCARD GRUBUNDAKİ NORMALLİYENİNİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

Nazlı YAZICI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.11.2013
Tezin Savunma Tarihi : 19.12.2013

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Nazlı YAZICI tarafından hazırlanan

MODÜLER GRUBUN PİCARD GRUBUNDAKİ NORMALLİYENİNİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 26/11/2013 gün ve 1531 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ**	....
Üye	**: Doç. Dr. Gökhan APAYDIN**	....
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca çalışmalarımdaki yardımlarını, desteğini esirgemeyen ve bu süreçte göstermiş olduğu sabır için sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez aşamasında bizi sabırla dinleyen ve tavsiyeleriyle tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim sürecim boyunca üzerimde emeği olan Karadeniz Teknik Üniversitesi'ndeki bütün saygıdeğer hocalarıma, tez süresince yardımlarını esirgemeyen ve fikirlerini paylaşan Öğretim Görevlisi Murat BEŞENK'e çok teşekkür ederim. Ayrıca tezi hazırlama sürecinde bana her zaman destek olan, yalnız bırakmayan arkadaşlarıma ve sadece tez dönemimde değil hayatım boyunca bana hep destek olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Nazlı YAZICI
Trabzon, 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalliyeninin Alt Yörüngesel Grafları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER’in sorumluluğunda tamamladığımı, örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 26/11/2013

Nazlı YAZICI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

MODÜLER GRUBUN PİCARD GRUBUNDAKİ NORMALLİYENİNİN ALT YÖRÜNGESEL GRAFLARI

Nazlı YAZICI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER
2013, 62 Sayfa, 2 Sayfa Ek

Bu tezde Γ modüler grubun $\mathbb{P}$ picard grubundaki $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ normalliyeninin alt yörüngesel graflarının $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar üzerindeki hareketi incelenmiştir.

Birinci bölümde, çalışmamızla ilgili olarak Topolojik Gruplar, Hiperbolik Geometri, Riemann Yüzeyleri, Möbiüs Dönüşümleri ve Graf Teori ile ilgili genel kavramlar verildi. Ayrıca, Picard Grubundaki harekette kullanılan Gauss Tamsayılar Halkası ile ilgili bazı tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, $\Gamma < N_{\mathbb{P}}(\Gamma) < \mathbb{P}$ ilişkisinden dolayı ilk olarak Modüler Grubun ve Picard Grubun grafları verildi. Bunun için Jones ve Beşenk'in makaleleri verildi. Ayrıca $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ normalliyeninin transitif ve imprimitif hareketleriyle oluşan alt yörüngesel grafları incelendi.

Kenar olma şartları ve kendisiyle eşleşmiş olma şartları elde edildi. Ayrıca alt yörüngesel grafların bir devre içermesi için gerekli ve yeterli şartlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Modüler grup, İmprimitif hareket, Picard grubu, $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, Alt yörüngesel graflar

Master Thesis

SUMMARY

SUBORBITAL GRAPHS OF THE NORMALIZER OF THE MODULAR GROUP IN THE PICARD GROUP

Nazlı YAZICI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER
2013, 62 Pages, 2 Pages Appendix

In this thesis, the suborbital graphs of the normalizer $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ of the modular group Γ in the Picard group $\mathbb{P}$ acting on extended rational numbers $\widehat{\mathbb{Q}}$ are investigated.

In Chapter 1, we give the general concepts dealing with Topological groups, Hyperbolic geometry, Riemann surfaces, Möbiüs transformations and Graph theory concerning our work. Furthermore, we also give the some definitions and propositions about the ring of Gauss Integers where used in the group action of Picard group.

In Chapter 2, because of the relations $\Gamma < N_{\mathbb{P}}(\Gamma) < \mathbb{P}$ we decided to give the graphs of modular group and Picard group first. For this, we give the summary of the paper whose Jones et al. and the paper whose Beşenk et al. Then we start to examine the suborbital graphs forming by the transitive and imprimitive actions of the normalizer $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$.

We obtain the conditions for being an edge and self-paired, then necessary and sufficient conditions for the suborbital graphs to contain a circuit.

Key Words: Modular group, Imprimitive action, Picard group, $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, Suborbital graphs.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	: Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	: $\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Modüler grup
$\mathbb{P}$	: Picard grup
$\boldsymbol{N}_{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\Gamma})$	: Γ nın $\mathbb{P}$ deki normalliyeni
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\boldsymbol{PSL}(\boldsymbol{2}, \mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$\boldsymbol{Gx}$	: x noktasının G yörüngesi
$\boldsymbol{G_x}$	: x noktasının G deki sabitleyeni
$\boldsymbol{\Gamma_0}(\boldsymbol{n})$	: Γ nın $n\|c$ olan bir alt grubu
$\approx$	: G invaryant denklik bağıntısı
$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	: (α, β) yı içeren yörünge
$\boldsymbol{F_m}$	: Farey dizisi
$\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$	: a sayısı b sayısını böler

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Grup kavramı geometrik şekillerin simetri özelliklerinin araştırılmasında ve cebirsel denklemlerin köklerinin belirlenmesinde ortaya çıkmıştır. Her geometrik şekle bir simetri grubu ve her cebirsel denklemin köklerine bir Galois grubu karşılık gelir. Grup kavramının ilk izleri Lagrange'ın [1736-1813] cebirsel denklemler üzerindeki çalışmalarına kadar gider.

Grup teorisinin gelişimi 4 temel kaynak üzerine kurulur:

(a) Cebir (J. L. Lagrange, 1770)
(b) Sayılar Teorisi (C. F. Gauss, 1801)
(c) Geometry (F. Klein, 1874)
(d) Analiz (S. Lie, 1874; H. Poincare ve F. Klein, 1876)

19. yüzyılda Geometri genişlik ve derinlik anlamında büyümüş ve Projektif geometri, Öklidyen-olmayan geometriler, Diferansiyel geometri, Cebirsel geometri, n-boyutlu geometri gibi yeni geometriler ortaya çıkmış ve bunlar arasında bağlantıların nasıl kurulacağı sorusu meydana çıkmıştır. F. Klein daha sonra Erlangen Programı adı verilen ünlü çalışmasında geometrilerin karakterizasyonu ve sınıflandırılmasının grup teorisiyle olan ilişkisini ortaya koymuş, geometrinin transformasyon grupları altında invaryant kalan özelliklere göre tasnif edileceğini belirlemiştir. Aslında bu düşüncenin öncülü Cayley-Sylvester Invariant Teorisidir.

Öte yandan Lie, Abel, ve Galois'in cebirsel denklemlere yaptığının aynısını diferansiyel denklemlere yapmıştır. Klasik metotlarla integre edilen hemen hemen tüm diferansiyel denklemlerin kolaylıkla oluşturulan sürekli gruplar altında invaryant kaldığını gözlemlemiştir. Böylece diferansiyel denklemlerin bir sürekli grup altında değişmezlerini koruyan ve verilen bu grubun bilinen özelliklerinden çıkan sonuçlara göre bu denklemleri olası basitleştirmelere indirgenmesini düşünmeye önderlik etmiştir. Bu fikirler daha sonraları Lie grupları ve topolojik dönüşüm gruplarına öncülük etmiştir.

Son olarak Poincare bu düşüncelerden yararlanarak, Fuchs grupları adını verdiği ve geliştirdiği bu ayrık grupların, değişmez (invaryant) bıraktıkları ve günümüzde otomorf fonksiyonlar adı verilen fonksiyonları tanımlayıp incelemiştir. Bu fonksiyonlar yardımı ile de cebirsel eğrilerin parametrizasyon probleminin ilk çözümlerini vermiştir. Böylece eliptik fonksiyonlar teorisinin de temelini atmıştır.

Bütün bu sahalarda bahsi geçen dönüşüm gruplarının elemanlarının en genel formu; z-kompleks değişken olmak üzere

$$\frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d \in \mathbb{C};\ ad-bc \neq 0$$

biçimindeki dönüşümleridir. Katsayıların kompleks, reel, tamsayı oluşuna göre bir çok varyasyonları vardır. En bilinenleri PGL(2,$\mathbb{C}$), PSL(2,$\mathbb{R}$), Γ modüler grup, $\mathbb{P}$ picard grubu;

H= $\langle -\frac{1}{z}, z+\lambda_q \rangle$, $\lambda_q = 2cos\frac{p}{q}$ $(q \geq 2)$ Hecke grupları; $\Gamma_0(n), \Gamma_1(n), \Gamma_0^0(n), \Gamma(n)$-kongrüans alt gruplarıdır.

Grup teorisi üzerine 1850 lerde başlayan ve yüz yılı aşkın süreyle yapılan çalışmalar çeşitli somut teorilere yol açtı:

(a) Sonlu Grup Teorisi (Cayley, Jordan-Holder , Feit-Thompson, 1963)
(b) Grup temsilleri (Kombinatoryal Grup Teorisi)
(c) Sonsuz Abel Grup Teoremi (Profer, Baer, Ulm, 1920-1930)
(d) Schreier's Grup Genişleme Teorisi (1926)
(e) Cebirsel Gruplar (Borel, Chevalley 1940'lar)
(f) Topolojik Gruplar (Schreier, Corton, Gelfand, Van Neuman, 1920-1930)

1882 de Von Dyck tarafından ortaya konan soyut grup tanımı, üreteçler ve aralarındaki ilişkiyi tanımlama şeklinde verildi. Bu düşünceden yola çıkarak düşük mertebeli gruplar, sonlu üretilmiş gruplar, simetrik ve alterne gruplar, lineer kesirli gruplar ve yansımalar tarafından üretilmiş gruplar için çalışmalar yapıldı [9]. 1970 de Singerman sonlu üretilmiş Fuchs gruplarının üreteçler, bağıntılar ve geometrik invaryantlarını içeren simge adı verilen gösterimlere sahip olduğunu gösterdi [27]. 1991 yılında ise G. A. Jones, D. Singerman ve K. Wicks modüler grubu kombinatoryal yolla incelemenin bir yolu olarak ilk kez Sims tarafından ortaya atılan alt yörüngesel grafları kullandı. Benzer bir yaklaşım

R. Kulkarni tarafından da [23]'teki çalışmada yapıldı. Üreteçler ve aralarındaki bağıntıyı ortaya koymak için graflardan yararlanmak kombinatoryal grup teoride bilinen bir yoldu. JSW, bu tez çalışmasına da temel teşkil eden çalışmada modüler grubun cusp kümesi üzerindeki transitif ve imprimitif hareketini çalıştı. Ardından Akbaş, bu hareketin neticesinde elde edilen graflardaki devrelerle sonlu mertebeli üreteçlerinin (eliptik dönüşüm) arasındaki ilişkiyi ortaya koydu. Buradan hareketle M. Akbaş önderliğindeki araştırma grubu da modüler grubun kongrüans alt grupları, kongrüans alt gruplarının normalliyenleri ve kuvvet gruplarının alt yörüngesel graflarını çalıştılar ve bu çalışmalarla ilgili yayınlar Ek1'de verildi. Tez konusunun Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi açısından önemine gelince;

Kompleks analizde bir Dirichlet problemi çoğu zaman üzerinde tanımlandığı A-bölgesinde çözmek yerine önce bir $f: A \to B$ bire-bir, örten, konform dönüşümü bulunur ve problem çok daha basit olan B-bölgesinde çözülür. Burada doğal olarak böyle bir bire-bir, konform dönüşümünün bulunup bulunmayacağı sorusu ortaya çıkar. Riemann dönüşüm teoremi basit bağlantılı bir bölgenin bir başka basit bağlantılı bir bölge üzerine resmedilebileceğini gösterir. Bu dönüşümler çoğu zaman yukarıda genel formu verilen Möbiüs dönüşümleridir ve bu dönüşümlerin tabiatını doğru anlamak için dönüşümün sabit bıraktığı noktalardaki davranışın bilinmesi çok önemlidir. Literatürde cusp noktaları (parabolik dönüşümlerin sabit bıraktığı noktalar) üzerine pek çok çalışma mevcuttur.

Sonuç olarak bu makalede grup teorisi, sayılar teorisi, graf teori ve hiperbolik geometrinin bazı temel kavramlarının kullanıldığı matematiksel olarak multi-disiplin bir çalışma ortaya çıkmıştır.

Bu tez çalışması ise bu anlayışın devamı niteliğinde olup, aynı teknik modüler grubun Picard grubundaki normalliyeni için uygulanmıştır.

1.2. Gruplar ve Topolojik Gruplar

Tanım 1.1. $G \neq \emptyset$ bir küme olsun. $G \times G$ den G ye her $\circ : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \to g_1 \circ g_2$ fonksiyonuna G üzerinde bir ikili işlem denir. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlanmış ve boş olmayan bir kümeye cebirsel yapı denir ve $(G,\circ)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2. "$\circ$", $G \neq \emptyset$ kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(G,\circ)$ ikilisine bir grup adı verilir.

$\boldsymbol{G_1}$**:** $\forall\, a$, b ∈ G için $a \circ b$ ∈ G (kapalılık özelliği)

$\boldsymbol{G_2}$**:** $\forall\, a, b, c \in$ G için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ$ c (birleşme özelliği)

$\boldsymbol{G_3}$**:** ∃ bir $e \in$ G öyle ki $\forall\, a \in$ G için $e \circ a = a \circ e = a$ (birim eleman özelliği)

$\boldsymbol{G_4}$**:** $\forall\, a \in$ G için $\exists\, a' \in$ G öyle ki $a \circ a' = a' \circ a = e$ (ters eleman özelliği)

Burada $a \circ b$ yerine kısaca ab yazacağız.

Tanım 1.3. G bir grup, $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Eğer H, G üzerinde tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. $H \leq G$ ise $e_G \, \epsilon \, H$ dir. Dolayısıyla $\{e\}$ ve G, G nin alt gruplarıdır. Bu alt gruplara trivial (aşikar) alt gruplar denir. Bir grubun trivialden farklı alt gruplarına öz alt grup adı verilir.

Önerme 1.4. [15] G bir grup $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Bu takdirde;

$H \leq G \Leftrightarrow \forall\, a, b \,\epsilon\, H$ için;

(i) $ab \,\epsilon\, H$

(ii) $a^{-1} \epsilon\, H$ dir.

Önerme 1.5. [15] G bir grup, $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Bu takdirde;

$H \leq G \Leftrightarrow \forall\, a, b \,\epsilon\, H$ için $ab^{-1} \epsilon\, H$ dir.

Tanım 1.6. G bir grup ve H, M G nin iki alt grubu olsun. $H = gHg^{-1}$ olan bir $g \,\epsilon\, G$ varsa H ve M alt gruplarına eşlenik alt gruplar adı verilir.

Tanım 1.7. [15] G bir grup $H \leq G$ olsun. G üzerinde " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) :\Leftrightarrow a^{-1}b \,\epsilon\, H$ olarak tanımlansın. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ah : h \epsilon\, H\} \coloneqq aH$ alt kümesidir. aH kümesine $a \,\epsilon\, G$ nin sol yan sınıfı denir.

Tanım 1.8. [15] G bir grup $H \leq G$ olsun. G üzerinde " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) \Leftrightarrow ab^{-1} \,\epsilon\, H$ olarak tanımlansın. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ha : h \,\epsilon\, H\} \coloneqq Ha$ alt kümesidir. Ha kümesine $a \,\epsilon\, G$ nin sağ yan sınıfı denir.

Tanım 1.9. G bir grup $H \leq G$ olsun. $H \leq G$ alt grubuna göre sağ ve sol yan sınıfların sayısı aynıdır. Bu sayıya H nın G içindeki indeksi denir ve $[G : H]$ ile gösterilir.

Tanım 1.10. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer H nın G deki bütün sağ ve sol yan kümeleri eşitse, yani $\forall\, a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa H alt grubuna G nin normal alt grubu denir.

Teorem 1.11. G bir grup ve N $\leq G$ olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(a) $\forall\ g\ \in G$ ve $\forall\ n\ \in$ N için $gng^{-1} \in$ N

(b) $\forall\ g\ \in G$ için $gNg^{-1} \subset$ N

(c) $\forall\ g\ \in G$ için $gNg^{-1} =$ N

(d) $\forall\ g\ \in G$ için $gN\ = Ng$

Tanım 1.12. G bir grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Bu taktirde N(H) $:= \{\ g\ \in G :$ $gH\ = Hg\ \}$ kümesine H nın G deki normalliyeni denir.

Teorem 1.13. N(H), H nın G deki normalliyeni olsun. Bu taktirde;

(i) N(H), G nin bir alt grubudur.

(ii) H, N(H) nın bir normal alt grubudur.

(iii) H yi normal alt grup olarak ihtiva eden G nin en büyük normal alt grubu N(H) dır.

Tanım 1.14. $X \neq \emptyset$ verilen bir küme, $\tau \subset \wp(X)$ olsun. τ ailesine;

(i) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,

(ii) $\forall\ U, V \in \tau$ için $U \cap V \in \tau$,

(iii) $\forall\ \{O_i\}_{i\epsilon I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i\epsilon I} O_i \in \tau$ şartları sağlanıyor ise X üzerinde bir topoloji adı verilir. X e de bir topolojik uzay denir ve (X, τ) ile gösterilir.

Tanım 1.15. [17]$(G,\bullet)$ hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer ;

(i) F : $G \times G \to G,$ F$(\ g, h\ ) := gh$

(ii) f : $G \to G,$ f$(\ g\ ) :=\ g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup adı verilir.

Örnek 1.16. $(\ \mathbb{R}\ , +\ )$ bir topolojik gruptur.

Tanım 1.17. [17] G bir topolojik grup, X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$\wedge: G \times X \to X,\quad \wedge(g, x) = g\wedge x := gx$ ile tanımlanan $\wedge$ dönüşümü sürekli ve $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall\ x \in X$ için;

(i) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$

(ii) $e\wedge x = x$

şartları sağlanıyor ise $(G, X, \wedge)$ üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir.

Yukarıdaki (i) ve (ii) şartları sağlanıyorsa G ye X üzerinde hareket ediyor veya G, X üzerinde bir hareket grubudur denir. Bu yapıyı $(G, X, \wedge)$ yerine kısaca (G, X) ile göstereceğiz.

Tanım 1.18. (G,X) bir topolojik dönüşüm grubu ve $x,y \epsilon X$ olsun.
$x{\sim}y :\Leftrightarrow \exists\, g \epsilon G : y = gx$ olarak tanımlanırsa "$\sim$" bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. "$\sim$" bağıntısının her bir denklik sınıfına hareketin yörüngeleri adı verilir. $x \in X$ noktasını içeren yörüngeye x in yörüngesi denir ve bu Gx ile gösterilir. Açık olarak $Gx \coloneqq \{gx : g \epsilon G\}$ dir.

Tanım 1.19. G, X üzerinde hareket etsin ve $x,y \epsilon X$ keyfi olsun. $gx = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde geçişli olarak (transitif) hareket ediyor denir.

Tanım 1.20. G, X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun.$G_x \coloneqq \{g \in G : gx = x\}$ kümesine x noktasının G deki sabitleyeni denir.

Açık olarak, $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ dir. Dolayısıyla G, X üzerinde geçişli olarak hareket ediyorsa $\forall\, x,y \in X$ için G_x ve G_y eşleniktir.

Tanım 1.21. $X \neq \emptyset$ bir küme, $S(X) = \{f \mid f : X \to X \text{ birebir ve örten}\}$ olsun. $(S(X),\circ)$ bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu grubun elemanlarına permütasyonlar denir. $(S(X),\circ)$ grubunun alt grupları permütasyon grubu adı verilir.

G, X üzerinde bir permütasyon grubu olsun. Bu takdirde, G, X üzerinde hareket eder. Gerçekten $g \in G$ ise $g : X \to X$ bire-bir ve örten bir dönüşümdür. Bu durumda $gx \coloneqq g(x)$ olarak alınırsa $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ ve $1x = x$ olduğu açıktır. Bu harekete G nin X üzerindeki doğal hareketi denir. Bu durumda “(G,X) permütasyon grubu” ifadesi kullanılır. Ayrıca G, X üzerinde geçişli olarak hareket ediyorsa “(G,X) geçişli permütasyon grubu” ifadesi kullanılır.

1.3. Hiperbolik Geometri

Hiperbolik Geometrinin çıkışı Öklid’ in beş temel postülatın beşincisine dayanmaktadır.

1) İki noktadan bir doğru geçer.
2) Doğru parçaları iki ucundan sonsuza doğru bir doğru boyunca uzatılabilir.
3) Merkezi ve yarıçapı verilen çember çizilebilir.
4) Tüm dik açılar denktir.
5) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

İlk dört postülat verildiği zaman, beşincisinin aşağıda verilen paralellik postülatına denk olduğu kolaylıkla görülmektedir. Beşinci postülat deyimi yerine paralellik postülatı da kullanılmaktadır [5].

Paralellik Postülatı: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmayan bir doğru verildiği zaman, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel bir tek doğru geçer.

İki bin yıldan beri matematikçiler ilk dört postülattan beşinci postülatı elde etmeye çalışmışlardır. Her bir durum için ilave postülatlar yaparak beşinci postülata indirgemeye çalışmışlar ve neticede bunların beşinci postülata denk olduğu sonucuna varmışlardır. 19. yüzyılda bu konu üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmış ve beşinci postülatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlardır. “ Euclid’ in paraleller aksiyomu, öteki aksiyomlardan bağımsızdır” sonucunu ortaya koyan Gauss, Euclid geometrisinin evrensel sayılan gerçeklerini yıkıyordu. Çünkü; paraleller aksiyomu değiştirilirse örneğin; “bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz çoklukta paralel doğrular çizilebilir” denilse, Euclid’ in diğer aksiyomları ile birlikte çelişkisiz bir sistem oluşur. Ama bu sistemin oluşturduğu geometri Euclid geometrisinden farklı olur. Böylece Gauss’ un deyimiyle “Euclid olmayan bir geometri” kurulmuş olur. Gauss bu kadarla yetinmeyip evrenin hem Euclid geometrisi ile hem de Euclid olmayan bir geometri ile temsil edilebileceğini söyledi. Bunun anlamı şudur: bir geometri, içinde yaşadığımız uzay hakkındaki doğruları değil, kuramsal olarak mümkün uzaylar hakkındaki gerçekleri inceler. Farklı iki geometrinin aynı evreni temsil etmemesi için de hiç bir neden yoktur. Buna örnek olarak Gauss’ un öğrencisi olan Riemann tarafından kurulan ve kendi adıyla anılan geometriyi düşünelim:

Riemann, Euclid’ in paraleller aksiyomunu şöyle değiştiriyor: “Paralel doğrular yoktur.” Böylece Euclid olmayan başka doğrular ortaya çıkıyor. Bu geometri ile içinde yaşadığımız uzayı temsil edebiliriz. Örneğin; dünyayı bir küre olarak düşünürsek, dünya üzerindeki büyük çemberler (yani merkezden geçen düzlemlerin yer yüzeyi ile ara kesitleri) Riemann geometrisinin doğrularını oluşturacaktır. Dolayısıyla bu geometride doğrular sınırlıdır. Oysa Euclid geometrisinde doğrular her iki uçlarından sonsuza uzanırlar. Şimdi yeryüzü üzerinde A, B, C noktalarını alalım. Euclid geometrisinde ABC üçgeni yer küresi içinde kalan düzlemsel ABC üçgenidir. Riemann geometrisindeki ABC üçgeni ise, yer yüzeyi üzerindeki küresel ABC üçgenidir. Euclid geometrisinde ABC üçgeninin iç açıları toplamı 180 derecedir ama Riemann geometrisinde ABC küresel üçgeninin iç açıları toplamı 180 derece ile 540 derece arasında değişebilir. Görüldüğü gibi içinde yaşadığımız uzay bile değişik geometrilerle temsil edilebilir. Bu geometrilerde sonuçlar çelişik olabilir ama böyle olması birisinin ya da her ikisinin uzayı temsil yeteneğini yok etmez.

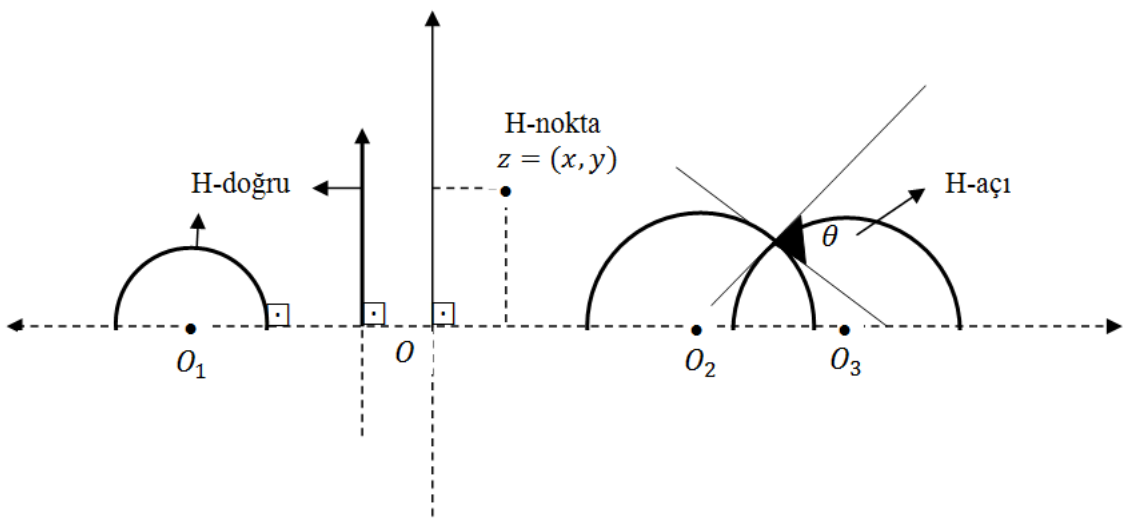
Euclid olmayan geometrilerin kendi sistemleri içindeki değerleri evrenin değişik amaçlar için temsil etme yetenekleri yanında matematiğe devrimci bir görüş getirmişlerdir. Gauss ve Riemann dan sonra Euclid olmayan geometrilerin gelişiminde Lobacevski, Ricci, Weyl gibi ünlülerin katkıları büyük olmuştur.

Euclid olmayan geometrilerden birincisi, beşinci postülatı " bir doğruya dışındaki bir noktadan hiç bir paralel çizilemez " şeklinde alan Eliptik geometridir. İkincisi de; " bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir " şeklindeki paralellik versiyonunu kullanan Hiperbolik geometridir.

Her geometri kendisine bazı modeller seçer. Hiperbolik geometri de kendisine paralellik versiyonu nedeniyle pek çok model edinmiştir. Burada Hiperbolik geometrinin üst yarı düzlem modelini ele alacağız [5].

1.3.1. Hiperbolik Geometrinin Üst Yarı Düzlem Modeli

Tanım 1.22. $\mathbb{U} \coloneqq \{z \in \mathbb{C}: Imz > 0\}$ kümesine üst yarı düzlem denir.

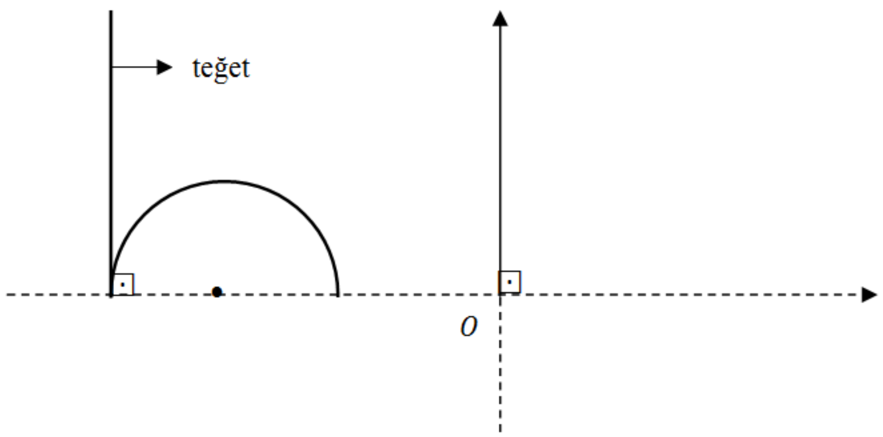


Şekil 1. Üst yarı düzlem gösterimi

Tanım 1.23. $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ye dik Öklid doğrularının $\mathbb{U}$ ile arakesiti olan yarı Öklid doğrularına ve $\mathbb{R}$ ye dik bilinen Öklid çemberlerinin $\mathbb{U}$ ile arakesitlerine hiperbolik doğrular adı verilir.

Kısaca $\mathbb{R}$ eksenine dik olan çemberlerin $\mathbb{U}$ da kalan yay parçalarına hiperbolik doğrular denir. Burada reel eksene dik $\mathbb{U}$ da kalan yarı doğruları sonsuz yarıçaplı çemberler veya merkezi sonsuzda olan çemberler olarak alıyoruz.

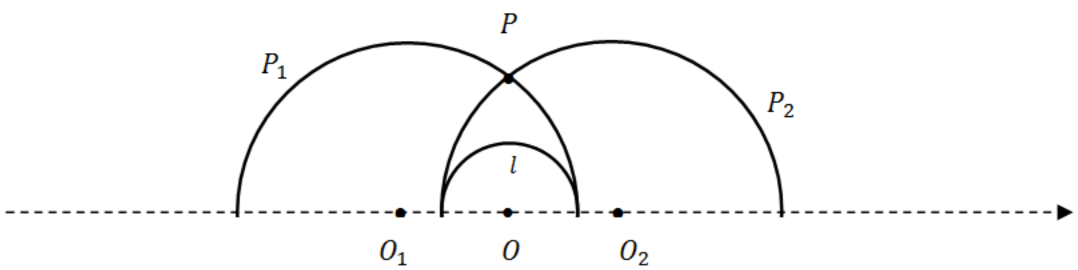
Dikkat edilirse Hiperbolik çemberler merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde bulunan çemberlerdir. Şöyle ki;



Şekil 2. Reel eksene dik çember

Reel eksene dik herhangi bir çember alalım. Çembere reel ekseni kestiği noktada bir teğet çizelim. Bir merkezden geçen doğrunun teğete değme noktasında dik olduğunu biliyoruz. Çizdiğimiz teğet değme noktasında reel eksene dik olduğundan merkez reel eksen üzerindedir.

Tanım 1.24. Ortak bir uç noktası olan iki hiperbolik doğruya paralel doğrular denir. Buna göre hiperbolik bir doğruya dışındaki bir noktadan şekilde olduğu gibi ℓ doğrusuna bir P noktasından P_1 ve P_2 gibi iki paralel çizilmiştir.

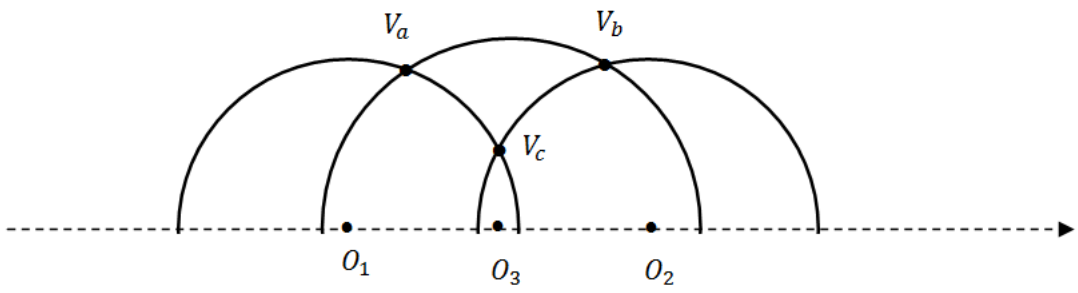


Şekil 3. $\mathbb{U}$ da paralel doğrular

Tanım 1.25. Ortak bir hiperbolik noktası olan (uç noktalar hariç) iki doğruya, kesişen doğrular denir. Uç noktaları da dahil hiç ortak noktası olmayan doğrulara kesişmeyen doğrular denir.

Tanım 1.26. $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere n kenarlı hiperbolik bir poligon, n tane hiperbolik doğru parçası tarafından sınırlanan ve $\mathbb{U}$ nun $\mathbb{C}_\infty$ daki kapanışında bulunan bir kapalı kümeye denir.

Üç kenarlı poligonlara hiperbolik üçgen denir. Eğer herhangi iki hiperbolik doğru parçası kesişiyorsa bu kesim noktasına köşe denir.



Şekil 4. Hiperbolik üçgen

Üçgenin köşeleri V_a, V_b, V_c ile gösterilir.

Şekil 5. Köşeleri sonsuzda olan H-üçgen

Hiperbolik üçgenin köşeleri şekildeki gibi olabilir.

1.3.2. Genel Möbiüs Grubu

Tanım 1.27. $PGL(2,\mathbb{C}) := \{M\colon\ \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty;\ M(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d \in \mathbb{C};\ ad-bc \neq 0\}$ kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur bu gruba genel möbiüs grubu adı verilir.

Sonuç 1.28. Burada $ad-bc \neq 0$ yerine $ad-bc = 1$ alınabilir.

İspat: $M(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d \in \mathbb{C}$ möbiüs dönüşümünü ele alalım.

$ad-bc \neq 0$ olduğuna göre $\lambda \in\ \mathbb{C}/\{0\}$ olacak şekilde $\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ seçilirse;

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda(az+b)}{\lambda(cz+d)} = \frac{\lambda az+\lambda b}{\lambda cz+\lambda d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{ad-bc}}z+\frac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\frac{c}{\sqrt{ad-bc}}z+\frac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$$

elde edilir. Bu dönüşümün determinantı;

$$\frac{a}{\sqrt{ad-bc}}\frac{d}{\sqrt{ad-bc}} - \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}\frac{c}{\sqrt{ad-bc}} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$$

olur. Dolayısıyla möbiüs dönüşümünün tanımındaki $ad-bc \neq 0$ yerine $ad-bc = 1$ alınabilir.

Tanım 1.29. $M\colon\ \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \begin{cases} z+\alpha\,, & z \neq \infty \\ \infty & , \ z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne öteleme dönüşümü denir.

Tanım 1.30. $M\colon\ \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & , \ z \neq \infty \\ 0 & , \ z = \infty \\ \infty\,, & z = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne inversiyon dönüşümü denir.

Tanım 1.31. $M\colon\ \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \begin{cases} \alpha z & , \ z \neq \infty \\ \infty & , \ z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne çarpım dönüşümü denir.

Teorem 1.32. Her $M \in PGL(2,\mathbb{C})$, $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü, öteleme, dönme ve çarpım dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir.

İspat: $c = 0$ ise, $M(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ve $ad-bc \neq 0$ olduğundan $ad \neq 0$ olur. $M_1 := \frac{a}{d}z$ ve $M_2 := z + \frac{b}{d}$ olarak seçilirse; $M(z) = (M_2 \circ M_1)(z) = M_2(\frac{a}{d}z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ olur.

$c \neq 0$ ise; $z \neq -\frac{d}{c}$ olmak üzere $M_1(z) = z + \frac{a}{c}$, $M_2(z) = z + \frac{d}{c}$, $M_3(z) = \frac{1}{z}$, $M_4(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ şeklinde seçilirse; $M = M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2$ olur. Gerçekten;

$$M(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3)\left(z + \frac{d}{c}\right) = (M_1 \circ M_4)\left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right)$$

$= M_1\left(\frac{bc-ad}{c^2}.\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right) = \frac{bc-ad}{c^2}.\frac{c}{cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d}$ olur. $z = -\frac{d}{c}$ olmak üzere; $M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} M(z) = (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)(z) &= (M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2)\left(-\frac{d}{c}\right) \\ &= (M_1 \circ M_4 \circ M_3)(0) \\ &= (M_1 \circ M_4)(\infty) = M_1(\infty) = \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $z \in \mathbb{C}_\infty$ için $M = M_1 \circ M_4 \circ M_3 \circ M_2$ dir.

Teorem 1.33. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ farklı üç nokta olsun. Bu durumda $M(z_1) = 0$, $M(z_2) = 1$, $M(z_3) = \infty$ olacak şekilde tek bir möbiüs dönüşümü vardır. ($M(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$)

Teorem 1.34. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ gibi üç farklı noktayı $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ gibi üç farklı noktaya götüren bir tek möbiüs dönüşümü vardır.

Sonuç 1.35. PSL(2,ℝ)$:= \left\{ M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty : M(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d \in \mathbb{R}\, ; ad - bc = 1 \right\}$ kümesi $PGL(2,\mathbb{C})$ nin bir alt grubudur.

Tanım 1.36. $M \in PSL(2,\mathbb{R})$ ve $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $M(z) = z$ denklemini sağlayan noktalara M nin sabit noktaları denir. Dolayısıyla, $\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$ elde edilir. $M \neq I$, $I(z) = z$ dir. M nin en fazla iki sabit noktası vardır. Bu noktalar:

$$\begin{aligned} \Delta = (d-a)^2 + 4bc &= d^2 + a^2 - 2ad + 4bc \\ &= d^2 + a^2 - 2(ad - bc) + 2bc \\ &= d^2 + a^2 - 2 + 2bc \\ &= d^2 + a^2 - 2 + 2(ad - 1) \\ &= d^2 + a^2 + 2ad - 4 \\ &= (a+d)^2 - 4 \end{aligned}$$

$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2 - 4}}{2c}$ olur. Burada üç durum söz konusudur:

(i) $|a+d| = 2 \Longrightarrow M$ dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta reel sayı veya ∞ dur.

(ii) $|a+d| > 2 \Longrightarrow M$ dönüşümünün farklı iki reel sabit noktası vardır.

(iii) $|a+d| < 2 \Longrightarrow M$ dönüşümünün iki kompleks eşlenik sabit noktası vardır.

Tanım 1.37. $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde;

(1) $|a + d| = 2$ ise M ye parabolik eleman,

(2) $|a + d| > 2$ ise M ye hiperbolik eleman,

(3) $|a + d| < 2$ ise M ye eliptik eleman adı verilir.

Sonuç 1.38. PSL(2,$\mathbb{R}$) grubu

(i) $\mathbb{U}$ üst yarı düzlemi $\mathbb{U}$ üst yarı düzleme,

(ii) Geodezikleri geodeziklere,

(iii) Çemberleri çemberlere resmederler.

Tanım 1.39. Λ, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin bir alt grubu olmak üzere I birim matrisinin $\mathrm{U} \cap \Lambda = \{\mathrm{I}\}$ şartını sağlayan bir U komşuluğu varsa Λ ya $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin bir ayrık alt grubu veya Fuchsian grup adı verilir.

Tanım 1.40. X bir bağlantılı, Hausdorff topolojik uzayı olsun. Bir $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ açık alt kümesi ve bir z: $\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V} \subset \mathbb{C}$ homeomorfizmasından meydana gelen bir (U, z) çiftine X in bir koordinat komşuluğu denir. $(\mathrm{U}_1, \mathrm{z}_1)$ ve $(\mathrm{U}_2, \mathrm{z}_2)$ koordinat komşulukları uyumlu denir; eğer

$$\mathrm{z}_1 \circ \mathrm{z}_2{}^{-1}: \mathrm{z}_2(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2) \longrightarrow \mathrm{z}_1(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2)$$

fonksiyonu holomorfik ise. Koordinat komşuluklarının bir $(\mathrm{U}_i, \mathrm{z}_i)_{i \in I}$ ailesine,

(i) $\mathrm{X} = \cup(\mathrm{U}_i)$

(ii) $\forall\ (i,j) \in I \times I$ için $(\mathrm{U}_i, \mathrm{z}_i)$ ile $(\mathrm{U}_j, \mathrm{z}_j)$ uyumludur.

koşullarının sağlanması halinde bir koordinat örtüm denir. İki örtümün birleşimlerinin de bir örtüm meydana getirmesi halinde bu örtümler eşdeğerdir denir. Bu örtümlerin kümesi üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısı tanımlar ve eşdeğerlik sınıfına da bir kompleks yapı adı verilir.

Tanım 1.41. Bir bağlantılı Hausdorff topolojik uzayına bir kompleks yapıyla birlikte bir Riemann yüzeyi adı verilir.

Her noktasının bir komşuluğu $\mathbb{R}^2$ nin bir açık alt kümesine homeomorf olan bir bağlantılı Hausdorff uzayına bir Riemann yüzeyi adı verilir. Eliptik eleman içermeyen keyfi bir Λ- Fuchsian grubu da $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nin bir alt grubu olarak $\mathbb{U}$ üzerinde hareket eder ve bölüm topolojisi ile meydana gelen bölüm uzayı bir Riemann yüzeyidir.

Diğer taraftan $\mathbb{U}$ daki kompleks yapı ${}^{\mathbb{U}}/_{\Lambda}$ yüzeyine transfer edildiğinde bir Riemann yüzeyi elde edilir. Eğer Λ eliptik eleman içeriyorsa sonuç yine bir Riemann yüzeyidir, ancak bu durumda $\mathbb{U} \rightarrow {}^{\mathbb{U}}/_{\Lambda}$ izdüşümü dallanmıştır. Ancak oluşan yüzey kompakt değildir, bunu sağlamak için $\mathbb{U}$ yerine $\mathbb{U} \cup \{\infty\}$ alınır. [17]

Teorem 1.42. [17] Her basit bağlantılı Riemann yüzeyi aşağıdakilerden birine konform eşdeğerdir:

(i) $\mathbb{C}_\infty$ Riemann Küresi

(ii) $\mathbb{C}$ Kompleks Düzlem

(iii) $\mathbb{U}$ Üst Yarı Düzlem

Bu Riemann yüzeylerinin otomorfizm grupları aşağıdaki gibidir;

Teorem 1.43. [17]

(i) $Aut(\mathbb{C}_\infty) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$

(ii) $Aut(\mathbb{C}) = \{z \to az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$

(iii) $Aut(\mathbb{U}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Tanım 1.44. Λ bir Fuchsian grup olsun. Bir $r \in \widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ noktası keyfi verildiğinde $\gamma(r) = r$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Lambda$ parabolik elemanı bulunabiliyorsa, bu noktaya Λ Fuchsian grubunun bir parabolik noktası veya cusp'ı denir. γ nın parabolik noktalarının kümesine γ nın cusp kümesi denir.

Yani, parabolik dönüşümün sabit bıraktığı noktaya cusp noktası denir.

Lemma 1.45. $\{\, T: z \to \frac{az+b}{cz+d} \ | a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1\}$ kümesi $PSL(2, \mathbb{R})$ nin bir alt grubudur.

Tanım 1.46. $\Gamma := \{\, T : z \to \frac{az+b}{cz+d} \ | a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1\}$ grubuna modüler grup adı verilir.

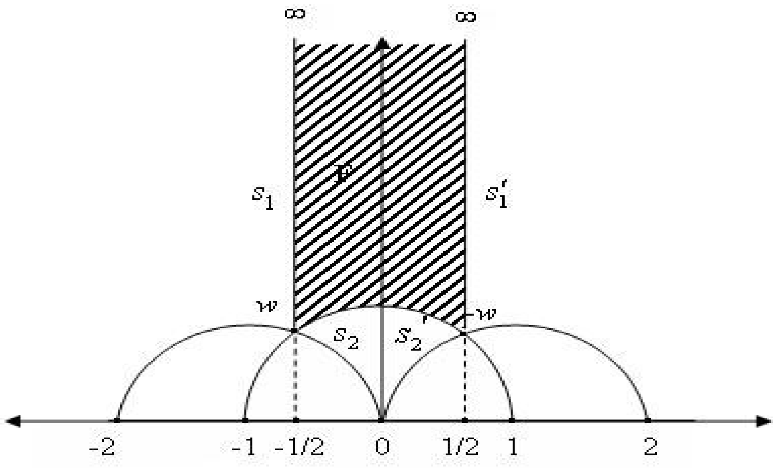
Burada her bir möbiüs dönüşümü 2×2 tipinde bir matrise karşılık gelir.

Tanım 1.47. Bir Λ Fuchsian grubu verildiğinde, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $F \subset \mathbb{U}$ kapalı kümesine Λ nın bir F temel bölgesi denir:

(i) $\bigcup_{T \in \Lambda} T(F) = \mathbb{U}$

(ii) $\forall\, T \in \Lambda \setminus \{I\}$ için $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \emptyset$

Buna göre; $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ \geq 1,\ |x| \leq \frac{1}{2},\ \ y > 0\right\}$ kümesi Γ modüler grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 6. Γ nın F temel bölgesi

$T(z) = z + 1$ için $T(s_1) = s_1{}'$ ve $\mathrm{U(z)} = -\frac{1}{z}$ için $\mathrm{U}(s_2) = s_2{}'$ olduğundan $(s_1, s_1{}')$ ve $(s_2, s_2{}')$ kongrü kenar çiftleridir. Bu nedenle T ve U dönüşümleri Γ modüler grubunu üretir.

Tanım 1.48. X$\neq \emptyset$ bir küme, $\Delta \subset$ X $\times$ X bir bağıntı olsun. G=(X, Δ) ikilisine bir graf denir. X in elemanlarına grafın köşeleri ve Δ nın elemanlarına grafın kenarları denir. (a,b) ϵ Δ ise bu durum a⟶b ile gösterilir. Eğer a⟶b veya a⟵b ise a ve b ye bir kenar ile bağlanmıştır denir. Bu durumda a ve b ye komşu köşeler denir.

G=(X, Δ) bir graf ve A$\subset$ X olsun. G' =(A, $\Delta \cap$ A $\times$ A) grafına köşe kümesi A olan G nin bir alt grafı denir.

1.4. Gauss Tamsayılar Halkası

$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $\mathbb{Z}[i]$, karmaşık sayılardaki toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. $\mathbb{Z}[i]$ nin elemanlarına Gauss Tamsayıları denir. $\mathbb{Z}[i]$ nin birim elemanı 1 ve birimleri 1, -1, $i, -i$ dir. Eğer $\alpha = \beta v$ olacak şekilde $\alpha, \beta, v \in \mathbb{Z}[i]$ varsa β, α yı bölüyor denir ve bu durum $\beta|\alpha$ ile gösterilir. Örneğin, $8 + i = (3 + 2i)(2 - i)$ olduğundan $3 + 2i$, $8 + i$ yi böler. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ için $\alpha = \varepsilon\beta$ olacak şekilde bir ε birimi varsa β ya α ile ilgilidir denir. Açık olarak α ile ilgili elemanlar $\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha$ dır. α, β ile bölünebiliyorsa α nın β nın ilgilileriyle de bölünebildiği açıktır. Dolayısıyla bölme işleminde bir sayının α böleni ile α nın ilgilileri aynı kabul edilebilir.Tamsayılardaki bölme kurallarının $\mathbb{Z}[i]$ de geçerli olduğunu görmek kolaydır.

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. α, β nın birimden farklı bir ortak böleni yoksa α ve β ya aralarında asaldır denir ve bu durum $(\alpha, \beta) = 1$ ile gösterilir. $\pi \in \mathbb{Z}[i]$, $\pi \neq 0$ ve π birimden farklı olsun. π nin birimden ve ilgililerinden başka böleni yoksa π ye asaldır denir. π asal ise π nin bölenleri sadece $1, -1, i, -i, \pi, -\pi, i\pi, -i\pi$ dir [24].

$\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ olmak üzere $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$ değerine α nın normu denir. Açık olarak $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ dır.

$N(\alpha)$, $\mathbb{Z}$ de asal ise α nın asal olduğu açıktır. $N(1+i) = 2$ ve 2, $\mathbb{Z}$ de asal olduğundan $1+i$ asaldır. Aynı biçimde $N(2+i) = 5$ olduğundan $2+i$ asaldır.

Teorem 1.49. $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, $\alpha \neq 0$ ve α birimden farklı olsun. Bu takdirde α ya asaldır ya da bir asal elemanla bölünebilir.

Teorem 1.50. $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, $\alpha \neq 0$ ve α birimden farklı ise; α, $\mathbb{Z}[i]$ nin asal elemanlarının çarpımı olarak yazılabilir.

Teorem 1.51. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ve $\beta \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $N(\alpha - \beta\mu) < N(\beta)$ olacak biçimde bir $\mu \in \mathbb{Z}[i]$ vardır.

Sonuç 1.52. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ve $\beta \neq 0$ ise $\alpha = \beta\mu + \upsilon$ ve $N(\upsilon) < N(\beta)$ olacak biçimde $\mu, \upsilon \in \mathbb{Z}[i]$ elemanları vardır.

Teorem 1.53. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. α ve β aralarında asal ise $1 = \alpha\xi + \beta\eta$ olacak biçimde $\xi, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ vardır.

Teorem 1.54. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ise, α ve β nın aşağıdaki şartları sağlayacak biçimde bir δ ortak böleni vardır.

a) α ve β nın her ortak böleni δ yı böler.

b) $\delta = \alpha\xi + \beta\eta$ olacak biçimde $\xi, \eta \in \mathbb{Z}[i]$ vardır.

Teorem 1.54 deki δ sayısına α ve β nın en büyük ortak böleni denir. Bu, en büyük ortak bölen bölme algoritmasıyla bulunabilir.

Teorem 1.55. $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ve π asal olsun. $\pi | \alpha\beta$ ise $\pi | \alpha$ veya $\pi | \beta$ dır.

Teorem 1.56. α ile β aralarında asal ve $\alpha | \nu$, $\beta | \nu$ ise $\alpha\beta | \nu$ dir.

Teorem 1.57. $\alpha, \beta, \nu \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. $(\alpha, \nu) = (\beta, \nu) = 1$ ise $(\alpha\beta, \nu) = 1$ dir.

Teorem 1.58. $\alpha, \beta, \nu \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. α ile ν aralarında asal ve $\alpha | \beta\nu$ ise $\alpha | \beta$ dır.

Şimdi $\mathbb{Z}[i]$ nin asal elemanlarının yapısını inceleyelim: $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ asal olsun. $N(\pi) = \pi\,\bar{\pi} = |\pi|^2$ olduğundan π, pozitif bir tamsayının bölenidir. π nin böldüğü en küçük pozitif tamsayı n olsun. Bu n tamsayısı $\mathbb{Z}$ de asal olmak zorundadır. Böylece π pozitif bir p asal sayısının bölenidir. Ayrıca π, iki tane farklı p ve q pozitif asal sayılarını bölemez. Çünkü p,q $\mathbb{Z}$ de asal ise $1 = px + qy$ olacak biçimde $x, y \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır. Buradan $\pi|p$ ve $\pi|q$ ise $\pi|1$ bulunur. Bu ise π nin asal olmasına aykırıdır.

$\pi = a + ib$ ve $\pi|p$ olsun. Burada $p \in \mathbb{Z}$ asal ve $p > 0$ dır. $\pi|p$ olduğundan $p = \pi\alpha$ olacak biçimde $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ elemanı vardır. Buradan $p^2 = N(p) = N(\pi)N(\alpha)$ yazılabilir. Burada iki durum söz konusudur:

a) $N(\pi) = p$ ve $N(\alpha) = p$

b) $N(\pi) = p^2$ ve $N(\alpha) = 1$

$p = 2$ ise π, $1 + i$ ile ilgili bir eleman olur. Eğer $p \neq 2$ ise $p = 4n + 1$ veya $p = 4n + 3$ biçimindedir.

$p = 4n + 3$ olsun. Dolayısıyla a) geçerli olamaz. Çünkü $p = a^2 + b^2$ ise $p \equiv 1(mod4)$ dir. Dolayısıyla b) geçerli olur. Böylece $p = \pi\alpha$, $N(\pi) = 1$ yani α birimdir ve bu durumda π, $4n + 3$ formunda bir asal sayı ile ilgilidir.

$p = 4n + 1$ olsun. Dolayısıyla $p|x^2 + 1$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır. Böylece $p|\ (x - i)(x + i)$ sağlanır. p, $x + i$ ve $x - i$ sayılarını bölemeyeceğinden p sayısı $\mathbb{Z}[i]$ de asal olamaz. Bu nedenle b) geçerli olamaz, a) geçerli olur. $N(\pi) = p$ ise $p = \pi\,\bar{\pi}$ sağlanır. Yani π, $4n + 1$ formunda bir pozitif asal sayının çarpanıdır. Ayrıca $4n + 3$ formundaki her pozitif asal sayının $\mathbb{Z}[i]$ de de asal olduğunu göstermek kolaydır. Diğer taraftan $4n + 1$ formundaki her pozitif asal p sayısı için $p = a^2 + b^2$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{Z}$ tamsayılarının mevcut olduğu biliniyor. Dolayısıyla $p = (a + ib)(a - ib)$ dir ve buradaki çarpanlar asaldır. Ayrıca $a - ib$ ile $a + ib$ elemanlarının ilgili olmadığını görmek kolaydır [24].

Teorem 1.59. $\mathbb{Z}[i]$ nin asal elemanları aşağıdaki gibidir:

1) $1 + i$ ve onun ilgilileri

2) $4n + 3$ formundaki pozitif asal sayılar ve onların ilgilileri

3) $4n + 1$ formundaki pozitif asal sayıların $a + ib$ biçimindeki çarpanları.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Modüler Grup

$PSL(2,\mathbb{R})$ nin üzerinde en çok çalışılan alt grubu olan $\Gamma := \{T : z \to \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve $ad-bc=1\}$ modüler grubunu göz önüne alalım. Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 lik tamsayılar matrisiyle de temsil edilebilir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = 1$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matrisi negatifi ile eş tutacağız. Böylece matris ve dönüşümü arasında bir ayrım yapılmayacaktır.

Teorem 2.1. Γ modüler grubu $X^2 = Y^3 = I$ bağıntısı ile verilen $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilir. Yani; $\Gamma = \langle X, Y \rangle$ dir.

Γ modüler grubunun cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Gerçekten;

$T \in \Gamma$ olmak üzere T nin sabit noktaları $z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2-4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2-4}}{2c}$ şeklinde idi. Parabolik dönüşümde $|a+d| = 2$ olduğundan $z = \frac{(a-d)}{2c}$ olur ki burada $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z = \frac{(a-d)}{2c} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olur.

Şimdi de Γ nın cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketini inceleyelim.

2.1.1. *Γ* nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanı, $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x,y) = 1$ olmak üzere, $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ ile temsil edeceğiz.

Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir. $T \in \Gamma$ olmak üzere;

$$T\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{a.\frac{x}{y}+b}{c.\frac{x}{y}+d}=\frac{\frac{ax+by}{y}}{\frac{cx+dy}{y}}=\frac{ax+by}{cx+dy} \qquad \text{ve} \qquad T\left(\frac{-x}{-y}\right)=\frac{a.\frac{-x}{-y}+b}{c.\frac{-x}{-y}+d}=\frac{\frac{-ax-by}{y}}{\frac{-cx-dy}{y}}=\frac{-ax-by}{-cx-dy}=\frac{ax+by}{cx+dy}$$

olduğundan $T\left(\frac{x}{y}\right)=T\left(\frac{-x}{-y}\right)$ dir. Bu da Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin iyi tanımlı olduğunu ifade eder.

Eğer $(x,y)=1$ ve $ad-bc=1$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ kesri de indirgenmiş formdadır. Gerçekten; Varsayalım ki $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın. Buna göre $n \mid ax+by$ ve $n \mid cx+dy$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ elemanı vardır. Bu durumda $k,l \in \mathbb{Z}$ için

$$ax+by=kn \tag{2.1}$$

ve

$$cx+dy=ln \tag{2.2}$$

dir.

(2.1) eşitliğinin her iki tarafı d ile ve (2.2) eşitliğinin her iki tarafı $-b$ ile çarpıldığında $adx+bdy=knd$ ve $-bcx-bdy=-bln$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$(ad-bc)x=(kd-bl)n \xRightarrow{ad-bc=1} x=(kd-bl)n \tag{2.3}$$

ve benzer şekilde (2.1) eşitliğinin her iki tarafı $-c$ ile ve (2.2) eşitliğinin her iki tarafı a ile çarpıldığında $-acx-bcy=-knc$ ve $acx+ady=aln$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$(ad-bc)y=(al-ck)n \xRightarrow{ad-bc=1} y=(al-ck)n \tag{2.4}$$

elde edilir.

(2.3) ve (2.4) den $n \mid x$ ve $n \mid y$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $(ax+by,cx+dy)=n>1$ olduğunu varsaymamızdan kaynaklandı. O halde varsayımımız yanlıştır, yani $(ax+by,cx+dy)=1$ dir.

Teorem 2.2.

(i) Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

(ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat:

(i) $\forall\, v=\frac{a}{b}$, $w=\frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanları için $T\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{d}$ olan $T \in \Gamma$ dönüşümünün varlığını göstermeliyiz. Bunun için $\forall\, v=\frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanının $\Gamma(\infty)=\{g(\infty): g \in \Gamma\}$ da olduğunu göstermemiz yeterlidir. Çünkü; $k(\infty)=\frac{a}{b}$ ve $l(\infty)=\frac{c}{d}$ olan $k,l \in \Gamma$ mevcut ise $T:=lk^{-1}$

ile $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{c}{d}$ dir. $v = \frac{a}{b} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}$ olsun. Bu durumda $(a, b) = 1$ olduğundan $\exists\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{Z}$ öyle ki $ax - by = 1$ dir. Böylece, $g := \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \epsilon\, \Gamma$ dır ve $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olduğundan $g(\infty) = \frac{a}{b}$ dir. Dolayısıyla $\frac{a}{b}$, ∞ un yörüngesindedir. Yani; Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

(ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi iki elemanının sabitleyenleri Γ da eşlenik olduklarından ∞ un sabitleyeni olan Γ_∞ u göz önüne almak yeterlidir. $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \epsilon \mathbb{Z}\right\} = \langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle$ dır. Gerçekten; $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\, \Gamma_\infty$ olsun. O halde $T(\infty) = \infty$ dur. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ ve $c = 0$ dır ve ayrıca $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\, \Gamma_\infty \subset \Gamma$ olduğundan $ad - bc = 1$ dir. $1.d - b.0 = 1 \Rightarrow d = 1$ dir. O halde $T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \,\epsilon\, \mathbb{Z}$ formundadır. Yani; $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \,\epsilon\, \mathbb{Z}\right\}$ dir. Böylece Γ_∞ $z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ da herhangi bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

2.1.2. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 2.3. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, Γ nın $\Gamma(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1\, mod n,\ b \equiv\ c \equiv 0 \,mod\, n\right\}$ alt grubuna temel kongrüans alt grubu adı verilir. Γ grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt grubunu içeren herhangi bir alt grubuna kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma_1(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1\, mod n, c \equiv 0 \,mod\, n\right\}$$

$$\Gamma^1(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1\, mod n, b \equiv 0 \,mod\, n\right\}$$

$$\Gamma_0(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, c \equiv 0 \,mod\, n\right\}$$

$$\Gamma^0(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, b \equiv 0 \,mod\, n\right\}$$

$$\Gamma_0^0(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, b \equiv c \equiv 0 \,mod\, n\right\}$$

şeklindedir.

Bunlar arasındaki ilişki ise,

$\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $\Gamma(n) \leq \Gamma^1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma^0(n) \leq \Gamma$

şeklindedir. Ayrıca $\Gamma(n) \lhd \Gamma$ dır. Dolayısıyla $\Gamma(n)$, $\Gamma_0(n)$ ve $\Gamma_1(n)$ nin de normal alt grubudur. Diğer taraftan, $\Gamma_1(n) \lhd \Gamma_0(n)$ dır. Buna göre indeksler $n > 2$ için;

$|\Gamma: \Gamma_0(n)| = \psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$

$|\Gamma: \Gamma_1(n)| = \psi(n) = \frac{n^2}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$

$|\Gamma: \Gamma(n)| = \psi(n) = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ dir.

$\Gamma_0(n)$, $\Gamma_1(n)$ ve $\Gamma(n)$ nin de cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Çünkü bunlar Γ nın sonlu indeksli alt gruplarıdır ve bir Λ- Fuchsian grubunun sonlu indeksli herhangi bir alt grubu da Λ ile aynı cusp kümesine sahiptir [26].

2.1.3. İmprimitif Hareket

Tanım 2.4. G, X in bir transitif hareket grubu ise, (G, X) ikilisine bir transitif permütasyon grubu adı verilir.

Tanım 2.5. (G, X) bir transitif permütasyon grubu ve "≈" X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $\alpha,\ \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda, $\forall g \in G$ için, $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa ≈ denklik bağıntısına X üzerinde G invaryant denklik bağıntısı adı verilir. Bu bağıntının denklik sınıflarına da bloklar denir.

Bu tanıma göre;

(i) Özdeşlik Bağıntısı : “ $\forall \alpha, \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta \iff \alpha = \beta$”

(ii) Evrensel Bağıntı : “ $\forall \alpha, \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta$”

bağıntılarının G invaryant denklik bağıntıları olduğu açıktır. Bu bağıntılara aşikar bağıntılar adı verilir.

Eğer X üzerinde özdeşlik bağıntısından ve evrensel bağıntıdan farklı bir G invaryant denklik bağıntısı daha varsa G nin X üzerindeki hareketine imprimitif hareket, aksi halde primitif hareket denir.

Önerme 2.6. [18] (G, Ω) transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde; (G, Ω) primitiftir ⟺ Her α ϵ Ω için, α ϵ Ω noktasının sabitleyeni olan G_α, G nin bir maksimal alt grubudur. ■

Önerme 2.7. (G, Ω) transitif olsun. Bu takdirde; (G, Ω) imprimitiftir $\Leftrightarrow$ $\exists\ \alpha \in \Omega$ ve $H < G$ öyle ki $G_\alpha \lneqq H \lneqq G$ dir.

İspat: "$\Rightarrow$" Aşikardır.

"$\Leftarrow$" $G_\alpha \lneqq H \lneqq G$ olsun. G, Ω üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden Ω kümesinin her elemanı bir $g \epsilon G$ için $g(\alpha)$ biçimindedir. Yani Ω:={$g(\alpha)$: $g \epsilon G$}=[α] biçimindedir (yani tek bir yörünge vardır.). Gerçekten; G, Ω üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\forall$ α,β ϵ Ω için $\exists\ g \in G$ öyle ki $g(\alpha) = \beta$ dır. Yani, β ϵ [α] dır. Böylece $\Omega \subset$[α] dır. (2.5)

[α] $\subset$ Ω olduğu açıktır. Çünkü; $s: Gx\Omega \to \Omega$, $s(g,\alpha) \coloneqq g\alpha \coloneqq g(\alpha)$ dır. $\Rightarrow$ $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \in \Omega$ dır. $\Rightarrow$ [α] $\subset \Omega$ dır. (2.6)

(2.5) ve (2.6) dan Ω=[α]={$g(\alpha)$: $g \in G$} dir.

Ω üzerinde $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \epsilon\ gH$ ile tanımlanan "≈" bağıntısı iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısıdır. Gerçekten,

(i) $H < G$ olduğundan $e_G \epsilon\ H$ dır. $\forall g \epsilon\ G$ için $g = ge_G$ olduğundan $g \epsilon\ gH$ dır. $\Leftrightarrow$ $g(\alpha) \approx g(\alpha)$ dır.

(ii) $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \epsilon\ gH \Leftrightarrow g' = gh$ olan $h \epsilon H\ \exists$. $\xLeftrightarrow{H<G\ ,h^{-1}\epsilon H} g = g'h^{-1} \Leftrightarrow g \epsilon\ g'H$ $\Leftrightarrow g'(\alpha) \approx g(\alpha)$.

(iii) $g(\alpha) \approx g'(\alpha)$ ve $g'(\alpha) \approx g''(\alpha)$ olsun. $g(\alpha) \approx g''(\alpha)$ olduğunu göstermeliyiz.

$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \epsilon\ gH \Leftrightarrow g' = gh$ olan $h \epsilon H\ \exists$.

$g'(\alpha) \approx g''(\alpha) \Leftrightarrow g'' \epsilon\ g'H \Leftrightarrow g'' = g'h'$ olan $h' \epsilon H\ \exists$. $\xLeftrightarrow{g'=gH} g'' = ghh' \xLeftrightarrow{H<G.hh'\epsilon H}$ $g'' \epsilon\ gH \Leftrightarrow g(\alpha) \approx g''(\alpha)$ dır.

(i), (ii), (iii) den "≈" bir denklik bağıntısıdır. Şimdi gösterelim ki; "≈" G invaryanttır.

$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \epsilon\ gH \xLeftrightarrow{\forall\, m\, \epsilon\, G} mg' \epsilon\ mgH \Leftrightarrow mg(\alpha) \approx mg'(\alpha) \Leftrightarrow m\big(g(\alpha)\big) \approx m\big(g'(\alpha)\big)$ elde edilir. Böylece "≈" nın iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısı olduğu gösterilmiş oldu. Şimdi de "≈" nın ne özdeşlik bağıntısı ne de evrensel bağıntı olmadığını gösterelim:

Farzedelim ki "≈" evrensel bağıntı olsun. $H \lneqq G$ olduğundan $\exists\ g_0 \epsilon\ G$: $g_0 \notin H$ dır. "≈" evrensel bağıntı olduğundan $e(\alpha) \approx g_0(\alpha)$ dır. $\Rightarrow$ $g_0 \epsilon\ eH = H$ dır. Bu çelişki bize "≈" nın bir evrensel bağıntı olamayacağını söyler.

Farzedelim ki "≈" özdeşlik bağıntısı olsun. Bu durumda; $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) = g'(\alpha)$ dır. $\Leftrightarrow g^{-1}g(\alpha) = g^{-1}g'(\alpha)$ $\Leftrightarrow g^{-1}g' \epsilon\ G_\alpha$ $\Leftrightarrow$ $g' \epsilon\ gG_\alpha$ dır. $G_\alpha \lneqq H$ olduğundan

$\exists\, h_0 \epsilon\, H$ öyleki $h_0 \notin G_\alpha$ dır. $\Rightarrow$ $h_0(\alpha) \neq \alpha = e(\alpha)$ dır. Öte yandan $h_0 \epsilon\, eH = H$ olduğundan $e(\alpha) \approx h_0(\alpha)$ dır. Bu çelişki bize "≈" nın özdeşlik bağıntısı olamayacağını söyler.

Böylece G nin **Ω** üzerindeki hareketi imprimitiftir.

Not: $\beta\, \epsilon\, \Omega$ ise transitiflikten $\Omega = \{g(\alpha): g\, \epsilon\, G\}$ olduğundan $\beta = g(\alpha)$ olan bir $g\, \epsilon\, G$ vardır. Böylece β yı içeren [β] bloğu $[\beta] = \{gh(\alpha): h\, \epsilon\, H\}$ biçimindedir. Gerçekten; β yı içeren [β] bloğu, β nın denklik sınıfı olduğundan, $[\beta] = \{\gamma \epsilon\, \Omega: \gamma \approx \beta\}$ dır. γ ϵ **Ω** ve $\Omega = \{g(\alpha): g \epsilon\, G\}$ olduğundan $\exists\, m\, \epsilon\, G$ öyle ki $\gamma = m(\alpha)$ dır. γ≈β $\xLeftrightarrow{simetri\text{ öz.}}$ β≈γ $\Leftrightarrow$ $g(\alpha) \approx m(\alpha) \Leftrightarrow m\, \epsilon\, gH \Leftrightarrow m = gh$ olan $h\, \epsilon\, H\, \exists \Leftrightarrow m(\alpha) = gh(\alpha) \Leftrightarrow \gamma = gh(\alpha)$ dır. $\Leftrightarrow$ $[\beta] = \{gh(\alpha): h\, \epsilon\, H\} = gH\alpha$ olduğu görülür. Özel olarak α yı içeren [α] bloğu; $[\alpha] = \{h(\alpha): h\, \epsilon\, H\} = H\alpha \coloneqq H(\alpha)$ yörüngesidir. Gerçekten; $[\alpha] = \{\theta\, \epsilon\, \Omega: \theta \approx \alpha\}$, $\theta\, \epsilon\, \Omega$ ve $\Omega = \{g(\alpha): g\, \epsilon\, G\}$ olduğundan $\exists\, h\, \epsilon\, G$ öyle ki $\theta = h(\alpha)$ dır. θ≈α $\xLeftrightarrow{simetri\text{ öz.}}$ $\alpha \approx \theta \Leftrightarrow$ α≈$h(\alpha)$ $\Leftrightarrow$ $e(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow h\, \epsilon\, eH = H \Leftrightarrow \theta = h(\alpha), h\, \epsilon\, H \Leftrightarrow [\alpha] = \{h(\alpha): h\, \epsilon\, H\} = H(\alpha)$ dır. H nın G içindeki sol yan sınıflarının temsilcilerinin kümesi $\{l_i{:}i\, \epsilon\, I\}$ ile gösterilsin. Böylece (G, Ω) hareketinin blokları (denklik sınıfları) $l_i H(\alpha)$ $(i\, \epsilon\, I)$ lardır. Gerçekten; $\omega\, \epsilon\, \Omega$, [ω] bloğunu göz önüne alalım. G nin **Ω** üzerindeki hareketi transitif olduğundan $\omega = k(\alpha)$ olan $k\, \epsilon\, G\, \exists$. Böylece, $[\omega] = [k(\alpha)] = \{kh(\alpha): h\, \epsilon\, H\} = kH(\alpha)$ dan $k = l_t h_t$ olan $h_t\, \epsilon\, H\, \exists$. Dolayısı ile, $kH(\alpha) = l_t H(\alpha)$ dır. Böylece bloklar sol yan sınıflarından yalnız birine karşılık gelir.

$H < G$ ise $G = \cup_{i\epsilon I}\, l_i H$ olduğundan blokların sayısı sol yan sınıfların sayısına, yani H nın G deki $|I|$=$|G{:}\,H|$ indeksine eşittir.

G nin $\Omega/\approx$ ={[β]:$\beta\, \epsilon\, \Omega$} denklik sınıfları üzerinde de bir hareketi vardır. Bu hareket; $\wedge: Gx\Omega/\approx \to \Omega/\approx$, $\wedge(g, [\beta]) = g\wedge[\beta] \coloneqq [g\beta]$ dır. "∧" nın $\Omega/\approx$ üzerinde bir grup hareketi olduğunu gösterelim:

(i) $g\wedge(h\wedge[\beta]) = g\wedge([h\beta]) = [gh\beta] = gh\wedge[\beta]$

(ii) $e\wedge[\beta] = [e\beta] = [\beta]$

(i) ve (ii) ile "∧" bir harekettir. Bu harekete G nin denklik sınıfları üzerindeki hareketi denir. [α] bloğunun sabitleyeni olan $G_{[\alpha]} = H$ dır. Gerçekten; $g\epsilon\, G_{[\alpha]} \Leftrightarrow g\wedge[\alpha] = [\alpha] \Leftrightarrow$ $[g\alpha]$=[α] $\Leftrightarrow gH(\alpha)$=$H(\alpha) \Leftrightarrow g\, \epsilon\, H \Leftrightarrow G_{[\alpha]} = H$ olduğu görülür.

Şimdi burada G yerine Γ modüler grubu, Ω yerine $\widehat{\mathbb{Q}}$ alarak işlem yapacağız. Burada ∞ un sabitleyeni olan Γ_∞ , Γ modüler grubunun bir alt grubudur ve $\Gamma_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ dir. $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ invaryant denklik bağıntısını aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

Biliyoruz ki, $\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\, \Gamma :\ c \equiv 0\ mod n \right\}$ kongruans alt grubu alındığında $\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $n > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < \Gamma$ dır. Böylece Γ , $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder. $v = \frac{r}{s}$, $w = \frac{x}{y}\ \epsilon\ \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere, $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olan $g, g' \epsilon\, \Gamma$ vardır. Böylece, $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}$ ve $g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ formundadırlar. $v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \epsilon \ \ H = \Gamma_0(n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \epsilon\, H = \Gamma_0(n) \Leftrightarrow$ $ry - sx \equiv 0\ mod n$ dir. Böylece, $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0\ mod n$ dir.

2.1.4. $\boldsymbol{\Gamma}$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde; G, $\Omega \times \Omega$ üzerinde $g: (\alpha, \beta) \to (g(\alpha), g(\beta))$ ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir ve (α, β) yı içeren alt yörünge $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. $O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden bir $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafını aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$*$ Köşeleri Ω nın elemanları ve

$*$ $(\gamma, \delta)\ \epsilon\ O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya yönlendirilmiş bir kenar vardır denir ve $\gamma \to \delta$ ile gösterilir.

Açık olarak, $O(\beta, \alpha)$ da bir alt yörüngedir ve $O(\alpha, \beta)$ ile $O(\beta, \alpha)$ alt yörüngeleri ya eşittir ya da ayrıktırlar. Eğer bu alt yörüngeler ayrık iseler $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ alt yörüngesel grafı $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafının sadece ters yönlendirilmişidir ve bu durumda $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ ile $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Eğer $O(\alpha, \beta)$ ile $O(\beta, \alpha)$ alt yörüngeleri eşit iseler bu durumda $\mathcal{G}(\alpha, \beta) = \mathcal{G}(\beta, \alpha)$ alt yörüngesel grafı çift taraflı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Bu durumda bu alt yörüngesel grafa kendi eşleşmiştir (self-paired) denir.

Önerme 2.8. $\mathcal{G}$ bir (G,Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde;

(i) G, $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

(ii) G, $\mathcal{G}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

(iii) $\mathcal{G}$ kendi eşleşmiş bir graf ise; G, $\mathcal{G}$ nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

(iv) G, $\mathcal{G}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat: $g \in G$ keyfi olmak üzere;

(i) $L_g : \mathcal{G}(\alpha,\beta) \to \mathcal{G}(\alpha,\beta)$, $L_g(x \to y) := g(x) \to g(y)$, $g \in G$ dönüşümünün bir otomorfizma (birebir, örten, yapı koruyan dönüşüm) olduğunu gösterirsek G grubunun $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket ettiğini göstermiş oluruz.

Yapı Koruma:

$x \to y$ $\mathcal{G}$ de bir kenar olsun. $(x,y) \in O(\alpha,\beta)$ dır. $O(\alpha,\beta) = \{g(\alpha,\beta) : g \in G\}$ olduğundan $\exists\, h \in G$ öyle ki $(x,y) = h(\alpha,\beta)$ dır. Böylece $g \in G$ olmak üzere $g(x,y) = g\big(h(\alpha,\beta)\big) = gh(\alpha,\beta)$ ve böylece $gh(\alpha,\beta) = g(x,y) = (g(x), g(y))$; yani, $g(x) \to g(y)$ $\mathcal{G}$ de bir kenardır. Dolayısıyla L_g dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür. (Burada $x \to y$ $\mathcal{G}$ de bir kenar yerine kısaca $x \to y \in \mathcal{G}$ yazacağız.)

Birebirlik:

$x \to y$, $a \to b \in \mathcal{G}$ kenarları için $L_g(x \to y) = L_g(a \to b)$ olsun. Buradan; $g(x) \to g(y) = g(a) \to g(b) \xRightarrow{G\ grup\ old. g^{-1} \in G\ \exists} g^{-1}g(x) \to g^{-1}g(y) = g^{-1}g(a) \to g^{-1}g(b)$ elde edilir. Böylece; $x \to y = a \to b$ dir. Yani, L_g birebirdir.

Örtenlik:

$\forall\, x \to y \in \mathcal{G}$ kenarı için $g^{-1}(x) \to g^{-1}(y) \in \mathcal{G}$ kenarı vardır öyle ki $L_g\big(g^{-1}(x) \to g^{-1}(y)\big) = g\big(g^{-1}(x)\big) \to g\big(g^{-1}(y)\big) = x \to y$ dir. Dolayısı ile L_g örten bir dönüşümdür.

Böylece G grubunun $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket ettiği gösterilmiş oldu.

(ii) (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olduğundan aşikardır.

(iii) $\mathcal{G}$ kendi eşleşmiş olsun. Bu durumda $O(\alpha,\beta) = O(\beta,\alpha)$ dır.

x ile y ardışık köşeler ise (x,y) veya $(y,x) \in O(\alpha,\beta)$ dır. Dolayısı ile; x ile y ve a ile b ardışık köşeler ise $(x,y) \in O(\alpha,\beta)$ ve $(a,b) \in O(\alpha,\beta)$ olduğunu farzedebiliriz. $O(\alpha,\beta) = \{g(x,y) : g \in G\}$ olduğundan $\exists\, g_1, g_2 \in G$ öyle ki $(x,y) = g_1(\alpha,\beta)$ ve

$(a,b)=g_2(\alpha,\beta)$ dır. Böylece; $g_1^{-1}(x,y)=(\alpha,\beta)$, yani $(a,b)=g_2g_1^{-1}(x,y)$ ve G grup olduğundan $h:=g_2g_1^{-1}\,\epsilon\,G$ dir. Böylece G, $\mathcal{G}$ grafının ardışık köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

(iv) $x\to y$ ve $a\to b$ $\mathcal{G}(\alpha,\beta)$ da iki kenar olsun. Bu takdirde, $(x,y)\,\epsilon\,O(\alpha,\beta)$ ve $(a,b)\,\epsilon\,O(\alpha,\beta)$ olduğundan $T_1(\alpha,\beta)=(x,y)$ ve $T_2(\alpha,\beta)=(a,b)$ olan $T_1,T_2\,\epsilon\,G$ vardır. Buradan $T_1^{-1}(x,y)=T_2^{-1}(a,b)$ dir. Böylece, $T_2\circ T_1^{-1}(x,y)=(a,b)$ elde edilir. Bu da bize G nin $\mathcal{G}$ alt yörüngesel grafının kenarları üzerinde transitif olarak hareket ettiğini söyler.

Örnek 2.9. $O(\alpha,\alpha)=\{(\gamma,\gamma):\gamma\,\epsilon\,\Omega\}$ $\Omega x\Omega$ nın köşegenidir. Buna karşılık gelen, trivial graf diye adlandırılan, $\mathcal{G}(\alpha,\alpha)$ grafı kendi eşleşmiştir: Her bir $\gamma\,\epsilon\,\Omega$ köşesine bağlı olan bir düğümden oluşur. Biz genel olarak trivial olmayan alt yörüngesel graflarla ilgileneceğiz.

Şimdi Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi ile oluşan alt yörüngesel grafları inceleyelim: Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $v\in\widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere $g(\alpha,\beta)=(\infty,v)$ olan bir $g\,\epsilon\,G$ vardır. Dolayısıyla her bir $O(\alpha,\beta)$ alt yörüngesi bir (∞,v) çifti içerir. Yörüngeler ya eşit ya da ayrık olduklarından $O(\alpha,\beta)$ ile $O(\infty,v)$ aynı yörüngeyi temsil eder. Yani $O(\alpha,\beta)=O(\infty,v)$ dir. $v\,\epsilon\,\widehat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $v=\frac{u}{n}$, $n\geq 0$, $(u,n)=1$ biçimindedir. $O(\infty,v)=O(\infty,\frac{u}{n})$ alt yörüngesini $O(u,n)$ ile ve buna karşılık gelen alt yörüngesel grafı da $\mathcal{G}(u,n)$ ile göstereceğiz. $v=\infty=\frac{1}{0}=\frac{-1}{0}$ olduğu durumda $\mathcal{G}_{1,0}=\mathcal{G}_{-1,0}$ trivial alt yörüngesel grafı elde edilir. Biz trivial olmayan alt yörüngesel grafları incelemek istediğimiz için $v\,\epsilon\,\mathbb{Q}$ varsayalım.

Teorem 2.10. $v,v'\epsilon\,\mathbb{Q}$ olmak üzere; $O(\infty,v)=O(\infty,v')\Leftrightarrow v$ ve v' Γ_∞ un aynı yörüngesindedir. (Yani; $\exists\, g\,\epsilon\,\Gamma_\infty$ öyleki $g(v)=v'$ dür.)

İspat: $O(\infty,v)=O(\infty,v')$ olsun. $(\infty,v')\,\epsilon\,O(\infty,v')=O(\infty,v)=\{g(\infty,v):g\,\epsilon\,\Gamma\}$ olduğundan $\exists\, g\,\epsilon\,\Gamma$ öyle ki $g(\infty,v)=(\infty,v')$ dür. Böylece; $\big(g(\infty),g(v)\big)=(\infty,v')$. $g(\infty)=\infty$ ve $g(v)=v'$ olduğundan $g=\mp\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k\,\epsilon\,\mathbb{Z}$ şeklindedir. Dolayısı ile $g\,\epsilon\,\Gamma_\infty$ dur. Yani; v ve v' Γ_∞ un aynı yörüngesindedir.

Tersine;

$v,v'\epsilon\,\mathbb{Q}$ Γ_∞ un aynı yörüngesinde olsunlar. Dolayısı ile; $\exists\, g\,\epsilon\,\Gamma_\infty$ öyle ki $g(v)=v'$ dür ve $g\,\epsilon\,\Gamma_\infty$ olduğundan $g(\infty)=\infty$ dur. Böylece; $g(\infty,v)=(\infty,v')$ olan $g\,\epsilon\,\Gamma_\infty\subset\Gamma$ bulunur. Yani; $O(\infty,v)=O(\infty,v')$ dür.

Not: $v, v' \epsilon \mathbb{Q}$ olduğundan $v = \frac{u}{n}$, $n > 0$, $(u, n) = 1$ ve $v' = \frac{u'}{n'}$, $n' > 0$, (u', n')=1 ve $g \epsilon \Gamma_\infty = \langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \epsilon \mathbb{Z}\}$ olduğundan $g = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \epsilon \mathbb{Z}$ formundadır. $g(v) = v' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u + kn \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix} \Rightarrow u + kn = u'$ ve $n = n'$. Yani; $u \equiv u' \, modn$ ve $n = n'$ dür. Böylece kolaylıkla aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.11. $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\infty, \frac{u'}{v'}\right) \Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u' \, modn$ dir.

Dolayısı ile; $O(\infty, \frac{u}{n})$ ve $O(\infty, \frac{u'}{n'})$ alt yörüngelerine karşılık gelen $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $\mathcal{G}_{u',n'}$ alt yörüngesel grafları için de; $\mathcal{G}_{u,n} = \mathcal{G}_{u',n'} \Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u' \, modn, \forall n > 1$ dir.

$\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \epsilon \, O_{u,n}$ olmasını $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ ile göstereceğiz. Bazen bu durumu $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \epsilon \, \mathcal{G}_{u,n}$ ile de gösterebileceğiz.

Teorem 2.12. [18] $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

(a) $x \equiv ur \, modn, y \equiv us \, modn, ry - sx = n$ veya

(b) $x \equiv -ur \, modn, y \equiv -us \, modn$ ve $ry - sx = -n$

İspat: "$\Rightarrow$": $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olsun. Bu bize $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \epsilon \, O_{u,n}$ dir. Dolayısı ile $\exists \, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \, \Gamma : g(\infty) = \frac{r}{s}$ ve $g\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{x}{y}$ dir. Bu bize;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -x \\ -s & -y \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

matris eşitliklerinden birini verir.

(2.7) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a & au + bn \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a = r$, $c = s$, $au + bn = x$, $cu + dn = y \Rightarrow ru + bn = x$ ve $su + dn = y \Rightarrow x \equiv ur \, modn$ ve $y \equiv us \, modn$ elde edilir ve (2.7) eşitliğinde iki tarafın determinantı alınırsa $(ad - bc).n = ry - sx \xRightarrow{ad-bc=1} ry - sx = n$ elde edilir. Benzer şekilde (2.8) eşitliğinden de $x \equiv ur \, modn$, $y \equiv us \, modn$ ve $ry - sx = n$ elde edilir. (2.9) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \Rightarrow a=-r,\, c=-s,\, au+bn=x,\, cu+dn=y \Rightarrow$

$-ru+bn=x$ ve $-su+dn=y \Rightarrow x \equiv -ur\, modn$ ve $y \equiv -us\, modn$ elde edilir ve (2.9) eşitliğinde iki tarafın determinantı alınırsa $(ad-bc).(n) = -ry+sx \xRightarrow{ad-bc=1}$ $ry-sx=-n$ elde edilir. Benzer şekilde (2.10) eşitliğinden de $x \equiv -ur\, modn,$ $y \equiv -us\, modn$ ve $ry-sx=-n$ elde edilir. Böylece bu dört durumdan gördük ki ya (a) ya da (b) sağlanır.

" $\Leftarrow$ " : Farzedelim ki (a) sağlansın, yani $x \equiv ur\, modn,$ $y \equiv us\, modn$ ve $ry-sx=n$ olsun. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğunu yani $(\frac{r}{s},\frac{x}{y}) \in O_{u,n}$ olduğunu gösterelim.

$x \equiv ur\, modn \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{Z} : x = ur+bn$ ve

$y \equiv us\, modn \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{Z} : y = us+cn$ dir.

Şimdi; $g = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}$ matrisinin Γ nın elemanı olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$g(\infty) = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix},\quad g\left(\frac{u}{n}\right) = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru+bn \\ su+cn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ve $ry-sx=n$ olduğundan $ry-sx = r(us+cn) - s(ur+bn) = n \Rightarrow rus+rcn-sur-sbn = n \Rightarrow$ $rcn-sbn=n \Rightarrow rc-sb=1 \Rightarrow det\begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow g = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix} \in \Gamma$ elde edilir.

Benzer şekilde (b) nin sağlandığı varsayılıp $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğu elde edilir.

Sonuç 2.13. [18] $u^2 \not\equiv -1\, modn$ ve $uv \equiv -1\, modn$ olsun. Bu takdirde; $\mathcal{G}_{u,n}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

İspat: $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olsun. Teorem 2.12 den

(a) $r \equiv ux\, modn,$ $s \equiv uy\, modn,$ $xs-ry=n$ veya

(b) $r \equiv -ux\, modn,$ $s \equiv -uy\, modn,$ $xs-ry=-n$ dir.

(a) nin sağlandığını varsayalım.

$r \equiv ux\, modn$ olduğundan $vr \equiv vux\, modn \xRightarrow{uv\equiv -1\, modn} vr \equiv -x\, modn.$

Yani; $x \equiv -vr\, modn$ elde edilir. (2.11)

$s \equiv uy\, modn$ olduğundan $vs \equiv vuy\, modn$ dir. $\xRightarrow{uv\equiv -1\, modn} vs \equiv -y\, modn.$ Yani; $y \equiv -vs\, modn$ elde edilir. (2.12)

$sx-ry=n \Rightarrow ry-sx=-n$ (2.13)

(2.11), (2.12) ve (2.13) den $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{v,n}$ de bir kenardır. Benzer şekilde (b) nin sağlandığı varsayılarak $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{v,n}$ de bir kenar olduğu gösterilir.

Şimdi gösterelim ki $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)\cap O\left(\frac{u}{n},\infty\right)=\varnothing$ tur. Varsayalım ki $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)\cap O\left(\frac{u}{n},\infty\right)\neq\varnothing$ olsun. Bu durumda $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)=O(\frac{u}{n},\infty)$ (alt yörüngeler ya eşit ya da ayrıktırlar) dur. Dolayısı ile; $\exists\, g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\epsilon\, \Gamma$ öyle ki $g\left(\infty,\frac{u}{n}\right)=(\frac{u}{n},\infty)$ dur. Buradan; $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & -1\\ n & 0\end{pmatrix}$ eşitliğinden $\begin{pmatrix} a & au+bn\\ c & cu+dn\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & -1\\ n & 0\end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece, $a=u,\ c=n,\ au+bn=-1,\ cu+dn=0$ dır. $cu+dn=0\overset{c=n}{\Longrightarrow} nu+dn=0$ $\Rightarrow n(u+d)=0\overset{n\neq 0}{\Longrightarrow} u+d=0\Rightarrow d=-u$. Böylece, $g=\begin{pmatrix} u & b\\ n & -u\end{pmatrix}$ elde edilir ve $g\,\epsilon\, \Gamma$ olduğundan $det\begin{pmatrix} u & b\\ n & -u\end{pmatrix}$ =1 dir. Buradan, $-u^2-bn=1 \Rightarrow u^2=-1-bn \Rightarrow$ $u^2\equiv -1\, mod n$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)\cap O\left(\frac{u}{n},\infty\right)\neq\varnothing$ olduğunu varsaymaktan geldi. O halde $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)\cap O\left(\frac{u}{n},\infty\right)=\varnothing$ tur. Sonuç olarak $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $\mathcal{G}_{v,n}$ alt yörüngesel grafları eşleşmiştir.

Sonuç 2.14. $\mathcal{G}_{u,n}$ kendi eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2\equiv -1\ mod n$ dir.

2.1.5. Farey Grafı

$\mathcal{G}_{1,1}$ köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ olan bir alt yörüngesel graftır. Burada $\mathcal{G}_{u,n}=\mathcal{G}_{1,1}$ olduğundan $u=n=1$ dir ve $1^2\equiv -1\, mod 1$ olduğundan $\mathcal{G}_{1,1}$ kendi eşleşmiştir. Bu yüzden $\mathcal{G}_{1,1}$ i yönlendirilmemiş bir graf olarak düşünebiliriz. Burada $\frac{r}{s}$ ile $\frac{x}{y}$ ardışık köşelerdir $\Leftrightarrow$ $ry-sx=\mp 1$ $(n=1)$ dir. Örneğin ∞ ile ardışık olan köşeler tamsayılardır. Gerçekten;

$\frac{r}{s}$, $\infty=\frac{1}{0}$ ardışık köşeler olsun. $\Rightarrow r.0-s.1=\mp 1\Rightarrow s=\pm 1\Rightarrow \frac{r}{s}=\pm r\,\epsilon\, \mathbb{Z}$ dir.

$\mathcal{G}_{1,1}$ alt yörüngesel grafına Farey dizileriyle olan bağlantısından ötürü “Farey grafı” diyeceğiz ve F ile göstereceğiz. $\forall m\geq 1$ için F_m Farey dizisi, terimleri artan sırada düzenlendiğinde, $|y|\leq m$ olan $\frac{x}{y}\,\epsilon\, \mathbb{Q}$ elemanlarından oluşur. Örneğin F_4; $\dots,\frac{-1}{3},\frac{-1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{4}{3},\dots$ dır. Açıkça görülür ki $F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots$ ve $\bigcup_{m\geq 1}F_m=\mathbb{Q}$ dur. Gerçekten;

(i) $i,j\epsilon\mathbb{N}$, $i<j$ olmak üzere; $F_i\subset F_j$ olduğunu gösterelim:

$\frac{a}{b}\,\epsilon\, F_i$ olsun. $\Rightarrow |b|\leq i<j\Rightarrow \frac{a}{b}\,\epsilon\, F_j \Rightarrow F_i\subset F_j$ elde edilir.

(ii) $\bigcup_{m\geq 1}F_m\subset\mathbb{Q}$ olduğu aşikardır. (2.14)

Şimdi $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m \geq 1} F_m$ olduğunu gösterelim:

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üstten sınırlı olmadığından $\exists\, m \in \mathbb{N}$ öyle ki $|q| \leq m$ dir. Dolayısı ile; $\frac{p}{q} \in F_m$ dir. Böylece; $\frac{p}{q} \in \bigcup_{m \geq 1} F_m$ elde edilir. Yani;

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m \geq 1} F_m \text{ dir.} \tag{2.15}$$

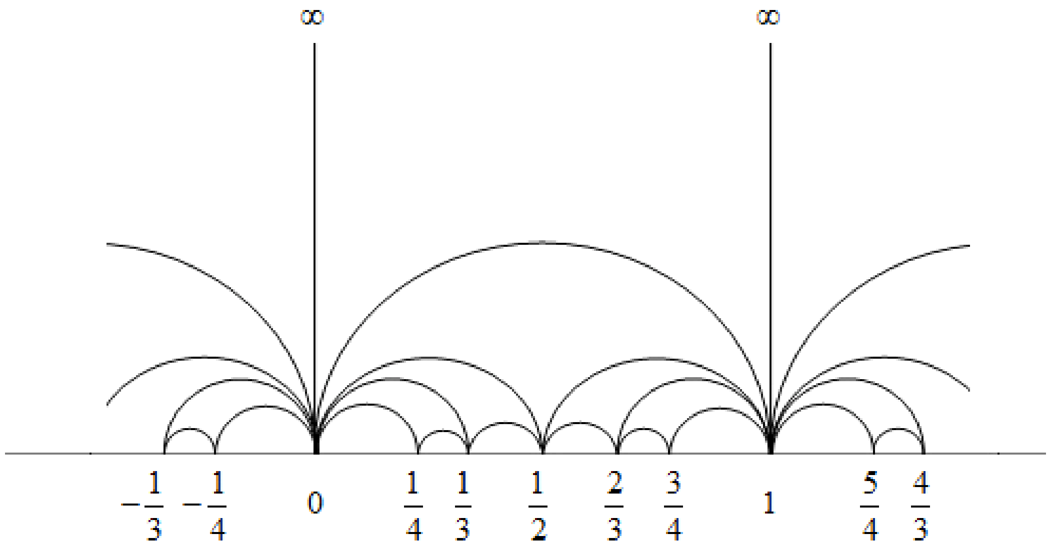
(2.14) ve (2.15) den $\bigcup_{m \geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dur.

Lemma 2.15. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyonel sayılar olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F de ardışık köşelerdir.

(ii) $ry - sx = \mp 1$ dir.

(iii) Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F_m de ardışık köşelerdir.



Şekil 7. Farey Grafı

Şekil 7 deki rasyonel sayılar F_4 ün elemanlarıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki Şekil 7 periyodiktir ve periyodu 1 dir.

F nin kenarlarını $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ üst yarı düzleme dik hiperbolik geodezikler, yani yarı Öklid çemberleri veya $\mathbb{R}$ ye dik yarı doğrular olarak göz önüne alıyoruz.

Sonuç 2.16. F nin kenarları $\mathbb{U}$ da kesişmezler.

İspat: F nin iki kenarının $\mathbb{U}$ da kesiştiğini varsayalım. $F = \mathcal{G}_{1,1}$ kendi eşleşmiş bir alt yörüngesel graf olduğundan Γ, F nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder. Dolayısı ile; $\infty \to 0$ kenarını l_1 ile gösterirsek, transitiflikten $T(k_1) = l_1$ ve $T(k_2) = l_2$ olan $T \in \Gamma$ vardır. Bu yüzden üst yarı düzlemde kesiştiğini varsaydığımız bu kenarlardan birinin 0 ve ∞ u birleştiren $Rez = 0$ kenarı olduğunu varsayabiliriz. Böylece bu kenarlardan diğeri $v < 0 < w$ olacak şekilde v ve w rasyonellerinin birleşmesiyle oluşan kenar olmalıdır.

$v = \frac{r}{s}, r < 0, s > 0$ ve $w = \frac{x}{y}, x > 0, y > 0$ indirgenmiş formunda yazılabilirler.

$\left.\begin{matrix} r < 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ry < 0$ ve $r, y \in \mathbb{Z}$ olduğundan $ry \leq -1$ dir ve

$\left.\begin{matrix} s > 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow sx > 0$ ve $s, x \in \mathbb{Z}$ olduğundan $sx \geq 1 \Rightarrow -sx \leq -1$ dir.

Buradan $ry - sx \leq -2$ elde ederiz. Halbuki $ry - sx = \mp 1$ olmalı idi. Bu çelişki F nin herhangi iki kenarının $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde kesiştiğini varsaymaktan geldi. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır, F nin kenarları $\mathbb{U}$ da kesişmezler.

2.1.6. $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $F_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $F = \mathcal{G}_{1,1}$ Farey grafının özelliklerini diğer $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletebileceğimizi göreceğiz. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n} \Leftrightarrow ry - sx = \mp n \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \, modn \Leftrightarrow \frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ dir ve her bir $\mathcal{G}_{u,n}$ $\Psi(n)$ tane alt grafın ayrık birleşiminden oluşur. Bu, $\approx_n$ Γ invaryant denklik bağıntısına göre, her bir alt grafın köşeleri bir tek blok oluşturur. Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden Γ bu blokları transitif olarak permüte eder. Bu da alt yörüngelerin her birinin birbirleriyle izomorf oldukları anlamına gelir. $\mathcal{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} : \frac{x}{y} \approx \frac{1}{0}\right\} = \{\frac{x}{y} : y \equiv 0 \, modn\}$ bloğunda olan alt grafını $F_{u,n}$ ile gösterelim. Dolayısı ile; $\mathcal{G}_{u,n}$, $F_{u,n}$ nin $\Psi(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur.

Teorem 2.17. [18] $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $F_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

(a) $x \equiv ur \, modn$ ve $ry - sx = n$ veya

(b) $x \equiv -ur \, modn$ ve $ry - sx = -n$.

Teorem 2.18. $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat: İlk önce $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğini gösterelim: $F_{u,n}$ nin köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\ mod n\right\}$ bloğunun elemanları olduğundan $v, w \in [\infty]$ $F_{u,n}$ grafının iki köşesi ve $v = \frac{k}{ln}$ ve $w = \frac{t}{sn}$ olsun. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan $\exists\, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ öyle ki $w = g(v)$ dir. Bu durumda, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ ln \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak + bln \\ ck + dln \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ sn \end{pmatrix}$ olup buradan $ck = sn - dln = (s - dl)n$ dir. Dolayısıyla $n \mid ck$ ve $(k, n) = 1$ olduğundan $n \mid c$ dir. O halde $c \equiv 0\ mod n$ olduğundan $g \in \Gamma_0(n)$ dir. Böylece $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder. $T: [\infty] \to [\infty]$ dönüşümü $\Gamma_0(n) \subset \Gamma$ nın elemanı olduğundan birebir örten bir dönüşümdür, dolayısıyla T köşeler üzerinde bir permütasyondur.

Şimdi $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiğini gösterelim: $x \to y$ ve $a \to b$ $F_{u,n}$ de iki kenar olsunlar. Γ, $F_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\exists\, T = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in \Gamma$ öyle ki $T(x \to y) = T(a \to b)$ dir. Yani; $T(x) \to T(y) = T(a) \to T(b)$. Böylece; $T(x) = T(a)$ ve $T(y) = T(b)$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 n \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 n \end{pmatrix}$ buradan; $qr_1 + ss_1 n = qr_2 + ss_2 n \Rightarrow qr_1 - qr_2 = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow q(r_1 - r_2) = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow$ $n \mid q(r_1 - r_2) \xRightarrow{n \nmid (r_1 - r_2)} n \mid q$ elde edilir. Bu da bize $T \in \Gamma_0(n)$ olduğunu söyler. Böylece $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder. $F_{u,n}$ nin kenarlarının kümesi L ile gösterilirse $T: L \to L$ dır ve $T \in \Gamma_0(n) \subset \Gamma$ olduğundan birebir örten bir dönüşümdür yani T bir permütasyondur. Böylece; $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiği gösterilmiş oldu.

Not: n bir p asal sayısı ise $\psi(p) = p + 1$ tane blok vardır ve bu bloklar :

$$[j] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : x \equiv jy\ mod p\right\},\ j \neq \infty$$

$$[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod p\right\}$$

olmak üzere $[0], [1], \dots, [p-1], [\infty]$ şeklindedir. Ayrıca bunların her biri birbirlerinin izomorfik kopyasıdır.

Graflar göz önüne alındığında $F_{1,1} = \mathcal{G}_{1,1} = F$ Farey grafı en basit graftır. Sonraki en basit graf $\mathcal{G}_{1,2}$ grafıdır. Bu grafta $n = 2$ olduğundan grafın $\Psi(2) = 3$ tane bloğu mevcuttur. Bunlar, $[0],[1]$ ve $[\infty]$ bloklarıdır. Önce $\mathcal{G}_{1,2}$ nin $[\infty]$ bloğundaki alt grafını yani $\boldsymbol{F_{1,2}}$ yi gösterelim:

$[\infty]=\left\{\frac{x}{y}\ \epsilon\ \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod2\right\}$ şeklindedir. O halde,

- $\frac{1}{0}\rightarrow\frac{1}{2}$ $\left(\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\right)$ olmak üzere $ry-sx=2,\ \ x\equiv ur\ (modn)$ yani , $1\equiv 1.1\ (mod2)$

olduğundan $\frac{1}{0}\rightarrow\frac{1}{2}$ şeklinde kenar vardır.

- $\frac{1}{2}\rightarrow\frac{5}{8}$ olmak üzere $ry-sx=-2,\ \ 5\equiv -1.1\ (mod2)$ olduğundan $\frac{1}{2}\rightarrow\frac{5}{8}$ şeklinde

kenar vardır.

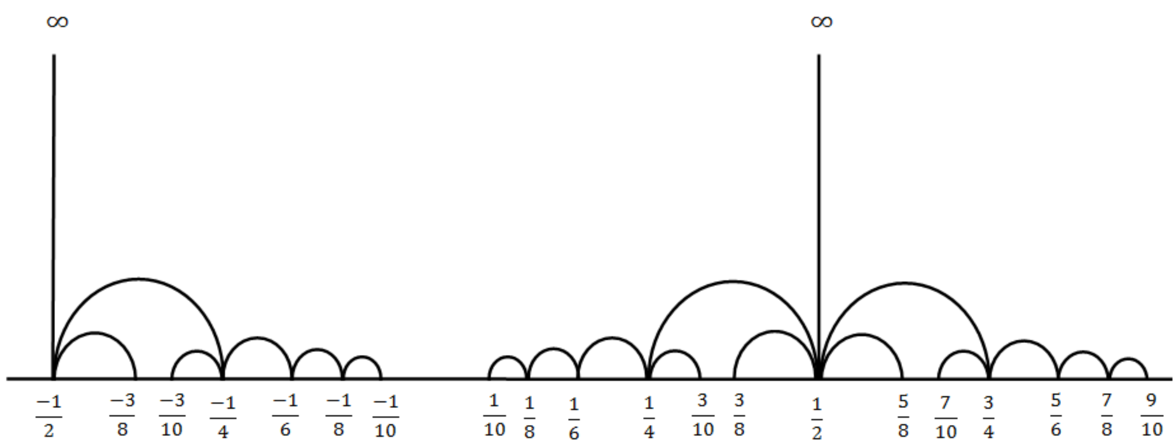
- $\frac{3}{4}\rightarrow\frac{5}{6}$ olmak üzere $ry-sx=-2,\ \ 5\equiv -1.3\ (mod2)$ olduğundan $\frac{3}{4}\rightarrow\frac{5}{6}$ kenarı

vardır.

- $\frac{-1}{4}\rightarrow\frac{-1}{6}$ olmak üzere $ry-sx=-2,\ \ -1\equiv -1.-1\ (mod2)$ olduğundan $\frac{-1}{4}\rightarrow\frac{-1}{6}$

kenarı vardır.

Benzer şekilde diğer köşeler de bulunabilir. O halde $\boldsymbol{F_{1,2}}$ grafı;



Şekil 8. $\boldsymbol{F_{1,2}}$ alt grafı

şeklindedir. Şimdi $\mathcal{G}_{1,2}$ nin $[0]$ bloğundaki alt grafını yani $\boldsymbol{J_{1,2}}$ yi gösterelim:

$[j]=\left\{\frac{x}{y}\ \epsilon\ \widehat{\mathbb{Q}} : x\equiv jy\ modp\right\}$, $j\neq\infty$ şeklinde olduğundan $[0]=\left\{\frac{x}{y}\ \epsilon\ \widehat{\mathbb{Q}} : x\equiv 0\ mod2\right\}$

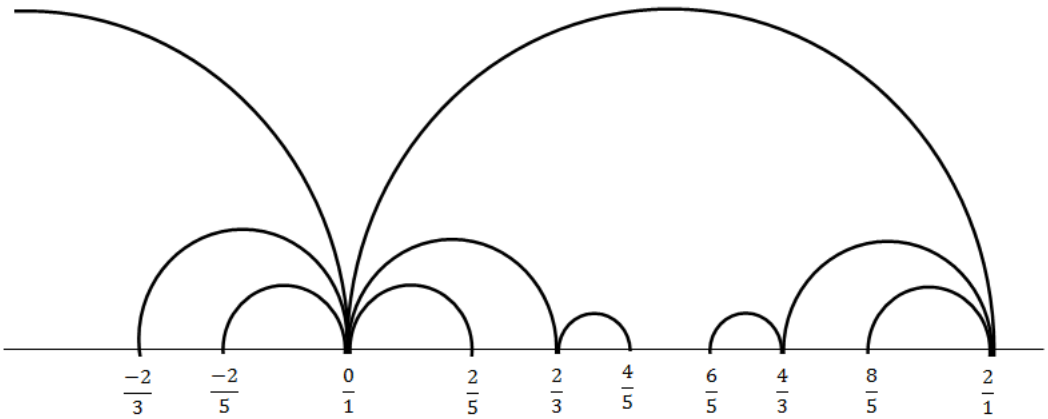
dir. O halde köşelerden bazıları aşağıdaki gibidir:

- $\frac{-2}{5}\rightarrow\frac{0}{1}$ olmak üzere $ry-sx=-2$ ve $y\equiv -us\ (modn)$ yani, $1\equiv -1.5\ (mod2)$

olduğundan $\frac{-2}{5}\rightarrow\frac{0}{1}$ kenarı vardır.

- $\frac{0}{1} \to \frac{2}{3}$ olmak üzere $ry - sx = -2$ ve $3 \equiv -1.1\ (mod2)$ olduğundan $\frac{0}{1} \to \frac{2}{3}$ kenarı vardır.
- $\frac{2}{3} \to \frac{4}{5}$ olmak üzere üzere $ry - sx = -2$ ve $5 \equiv -1.3\ (mod2)$ olduğundan $\frac{2}{3} \to \frac{4}{5}$ kenarı vardır.
- $\frac{8}{5} \to \frac{2}{1}$ olmak üzere üzere $ry - sx = -2$ ve $1 \equiv -1.5\ (mod2)$ olduğundan $\frac{8}{5} \to \frac{2}{1}$ kenarı vardır.

Benzer şekilde diğer köşeler de bulunabilir. O halde $\boldsymbol{J_{1,2}}$ grafı;

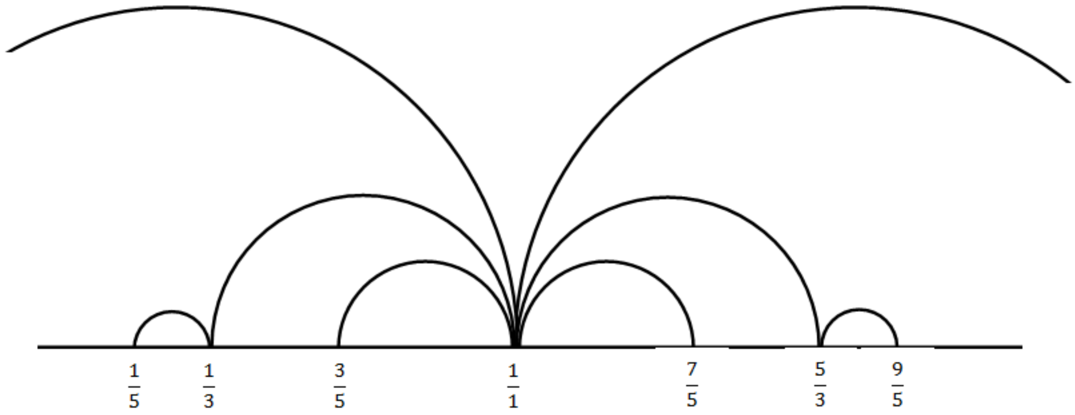


Şekil 9. $\boldsymbol{J_{1,2}}$ alt grafı

şeklindedir. Şimdi de son olarak $\mathcal{G}_{1,2}$ nin [1] bloğundaki alt grafını yani $\boldsymbol{I_{1,2}}$ yi gösterelim: $[j] = \left\{\frac{x}{y} \epsilon\ \widehat{\mathbb{Q}} : x \equiv jy\ modp\right\}$, $j \neq \infty$ şeklinde olduğundan $[1] = \left\{\frac{x}{y} \epsilon\ \widehat{\mathbb{Q}} : x \equiv 1y\ mod2\right\}$ dir. O halde köşelerden bazıları aşağıdaki gibidir:

- $\frac{1}{5} \to \frac{1}{3}$ olmak üzere $ry - sx = -2$ ve $3 \equiv -1.5\ (mod2)$ olduğundan $\frac{1}{5} \to \frac{1}{3}$ kenarı vardır.
- $\frac{1}{3} \to \frac{1}{1}$ olmak üzere $ry - sx = -2$ ve $1 \equiv -1.3\ (mod2)$ olduğundan $\frac{1}{3} \to \frac{1}{1}$ kenarı vardır.
- $\frac{1}{1} \to \frac{7}{5}$ olmak üzere $ry - sx = -2$ ve $5 \equiv -1.1\ (mod2)$ olduğundan $\frac{1}{3} \to \frac{1}{1}$ kenarı vardır.
- $\frac{5}{3} \to \frac{9}{5}$ olmak üzere $ry - sx = -2$ ve $5 \equiv -1.3\ (mod2)$ olduğundan $\frac{5}{3} \to \frac{9}{5}$ kenarı vardır.

Benzer şekilde diğer köşeler de bulunabilir. O halde $\boldsymbol{I_{1,2}}$ grafı;



Şekil 10. $\boldsymbol{I_{1,2}}$ alt grafı

Şekillerden görüldüğü gibi bu üç blok birbirlerinin izomorfik kopyasıdır. Dolayısıyla tek bir bloktaki alt grafıyla ilgilenmek yeterlidir. Burada $\mathcal{G}_{1,2}$ nin $[\infty]$ bloğundaki alt grafını yani $\boldsymbol{F_{1,2}}$ ele alacağız.

$\mathcal{G}_{1,2}$ grafı için $u = 1\, ve\, n = 2$ olduğundan $u^2 \equiv -1\ (mod 2)$ dir. Böylece Sonuç 2.14 den $\mathcal{G}_{1,2}$ kendi eşleşmiş bir graftır ve dolayısıyla bunun bir alt grafı olan $F_{1,2}$ de kendi eşleşmiştir. Bu da bize $\mathcal{G}_{1,2}$ ve $F_{1,2}$ graflarının yönlendirilmemiş alt yörüngesel graflar olduğunu söyler.

Lemma 2.19. (i) $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $F_{u,n} \to F_{-u,n}$ ye $T(v) = -v$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

(ii) Eğer $m \mid n$ ise $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ nin bir alt grafına $T(v) = {}^{nv}/_{m}$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

İspat: (i) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\, modn\}$ ve $F_{-u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_{-n} = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\, mod(-n)\right\} = \{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\, modn\}$ olduğundan $[\infty]_n = [\infty]_{-n} \coloneqq [\infty]$ dur. $T(v) = -v$ fonksiyonunun $[\infty]$ uzerinde birebir örten olduğu açıktır. Şimdi T dönüşümünün yapı koruyan olduğunu gösterelim. $\frac{a}{bn} \to \frac{c}{dn} \in F_{u,n}$ olsun. Teorem 2.17 (i) veya (ii) sağlanır. Farz edelim ki teoremin (i) şıkkı sağlansın. Bu durumda, $c \equiv ua\, modn$ ve $ad - bc = 1$ dir. Böylece, $(-c) \equiv u(-a) modn \equiv -(-u)(-a) modn$ ve $(-a)d - (-b)c = -1$ dir. Dolayısı ile, Teorem 2.17 (ii) ye göre $\Rightarrow \frac{-a}{bn} \to \frac{-c}{dn} \in F_{-u,n}$ dir. Benzer şekilde Teorem 2.17 nin (ii) şıkkının sağlandığı varsayılıp Teorem 2.17 (i) ye göre $\frac{-a}{bn} \to \frac{-c}{dn} \in F_{-u,n}$ olduğu gösterilebilir. Böylece T birebir ve örten ve yapı koruyan bir dönüşümdür yani T bir izomorfizmadır.

(ii) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\ modn\}$ ve $F_{u,m}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_m = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\ modm\}$ dir. $T: [\infty]_n \to [\infty]_m$, $T(v) = {}^{nv}/_{m}$ dönüşümünün birebir olduğu açıktır. Şimdi gösterelim ki T dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür: $v = \frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} = w \in F_{u,n}$ olsun. $T(v) = \frac{r}{sm} \to \frac{x}{ym} = T(w) \in F_{u,m}$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki Teorem 2.17 (i) sağlansın. Bu durumda, $x \equiv ur\ modn$ ve $ry - sx = 1$ dir. $m \mid n$ olduğundan $x \equiv ur\ modm$ dir. Dolayısıyla $x \equiv ur\ modm$ ve $ry - sx = 1$ olduğundan Teorem 2.17 (ii) gereği $\frac{r}{sm} \to \frac{x}{ym}$ $F_{u,m}$ de bir kenardır. Benzer şekilde teoremin (ii) şıkkının sağlandığı varsayılıp $\frac{r}{sm} \to \frac{x}{ym}$ $F_{u,m}$ de bir kenar olduğu gösterilebilir. Bu bize T nin bir $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ ye bir monomorfizma olduğunu söyler. Ancak $F_{u,m}$ nin bir alt grafına izomorftur.■

Lemma 2.19 (ii) de $m = 1$ olduğu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.20. $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için $F_{u,n}$ den $F(= \mathcal{G}_{1,1} = F_{1,1})$ in bir alt grafına $f: v \to -v$ ile verilen bir izomorfizma vardır.■

Γ nın transtifliğinden, aynı durum $\mathcal{G}_{u,n}$ de içerilen $F_{u,n}$ nin geriye kalan $\Psi(n) - 1$ tane kopyası için de doğrudur.

Tanım 2.21. k_1, k_2, k_3 üç köşe olmak üzere $k_1 \to k_2 \to k_3 \to k_1$ şeklinde , yani kenarların hepsi aynı yönde ise buna yönlendirilmiş üçgen ; $k_1 \to k_2 \leftarrow k_3 \to k_1$ gibi farklı yönde kenar varsa buna da ters yönlendirilmiş üçgen denir. Kendi eşleşmiş bir alt yörüngesel grafta bu iki kavram birbirine denktir.

Teorem 2.22. [18] (i) $F_{u,n}$ yönlendirilmiş bir üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \mp u + 1 \equiv 0\ (modn)$.

(ii) $n > 1$ ise, $F_{u,n}$ ters yönlendirilmiş üçgen içermez.

İspat: (i) $F_{u,n}$ nin yönlendirilmiş bir üçgen içerdiğini varsayalım. Teorem 2.18 den $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden bu üçgenin $\infty \to \frac{u}{n} \to v \to \infty$ biçiminde olduğunu varsayabiliriz. $v = \frac{r}{sn}$ olmak üzere $\frac{r}{sn} = v \to \infty = \frac{1}{0}$ kenarına Teorem 2.17 yi uygularsak $v < \infty$ olduğundan $r.0 - sn.1 = -n$ dir. Buradan $s = 1$ elde edilir. Yani $v = \frac{r}{n}$ biçimindedir. $\frac{u}{n} \to \frac{r}{n}$ kenarına Teorem 2.17 yi uygularsak;

(a) $r \equiv u^2\ modn, u - r = 1$ veya

(b) $r \equiv -u^2\ modn, u - r = -1$ elde edilir.

(a) dan $r \equiv u^2\, modn \xRightarrow{u-r=1\ old.r=u-1} u-1 \equiv u^2\, modn \Rightarrow u^2-u+1 \equiv 0\, modn$

ve

(b) den $r \equiv -u^2\, modn \xRightarrow{u-r=-1\ old.r=u+1} u+1 \equiv -u^2\, modn \Rightarrow u^2+u+1 \equiv 0\, modn$ dir.

Tersine; $u^2 \mp u + 1 \equiv 0\, modn$ ise buradan $\frac{u}{n} \to \frac{u\mp1}{n}$ $F_{u,n}$ de bir kenardır ve transitiflikten $F_{u,n}$ de $\infty \to \frac{u}{n}$ ve $\frac{u\mp1}{n} \to \infty$ kenarları vardır. Böylece; $F_{u,n}$ de $\infty \to \frac{u}{n} \to \frac{u\mp1}{n} \to \infty$ yönlendirilmiş üçgeni bulunur.

(ii) Aynen (i) de olduğu gibi bir $r\epsilon\, \mathbb{Z}$ için $v = \frac{r}{n}$ biçiminde olmak üzere; $\infty \to \frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n} \to \infty$ un $F_{u,n}$ de bir üçgen olduğunu varsayalım. $\frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n}$ kenarına Teorem 2.17 yi uygularsak,

(a) $r \equiv 1\, modn, r-u=1$ veya

(b) $r \equiv -1\, modn, r-u=-1$ elde ederiz.

Her iki durumda da $u \equiv 0\, modn$ olur ki bu $n>1$ için u nun $modn$ ye göre bir birim olması ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani; $n>1$ ise $F_{u,n}$ grafı ters yönlendirilmiş bir üçgen içermez.

2.2. Picard Grubu

Picard grubu $\mathbb{P}$ ile ifade edilir ve tüm kesirli lineer dönüşümleri içerir öyle ki ;

$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}[i]$ ve $ad-bc=1$.

$\mathbb{P}$, $PSL(2,\mathbb{C})$ nin önemli bir alt grubudur. Diğer taraftan,

$$SL(2,\mathbb{Z}[i]) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma: a,b,c,d \in \mathbb{Z}[i]\ ve\ ad-bc=1\right\}$$

grubu $SL(2,\mathbb{C})$ nin bir alt grubudur. Picard grubu, $SL(2,\mathbb{Z}[i])$ grubunun $\{\pm I\}$ ile bir bölüm grubudur. Yani, $\mathbb{P} = PSL(2,\mathbb{Z}[i]) \cong SL(2,\mathbb{Z}[i])/\{\pm I\}$ dir. Böylece $\mathbb{P}$ grubu,

$$\mathbb{P} := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}[i]\ ve\ ad-bc=1\right\}$$

şeklinde ifade edilir.

$$x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\mathbb{P}$ Picard grubu verilen x,u,y,r elemanları tarafından üretilir. Yani;

$\mathbb{P} = \langle x,u,y,r \rangle$ dir.

$\mathbb{P}$ Picard grubunun cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ dir. Gerçekten;

$T \in \mathbb{P}$ için T nin sabit noktaları $z_{1,2} = \frac{(a-d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c} = \frac{(a-d)\pm\sqrt{|a+d|^2-4}}{2c}$ şeklinde idi. Parabolik dönüşümde $|a+d| = 2$ olduğundan $z = \frac{(a-d)}{2c}$ olur ki burada $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]$ dir. Yani, $a = m + ni,\ d = k + li\ ve\ c = r + si$ şeklindedir. Burada $m, n, k, l, r, s \in \mathbb{Z}$ dir. O halde,

$z = \frac{m+ni-k-li}{2(r+si)} = \frac{(m-k)+(n-l)i}{2(r+si)} \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ dir. Dolayısıyla $z = \frac{(a-d)}{2c} \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ dir. Yani $\mathbb{P}$ picard grubunun cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ dir.

Şimdi de $\mathbb{P}$ picard grubunun cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}(i) := \mathbb{Q}(i) \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketini inceleyelim.

2.2.1. $\mathbb{P}$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ kümesinin her bir elemanı $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere, $\frac{x}{y}$ şeklindedir. ε bir birim olmak üzere $\frac{x}{y} = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0} = \frac{i}{0} = \frac{-i}{0}$ ile temsil edeceğiz.

$\mathbb{P}$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir. $T \epsilon\, \mathbb{P}$ olmak üzere $T\left(\frac{x}{y}\right) = T\left(\frac{\varepsilon x}{\varepsilon y}\right)$ dir. Bu da $\mathbb{P}$ picard grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerindeki hareketinin iyi tanımlı olduğunu ifade eder. Eğer $(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ kesri de indirgenmiş formdadır. Yani, $(ax + by, cx + dy) = 1$ dir.

Teorem 2.23. $\mathbb{P}$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $\forall\ v = \frac{a}{b}, w = \frac{c}{d} \epsilon\, \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ elemanları için $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ olan $T \epsilon\, \mathbb{P}$ dönüşümünün varlığını gösterelim. Bunun için ∞ noktasını içeren yörüngenin $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ de olduğunu göstermemiz gerekir. $v = \frac{a}{b} \epsilon\, \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ (İndirgenmiş formda) olsun. $(a, b) = 1$ olduğundan $\exists\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{Z}[i]$ öyle ki $ax - by = 1$ dir. Böylece, $T := \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \epsilon\, \mathbb{P}$ dir. Burada $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai \\ bi \end{pmatrix}$ olduğundan $T(\infty) = \frac{a}{b}$ dir. Dolayısıyla $\frac{a}{b}$, ∞ un yörüngesindedir. Yani; $\mathbb{P}$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerindeki hareketi transitiftir.

2.2.2. İmprimitif Hareket

Burada G yerine $\mathbb{P}$ picard grubunu, Ω yerine $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ alarak işlem yapacağız. Burada ∞ un $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ deki sabitleyeni olan $\mathbb{P}_\infty$, $\mathbb{P}$ nin bir alt grubudur ve $\mathbb{P}_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{Z}[i]\right\}$ şeklindedir.

Tanım 2.24. $\mathbb{P}_1(n) \coloneqq \{T \in \mathbb{P}: a \equiv d \equiv 1\ (mod n), c \equiv 0\ (mod\ n)\}$ $\mathbb{P}$ nin bir alt grubudur.

O halde $\mathbb{P}_\infty < \mathbb{P}_1(n) <$ $\mathbb{P}$ dir. Böylece $\mathbb{P}$, $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder. $\frac{r}{s}$, $\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ olmak üzere, $T_1(\infty) = \frac{r}{s}$ ve $T_2(\infty) = \frac{x}{y}$ olan $T_1, T_2 \in \mathbb{P}$ vardır. Böylece, $T_1 \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{r} & \mathrm{k} \\ \mathrm{s} & \mathrm{l} \end{pmatrix}$, $T_2 \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{m} \\ \mathrm{y} & \mathrm{t} \end{pmatrix}$ formundadır. $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow {T_1}^{-1}T_2 \in \mathbb{P}_1(n) \Leftrightarrow x \equiv r\ (mod n)$ ve $y \equiv s\ (mod n)$ dir.

2.2.3. $\mathbb{P}$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

$\mathbb{P}$, $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $v \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ olmak üzere $g(\alpha, \beta) = (\infty, v)$ olan bir $g \in G$ vardır. Dolayısıyla her bir $O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesi bir (∞, v) çifti içerir. $v \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ olduğundan $v = \frac{u}{n}$, $(u, n) = 1$ biçimindedir. $O(\infty, v) = O(\infty, \frac{u}{n})$ alt yörüngesini $O(u, n)$ ile ve buna karşılık gelen alt yörüngesel grafı da $G(u, n)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.25. [7] $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $G_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$ $x \equiv \pm\varepsilon ur\ (mod n)$, $y \equiv \pm\varepsilon us\ (mod n)$, $n = \varepsilon(ry - sx)$. (Burada $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]$ birimdir.)

İspat: "$\Rightarrow$": $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $G_{u,n}$ de bir kenar olsun. Yani $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{u,n}$ dir. Dolayısıyla $\exists\, T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{P}$: $T(\infty) = \frac{r}{s}$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{x}{y}$ dir. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. Böylece $\frac{a}{c} = \frac{r}{s}$ ve $\frac{au+bn}{cu+dn} = \frac{x}{y}$ olur. $(a, c) = (r, s) = (x, y) = 1$ olduğundan $\exists\, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \mathbb{Z}[i]$ öyle ki $a = \varepsilon_0 r$, $c = \varepsilon_0 s$ ve $au + bn = \varepsilon_1 x$, $cu + dn = \varepsilon_1 y$ dir. Böylece,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 r & \varepsilon_1 x \\ \varepsilon_0 s & \varepsilon_1 y \end{pmatrix}$$

elde ederiz. Determinanttan $(ad - bc).n = \varepsilon_0\varepsilon_1(ry - sx) \xRightarrow{ad-bc=1} n = \varepsilon_0\varepsilon_1(ry - sx)$ elde edilir. $\varepsilon_1 x = au + bn = \varepsilon_0 ur + bn$, $\varepsilon_1 y = cu + dn = \varepsilon_0 us + dn$ olduğundan

$\varepsilon_1 x = \varepsilon_0 ur\ (modn)$ ve $\varepsilon_1 y = \varepsilon_0 us\ (modn)$ elde edilir. Buradan $x \equiv {\varepsilon_1}^{-1}\varepsilon_0 ur\ \ (modn)$, $y \equiv {\varepsilon_1}^{-1}\varepsilon_0 us\ \ (modn)$ ve $n = \varepsilon_0\varepsilon_1(ry - sx)$ olur. $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_1$ alırsak;

$$x \equiv \pm\varepsilon ur\ (modn),\ y \equiv \pm\varepsilon us\ (modn)\ \text{ve}\ n = \varepsilon(ry - sx)$$

olduğu görülür.

" $\Leftarrow$ " : Varsayalım ki $x \equiv \pm\varepsilon ur\ (modn),\ y \equiv \pm\varepsilon us\ (modn)$ ve $n = \varepsilon(ry - sx)$ olsun. Bu takdirde $\exists\ b, d \in \mathbb{Z}[i] : x = \varepsilon ur + bn$ ve $y = \varepsilon us + dn$ dir. Şimdi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin $\mathbb{P}$ nin elemanı olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$a = \varepsilon r$ ve $c = \varepsilon s$ alırsak $x = au + bn,\ y = cu + dn$ olur ve buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon r & x \\ \varepsilon s & y \end{pmatrix}$ elde edilir. $\varepsilon(ry - sx) = n$ ve $ad - bc = 1$ olduğundan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{P}$ dir. Böylece $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $G_{u,n}$ de bir kenar olduğu elde edilir.

Aynı şekilde negatif değerli durum için de yaparsak;

$\exists\ b, d \in \mathbb{Z}[i]$ öyle ki $ix = -i\varepsilon ur + bn,\ iy = -i\varepsilon us + dn$ dir. $a = -i\varepsilon r$ ve $c = -i\varepsilon s$ alırsak $ix = au + bn,\ iy = cu + dn$ ve buradan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\varepsilon r & ix \\ -i\varepsilon s & iy \end{pmatrix}$ elde edilir. Aynı şekilde $\varepsilon(ry - sx) = n$ olduğundan $ad - bc = 1$ olur. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{P}$ dir. Yani, $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $G_{u,n}$ de kenardır.

Teorem 2.26. [7] $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv \pm\varepsilon^2\ (modn)$.

İspat: "$\Rightarrow$": $G_{u,n}$ kendi eşleşmiş olsun. O halde eğer $\infty \to \frac{u}{n}$ ise $\frac{u}{n} \to \infty$ olmalıdır. Buradan $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]$ vardır öyle ki $(u0 - n1) = \varepsilon$ dır. $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n}$ kenarından $u \equiv \varepsilon u\ (modn)$ elde edilir ki bu ise $\varepsilon \equiv 1\ (modn)$ ...$(*)$ dir. $\frac{u}{n} \to \frac{1}{0}$ kenarından ise $1 \equiv -\varepsilon u^2\ (modn)$ ...$(**)$ elde edilir. Böylece $(*)$ ve $(**)$ dan $\varepsilon u^2 \equiv -\varepsilon\ (modn)$ elde edilir. Yani, $u^2 \equiv \pm\varepsilon^2\ (modn)$ elde edilmiş olur.

" $\Leftarrow$ " : $u^2 \equiv \pm\varepsilon^2\ (modn)$ olsun. Bu denkliğin her iki tarafını ε^2 ile çarparsak; $\varepsilon^2 u^2 \equiv \pm\varepsilon^4\ (modn)$ olur ki bu ise $\varepsilon^2 u^2 \equiv \pm 1\ (modn)$ demektir. Eğer $\varepsilon^2 u^2 \equiv -1\ (modn)$ ise $\exists\ b \in \mathbb{Z}[i]$ öyle ki $\varepsilon^2 u^2 = -1 + \varepsilon bn$ dir. Buradan $-\varepsilon^2 u^2 + \varepsilon bn = 1$ elde edilir. $T := \begin{pmatrix} -\varepsilon u & b \\ -\varepsilon n & \varepsilon u \end{pmatrix}$ olmak üzere $T(\infty) = \frac{u}{n},\ T\left(\frac{u}{n}\right) = \infty$ ve $\det T = 1$ dir. O halde $\infty \to \frac{u}{n}$ ve $\frac{u}{n} \to \infty$ olduğundan $G_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir.

2.2.4. $G_{u,n}$ ve $H_{u,n}$ Grafları

Her bir $G_{u,n}$ $\eta(n)$ tane alt grafın ayrık birleşiminden oluşur. $\approx$ denklik bağıntısına göre her bir alt grafın köşeleri bir tek blok oluşturur. $\mathbb{P}$, $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\mathbb{P}$ bu blokları transitif olarak permüte eder. Bu da alt yörüngelerin her birinin birbirleriyle izomorf oldukları anlamına gelir. $G_{u,n}$ nin köşeleri ∞ u içeren;

$[\infty] = \{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)\colon\ x \equiv 1\ (modn),\ \ y \equiv 0\ (modn)\}$

bloğunda olan alt grafını $H_{u,n}$ile gösterelim. Dolayısıyla $G_{u,n}$, $H_{u,n}$ nin $\eta(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur.

Teorem 2.27. [7] $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in [\infty]$ olsun. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $H_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow \exists$ bir $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]$ birimi öyle ki $x \equiv \varepsilon ur\ (modn)$ ve $y \equiv -\varepsilon us\ (modn)$ dir. Burada $u = 1$ veya $u = n - 1$ dir ve $n = \varepsilon(ry - sx)$ dir.

İspat: $\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in [\infty]$ olduğundan $r \equiv 1\ (modn)$ ve $x \equiv 1\ (modn)$ dir. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $H_{u,n}$ de bir kenar olduğundan teorem 2.25 den $x \equiv \pm\varepsilon ur\ (modn)$ elde edilir. Böylece;

(i) Eğer $x \equiv \varepsilon ur\ (modn)$ ise $u \equiv 1\ (modn)$ dir. Bu ise $u = 1$ verildiğinde olur.

(ii) Eğer $x \equiv -\varepsilon ur\ (modn)$ ise $u \equiv -1\ (modn)$ dir. Bu ise $u = n - 1$ verildiğinde olur.

Böylece $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $H_{u,n}$ de bir kenardır $u = 1$ veya $u = n - 1$ olduğunda.

Teorem 2.28. $\mathbb{P}_1(n)$, $H_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat: İlk önce $\mathbb{P}_1(n)$ nin $H_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğini gösterelim: $H_{u,n}$ nin köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)\colon\ x \equiv 1\ (modn),\ \ y \equiv 0\ (modn)\}$ bloğunun elemanları olduğundan $v, w \in [\infty]$ $H_{u,n}$ grafının iki köşesi olsun. $\mathbb{P}$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan $\exists\ g \in \mathbb{P}$ öyle ki $w = g(v)$ dir. $v \approx \infty$ ve $\approx$ $\mathbb{P}$ invaryant denklik bağıntısı olduğundan $g(v) \approx g(\infty)$ olur ki bu ise $w \approx g(\infty)$ demektir. O halde $w \approx g(\infty)$ olduğundan $g \in \mathbb{P}_1(n)$ dir.

Şimdi de $\mathbb{P}_1(n)$ nin $H_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiğini gösterelim: $v, w \in [\infty]$, $x, y \in [\infty]$ ve $v \to w,\ x \to y \in H_{u,n}$ olsun. O halde $(v, w), (x, y) \in O\left(\infty, \frac{u}{n}\right)$ dir. Böylece $\exists\ S, T \in \mathbb{P}$ öyle ki;

$S(\infty) = v,\ S\left(\frac{u}{n}\right) = w\ ;\ T(\infty) = x,\ T\left(\frac{u}{n}\right) = y$

dir. Buradan $S(\infty),\ T(\infty) \in [\infty]$ olduğundan $S, T \in \mathbb{P}_1(n)$ dir. Ayrıca $TS^{-1}(v) = x$ ve $TS^{-1}(w) = y$ olduğu için $TS^{-1} \in \mathbb{P}_1(n)$ dir.

Teorem 2.29. [7] $H_{u,n}$ yönlendirilmiş bir üçgen içerir $\Leftrightarrow \exists$ bir $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]$ birimi öyle ki $\varepsilon^2u^2 \pm \varepsilon u \pm 1 \equiv 0\ (modn)$.

İspat: $H_{u,n}$ nin yönlendirilmiş bir üçgen içerdiğini varsayalım. $\mathbb{P}_1(n)$, $H_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden bu üçgenin $\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{r}{n} \rightarrow \infty$ biçiminde olduğunu varsayabiliriz. Teorem 2. 27 de $\frac{u}{n} \rightarrow \frac{r}{n}$ kenarının durumu ispatlandı. Burada iki durum vardır. Birincisi; $\exists$ bir $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]$ birimi öyle ki $(u - r)\varepsilon = 1$ ve $r \equiv -\varepsilon u^2\ (modn)$ dir. Bu ise bize $\varepsilon^2u^2 + \varepsilon u - 1 \equiv 0\ (modn)$ denkliğini verir. İkinci durumda ise; $\exists$ bir $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]$ birimi öyle ki $(u - r)\varepsilon = 1$ ve $r \equiv \varepsilon u^2\ (modn)$ dir. Buradan $\varepsilon^2u^2 - \varepsilon u + 1 \equiv 0\ (modn)$ denkliğini elde ederiz. Dolayısıyla $\varepsilon^2u^2 \pm \varepsilon u \pm 1 \equiv 0\ (modn)$ elde etmiş oluruz.

Tersine; $\varepsilon \in \mathbb{Z}[i]$ bir birim olmak üzere $\varepsilon^2u^2 \pm \varepsilon u \pm 1 \equiv 0\ (modn)$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.25 den $\frac{u}{n} \rightarrow \frac{\varepsilon u-1}{\varepsilon n}$ $H_{u,n}$ de bir kenardır ve transitiflikten $H_{u,n}$ de $\infty \rightarrow \frac{u}{n}$ ve $\frac{\varepsilon u-1}{\varepsilon n} \rightarrow \infty$ kenarları vardır. Böylece $H_{u,n}$ de $\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{\varepsilon u-1}{\varepsilon n} \rightarrow \infty$ yönlendirilmiş üçgeni bulunur.

2.3. Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalliyeni

$\mathbb{P}$ picard grubu;

$$\mathbb{P} := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]\ ve\ ad - bc = 1\right\}$$

şeklinde idi. Ayrıca

$$x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere;

$\mathbb{P} = \langle x, u, y, r; x^3 = u^2 = y^3 = r^2 = (xu)^2 = (xy)^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1\rangle$ dir. Burada, $x(z) = \frac{i}{iz+1}$, $u(z) = -\frac{1}{z}$, $y(z) = \frac{z+1}{-z}$ ve $r(z) = \frac{i}{iz}$ şeklindedir. Ayrıca ; $G_1 = \langle u, y, x\rangle \cong S_3 * z_3A_4$ ve $G_2 = \langle u, y, r\rangle \cong S_3 * z_2D_2$ dır [12].

Γ modüler grubu ise;

$$\Gamma = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \epsilon \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

şeklinde idi. Dolayısıyla $\Gamma = \langle u, y \rangle$ şeklindedir. $\mathbb{P}$ nin grup yapısı Γ nın grup yapısına oldukça benzerdir. Aynı zamanda $\mathbb{P}$ nin esas kongrüans alt gruplarının yapısı da Γ nın esas kongrüans alt gruplarının yapısına benzerlik gösterir. Burada Γ, $\mathbb{P}$ de normal değildir. O halde Γ nın $\mathbb{P}$ deki normalliyenini araştıralım. Γ nın $\mathbb{P}$ deki normalliyeninin

$$N_{\mathbb{P}}(\Gamma) = \{g \in \mathbb{P}: g\Gamma g^{-1} = \Gamma\}$$

şeklinde olduğunu hatırlayarak Γ nın $\mathbb{P}$ deki normalliyeninin $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ olduğunu gösterelim.

Teorem 2.30. [8,12,13,32] Γ nın $\mathbb{P}$ deki normalliyeni $N_{\mathbb{P}}(\Gamma) = G_2 \cong S_3 * z_2 D_2$ dır.

İspat: Burada x, u, y ve r ile temsil edilen matrisleri kullanabiliriz. Bunlar;

$$x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $s \in \mathbb{P}$ öyle ki $s\Gamma s^{-1} \subset \Gamma$ dönüşümlerini aramalıyız. Çünkü bu, eşitliği göstermek için yeterlidir. Öncelikle $\mathbb{P}$ nin üreteçlerini düşünelim. Biliyoruz ki u ve y Γ yı üretirler. Γ nın bir elemanı $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. Bu gösterir ki $xhx^{-1} \notin \Gamma$ ve $rhr^{-1} \in \Gamma$ dır. Şimdi $\mathcal{N}$ kümesin u, y ve r tarafından üretilen bir küme olduğunu düşünelim.

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \langle u, y, r; u^2 = y^3 = r^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1 \rangle \\ &= \langle u, r; u^2 = r^2 = (ru)^2 = 1 \rangle * \langle y, r; y^3 = r^2 = (ry)^2 = 1 \rangle \\ &= D_2 * z_2 S_3 = G_2 \end{aligned}$$

Şimdi $\mathcal{N} = N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ olduğunu gösterelim. Açıkça $\mathcal{N} \subset N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dir. O halde yalnızca $N_{\mathbb{P}}(\Gamma) \subset \mathcal{N}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nin bir elemanı g olsun. Tanım gereği $g\Gamma g^{-1} = \Gamma$ dır. Özellikle $u, y, t \in \Gamma$ için $gug^{-1} \in \Gamma$, $gyg^{-1} \in \Gamma$ ve $gtg^{-1} \in \Gamma$ dır ki burada t, $z \longrightarrow z + 1$ şeklinde bir dönüşümdür.

(1) $\quad gug^{-1} = \begin{pmatrix} -ac - bd & a^2 + b^2 \\ -c^2 - d^2 & ac + bd \end{pmatrix},$

(2) $\quad gyg^{-1} = \begin{pmatrix} ad - ac - bd & a^2 - ab + b^2 \\ cd - c^2 - d^2 & ac - bc + db \end{pmatrix}$

ve

(3) $\quad gtg^{-1} = \begin{pmatrix} ad - ac - bc & a^2 \\ -c^2 & ac - bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ac & a^2 \\ -c^2 & 1 + ac \end{pmatrix}$

dir. $gug^{-1}, gyg^{-1} ve\ gtg^{-1} \in \Gamma$ olduğundan (3) ten $a^2 \in \mathbb{Z}$, $c^2 \in \mathbb{Z}$ ve $ac \in \mathbb{Z}$ dir. (1) den $a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$, $b^2 \in \mathbb{Z}$, $-c^2 - d^2 \in \mathbb{Z}$, $d^2 \in \mathbb{Z}$ ve $ac + bd \in \mathbb{Z}$, $bd \in \mathbb{Z}$ dir. Benzer şekilde (2) den $ad \in \mathbb{Z}$, $bc \in \mathbb{Z}$, $ab \in \mathbb{Z}$ ve $cd \in \mathbb{Z}$ dir. Eğer $a^2, b^2, c^2, d^2 \in \mathbb{Z}$ ise a, b, c, d nin her biri tam sayı veya saf imajiner sayı olmak zorundadır. Aynı zamanda $ac \in \mathbb{Z}$ olduğundan a ve c nin her ikisi tamsayı veya saf imajiner sayı olmak zorundadır. Benzer şekilde $ad \in \mathbb{Z}$ ve $bc \in \mathbb{Z}$; a, b, c, d aynı tipten olmak zorundadır. Sonuç olarak a, b, c, d nin hepsi ya tamsayı ya da saf imajiner sayı olmak zorundadır. Bu durumda,

$$g = \begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix};\ -a'd' + b'c' = 1,\ a', b', c', d' \in \mathbb{Z} \text{ dir.}$$

$$s = \begin{pmatrix} b' & a' \\ d' & c' \end{pmatrix};\ b'c' - a'd' = 1\ \ \Gamma \text{ nin bir elemanı ve buradan}$$

$$g = sr = \begin{pmatrix} b' & a' \\ d' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}; -a'd' + b'c' = 1$$

olur. Bu yüzden $g \in \mathcal{N}$ ve g, $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nin keyfi bir elemanıdır. O halde $\mathcal{N} = N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ elde ederiz.

Yani,

$$N_{\mathbb{P}}(\Gamma) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix} : a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}\ ve\ ad - bc = 1, -a'd' + b'c' = 1 \right\}$$

şeklindedir.

$N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerinde transitif değildir. Gerçekten;

Varsayalım ki transitif olsun. Yani; $\forall\, i, \infty \in \widehat{\mathbb{Q}}(i)$ olmak üzere

1. Durum : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ vardır.

$\left.\begin{matrix} ai + b = 1 \\ ci + d = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 1, a = 0, d = 0, c = 0$ dır. O halde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup $ad - bc = 0$ dır. Bu ise $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ olmasıyla çelişir.

2. Durum: $\begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ vardır.

$\left.\begin{matrix} -a + bi = 1 \\ -c + di = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = 0, a = -1, d = 0, c = 0$ dır. O halde $\begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olup $ad - bc = 0$ dır. Bu ise $\begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}(i)$ üzerinde transitif değildir. Ayrıca $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Gerçekten; $T \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ için T nin sabit noktaları $z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2 - 4}}{2c}$ şeklinde idi. Parabolik dönüşümde $|a + d| = 2$ olduğundan $z = \frac{(a-d)}{2c}$ olur ki burada $T \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ olduğu için a, b, c, d ya tam sayı ya da saf imajiner sayıdır.

Dolayısıyla $z = \frac{(a-d)}{2c} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ dır. Şimdi de $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın cusp kümesi $\widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ üzerindeki hareketini inceleyelim.

2.3.1. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanı, $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere, $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ ile temsil edeceğiz. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi;
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$ ve $\begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix}: \frac{x}{y} \to \frac{aix+biy}{cix+diy} = \frac{i(ax+by)}{i(cx+dy)} = \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir.

Teorem 2.31. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

İspat: $\forall\, v = \frac{a}{b},\ w = \frac{c}{d} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanları için $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ olan $T \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dönüşümünün varlığını gösterelim. Bunun için $\forall\, v = \frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanının ∞ un yörüngesinde olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $v = \frac{a}{b} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ (İndirgenmiş formda) olsun. $(a, b) = 1$ olduğundan $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ öyle ki $ax - by = 1$ dir. Böylece, $g := \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır ve $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olduğundan $g(\infty) = \frac{a}{b}$ dir. Ayrıca $h := \begin{pmatrix} ai & xi \\ bi & yi \end{pmatrix} \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır ve $\begin{pmatrix} ai & xi \\ bi & yi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai \\ bi \end{pmatrix}$ olduğundan $h(\infty) = \frac{a}{b}$ dir. Dolayısıyla $\frac{a}{b}$, ∞ un yörüngesindedir. Yani, $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

2.3.2. İmprimitif Hareket

Biliyoruz ki $\Gamma_0(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0\ (mod n)\right\}$ kongrüans alt grubu alındığında $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $n > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < \Gamma$ dır. Dolayısıyla $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır. Böylece $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder. $v = \frac{r}{s}$, $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere, $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olan $g, g' \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ vardır. Burada iki durum söz konusudur:

1. Durum: Burada $g=\begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}$ ve $g'=\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ formundadır. $v \approx w \iff g^{-1}g' \epsilon\ \Gamma_0(n)$ $\iff \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ ry-sx & * \end{pmatrix} \epsilon\ \Gamma_0(n) \iff ry-sx \equiv 0\ modn$ dir. Böylece, $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y}$ $\iff ry-sx \equiv 0\ (modn)$ dir.

2. Durum: Burada $g=\begin{pmatrix} ri & * \\ si & * \end{pmatrix}$ ve $g'=\begin{pmatrix} xi & * \\ yi & * \end{pmatrix}$ formundadır. $v \approx w \iff g^{-1}g' \epsilon\ \Gamma_0(n)$ $\iff \begin{pmatrix} * & * \\ -si & ri \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xi & * \\ yi & * \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ sx-ry & * \end{pmatrix} \epsilon\ \Gamma_0(n) \iff sx-ry \equiv 0\ (modn)$ dir. Böylece, $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \iff sx-ry \equiv 0\ (modn)$ dir.

2.3.3. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

$N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $v \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere her bir alt yörüngesi bir (∞, v) çifti içerir. $v \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $v=\frac{u}{n}$, $n \geq 0$, $(u,n)=1$ biçimindedir. Bu alt yörüngeyi $\bar{O}(u,n)$ ile ve buna karşılık gelen alt yörüngesel grafı da $\bar{G}(u,n)$ ile göstereceğiz. $v=\infty=\frac{1}{0}=\frac{-1}{0}$ olduğu durumda $\bar{G}_{1,0}=\bar{G}_{-1,0}$ trivial alt yörüngesel grafı elde edilir. Biz trivial olmayan alt yörüngesel grafları incelemek istediğimiz için $v \epsilon \mathbb{Q}$ varsayalım.

Teorem 2.32. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\bar{G}_{u,n}$ de bir kenardır $\iff$

(i) $x \equiv ur\ modn, y \equiv us\ modn, ry-sx=n$ veya

(ii) $x \equiv -ur\ modn, y \equiv -us\ modn$ ve $ry-sx=-n$ veya

(iii) $x \equiv ur\ modn, y \equiv us\ modn, ry-sx=-n$ veya

(iv) $x \equiv -ur\ modn, y \equiv -us\ modn$ ve $ry-sx=n$

olmasıdır.

İspat: "$\Longrightarrow$": **1. Durum:** $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \bar{G}_{u,n}$ olsun. Bu taktirde $\exists\ T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ öyle ki $T(\infty)=\frac{r}{s}$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right)=\frac{x}{y}$ dir. Bu durumun ispatı Teorem 2.12 de verilmiştir. Yani, 1.durumda (i) veya (ii) şartları sağlanır.

2. Durum: $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \bar{G}_{u,n}$ olsun. Bu taktirde $\exists\ g=\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ öyle ki $g(\infty)=\frac{r}{s}$ ve $g\left(\frac{u}{n}\right)=\frac{x}{y}$ dir. Bu bize ;

$$\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ri & xi \\ si & yi \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ri & -xi \\ -si & -yi \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

$$\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ri & xi \\ -si & yi \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ri & -xi \\ si & -yi \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

matris eşitliklerinden birini verir.

(2.16) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'i & a'iu+b'in \\ c'i & c'iu+d'in \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ri & xi \\ si & yi \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a'i=ri,\ \ c'i=si,$ $a'iu+b'in=xi,\quad c'iu+d'in=yi\ \Rightarrow\ xi\equiv a'iu\ (modn)$ ve $yi\equiv c'iu\ (modn)\ \Rightarrow$ $x\equiv ur\ (modn)$ ve $y\equiv us\ (modn)$ elde edilir ve ayrıca determinanttan;

$(-a'd'+b'c').n=-ry+sx\xRightarrow{-a'd'+b'c'=1} ry-sx=-n$ elde edilir. Benzer şekilde (2.17) den de $x\equiv ur\ (modn)$, $y\equiv us\ (modn)$ ve $ry-sx=-n$ elde edilir.

(2.18) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a'i & a'iu+b'in \\ c'i & c'iu+d'in \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ri & xi \\ -si & yi \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a'i=-ri,\ c'i=-si,\ a'iu+b'in=xi,$ $c'iu+d'in=yi\ \Rightarrow\ xi\equiv a'iu\ (modn)$ ve $yi\equiv c'iu\ (modn)\ \Rightarrow\ x\equiv -ur\ (modn)$ ve $y\equiv -us\ (modn)$ elde edilir ve ayrıca determinanttan;

$(-a'd'+b'c').n=ry-sx\ \Rightarrow\ ry-sx=n$ elde edilir. Benzer şekilde (2.19) dan da $x\equiv -ur\ (modn),\quad y\equiv -us\ (modn)$ ve $ry-sx=n$ elde edilir. Böylece bu dört durumdan da (iii) veya (iv) sağlanır.

"$\Leftarrow$": Teorem 2.12 de (i) veya (ii) şartları sağlandığında $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}$ nin $\bar{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğu gösterilmiştir. Şimdi varsayalım ki (iii) sağlansın. Yani, $x\equiv ur\ (modn)$, $y\equiv us\ (modn)$ ve $ry-sx=-n$ olsun. $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}$ nin $\bar{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğunu gösterelim.

$x\equiv ur\ (modn)\Rightarrow \exists\ k\in\mathbb{Z}:x=ur+kn$ ve

$y\equiv us\ (modn)\Rightarrow \exists\ l\in\mathbb{Z}:y=us+ln$ dir.

$T=\begin{pmatrix} ri & ki \\ si & li \end{pmatrix}$ matrisinin $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın elemanı olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$T(\infty)=\begin{pmatrix} ri & ki \\ si & li \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ri \\ si \end{pmatrix},\qquad T\left(\frac{u}{n}\right)=\begin{pmatrix} ri & ki \\ si & li \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} rui+kni \\ sui+lni \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xi \\ yi \end{pmatrix}$ ve

$ry-sx=-n$ olduğundan $ry-sx=r(us+ln)-s(ur+kn)=-n\quad\Rightarrow$

$rus + rln - sur - skn = -n \Rightarrow rln - skn = -n \Rightarrow rl - sk = -1 \Rightarrow sk - rl = 1$ dir.

$det\begin{pmatrix} ri & ki \\ si & li \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow T = \begin{pmatrix} ri & ki \\ si & li \end{pmatrix} \epsilon \ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ elde edilir.

Benzer şekilde (iv) ün sağlandığı varsayılıp $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\bar{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğu görülür.

Sonuç 2.33. $uv \equiv \pm 1\ (modn)$ ise bu taktirde $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiş alt yörüngesel graflardır.

İspat: **(I)** $uv \equiv 1\ (modn)$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.32 ye göre aşağıdaki durumlara bakalım:

1. Durum: $x \equiv ur\ (modn),\ y \equiv us\ (modn)$ ve $ry - sx = n$ dir. Buradan

$vx \equiv vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv vx\ (modn)$

$vy \equiv vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv vy\ (modn)$ ve $sx - ry = -n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur.

Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

2. Durum: $x \equiv -ur\ (modn),\ y \equiv -us\ (modn)$ ve $ry - sx = -n$ dir. Buradan

$vx \equiv -vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv -vx\ (modn)$

$vy \equiv -vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv -vy\ (modn)$ ve $sx - ry = n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur.

Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

3. Durum: $x \equiv ur\ (modn),\ y \equiv us\ (modn)$ ve $ry - sx = -n$ dir. Buradan

$vx \equiv vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv vx\ (modn)$

$vy \equiv vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv vy\ (modn)$ ve $sx - ry = n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur.

Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

4. Durum: $x \equiv -ur\ (modn),\ y \equiv -us\ (modn)$ ve $ry - sx = n$ dir. Buradan

$vx \equiv -vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv -vx\ (modn)$

$vy \equiv -vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv -vy\ (modn)$ ve $sx - ry = -n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur. Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

(II) $uv \equiv -1\ (modn)$ olsun. Bu taktirde Teorem 2.32 ye göre aşağıdaki durumlara bakalım:

1. Durum: $x \equiv ur\ (modn),\ y \equiv us\ (modn)$ ve $ry - sx = n$ dir. Buradan

$vx \equiv vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv -vx\ (modn)$

$vy \equiv vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv -vy\ (modn)$ ve $sx - ry = -n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur.

Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

2. Durum: $x \equiv -ur\ (modn),\ y \equiv -us\ (modn)$ ve $ry - sx = -n$ dir. Buradan

$vx \equiv -vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv vx\ (modn)$

$vy \equiv -vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv vy\ (modn)$ ve $sx - ry = n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur.

Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

3. Durum: $x \equiv ur\ (modn),\ y \equiv us\ (modn)$ ve $ry - sx = -n$ dir. Buradan

$vx \equiv vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv -vx\ (modn)$

$vy \equiv vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv -vy\ (modn)$ ve $sx - ry = n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur.

Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

4. Durum: $x \equiv -ur\ (modn),\ y \equiv -us\ (modn)$ ve $ry - sx = n$ dir. Buradan

$vx \equiv -vur\ (modn) \Longrightarrow r \equiv vx\ (modn)$

$vy \equiv -vus\ (modn) \Longrightarrow s \equiv vy\ (modn)$ ve $sx - ry = -n$ olduğundan $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \in \bar{G}_{v,n}$ olur.

Buradan $\bar{G}_{u,n}$ ile $\bar{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

Sonuç 2.34. $\bar{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir$\Leftrightarrow$ $u^2 \equiv \pm 1\ (modn)$ dir.

İspat: "$\Longrightarrow$": Kabul edelim ki $\bar{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olsun. Böylece $\exists\ T \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ öyle ki $\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \xrightarrow{T} \left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ dur. Buradan;

1. Durum: $T = \begin{pmatrix} u & -b \\ n & -u \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır. Çünkü,

$\begin{pmatrix} u & -b \\ n & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} u & -b \\ n & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. $\det T = 1 \Longrightarrow -u^2 + nb = 1 \Longrightarrow u^2 = nb - 1 \Longrightarrow u^2 \equiv -1\ (modn)$ olur.

2. Durum: $T = \begin{pmatrix} ui & -bi \\ ni & -ui \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır. Çünkü,

$\begin{pmatrix} ui & -bi \\ ni & -ui \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ui \\ ni \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} ui & -bi \\ ni & -ui \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dir. $\det T = 1 \Longrightarrow u^2 - nb = 1 \Longrightarrow u^2 = nb + 1 \Longrightarrow u^2 \equiv 1\ (modn)$ olur. Yani, $u^2 \equiv \pm 1\ (modn)$ elde edilir.

"$\Longleftarrow$": $u^2 \equiv 1\ (modn)$ olsun. O halde $-u^2 \equiv -1\ (modn)$ yazılır. Buradan $-u^2 + nb = -1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $\begin{pmatrix} ui & -bi \\ ni & -ui \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır ve $\begin{pmatrix} ui & -bi \\ ni & -ui \end{pmatrix}$ ile $\infty \to \frac{u}{n}$ ve $\frac{u}{n} \to \infty$ olur.

$u^2 \equiv -1\ (modn)$ olsun. O halde $-u^2 \equiv 1\ (modn)$ yazılır. Buradan $-u^2 + nb = 1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $\begin{pmatrix} u & -b \\ n & -u \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır ve $\begin{pmatrix} u & -b \\ n & -u \end{pmatrix}$ ile $\infty \to \frac{u}{n}$ ve $\frac{u}{n} \to \infty$ olur. Buradan $\bar{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir.

Lemma 2.35. $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y} \epsilon \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyonel sayılar olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ $\bar{F}$ de ardışık köşelerdir.

(ii) $ry - sx = \mp 1$ dir.

(iii) Bir $m \epsilon \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ $\bar{F}_m$ de ardışık köşelerdir.

2.3.4. $\bar{G}_{u.n}$ ve $\bar{F}_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $\bar{F} = \bar{G}_{1,1}$ Farey grafının özelliklerini diğer $\bar{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletebileceğimizi göreceğiz. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden blokları transitif olarak permüte eder. Dolayısıyla alt grafların hepsi izomorftur. $\bar{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\ (mod n)\}$ bloğunda olan alt grafını $\bar{F}_{u,n}$ ile gösterelim. Buna göre Teorem 2.32 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.36. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\bar{F}_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

(i) $x \equiv ur\ mod n,\ ry - sx = n$ veya

(ii) $x \equiv -ur\ mod n,\ ry - sx = -n$ veya

(iii) $x \equiv ur\ mod n,\ ry - sx = -n$ veya

(iv) $x \equiv -ur\ mod n,\ ry - sx = n$

olmasıdır.

Teorem 2.37. $\Gamma_0(n)$ $\bar{F}_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat: İlk önce $\Gamma_0(n)$ nin $\bar{F}_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğini gösterelim: $\bar{F}_{u,n}$ nin köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0\ mod n\right\}$ bloğunun elemanları olduğundan $v, w\ \epsilon\ [\infty]$ $\bar{F}_{u,n}$ grafının iki köşesi ve $v = \frac{k}{ln}$ ve $w = \frac{t}{sn}$ olsun. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\exists\ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ öyle ki $w = T(v)$ dir. Böylece, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ ln \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak + bln \\ ck + dln \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ sn \end{pmatrix}$ olup $ck = sn - dln = (s - dl)n$ dir. Buradan $n \mid ck$ olur ve $(k, n) = 1$ olduğundan $n \mid c$ bulunur. Böylece $T\ \epsilon\ \Gamma_0(n)$ olur. Ayrıca $\exists\ g = \begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix} \epsilon\ N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ öyle ki $w = g(v)$ dir. Böylece, $\begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ ln \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aki + blni \\ cki + dlni \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ sn \end{pmatrix}$ olup $\frac{aki+blni}{cki+dlni} = \frac{ak+bln}{ck+dln} = \frac{t}{sn}$ elde edilir. Yani buradan da $n \mid c$ bulunur. Böylece $g \epsilon \Gamma_0(n)$ olur. Dolayısıyla $\Gamma_0(n)$ $\bar{F}_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder. $T: [\infty] \to [\infty]$ dönüşümü $\Gamma_0(n) \subset N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın elemanı olduğundan birebir örten bir dönüşümdür dolayısıyla T köşeler üzerinde bir permütasyondur.

Şimdi gösterelim ki $\bar{F}_{u,n}$ $\Gamma_0(n)$ nin kenarlarını transitif olarak permüte eder. $x_1 \to y_1$ ve $x_2 \to y_2$ $\bar{F}_{u,n}$ de iki kenar olsunlar. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ $\bar{F}_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\exists\, S = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \epsilon\, N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ öyle ki $S(x_1 \to y_1) = S(x_2 \to y_2)$ dir. Yani; $S(x_1) \to S(y_1) = S(x_2) \to S(y_2)$ dir. Böylece $S(x_1) = S(x_2)$ ve $S(y_1) = S(y_2)$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 n \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 n \end{pmatrix}$ olur. Buradan;

(i) $\begin{pmatrix} pp_1 + rq_1 n \\ qp_1 + sq_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pr_2 + rq_2 n \\ qp_2 + sq_2 n \end{pmatrix}$ ve

(ii) $\begin{pmatrix} pr_1 + rs_1 n \\ qr_1 + ss_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pr_2 + rs_2 n \\ qr_2 + ss_2 n \end{pmatrix}$ dir.

(ii) den $qr_1 + ss_1 n = qr_2 + ss_2 n \Rightarrow qr_1 - qr_2 = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow q(r_1 - r_2) = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow n \mid q(r_1 - r_2) \xRightarrow{n \nmid (r_1 - r_2)} n \mid q$ elde edilir. Bu da bize $S \epsilon\, \Gamma_0(n)$ olduğunu söyler.

Ayrıca $\exists\, T = \begin{pmatrix} pi & ri \\ qi & si \end{pmatrix} \epsilon\, N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ öyle ki $T(x_1 \to y_1) = T(x_2 \to y_2)$ dir. Böylece $T(x_1) = T(x_2)$ ve $T(y_1) = T(y_2)$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} pi & ri \\ qi & si \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pi & ri \\ qi & si \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 n \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} pi & ri \\ qi & si \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pi & ri \\ qi & si \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 n \end{pmatrix}$ olur. Buradan;

(i) $\begin{pmatrix} pp_1 i + rq_1 ni \\ qp_1 i + sq_1 ni \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pr_2 i + rq_2 ni \\ qp_2 i + sq_2 ni \end{pmatrix}$ ve

(ii) $\begin{pmatrix} pr_1 i + rs_1 ni \\ qr_1 i + ss_1 ni \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pr_2 i + rs_2 ni \\ qr_2 i + ss_2 ni \end{pmatrix}$ dir.

(ii) den $qr_1 i + ss_1 ni = qr_2 i + ss_2 ni \Rightarrow qr_1 - qr_2 = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow q(r_1 - r_2) = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow n \mid q(r_1 - r_2) \xRightarrow{n \nmid (r_1 - r_2)} n \mid q$ elde edilir. Bu da bize $T \epsilon\, \Gamma_0(n)$ olduğunu söyler. Böylece $\Gamma_0(n)$ $\bar{F}_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder. $\bar{F}_{u,n}$ nin kenarlarının kümesi K ile gösterilirse $S, T: K \to K$ dır ve $S, T \epsilon\, \Gamma_0(n) \subset N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ olduğundan birebir örten bir dönüşümdür yani S ve T bir permütasyondur. Böylece; $\Gamma_0(n)$ nin $\bar{F}_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiği gösterilmiş oldu.

Teorem 2.38. $\bar{F}_{u,n}$ bir üçgen içerir $\Leftrightarrow$ $u^2 \mp u + 1 \equiv 0\ (modn)$ dir. (∞ ile başlayan bir üçgen için, $u^2 - u + 1 \equiv 0\ (modn)$ ise üçgenin kenar şartları sırasıyla Teorem 2.36 daki (i), (i), (ii) veya (iv), (iii), (iii); $u^2 + u + 1 \equiv 0\ (modn)$ ise üçgendeki kenar şartları sırasıyla Teorem 2.36 daki (i), (ii), (ii) veya (iv), (iv), (iii) şeklindedir. Eğer üçgen ∞ ile başlamıyor ise bu üçgenin kenar şartları, ∞ ile başlayan üçgenin kenar şartlarının kendi aralarında yer değiştirmelerinden ibarettir).

İspat: "$\Longrightarrow$": Kabul edelim ki $\bar{F}_{u,n}$ bir üçgen ihtiva etsin. Teorem 2.37 den $\Gamma_0(n)$ $\bar{F}_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden bu üçgen 1.durumda $v \in \bar{F}_{u,n}$ için $\infty \to \frac{u}{n} \to v \to \infty$ formunda, 2.durumda $v_1 \in \bar{F}_{u,n}$ için $\infty \to \frac{-u}{n} \to v_1 \to \infty$ formundadır. Şimdi bu durumları inceleyelim:

1. Durum: $v \to \infty$ olduğundan Teorem 2.36 ya göre $\exists\ r \in \mathbb{Z}$ öyle ki $v = \frac{r}{n}$ dir. Buna göre $\frac{u}{n} \to \frac{r}{n} \in \bar{F}_{u,n}$ olduğundan $u - r = \pm 1$ dir. Böylece üçgen $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{u \pm 1}{n} \to \frac{1}{0}$ şeklindedir.

(a) $\frac{1}{0} \xrightarrow[(i)]{} \frac{u}{n} \xrightarrow[(i),(iv)]{} \frac{u-1}{n} \xrightarrow[(ii),(iii)]{} \frac{1}{0}$ olsun. $\frac{u-1}{n} \to \frac{1}{0}$ göz önüne alınırsa;

(1-) (ii) geçerli ise bu taktirde $1 \equiv -u(u-1)\ modn$ veya

(2-) (iii) geçerli ise bu taktirde $1 \equiv u(u-1)\ modn$ dir.

(a.1) $\frac{u}{n} \to \frac{u-1}{n}$ için (i) kenar şartı geçerli olsun. Bu takdirde;

$$(u-1) \equiv u^2\ modn \Longrightarrow u^2 - u + 1 \equiv 0\ modn \tag{2.20}$$

elde edilir. Buna göre

(a.1.1) (1-) i (2.20) de yerine yazarsak

$$u^2 - u - u^2 + u \equiv 0\ modn \Longrightarrow 0 \equiv 0\ modn$$

bulunur ki bu $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{u-1}{n} \to \frac{1}{0}$ üçgeni için $u^2 - u + 1 \equiv 0\ modn$ ve kenar şartlarının sırasıyla (i), (i), (ii) olduğunu gösterir.

(a.1.2) (2-) yi (2.20) de yerine yazarsak

$u^2 - u - u^2 + u \equiv 0\ modn \quad \Longrightarrow \quad 2u(u-1) \equiv 0\ modn \quad \Longrightarrow \quad u \equiv 0\ modn$ veya $(u-1) \equiv 0\ modn$

elde edilir ki bu durum $(u,n) = 1$ ve $(u-1,n) = 1$ olmasıyla çelişir. Buna göre üçgen olma şartı $u^2 - u + 1 \equiv 0\ modn$ olduğunda kenar şartları sırasıyla (i), (i), (iii) olamaz.

(a.2) $\frac{u}{n} \to \frac{u-1}{n}$ için (iv) kenar şartı geçerli olsun. Bu takdirde

$$u - 1 \equiv -u^2\ \ modn \Longrightarrow u^2 + u - 1 \equiv 0\ modn \tag{2.21}$$

elde edilir. Buna göre

(a.2.1) (1-) i (2.21) de yerine yazarsak

$$u^2 + u + u^2 - u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u^2 \equiv 0\, modn \Longrightarrow\; u \equiv 0\, modn$$

elde edilir ki bu $(u, n) = 1$ olmasıyla çelişir. Buna göre üçgen olma şartı $u^2 + u - 1 \equiv 0\, modn$ olamaz ve kenar şartları sırasıyla (i), (iv), (ii) olamaz.

(a.2.2) (2-) yi (2.21) de yerine yazarsak

$$u^2 + u - u^2 + u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u \equiv 0\, modn \Longrightarrow u \equiv 0\, modn$$

çelişkisi elde edilir ki bu durumda da üçgen olma şartı $u^2 + u - 1 \equiv 0\, modn$ olamaz ve kenar şartları sırasıyla (i), (iv), (iii) olamaz.

(b) $\frac{1}{0} \underset{(i)}{\longrightarrow} \frac{u}{n} \xrightarrow[(ii),(iii)]{} \frac{u+1}{n} \xrightarrow[(ii),(iii)]{} \frac{1}{0}$ olsun. $\frac{u+1}{n} \rightarrow \frac{1}{0}$ göz önüne alınırsa;

(3-) (ii) geçerli ise bu takdirde $1 \equiv -u(u+1)\, modn$ veya

(4-) (iii) geçerli ise bu takdirde $1 \equiv u(u+1)\, modn$

dir.

(b.1) $\frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+1}{n}$ için (ii) kenar şartı geçerli olsun. Bu takdirde;

$$(u + 1) \equiv -u^2\, modn \Longrightarrow u^2 + u + 1 \equiv 0\, modn \qquad (2.22)$$

elde edilir. Buna göre

(b.1.1) (3-) ü (2.22) de yerine yazarsak

$$u^2 + u - u^2 - u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 0 \equiv 0\, modn$$

bulunur ki bu $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+1}{n} \rightarrow \frac{1}{0}$ üçgeni için $u^2 + u + 1 \equiv 0\, modn$ ve kenar şartlarının sırasıyla (i), (ii), (ii) olduğunu gösterir.

(b.1.2) (4-) ü (2.22) de yerine yazarsak

$u^2 + u + u^2 + u \equiv 0\, modn \;\; \Longrightarrow \;\; 2u(u+1) \equiv 0\, modn \;\; \Longrightarrow \;\; u \equiv 0\, modn$ veya $u + 1 \equiv 0\, modn$

elde edilir ki bu durum $(u, n) = 1$ ve $(u + 1, n) = 1$ olmasıyla çelişir. Buna göre üçgen olma şartı $u^2 + u + 1 \equiv 0\, modn$ olduğunda kenar şartları sırasıyla (i), (ii), (iii) olamaz.

(b.2) $\frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+1}{n}$ için (iii) kenar şartı geçerli olsun. Bu taktirde;

$$(u + 1) \equiv u^2\, modn \Longrightarrow u^2 - u - 1 \equiv 0\, modn \qquad (2.23)$$

elde edilir. Buna göre

(b.2.1) (3-) ü (2.23) te yerine yazarsak

$$u^2 - u + u^2 + u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u^2 \equiv 0\, modn \Longrightarrow\; u \equiv 0\, modn$$

elde edilir ki bu $(u, n) = 1$ olmasıyla çelişir. Buna göre üçgen olma şartı $u^2 - u - 1 \equiv 0\, modn$ olamaz ve kenar şartları sırasıyla (i), (iii), (ii) olamaz.

(b.2.2) (4-) ü (2.23) te yerine yazarsak

$$u^2 - u - u^2 - u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u \equiv 0\, modn \Longrightarrow\ u \equiv 0\, modn$$

çelişkisi elde edilir ki bu durumda da üçgen olma şartı $u^2 - u - 1 \equiv 0\, modn$ olamaz ve kenar şartları sırasıyla (i), (iii), (iii) olamaz.

2. Durum: $v_1 \to \infty$ olduğundan Teorem 2.36 ya göre $\exists\, r_1 \in \mathbb{Z}$ öyle ki $v_1 = \frac{r_1}{n}$ dir. Buna göre $\frac{-u}{n} \to \frac{r_1}{n} \in \bar{F}_{u,n}$ olduğundan $-u - r_1 = \pm 1$ dir. Böylece üçgen $\frac{1}{0} \to \frac{-u}{n} \to \frac{-u\pm 1}{n} \to \frac{1}{0}$ şeklinde olur.

(c) $\frac{1}{0} \xrightarrow[(iv)]{} \frac{-u}{n} \xrightarrow[(ii),(iii)]{} \frac{-u+1}{n} \xrightarrow[(ii),(iii)]{} \frac{1}{0}$ olsun. $\frac{-u+1}{n} \to \frac{1}{0}$ göz önüne alınırsa

(5-) (ii) geçerli ise bu takdirde $1 \equiv -u(-u+1)\, modn$ veya

(6-) (iii) geçerli ise bu takdirde $1 \equiv u(-u+1)\, modn$

dir.

(c.1) $\frac{-u}{n} \to \frac{-u+1}{n}$ için (ii) kenar şartı geçerli olsun. Bu takdirde;

$$-u + 1 \equiv u^2\, modn \Longrightarrow u^2 + u - 1 \equiv 0\, modn \tag{2.24}$$

elde edilir. Buna göre

(c.1.1) (5-) i (2.24) te yerine yazarsak

$$u^2 + u - u^2 + u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u \equiv 0\, modn \Longrightarrow\ u \equiv 0\, modn$$

çelişkisi bulunur. Buna göre burada üçgen olma şartı $u^2 + u - 1 \equiv 0\, modn$ olamaz ve kenar şartları sırasıyla (iv), (ii), (ii) olamaz.

(c.1.2) (6-) yı (2.24) te yerine yazarsak

$$u^2 + u + u^2 - u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u^2 \equiv 0\, modn \Longrightarrow\ u \equiv 0\, modn$$

çelişkisi elde edilir. Böylece bu üçgen için $u^2 + u - 1 \equiv 0\, modn$ üçgen olma şartı olamaz ve kenar şartları sırasıyla (iv), (ii), (iii) olamaz.

(c.2) $\frac{-u}{n} \to \frac{-u+1}{n}$ için (iii) kenar şartı geçerli olsun. Bu takdirde;

$$-u + 1 \equiv -u^2\, modn \Longrightarrow u^2 - u + 1 \equiv 0\, modn \tag{2.25}$$

elde edilir. Buna göre

(c.2.1) (5-) i (2.25) te yerine yazarsak

$u^2 - u + u^2 - u \equiv 0\, modn \quad \Longrightarrow -2u(-u+1) \equiv 0\, modn \Longrightarrow\ u \equiv 0\, modn$ veya $(-u+1) \equiv 0\, modn$

elde edilir ki bu $(u, n) = 1$ ve $(-u+1, n) = 1$ olmasıyla çelişir. Buna göre üçgen olma şartı $u^2 - u + 1 \equiv 0\, modn$ olduğunda kenar şartları sırasıyla (iv), (iii), (ii) olamaz.

(c.2.2) (6-) i (2.25) te yerine yazarsak

$u^2 - u - u^2 + u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 0 \equiv 0\, modn$

bulunur ki bu üçgen olma şartının $u^2 - u + 1 \equiv 0\, modn$ olduğunu ve kenar şartlarının sırasıyla (i), (iv), (iii) olduğunu gösterir.

(d) $\frac{1}{0} \xrightarrow[(iv)]{} \frac{-u}{n} \xrightarrow[(i),(iv)]{} \frac{-u-1}{n} \xrightarrow[(ii),(iii)]{} \frac{1}{0}$ olsun. $\frac{-u-1}{n} \to \frac{1}{0}$ göz önüne alınırsa

(7-) (ii) geçerli ise bu takdirde $1 \equiv -u(-u-1)\, modn \Longrightarrow\ 1 \equiv u(u+1)\, modn$ veya

(8-) (iii) geçerli ise bu takdirde $1 \equiv u(-u-1)\, modn \Longrightarrow\ 1 \equiv -u(u+1)\, modn$

dir.

(d.1) $\frac{-u}{n} \to \frac{-u-1}{n}$ için (i) kenar şartı geçerli olsun. Bu takdirde;

$$-u - 1 \equiv -u^2\, modn \Longrightarrow u^2 - u - 1 \equiv 0\, modn \qquad (2.26)$$

elde edilir. Buna göre

(d.1.1) (7-) yi (2.26) da yerine yazarsak

$u^2 - u - u^2 - u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u \equiv 0\, modn \Longrightarrow u \equiv 0\, modn$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Buradan bu üçgen için $u^2 - u - 1 \equiv 0\, modn$ üçgen olma şartı olamaz ve kenar şartları sırasıyla (iv), (i), (ii) olamaz.

(d.1.2) (8-) i (2.26) da yerine yazarsak

$u^2 - u + u^2 + u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 2u^2 \equiv 0\, modn \Longrightarrow u \equiv 0\, modn$

çelişkisi elde edilir. Buna göre yine üçgen olma şartı $u^2 - u - 1 \equiv 0\, modn$ olamaz ve kenar şartları sırasıyla (iv), (i), (iii) olamaz.

(d.2) $\frac{-u}{n} \to \frac{-u-1}{n}$ için (iv) kenar şartı geçerli olsun. Bu taktirde;

$$-u - 1 \equiv u^2\, modn \Longrightarrow u^2 + u + 1 \equiv 0\, modn \qquad (2.27)$$

elde edilir. Buna göre

(d.2.1) (7-) yi (2.27) de yerine yazarsak

$u^2 + u + u^2 + u \equiv 0\, modn \quad \Longrightarrow -2u(-u-1) \equiv 0\, modn \Longrightarrow u \equiv 0\, modn$ veya $-u - 1 \equiv 0\, modn$

elde edilir ki bu $(u, n) = 1$ ve $(-u-1, n) = 1$ olmasıyla çelişir. Buna göre üçgen olma şartı $u^2 + u + 1 \equiv 0\, modn$ olduğunda kenar şartları sırasıyla (iv), (iv), (ii) olamaz.

(d.2.2) (8-) i (2.27) de yerine yazarsak

$u^2 + u - u^2 - u \equiv 0\, modn \Longrightarrow 0 \equiv 0\, modn$

elde edilir ki bu üçgen için $u^2 + u + 1 \equiv 0\, modn$ üçgen olma şartıdır ve kenar şartları sırasıyla (iv), (iv), (iii) olur.

Sonuç olarak $\frac{1}{0} \to \frac{u}{n} \to \frac{u \pm 1}{n} \to \frac{1}{0}$ $\bar{F}_{u,n}$ de bir üçgen ise;

(a.1.1) den $u^2 - u + 1 \equiv 0\ modn$ ve kenar şartları sırasıyla (i), (i), (ii)

(b.1.1) den $u^2 + u + 1 \equiv 0\ modn$ ve kenar şartları sırasıyla (i), (ii), (ii)

dir ve $\frac{1}{0} \to \frac{-u}{n} \to \frac{-u \pm 1}{n} \to \frac{1}{0}$ $\bar{F}_{u,n}$ de bir üçgen ise;

(c.2.2) den $u^2 - u + 1 \equiv 0\ modn$ ve kenar şartları sırasıyla (iv), (iii), (iii)

(d.2.2) den $u^2 + u + 1 \equiv 0\ modn$ ve kenar şartları sırasıyla (iv), (iv), (iii)

bulunur.

"⟸": $u^2 \pm u + 1 \equiv 0\ modn$ olsun. Buna göre

1. Durum: Teorem 2.36 ya göre $\infty \to \frac{u}{n} \to \frac{u \pm 1}{n} \to \infty$ yönlendirilmiş üçgeni $\bar{F}_{u,n}$ dedir.

2. Durum: (a) $u^2 - u + 1 \equiv 0\ modn$ olsun. Buradan $-u + 1 \equiv -u^2\ modn$ ve $1 \equiv u(-u + 1)\ modn$ bulunur. Buna göre $\frac{1}{0} \to \frac{-u}{n} \to \frac{-u+1}{n} \to \frac{1}{0}$ elde edilir ki bu $\bar{F}_{u,n}$ de kenar şartları sırasıyla (iv), (iii), (iii) olan üçgendir.

(b) $u^2 + u + 1 \equiv 0\ modn$ ise $-u - 1 \equiv u^2\ modn$ ve $1 \equiv u(-u - 1)\ modn$ dir. Bu ikisinden $\frac{1}{0} \to \frac{-u}{n} \to \frac{-u-1}{n} \to \frac{1}{0}$ dır. Bu ise $\bar{F}_{u,n}$ de kenar şartları sırasıyla (iv), (iv), (iii) olan üçgendir.

Örnek 2.39. $\frac{1}{0} \to \frac{4}{7} \to \frac{5}{7} \to \frac{1}{0}$ $\bar{F}_{3,7}$ de $u^2 - u + 1 \equiv 0\ (modn)$ yani $3^2 - 3 + 1 \equiv 0\ (mod\ 7)$ olan bir üçgendir ve uygun teoremdeki (iv), (iii), (iii) şartlarını sağlar.

$4 \equiv -3.1\ \ (mod\ 7)\ ,\ ry - sx = 7$

$5 \equiv 3.4\ (mod\ 7)\ ,\ ry - sx = -7$

$1 \equiv 3.5\ \ (mod\ 7)\ ,\ ry - sx = -7$

Ancak bu $F_{3,7}$ de bir üçgen değildir.

Örnek 2.40. $\frac{1}{0} \to \frac{9}{13} \to \frac{10}{13} \to \frac{1}{0}$ $\bar{F}_{4,13}$ de $u^2 - u + 1 \equiv 0\ (modn)$ yani $4^2 - 4 + 1 \equiv 0\ (mod\ 13)$ olan bir üçgendir ve uygun teoremdeki (iv), (iii), (iii) şartlarını sağlar.

$9 \equiv -4.1\ \ (mod\ 13)\ ,\ ry - sx = 13$

$10 \equiv 4.9\ (mod\ 13)\ ,\ ry - sx = -13$

$1 \equiv 4.10\ \ (mod\ 13)\ ,\ ry - sx = -13$

Ancak bu $F_{4,13}$ de bir üçgen değildir.

Teorem 2.41. $n > 1$ için $\bar{F}_{u,n}$ ters yönlendirilmiş üçgen ihtiva etmez.

İspat: Kabul edelim ki $\infty \to \frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n} \to \infty$ ters yönlendirilmiş üçgeni verilmiş olsun. $\frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n}$ kenarına Teorem 2.36 yı uygularsak,

(a) $r \equiv 1\, mod n, r - u = 1$ veya

(b) $r \equiv -1\, mod n, r - u = -1$ elde ederiz.

Her iki durumda da $u \equiv 0\, mod n$ olur ki bu $n > 1$ için u nun $mod n$ ye göre bir birim olması ile çelişir. O halde $\bar{F}_{u,n}$ bu üçgeni ihtiva etmez.

Şimdi $\bar{F}_{u,n}$ $\infty \to \frac{-u}{n} \leftarrow \frac{r_1}{n} \to \infty$ ters yönlendirilmiş üçgenini ihtiva etsin. Bu takdirde Teorem 2.36 ya göre $\frac{-u}{n} \leftarrow \frac{r_1}{n}$ kenarından ya

$$-u \equiv -ur_1\, mod n \Rightarrow r_1 \equiv 1\, mod n,\ r_1 + u = 1$$

veya

$$-u \equiv ur_1\, mod n \Rightarrow r_1 \equiv -1\, mod n,\ r_1 + u = -1$$

olur. Bu iki durumda da $n > 1$ için $u \equiv 0\, mod n$ çelişkisi elde edilir. Buna göre $\bar{F}_{u,n}$, ters yönlendirilmiş üçgenini ihtiva etmez.

Teorem 2.42. n çift ise $\bar{F}_{u,n}$ üçgen ihtiva etmez.

İspat: Kabul edelim ki $\bar{F}_{u,n}$, $\frac{a}{bn} \xrightarrow[(iv)]{} \frac{c}{dn} \xrightarrow[(iii)]{} \frac{k}{ln} \xrightarrow[(iii)]{} \frac{a}{bn}$ üçgenini ihtiva etsin. Buna göre n çift ve $(a, bn) = 1$, $(c, dn) = 1$, $(k, ln) = 1$ olduğundan a, c ve k sırasıyla $(a, n) = 1$, $(c, n) = 1$, $(k, n) = 1$ olan tek tamsayılardır. Kenar şartlarından;

$$ad - bc = 1 \,,\, cl - kd = -1 \,,\, bk - al = -1$$

dir. $ad - bc = 1$ in her iki tarafı k ile , $cl - kd = -1$ in her iki tarafı a ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa $c = k - a$ elde edilir. a ve k tek olduğundan c nin çift olduğu bulunur ki, bu $(c, n) = 1$ olmasıyla çelişir. O halde n çift ise $\bar{F}_{u,n}$ üçgen ihtiva etmez.

3. İRDELEME

Bu tez hazırlanmadan önce Modüler grubun alt yörüngesel grafları ve Picard grubunun alt yörüngesel grafları [17] ve [7] çalışmalarında elde edilmiştir. Literatür taraması sırasında Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeninin [32] de yapılan çalışılmaya karşın alt yörüngesel graflarla ele alınmadığı görülmüştür. Grup teorisi üzerinde çalışanların ifadesi ile bir grubun grafını elde etmek o grubu görselleştirmenin bir metodu olduğu gibi, ekonomik cebirsel ispatlar sunması açısından da önemlidir. Pür cebirsel tekniklerle elde edilebilecek kimi bilgilere graflarla çok daha etkili bir şekilde ulaşılabilir [25]. Graflardan elde edilebilecek grup üreteçleri ve onlar arasındaki bağlantılarla grupların gösterimlerinin nasıl olabileceğine dair daha ayrıntılı bilgiler için [11,25] temel referans kitapları olarak verilebilir. Alt yörüngesel graflar bu düşüncenin bir tezahürü olarak ortaya çıkmış ve bu teknik modüler grup, kongrüans alt grupları ve normalliyenlerine uygulanmıştır.

Bu tez çalışmasında üzerinde çalışılan grubun yalnızca 2. ve 3. mertebe eliptik elemanlar içermesi nedeniyle ön görüldüğü üzere grafında ikigen ve üçgen devreler bulunmuştur. Ancak ilgili kenar ve devre şartlarının kıyaslanan diğer iki grafla olan farkları ortaya konmuştur. Dolayısıyla grubun üst yarı düzlem üzerindeki döşemesi (tessellation) hücresel olarak benzerlik göstermesine karşın tam olarak nasıl olduğu tezdeki bilgilerden yararlanılarak elde edilebilir.

4. SONUÇLAR

Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeninin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi neticesinde oluşan graf $\bar{G}_{u,n}$ ve birbirine izomorf alt graflardan biri $\bar{F}_{u,n}$ ile gösterilmek üzere;

1. $\bar{G}_{u,n}$ grafındaki kenar şartları elde edildi (Teorem 2.32).
2. İki alt yörüngesel grafın hangi durumda eş oldukları elde edildi (Sonuç 2.33).
3. $\bar{G}_{u,n}$ grafının kendisiyle eşleşme şartı elde edildi (Teorem 2.34).
4. $\bar{G}_{u,n}$ grafının Farey grafıyla ilişkisi ortaya konuldu.
5. $\bar{F}_{u,n}$ alt grafının kenar şartları elde edildi (Teorem 2.36).
6. $\bar{F}_{u,n}$ alt grafının üçgen devre içerme şartları elde edildi (Teorem 2.38).
7. $\bar{F}_{u,n}$ alt grafının bazı üçgen devre örnekleri verildi.
8. $\bar{F}_{u,n}$ alt grafının ters yönlendirilmiş üçgen içeremeyeceği gösterildi (Teorem 2.41).

5. ÖNERİLER

1. Bu tez çalışmasında normalliyenin $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ bağıntısıyla elde edilen imprimitif hareketiyle çalışılmıştır. Buradaki $\Gamma_0(n)$ kongrüans alt grubu yerine $\Gamma_1(n)$ ve $\Gamma_0^0(n)$ alt grupları alınarak diğer imprimitif hareketlerin grafları çalışılabilir.
2. $\Gamma_0(n)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni bilinmektedir. Dolayısıyla bu düşünceyle birlikte $\Gamma_0(n)$ nin $\mathbb{P}$ deki normalliyenin grup yapısı araştırılabilir.
3. Omer Yayenie " Bir Hecke Ayrık Grubunun Bir Standart Temel Bölgesinin Hiperbolik Konveksliği" adlı doktora çalışmasında ayrık grupların temel bölgesini elde etmek için bilinen iki temel yöntemden farklı olarak bir üçüncü pratik yöntem elde etmiş ve bunu modüler grup ve Hecke gruplarının alt gruplarına uyguladığı çalışmaları yayınlamıştır. Çalışmanın temelinde grubun yan sınıf (coset) parçalanışı yer almaktadır. Alt yörüngesel graflardaki imprimitif hareket de esasında bir yan sınıf parçalanışıdır. Dolayısıyla Yayenie'nin makalelerindeki $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın temel bölgesi araştırılabilir.
4. Konjonktür olarak yazılmamasına karşın $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın grafında ikigen ve üçgen devrelerin dışında başka uzunluklu devreler öngörülmemektedir. Bu iddia [4] teki metottan faydalanılarak gösterilebilir.
5. Hiç devre içermeyen graflardaki (orman) minimal uzunluklu yollar ve özellikleri [10] daki gibi araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Akbaş, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Ph. D. Thesis, University of Southampton, 1989.

2. Akbaş, M. ve Singerman, D., The signature of the normalizer of $\Gamma_0(N)$, London Math. Soc., Lecture Notes, CUP, Cambridge, 165 (1992) 77-86.

3. Akbaş, M. ve Başkan, T., Suborbital Graphs for the Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Tr. J. Of Math., 20 (1996) 379-387.

4. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001) 647-652.

5. Anderson James W., Hyperbolic Geometry, Springer- Verlag, 2000.

6. Beşenk, M., Simge Devirleri ve Graflar, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2009.

7. Beşenk, M., Güler, B.Ö., Değer, A. ve Kesicioğlu, Y., Circuit lengths of graphs for the Picard group, Journal of Inequalities and Applications, (2013) 106.

8. Brunner, A. M., A Two-Generator Presentation for the Picard Group, Proc. Amer. Math. Soc., 115 (1992) 45-46.

9. Coxeter, H. S. M. ve Moser, W. O. J., Generators and Relations for Discrete Groups, Springer, (1972).

10. Değer, A. H., Beşenk, M. ve Güler, B. Ö., On Suborbital Graphs and Related Continued Fractions, Applied Mathematics and Computation, 218 (2011) 746-750.

11. Dixon, J. ve Mortimer, B., Permutation Groups, 163.cilt, Springer, (1996).

12. Fine, B., Fuchsian Subgroups of the Picard Group, Canad., J. Math., 28 (1976) 481-486.

13. Fine, B., Congruence Subgroups of the Picard Group, Can. J. Math., 32 (1979) 1474-1481.

14. Güler, B.Ö., $\Gamma_0(N)$ Kongrüans Alt Grubunun $PSL_2(\mathbb{R})$ deki Normalliyeninin Alt Yörüngesel Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.

15. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1989.

16. Ibrahimou, B. ve Yayenie, O., Convex standard fundamental domain for subgroups of Hecke groups, Bull. Aust. Math. Soc., 83, 1 (2011) 96-107.

17. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

18. Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160 (1991) 316-338.

19. Kader, S., Nec Grupların Simgeleri ve Graflar, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

20. Keskin, R., Suborbital Graphs for the Normalizer of $\Gamma_0(m)$, Europan Juornal of Combinatorics, 27, 2 (2006) 193-206.

21. Keskin, R. ve Demirturk, B., On Suborbital Graphs for the Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Electronic Journal of Combinatorics, 16, 1 (2009) R116.

22. Kleiner, I., The evolution of group theory: A brief survey, Mathematics Magazine, 59, 4 (1986) 195-215.

23. Kulkarni, Ravi S., An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group, Amer. J. Math., 6, 113 (1991) 1053-1133.

24. Legh, W. R., The Elements of The Theory of Algebraic Numbers, New York, (1918).

25. Magnus, W., Karrass, A. ve Solitar, D., Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations, Dover Publications, (2004).

26. Schoneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.

27. Singerman, D., Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups, Bull. London Math.Soc., 2 (1970) 319-323.

28. Ünal, H., Alt Yörüngesel Graflar ve Fibonacci Sayıları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2013.

29. Yayenie, O., Hyperbolic Convexity of a standart fundamental domain of a Hecke discrete groups, Temple University, PhD Thesis, 2003.

30. Yayenie, O., H-convex standard fundamental domain of a subgroup of a modular group, Ramanujan, 3, 16 (2008) 305-320.

31. Yayenie, O., Nonexistence of h-convex cuspidal standard fundamental domain, Bull. Korean Math. Soc., 5, 46 (2009) 823-833.

32. Yılmaz, N. ve Cangül, İ., The Normalizer Of The Modular Group In The Picard Group, Bulletin of the Institue of Mathematics Academia Sinica, (2000) 125-130.

7. EKLER

Ek 1. Yayınlar

MR1073672 Akbas, M.; Singerman, D. The normalizer of $\Gamma_0(N)$ in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Glasgow Math. J.* 32 (1990), no. 3, 317–327. (Reviewer: C. Maclachlan) 20H10

MR1196910 Akbas, M.; Singerman, D. Symmetries of modular surfaces. *Discrete groups and geometry (Birmingham, 1991),* 1–9, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 173, *Cambridge Univ. Press, Cambridge,* 1992. (Reviewer: Michael Kapovich) 20H10 (11F06 11G05 30F35)

MR1200251 Akbas, M.; Singerman, D. The signature of the normalizer of $\Gamma_0(N)$. *Groups, combinatorics & geometry (Durham, 1990),* 77–86, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 165, *Cambridge Univ. Press, Cambridge,* 1992. (Reviewer: C. Maclachlan) 20H10 (11F06)

MR1482778 Akbaş, M.; Başkan, T. Suborbital graphs for the normalizer of $\Gamma_0(N)$. *Turkish J. Math.* 20 (1996), no. 3, 379–387. (Reviewer: Peter J. Nicholls) 11F06 (20B99)

MR1853774 Akbas, M. On suborbital graphs for the modular group. *Bull. London Math. Soc.* 33 (2001), no. 6, 647–652. (Reviewer: Gary L. Walls) 05C25 (20H10)

MR2461336 Guler, Bahadir O.; Kader, Serkan; Besenk, Murat On suborbital graphs of the congruence subgroup $\Gamma_0(N)$. *Int. J. Comput. Math. Sci.* 2 (2008), no. 3, 153–156. 20H10

MR2718852 Beşenk, M.; Güler, B. Ö.; Değer, A. H.; Kader, S. Conditions to be a forest for normalizer. *Int. J. Math. Anal. (Ruse)* 4 (2010), no. 33-36, 1635–1643. 05C05 (05C20 11F06 20H05)

MR2799189 Guler, Bahadir Ozgur; Kader, Serkan Self-paired edges for the normalizer. *Algebras Groups Geom.* 27 (2010), no. 3, 369–376. 20H10

MR2894322 Kader, S.; Guler, B. O.; Deger, A. H. Suborbital graphs for a special subgroup of the normalizer of $\Gamma_0(m)$. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.* 34 (2010), no. 4, 305–312 (2011). 11F03

MR2943033 Güler, Bahadır Özgür; Kader, Serkan On the action of $\Gamma^0(N)$ on $\widehat{\mathbb{Q}}$. *Note Mat.* 30 (2010), no. 2, 141–148. (Reviewer: Nihal Yilmaz Ozgur) 20H05 (05C25)

MR2839187 Güler, B. Ö.; Beşenk, M.; Değer, A. H.; Kader, S. Elliptic elements and circuits in suborbital graphs. *Hacet. J. Math. Stat.* 40 (2011), no. 2, 203–210. 05C25 (05C20 11F06 20B25 20H05)

Ek 1'in devamı

MR2831301 Değer, Ali H.; Beşenk, Murat; Güler, Bahadır Ö. On suborbital graphs and related continued fractions. *Appl. Math. Comput.* 218 (2011), no. 3, 746–750. 05C25 (40A15)

MR2934058 Kader, Serkan; Güler, Bahadir Özgür On conjugacy of elliptic elements and circuits in suborbital graphs of congruence subgroups. *Kuwait J. Sci. Engrg.* 38 (2011), no. 2A, 43–53. (Reviewer: Jasbir Singh Chahal) 20H05 (20B07)

MR3043160 Beşenk, Murat; Güler, Bahadır Ö.; Değer, Ali H.; Kesicioğlu, Yavuz Circuit lengths of graphs for the Picard group. *J. Inequal. Appl.* **2013,** 2013:106, 8 pp. 20H10 (05C25)

MR3038579 Kesicioğlu, Yavuz; Akbaş, Mehmet; Beşenk, Murat Connectedness of a suborbital graph for congruence subgroups. *J. Inequal. Appl.* **2013,** 2013:117, 7 pp. (Reviewer: Jean Raimbault) 20H10 (05C05 05C20 20H05)

MR3110738 Akbaş, Mehmet; Kör, Tuncay; Kesicioğlu, Yavuz; Disconnectedness of the subgraph F^3 for the group Γ^3. *J. Inequal. Appl.* **2013,** 2013:283.

MR3119940 Kader, Serkan; Güler, Bahadır Özgür; On Suborbital Graphs for the Extended Modular Group $\widehat{\Gamma}$. *Graphs Combin.* 29 (2013), no. 6, 1813–1825.

ÖZGEÇMİŞ

Nazlı YAZICI, 1986 yılında Trabzon'da doğdu. İlköğrenimini 24 Şubat İlkokulunda, orta öğrenimini Cumhuriyet Ortaokulunda ve lise öğrenimini Trabzon Lisesinde tamamladı. 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu ve aynı yıl içerisinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde tezli yüksek lisansa başladı. Yabancı dili İngilizcedir.