KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARETO MÜDAHALELİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fuat YETİM

KASIM 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARETO MÜDAHALELİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Fuat YETİM

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04.11.2013
Tezin Savunma Tarihi : 29.11.2013

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Fuat YETİM tarafından hazırlanan

PARETO MÜDAHALELİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 12 / 11 / 2013 gün ve 1529 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. İhsan ÜNVER**	**…………………………………..**
Üye	**: Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK**	**…………………………………..**
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN**	**…………………………………..**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak yaptığım bu çalışmada "Pareto Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci" ele alınmış ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Bu araştırmanın ortaya çıkmasında bilgi ve deneyimleriyle beni yönlendirerek yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım, sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e teşekkür ederim.

Çalışmam süresince desteklerinden dolayı saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. İhsan ÜNVER'e, Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK'e ve Doç. Dr. Türkan Erbay DALKILIÇ'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Fuat YETİM
Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Pareto Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN'in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 04/11/2013

Fuat YETİM

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

PARETO MÜDAHALELİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİNİN ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Fuat YETİM

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN
2013, 65 Sayfa

Bu tezde, “Pareto Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi’’ ele alınmıştır. Ele alınan stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiş ve bazı genel şartlar altında bu sürecin ergodik olduğu gösterilmiştir. Bunun yanı sıra, sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik karakteristik fonksiyonu $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristik yardımı ile ifade edilmiştir. Ayrıca bundan yararlanılarak X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeler elde edilmiştir. Elde edilen asimptotik açılımın yardımı ile hesaplanan moment değerlerinin kesin değerlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için özel bir durum ele alınmış ve bu durum için Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak, ergodik momentler için değerler elde edilmiş ve asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, elde edilen asimptotik açılımların simulasyan sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir. Son olarak, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yenileme Süreci, Rasgele Yürüyüş Süreci, Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci, Sınır Fonksiyoneli, Wald Özdeşliği, Zayıf Yakınsama

Master Thesis

SUMMARY

EXAMINING A SEMI-MARKOVIAN RANDOM WALK WITH PARETO DISTRIBUTED INTERFERENCE OF CHANCE BY USING ASYMPTOTIC METHODS

Fuat YETİM

Karadeniz Technical University
Faculty of Arts and Science
Mathematics Department
Advisor: Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN
2013, 65 Pages

In this thesis ‘’Examining a semi-Markovian random walk with Pareto distributed interference of chance by using asymptotic methods’’ is considered. The stochastic process under consideration is constructed mathematically and, under some general conditions the ergodicity of the process is discussed. Besides the ergodic distribution function and, the ergodic characteristic function is expressed by using border functional $\mathbf{S}_{\mathbf{N(z)}}$. Furthermore by using them, the exact formulas for the first four stationary moments of the ergodic distirbution of the process X(t) is obtained. By using the obtained asymptotic expansion, to observe the adequateness of calculated moments to the exact values, a special case is considered and by using Monte Carlo simulation method some formulas is obtained for ergodic moments and they are compared with asymptotic results. As a result of comparison it is observed that the obtained asymptotic expansions are close enough to the simulation results. Finally the weak convergence theorem for the ergodic expansion of this process is proved.

Key Words: Renewal Process, Random Walk, Semi-Markovian Random Walk, Boundary Functional, Wald’s Identity, Weak Convergence

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER

$x < y$	: x küçüktür y
$x > y$	: x büyüktür y
$x \leq y$	: x küçüktür veya eşittir y
$x \geq y$	: x büyüktür veya eşittir y
$x = y$	: x eşittir y
$x \neq y$	: x farklıdır y
$x \in R$	: x, R' nin elemanıdır.
$x \notin R$	: x, R' nin elemanı değildir.
$\exists$	: en az bir
∞	: sonsuz
$x < \infty$	: x sonludur
(x, y)	: açık aralık
$[x, y)$	: sağdan açık soldan kapalı
$(x,y]$	: soldan açık sağdan kapalı
$[x, y]$	: kapalı aralık
$\lvert x \rvert$	: x sayısının mutlak değeri
$X \subseteq Y$	: Y kümesi X kümesini içerir veya X ve Y kümeleri eşittir.
$X \supseteq Y$	: X kümesi Y kümesini içerir veya X ve Y kümeleri eşittir
min X	: X kümesinin minimumu
max X	: X kümesinin maksimumu
inf X	: X kümesinin infumumu
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayılarının toplamı
$P\{A\}$	: A olayının olasılığı
$E(\xi)$	: ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$E(\xi^n)$	: ξ rasgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$Var(\xi)$	: ξ rasgele değişkenin varyansı
$\lim_{x \to \infty} f(x)$	: x sonsuzluğa giderken f(x) fonksiyonunun limiti

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Stokastik finans, iktisat, matematiksel biyoloji, mühendislik, kuyruk, stok kontrol teorisi ve matematiksel sigortanın birçok problemini incelemek için rastgele yürüyüş süreçleri veya bu süreçlerin çeşitli modifikasyonları geniş bir şekilde kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, A.N. Kolmogorov tarafından 1960-1970'li yıllarda tanımlanmış, literatürde "Kesikli müdahaleli yarı–Markov süreçler" olarak bilinen geniş bir stokastik süreçler ailesinin önemli alt sınıfı ele alınmış ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Literatürde bu konuda önemli teorik sonuçlar bulunmaktadır [5, 7-8, 10-11, 13, 16, 18, 20, 22, 25, 31, 43, 51-52, 54-55, 60-61]. Bu çalışmaların sonuçları teorik acıdan önemli olsalar da uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek özellikte ve uygulanabilir matematiksel yapıda değillerdir. Bu yüzden 1980'li yıllardan sonra daha dar ama önemli sınıflar ele alınmaya başlanmıştır. Bir veya iki bariyerli yenileme süreçleri ve rastgele yürüyüş süreçleri bu sınıfa ait örneklerdir. Fakat bu güne kadar bu süreçler olasılık ve sayısal karakteristiklerinin karmaşık bir yapıya sahip olmasından dolayı uygulamanın her ihtiyacına cevap verebilecek düzeyde değildirler. Bu sorunu çözmek için 1990'lı yıllardan sonra iki yönde araştırmalara ağırlık verilmiştir. Bir taraftan bilgisayarla benzetim yöntemleri kullanılarak bilgisayar yardımıyla nümerik sonuçlar alınmakta; diğer taraftan ise integral hesapları için asimptotik yöntemlere başvurularak yaklaşık, fakat yeterince sade ifadeler elde edilmektedir. Bundan dolayı son yıllarda asimptotik yöntemlerin uygulanmasına ait önemli çalışmalar ortaya konulmuştur [7, 11, 51]. Ayrıca rastgele yürüyüş süreçleri kuramında önemli bir rolü olan harmonik yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde edilmiştir [7]. Buna ilaveten Gauss rastgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri içinde üç terimli asimptotik açılım elde edilmiştir [51]. Elde edilen bu sonuçlar ne kadar önemli olsalar da, onlar sadece sınır fonksiyonellerinin karakteristikleri için bazı önemli sonuçları ortaya koymaktadırlar. Ancak birçok pratik problemin çözümü için sınır fonksiyonellerinin yanı sıra, sürecin kendi olasılık ve sayısal karakteristiklerinin de bilinmesi büyük önem taşımaktadır.

Bu çalışmanın temel amacı, asimptotik yöntemler kullanılarak, Pareto müdahaleli rastgele yürüyüş sürecinin olasılık ve sayısal karakteristikleri için pratik öneme sahip olan yaklaşık ifadeler elde etmektir.

1.2. Literatür Araştırmaları

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir sınıfını oluşturan "Pareto Müdahaleli Yarı–Markov Rastgele Yürüyüş Süreci" ele alınacaktır. Bilindiği gibi yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri yarı-Markov süreçlerinin özel halidir. Yarı-Markov süreçleri ile ilgili problemler ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir [13-16, 22, 45, 65].

Hem pratik hem de teorik bakımdan yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve bu süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Yarı-Markov sınıfına ait olan yenileme süreçleri için ise esas ergodik teorem 1975 yılında Smith tarafından ispatlanmıştır [68, 69].

Sınır-değer problemlerinin incelenmesi önemli olmasına karşın ele alınan süreçlerin kendi karakteristiklerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Ayrıca özel bir bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri hakkında çalışmalarda literatürde mevcuttur. Bu çalışmalarda özel bir bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleriyle ilgili çeşitli problemler ele alınmış ve çözülmüştür [26, 38-41, 43, 53, 72]. Borç alma stratejisi olarak yorumlanan ζ_1 rastgele değişkeninin $\lambda>0$ parametreli Üstel, ikinci ve üçüncü mertebeden Erlang ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımlarına sahip olması durumlarında sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin formüller ve asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, ζ_1 rastgele değişkenini $\lambda>0$ parametreli Üstel dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsaklık teoremi ispat edilmiştir [27]. Normal müdahaleli normal yürüyüş süreci matematiksel olarak tanımlanmış ve normal müdahaleli rastgele yürüyüş sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeler ve üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca sürecin ergodik dağılım için zayıf yakınsama teoremini ispat edilmiştir [53]. Gamma müdahaleli süreçler incelenirken ortaya çıkan integraller genellikle yenileme fonksiyonunun Laplace dönüşümü yardımıyla ifade edilebilirler. Normal müdahaleli süreçlerin incelenmesinde ise literatürde yer alan Mellin Teoremi yardımıyla yapılır; fakat Pareto dağılımlı müdahalelerde elverişli matematiksel özellikler ortadan kalkmış olacaktır. Bundan dolayı

Pareto müdahaleli süreçlerin incelenmesi hem bilimsel hem de pratik öneme sahiptir. Bu nedenle, bu çalışmada, Pareto müdahaleli yarı-Markov süreçler ele alınmış bu sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için analitik ve asimptotik formüller elde edilmiştir. Bunlardan yararlanarak sürecin ergodik dağılımını çarpıklık ve basıklık katsayıları için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca Monte-Carlo simulasyon yöntemi kullanarak elde edilen yaklaşık formüllerin doğruluğu test edilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Pareto Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi

2.1.1. Fiziksel Model

Bu çalışmada, ele alınan stokastik süreci oluşturmadan önce aşağıdaki gerçek modeller incelenecektir [27].

Model 1. Merkez bankasındaki para rezervlerinin optimal yönetilmesi: Merkez bankasındaki para rezervlerini belirli aralıklarla artırarak kritik eşiğe inmesini önlemek ve dolayısıyla dünya ve ülkemizde olacak olağanüstü durumlarda Merkez bankasının ve ona bağlı olan kuruluşların zor duruma düşmesini önlemek için bu çalışmada elde edilecek sonuçların uygulanması mümkün olacaktır. Ayrıca bu sonuçlar göz önünde bulundurularak Merkez bankası, hazinede bulunan para stoklarının işletilmesi ve en uygun şekilde dağıtılmasını sağlamak için optimal ölçütler çıkarılabilecektir.

Model 2. Su barajlarındaki stok miktarının optimal kullanımı: Barajdaki su birikimi, barajı besleyen kaynaklardan elde edilen miktara bağlı olarak değişir. Bu değişimde bölgeye yağan kar ve yağmurlar etkilidir. Buna karşın, sulama, buharlaşma, yanlara sızma ve çeşitli amaçlar için su sıkıntısı olan bölgelere aktarılan su miktarı barajlardaki su seviyesinin azalmasına neden olan başlıca etmenlerdir. Bu faktörlerin hemen hemen hepsi rastgele zamanlarda ve miktarlarda olduğundan dolayı barajdaki su seviyesinin her zaman daha önce belirlenen alt ve üst eşikler arasında gerçekleşmesi beklenmemektedir. Bu nedenle, su miktarının arzu edilen eşikler arasında kalmasını sağlamak için stok miktarı üst eşiğe ulaştığında baraj kanallarının açılması, alt eşiğe yaklaştığında ise sahip olunan stok miktarının tasarruflu kullanılması ya da ek kaynak arama yoluna gitme gibi yöntemlere başvurulabilmektedir. Bu çalışma kapsamında sözü edilen önlemler ve sakıncalı durumların çözülmesine bilimsel katkılar sağlanabilecektir.

Model 3. Sigorta şirketlerinin çalışması: Sigorta şirketlerinin anaparası müşterilerinden alınan primlerle artar, rastgele anlarda gerçekleşen kazalar sonucu oluşan zarardan dolayı müşteriye ödenen miktarlarla da azalır. Şansa bağlı olarak girdiler çıktılardan fazla ise şirketlerde işler iyi gider ve para kazanırlar. Şansa bağlı olduğundan dolayı çıktıların fazla olma durumunda ise zarar ederler. Bu durumla karşılaşmak istemeyen sigorta şirketleri zamanında ek önlemler almak zorunda kalırlar. Bu model Şekil 1'de grafiksel olarak verilmiştir.

Bu çalışmayla, sigorta şirketlerindeki ana paranın optimal şekilde (şansa bırakılmaksızın) yönlendirilmesinin matematiksel algoritmasını da geliştirmiş olacaktır.

Yukarıda belirtilen gerçek modeller ifade edilecek olursa stokastik süreç matematiksel olarak aşağıdaki gibi kurulabilir.

2.1.2. X(t) Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\zeta_n\}, n \geq 1$, (Ω, F, P) aynı olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız rastgele değişkenler dizisi olsunlar. Ayrıca, her bir dizinin elemanları bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun. ξ_1 rastgele değişkeni sadece pozitif değerler, η_1 hem pozitif hem de negatif değerler, ζ_1 ise $(s, +\infty)$ aralığında değerler alabilsin. Yani $P\{\xi_1>0\}=1$; $P\{\eta_1>0\}>0$; $P\{\eta_1<0\}>0$ ve $P\{\zeta_1 \in (s, +\infty)\}=1$ dir. Burada s sabit değer olup, $0<s<\infty$ dur.

ξ_1, η_1, ζ_1 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarının bilindiği varsayılsın ve sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilsin.

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\};\ t \in (0, +\infty)$$

$$F(x) = P\{\eta_1 \leq x\};\ x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\pi(v) = P\{\zeta_1 \leq v\};\ v \in (s, +\infty)$$

$\{T_n\}$ yenileme dizisi ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş süreci aşağıdaki gibi inşa edilebilir:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ , Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\ , n \geq 1$$

burada, $T_0 = Y_0 = 0$ dır.

Tam değerler alan $\{N_n\}$, $n \geq 0$ rastgele değişken dizisi ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$N_1 = N(z) = N_z = \inf\{k \geq 1: z + Y_k < s\}$$

burada, $N_0 = 0$ dır.

$$N_{n+1} = \inf\left\{k \geq N_n + 1: \zeta_n + Y_k - Y_{N_n} < s\right\}, n \geq 1,$$

burada, $\inf(\emptyset) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir.

Ayrıca, $\tau_n = T_{N_n}, n \geq 1$ dir. Burada, $\tau_0 = 0$ dır ve her $t > 0$ için, $v(t) = \max\{n \geq 0: T_n \leq t\}$ olsun. Bu takdirde, ele alınan stokastik süreç aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

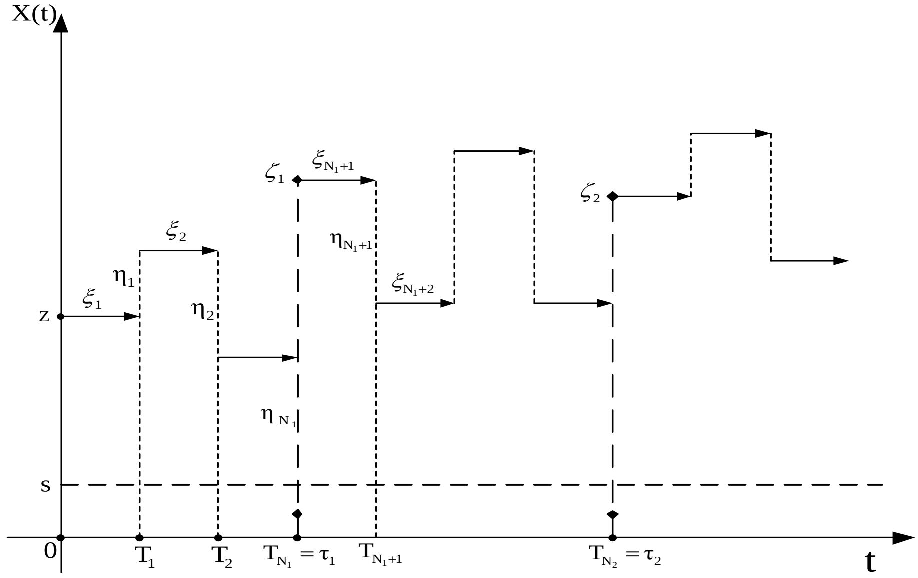
Her $t \in [\tau_n, \tau_{n+1}),\ n \geq 0$, için,

$$X(t) = \max\{\, 0, \zeta_n + Y_{v(t)} - Y_{N_s}\}$$

burada,

$$\zeta_0 = z \in (s, +\infty) \text{ ve } Y_{v(\tau_n+0)} = Y_{N_n} \text{ dir.}$$

X(t) süreci kesikli şans karışımlı Yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecidir.



Şekil 1. Pareto müdahaleli rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Böylece kesikli şans karışımlı X(t) süreci matematiksel olarak ifade edilmiş oldu.

2.1.3. X(t) Sürecinin Ergodikliği ve Ergodik Dağılım Fonksiyonu ile Karakteristik Fonksiyonu İçin Kesin İfadeler

Bu bölümün temel amacı X(t) sürecinin ergodik dağılımının momentlerini asimptotik yöntemlerle incelemektir. Bu maksatla, öncelikle ele alınan X(t) sürecinin hangi koşullar altında ergodik olduğu incelenmelidir.

Teorem 1: $\{\xi_n\},\{\eta_n\},\{\zeta_n\};\ n = 1,2,3,\ldots$ rastgele değişkenler dizileri aşağıdaki ek koşulları sağlasınlar:

1. $0 < E(\xi_1) < \infty$,
2. $E(\eta_1) > 0$,
3. $E(\eta_1^2) < +\infty$,
4. η_1 rastgele değişkeni aritmetik olmayan bir rastgele değişken,
5. ζ_1 rastgele değişkeni (α, λ) parametreli Pareto dağılımına sahip olsun.

Bu takdirde, X(t) süreci ergodiktir.

İspat: Ele alınan X(t) süreci literatürde "Kesikli Şans Karışımlı Yarı-Markov Süreçleri" diye adlandırılan genel bir stokastik süreçler sınıfına aittir. Bu sınıf için

Smith'in "anahtar yenileme teoremi" tipli genel ergodik teoremi literatürde bilinmektedir [22, 64].

Fakat genel durumda, bu teoremin şartları ve ifadesi oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu kısımda, sürecin özelliklerinden yararlanılarak, yeterince zayıf şartlar altında süreç için ergodik teorem ispatlanmaya çalışılacaktır. Ele alınan süreç için ergodik teoremini ispatlamak Teorem 1'in koşulları sağlandığında, yukarıda adı geçen genel ergodik teoremin şartlarının da sağlandığı anlamına gelmektedir. Bu nedenle, X(t) sürecinin ergodik olabilmesi için aşağıdaki iki varsayımın sağlanması gerekmektedir.

1. Varsayım: X(t) sürecinin içinde gömülü ergodik bir Markov zinciri mevcut olmalıdır.

Ele alınan durumda, bu zinciri kurmak için öncelikle, 1 olasılığı ile, monoton artan pozitif değerli bir rastgele değişkenler dizisi belirlemek gerekmektedir. Bu amaçla, yukarıda tanımlanan $\{\tau_n\}$, n=1,2,3… rastgele değişkenleri kullanılabilir. Çünkü tanımı gereği, 1 olasılığı ile $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \tau_{n+1} < \cdots < \infty$ dır. τ_n'ler X(t) sürecinin kontrol seviyesine düşme anlarıdır ve tanımları gereği Markov momentleridir. X(t) sürecinin bu noktalarda ki değerleri $\aleph_n$ ile gösterilsin, yani $\aleph_n \equiv X(\tau_n + 0)$ olsun. X(t) sürecinin matematiksel kuruluşuna göre, 1 olasılığı ile, $\aleph_n \equiv \zeta_n$ dir. $\left\{\zeta_n\right\}$, n=1,2,3… bağımsız rastgele değişkenler dizisi olduğu için $\{\aleph_n\}$ dizisi bir Markov zinciri oluşturmuş olur. Ayrıca ζ_n rastgele değişkenleri (α, λ) parametreli Pareto dağılımına sahip olduklarına göre $\{\aleph_n\}$ zinciri $\pi(z) = P\left\{\zeta_1 < z\right\}$ durağan dağılıma sahip bir ergodik zincirdir ve bu zincirin durağan dağılımı $\pi(z) = 1 - \left(\frac{\lambda}{z}\right)^{\alpha}, z \in [\lambda, +\infty)$ dır. Dolayısıyla Teorem 1'in koşulları altında genel ergodik teoremin 1. Varsayım'ı sağlanmıştır.

2.Varsayım: $\{\tau_n\}, n = 1,2,3, \dots$ Markov momentleri arasında geçen sürenin beklenen değeri sonlu olmalıdır, yani, her $n = 1,2,3, \dots$ için

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty \tag{1}$$

olmalıdır. $\tau_n - \tau_{n-1}, n = 2,3, \dots$ rastgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduklarından, aşağıdaki (2) koşulunun sağlanması için,

$$E[\tau_1(z)] < \infty \text{ ve } E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^{\infty} E[\tau_1(z)] d\pi(z) < \infty, \ n = 2,3, \dots \tag{2}$$

integralinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. Wald özdeşliğine göre,

$$E[\tau_1(z)] = E\left(\sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i\right) = E(\xi_1)E[N_1(z)] \tag{3}$$

olur. Dolayısıyla,

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) = E(\xi_1)\int_0^\infty E[N_1(z)]d\pi(z) \tag{4}$$

olur. Teorem 1'in şartlarına göre $0 < E(\xi_1) < \infty$ dur. Bu durumda (2) koşulunun sağlanması için,

$$E[N_1(z)] < \infty \text{ ve } \int_0^\infty E[N_1(z)]d\pi(z) < \infty \tag{5}$$

olmalıdır. Bu problemi çözmek için $\{S_n\}$, $n \geq 0$, rastgele yürüyüş sürecinin basamak anları (v_i^+) ve basamak yükseklikleri (χ_i^+) aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$v_1^+ = \min\{n \geq 1: S_n > 0\};\ \chi_1^+ = S_{v_1^+} = \sum_{i=1}^{v_1^+} \eta_i$$

$$v_{m+1}^+ = \min\{n \geq 1: S_{v_m^+ + n} > \chi_{m+1}^+\};\ \chi_{m+1}^+ = S_{v_{m+1}}^+ = \sum_{i=1}^{v_{m+1}^+} \eta_i;\ m = 1,2,\dots$$

v_n^+ rastgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve v_1^+ ile aynı dağılıma sahip; χ_n^+ rastgele değişkenlerin de bağımsız ve χ_1^+ ile aynı dağılıma sahip oldukları bilinmektedir [20]. Bu durumda, E.Dynkin prensibine göre,

$$N_1(z) \equiv \sum_{i=1}^{H(z)} v_i^+ \text{ ve } S_{N(z)} = \sum_{i=1}^{H(z)} \chi_i^+ \tag{6}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada;

$$H(z) \equiv \min\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ > z\}$$

dır. Wald özdeşliğine göre,

$$E[N_1(z)] = E[H(z)]E(v_i^+) \tag{7}$$

olur. $E[H(z)]$ fonksiyonu, $\{\chi_n^+\}$, $n \geq 1$ basamak yüksekliklerinin ürettiği bir yenileme fonksiyonudur. $E(\eta_1) > 0$ olduğu için $E(v_i^+) < \infty$ olur. Dolayısıyla $E[N_1(z)]$ in sonlu olması için $E[H(z)] \equiv U_+(z)$ yenileme fonksiyonu sonlu olmalıdır. Bu ise her sonlu z için zaten doğrudur, yani, her $0 < z < +\infty$ için $U_+(z) < +\infty$ dur [20].

Amaç $\int_0^\infty U_+(z)d\pi(z) < \infty$ olduğunu ispatlamaktır. Fakat her z için $U_+(z)$' in sonlu olması burada yeterli değildir. $\pi(z) = 1 - \left(\frac{\lambda}{z}\right)^\alpha$, $z \in [\lambda, +\infty)$, $\alpha > 1$ olduğuna göre;

$$E\left[U_+\left(\zeta_1\right)\right] = \int_0^\infty U_+(z)d\pi(z) = \int_\lambda^\infty U_+(z)\alpha\lambda^\alpha \frac{1}{z^{\alpha+1}}dz \tag{8}$$

olur. $E(\eta_1^2) < +\infty$ iken $\mu_2 \equiv E(\chi_1^2) < +\infty$ olduğundan, kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre [20], $z \to \infty$ iken,

$$U_+(z) = \frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1) \tag{9}$$

notasyon kısaltmak için $g(z) = U_+(z) - \frac{z}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$ olsun.

Kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre, $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ dır [20]. Dolayısıyla, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $b \equiv b(\varepsilon)$ sayısı bulmak mümkündür ki, $0 < b(\varepsilon) + \infty$ olmak üzere her $z \geq b(\varepsilon)$ için $0 \leq g(z) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. (8) ifadesindeki integral aşağıdaki gibi iki kısma ayrılabilir.

$$E\left[U_+\left(\zeta_1\right)\right] = \int_\lambda^{b(\varepsilon)} U_+(z)\alpha\lambda^\alpha \frac{1}{z^{\alpha+1}}dz + \int_{b(\varepsilon)}^\infty U_+(z)\alpha\lambda^\alpha \frac{1}{z^{\alpha+1}} \equiv J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon) \tag{10}$$

$U_+(z)$ monoton azalmayan bir fonksiyon olduğundan $0 \leq z \leq b(\varepsilon)$ için $U_+(z) \leq U_+\big(b(\varepsilon)\big) < +\infty$ yazılabilir. Bunun sonucunda;

$$J_1(\varepsilon) = \int_\lambda^{b(\varepsilon)} \alpha\lambda^\alpha U_+(z)\frac{1}{z^{\alpha+1}}dz \leq U_+\big(b(\varepsilon)\big)\int_\lambda^{b(\varepsilon)} \alpha\lambda^\alpha z^{-(\alpha+1)}dz \tag{11}$$

burada $\int_{\lambda}^{b(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)}\, dz < \infty$ sonludur. Çünkü,

$$\int_{\lambda}^{b\,(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)}\, dz = \alpha\lambda^{\alpha} \int_{\lambda}^{b(\varepsilon)} z^{-(\alpha+1)}\, dz = 1 - \left(\frac{\lambda}{b(\varepsilon)}\right)^{\alpha}$$

dır. $\lambda < b(\varepsilon)$ olduğundan dolayı

$$\int_{\lambda}^{b(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)}\, dz = 1 - \left(\frac{\lambda}{b(\varepsilon)}\right)^{\alpha} \equiv M(\varepsilon) > 0$$

$$\int_{\lambda}^{b(\varepsilon)} \alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)}\, dz < \infty \tag{12}$$

olur. (12) eşitsizliği (11) eşitsizliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (13) ifadesi elde edilir.

$$J_1(\varepsilon) = \int_{\lambda}^{b(\varepsilon)} U_+\,(z)\alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)} dz \leq M(\varepsilon) U_+\big(b(\varepsilon)\big) < \infty \tag{13}$$

(10) formülündeki ifadenin ikinci kısmındaki ikinci integralin sonlu olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$J_2(\varepsilon) = \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} U_+\,(z)\alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)} dz = \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \left[\frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + g(z)\right] \alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)}$$

$$= \frac{1}{\mu_1} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \left[z\alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)}\right] dz + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} \alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)} dz + \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} g(z)\alpha\lambda^{\alpha} z^{-(\alpha+1)}\, dz$$

$$J_2(\varepsilon) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{\mu_1} \int_{b(\varepsilon)}^{\infty} z^{-\alpha}\, dz + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{\mu_1 (b(\varepsilon))^{\alpha+1}} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

Burada olasılık yoğunluk fonksiyonunun özelliği kullanılmıştır. $b(\varepsilon)$ sayısının tanımı gereği;

$$U_+\big(b(\varepsilon)\big) \leq \frac{b(\varepsilon)}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

dir. (13) eşitsizliği (15) eşitsizliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\int_{\lambda}^{b(\varepsilon)} U_{+}(z)\alpha\lambda^{\alpha}z^{-(\alpha+1)}dz \leq \frac{M(\varepsilon)b(\varepsilon)}{\mu_1} + \frac{M(\varepsilon)\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{M(\varepsilon)\varepsilon}{2} \tag{16}$$

ifadesi elde edilir. (16) eşitsizliği (14) eşitliğinde göz önünde bulundurulursa,

$$\int_{\lambda}^{\infty} U_{+}(z)\alpha\lambda^{\alpha}z^{-(\alpha+1)}dz \leq \frac{M(\varepsilon)b(\varepsilon)}{\mu_1} + \frac{M(\varepsilon)\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{M(\varepsilon)\varepsilon}{2} + \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{\mu_1\left(b(\varepsilon)\right)^{\alpha+1}} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan,

$$\int_{\lambda}^{\infty} U_{+}(z)\alpha\lambda^{\alpha}z^{-(\alpha+1)}dz < \infty \tag{17}$$

dur. (17) eşitsizliği (8) eşitliğinde dikkate alınırsa;

$$\int_{0}^{\infty} U_{+}(z)d\pi(z) < \infty \tag{18}$$

eşitsizliği elde edilir. (18) ve (7) eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa;

$$E\left(N_1(z)\right) < \infty \text{ ve } \int_0^{\infty} E\left(N_1(z)\right) d\pi(z) < \infty$$

olur. Dolayısıyla $E\left(\tau_1(z)\right) < \infty$ ve $E(\tau_n - \tau_{n-1}) \equiv \int_0^{\infty} E\left(\tau_1(z)\right) d\pi(z) < \infty$, $n = 2,3,\ldots$ olduğu ispatlanmış olur. Bu ise 2. Varsayım'ın sağlandığını gösterir. Bu durumda genel ergodik teoreme göre ele alınan X(t) süreci, Teorem 1'in koşulları altında ergodiktir. Bu da Teorem 1'in ispatını tamamlar.

Teorem 1'in koşulları altında X(t) sürecinin zaman ortalamalarının durum ortalamasına yakınsadığı aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 2. Teorem 1'in koşulları sağlandığında her bir sınırlı ölçülebilir f(x) fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik, 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t f(X(u))\,du = \frac{1}{E(N_1(\zeta_1))}\int_0^{\infty} f(x)d_x\left(E(A(x,\zeta_1))\right)$$

burada,

$$E\left(N_1\left(\zeta_1\right)\right)=\int_0^\infty E\big(N_1(z)\big)\,d\pi(z)\,;$$

$$E\left(A\left(x,\zeta_1\right)\right)=\int_0^\infty A(x,z)d\pi(z)$$

$$A(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x,z);\, a_n(x,z)=P\{z-S_i>0;\, i=\overline{1,n};\, z-S_n\le x\}$$

dir.

İspat: Genel ergodik teoremin şartları sağlandığında, her bir sınırlı ve ölçülebilir f(x) fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik, 1 olasılığı ile sağlanır [22]:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f\big(X(u)\big)\,du=S_f$$

$$\equiv\frac{1}{E\left(\tau_1\left(\zeta_1\right)\right)}\int_{z=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} f(x)\,P_z\{\tau_1>t;X(t)\in dx\}dtd\pi(z). \qquad (19)$$

burada;

$$E\left(\tau_1\left(\zeta_1\right)\right)=E\left(\sum_{i=1}^{N_1\left(\zeta_1\right)}\xi_i\right)=E\left(\xi_1\right)EN_1\left(\zeta_1\right);$$

$$E\left(N_1\left(\zeta_1\right)\right)\equiv\int_0^\infty E(N_1(z))d\pi(z)$$

dır. $G(t,x,z)\equiv P_z\{\tau_1>t;X(t)\le x\}$ olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$G(t,x,z)\equiv P_z\{\tau_1>t;X(t)\le x\}=P\left\{\sum_{i=1}^{N_1\left(\zeta_1\right)}\xi_i>t;X(t)\le\frac{x}{\zeta_1}=z\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{N_1(z)}\xi_i>t;X(t)\le x\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{v(t)=n;T_{N_1(z)}>t;X(t)\le x\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{T_n\le t<T_{n+1};T_{N_1(z)}>t;X(t)\le x\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{T_n\le t<T_{n+1};N_1(z)>n;\ T_{N_1(z)}>t;\ X(t)\le x\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{T_n\le t<T_{n+1};z-S_i>0,i=\overline{1,n-1};\ z-S_n\ \le x\right\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{T_n\le t<T_{n+1}\}P\left\{z-S_i>0,i=\overline{1,n-1};\ z-S_n\ \le x\right\} \qquad (20)$$

Notasyon kısalığı için,

$$a_n(x,z) \equiv P\{z - S_i > 0, i = \overline{1, n-1};\ z - S_n \le x\}$$

olsun. Bu taktirde,

$$G(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}\} a_n(x,z) \tag{21}$$

olur. (21) eşitliğinin her iki tarafında t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\widetilde{G}(\lambda,x,y) = \frac{1-\Psi(\lambda)}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \big(\Psi(\lambda)\big)^n a_n\,(x,z) \tag{22}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\widetilde{G}(\lambda,x,y)$ ile $G(t,x,z)$ fonksiyonunun t parametresine göre Laplace dönüşümü gösterilmiştir.

$$\widetilde{G}(\lambda,x,y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} G(t,x,z)\,dt;$$
$$\Psi(\lambda) \equiv E\left(e^{-\lambda \xi_1}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dF_{\xi}(t)(\lambda > 0)$$

dir. (22) eşitliğinin her iki tarafında $\lambda \to 0$ iken limite geçilirse,

$$\widetilde{G}(0,x,y) = \int_0^{\infty} G(t,x,z)dt = E(\xi_1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z)$$

olur. Notasyon kısalığı için, $A(x,y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z)$ olsun. Bu takdirde,

$$\widetilde{G}(0,x,y) = \int_0^{\infty} G(t,x,z)dt = E(\xi_1)\,A(x,y) \tag{23}$$

elde edilir. (23) eşitliğinin her tarafı $\pi(z)$ dağılımına göre ortalanırsa,

$$\int_0^{\infty} \widetilde{G}(0,x,y)d\pi(z) = E\big(\xi_1\big) \int_0^{\infty} A(x,z)\,d\pi(z)$$

şeklinde bulunur. Burada $\int_0^{\infty} A(x,z)d\pi(z) = E\left(A\left(x, \zeta_1\right)\right)$ olduğu dikkate alınırsa;

$$\int_0^\infty \int_0^\infty G(t,x,z)dtd\pi(z) = E(\xi_1)\, E\left(A\left(x, \zeta_1\right)\right) \tag{24}$$

olduğu görülür. (24) eşitliği (19) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$S_f \equiv \frac{1}{E(\xi_1)EN_1\left(\zeta_1\right)} \int_0^\infty f(x)E(\xi_1)d_x\, E\left(A\left(x, \zeta_1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{E\left(N_1\left(\zeta_1\right)\right)} \int_0^\infty f(x)d_x E\left(A\left(x, \zeta_1\right)\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu ise Teorem 2'nin ispatını tamamlar.

Teoremin 2'den birçok değerli sonuçlar elde etmek mümkündür. Bu sonuçlardan ikisi aşağıda verilmiştir.

Sonuç 1: X(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $\left(\mathcal{Q}_x(x)\right)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\mathcal{Q}_x(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\} = \frac{E\left(A\left(x, \zeta_1\right)\right)}{EN_1\left(\zeta_1\right)} \tag{25}$$

İspat: Teorem 2'de f(x) fonksiyonun yerine gösterge (indikatör) fonksiyonu yazılırsa, (25) eşitliği elde edilir.

Sonuç 2: X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $\left(\varphi_x(\theta)\right)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\varphi_x(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(\exp\left(i\theta X(t)\right)\right) = \frac{1}{E\left(N_1\left(\zeta_1\right)\right)} \int_0^\infty e^{i\theta x}\, d_x E\left(A\left(x, \zeta_1\right)\right) \tag{26}$$

İspat: Teorem 2'de f(x) fonksiyonunun yerine, sırasıyla cosθx ve sinθx fonksiyonlarını yazarak ve exp(iθx)=cosθx+isinθx Euler eşitliğini göz önünde bulundurarak, (26) eşitliği elde edilir.

Sonuç 1 ve 2’ den de görüldüğü gibi, X(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $\mathcal{Q}_x(x)$’i ve karakteristik fonksiyonunu $\varphi_x(\theta)$’yi hesaplamak için A(x,z) fonksiyonunu bilmek gerekiyor. Fakat A(x,z) fonksiyonu en basit durumlarda bile çok zor hesaplanabilen bir fonksiyondur. Bu nedenle $\mathcal{Q}_x(x)$ ve $\varphi_x(\theta)$ için alternatif gösterimlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu zorluğu aradan kaldırmak için rastgele yürüyüş sürecinin temel özdeşliğinden [20] ve Sonuç 2’den yararlanarak, $\varphi_x(\theta)$ için aşağıdaki alternatif gösterimi ortaya koymak mümkündür.

Sonuç 3: X(t) sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_x(\theta)$ karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rastgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_x(\theta) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(\exp\left(i\theta X(t)\right)\right) = \frac{1}{E\left(N_1\left(\zeta_1\right)\right)} \int_0^{\infty} e^{i\theta x} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)-1}{\varphi_\eta(-\theta)-1} d\pi(z) \tag{27}$$

Burada $\varphi_\eta(-\theta) = E(\exp(-i\theta\eta_1))$; $\varphi_{S_{N(z)}}(-\theta)E\left(\exp\left(-i\theta\varphi_{N(z)}\right)\right)$; $\theta \in R/\{0\}$ dır.

İspat: Rastgele yürüyüş süreci için temel özdeşliği [20], Sonuç 2’de yerine yazılıp ve gerekli hesaplamalar yapılırsa, (27) eşitliği elde edilir.

Sonuç 3’de $\varphi_x(\theta)$ karakteristik fonksiyonunun, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin uygun karakteristiği ile ifade edilmesinin temel nedeni, literatürde sınır fonksiyoneli ile bağlı birçok değerli sonuçların mevcut olmasıdır [15, 20, 58]. (25) eşitliğinden yola çıkılarak, X(t) sürecinin momentlerinin asimptotik davranışları incelenecektir. Bu amaç için önce X(t) sürecinin ergodik dağılımının momentleri için kesin ifadeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

2.1.4. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti İçin Kesin İfadeler.

X(t) sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_x(\theta)$ karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu ile (27) formülündeki gibi ifade edilmişti. Bu formülden yararlanarak, bu bölümde X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile ifade edilecektir. Bu amaca uygun notasyonlar aşağıdaki gibi verilebilir.

$$m_k = E(\eta_1^k), M_k(z) = E(S_{N(z)}^k),\; m_{k1} = \frac{m_k}{km_1}; M_{k1}(z) = \frac{M_k(z)}{M_1(z)}; k = \overline{1,5}$$

$$E\left(\zeta_1^n M_K\left(\zeta_1\right)\right) = \alpha\lambda^\alpha \int_0^\infty x^{-(\alpha+n-1)} M_k(x)dx,\; n = \overline{0,4}$$

$$\overline{X}(t) = X(t) - s$$

$$E(X^k) = \lim_{t\to\infty} E\left((X(t))^k\right), k = 1,2,3,4.$$

Bu notasyonlar göz önünde bulundurularak, sırasıyla aşağıdaki teoremler verilir.

Teorem 3. Teorem 1'in koşullarına ilaveten $E(|\eta_1|^3) < \infty$ olduğunda X(t) sürecinin ergodik dağılımının 1. ve 2. momentleri sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\left\{E\left(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\right) - \frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))\right\} + A_1 \quad (28)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)}\left\{E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$\left. +2A_1\left[E\,\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right\} - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]\Bigg\} + A_2 \quad (29)$$

burada;

$$A_1 = \frac{m_{21}}{2}; \quad A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$$

dır.

Teorem 4. Teorem 1'in koşullarına ilaveten $E(|\eta_1|^5) < \infty$ olduğunda X(t) sürecinin ergodik dağılımının 3. ve 4. momentleri sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X^3) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\left\{E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{3}{2}E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$-\frac{1}{4}E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right) + A_1\left[3E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - 3E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+3A_2\left[E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]\Bigg\} + 3A_3 \tag{30}$$

$$E(X^4) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\Bigg\{E\left(\zeta_1^4 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - 2E\left(\zeta_1^3 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + 2E\left(\zeta_1^2 M_3\left(\zeta_1\right)\right)$$

$$-E\left(\zeta_1 M_4\left(\zeta_1\right)\right) + \frac{1}{5}E\left(M_5\left(\zeta_1\right)\right)$$

$$+2A_1\left[2E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - 3E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + 2E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right)\right] + 6A_2\left[E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+6A_3\left[2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]\Bigg\} + 3A_4 \tag{31}$$

burada;

$$A_3 = \frac{m_{41}}{12} - \frac{m_{31}m_{21}}{3} + \frac{m_{21}^3}{4},$$

$$A_4 = \frac{m_{21}^4}{4} - \frac{m_{31}m_{21}^2}{2} + \frac{m_{41}m_{21}}{6} + \frac{m_{31}^2}{9} - \frac{m_{51}}{30}$$

dır.

İspat. Teorem 3 ve Teorem 4'ün koşulları altın da $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelin ilk beş momenti mevcut ve sonludur. $S_{N(z)}$ ve η_1 rastgele değişkenlerinin karakteristik fonksiyonları için Taylor seri açılımları kullanılarak kesin ifadeler (30) ve (31) deki gibi elde edilebilir [27].

2.1.5. Sürecin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti İçin Asimptotik Açılımlar

X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik sonucun elde edilebilmesi için basamak değişkenlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, hatırlatma amacıyla, basamak değişkenlerin tanımı ve onlarla ilgili birçok ilginç özellikler aşağıda verilecektir. $\{\eta_i\}, i \geq 1$, rastgele değişkenler dizisinin yardımıyla aşağıdaki rastgele yürüyüş süreci şöyle tanımlanabilir:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, , n \geq 1, S_0 = 0$$

ve bu sürecin basamak değişkenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$v_1^+ = \min\{ n \geq 1, S_n > 0\},$$
$$v_{n+1}^+ = \inf\{k \geq 1 : S_{v_{n+k}} > S_{v_n}\}, n \geq 1$$
$$\chi_{n+1}^+ = S_{\sum_{i=1}^{n+1} v_i} - \sum_{i=1}^{n} \chi_i$$

Her $n \geq 1$ için $\sum_{i=1}^{n} \chi_i$ tam değerli rastgele değişkenlerine n. (yukarı) basamak anı; $\sum_{i=1}^{n} \chi_i^+$ pozitif değerli rastgele değişkenlerine ise n. (yukarı) basamak yüksekliği denir.

$n \geq 1$ için (v_n^+, χ_n^+) rastgele değişkenleri bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi oluşturduğu bilinmektedir [30].

(v_n^+, χ_n^+) çiftine ise (yukarı) basamak değişkenleri denir. Basamak değişkenleri, özellikle birinci basamak anı (v_1^+) ve birinci basamak yüksekliği (χ_1^+) rastgele yürüyüş sürecinin incelenmesinde önemli rol oynamaktadır.

N(z) sınır fonksiyoneli basamak değişkenleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Bunun için H(x) yenileme süreci şöyle tanımlanabilir.

$$H(x) = \min\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \geq x\}, x \geq 0.$$

Her $x > 0$ için H(x) süreci, $\{\chi_n^+\}$, $n \geq 1$, dizisinin oluşturduğu bir yenileme sürecidir. Diğer taraftan N(z) tanımına göre, $N(x) = \sum_{i=1}^{H(x)} v_i^+$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda, N(z) süreci ödüllü yenileme süreci olur. Bu sürecin olasılık karakteristikleri literatürde iyi bilinmektedir [17]. Bunların yardımıyla $S_{N(x)}$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(X)} \chi_i^+$$

Bu bilgiler dikkate alınarak aşağıdaki yardımcı teorem yazılabilir [41].

Yardımcı Teorem 1. χ_1^+ rastgele değişkenin ilk üç momenti mevcut ve sonlu olduğu taktirde $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1\right) + \frac{\mu_{21}}{2} + o(\lambda) \tag{32}$$

$$E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^2\right) + \frac{\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1\right) + o(1) \tag{33}$$

$$E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{1}{2}\mu_{21} E\left(\zeta_1^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{34}$$

$$E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^4\right) + \frac{\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{35}$$

$$E\left(\zeta_1^4 M_1\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^5\right) + \frac{\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^4\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{36}$$

$$E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^2\right) + \mu_{21} E\left(\zeta_1\right) + \frac{\mu_{31}}{3} + o(1) \tag{37}$$

$$E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^3\right) + \mu_{21} E\left(\zeta_1^2\right) + \frac{\mu_{31}}{3} E\left(\zeta_1\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{38}$$

$$E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^4\right) + \mu_{21} E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{\mu_{31}}{3} E\left(\zeta_1^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{39}$$

$$E\left(\zeta_1^3 M_2\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^5\right) + \mu_{21} E\left(\zeta_1^4\right) + \frac{\mu_{31}}{3} E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{40}$$

$$E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{3\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^2\right) + \mu_{31} E\left(\zeta_1\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{41}$$

$$E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^4\right) + \frac{3\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^3\right) + \mu_{31}E\left(\zeta_1^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (42)$$

$$E\left(\zeta_1^2 M_3\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^5\right) + \frac{3\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^4\right) + \mu_{31}E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (43)$$

$$E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^4\right) + 2\mu_{21}E\left(\zeta_1^3\right) + 2\mu_{31} E\left(\zeta_1^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (44)$$

$$E\left(\zeta_1 M_4\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^5\right) + 2\mu_{21}E\left(\zeta_1^4\right) + 2\mu_{31}E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (45)$$

$$E\left(M_5\left(\zeta_1\right)\right) = E\left(\zeta_1^5\right) + \frac{5\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^4\right) + \frac{10\mu_{31}}{3} E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \quad (46)$$

Burada $\mu_k = E(\chi^+)^k;\ \mu_k = \frac{\mu_k}{\mu_1}; M_k(x) = E\left(S^k_{N(x)}\right); k = \overline{1,5}$ dır.

Yardımcı Teorem 2. $g: R \rightarrow R$ sınırlı ve $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} = c, \alpha > 0,$ $c \in R$ ise $\lim_{\lambda\to 0^+} \int_0^\infty g(\frac{\lambda}{t^{1/\alpha}})dt = 0$ dır.

İspat. $g\left(\frac{\lambda}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$ fonksiyonunda $x = \frac{\lambda}{t^{1/\alpha}}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda^\alpha \int_0^\infty \alpha x^{-(\alpha+1)} g(x)dx \\ &\quad = \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda^\alpha a \int_0^1 x^{-(\alpha+1)} g(x)dx + \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda^\alpha a \int_1^\infty x^{-(\alpha+1)} g(x)dx \end{aligned} \quad (47)$$

elde edilir. (47) ifadesindeki limitlerin toplamının sıfır olduğu gösterilecektir. Bunun için önce,

$$\int_0^1 x^{-(\alpha+1)} g(x)dx < \infty$$

olduğu gösterilmelidir. Yardımcı Teorem2’den;

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} = c$$

yazılabilir. $\forall\epsilon > 0$ için $\exists\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$ öyleki $0 < x < \delta$ olduğunda, her x için,

$$\left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} - c\right| < \varepsilon \tag{48}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda (48) den dolayı $0 < x < \delta$ için

$$-\varepsilon < \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} - c < \varepsilon$$

olur. Yani, $\forall x\colon 0 < x < \delta$ için,

$$(c-\varepsilon)x^{\alpha+1} < g(x) < (c+\varepsilon)x^{\alpha+1}$$

$\varepsilon = 1, \Delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \delta\right\}$ alınırsa: $\forall x\colon 0 < x < \Delta$ için, (49)

$$(c-1)x^{\alpha+1} < g(x) < (c+1)x^{\alpha+1} \tag{50}$$

elde edilir. Burada (50) ifadesinden,

$$\left|\int_0^1 x^{-(\alpha+1)}g(x)dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx \tag{51}$$

olur. (51) formülünü aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\left|\int_0^1 x^{-(\alpha+1)}g(x)dx\right| \leq \int_0^\Delta \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx + \int_\Delta^1 \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx \tag{52}$$

(52) eşitsizliğinin ikinci tarafındaki ikinci integralin sonsuzdan küçük olduğu gösterilecek olursa $g(x)$ sınırlı olduğundan $\exists k$ öyleki $|g(x)| \leq k$ dır. Bunun yardımıyla,

$$\int_{\Delta}^{1} \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx \leq k\int_{\Delta}^{1} x^{-(\alpha+1)}dx = k\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\Big|_{\Delta}^{1} = \frac{k}{-\alpha}(1-\Delta^{-\alpha}) < \infty$$

sonucuna ulaşılabilir. Buradan,

$$\int_{\Delta}^{1} \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx < \infty \tag{53}$$

olur. (52) formülündeki eşitsizliğin ikinci tarafındaki birinci integralin sonsuzdan küçük olduğu gösterilecek olursa, (49) dan yararlanarak $0 < x < \Delta$ için,

$$\left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| \leq \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} - c\right| + |c| = 1 + |c| \tag{54}$$

elde edilir. (54) formülünden yararlanılarak,

$$\int_{0}^{\Delta} \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx \leq \int_{0}^{\Delta}(1+|c|)dx = (1+c)\Delta < \infty \text{ olur.}$$

Buradan,

$$\int_{0}^{\Delta} \left|\frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx < \infty \tag{55}$$

olur. (53) ve (55) formüllerinden yararlanılarak şu sonuca varılabilir:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{\alpha} \int_{0}^{1} x^{-(\alpha+1)} g(x)dx = 0 \tag{56}$$

Böylece (47) ifadesindeki limit toplamının birinci kısmının limitinin sıfır olduğu gösterilmiş olur. (47) ifadesindeki limit toplamının ikinci kısmının limitinin sıfır olduğunu göstermek için,

$$\int_{1}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} g(x)dx < \infty$$

olduğu ispatlanmalıdır. $g(x)$ sınırlı bir fonksiyon olduğundan $\exists k$ öyleki $\forall x \in R$ için $|g(x)| \leq k$ dır. Bundan yararlanılarak, $\alpha > 0$ için,

$$\left|\int_1^\infty x^{-(\alpha+1)} g(x)dx\right| \leq \int_1^\infty x^{-(\alpha+1)}|g(x)|dx \leq k\int_1^\infty x^{-(\alpha+1)}dx \leq \frac{k}{\alpha} < \infty$$

elde edilir. Buradan özetle,

$$\left|\int_1^\infty x^{-(\alpha+1)} g(x)dx\right| < \infty \tag{57}$$

olur. (57) den yararlanılarak

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^\alpha \int_1^\infty x^{-(\alpha+1)} g(x)dx = 0 \tag{58}$$

elde edilir. Böylece (47) ifadesindeki limit toplamının ikinci kısmının limitinin sıfır olduğu ispatlanmış olur. (56) ve (58) formüllerinden,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_0^\infty g\left(\frac{\lambda}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right) dt = 0 \tag{59}$$

elde edilir. Bu ise yardımcı teoremin ispatını tamamlamış olur. Şimdi de aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4. $g(x)$ fonksiyonu, Yardımcı Teorem 2' deki gibi tanımlansın ve $R_n(x)$ fonksiyonu $R_n(x) = x^n g(x), n = -1,0,1,2,...$ olsun. Her $\alpha > 0$ ve $\lambda \longrightarrow 0$ iken, aşağıdaki bağıntı doğrudur.

$$\int_0^\infty R_n\left(\frac{\lambda}{t^{1/\alpha}}\right)dt = o\left(\frac{\lambda^n}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

Teorem 5. Başlangıç rastgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar.

1. $0 < E\xi_1 < \infty$,
2. $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,
3. η_1 rastgele değişkeni aritmetik olmayan rastgele değişken,

4. ζ_1 rastgele değişkeni (λ, ∞) aralığında (α, λ) parametreli Pareto dağılıma sahip olsun.

Bu takdirde, X(t) süreci ergodiktir ve sürecin ergodik dağılımının ilk iki momenti için $\alpha > 2$ ve $E\zeta_1 \to \infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$E(X) = C_{21}(\alpha)\lambda + B_{11} + B_{12}\frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{60}$$

$$E(X^2) = C_{31}(\alpha)\lambda^2 + B_{21}(\alpha)\lambda + B_{22}(\alpha) + o(1) \tag{61}$$

Burada,

$$E\left(\zeta_1^k\right) = C_k(\alpha)\lambda^k \; C_k(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-k}, \alpha > k$$

$$C_{k1}(\alpha) = \frac{C_k(\alpha)}{kC_1(\alpha)}, k = \overline{1,5}$$

$$B_{11}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[m_{21} - \frac{C_{21}(\alpha)}{C_1(\alpha)}\mu_{21}\right] = \frac{1}{2}\left[m_{21} - \frac{(\alpha-1)^2}{2\alpha(\alpha-2)}\mu_{21}\right]$$

$$B_{12}(\alpha) = \frac{C_{21}(\alpha)}{4C_1^2(\alpha)}\mu_{21}{}^2 - \frac{1}{6C_1(\alpha)}\mu_{31} = \frac{\mu_{21}^2}{8}\frac{(\alpha-1)^3}{\alpha^2(\alpha-2)} - \frac{\mu_{31}}{6}\frac{(\alpha-1)}{\alpha}$$

$$B_{21}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[2C_{21}(\alpha)m_{21} - \frac{C_{31}(\alpha)}{C_1(\alpha)}\mu_{21}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-2)}m_{21} - \frac{(\alpha-1)^2}{3\alpha(\alpha-3)}\mu_{21}\right]$$

$$B_{22}(\alpha) = \frac{C_{31}(\alpha)}{4C_1^2(\alpha)}\mu_{21}{}^2 - \frac{C_{21}(\alpha)}{2C_1(\alpha)}(m_{21}\mu_{21}) + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} = \frac{(\alpha-1)^3\mu_{21}^2}{12(\alpha-3)\lambda^2} - \frac{m_{21}\mu_{21}(\alpha-1)^2}{4\alpha(\alpha-2)} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6}$$

İspat. Öncelikle X(t) sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri için üç terimli asimptotik açılım elde edilecektir. Teorem 3'deki $E(X)$ için kesin formül aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\left\{E\left(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\right) - \frac{1}{2}E(M_2(\zeta_1))\right\} + A_1$$

$$J_1(\lambda) = E\left(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right) \tag{62}$$

Yardımcı Teorem 1'deki (33) ve (37) eşitlikleri (62) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$J_1(\lambda) = E\left(\zeta_1^{2}\right) + \frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1\right) + o(1) - \frac{1}{2}E\left(\zeta_1^{2}\right) - \frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1\right) + o(1)$$

$$-\frac{1}{2}\mu_{31} - \frac{1}{6}\mu_{31} + o(1) = \frac{1}{2}\,E\left(\zeta_1^{2}\right) - \frac{1}{6}\mu_{31} + o(1)$$

$$J_1\,(\lambda) = \frac{C_2(\alpha)}{2}\lambda^2 - \frac{\mu_{31}}{6} + o(1) = C_2(\alpha)\lambda^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_{31}}{6C_2(\alpha)}\frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \tag{63}$$

ifadesi elde edilir.

$$K(\lambda) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} \tag{64}$$

(32) eşitliği (62) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (65) bağıntısı elde edilir.

$$K(\lambda) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} = \frac{1}{E\left(\zeta_1\right)+\frac{1}{2}\mu_{21}+o(\lambda)} = \frac{1}{\left[C_1(\alpha)\lambda+\frac{1}{2}\mu_{21}+o(\lambda)\right]}$$

$$= \frac{1}{C_1(\alpha)\lambda\left[1+\frac{1}{2}\mu_{21}\frac{1}{C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\left[1+\frac{1}{2}\frac{\mu_{21}}{C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}$$

$$K(\lambda) = \frac{1}{C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{\mu_{21}}{2C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{\mu_{21}}{2C_1(\alpha)}\right)^2\frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \tag{65}$$

$$E(X) = K(\lambda)J_1\,(\lambda) + \frac{1}{2}m_{21} \tag{66}$$

(63) ve (65) eşitlikleri yukarıdaki eşitlikte göz önünde bulundurulursa,

$$E(X) = \frac{C_2(\alpha)}{C_1(\alpha)}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{\mu_{21}}{C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{8}\frac{\mu_{21}^2}{C_1^2(\alpha)}\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{6}\frac{\mu_{31}}{C_2(\alpha)}\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{12}\frac{\mu_{21}\mu_{31}}{C_1(\alpha)C_2(\alpha)}\frac{1}{\lambda^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right] + \frac{1}{2}m_{21}$$

$$= \frac{C_2(\alpha)}{C_1(\alpha)}\lambda\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{\mu_{21}}{C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{8}\frac{\mu_{21}^2}{C_1^2(\alpha)} - \frac{1}{6}\frac{\mu_{31}}{C_2(\alpha)}\right)\frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right] + \frac{1}{2}m_{21}$$

$$= \frac{C_2(\alpha)}{2C_1(\alpha)}\lambda + \frac{1}{2}\left[m_{21} - \frac{C_2(\alpha)\mu_{21}}{2C_1^2(\alpha)}\right] + \left(\frac{1}{8}\frac{C_2(\alpha)\mu_{21}^2}{C_1^3(\alpha)} - \frac{1}{6}\frac{C_2(\alpha)\mu_{31}}{C_2(\alpha)C_1(\alpha)}\right)\frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

ifadesi elde edilir. $C_k(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha-k}, \alpha>k$ eşitliği kullanılarak (67) ifadesi elde edilir.

$$E(X)=\frac{\lambda}{2}\frac{\alpha}{(\alpha-2)}\frac{(\alpha-1)}{\alpha}+\frac{1}{2}\left[m_{21}-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\alpha}{(\alpha-2)}\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2}\right]$$
$$+\left(\frac{\mu_{21}^2}{8}\frac{(\alpha-1)^3}{\alpha^3}\frac{\alpha}{(\alpha-2)}-\frac{\mu_{31}}{6}\frac{(\alpha-1)}{\alpha}\right)\frac{1}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$E(X)=\frac{(\alpha-1)}{2(\alpha-2)}\lambda+\frac{1}{2}\left[m_{21}-\frac{(\alpha-1)^2}{2\alpha(\alpha-2)}\mu_{21}\right]+\left(\frac{\mu_{21}^2}{8}\frac{(\alpha-1)^3}{\alpha^2(\alpha-2)}-\frac{\mu_{31}}{6}\frac{(\alpha-1)}{\alpha}\right)\frac{1}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (67)$$

Buradan;

$$E(X)=C_{21}(\alpha)\lambda+B_{11}+B_{12}\frac{1}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

olur. X(t) sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti için $E\zeta_1\to\infty$, asimptotik açılımlar elde edilecektir. Teorem 3'deki $E(X^2)$ için kesin formül aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X^2)=\frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)}\left\{E\left(\zeta_1^2M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1M_2\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$
$$\left.+2A_1\left[E\left(\zeta_1M_1\left(\zeta_1\right)\right)-\frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]\right\}+A_2$$
$$J_2(\lambda)=E\left(\zeta_1^2M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1M_2\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right) \quad (68)$$

Yardımcı Teorem 1'deki (34), (38) ve (41) eşitlikleri (68) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (69) elde edilir.

$$J_2(\lambda)=E\left(\zeta_1^3\right)+\frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right)+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)-E\left(\zeta_1^3\right)-\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right)-\frac{1}{3}\mu_{31}E\left(\zeta_1\right)$$
$$-o\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{3}E\left(\zeta_1^3\right)+\frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right)+\frac{1}{3}\mu_{31}E\left(\zeta_1\right)+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$J_2(\lambda)=\frac{1}{3}E\left(\zeta_1^3\right)+o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (69)$$

$$J_3(\lambda) = m_{21}\left[E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right] \tag{70}$$

(33) ve (37) eşitlikleri (70) formülünde göz önünde bulundurulur ve gerekli işlemler yapılırsa (71) elde edilir.

$$J_3(\lambda) = m_{21}\left[E\left(\zeta_1^2\right) + \frac{\mu_{21}}{2}E\left(\zeta_1\right) - \frac{E\left(\zeta_1^2\right)}{2} - \frac{\mu_{21}E\left(\zeta_1\right)}{2} - \frac{\mu_{31}}{6}\right]$$

$$J_3(\lambda) = \left[\frac{m_{21}E\left(\zeta_1^2\right)}{2} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6}\right] \tag{71}$$

$$J_4(\lambda) = J_2(\lambda) + J_3(\lambda) \tag{72}$$

Yukarıdaki (69) ve (71) bağıntıları (72) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$J_4(\lambda) = \frac{1}{3}E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{m_{21}E\left(\zeta_1^2\right)}{2} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{73}$$

elde edilir. $E\left(\zeta_1^k\right) = C_k(\alpha)\lambda^k$ ifadesi (73) formülünde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} J_4(\lambda) &= \frac{C_3(\alpha)\lambda^3}{3} + \frac{m_{21}C_2(\alpha)\lambda^2}{2} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= C_3(\alpha)\lambda^3\left[\frac{1}{3} + \frac{m_{21}c_2(\alpha)}{2C_3(\alpha)\lambda} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6C_3(\alpha)\lambda^3} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] \end{aligned} \tag{74}$$

olur. Buradan,

$$E(X^2) = J_4(\lambda)K(\lambda) + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} \tag{75}$$

$$E(X^{2}) = \frac{C_3(\alpha)\lambda^2}{C_1(\alpha)}\left[\frac{1}{3} + \frac{m_{21}C_2(\alpha)}{2C_3(\alpha)\lambda} - \frac{\mu_{21}}{6C_1(\alpha)\lambda} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_2(\alpha)}{4C_3(\alpha)C_1(\alpha)\lambda^2} + \frac{\mu_{21}^2}{12C_1^2(\alpha)\lambda^2} + o(\frac{1}{\lambda^2})\right]$$

$$+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6} = \frac{C_3(\alpha)\lambda^2}{C_1(\alpha)}\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{m_{21}C_2(\alpha)}{2C_3(\alpha)} - \frac{\mu_{21}}{6C_1(\alpha)}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu_{21}^2}{12C_1^2(\alpha)} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_2(\alpha)}{4C_3(\alpha)C_1(\alpha)}\right)\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] + \frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$$

$$E(X^{2}) = \frac{C_3(\alpha)\lambda^2}{3C_1(\alpha)} + \left(\frac{m_{21}C_2(\alpha)}{2C_1(\alpha)} - \frac{C_3(\alpha)\mu_{21}}{6C_1^2(\alpha)}\right)\lambda$$

$$+\left(\frac{C_3(\alpha)\mu_{21}^2}{12C_1^3(\alpha)} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_2(\alpha)}{4c_1^2(\alpha)} + \frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}\right) + o(1) \tag{76}$$

$$E(X^{2}) = \frac{(\alpha-1)\lambda^2}{3(\alpha-3)} + \left(\frac{m_{21}(\alpha-1)}{2(\alpha-2)} - \frac{(\alpha-1)^2\mu_{21}}{6\alpha(\alpha-3)}\right)\lambda$$

$$+\left(\frac{(\alpha-1)^3\mu_{21}^2}{12(\alpha-3)\lambda^2} - \frac{m_{21}\mu_{21}(\alpha-1)^2}{4\alpha(\alpha-2)} + \frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}\right) + o(1) \tag{77}$$

$$E(X^2) = C_{31}(\alpha)\lambda^2 + B_{21}(\alpha)\lambda + B_{22}(\alpha) + o(1)$$

olur.

Teorem 6. Başlangıç rastgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar.

1. $0 < E\xi_1 < \infty$,

2. $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3. η_1 rastgele değişkeni aritmetik olmayan rastgele değişken,

4. ζ_1 rastgele değişkeni (λ, ∞) aralığında (α, λ) parametreli Pareto dağılıma sahip olsun.

Bu takdirde, X(t) sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momenti için $\alpha > 4$ ve $E\zeta_1 \to \infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$E(X^3) = C_{41}(\alpha)\lambda^3 + B_{31}(\alpha)\lambda^2 + B_{32}(\alpha)\lambda + o(\lambda) \tag{78}$$

$$E(X^4) = C_{51}(\alpha)\lambda^4 + B_{41}(\alpha)\lambda^3 + B_{42}(\alpha)\lambda^2 + o(\lambda^2) \tag{79}$$

Burada,

$$B_{31}(\alpha) = \frac{3C_{31}(\alpha)}{2}m_{21} - \frac{C_{41}(\alpha)}{2C_1(\alpha)}\mu_{21}$$

$$B_{32}(\alpha)=\frac{C_{21}(\alpha)}{2}(3m_{21}^2-2m_{31})+\frac{2C_{41}(\alpha)}{3C_1^2(\alpha)}\mu_{21}^2-\frac{3C_{31}(\alpha)}{4C_1(\alpha)}m_{21}\mu_{21}$$

$$B_{41}(\alpha)=6C_{41}(\alpha)(m_{21}-\mu_{21})-\frac{C_{51}(\alpha)}{2C_1(\alpha)}\mu_{21}$$

$$B_{42}(\alpha)=C_{31}(\alpha)(3m_{21}^2-2m_{31}+6m_{21}\mu_{21}-3\mu_{31})+\frac{C_{51}(\alpha)}{4C_1^2(\alpha)}\mu_{21}^2$$

$$-\frac{C_{41}(\alpha)}{C_1(\alpha)}(3m_{21}\mu_{21}-3\mu_{21}^2)$$

dır.

İspat. Teorem 4' de $E(X^3)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir. X(t) sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momenti $\left(E(X^3)\right)$ için üç terimli asimptotik açılım ise aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E(X^3)=\frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\Bigg\{E\left(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\right)-\frac{3}{2}E\left(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\right)+E\left(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\right)$$

$$-\frac{1}{4}E\left(M_4(\zeta_1)\right)+A_1\left[3E\left(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\right)-3E\left(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\right)+E\left(M_3(\zeta_1)\right)\right]$$

$$+3A_2\left[E\left(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\right)-\frac{1}{2}E\left(M_2(\zeta_1)\right)\right]\Bigg\}+3A_3$$

$$J_5(\lambda)=E\left(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\right)-\frac{3}{2}E\left(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\right)+E\left(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\right)$$

$$-\frac{1}{4}E\left(M_4(\zeta_1)\right) \tag{80}$$

(35), (38), (42) ve (44) eşitlikleri yukarıdaki eşitlik (80) de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (81) ifadesi elde edilir.

$$J_5(\lambda)=E\left(\zeta_1^4\right)+\frac{\mu_{21}}{2}E\left(\zeta_1^3\right)+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)-\frac{3}{2}E\left(\zeta_1^4\right)-\frac{3\mu_{21}}{2}E\left(\zeta_1^3\right)$$

$$-\frac{\mu_{31}}{2}E\left(\zeta_1^2\right)+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)+E\left(\zeta_1^4\right)+\frac{3\mu_{21}}{2}E\left(\zeta_1^3\right)+\mu_{31}E\left(\zeta_1^2\right)+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}E\left(\zeta_1^4\right)-\frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^3\right)-\frac{1}{2}\mu_{31}E\left(\zeta_1^2\right)+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$J_5(\lambda)=\frac{1}{4}E\left(\zeta_1^4\right)+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{81}$$

$$J_6(\lambda) = A_1\left[3E\left(\zeta_1^{2} M_1\left(\zeta_1\right)\right) - 3E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right] \tag{82}$$

(34), (38) ve (41) eşitlikleri yukarıdaki eşitlik (82) de yerine yazılırsa (83) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} J_6(\lambda) = A_1 \Big[& 3E\left(\zeta_1^{3}\right) + \tfrac{3\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^{2}\right) - 3E\left(\zeta_1^{3}\right) - 3\mu_{21} E\left(\zeta_1^{2}\right) \\ & -\mu_{31} E\left(\zeta_1\right) + E\left(\zeta_1^{3}\right) + \tfrac{3\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1^{2}\right) + \mu_{31} E\left(\zeta_1\right)\Big] + o\left(\tfrac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

$$J_6(\lambda) = A_1 E\left(\zeta_1^{3}\right) + o\left(\tfrac{1}{\lambda}\right) \tag{83}$$

$$J_7(\lambda) = 3A_2\left[E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \tfrac{1}{2} E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right] \tag{84}$$

Yardımcı Teorem 1’ deki (33) ve (37) eşitlikleri (84) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (85) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} J_7(\lambda) = 3A_2 \Big[& E\left(\zeta_1^{2}\right) + \tfrac{\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1\right) + o(1) - \tfrac{1}{2} E\left(\zeta_1^{2}\right) \\ & - \tfrac{\mu_{21}}{2} E\left(\zeta_1\right) - \tfrac{\mu_{31}}{6} + o(1)\Big] \\ = 3A_2 \Big[& \tfrac{1}{2} E\left(\zeta_1^{2}\right) - \tfrac{\mu_{31}}{6} + o(1)\Big] \end{aligned}$$

$$J_7(\lambda) = \tfrac{3A_2}{2} E\left(\zeta_1^{2}\right) - \tfrac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1) \tag{85}$$

$$J(\lambda) = J_5(\alpha) + J_6(\alpha) + J_7(\alpha) \tag{86}$$

(81), (83) ve (85) eşitlikleri (86) eşitliğinde göz önünde bulundurulursa,

$$J(\lambda) = \tfrac{1}{4} E\left(\zeta_1^{4}\right) + o\left(\tfrac{1}{\lambda^2}\right) + A_1 E\left(\zeta_1^{3}\right) + o\left(\tfrac{1}{\lambda}\right) + \tfrac{3A_2}{2} E\left(\zeta_1^{2}\right) - \tfrac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1)$$

$$J(\lambda) = \tfrac{1}{4} E\left(\zeta_1^{4}\right) + A_1 E\left(\zeta_1^{3}\right) + \tfrac{3A_2}{2} E\left(\zeta_1^{2}\right) - \tfrac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1) \tag{87}$$

eşitliği elde edilir. $E\left(\zeta_1^k\right) = C_4(\alpha)\lambda^k$ ifadesi (87) eşitliğinde kullanılırsa,

$$J(\lambda) = \frac{C_4(\alpha)\lambda^4}{4} + A_1C_3(\alpha)\lambda^3 + \frac{3A_2c_2(\alpha)\lambda^2}{2} - \frac{A_2\mu_{31}}{2} + o(1)$$

$$= C_4(\alpha)\lambda^4\left[\frac{1}{4} + \frac{A_1C_3(\alpha)}{C_4(\alpha)\lambda} + \frac{3A_2c_2(\alpha)}{2C_4(\alpha)\lambda^2}\right]$$

$$K(\lambda) = \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))} = \frac{1}{C_1(\alpha)\lambda}\left[1 - \frac{\mu_{21}}{2C_1(\alpha)\lambda} + \frac{\mu_{21}^2}{4c_1^2(\alpha)\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \tag{88}$$

elde edilir. Buradan,

$$E(X^3) = J(\lambda)K(\lambda) + 3A_2$$

$$E(X^3) = \frac{C_4(\alpha)\lambda^3}{C_1(\alpha)}\left[\frac{1}{4} - \frac{\mu_{21}}{8C_1(\alpha)\lambda} + \frac{\mu_{21}^2}{6c_1^2(\alpha)\lambda^2} + \frac{m_{21}C_3(\alpha)}{2C_4(\alpha)\lambda}\right.$$
$$\left. - \frac{m_{21}\mu_{21}C_3(\alpha)}{4C_4(\alpha)C_1(\alpha)\lambda^2} + \frac{3A_2c_2(\alpha)}{2C_4(\alpha)\lambda^2}\right]$$
$$= \frac{C_4(\alpha)\lambda^3}{C_1(\alpha)}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{m_{21}C_3(\alpha)}{2C_4(\alpha)} - \frac{\mu_{21}}{8C_1(\alpha)}\right)\frac{1}{\lambda}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mu_{21}^2}{6c_1^2(\alpha)} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_3(\alpha)}{4C_4(\alpha)C_1(\alpha)} + \frac{3A_2c_2(\alpha)}{2C_4(\alpha)}\right)\frac{1}{\lambda^2}\right]$$
$$= \frac{C_4(\alpha)\lambda^3}{4C_1(\alpha)} + \left(\frac{m_{21}C_3(\alpha)}{2C_1(\alpha)} - \frac{\mu_{21}C_4(\alpha)}{8c_1^2(\alpha)}\right)\lambda^2$$
$$+ \left(\frac{\mu_{21}^2C_4(\alpha)}{6c_1^3(\alpha)} - \frac{m_{21}\mu_{21}C_3(\alpha)}{4c_1^2(\alpha)} + \frac{3A_2c_2(\alpha)}{2C_1(\alpha)}\right)\lambda + o(\lambda)$$

$$E(X^3) = \frac{(\alpha-1)\lambda^3}{4(\alpha-4)} + \left(\frac{m_{21}(\alpha-1)}{2(\alpha-3)} - \frac{\mu_{21}(\alpha-1)^2}{8\alpha(\alpha-4)}\right)\lambda^2$$
$$+ \left(\frac{\mu_{21}^2(\alpha-1)^3}{6\alpha^2(\alpha-4)} - \frac{m_{21}\mu_{21}(\alpha-1)^2}{4\alpha(\alpha-3)} + \frac{3A_2(\alpha-1)}{2(\alpha-2)}\right)\lambda + o(\lambda)$$

$$E(X^3) = C_{41}(\alpha)\lambda^3 + B_{31}(\alpha)\lambda^2 + B_{32}(\alpha)\lambda + o(\lambda)$$

olur.

Teorem 4' de $E(X^4)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir. X(t) sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momenti $\left(E(X^4)\right)$ için üç terimli asimptotik açılım ise aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$
\begin{aligned}
E(X^4) = & \frac{1}{E(M_1(\zeta_1))}\Bigg\{E\Big(\zeta_1^4 M_1(\zeta_1)\Big) - 2E\Big(\zeta_1^3 M_2(\zeta_1)\Big) + 2E\Big(\zeta_1^2 M_3(\zeta_1)\Big) \\
& - E\Big(\zeta_1 M_4(\zeta_1)\Big) + \tfrac{1}{5}E\Big(M_5(\zeta_1)\Big) \\
& + 2A_1\Big[2E\Big(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\Big) - 3E\Big(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\Big) + 2E\Big(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\Big) \\
& + \tfrac{1}{2}E\Big(M_4(\zeta_1)\Big)\Big] \\
& + 6A_2\Big[E\Big(\zeta_1^2 M_1(\zeta_1)\Big) - E\Big(\zeta_1 M_2(\zeta_1)\Big) + \tfrac{1}{3}E\Big(M_3(\zeta_1)\Big)\Big] \\
& + 6A_3\Big[2E\Big(\zeta_1 M_1(\zeta_1)\Big) - E\Big(M_2(\zeta_1)\Big)\Big]\Bigg\} + 3A_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_8(\lambda) = & E\Big(\zeta_1^4 M_1(\zeta_1)\Big) - 2E\Big(\zeta_1^3 M_2(\zeta_1)\Big) + 2E\Big(\zeta_1^2 M_3(\zeta_1)\Big) \\
& - E\Big(\zeta_1 M_4(\zeta_1)\Big) + \tfrac{1}{5}E\Big(M_5(\zeta_1)\Big) \qquad (89)
\end{aligned}
$$

(36), (40), (43), (45) ve (46) eşitlikleri (89) eşitliğinde göz önünde bulundurulursa,

$$
J_8(\lambda) = \tfrac{1}{5}E\big(\zeta_1^5\big) - \tfrac{3\mu_{21}}{2}E\big(\zeta_1^4\big) - \mu_{31}E\big(\zeta_1^3\big) + o\left(\tfrac{1}{\lambda^3}\right) \qquad (90)
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
J_9(\lambda) = & 2A_1\Big[2E\Big(\zeta_1^3 M_1(\zeta_1)\Big) - 3E\Big(\zeta_1^2 M_2(\zeta_1)\Big) + 2E\Big(\zeta_1 M_3(\zeta_1)\Big) \\
& + \tfrac{1}{2}E\Big(M_4(\zeta_1)\Big)\Big] \qquad (91)
\end{aligned}
$$

Yardımcı Teorem 1’deki (35), (39), (42) ve (44) eşitlikleri (91) de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (92) ifadesi elde edilir.

$$
J_9(\lambda) = 2A_1\left[\tfrac{3}{2}E\big(\zeta_1^4\big) + 2\mu_{21}\,E\big(\zeta_1^3\big) + 2\mu_{31}E\big(\zeta_1^2\big)\right] \qquad (92)
$$

$$J_{10}(\lambda) = 6A_2\left[E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right] \tag{93}$$

(34), (38) ve (41) eşitlikleri (93) eşitliğinde göz önünde bulundurulursa,

$$J_{10}(\lambda) = 2A_2E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{94}$$

elde edilir.

$$J_{11}(\lambda) = 6A_3\left[2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right] \tag{95}$$

Yardımcı Teorem 1'deki (33) ve (37) eşitlikleri (95) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$J_{11}(\lambda) = 6A_3\left[E\left(\zeta_1^2\right) - \frac{\mu_{31}}{3}\right] \tag{96}$$

olur.

$$J\,(\lambda) = J_8(\lambda) + J_9(\lambda) + J_{10}(\lambda) + J_{11}(\lambda) \tag{97}$$

Yukarıdaki verilir (97) denkleminde kullanılırsa,

$$J\,(\lambda) = \frac{1}{5}E\left(\zeta_1^5\right) + \left(\frac{3m_{21}}{2} - \frac{3\mu_{21}}{2}\right)E\left(\zeta_1^4\right) + (2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2)E\left(\zeta_1^3\right)$$
$$+(6A_3 + 2m_{21}\mu_{31})\,E\left(\zeta_1^2\right)$$

olur. $E\left(\zeta_1^k\right) = C_k(\alpha)\lambda^k$ ifadesi yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$J\,(\lambda) = C_5(\alpha)\lambda^5\left\{\frac{1}{5} + \left(\frac{3}{2}m_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)\frac{C_4(\alpha)}{C_5(\alpha)}\frac{1}{\lambda} + (2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2)\frac{C_3(\alpha)}{C_5(\alpha)}\frac{1}{\lambda^2}\right.$$
$$\left.+(6A_3 + 2m_{21}\mu_{21})\frac{C_2(\alpha)}{C_5(\alpha)}\frac{1}{\lambda^3}\right\} \tag{98}$$

elde edilir. Buradan,

$$E(X^4) = J(\alpha)\, K(\lambda)$$

$$E(X^4) = \frac{1}{5}\frac{C_5(\alpha)}{C_1(\alpha)}\lambda^4 + \left(\left(\frac{3}{2}m_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)\frac{C_4(\alpha)}{C_1(\alpha)} - \frac{1}{10}\mu_{21}\frac{C_5(\alpha)}{C_1^2(\alpha)}\right)\lambda^3$$

$$+\left(\frac{1}{20}\mu_{21}^2\frac{C_5(\alpha)}{C_1^3(\alpha)} + (2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2)\frac{C_3(\alpha)}{C_1(\alpha)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)\mu_{21}\frac{C_4(\alpha)}{C_1^2(\alpha)}\right)\lambda^2 + +o(\lambda^2)$$

$$E(X^4) = \frac{1}{5}\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-5)}\lambda^4 + \left(\left(\frac{3}{2}m_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-4)} - \frac{1}{10}\mu_{21}\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-5)}\right)\lambda^3$$

$$+\left(\frac{1}{20\alpha^2}\frac{(\alpha-1)^3}{(\alpha-5)}\mu_{21}^2 + (2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2)\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-3)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)\mu_{21}\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-4)}\right)\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

$$E(X^4) = C_{51}(\alpha)\lambda^4 + B_{41}(\alpha)\lambda^3 + B_{42}(\alpha)\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

olur.

Şimdi de modele gecikme faktörü eklendiğinde sürecin sayısal karakteristikleri için asimptotik açılımlar bulunmaya çalışılacaktır.

2.2. Gecikmeli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Sürecinin İncelenmesi

2.2.1. X(t) Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n, \eta_n, \theta_n, \zeta_n\}, n \geq 1$, (Ω, F, P) aynı olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız rastgele değişkenler dizisi ve her bir dizinin elemanları bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsunlar. ξ_1 ve θ_1 rastgele değişkenleri sadece pozitif değerler, η_1 hem pozitif hem de negatif değerler, ζ_1 ise $(s, +\infty)$ aralığında değerler alabilsin.

$\xi_1, \eta_1, \theta_1, \zeta_1$ rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarının bilindiği varsayılsın ve sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilsin.

$$\Phi(t) = P\left\{\xi_1 \leq t\right\};\ t \in (0, +\infty)$$

$F(x) = P\{\eta_1 \leq x\};\ x \in (-\infty, +\infty)$

$H(u) = P\{\theta_1 \leq u\};\ u \geq 0$

$\pi(v) = P\{\zeta_1 \leq v\};\ v \in (s, +\infty)$

$\{T_n\}$ yenileme dizisi ve $\{Y_n\}$ rastgele yürüyüş süreci aşağıdaki gibi inşa edilebilir:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ , Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\ , n \geq 1$$

burada, $T_0 = Y_0 = 0$ dır.

Tam değerler alan $\{N_n\}$, $n \geq 0$ rastgele değişken dizisi ise aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$N_1 = N(x) = \inf\{n \geq 1: s + x - Y_n < s\} = \inf\{n \geq 1: Y_n > x\}$$

burada, $N_0 = 0$ dır.

$$N_{n+1} = \inf\left\{k \geq 1: s + \zeta_n - \left(\sum_{i=N_1+N_2+\cdots N_n+1}^{N_1+N_2+\cdots N_n+k} \eta_i\right) < s\right\}$$

$$= \inf\left\{k \geq 1: Y_{N_1+N_2+\cdots N_n+k} - Y_{N_1+N_2+\cdots N_n} > \zeta_n\right\}\ n=1,2,\ldots$$

burada, $s > 0$ ve $\inf(\emptyset) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir.

$$\tau_1 = T_{N_1} = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i$$

$$\gamma_1 = \tau_1 + \theta_1 = T_{N_1} + \theta_1$$

$$\tau_n = T_{N_1+N_2+\cdots N_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i$$

$$\gamma_n = \tau_n + \theta_n = T_{N_1+N_2+\cdots N_n} + \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

burada, $\tau_0 = \gamma_0 = 0$ dır.

$v(t)$ yenileme süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$v_o(t) \equiv v([0,t]) \equiv v(t) = \max\{n \geq 0: T_n \leq t\},\ t \in [0, \tau_1)$$

$\mathrm{v_r(t)} \equiv ([\gamma_r, t]) \equiv \max\{n \geq 0 : \gamma_r + (T_{N_0+N_1+\ldots+N_n+n} - T_{N_0+N_1+\ldots+N_n}) \leq t\}$

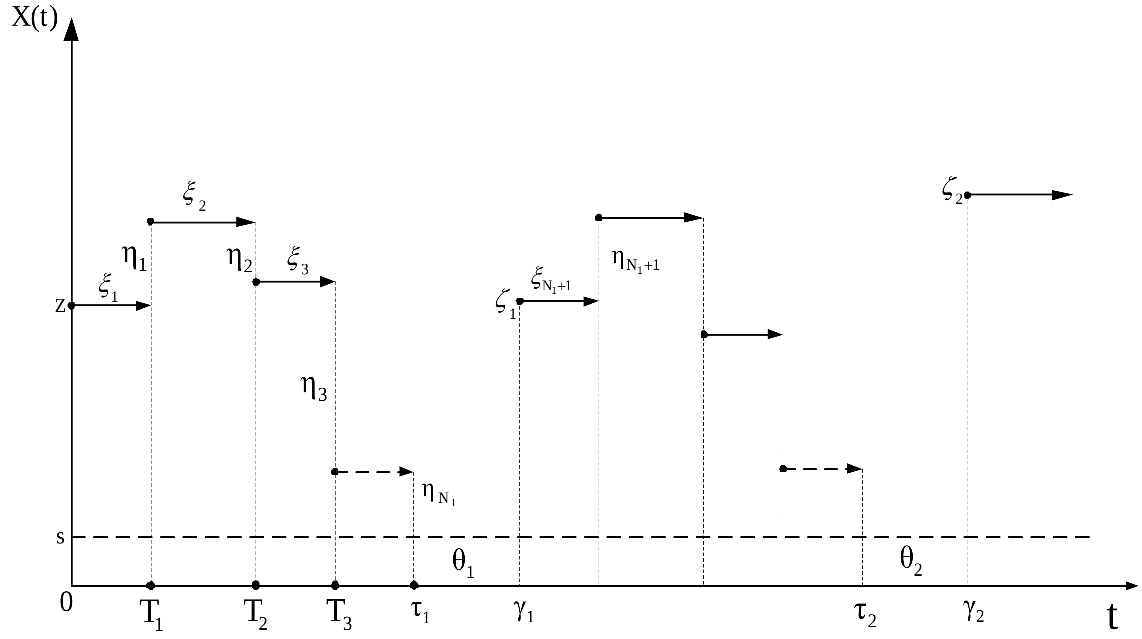
$t \in [\gamma_r, \tau_{r+1}), \qquad r = 0,1,2, \ldots$

Ele alınan stokastik süreç aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

a) Her $t \in [\tau_n, \gamma_n)$ için, $X(t) = s$

b) Her $t \in [\gamma_n, \tau_{n+1})$ için, $X(t) = s + \zeta_n - \left(Y_{N_0+N_1+\ldots+N_n+v_{n(t)}} - Y_{N_0+N_1+\ldots+N_n}\right)$

burada $n = 0,1,2, \ldots$; $\gamma_0 = 0$; $\zeta_0 = x$; $N_0 = 0$ dır. X(t) süreci kesikli şans karışımlı gecikmeli Yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecidir.



Şekil 2. Gecikmeli Pareto müdahaleli rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü.

2.2.2. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti İçin Kesin İfadeler

Teorem 7. Teorem 1'in koşullarına ilaveten $E(|\eta_1|^5) < \infty$ ve $E\theta_1 < \infty$ olsun. Bu takdirde, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti sonludur ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momenti ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X)=\frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1}\left\{E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-\frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(m_{21}-2Km_1)E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1e_1\right\}$$

$$E(X^2)=\frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1}\left\{E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$+2A_1\left(E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-\frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right)$$

$$+Km_1\left[E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)-2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$\left.+A_2E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1e_2\right\}$$

$$E(X^3)=\frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1}\left\{E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-\frac{3}{2}E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$+E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right)-\frac{1}{4}E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right)$$

$$+\frac{3}{2}(m_{21}-2Km_1)\left[E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}(m_{21}-2Km_1)E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)+3A_2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-\frac{3}{2}A_2E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)$$

$$\left.+3A_3E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1e_3\right\}$$

$$E(X^4)=\frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1}\left\{E\left(\zeta_1^4 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-2E\left(\zeta_1^3 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$+2E\left(\zeta_1^2 M_3\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1 M_4\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{5}E\left(M_5\left(\zeta_1\right)\right)$$

$$+(m_{21}-2Km_1)\left[2E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-3E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$\left.+2E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{2}E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+6A_2\left[E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+6A_3\left[2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$\left.+3A_4E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1e_4\right\}.$$

Burada,

$$m_k=E\left(\eta_1^k\right), M_k(z)=E\left(S_{N(z)}^k\right), m_{k1}=\frac{m_k}{km_1};$$

$$M_{k1}(z)=\frac{M_k(z)}{M_1(z)}; k=\overline{1,5},$$

$$E\left(\zeta_1^n M_K\left(\zeta_1\right)\right)=\alpha\lambda^\alpha\int_0^\infty x^{-(\alpha+n-1)}M_k(x)dx, n=\overline{0,4},$$

$$\overline{X}(t)=X(t)-s,$$

$$K=\frac{E\theta_1}{E\xi_1}$$

$$e_k=E\left(\zeta_1^k\right), k=1,2,3,4$$

dür.

İspat: Teorem 3 ve 4 ispatlarına benzer şekilde yapılır.

2.2.3. Sürecin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momenti İçin Asimptotik Açılımlar

Teorem 8: Başlangıç rastgele değişkenleri $\xi_1, \eta_1, \theta_1, \zeta_1$ aşağıdaki koşulları sağlasınlar.

1. $0< E\xi_1 <\infty$,
2. $E\eta_1>0$ ve $E|\eta_1|^3<\infty$,
3. $E\theta_1<\infty$,
4. η_1 rastgele değişkeni aritmetik olmayan rastgele değişken,
5. ζ_1 rastgele değişkeni (λ,∞) aralığında (α,λ) parametreli Pareto dağılıma sahip olsun.

Bu takdirde, X(t) süreci ergodiktir ve sürecin ergodik dağılımının ilk iki momenti için $\alpha > 2$ ve $E\zeta_1 \rightarrow \infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(X) = C_{21}(\alpha)\lambda + B_{11} + B_{12}\frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (99)$$

$$E(X^2) = C_{31}(\alpha)\lambda^2 + B_{21}(\alpha)\lambda + B_{22}(\alpha) + o(1) \quad (100)$$

Burada,

$$c_k(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-k}, \alpha > k\,;\; c_{k1}(\alpha) = \frac{c_k(\alpha)}{kc_1(\alpha)}, k = \overline{1,5}$$

$$e_k = E\left(\zeta_1^{k}\right) = C_k(\alpha)\lambda^k, k = 1,2,3,4$$

$$B_{11}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[m_{21} - \frac{C_{21}(\alpha)}{C_1(\alpha)}(\mu_{21} + 2Km_1)\right]$$

$$B_{12}(\alpha) = \frac{C_{21}(\alpha)}{4C_1^2(\alpha)}(\mu_{21} + 2Km_1)^2$$

$$-\frac{1}{6C_1(\alpha)}(\mu_{31} + 3\mu_{21}m_1K + 3Km_2)$$

$$B_{21}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[2C_{21}(\alpha)m_{21} - \frac{C_{31}(\alpha)}{C_1(\alpha)}(\mu_{21} + 2Km_1)\right]$$

$$B_{22}(\alpha) = \frac{C_{31}(\alpha)}{4C_1^2(\alpha)}(\mu_{21} + 2Km_1)^2$$

$$-\frac{C_{21}(\alpha)}{2C_1(\alpha)}(m_{21}\mu_{21} - 2Km_2) + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6}$$

dır.

İspat: Teorem 7'de X(t) sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri $\big(E(X)\big)$ için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştur. Beklenen değer $\big(E(X)\big)$ için üç terimli asimptotik açılım ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E(X) = \frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right) + Km_1}\left\{E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(m_{21} - 2Km_1)E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right) + Km_1e_1\right\}$$

$$J_1(\lambda) = E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)$$

Yardımcı Teorem 1'deki (33) ve (37) eşitlikleri $J_1(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_1(\lambda) = E\left(\zeta_1^2\right) + \frac{\mu_{21}}{2}E\left(\zeta_1\right) - \frac{1}{2}\left[E\left(\zeta_1^2\right) + \mu_{21}E\left(\zeta_1\right) + \frac{\mu_{31}}{3}\right] + o(1)$$

$$= \frac{1}{2}E\left(\zeta_1^2\right) - \frac{\mu_{31}}{6} + o(1)$$

$$J_1(\lambda) = \frac{C_2(\alpha)}{2}\lambda^2 - \frac{\mu_{31}}{6} + o(1) \qquad (101)$$

$$J_2(\lambda) = \frac{1}{2}(m_{21} - 2Km_1)E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right) + Km_1 e_1$$

(32) ve $E\left(\zeta_1\right) = c_1(\alpha)\lambda$ eşitlikleri $J_2(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_2(\lambda) = \frac{1}{2}(m_{21} - 2KM_1)\left[E\left(\zeta_1\right) + \frac{\mu_{21}}{2} + o(\lambda)\right] + Km_1 E\left(\zeta_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}m_{21}E\left(\zeta_1\right) + \frac{1}{4}\mu_{21}(m_{21} - 2Km_1) + o(\lambda)$$

$$J_2(\lambda) = \frac{C_1(\alpha)}{2}m_{21}\lambda + \frac{1}{4}(m_{21} - 2Km_1)\mu_{21} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (102)$$

(101) ve (102) asimptotik açılımları aşağıdaki bağıntıda göz önünde bulundurulursa:

$$J_3(\lambda) = J_1(\lambda) + J_2(\lambda)$$

$$J_3(\lambda) = C_2(\alpha)\lambda^2\left[\frac{1}{2} - \frac{m_{21}C_1(\alpha)}{2C_2(\alpha)}\frac{1}{\lambda}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{C_2(\alpha)}\left(\frac{1}{4}(m_{21} - 2Km_1)\mu_{21} - \frac{1}{6}\mu_{31}\right)\frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \qquad (103)$$

olur.

$$K(\lambda) = \frac{1}{E\left(M_1(\zeta_1)\right) + Km_1} = \frac{1}{E\left(\zeta_1\right) + \frac{\mu_{21}}{2} + o(\lambda) + Km_1} = \frac{1}{C_1(\alpha)\lambda + \frac{\mu_{21}}{2} + Km_1 + o(1)}$$

$$= \frac{1}{C_1(\alpha)\lambda\left[1+\frac{\mu_{21}+2Km_1}{2C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]}$$

$$K(\lambda) = \frac{1}{C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{\mu_{21}+2Km_1}{2C_1(\alpha)}\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{\mu_{21}+2Km_1}{2C_1(\alpha)}\right)^2\frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] \tag{104}$$

(103) ve (104) asimptotik açılımlar (105) eşitliğinde kullanılırsa:

$$E(X) = K(\lambda)J_3(\lambda) \tag{105}$$

$$E(X) = \frac{C_2(\alpha)}{2C_1(\alpha)} - \frac{1}{2}\left[m_{21} - (\mu_{21} + 2Km_1)\frac{C_2(\alpha)}{C_1^2(\alpha)}\right]$$

$$+\left[\frac{C_2(\alpha)}{8C_1^3(\alpha)}(\mu_{21} + 2Km_1)^2\right.$$

$$\left.-(\mu_{31} + 3\mu_{21}Km_1 + 3Km_2)\frac{1}{6C_1(\alpha)}\right]\frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{106}$$

olur. $\lambda \to 0$ iken, $E(X)$ için (99) asimptotik açılımı elde edilir.

Teorem 7' de X(t) sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti $\left(E(X^2)\right)$ için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştu. İkinci moment $\left(E(X^2)\right)$ için üç terimli asimptotik açılım ise aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$E(X^2) = \frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1}\left\{E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$+2A_1\left(E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right)$$

$$+Km_1\left[E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right) - 2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$\left.+A_2 E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right) + Km_1 e_2\right\}$$

$$J_4(\lambda) = E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + \frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)$$

Yardımcı Teorem 1'deki (34), (38), (41) ve $E\left(\zeta_1^3\right) = C_3(\alpha)\lambda^2$ eşitlikleri $J_4(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_4(\lambda) = E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right) - E\left(\zeta_1^3\right) - \mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right) - \frac{1}{3}\mu_{31}E\left(\zeta_1\right)$$
$$+\frac{1}{3}E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right) + \frac{1}{3}\mu_{31}E\left(\zeta_1\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{3}E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$J_4(\lambda) = \frac{C_3(\alpha)}{3}\lambda^3 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{107}$$

$$J_5(\lambda) = 2A_1\left[E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{1}{2}E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$
$$+Km_1\left[E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right) - 2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$
$$+A_2E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right) + Km_1e_2$$

(33), (37) ve $E\left(\zeta_1^2\right) = C_2(\alpha)\lambda^2$ eşitlikleri $J_5(\lambda)$ bağıntısında göz önünde bulundurulursa, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_5(\lambda) = \frac{1}{2}m_{21}E\left(\zeta_1^2\right) + A_2E\left(\zeta_1\right) + \frac{A_2\mu_{21}}{2} - \left(\frac{m_{21}-2Km_1}{6}\right)\mu_{31} + o(1)$$
$$J_5(\lambda) = \frac{m_{21}}{2}C_2(\alpha)\lambda^2 + A_2C_1(\alpha)\lambda + \frac{A_2\mu_{21}}{2} - \left(\frac{m_{21}-2Km_1}{6}\right)\mu_{31} + o(1) \tag{108}$$

(107) ve (108) asimptotik açılımlar aşağıdaki bağıntıda göz önünde bulundurulursa:

$$J_6(\lambda) = J_4(\alpha) + J_5(\alpha)$$
$$J_6(\lambda) = \frac{C_3(\alpha)}{3}\lambda^3\left[1 + \frac{3m_{21}}{2}\frac{C_2(\alpha)}{C_3(\alpha)}\frac{1}{\lambda} + A_2\frac{C_1(\alpha)}{C_3(\alpha)}\frac{1}{\lambda^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{A_1\mu_{21}}{2} - \left(\frac{m_{21}-2Km_1}{6}\right)\mu_{31}\right)\frac{1}{C_3(\alpha)} + o(1)\right] \tag{109}$$

olur. (104) ve (109) eşitlikleri (110) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$E(X^2) = K(\lambda)J_6(\lambda) \tag{110}$$

$$E(X^2) = \frac{C_3(\alpha)}{3C_1(\alpha)}\lambda^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{C_2(\alpha)}{C_1(\alpha)}m_{21} - \frac{C_3(\alpha)}{3\left(C_1(\alpha)\right)^2}\left(\mu_{21} + 2Km_1\right)\right]\lambda$$

$$+\frac{C_3(\alpha)}{12\left(C_1(\alpha)\right)^3}(\mu_{21}+2Km_1)^2-\frac{c_2(\alpha)m_{21}}{4\left(C_1(\alpha)\right)^2}(\mu_{21}+2Km_1)+A_2+o(1)$$

olur. $\lambda \to 0$ iken, $E(X^2)$ için (100) asimptotik açılımı elde edilir.

Teorem 9: Başlangıç rastgele değişkenleri $\xi_1, \eta_1, \theta_1, \zeta_1$ aşağıdaki koşulları sağlasınlar.

1. $0 < E\xi_1 < \infty$,

2. $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^5 < \infty$,

3. $E\theta_1 < \infty$,

4. η_1 rastgele değişkeni aritmetik olmayan rastgele değişken,

5. ζ_1 rastgele değişkeni (λ, ∞) aralığında (α, λ) parametreli Pareto dağılıma sahip olsun.

Bu takdirde, X(t) süreci ergodiktir ve sürecin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momenti için $\alpha > 5$ ve $E\zeta_1 \to \infty$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım yazılabilir:

$$E(X^3) = C_{41}(\alpha)\lambda^3 + B_{31}(\alpha)\lambda^2 + B_{32}(\alpha)\lambda + o(\lambda) \tag{111}$$

$$E(X^4) = C_{51}(\alpha)\lambda^4 + B_{41}(\alpha)\lambda^3 + B_{42}(\alpha)\lambda^2 + o(\lambda^2) \tag{112}$$

Burada,

$$B_{31}(\alpha) = \frac{3C_{31}(\alpha)}{2}m_{21} - \frac{C_{41}(\alpha)}{2C_1(\alpha)}(\mu_{21}+2Km_1)$$

$$B_{32}(\alpha) = \frac{C_{21}(\alpha)}{2}(3m_{21}^2 - 2m_{31}) + \frac{2C_{41}(\alpha)}{3C_1^2(\alpha)}\left(\mu_{21}^2 + \frac{3}{2}\mu_{21}Km_1 + \frac{3}{2}K^2m_1^2\right)$$
$$-\frac{3C_{31}(\alpha)}{4C_1(\alpha)}(m_{21}\mu_{21} + 2Km_2)$$

$$B_{41}(\alpha) = 6C_{41}(\alpha)\left(m_{21} - \mu_{21} - \frac{4}{3}Km_1\right) - \frac{C_{51}(\alpha)}{2C_1(\alpha)}(\mu_{21}+2Km_1)$$

$$B_{42}(\alpha) = C_{31}(\alpha)(3m_{21}^2 - 2m_{31} + 6m_{21}\mu_{21} - 3\mu_{31} - 12Km_1\mu_{21})$$
$$+\frac{C_{51}(\alpha)}{4C_1^2(\alpha)}(\mu_{21}+2Km_1)^2$$
$$-\frac{C_{41}(\alpha)}{C_1(\alpha)}(3m_{21}\mu_{21} - 3\mu_{21}^2 - 6Km_2 - 10Km_1\mu_{21} - 8K^2m_1^2)$$

dır.

İspat. Teorem 7'de X(t) sürecinin ergodik dağılımının üçüncü momenti $\left(E(X^3)\right)$ için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştur. Üçüncü moment $\left(E(X^3)\right)$ için üç terimli asimptotik açılım ise aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$
\begin{aligned}
E(X^3) = \frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1}\Big\{ & E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{3}{2} E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right) \\
& + E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{1}{4} E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right) \\
& + \frac{3}{2}(m_{21} - 2Km_1)\left[E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right] \\
& + \frac{1}{2}(m_{21} - 2Km_1)\, E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right) + 3A_2 E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{3}{2} A_2 E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right) \\
& + 3A_3 E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right) + Km_1 e_3 \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_7(\lambda) = {} & E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{3}{2} E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right) + E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right) \\
& - \frac{1}{4} E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

Yardımcı Teorem 1'deki (35), (39), (42), (44) ve $E\left(\zeta_1^4\right) = C_4(\alpha)\lambda^4$ eşitlikleri $J_7(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$
\begin{aligned}
J_7(\lambda) = {} & E\left(\zeta_1^4\right) + \frac{1}{2}\mu_{21} E\left(\zeta_1^3\right) - \frac{3}{2} E\left(\zeta_1^4\right) - \frac{1}{2}\mu_{31} E\left(\zeta_1^2\right) \\
& + E\left(\zeta_1^4\right) + \frac{3}{2}\mu_{21} E\left(\zeta_1^3\right) - \mu_{31} E\left(\zeta_1^2\right) - \frac{1}{4} E\left(\zeta_1^4\right) - \frac{1}{2}\mu_{21} E\left(\zeta_1^3\right) \\
& - \frac{1}{2}\mu_{31} E\left(\zeta_1^2\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$J_7(\lambda) = \frac{1}{4} E\left(\zeta_1^4\right) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$J_7(\lambda) = \frac{1}{4} C_4(\alpha)\lambda^4 + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{113}$$

$$J_8(\lambda) = \frac{3}{2}(m_{21} - 2Km_1)\left[E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}(m_{21} - 2Km_1)\, E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)$$

(34), (38), (41) ve $E\left(\zeta_1^3\right) = C_3(\alpha)\lambda^3$ eşitlikleri $J_8(\lambda)$ bağıntısında göz önünde bulundurulursa, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_8(\lambda) = \frac{1}{2}(m_{21} - 2Km_1)\Big\{3E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{3}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right) - 3E\left(\zeta_1^3\right)$$

$$-3\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right) - \frac{1}{3}\mu_{31}E\left(\zeta_1\right) + E\left(\zeta_1^3\right) + \frac{3}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right) + \mu_{31}E\left(\zeta_1\right)$$

$$J_8(\lambda) = \frac{1}{2}\,(m_{21} - 2Km_1)E\left(\zeta_1^3\right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$J_8(\lambda) = \frac{1}{2}\,(m_{21} - 2Km_1)C_3(\alpha)\lambda^3 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (114)$$

$$J_9(\lambda) = 3A_2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - \frac{3}{2}A_2E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right) + 3A_3E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)$$

Yardımcı Teorem 1'deki (33), (37), (32) ve $E\left(\zeta_1^2\right) = C_2(\alpha)\lambda^2$ eşitlikleri $J_9(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_9(\lambda) = 3A_2E\left(\zeta_1^2\right) + \frac{3}{2}A_2\mu_{21}\,E\left(\zeta_1\right) - \frac{3}{2}A_2E\left(\zeta_1^2\right) - \frac{3}{2}A_2\mu_{21}\,E\left(\zeta_1\right)$$

$$-\frac{3}{2}A_2\mu_{31} + 3A_2E\left(\zeta_1\right) + \frac{3}{2}A_2\mu_{21}$$

$$= \frac{3}{2}A_2E\left(\zeta_1^2\right) + 3A_2E\left(\zeta_1\right) + \frac{3}{2}A_2\mu_{21} - \frac{3}{2}A_2\mu_{31}$$

$$J_9(\lambda) = \frac{3}{2}A_2C_2(\alpha)\lambda^2 + 3A_2C_1(\alpha)\lambda + \frac{3}{2}A_2\mu_{21} - \frac{3}{2}A_2\mu_{31} \qquad (115)$$

(113), (114) ve (115) asimptotik açılımlar aşağıdaki bağıntıda göz önünde bulundurulursa:

$$J_{10}(\lambda) = J_7(\lambda) + J_8(\lambda) + J_9(\lambda) + Km_1e_3$$

$$J_{10}(\lambda) = \frac{1}{4}C_4(\alpha)\lambda^4 + \frac{m_{21}}{2}C_3(\alpha)\lambda^3 + \frac{3}{2}A_2C_2(\alpha)\lambda^2 + 3A_2C_1(\alpha)\lambda$$
$$-\frac{3}{2}A_2\mu_{31} + \frac{3}{2}A_2\mu_{21} + o(1) \qquad (116)$$

olur. (104) ve (116) eşitlikleri (117) bağıntısında yerine yazılırsa,

$$E(X^3) = K(\lambda)J_{10}(\lambda) \qquad (117)$$

$$E(X^3) = \frac{C_4(\alpha)}{4C_1(\alpha)}\lambda^3 - \frac{C_4(\alpha)}{4}\frac{(\mu_{21}+2Km_1)}{2(C_1(\alpha))^2}\lambda^2 + \frac{C_4(\alpha)}{6}\frac{(\mu_{21}+2Km_1)^2}{(C_1(\alpha))^3}\lambda$$
$$+\frac{m_{21}C_3(\alpha)}{2C_1(\alpha)}\lambda^2 - \frac{m_{21}C_3(\alpha)}{2}\frac{(\mu_{21}+2Km_1)}{2(C_1(\alpha))^2} + \frac{3A_2C_2(\alpha)}{2}\frac{1}{C_1(\alpha)}\lambda + o(\lambda)$$

$$E(X^3) = \frac{C_4(\alpha)}{4C_1(\alpha)}\lambda^3 - \left[\frac{C_4(\alpha)}{8(C_1(\alpha))^2}(\mu_{21} + 2Km_1) - \frac{m_{21}C_3(\alpha)}{2C_1(\alpha)}\right]\lambda^2$$
$$+\left[\frac{\mu_{21}^2C_4(\alpha)}{6(C_1(\alpha))^3} + \frac{Km_1\mu_{21}C_4(\alpha)}{4(C_1(\alpha))^3} + \frac{K^2m_1^2C_4(\alpha)}{4(C_1(\alpha))^3}\right.$$
$$\left.-\frac{m_{21}\mu_{21}C_3(\alpha)}{4(C_1(\alpha))^2} - \frac{Km_1m_{21}C_3(\alpha)}{2(C_1(\alpha))^2} + \frac{3A_2C_2(\alpha)}{2C_1(\alpha)}\right]\lambda + o(\lambda)$$

elde edilir. $c_k(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-k}, \alpha > k$ ifadesi yukarıda kullanılırsa,

$$E(X^3) = \frac{(\alpha-1)}{4(\alpha-4)}\lambda^3 - \left[\frac{\mu_{21}}{8}\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-4)} + \frac{Km_1}{4}\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-4)} - \frac{m_{21}}{2}\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-3)}\right]\lambda^2$$
$$+\left[\frac{\mu_{21}^2}{6}\frac{(\alpha-1)^3}{\alpha^2(\alpha-4)} + \frac{Km_1\mu_{21}}{4}\frac{(\alpha-1)^3}{\alpha^2(\alpha-4)} + \frac{K^2m_1^2}{4}\frac{(\alpha-1)^3}{\alpha^2(\alpha-4)}\right.$$
$$\left.-\frac{m_{21}\mu_{21}}{4}\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-3)} - \frac{Km_1\mu_{21}}{2}\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-3)} + \frac{3A_2}{2}\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-2)}\right]\lambda + o(\lambda)$$

olur. $\lambda \to 0$ iken, $E(X^3)$ için (113) asimptotik açılımı elde edilir.

Teorem 7' de X(t) sürecinin ergodik dağılımının dördüncü momenti $\left(E(X^4)\right)$ için aşağıdaki kesin ifade bulunmuştu. Dördüncü moment $\left(E(X^4)\right)$ için üç terimli asimptotik açılım ise aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E(X^4) = \frac{1}{E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1}\left\{E\left(\zeta_1^4 M_1\left(\zeta_1\right)\right) - 2E\left(\zeta_1^3 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$+2E\left(\zeta_1^2 M_3\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1 M_4\left(\zeta_1\right)\right)+\tfrac{1}{5}E\left(M_5\left(\zeta_1\right)\right)$$

$$+(m_{21}-2Km_1)\left[2E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-3E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$\left.+2E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right)+\tfrac{1}{2}E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+6A_2\left[E\left(\zeta_1^2 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1 M_2\left(\zeta_1\right)\right)+\tfrac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$+6A_3\left[2E\left(\zeta_1 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

$$\left.+3A_4E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1e_4\right\}$$

$$J_{11}(\lambda)=E\left(\zeta_1^4 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-2E\left(\zeta_1^3 M_2\left(\zeta_1\right)\right)$$

$$+2E\left(\zeta_1^2 M_3\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1 M_4\left(\zeta_1\right)\right)+\tfrac{1}{5}E\left(M_5\left(\zeta_1\right)\right)$$

Yardımcı Teorem 1'deki (36), (40), (43), (45), (46) ve $E\left(\zeta_1^5\right)=C_5(\alpha)\lambda^5$ eşitlikleri $J_{11}(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda\to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_{11}(\lambda)=\tfrac{1}{5}C_5(\alpha)\lambda^5-\tfrac{3\mu_{21}}{2}E\left(\zeta_1^4\right)-\mu_{31}E\left(\zeta_1^3\right)+o\left(\tfrac{1}{\lambda^3}\right) \tag{118}$$

$$J_{12}(\lambda)=(m_{21}-2Km_1)\left[2E\left(\zeta_1^3 M_1\left(\zeta_1\right)\right)-3E\left(\zeta_1^2 M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right.$$

$$\left.+2E\left(\zeta_1 M_3\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{2}E\left(M_4\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

(35), (39), (42) ve (44) eşitlikleri $J_{12}(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda\to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_{12}(\lambda)=(m_{21}-2Km_1)\left[2E\left(\zeta_1^4\right)+\mu_{21}E\left(\zeta_1^3\right)-3\,E\left(\zeta_1^4\right)-3\mu_{21}E\left(\zeta_1^3\right)\right.$$

$$-\mu_{31}E\left(\zeta_1^2\right)+2E\left(\zeta_1^4\right)+3\mu_{21}E\left(\zeta_1^3\right)+2\mu_{31}E\left(\zeta_1^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}E\left(\zeta_1^4\right)+\mu_{21}E\left(\zeta_1^3\right)+\mu_{31}E\left(\zeta_1^2\right)\Big]$$
$$=(m_{21}-2Km_1)\left[\frac{3}{2}E\left(\zeta_1^4\right)+2\mu_{21}E\left(\zeta_1^3\right)+2\mu_{31}E\left(\zeta_1^2\right)\right]$$

$J_{12}(\lambda)$ ifadesinde $E\left(\zeta_1^k\right)=C_k(\alpha)\,\lambda^k$ ve $C_k(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha-k}, \alpha>k$ olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$J_{12}(\lambda)=(m_{21}-2Km_1)\left[\frac{3}{2}C_4(\alpha)\,\lambda^4+2\mu_{21}C_3(\alpha)\,\lambda^3+2\mu_{31}C_2(\alpha)\,\lambda^2\right]$$
$$=(m_{21}-2Km_1)\left[\frac{3}{2}\frac{\alpha}{(\alpha-4)}\lambda^4+2\mu_{21}\frac{\alpha}{(\alpha-3)}\lambda^3+2\mu_{31}\frac{\alpha}{(\alpha-2)}\lambda^2\right] \qquad (119)$$

elde edilir.

$$J_{13}(\lambda)=6A_2\left[E\left(\zeta_1^2M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(\zeta_1M_2\left(\zeta_1\right)\right)+\frac{1}{3}E\left(M_3\left(\zeta_1\right)\right)\right]$$

Yardımcı Teorem 1'deki (34), (38) ve (41) eşitlikleri $J_{13}(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda\to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_{13}(\lambda)=6A_2\left[E\left(\zeta_1^3\right)+\frac{1}{2}\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right)-E\left(\zeta_1^3\right)-\mu_{21}E\left(\zeta_1^2\right)-\frac{\mu_{31}}{3}E\left(\zeta_1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}E\left(\zeta_1^3\right)+\frac{\mu_{21}}{2}E\left(\zeta_1^2\right)+\frac{\mu_{31}}{3}E\left(\zeta_1\right)\right]$$
$$=2A_2E\left(\zeta_1^3\right)+o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)=2A_2C_3(\alpha)\,\lambda^3+o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$
$$J_{13}(\lambda)=2A_2\frac{\alpha}{(\alpha-3)}\lambda^3+o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \qquad (120)$$

$$J_{14}(\lambda)=6A_3\left[2E\left(\zeta_1M_1\left(\zeta_1\right)\right)-E\left(M_2\left(\zeta_1\right)\right)\right]3A_4E\left(M_1\left(\zeta_1\right)\right)+Km_1e_4$$

(32), (33) ve (37) eşitlikleri $J_{14}(\lambda)$ bağıntısında yerine yazılırsa, $\lambda\to 0$ iken aşağıdaki açılım elde edilir.

$$J_{14}(\lambda) = \left[2E\left(\zeta_1^{2}\right) + \mu_{21}E\left(\zeta_1\right) - E\left(\zeta_1^{2}\right) - \mu_{21}E\left(\zeta_1\right) - \frac{\mu_{31}}{3}\right]$$
$$+3A_4\left[E\left(\zeta_1\right) + \frac{\mu_{21}}{2}\right] + Km_1e_4$$
$$= 6A_3E\left(\zeta_1^{2}\right) + 3A_4E\left(\zeta_1\right) - 2A_3\mu_{31} + \frac{3A_4\mu_{21}}{2} + Km_1e_4$$

$$J_{14}(\lambda) = 6A_3C_2(\alpha)\,\lambda^2 + 3A_4C_1(\alpha)\,\lambda - 2A_3\mu_{31} + \frac{3A_4\mu_{21}}{2} + Km_1C_4(\alpha)\,\lambda^4$$
$$= 6A_3\frac{\alpha}{(\alpha-2)}\lambda^2 + 3A_4\frac{\alpha}{(\alpha-1)}\lambda - 2A_3\mu_{31} + \frac{3A_4\mu_{21}}{2} + Km_1\frac{\alpha}{(\alpha-4)}\lambda^4 \tag{121}$$

(118), (119), (120), (121) ve $E\left(\zeta_1^{k}\right) = C_k(\alpha)\,\lambda^k$ eşitlikleri (122) bağıntısında göz önünde bulundurulursa;

$$J_{15}(\lambda) = J_{11}(\lambda) + J_{12}(\lambda) + J_{13}(\lambda) + J_{14}(\lambda) \tag{122}$$

elde edilir.

$$J_{15}(\lambda) = \frac{1}{5}E\left(\zeta_1^{5}\right) + \left(\frac{3}{2}m_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)E\left(\zeta_1^{4}\right) - 2Km_1E\left(\zeta_1^{4}\right)$$
$$+[2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2 - 4Km_1\mu_{21}]E\left(\zeta_1^{3}\right)$$
$$+[2m_{21}\mu_{31} + 6A_2 - Km_1\mu_{31}]E\left(\zeta_1^{2}\right)$$
$$+3A_3E\left(\zeta_1\right) - 2A_2\mu_{31} + \frac{3}{2}A_3\mu_{21} + o(1)$$
$$J_{15}(\lambda) = \frac{C_5(\alpha)}{5}\lambda^5 + \left(\frac{3}{2}m_{21} - \frac{3}{2}\mu_{21}\right)C_4(\alpha)\lambda^4 - 2Km_1C_4(\alpha)\lambda^4$$
$$+[2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2 - 4Km_1\mu_{21}]C_3(\alpha)\lambda^3$$
$$+[2m_{21}\mu_{31} + 6A_2 - Km_1\mu_{31}]C_2(\alpha)\lambda^2$$
$$+3A_3C_1(\alpha)\lambda - 2A_2\mu_{31} + \frac{3}{2}A_3\mu_{21} + o(1) \tag{123}$$

elde edilir. (104) ve (123) eşitlikleri (124) bağıntısında yerine yazılırsa;

$$E(X^4) = K(\lambda)J_{15}(\alpha) \tag{124}$$

$$E(X^4) = \frac{1}{5}\frac{C_5(\alpha)}{C_1(\alpha)}\lambda^4 + \left[\left(m_{21} - \mu_{21} - \frac{4}{3}Km_1\right)\frac{3}{2}\frac{C_4(\alpha)}{C_1(\alpha)} - \frac{[\mu_{21}+2\,Km_1]}{10}\frac{C_5(\alpha)}{C_1^2(\alpha)}\right]\lambda^3$$
$$+\left\{[2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2 - 4Km_1\mu_{21}]\frac{C_3(\alpha)}{C_1(\alpha)} - \frac{3[m_{21}\mu_{21} - \mu_{21}{}^2 - 2Km_{21}m_1]}{4}\frac{C_4(\alpha)}{C_1^2(\alpha)}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{5}{2}Km_1\mu_{21} + 2K^2m_1{}^2\right]\frac{C_4(\alpha)}{C_1^2(\alpha)} + \frac{[\mu_{21}+2Km_1]^2}{20}\frac{C_5(\alpha)}{C_1^3(\alpha)}\right\}\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

olur. $c_k(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-k}, \alpha > k$ eşitliği yukarıda yerine yazılırsa,

$$E(X^4) = \frac{1}{5}\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-5)}\lambda^4$$
$$+\left[\left(m_{21} - \mu_{21} - \frac{4}{3}Km_1\right)\frac{3}{2}\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-4)} - \frac{[\mu_{21}+2Km_1]}{10}\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-5)}\right]\lambda^3$$
$$+(\{2m_{21}\mu_{21} - \mu_{31} + 2A_2 - 4Km_1\mu_{21})\frac{(\alpha-1)}{(\alpha-3)}$$
$$-\left[\frac{3(m_{21}\mu_{21} - \mu_{21}{}^2 - 2Km_{21}m_1)}{4}\right]\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-4)} + \left(\frac{5}{2}Km_1\mu_{21} + 2K^2m_1^2\right)\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-4)}$$
$$+\left[\frac{[\mu_{21}+2Km_1]^2}{20}\right]\frac{(\alpha-1)^3}{\alpha^2(\alpha-5)}\bigg\}\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

elde edilir. $\lambda \to 0$ iken, $E(X^4)$ için (112) ifadesindeki asimptotik açılım elde edilir.

Elde edilen yaklaşık değerlerin ergodik momentlerin gerçek değerlerine ne kadar yakın olduğu sorusunun cevabı benzetim yöntemi kullanılarak bulunmaya çalışılacaktır. Bu amaçla Monte Carlo simulasyon yöntemini kullanılarak, ergodik momentlerin asimptotik değerlerinin simulasyon değerlerine ne derecede uyum sağladığını araştırılacaktır.

2.2.4. Simulasyon Sonuçları

Bu bölümde, elde edilen ergodik momentler için asimptotik değerler sembolik olarak $\widetilde{E}(X^n)$, $n = 1,2,3,4$ gösterilecektir. Benzer şekilde, $\widehat{E}(X^n), n = 1,2,3,4$ ile n. ergodik moment için Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak elde edilecek simulasyon değerleri gösterilecektir. Her bir simulasyon değer bilgisayarda MATLAB programı kullanılarak ve sürecin $n = 10^9$ realizasyonu (izi) üretilerek elde edilmiştir. Bu değerlerden aşağıdaki tablolar ilk dört ergodik momentler için oluşturulmuştur. Ayrıca,

Δ_n, δ_n, AP_n notasyonları ile, sırasıyla, mutlak hatalar, nispi hatalar ve uyum yüzdeleri gösterilmişler. Diğer bir ifadeyle;

$$\Delta_n = \left|\widetilde{E}(X^n) - \widehat{E}(X^n)\right|;\ \delta_n = \frac{\Delta_n}{\widehat{E}(X^n)} 100\%;\ AP_n = (100 - \delta_n)\% \tag{125}$$

dür. λ parametresinin çeşitli değerleri için düzenlenmiş tablolar aşağıda yer almaktadır.

Tablo 1. E(X) için asimptotik ve simulasyon değerlerinin karşılaştırılması

λ	$\widehat{E}(X)$	$\widetilde{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
10	06,165761	05,612679	0,553081700	8,970209841	91,02979016
20	11,801126	11,269562	0,531563850	4,504348568	95,49565143
30	17,394753	16,905190	0,489563233	2,814430497	97,18556950
40	23,058255	22,535504	0,522751425	2,267090138	97,73290986
50	28,709556	28,163692	0,545864140	1,901332574	98,09866743
60	33,694451	33,790817	0,096366383	0,286000752	99,71399925
70	39,400693	39,417336	0,016643058	0,042240522	99,95775948
80	45,059501	45,043474	0,016026712	0,035567887	99,96443211
90	50,658250	50,669360	0,011109922	0,021931121	99,97806888
100	56,305713	56,295068	0,010644570	0,018904956	99,98109504

Tablo 2. $E(X^2)$ için asimptotik ve simulasyon değerlerinin karşılaştırılması

λ	$\widehat{E}(X^2)$	$\widetilde{E}(X^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
10	50,816530	45,7592328	05,057297143	9,952070995	90,04792900
20	187,253128	177,2327514	10,02037657	5,351246560	94,64875344
30	408,617879	394,4205557	14,19732329	3,474474323	96,52552568
40	717,613526	697,3226457	20,29088029	2,827549865	97,17245013
50	1.112,182550	1.085,9390210	26,24352857	2,359642180	97,64035782
60	1.590,061461	1.560,2696830	29,79177814	1,873624314	98,12637569
70	2.132,749432	2.120,3146300	12,43480200	0,583040924	99,41695908
80	2.770,622414	2.766,0738630	4,548551143	0,164170734	99,83582927
90	3.494,750520	3.497,5473810	2,796861429	0,080030360	99,91996964
100	4.317,052304	4.314,7351860	2,317118286	0,053673621	99,94632638

Tablo 3. $E(X^3)$ için asimptotik ve simulasyon değerlerinin karşılaştırılması

λ	$\hat{E}(X^3)$	$\tilde{E}(X^3)$	Δ_3	$\delta_3(\%)$	$AP_3(\%)$
10	482,172062	433,4	48,772062	10,11507423	89,88492577
20	3.402,366608	3.230,8	171,566608	5,042566771	94,95743323
30	11.090,502644	10.642,2	448,302644	4,042221154	95,95777885
40	25.694,601926	24.917,6	777,001926	3,023988962	96,97601104
50	49.489,299325	48.307,0	1182,299325	2,388999928	97,61100007
60	84.664,729425	83.060,4	1604,329425	1,894920631	98,10507937
70	133.021,585678	131.427,8	1593,785678	1,19814064	98,80185936
80	197.272,140947	195.659,2	1612,940947	0,817622265	99,18237774
90	279.802,915654	278.004,6	1798,315654	0,642707975	99,35729202
100	382.294,865388	380.714,0	1580,865388	0,413519911	99,58648009

Tablo 4. $E(X^4)$ için asimptotik ve simulasyon değerlerinin karşılaştırılması

λ	$\hat{E}(X^4)$	$\tilde{E}(X^4)$	Δ_4	$\delta_4(\%)$	$AP_4(\%)$
10	4.906,113625	4.348	558,113625	11,37588054	88,62411946
20	67.344,249446	63.192	4152,249446	6,165707511	93,83429249
30	324.865,617827	310.032	14833,61783	4,566078099	95,43392190
40	1.004.589,589315	964.768	39821,58931	3,963965956	96,03603404
50	2.398.512,254144	2.333.700	64812,25414	2,702185658	97,29781434
60	4.900.069,255601	4.809.528	90541,25560	1,847754611	98,15224539
70	9.005.996,839277	8.87.1352	134644,8393	1,49505759	98,50494241
80	15.255.401,816678	15.084.672	170729,8167	1,119143361	98,88085664
90	24.328.849,173680	24.101.388	227461,1737	0,934944239	99,06505576
100	36.483.926,187732	36.659.800	175873,8123	0,482058349	99,51794165

Tablo 1, 2, 3 ve 4'den görüldüğü gibi λ parametresinin 90 dan büyük tüm değerleri için asimptotik değerler ile simülasyon değerleri arasındaki uyum yüzdeleri % 99 un üzerindedir. Dolayısıyla ortaya konulan asimptotik açılımlardan elde edilen yaklaşık değerler simulasyon değerlerine çok büyük uyum sağlamaktadır. Bu ise şu anlama gelmektedir. Ergodik momentler için elde edilen acılımlar λ parametresinin çok da büyük olmayan değerlerinde bile ergodik momentlerin kesin ifadelerin yerine güvenli bir şekilde kullanılabilirler.

2.2.5. X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımı İçin Zayıf Yakınsama Teoremi

Bu bölümün öncelikli amacı $E(\zeta_1) \to \infty$ iken ergodik dağılım için zayıf yakınsama teoremini ispatlamaktır [28].

$\lambda \to 0$ İken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının asimptotik davranışları için $W_\lambda(t)$ yardımcı süreci $W_\lambda(t) = \lambda X(t)$ şeklinde tanımlansın.

Teorem 10: Teorem 1'in şartları sağlansın, $\lambda \to 0$ iken ve her $\alpha, x > 0$ için $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu olan $\mathbb{Q}_{W_\lambda}(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{ W_\lambda(t) \le x\}$ bir limit dağılım fonksiyonu olan $G(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf anlamda yakınsar.

$$\mathbb{Q}_{W_\lambda}(x) \to G(x) \equiv \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x u^\alpha du$$

İspat: (27) eşitliğinden $W_\lambda(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varphi_{W_\lambda}(u) = J_1(\alpha,\lambda) + J_2(\alpha,\lambda) + J_3(\alpha,\lambda) + J_4(\alpha,\lambda) \tag{126}$$

Burada;

$$I_1(\alpha,\lambda) = \left(EN(\zeta) + K\right), I_2(\alpha,\lambda) = I_1(\alpha,\lambda)\left(1 - \varphi_{\eta_1}(-u\lambda)\right),$$

$$J_1(\alpha,\lambda) = \frac{1}{I_2(\alpha,\lambda)}\alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{-(\alpha+1)}(\exp(-iux\lambda) - 1)\, dx,$$

$$J_2(\alpha,\lambda) = \frac{K}{I_1(\alpha,\lambda)}$$

$$J_3(\alpha,\lambda) = \frac{1}{I_2(\alpha,\lambda)}\alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{-(\alpha+1)}E\left\{\exp\left(-iu\lambda\bar{S}_{N(x)}\right) - 1\right\} dx,$$

$$J_4(\alpha,\lambda) = J_2(\alpha,\lambda)\, \alpha\lambda^\alpha \int_\lambda^\infty x^{-(\alpha+1)}E\left\{\exp\left(-iu\lambda\bar{S}_{N(x)}\right) - 1\right\} dx,$$

$$\bar{S}_{N(x)} \equiv S_{N(x)} - x,\ x > 0$$

dır.

$\lambda \to 0$ iken Yenileme Teoremi'nden aşağıdaki eşitlik yazılabilir [21].

$$EN(\zeta) = \frac{1}{m_1}\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{\lambda} + \frac{m_2}{2m_1^2} + J(\alpha,\lambda) \tag{127}$$

Burada;

$$J(\alpha,\lambda) = \alpha\lambda^{\alpha}\int_{\lambda}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} g(x)\,dx$$

dir.

$\lambda \to 0$ iken ve her $\alpha > 0$ için Yardımcı Teorem 2'den $J(\alpha,\lambda) = o(1)$ ifadesi elde edilir. Bu ifade (127) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$EN(\zeta) = \frac{1}{m_1}\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{\lambda} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(1) \quad (128)$$

olur. $\lambda \to 0$ iken (128) eşitliğinden,

$$I_1(\alpha,\lambda) = \frac{1}{m_1}\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{\lambda} + \frac{m_2}{2m_1^2} + K + o(1) \quad (129)$$

elde edilir. Bir başka ifadeyle $\lambda \to 0$ iken,

$$1 - \varphi_{\eta_1}(-u\lambda) = iu\lambda m_1[1 + o(1)] \quad (130)$$

olur. (129) ve (130) eşitlikleri kullanılırsa,

$$I_2(\alpha,\lambda) = iu\frac{\alpha}{\alpha-1}[1 + o(1)] \quad (131)$$

elde edilir. (131) eşitliğinden aşağıdaki bağıntı elde edilebilir.

$$J_1(\alpha,\lambda) = \frac{\alpha-1(\varphi_{\alpha,1}(u)-1)}{iu\alpha}[1 + o(1)] \quad (132)$$

Burada $(\alpha, 1)$ parametreli Pareto dağılımının karakteristik fonksiyonu $\varphi_{\alpha,1}(u)$ dur. Şimdi $\lambda \to 0$ iken $J_2(\alpha,\lambda)$ nın asimptotik davranışlarını incelenecektir.

(129) eşitliği göz önünde bulundurularak $J_2(\alpha,\lambda)$=0(λ) ifadesi elde edilir. (133) Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremine göre [21], $x \to \infty$ iken,

$$E(\bar{S}_{N(x)}) = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1) \quad (134)$$

olur. Burada $\bar{S}_{N(x)} \equiv S_{N(x)} - x$ ve $\mu_k = \left(E(\chi_1^+)\right)^k$, $k = 1{,}2$ dir. $\lambda \to 0$ iken Yardımcı Teorem 2 ve (134) eşitliği kullanılarak (135) ifadesi elde edilir.

$$\alpha\lambda^{\alpha} \int_{\lambda}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} E(\bar{S}_{N(x)}) dx = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1) \tag{135}$$

Bunun yanı sıra, $\left|E\left\{\exp\left(-iu\lambda\bar{S}_{N(x)}\right) - 1\right\}\right| \leq |\lambda u| E(\bar{S}_{N(x)})$ yazılır. (136) $\lambda \to 0$ iken (134) ve (135) eşitlikleri kullanılarak (137) ifadesi elde edilir.

$$\alpha\lambda^{\alpha} \left| \int_{\lambda}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} E\left[\exp\left(-iu\lambda\,\bar{S}_{N(x)}\right) - 1\right] \right| dx \leq \lambda|u| \left[\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1)\right] \tag{137}$$

Bu eşitlik göz önünde bulundurulursa;

$$J_3(\alpha, \lambda) = O(\lambda) \tag{138}$$

eşitliği elde edilir. Buna ilaveten $\lambda \to 0$ iken (133) ve (137) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$J_4(\alpha, \lambda) = 0 \tag{139}$$

$\lambda \to 0$ iken ve her $\alpha > 0$ için (132), (133), (138) ve (139) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\varphi_{W_\lambda}(u) = \frac{(\alpha-1)\left(\varphi_{\alpha,1}(u) - 1\right)}{iu\alpha}[1 + o(1)]$$

Bundan dolayı $W_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu limit dağılım fonksiyonuna zayıf anlamda yakınsar [21].

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathbb{Q}_{W_\lambda}(x) = G(x) \equiv \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^x u^{\alpha} du$$

Böylece Teorem 10 ispatlanmış olur.

3. BULGULAR

Bu çalışmada “Pareto Müdahaleli Yarı–Markov Rastgele Yürüyüş Süreci” ele alınmıştır. İlgilenilen fiziksel modelleri ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak oluşturulmuş ve süreç için ergodik teorem ispat edilmiştir. Ayrıca sürecin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir. Buna ek olarak sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeler ve asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Daha sonra sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca, süreç için Monte Carlo simulasyon yöntemi uygulanarak, ergodik momentlerin değerleri elde edilmiş ve asimptotik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda elde edilen asimptotik açılımların simulasyon sonuçlarına yeterince yakın oldukları tespit edilmiştir. Hatta λ parametresinin 90’dan büyük tüm değerleri için asimptotik değerler ile simülasyon değerleri arasındaki uyum yüzdelerinin %99’un üzerinde olduğu gözlemlenmiştir.

4. İRDELEME

Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri ile ilgili literatürde birçok önemli çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da, uygulamanın ihtiyacını karşılayacak nitelikte değildir. Aşikâr ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalarda vardır. Fakat bu çalışmaların eksik olan yönü, ele alınan modellerin gereğinden fazla idealize edilmiş olmaları ve süreçlerin her yönüyle incelenmiş olmamalarıdır. Bunun temel nedeni, bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olmalarıdır. Özellikle, müdahaleyi ifade eden rastgele değişkenler yeterince geniş bir sınıfa ait olduklarında sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur.

Bu çalışmada asimptotik yöntemler kullanılarak, Pareto müdahaleli yarı–Markov rastgele yürüyüş sürecinin olasılık ve sayısal karakteristikleri için pratik öneme sahip asimptotik ifadeler elde edilmiştir.

Bu çalışma kapsamında incelenen modelde bazı değişikliklerin yapılabilmesi mümkündür. Örneğin, başlangıç rastgele değişkenlerinin bağımlı olması durumunda ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi ve bu çalışmada kullanılan analitik ve asimptotik yöntemler iki bariyerli yarı-Markov süreçlerine de uygulanarak önemli asimptotik sonuçlar elde edilebilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada "Pareto Müdahaleli Yarı–Markov Rastgele Yürüyüş Süreci" ele alınmış ve bu süreçler için aşağıdaki teorik sonuçlar elde edilmiştir.

1. İlgilenilen fiziksel modelleri ifade eden stokastik süreçler, matematiksel olarak oluşturulmuştur.
2. Pareto müdahaleli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımı ve karakteristik fonksiyonu için kesin ifadeler bulunmuştur.
3. Ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $\mathbf{S}_{\mathbf{N}(\mathbf{z})}$ sınır fonksiyonelleri yardımıyla ifade edilmiştir.
4. Sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ifadeler bulunmuştur.
5. Pareto müdahaleli yarı–Markov rastgele yürüyüş sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir.
6. Sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiştir.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, yarı-Markov süreçleri teorisindeki bir eksikliği giderebileceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmanın aşağıdaki yönlerle de geliştirilebilmesi mümkündür:

1. Müdahaleyi ifade eden rastgele değişkenin dağılımını, ele alınan dağılım sınıfından daha geniş bir sınıftan seçerek benzer süreçlerin analitik ve asimptotik özelliklerinin incelenmesi.
2. Başlangıç rastgele değişkenlerinin bağımlı olması durumunda ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi.
3. Elde edilen kesin formüller ve asimptotik formüllerin arasındaki farkın değerlendirilmesi.
4. Bu çalışmadaki analitik ve asimptotik yöntemleri kullanarak benzer problemlerin iki bariyerli yarı-Markov süreçler için çözülmesi.

7. KAYNAKLAR

1. Abramowitz, M. and Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Wiley, New York, 1964.

2. Afanasyeva, L .G. and Bulinskaya, E. V., Stochastic Processes in the Theory of Queues and Inventory Control, Moscow, 1980.

3. Afanasyeva, L.G. and Bulinskaya, E.V., Storage capacity optimization, Engineering Cybernetics, 19, 5 (1981) 49-57.

4. Afanasyeva, L.G. and Bulinskaya, E. V., Some asymptotic results for random walks in a strip, Theory of Probability and Its Applications, 29, 4 (1984) 654-668.

5. Aliyev, R., Okur Bekar, N., Khaniyev, T. and Unver, I., Asymptotic expansions for the moments of the boundary functionals of the renewal reward process with a discrete interference of chance, Mathematical and Computational Applications, 15, (2010) 117-126.

6. Aliyev, R., Khaniyev, T. A. and Kesemen, T., 2010, "Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with gamma distributed interference of chance", Communications in Statistics-Theory and Methods, 39, 1, 130-143.

7. Alsmeyer, G., Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12, 1 (1991) 19-27.

8. Anisimov, V.V., Diffusion approximation in switching stochastic models and its applications, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A.V.Skorohod and Yu.V. Borovskikh, VSP, Zeist, The Netherlands, (1995) 13-40.

9. Anisimov, V.V., Averaging methods for transient regimes in overloading retrial queuing systems, Mathematical and Computational Modelling, 30, 3-4 (1999) 65-78.

10. Anisimov, V.V. and Artalejo, J.R., Analysis of Markov multi-server retrial queues with negative arrivals, Queuing Systems: Theory and Applications, 39, 2-3 (2001) 157-182.

11. Aras, G. and Woodroofe, M., Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average, Annals of Statistics, 21 (1993) 503-519.

12. Asmussen, S., Applied Probability and Queues, Wiley, New York, 1987.

13. Borovkov, A.A., On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theory of Probability and its Appl., 10 (1965) 331-334.

14. Borovkov, A.A., On a walk in a strip with inhibitory boundaries, Mathematical Notes, 17 (1975) 385-389

15. Borovkov, A.A., Stochastic Processes in Queuing Theory, Springer, New York, 1976.

16. Borovkov, A.A., Asymptotic Methods in Queuing Theory, Wiley, New York, 1984.

17. Brown, M. and Ross, S.M., Asymptotic properties of cumulative processes, SIAM Journal of Applied Mathematics, 22, 1 (1972) 93-105.

18. Brown, M. and Solomon, H., A second-order approximation for the variance of a renewal-reward process, Stochastic Processes and Applications, 3 (1975) 301- 314.

19. Denuit, M., Lefevre, Cl. and Picard, Ph., Polynomial structures in order statistics distributions, Journal of Statistical Planning and Inference, 113(2003) 151-178.

20. Feller, W., On semi-Markov Process, Proceedings of National Academy of Sciences, USA, 51, 4 (1964) 130-145.

21. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, J. Wiley, New York, 1971.

22. Gihman, I. I. and Skorohod, A.V., Theory of Stochastic Processes II, Springer, Berlin, 1975.

23. Gnedenko, I. I. and Kovalenko, I. N., Introduction to Queuing Theory, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1968.

24. Goovaerts M., Dhaene J. and De Schepper A., Stochastic upper bounds for present value functions, Journal of Risk and Insurance , 67, 1 (2000) 1-14.

25. Jewell, W. S., Fluctuation of a Renewal-Reward Process, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19 (1967) 309-329.

26. Kesemen, T., Genişletilmiş (s,S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2001.

27. Kesemen, T., Rastgele hacimli genişletilmiş (s,S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.

28. Kesemen, T., Yetim, F., Weak convergence theorem for a semi-markovian random walk with delay and Pareto distributed interference of chance, First İnternational Conference On Analysis and Applied Mathematics, American Institue of Physics Conference Proceeding, 1470 (2012) 255-258.

29. Kesemen, T., Aliyev, R., Khaniyev, T. A., 2013 "Limit distribution for semi-Markovian random walk with Weibull distributed interference of chance" Journal of Inequalities and Applications, 1, 134.

30. Kesemen, T., “On the semi-Markovian random walk with delay and Weibull distributed interference of chance”, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 42, 3 (2013) 299–307.

31. Khaniev, T. A. and Özdemir, H., On the Laplace transform of finite dimensional distribution functions of semi- continuous random process with reflecting and delaying screens, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skorohod and Yu. V.Borovskikh, VSP, Zeist, The Netherlands, (1995) 167-17.

32. Khaniev, T. A., On the probability characteristics of a semi-Markovian random walks with two barriers, Bulletin of International Statistical Institute, 57, 2 (1997) 569-570.

33. Khaniev, T. A., Some results on a stochastic Process with a discrete chance interference, Mathematical and Computational Applications, 4, 2 (1999) 145-152.

34. Khaniev, T. A., and Unver, İ., The study of the level zero crossing time of a semi-Markovian random walk with delaying screen, Turkish Journal of Mathematics, 21, 3 (1997) 257-268.

35. Khaniev, T. A. and Özdemir, H. and Maden, S., Calculating the probability characteristics of a boundary functional of a semi- continuous random process with reflecting and delaying screens, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 14 (1998) 117-123.

36. Khaniev, T. A., Unver, İ. and Maden, S., On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19, 5 (2001) 799-819.

37. Khaniyev T., Ünver İ. and Kesemen T, ‘Certain asymtotic result for extended model of (s,S) ”, Theory of Stochastic Processes, 8-24, 1-2 (2002) 192-200.

38. Khaniev, T. A., Some asymptotic results for the semi-Markov random walk with a special barrier, Turkish Journal of Mathematics, 27, 2 (2003) 251-272.

39. Khaniev, T. A. and Kucuk Z., Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics and Probability Letters, 69, 1 (2004) 91-103.

40. Khaniyev, T. A., Kesemen T., Kesemen O. and Aliyev R., Some asymptotic results for the stationary characteristics of the semi-Markov random walk with a barrier, Automatic Control and Computer Sciences, 1 (2006) 31-43.

41. Khaniyev, T.A. and Mammadova Z.I., On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation,76, 10 (2006) 861-874.

42. Khaniyev, T., Kesemen, T., Kesemen O. and Aliyev, R., “The asymptotic results for the stationary characteristics of the semi-Markovian random walk with a barrier”, Automatic Control and Computer Sciences , 1 (2006) 31-43.

43. Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z. ve Okur Bekar, N., On the distributions of a renewal reward process and it's additive functional, Mathematical and Computational Applications, 13, 1 (2008) 41–50.

44. Khaniyev, T. A., Kesemen, T., Aliyev, R. and Kokangül, A., “Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with exponentional distributed interference of chance”, Statistics & Probability Letters, 78, 6 (2008) 785–793.

45. Korolyuk, V. S. and Borovskikh, Y. V., Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev,1981.

46. Kovalenko, I. N., Kuznetchov, N. and Shurenkov, V. M., Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev, 1983.

47. Kucuk, Z., İki Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi Üzerine, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2003.

48. Lai, T.L., Asymptotic moments of random walks with applications to ladder variables and renewal theory, Annals of Probability, 4, 1 (1976) 51-66.

49. Levy, J.B. and Taqqu, M.S., On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards, Ann. Sci. Math. Queues, 11,1 (1987) 95–110.

50. Levy, J.B. and Taqqu, M.S., Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli, 6, 1 (2000) 23–44.

51. Lotov, V. I., On random walks within a stripe, Theory Probability and Its Applications, 36, 1 (1991) 160-165.

52. Lotov, V. I., On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24, 4(1996) 2154-2171.

53. Mammadova, Z., Normal Müdahaleli Yarı-Markov Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

54. Nasirova, T. I., Processes of Semi- Markovian Random Walk, Elm, Baku, 1984.

55. Nasirova, T. I., Yapar C. and Khaniev, T. A., On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s, S), Cybernetics and Systems Analysis, 5 (1998) 69-76.

56. Prabhu, N.U., Stochastic Storage Processes: Queues, Insurance Risk, and Dams, Springer, New York, 1980.

57. Resnick, S. I., Adventures in Stochastic Processes, Birkhaüser Boston, Cambridge, 1992.

58. Rogozin, B. A., On the distribution of the first jump, Theory of Probability and Its Applications, 9 (1964) 450-464.

59. Ross, S. M., Introduction to Probability Models, Academic Pres, New York, 1993.

60. Ross, S.M., Stochastic Processes, John Wiley and Sons, New York, 1996.

61. Saaty, T.L., Elements of Queuing Theory with Applications, Dover, New York, 1983.

62. Senturia, L. and Puri Prem, S.A., A semi-Markov storage model, Adv. Appl.Probab., 1, 2 (1973) 362-378.

63. Serfoza, R. F., Functions of semi-Markov processes, SIAM J. Appl. Math., 20(1971).

64. Shurenkov, V. M., Ergodic Theorems and Related Questions Of The Theory Of Random Processes (Russian), Naukova Dumka, Kiev,1981

65. Shurenkov, V. M., The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moscow, 1989.

66. Skorohod, A. V. and Slobodenyuk, N. P, Limit Theorems for Random Walks, Naukova Dumka, Kiev, 1970.

67. Smith, W. L., Renewal theory and its ramifications, Journal of Roy. Statist. Soc., 2 (1958) 243-302.

68. Smith, W. L., On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 46, 1 (1959) 1-29.

69. Smith, W. L., Some peculiar semi-Markov processes, Proc.5-Th Berkeley Symp. Math. Statist. And Probab., 2, 2 (1965-1966) 255-263.

70. Spitzer, F., A combinatorial Lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, (1956)323-339.

71. Spitzer, F., Principles of Random Walk, Princeton, N. J., D. Van Nostrand, 1964.

72. Unver, I., On distributions of the semi-Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 89 (1997) 231-242.

ÖZGEÇMİŞ

Fuat YETİM, 01.01.1983 tarihinde Gümüşhane ili, Torul ilçesi, Kocadal köyünde doğdu. Lise öğrenimini Trabzon Fatih Lisesi'nde yaptı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde Lisans Programı'na başladı ve 2006 yılında bu bölümden mezun oldu.

2009 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Programı'na başladı.

Halen, Avrasya Üniversitesi'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

Evli olup, bir çocuk babasıdır ve İngilizce bilmektedir.