KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gül Deniz ÇAYLI

ARALIK 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLAR

Gül Deniz ÇAYLI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10.12.2013
Tezin Savunma Tarihi : 26.12.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Gül Deniz Çaylı Tarafından Hazırlanan

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLAR

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 10/12/2013 gün ve 1533 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	....
Üye	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV**	....
Üye	**: Prof. Dr. Hilmi ZENGİN**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca bana örnek olan ve yol gösteren, çalışma sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL'a ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma yüksek lisans öğrenimim sürecinde gösterdikleri ilgi ve verdikleri bilgilerden dolayı teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, yüksek lisans eğitimim boyunca maddi katkılarından dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Gül Deniz ÇAYLI
Trabzon, 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlar" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Funda KARAÇAL'ın sorumluluğunda tamamladığımı, örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 10/12/2013

Gül Deniz ÇAYLI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ III
TEZ BEYANNAMESİ IV
İÇİNDEKİLER V
ÖZET VI
SUMMARY VII
ŞEKİLLER DİZİNİ VIII
TABLOLAR DİZİNİ IX
SEMBOLLER DİZİNİ X
1. GENEL BİLGİLER 1
1.1. Giriş 1
1.2. Kısmen Sıralı Kümeler 3
1.3. Kafesler 5
1.4. Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar 7
1.5. $[0,1]$ Üzerinde Uninormlar 10
1.5.1. $[0,1]$ Üzerinde Uninormların Bir Ailesi 13
1.5.2. $[0,1]$ Üzerinde Uninormların Yapısı 16
1.5.3. $[0,1]$ Üzerinde Uninormların Sürekliliği 18
1.5.4. $[0,1]$ Üzerinde İdempotent Uninormlar 22
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 27
2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlar 27
2.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlardan Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar Üretmek İçin Bazı Yöntemler 34
2.3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar Yardımıyla Elde Edilen Uninormlar 40
2.4. $L([0,1])$ Üzerinde Uninormlar 49
3. İRDELEME 58
4. SONUÇLAR 60
5. ÖNERİLER 63
6. KAYNAKLAR 64
ÖZGEÇMİŞ

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

SINIRLI KAFESLER ÜZERİNDE UNİNORMLAR

Gül Deniz ÇAYLI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2013, 66 Sayfa

Bu tez çalışması iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, uninormlar üzerine genel bir literatür çalışması yapıldı ve $[0,1]$ üzerindeki uninormlar ile ilgili elde edilen bazı temel sonuçlardan bahsedildi.

İkinci bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, sınırlı kafesler üzerindeki uninormlarla ilgili bazı yeni özellikler incelendi ve bu şekildeki uninormlara örnekler verildi. İkinci kısımda, bir L sınırlı kafesi üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm yardımıyla her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olmak üzere L üzerinde bir t-norm ve bir t-konorm elde edildi. Üçüncü kısımda, bir L sınırlı kafesi üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verildi ve bu yöntemlerin bir ürünü olarak L üzerinde $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı en küçük ve en büyük uninorm inşa edildi. Son kısımda ise, $L([0,1])$ üzerindeki aggregasyonlar, Deschrijver [10] tarafından önerilen yaklaşım ile elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Uninorm, lokal internal uninorm, t-norm, t-konorm.

Master Thesis

SUMMARY

UNINORMS ON BOUNDED LATTICES

Gül Deniz ÇAYLI

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2013, 66 Pages

This thesis consists of two chapters. In the first chapter, it is made a general study of literature and is mentioned some main results obtained about uninorms on $[0,1]$.

The second chapter consists of four sections. In the first section, some new properties of uninorms on bounded lattices is investigated and examples to that kind of uninorms is given. In the second section, a t-norm and a t-conorm on a bounded lattice L are obtained by means of a given uninorm with $e \in L$ neutral element on L when all $x \in L$ is comparable e. In the third section, two methods of constructing a uninorm with given neutral element $e \in L$ on a bounded lattice L is introduced and as a by product, the smallest and the greatest uninorm with neutral element $e \in L \setminus \{0,1\}$ on L are obtained. In the last section, it can be derived from the approach proposed by Deschrijver [10] to aggregation on $L([0,1])$.

Key Words: Uninorm, local internal uninorm, t-norm, t-conorm.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. U_* operatörü 15
Şekil 2. U^* operatörü 15
Şekil 3. En zayıf uninorm $\underline{U_e}$ 17
Şekil 4. En güçlü uninorm $\overline{U_e}$ 18
Şekil 5. U_{Min} in bir sınıfı 21
Şekil 6. U_{Max} ın bir sınıfı 22
Şekil 7. $L_1 = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi 32
Şekil 8. $L_2 = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi 33
Şekil 9. $L_3 = \{0, a, b, c, d, 1\}$ kafesi 34
Şekil 10. $L = \{0, a, b, c, e, 1\}$ kafesi 39
Şekil 11. Uninormların yapısı 49

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. L_1 kafesi üzerindeki U_1 uninormu 33

Tablo 2. L_2 kafesi üzerindeki U_2 uninormu 33

Tablo 3. L_3 kafesi üzerindeki U_3 uninormu 34

Tablo 4. L kafesi üzerindeki U uninormu 39

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\emptyset$	Boş küme
$[a,b]$	Kapalı aralık
$]a,b[$	Açık aralık
$[a,b[$, $]a,b]$	Yarı açık aralıklar
$a \wedge b$	a ve b elemanlarının infimumu
$a \vee b$	a ve b elemanlarının supremumu
$\overline{X}$	X kümesinin üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	X kümesinin alt sınırlarının kümesi
$a \parallel b$	a ve b elemanları kıyaslanamaz
$a \nparallel b$	a ve b elemanları kıyaslanabilir
$[0,1]$	Reel birim aralık
Max	Maksimum işlemi
Min	Minimum işlemi
sup	Supremum işlemi
inf	İnfimum işlemi
t-norm	Üçgensel norm
t-conorm	Üçgensel conorm
$\mathcal{U}(e)$	Sınırlı kafes üzerinde e birim elemanlı tüm uninormların kümesi
$U \downarrow L_e$	U uninormunun L_e kümesine kısıtlanışı
$U \downarrow [0,e]$	U uninormunun $[0,e]$ aralığına kısıtlanışı
$U \downarrow [e,1]$	U uninormunun $[e,1]$ aralığına kısıtlanışı
x^*	x elemanının komplementi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Son yıllarda aggregasyon operatörleri, Calvo ve arkadaşları tarafından yazılan "Aggregation operators: properties, classes and construction methods" [3] adlı kitapta ve kitabın referanslarında görülebileceği gibi kapsamlı olarak incelendi. Farklı bakış açıları, ikili, n-li ve hatta çok boyutlu aggregasyon operatörlerinin ortaya çıkmasına yol açtı.

Bir F ikili aggregasyon operatörünün sağlaması gereken en temel özellikler monotonluk ve sınır koşullarıdır ($F(0,0) = 0$ ve $F(1,1) = 1$). Değişme, birleşme, idempotent, birim ve sıfırlayan eleman vs. gibi diğer birçok özellik, çeşitli şartlara bağlı olarak da çalışıldı. Aggregasyon operatörleri, ilk olarak Schweizer ve Sklar tarafından [37] de ele alınan ve kapsamlı olarak Schweizer ve Sklar [38], Klement ve arkadaşları tarafından [22] de çalışılan üçgensel normlar ve üçgensel konormlar ile birlikte önemli rol oynar.

Üçgensel norm ve üçgensel konormların özel bir genelleştirmesi olan uninormların birim elemanı, birim aralıktaki herhangi bir sayı olabilir. Üçgensel normlar için 1 ve üçgensel konormlar için 0 olan birim elemanlar, aggregasyon değerini etkilemezler ve birim aralıkta tanımlanan uninormlar, birbirlerinden birim elemanları ile ayrılırlar.

Uninormlar, ilk olarak Yager ve Rybalov [45] tarafından ele alındıktan sonra uygulamalı ve teorik açıdan birçok yazar tarafından çalışıldı. Uninormların ortaya çıkarılması ve çalışılmasını destekleyen birçok pratik sebepten bahsedilebilir. İlk sebep agregasyon operatörünün çok kriterli karar vermede kullanılmasıdır. Uninormların pratik kullanımını destekleyen ikinci sebep, uzman sistemler alanından kaynaklanmaktadır. MYCIN benzeri uzman sistemlerde önerilen teşhisin evrensel derecesini hesaplamak için aggregasyon fonksiyonlarının kullanıldığı bilinmektedir. [7,39] çalışmaları, bu gibi aggregasyon fonksiyonlarının representable uninorm olduğunu göstermektedir. Representable uninormlar, [16] da uninorm terimi kullanılmadan verildi.

Uninormlar ile yapılan ilk çalışma [45] ve Yager ve Kreinovich [43,44], uninormun aggregasyon, uzman sistemler, yapay sinir ağları ve bulanık sistem modelleri gibi birçok alanda faydalı olduğunu gösterdi. Diğer taraftan uninormların teorik açıdan çalışılması daha kapsamlı olmuştur. Calvo ve arkadaşları [2], De Baets [4,5], Drewniak ve Drygas

[12], Fodor ve arkadaşları [13], Hu ve Li [18], Mas ve arkadaşları [30,32,33], Monserrat ve Torrens [36] uninormları teorik açıdan ele alan araştırmacılardır. Değişmeli olmayan uninormları incelemek amacıyla uninormların bazı genelleştirmeleri, Mas ve arkadaşları [31] ve Marichal [28] tarafından çalışıldı. Li ve Shi [26], her bir $a \in [0,1]$ elemanının birim eleman olmasını sağlayan ve zayıf uninorm olarak adlandırılan uninormların diğer bir genelleştirmesini ele aldılar. Li ve Shi [25], uninorm aggregasyon operatörlerinin özelliklerini araştırarak, sürekli uninorm aggregasyon operatörlerin yalnızca sürekli t-normlar veya sürekli t-konormlar olduğunu gösterdiler ve uninorm aggregasyon operatörlerinin genel yapısını verdiler. Deschrijver ve Kerre [9], uninorm kavramını sezgisel bulanık durumlara genişlettiler. Wang ve Fang [40], bir tam kafes üzerinde sol ve sağ uninormları ve Liu [27], bir tam kafes üzerinde yarı-uninorm kavramlarını ele aldılar.

Yukarıda bahsedilen tüm çalışmaların ışığı altında, bu yüksek lisans tez çalışmasında sınırlı kafesler üzerinde uninormlar ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci bölümde, kısmen sıralı kümeler, kafesler, üçgensel normlar ve üçgensel konormlar ve $[0,1]$ üzerindeki uninormlar ile ilgili temel tanım ve teoremler ile bu konularda yapılan bazı çalışmalara yer verildi. Tezin ikinci bölümü dört kısma ayrıldı. Birinci kısımda, bir L sınırlı kafesinin herhangi bir alt kümesi üzerinde lokal internal tanımı verilerek keyfi $e \in L$ elemanı ile kıyaslanamayan bir eleman mevcut ise, L üzerinde e birim elemanlı bir lokal internal uninormun mevcut olmadığı gösterildi. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı ve özel bir alt bölge $A(e)$ üzerinde lokal internal olan bir U uninormu için $U(0,1)$ ın alabileceği değerler araştırıldı. İkinci kısımda, bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı verilen bir uninorm yardımıyla her $x \in L$ elemanı e ile kıyasaslanabilir olmak üzere L üzerinde bir T t-normu ve bir S t-konormu elde edildi. Üçüncü kısımda, bir L sınırlı kafesi üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verildi ve bu yöntemlerin bir ürünü olarak bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı en küçük ve en büyük uninorm elde edildi [20]. Son kısımda ise, $L([0,1])$ üzerinde t-representable aggregasyon fonksiyonu denilen aggregasyonlar gözönüne alınarak $L([0,1])$ üzerinde aggregasyonların Deschrijver [10] tarafından önerilen yaklaşım ile elde edilebileceği gösterildi [20].

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1.[1]: P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. $(x, x) \in \leq$ (Yansıma özelliği),

P2. $(x, y) \in \leq$ ve $(y, x) \in \leq$ ise, $x = y$ (Ters simetri özelliği),

P3. $(x, y) \in \leq$ ve $(y, z) \in \leq$ ise, $(x, z) \in \leq$ (Geçişme özelliği)

koşulları sağlanıyorsa, $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Eğer $(x, y) \in \leq$ ise, bu durum $x \leq y$ şeklinde gösterilir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

$x \leq y$ ise, bu durum "y, x i içerir" olarak ifade edilir. Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise, $x < y$ yazılır ve "x, y de öz olarak içerilir" olarak ifade edilir. Ayrıca "$x \leq y$ yanlış" ise, $x \nleq y$ yazılır. $x \nleq y$ ve $y \nleq x$ ise, "x ve y elemanları kıyaslanamaz" denir ve $x \parallel y$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.[17]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $f: P \to P$ bir dönüşüm olsun. Eğer x,$y \in P$ için $x \leq y$ iken $f(x) \leq f(y)$ oluyorsa, f ye monoton azalmayan denir.

Tanım 1.3.[17]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $f: P \to P$ bir dönüşüm olsun. Eğer x,$y \in P$ için $x \leq y$ iken $f(x) \geq f(y)$ oluyorsa, f ye monoton artmayan denir.

Tanım 1.4.[8]: $f: [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) f artandır,

ii) Her $(x, y) \in [0,1]^2$ için $f\big(min(x, y)\big) = min\big(f(x), f(y)\big)$,

iii) Her $(x, y) \in [0,1]^2$ için $f\big(max(x, y)\big) = max\big(f(x), f(y)\big)$.

Tanım 1.5.[5]: $g: [0,1] \to [0,1]$ bir dönüşüm olsun.

i) Eğer her $x \in [0,1]$ için $g\big(g(x)\big) < x$ ise, g, alt-involutif olarak adlandırılr.

ii) Eğer her $x \in [0,1]$ için $g\big(g(x)\big) > x$ ise, g, üst-involutif olarak adlandırılr.

iii) Eğer her $x \in [0,1]$ için $g\big(g(x)\big) = x$ ise, g, involutif olarak adlandırılr.

Tanım 1.6.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise, $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine zincir veya tam sıralı küme denir.

Uyarı 1.7.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayan $a \in P$ elemanı mevcutsa, tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten, a ve b bu özelliği sağlayan iki eleman olmak üzere, $a \leq b$ ve $b \leq a$ olur ki P kısmen sıralı küme olduğundan ters simetri özelliği kullanılırsa, $a = b$ elde edilir. Böyle bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

Eğer her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayan $b \in P$ elemanı mevcutsa, bu eleman 1 ile gösterilir ve P nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa, tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Eğer 0 (en küçük) ve 1 (en büyük) elemanları mevcutsa, 0 ve 1 elemanlarına evrensel sınırlar denir. Çünkü, her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$ dir.

Tanım 1.8.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve S, P nin bir alt kümesi ise, $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, P bir zincir ise, S de zincirdir.

Örnek 1.9.[1]: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{N}_0$ pozitif doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Tanım 1.10.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve a,$b \in P$ olsun. Eğer $a > b$ ve $a > x > b$ koşulunu sağlayan bir $x \in P$ elemanı mevcut değilse, "a, b yi kapsar (veya örter)" denir.

Tanım 1.11.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. P nin elemanlarının sayısına (kardinaline) P nin mertebesi denir ve $n(P)$ ile gösterilir. Eğer P nin elemanlarının sayısı sonlu ise, P ye sonlu kısmen sıralı küme denir.

Kapsama bağıntısı kullanılarak herhangi bir kısmen sıralı kümenin aşağıdaki gibi bir gösterimi elde edilebilir.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin her bir elemanını göstermek için küçük bir daire çizilir. Eğer $a > b$ ise, a, b den daha büyük yere yazılır ve a, b yi örtüyorsa, a dan b ye düz bir doğru parçası çizilir. Sonuçta elde edilen şekle, $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin diyagramı denir.

Eğer $a > b$ ise, a dan b ye düz bir doğru parçası çizildiğinden herhangi bir sonlu kısmen sıralı küme, diyagramına izomorftur. Bir $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesinin dualinin diyagramı, P nin diyagramındaki okları ters çevirmekle elde edilir.

Tanım 1.12.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme, $X \subseteq P$ ve $a \in X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $a \leq x$ ise, bu a elemanına X kümesinin en küçük elemanı denir ve EkeX ile gösterilir.
X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve EbeX ile gösterilir.

1.3. Kafesler

Tanım 1.13.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun. $a \in P$ ve her $x \in X$ için $x \leq a$ ise, bu a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir ve X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir.
Bu durumda

$$\overline{X} = \{a \in P | \forall x \in X \text{ için } \ x \leq a\}$$

dır.
$b \in P$ ve her $x \in X$ için $b \leq x$ ise, bu b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir ve X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir.
Bu durumda

$$\underline{X} = \{b \in P | \forall x \in X \text{ için } \ b \leq x\}$$

dir.
Tanım 1.14.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun. $\overline{X}$ kümesinin varsa en küçük elemanına X kümesinin supremumu (veya join) denir ve $supX$ ile gösterilir. Dual olarak, $\underline{X}$ kümesinin varsa en büyük elemanına X kümesinin infimumu (veya meet) denir ve $infX$ ile gösterilir. Yani $supX = Eke\overline{X}$ ve $infX = Ebe\underline{X}$ dir. $supX$ ve $infX$ in(eğer mevcut ise) ters simetri özelliği kullanılarak tek olduğu gösterilir.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $x, y \in P$ olsun. Eğer mevcutsa, $x \vee y \coloneqq \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y \coloneqq \inf\{x, y\}$ ile verilir. Bazen $X = \{x_\tau : \tau \in M\} \subseteq P$ için $supX = \bigvee_{\tau \in M} x_\tau$ (eğer mevcutsa) ve $infX = \bigwedge_{\tau \in M} x_\tau$ (eğer mevcutsa) ile gösterilir.
Tanım 1.15.[1]: $(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. P kısmen sıralı kümesinin herhangi iki elemanı bir en büyük alt sınıra ve bir en küçük üst sınıra sahip ise, P kısmen sıralı kümesine bir kafes denir.

Açıkça görülüyor ki, $(L, \leq)$ bir kafes olmak üzere eğer L nin supremumu ve infimumu mevcut ise, $supL = 1$ ve $infL = 0$ dır.

Öte yandan bir kafes 0 (en küçük) ve 1 (en büyük) elemanlarına sahip ise, bu kafese sınırlı kafes denir.
Tanım 1.16.[1]: $(L, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. L nin her X alt kümesi için $supX$ ve $infX$ mevcut ise, L kısmen sıralı kümesine tam kafes denir.

Tanım 1.15 ve Tanım 1.16 dan açıkça görülüyor ki, her tam kafes bir sınırlı kafestir.

Tanım 1.17.[1]: $(L, \leq)$ bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. Eğer her $a, b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ sağlanıyorsa, bu durumda X kümesine L nin bir alt kafesi denir.

Tanım 1.18.[1]: $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes, $a, b \in L$ ve $a \leq b$ olsun.

Bu durumda

$$[a, b] = \{x \in L | a \leq x \leq b\}$$

ile tanımlanan L nin $[a, b]$ alt aralığı, L nin bir alt kafesidir. Benzer şekilde,

$]a, b] = \{x \in L | a < x \leq b\}$, $[a, b[= \{x \in L | a \leq x < b\}$, $]a, b[= \{x \in L | a < x < b\}$

şeklinde tanımlanan alt aralıklar da L nin birer alt kafesidir.

Tanım 1.19.[1]: $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. Eğer a ve b kıyaslanamaz ise, $a \parallel b$ notasyonu kullanılır.

Tanım 1.20.[1]: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. Her x, y, $z \in L$ için

i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

denk koşullarından biri sağlanıyorsa, L kafesine dağılmalı kafes denir.

Tanım 1.21.[1]: $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve x,$y \in L$ olsun. Eğer $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ ise, y elemanına x elemanının komplementi denir.

Tanım 1.22.[1]: $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. L kafesindeki her eleman bir komplemente sahip ise, L kafesine komplementli kafes denir.

Tanım 1.23.[1]: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. L kafesi dağılmalı ve komplementli ise, L kafesine Bool Cebiri veya Bool Kafesi denir.

Tanım 1.24.[1]: $(L, \leq)$ ve $(M, \leq)$ herhangi iki kafes ve $\theta: L \to M$ bir fonksiyon olsun.

i) Her x,$y \in L$ için $\theta(x \vee y) = \theta(x) \vee \theta(y)$ sağlanıyorsa, θ fonksiyonuna join-morfizm denir.

ii) Her x,$y \in L$ için $\theta(x \wedge y) = \theta(x) \wedge \theta(y)$ sağlanıyorsa, θ fonksiyonuna meet-morfizm denir

Eğer $\theta: L \to M$ fonksiyonu join-morfizm ve meet-morfizm ise, kafes morfizmi veya kısaca morfizm olarak adlandırılır.

$(L, \leq)$ ve $(M, \leq)$ herhangi iki kafes olmak üzere, $\theta: L \to M$ morfizmi, eğer bijeksiyon ise, izomorfizm; örten ise, epimorfizm; birebir ise, monomorfizm; $L = M$ ise, endomorfizm; $L = M$ ve izomorfizm ise, otomorfizm olarak adlandırılır.

Tanım 1.25.[1]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun.

i) Eğer $x \in L$, $L \backslash \{0\}$ kümesinin bir minimal elemanı ise, $x \in L$ elemanına bir atom denir.

ii) Eğer $x \in L$, $L \backslash \{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanı ise, $x \in L$ elemanına bir koatom denir.

1.4. Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar

Tanım 1.26.[22]: Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) aşağıdaki özellikleri sağlayan $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonudur.

T1. Her $x, y \in [0,1]$ için $T(x,y) = T(y,x)$ (Değişme özelliği),

T2. Her $x, y, z \in [0,1]$ için $T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$ (Birleşme özelliği),

T3. Her $x, y, z \in [0,1]$ için $y \leq z$ ise $T(x,y) \leq T(x,z)$ (Monotonluk özelliği),

T4. Her $x \in [0,1]$ için $T(x,1) = x$ (Birim eleman veya sınır şartı özelliği).

Örnek 1.27.[22]: Dört temel t-norm T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki gibidir:

1) $T_M(x,y) = Min(x,y)$ (Minimum).

2) $T_P(x,y) = xy$ (Çarpım).

3) $T_L(x,y) = Max(x + y - 1, 0)$ (Lukasiewicz t-norm).

4) $T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } (x,y) \in [0,1[^2 \text{ ise,} \\ Min(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$ (Drastik çarpım).

Uyarı 1.28.[22]: $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir t-norm olsun.

i) Her $x \in [0,1]$ için $T(0,x) = T(x,0) = 0$ ve $T(1,x) = x$ sınır şartları sağlanır.

ii) Bir T t-normunun ikinci bileşene göre monotonluk özelliği, değişme özelliği ile birlikte her iki bileşene göre monotonluk özelliğine eşdeğerdir. Yani, eğer $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise, $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$ dir.

Tanım 1.29.[22]: T_1 ve T_2, $[0,1]$ üzerinde iki t-norm olsun.

i) Eğer her $x, y \in [0,1]$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, T_1, T_2 den daha zayıftır veya T_2, T_1 den daha güçlüdür denir ve $T_1 \leq T_2$ şeklinde yazılır.

ii) Eğer $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ yani en az bir $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise, $T_1 < T_2$ şeklinde yazılır.

Uyarı 1.30.[22]: $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir t-norm olsun. T nin monotonluk özelliği kullanılırsa, her $x, y \in [0,1]$ için $T(x,y) \leq T(x,1) = x$ ve $T(x,y) \leq T(1,y) = y$ olduğundan $T(x,y) \leq x \wedge y = T_M(x,y)$ elde edilir. Ayrıca $x, y \in [0,1[$ için

$T(x,y) \geq 0 = T_D(x,y)$ sağlanır. Sonuç olarak, $[0,1]$ üzerinde keyfi bir T t-normu için $T_D \leq T \leq T_M$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, en zayıf t-norm T_D ve en güçlü t-norm T_M dir.

Önerme 1.31.[22]: Her $x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ şartını sağlayan tek T t-norm, T_M minimumdur.

İspat. T, her $x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ eşitliğini sağlayan keyfi bir t-norm olsun. Uyarı 1.30 kullanılırsa, her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $T(x,y) \leq T_M(x,y)$ bulunur. T monoton olduğundan her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $T(x \wedge y, x \wedge y) = x \wedge y = T_M(x,y) \leq T(x,y)$ olur. Böylece her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $T(x,y) = T_M(x,y)$ elde edilir.

Tanım 1.32.[19]: $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes olsun. Eğer $T: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu, değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve 1 birim elemanına sahip ise, T, L üzerinde bir üçgensel norm (kısaca t-norm) olarak adlandırılır.

Tanım 1.33.[22]: Bir üçgensel konorm (kısaca t-konorm) aşağıdaki özellikleri sağlayan $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

S1. Her $x, y \in [0,1]$ için $S(x,y) = S(y,x)$ (Değişme özelliği),

S2. Her $x, y, z \in [0,1]$ için $S\big(x, S(y,z)\big) = S(S(x,y), z)$ (Birleşme özelliği),

S3. Her $x, y, z \in [0,1]$ için $y \leq z$ ise $S(x,y) \leq S(x,z)$ (Monotonluk özelliği),

S4. Her $x \in [0,1]$ için $S(x,0) = x$ (Birim eleman veya sınır şartı özelliği).

Örnek 1.34.[22]: Dört temel t-konorm S_M, S_P, S_L, S_D aşağıdaki gibidir:

1) $S_M(x,y) = Max(x,y)$ (Maksimum).

2) $S_P(x,y) = x + y - xy$ (Olasılıksal toplam).

3) $S_L(x,y) = Min(x+y, 1)$ (Lukasiewicz t-konorm, sınırlı toplam).

4) $S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } (x,y) \in\,]0,1]^2 \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$ (Drastik toplam).

Önerme 1.35.[22]: $S: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonunun bir t-konorm olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in [0,1]$ için

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$$

eşitliğini sağlayan bir T t-normunun mevcut olmasıdır. Burada verilen S t-konormuna, T t-normunun dual t-konormu denir. Benzer şekilde her $x, y \in [0,1]$ için,

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$$

ile verilen T t-normuna, S t-konormunun dual t-normu denir.

Uyarı 1.36.[22]: S: $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir t-konorm olsun.

i) Her $x \in [0,1]$ için $S(1,x) = S(x,1) = 1$ ve $S(0,x) = x$ sınır şartları sağlanır.

ii) Eğer T_1 ve T_2 t-normları için $T_1 \leq T_2$, S_1 ve S_2, sırasıyla T_1 ve T_2 ye karşılık gelen dual t-konormlar ise, bu durumda $S_2 \leq S_1$ bulunur. Sonuç olarak her S t-konormu için $S_M \leq S \leq S_D$ sağlanır. Buna göre en zayıf t-konorm S_M ve en güçlü t-konorm S_D dir.

Önerme 1.37.[22]: Her $x \in [0,1]$ için $S(x,x) = x$ şartını sağlayan tek S t-konorm, S_M maksimumdur.

İspat: S, her $x \in [0,1]$ için $S(x,x) = x$ eşitliğini sağlayan keyfi bir t-konorm olsun. Uyarı 1.36 kullanılırsa, her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $S(x,y) \geq S_M(x,y)$ sağlanır. S monoton olduğundan her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $S(x \vee y, x \vee y) = x \vee y = S_M(x,y) \geq S(x,y)$ olur. Böylece her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $S(x,y) = S_M(x,y)$ elde edilir.

Tanım 1.38.[21]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $S: L^2 \rightarrow L$ fonksiyonu, değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve 0 birim elemanına sahip ise, S, L üzerinde bir üçgensel konorm (kısaca t-konorm) olarak adlandırılır.

n sıfırdan farklı bir doğal sayı olmak üzere, [n]:={1,2,…,n} olsun. n-sıralıları göstermek için çoğu zaman $(x_1, \dots, x_n)$ yerine koyu $\boldsymbol{x}$ sembolü kullanılır.

Tanım 1.39.[15]: $[0,1]^n$ üzerinde bir aggregasyon fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir $A^{(n)}$: $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

i) $A^{(n)}$ her bir değişkene göre azalmayandır.

ii) $A^{(n)}(0,0,\dots,0) = 0$ ve $A^{(n)}(1,1,\dots,1) = 1$ sınır şartları sağlanır.

Aggregasyon fonksiyonunun değişkenleri ortak bir $\mathbb{I}$ bölgesine aittir. Buradaki $\mathbb{I}$ bölgesi boştan farklı bir reel aralıktır, sınırlı bir aralıktır veya değildir. Bazı istisnai durumlar hariç $\mathbb{I}$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ genişletilmiş reel sayılar kümesinin boştan farklı bir alt aralığını temsil etmektedir.

Herhangi K sayılabilir kümesi için σ_K, K kümesi üzerindeki tüm permütasyonların kümesini göstersin. Herhangi $A \subseteq K$ ve $\sigma \in \sigma_K$ için $\sigma(A) := \{\sigma(a) | a \in A\}$ ile verilsin.

Herhangi $\sigma \in \sigma_{[n]}$ için

$$\mathbb{I}^n_\sigma := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n | x_{\sigma(1)} \leq \dots \leq x_{\sigma(n)}\}$$

olarak tanımlansın. Verilen herhangi $\boldsymbol{x}$ n-sıralısı ve bir $\sigma \in \sigma_{[n]}$ permütasyonu için $[\boldsymbol{x}]_\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ ile tanımlansın.

Cebirde, simetri özelliği, değişme özelliği olarak da bilinir. Herhangi bir ikili işlemdeki değişme özelliği $x * y = y * x$ olup, kolaylıkla $n \geq 2$ için n-li fonksiyonlara aşağıdaki şekilde genelleştirilir:

Tanım 1.40.[15]: $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. Her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ ve $\sigma \in \sigma_{[n]}$ için $F(\boldsymbol{x}) = F([\boldsymbol{x}]_\sigma)$ sağlanıyorsa, F fonksiyonuna simetrik fonksiyon denir.

Tanım 1.41.[15]: $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. $Min \leq F \leq Max$ eşitsizliği sağlanıyorsa, F fonksiyonuna internal denir.

Tanım 1.42. [15]: $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu, $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde tanımlanan n bağımsız değişkenli bir fonksiyon olsun. Her bir $x_1, x_2, \dots, x_n$ bir M sayısı ile yer değiştirdiğinde fonksiyonun değeri sabit kalıyorsa, yani

$$F(M, M, \dots, M) = F(x_1, x_2 \dots, x_n)$$

oluyorsa, F fonksiyonuna göre $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin ortalaması M sayısıdır denir.

Tanım 1.43. [15]: $\mathbb{I}^n$ üzerinde bir n-li ortalama fonksiyonu, $M: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ bir internal aggregasyon fonksiyonudur.

Tanım 1.44.[23]: L sınırlı bir kafes ve $n \in \mathbb{N}$ sabit olsun. Bir $A: L^n \to L$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, L üzerinde (n-li) aggregasyon fonksiyon olarak adlandırılır.

i) $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ (yani $x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$) ise $A(\boldsymbol{x}) \leq A(\boldsymbol{y})$ (Monotonluk özelliği),

ii) $A(0,0 \dots, 0) = 0$ ve $A(1,1 \dots 1) = 1$ (Sınır şartları).

1.5. $[0,1]$ Üzerinde Uninormlar

Tanım 1.45.[45]: Bir uninorm aşağıdaki şartları sağlayan $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonudur.

U1. Her $x, y \in [0,1]$ için $U(x, y) = U(y, x)$ (Değişme özelliği),

U2. Her $x, y, z \in [0,1]$ için $U\big(x, U(y, z)\big) = U(U(x, y), z)$ (Birleşme özelliği),

U3. Her $x, y, z \in [0,1]$ için $y \leq z$ ise $\mathrm{U}(x, y) \leq U(x, z)$ (Monotonluk özelliği),

U4. Her $x \in [0,1]$ için $\mathrm{U}(x, e) = x$ olacak şekilde birim eleman olarak adlandırılan bir $e \in [0,1]$ elemanı vardır. (Birim eleman özelliği).

Uninormlar, t-normlar ve t-konormların tanımında verildiği gibi aynı ilk üç özelliğe sahiptir. T-norm $e = 1$ ile, t-konorm $e = 0$ ile uninormların özel bir durumudur.

Aşağıdaki teorem, Morgan dualitesinin uninormlar için mevcut olduğunu gösterir.

Teorem 1.46.[45]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. $\bar{a} = 1 - a$ olmak üzere,

$$\widehat{U}(a,b) = 1 - U(\bar{a},\bar{b})$$

ile tanımlanan $\widehat{U}$, $[0,1]$ üzerinde $\bar{e} = 1 - e$ birim elemanlı bir uninormdur.

İspat:

i) Değişme özelliği: Her $a,b \in [0,1]$ için $\widehat{U}(a,b) = \widehat{U}(b,a)$ olduğu gösterilecektir. U nun değişme özelliği kullanılırsa,

$$\widehat{U}(a,b) = 1 - U(\bar{a},\bar{b}) = 1 - U(\bar{b},\bar{a}) = \widehat{U}(b,a)$$

elde edilir.

ii) Birleşme özelliği: Her $a,b,c \in [0,1]$ için $\widehat{U}\left(a,\widehat{U}(b,c)\right) = \widehat{U}\left(\widehat{U}(a,b),c\right)$ olduğu gösterilecektir.

$$\widehat{U}\left(a,\widehat{U}(b,c)\right) = \widehat{U}\left(a,1 - U(\bar{b},\bar{c})\right) = 1 - U\left(\bar{a},U(\bar{b},\bar{c})\right)$$

ve

$$\widehat{U}\left(\widehat{U}(a,b),c\right) = \widehat{U}\left(1 - U(\bar{a},\bar{b}),c\right) = 1 - U\left(U(\bar{a},\bar{b}),\bar{c}\right)$$

bulunur. U birleşmeli olduğundan

$$\widehat{U}\left(a,\widehat{U}(b,c)\right) = \widehat{U}\left(\widehat{U}(a,b),c\right)$$

elde edilir.

iii) Monotonluk özelliği: Her $a,b,c \in [0,1]$ için $a \geq c$ ise, $\widehat{U}(a,b) \geq \widehat{U}(c,b)$ olduğu gösterilecektir. $a \geq c$ olduğundan $\bar{a} \leq \bar{c}$ bulunur. U nun monotonluk özelliği kullanılırsa, $U(\bar{a},\bar{b}) \leq U(\bar{c},\bar{b})$ olur. Buradan $1 - U(\bar{a},\bar{b}) \geq 1 - U(\bar{c},\bar{b})$ elde edlilir. Dolayısıyla, $\widehat{U}(a,b) \geq \widehat{U}(c,b)$ dır.

iv) Birim eleman özelliği: Her $a \in [0,1]$ için

$$\widehat{U}(a,\bar{e}) = 1 - U(\bar{a},e) = 1 - \bar{a} = a$$

elde edilir. O halde, $\bar{e} = 1 - e$, $\widehat{U}$ nın birim elemanıdır.

Lemma 1.47.[45]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

i) Keyfi $a \in [0,1]$ ve her $b \in]e,1]$ için $U(a,b) \geq a$ dır.

ii) Keyfi $a \in [0,1]$ ve her $b \in [0,e[$ için $U(a,b) \leq a$ dır.

İspat: Birim eleman özelliğinden keyfi $a \in [0,1]$ için $U(a,e) = a$ sağlanır.

i) Eğer $b \in]e,1]$ ise, U monoton olduğundan keyfi $a \in [0,1]$ için $U(a,b) \geq U(a,e)$ bulunur. Buna göre $U(a,b) \geq a$ dır.

ii) Eğer $b \in [0, e[$ ise, U nun monotonluk özelliği kullanılırsa, keyfi $a \in [0,1]$ için $U(a, b) \leq U(a, e)$ olur. O halde $U(a, b) \leq a$ dır.

Teorem 1.48.[45]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

Bu takdirde,

i) Eğer $a_{n+1} \in [0, e[$ ise, $U(a_1, \dots, a_n) \geq U(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ dır.

ii) Eğer $a_{n+1} \in]e, 1]$ ise, $U(a_1, \dots, a_n) \leq U(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ dır.

İspat: $U(a_1, \dots, a_n) = a$ olsun. O halde, U nun birleşme özelliğinden $U(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = U(a, a_{n+1})$ dır. Öte yandan, $a_{n+1} \in [0, e[$ ise, Lemma 1.47 ii) kullanılarak $U(a_1, \dots, a_n) \geq U(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ elde edilir. $a_{n+1} \in]e, 1]$ ise, Lemma 1.47 i) kullanılarak $U(a_1, \dots, a_n) \leq U(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ bulunur.

Eğer $e = 0$ ise, bu durumda her $a_{n+1} \geq e$ dır. Bu nedenle bir elemanın eklenmesi bizim aggregasyonumuzun artmasına neden olur. Benzer şekilde eğer $e = 1$ ise, bu durumda her $a_{n+1} \leq e$ dır. Bu nedenle bir elemanın eklenmesi bizim aggregasyonumuzu arttıramaz.

Birleşme özelliği, bir uninorm operatörünün iki bileşenli operatörden $n > 2$ bileşenli operatöre genişletilmesine olanak sağlar. Uninorm operatörünü ikiden az bileşenli ele almak ilginçtir. İlk önce $U(a_1, \dots, a_n, e) = U(a_1, \dots, a_n)$ olduğuna dikkat edilirse, birim elemanın eklenmesi uninorm operatörünün değerini etkilemez. Eğer $U(a)$ ele alınırsa, $U(a) = U(a, e)$ olduğu görülür. Buna ek olarak, $U(a, e) = a$ olduğundan $U(a) = a$ olur. Bu nedenle bir bileşenli uninormun değeri o tek bileşendir.

Şimdi null operatörünü yani $U(\quad)$ yı ele alalım. $U(\quad) = U(e, e) = U(e) = e$ olduğundan $U(\quad) = e$ dir. $T(\quad)$ nin 1 e ve $S(\quad)$ nin 0 a eşit olduğu varsayımı altında bu kullanım t-normlar ve t-konormlar içinde uygundur.

T-normlar ve t-konormlar ile ilgili olarak bu ilginç özellik sınır şartı olarak bilinir. Yani, herhangi $a \in [0,1]$ için $T(a, 0) = 0$ ve $S(a, 1) = 1$ dir. Aşağıdaki teorem sınır şartını uninorm operatörleri için genelleştirir.

Teorem 1.49[45]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

Bu takdirde,

i) Her $a \in [0, e]$ için $U(a, 0) = 0$ dır.

ii) Her $a \in [e, 1]$ için $U(a, 1) = 1$ dir.

İspat:

i) Her $a \leq e$ için U monoton olduğundan $U(a,0) \leq U(e,0) = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $U(a,0) = 0$ dır.

ii) Her $a \geq e$ için U nun monotonluk özelliği kullanılırsa, $U(a,1) \geq U(e,1) = 1$ olup $U(a,1) = 1$ bulunur.

Sonuç 1.50.[45]: Eğer $e = 0$ ise, her $a \in [0,1]$ için $U(a,1) = 1$ dir. Bu durumda, U bir t-konorm olur.

Sonuç 1.51.[45]: Eğer $e = 1$ ise, her $a \in [0,1]$ için $U(a,0) = 0$ dır. Bu durumda, U bir t-norm olur.

1.5.1. $[0,1]$ Üzerinde Uninormların Bir Ailesi

Teorem 1.52. [5]:

$$U_*(a,b) = \begin{cases} Max(a,b) & \text{eğer } (a,b) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ Min(a,b) & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $U_*: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninormdur.

İspat:

i) Değişme özelliği: Değişmeli olan Max ve Min fonksiyonlarının kullanımından açıktır.

ii) Birleşme özelliği: Her a,b,$c \in [0,1]$ için $U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*(U_*(a,b),c)$ olduğu gösterilecektir.

Genellikten bir şey kaybetmeden $a \geq b \geq c$ olduğu varsayılsın.

1. $e \leq c$ olduğu kabul edilirse,

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*\big(a, Max(b,c)\big) = U_*(a,b) = Max(a,b) = a$$

ve

$$U_*(U_*(a,b),c) = U_*(Max(a,b),c) = U_*(a,c) = Max(a,c) = a$$

elde edilir. Buna göre,

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*(U_*(a,b),c)$$

olur.

2. $e \geq a$ olduğu kabul edilirse,

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*\big(a, Min(b,c)\big) = U_*(a,c) = Min(a,c) = c$$

ve

$$U_*(U_*(a,b),c) = U_*(Min(a,b),c) = U_*(b,c) = Min(b,c) = c$$

elde edilir. Bu nedenle

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*(U_*(a,b),c)$$

bulunur.

3. $a \geq e \geq b \geq c$ olduğu kabul edilirse,

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*\big(a, Min(b,c)\big) = U_*(a,c) = Min(a,c) = c$$

ve

$$U_*(U_*(a,b),c) = U_*(Min(a,b),c) = U_*(b,c) = Min(b,c) = c$$

bulunur. Böylece,

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*(U_*(a,b),c)$$

elde edilir.

4. $a \geq b \geq e \geq c$ olduğu kabul edilirse,

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*\big(a, Min(b,c)\big) = U_*(a,c) = Min(a,c) = c$$

ve

$$U_*(U_*(a,b),c) = U_*(Max(a,b),c) = U_*(a,c) = Min(a,c) = c$$

bulunur. Buna göre,

$$U_*\big(a, U_*(b,c)\big) = U_*(U_*(a,b),c)$$

elde edilir.

iii) Monotonluk özelliği: Her a,b,$c \in [0,1]$ için $a \geq b$ ise, $U_*(a,c) \geq U_*(b,c)$ olduğu gösterilecektir.

1. a,$c \leq e$ olduğu kabul edilirse, b,$c \leq e$ olur. Buradan

$$U_*(a,c) = Min(a,c) \geq Min(b,c) = U_*(b,c)$$

elde edilir.

2. $(a,c) \in ([0,e[\times]e,1]) \cup (]e,1] \times [0,e[)$ olduğu kabul edilirse, $U_*(a,c) = Min(a,c)$ ve $U_*(b,c) = Min(b,c)$ olur. Bu nedenle $U_*(a,c) \geq U_*(b,c)$ elde edilir.

3. a,$c \geq e$ olduğu kabul edilirse, $U_*(a,c) = Max(a,c)$ ve $U_*(b,c) = Min(b,c)$ veya $U_*(b,c) = Max(b,c)$ olur. Böylece, $U_*(a,c) \geq U_*(b,c)$ elde edilir.

iv) Birim eleman özelliği: Her $a \in [0,1]$ için $U_*(a,e) = a$ olduğu gösterilmelidir.

1. $a < e$ olduğu kabul edilirse, $U_*(a,e) = Min(a,e) = a$ bulunur.

2. $a \geq e$ olduğu kabul edilirse, $U_*(a,e) = Max(a,e) = a$ bulunur.

Aşağıdaki Teorem, Teorem 1.52 ye dual olarak verilebilir.

Teorem 1.53.[5]:

$$U^*(a,b) = \begin{cases} Min(a,b) & \text{eğer } (a,b) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ Max(a,b) & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $U^*: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninormdur.

Teorem 1.53 ün ispatı, Teorem 1.52 nin ispatına dual olarak verilir.

U_* ve U^* operatörleri sırasıyla $e \neq 1{,}0$ iken ne t-norm ne de t-konormdur.

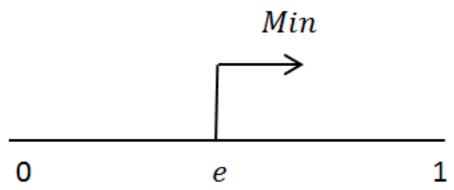
Teorem 1.54.[45]: Eğer $Min(a_1, \dots, a_n) < e$ ise, bu durumda $U_*(a_1, \dots, a_n) = Min(a_1, \dots, a_n)$, aksi durumda $U_*(a_1, \dots, a_n) = Max(a_1, \dots, a_n)$ dır.

Bu teorem, U_* için eğer en az bir bileşen e den küçük ise, bu durumda minimum operatörünün kullanılacağını göstermektedir.

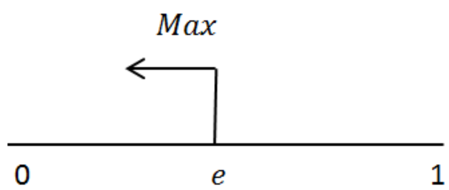
Teorem 1.55.[45]: Eğer $Max(a_1, \dots, a_n) > e$ ise, bu durumda $U^*(a_1, \dots, a_n) = Max(a_1, \dots, a_n)$, aksi durumda $U^*(a_1, \dots, a_n) = Min(a_1, \dots, a_n)$ dır.

Bu nedenle U^* için en az bir bileşen e den büyük ise, bu durumda maksimum operatörü kullanılır.

Şekil 1 ve Şekil 2, U_* ve U^* uninormlarının işleyişini göstermekte yardımcı olur.



Şekil 1. U_* operatörü



Şekil 2. U^* operatörü

Şekil 1 ve Şekil 2, eğer tüm elemanlar e nin solunda ise, Min kullanılacağını ve eğer tüm elemanlar e nin sağında ise, Max kullanılacağını göstermektedir. Şekil 1 de eğer elemanlar birim elemanın her iki tarafında ise, U_* ın Min fonksiyonunu ve Şekil 2 de eğer elemanlar birim elemanın her iki tarafında ise, U^* ın Max fonksiyonunu gösterdiği anlaşılır.

1.5.2. $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ Üzerinde Uninormların Yapısı

Tanım 1.56.[5]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ keyfi bir uninorm olsun.

i) Eğer $x \in [0,1]$ için $U(x,x) = x$ sağlanıyorsa, x elemanı, U nun bir idempotent elemanı olarak adlandırılır.

ii) Eğer her $x \in [0,1]$ için $U(x,x) = x$ sağlanıyorsa, U, idempotent uninorm olarak adlandırılır.

Açık olarak $[0,1]$ üzerinde, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir U uninormu için $U(e,e) = e$ olduğundan U nun birim elemanı idempotentir ve tektir.

Önerme 1.57.[5]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

i) Eğer $e \in]0,1]$ ise,

$$T_U(x,y) = \frac{U(ex,ey)}{e}$$

ile tanımlanan T_U bir t-normdur.

ii) Eğer $e \in [0,1[$ ise,

$$S_U(x,y) = \frac{U(e+(1-e)x, e+(1-e)y)-e}{1-e}$$

ile tanımlanan S_U bir t-konormdur.

Bu nedenle $[0,e]^2$ ve $[e,1]^2$ kareleri üzerinde $e \in]0,1[$ birim elemanlı bir uninormun yapısı t-normlar ve t-konormlar ile yakından ilgilidir. $e \in]0,1[$ olmak üzere, ϕ_e ve ψ_e lineer dönüşümleri $\phi_e(x) = \frac{x}{e}$ ve $\psi_e(x) = \frac{x-e}{1-e}$ şeklinde tanımlansın. Önerme 1.57 ye göre $e \in]0,1[$ birim elemanlı bir U uninormuna bir t-norm T ve bir t-konorm S karşılık gelir öyleki

i) Her $(x,y) \in [0,e]^2$ için $U(x,y) = \phi_e{}^{-1}\left(T\big(\phi_e(x), \phi_e(y)\big)\right)$ (1)

ii) Her $(x,y) \in [e,1]^2$ için $U(x,y) = \psi_e{}^{-1}\left(S\big(\psi_e(x), \psi_e(y)\big)\right)$ (2)

sağlanır.

Örnek 1.58.[5]:

$$U(x,y)=\begin{cases}0 & \text{eğer } x=0 \text{ veya } y=0 \text{ ise,}\\ \frac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} & \text{eğer } x>0 \text{ ve } y>0 \text{ ise.}\end{cases}$$

formülü $e=\frac{1}{2}$ ile bir uninorm verir. Burada, $T(x,y)=\frac{xy}{2-(x+y-2xy)}$ ve $S(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}$ şeklindedir.

Aşağıdaki lemma, $[0,e]\times[e,1]$ ve $[e,1]\times[0,e]$ bölgeleri üzerindeki U uninormunun tanımı ile ilgilidir.

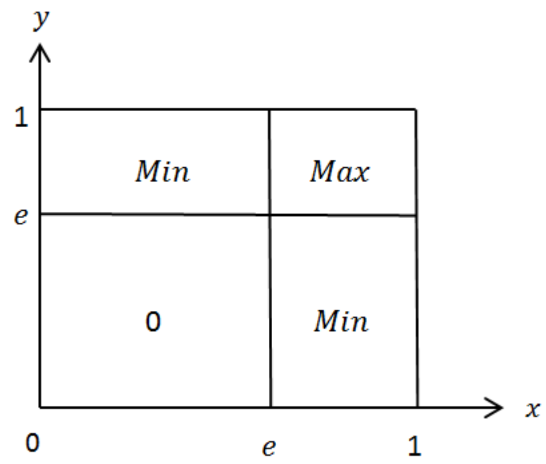
Lemma 1.59.[13]: $U:[0,1]^2\longrightarrow[0,1]$, $e\in[0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Eğer $x\le e\le y$ veya $x\ge e\ge y$ ise, $Min(x,y)\le U(x,y)\le Max(x,y)$ sağlanır.

İspat: $x\le e\le y$ olduğu kabul edilsin. U monoton ve $e\in[0,1]$, U nun birim elemanı olduğundan

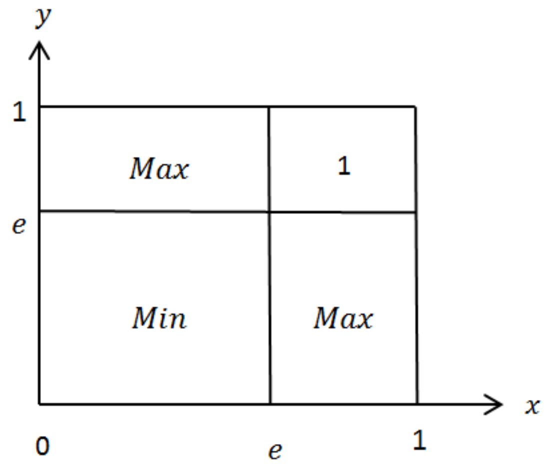
$$Min(x,y)=x=U(x,e)\le U(x,y)\le U(e,y)=y=Max(x,y)$$

elde edilir. Benzer şekilde eğer $x\ge e\ge y$ ise, $Min(x,y)\le U(x,y)\le Max(x,y)$ bulunur.

Lemma 1.59 a göre, $[0,e]\times[e,1]$ ve $[e,1]\times[0,e]$ bölgeleri üzerinde $Min(x,y)\le U(x,y)\le Max(x,y)$ dir. Bu eşitsizlikler kullanılarak $[0,1]$ birim karesi üzerinde keyfi birim elemana sahip en zayıf ve en güçlü uninormlar, Şekil 3 ve Şekil 4 deki gibi gösterilebilir.



Şekil 3. En zayıf uninorm $\underline{U_e}$



Şekil 4. En güçlü uninorm $\overline{U_e}$

Önerme 1.60.[13]: $[0,1]$ üzerinde $e \in]0,1[$ birim elemanlı herhangi bir U uninormu için,

$$\underline{U_e}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \leq x,y < e \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{eğer } e \leq x,y \leq 1 \ ise, \\ Min(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

ve

$$\overline{U_e}(x,y) = \begin{cases} Min(x,y) & \text{eğer } 0 \leq x,y \leq e \text{ ise,} \\ 1 & \text{eğer } e < x,y \leq 1 \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

olmak üzere, $\underline{U_e}(x,y) \leq U(x,y) \leq \overline{U_e}(x,y)$ sağlanır.

1.5.3. $[0,1]$ Üzerinde Uninormların Sürekliliği

Lemma 1.61.[25]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $U(0,0) = 0$ ve $U(1,1) = 1$ dir.

İspat: $0 \leq e$ ve U monoton olduğundan $U(0,0) \leq U(0,e) = 0$ olup buradan $U(0,0) = 0$ elde edilir. $e \leq 1$ ve U nun monotonluk özelliğinden $U(1,1) \geq U(1,e) = 1$ bulunur. Dolayısıyla, $U(1,1) = 1$ dir.

$[0,1]$ üzerinde herhangi bir T t-normu için $T(0,1) = 0$ ve S t-konormu için $S(0,1) = 1$ olduğu bilinmektedir. Şimdi $[0,1]$ üzerinde herhangi bir U uninormu için $U(0,1)$ in alabileceği değerler araştırılacaktır.

Lemma 1.62.[13]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, her $x \in L$ için $U(0,1) = U(U(0,1), x)$ dır.

İspat: İlk olarak $x \geq e$ olduğu kabul edilsin. O halde, Teorem 1.49 ii) den $U(x,1) = 1$ bulunur. U, birleşmeli ve değişmeli olduğundan

$$U(0,1) = U\big(0, U(x,1)\big) = U\big(0, U(1,x)\big) = U(U(0,1), x)$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan, eğer $x \leq e$ ise, bu durumda Teorem 1.49 i) den $U(0,x) = 0$ olur. U, birleşmeli ve değişmeli olduğundan

$$U(0,1) = U(U(0,x), 1) = U(U(x,0), 1) = U\big(x, U(0,1)\big) = U(U(0,1), x)$$

elde edilir.

Sonuç 1.63.[13]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde $U(0,1) = 0$ veya $U(0,1) = 1$ dir.

İspat: Öncelikle $U(0,1) \neq e$ olduğunu gösterelim. $U(0,1) = e$ olduğu kabul edilsin. Lemma 1.62 kullanılırsa, her $x \in [0,1]$ için

$$e = U(0,1) = U(U(0,1), x) = U(e, x) = x$$

elde edilir. Yani, her $x \in [0,1]$ için $e = x$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $U(0,1) \neq e$ dir. Eğer $U(0,1) > e$ ise, Lemma 1.62 de özel olarak $x = 1$ seçilir ve U nun monotonluğu kullanılırsa,

$$U(0,1) = U(U(0,1), 1) \geq U(e, 1) = 1$$

olur. Dolayısıyla $U(0,1) = 1$ dır. Eğer $U(0,1) < e$ ise, Lemma 1.62 de özel olarak $x = 0$ seçilir ve U nun monotonluğu kullanılırsa,

$$U(0,1) = U(U(0,1), 0) \leq U(e, 0) = 0$$

olur. Dolayısıyla, $U(0,1) = 0$ dır.

Bu sonuca göre $U(0,1)$ in tanımı için iki uygun yol vardır. Eğer $U(0,1) = 0$ ise, U, konjanktif uninorm; $U(0,1) = 1$ ise, U, disjanktif uninorm olarak adlandırılır.

Önerme 1.64.[25]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

Bu takdirde,

i) Eğer $U(0,1) = 0$ ise, keyfi $a \in [0,1]$ için $U(0,a) = 0$ ve $U(1,a) \geq a$ dır.

ii) Eğer $U(0,1) = 1$ ise, keyfi $a \in [0,1]$ için $U(1,a) = 1$ ve $U(0,a) \leq a$ dır.

İspat:

i) $U(0,1) = 0$ olsun. U monoton olduğundan keyfi $a \in [0,1]$ için $U(0,a) \leq U(0,1)$ olup $U(0,a) = 0$ bulunur. Ayrıca, $U(1,a) \geq U(e,a) = a$ olduğundan $U(1,a) \geq a$ elde edilir.

ii) $U(0,1) = 1$ olsun. U monoton olduğundan keyfi $a \in [0,1]$ için $U(1,a) \geq U(1,0)$ olup $U(1,a) = 1$ elde edilir. Ayrıca, $U(0,a) \leq U(e,a) = a$ bulunur. Dolayısıyla, $U(0,a) \leq a$ dır.

Teorem 1.65.[25]: Eğer $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı sürekli bir uninorm ise, $e = 0$ veya $e = 1$ dir. Yani, U, sürekli bir t-norm veya sürekli bir t-konormdur.

İspat: Sonuç 1.63 den $U(0,1) = 0$ veya $U(0,1) = 1$ olduğu görülür. $U(0,1) = 0$ olduğu kabul edilsin. Keyfi $a \in [0,1]$ için $f(a) = U(a,1)$ ile bir $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu tanımlanırsa, f sürekli fonksiyon olur. $f(0) = U(0,1) = 0$ ve Lemma 1.61 den $f(1) = U(1,1) = 1$ olup f örtendir. Bu nedenle keyfi $a \in [0,1]$ için $a = f(b) = U(b,1)$ olacak şekilde bir $b \in [0,1]$ vardır. Böylece,

$$U(a,1) = U(f(b),1) = U(U(b,1),1) = U\big(b, U(1,1)\big) = U(b,1) = a$$

elde edilir. Yani, keyfi $a \in [0,1]$ için $U(a,1) = a$ dır. Özel olarak $a = e$ seçilirse, $U(e,1) = e$ olur. Diğer taraftan, e, U nun birim elemanı olduğundan $U(e,1) = 1$ olup $e = 1$ elde edilir. Benzer şekilde, eğer $U(0,1) = 1$ ise, $e = 0$ bulunur.

Bu teorem ile $[0,1]$ üzerinde sürekli uninormların yapıları açıktır. Fakat e birim elemanı 0 veya 1 e eşit değilse, uninorm sürekli değildir.

$x \in [0,1]$ için $x \to U(x,1)$ ve $x \to U(x,0)$ dönüşümleri, $[0,e] \times [e,1]$ ve $[e,1] \times [0,e]$ dikdörtgenleri üzerinde U uninormunun değerini belirlemede önemli rol oynarlar.

Önerme 1.66.[13]: $U: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm ve $x \in [0,1]$ için $x \to U(x,1)$ ve $x \to U(x,0)$ dönüşümleri $x = e$ noktası haricinde her noktada sürekli olsun.

i) Eğer $U(0,1) = 0$ ise, her $x \in [0,e[$ için $U(x,1) = x$ dir.

ii) Eğer $U(0,1) = 1$ ise, her $x \in]e,1]$ için $U(x,0) = x$ dir.

İspat:

i) $U(0,1) = 0$ olsun. $U(e,1) = 1$ olduğundan keyfi $x \in]0,e[$ için $x = U(z,1)$ olacak şekilde bir $z \in]0,e[$ vardır. U nun birleşme özelliği ve Lemma 1.61 kullanılırsa,

$$U(x,1) = U(U(z,1),1) = U\big(z, U(1,1)\big) = U(z,1) = x$$

elde edilir.

ii) $U(0,1) = 1$ olsun. $U(e,0) = 0$ olduğundan her $x \in \,]e,1[$ için $x = U(z,0)$ olacak şekilde bir $z \in \,]e,1[$ vardır. U nun birleşme ve değişme özellikleri kullanılarak Lemma 1.61 den

$$U(0,x) = U\big(0,U(z,0)\big) = U\big(0,U(0,z)\big) = U(U(0,0),z) = U(0,z) = U(z,0) = x$$

bulunur.

Şimdi önceki önerme ile ilgili olarak uninormların genel formları gösterilebilir:

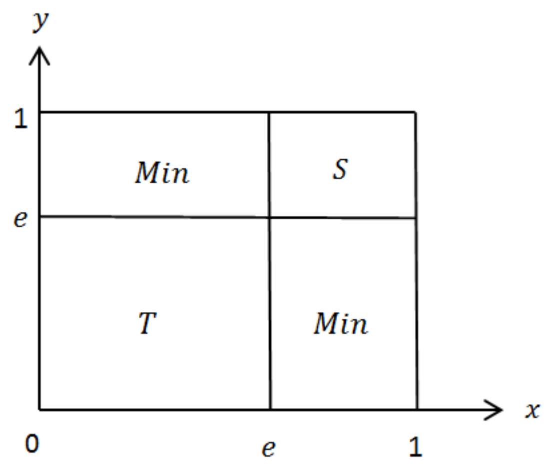
Teorem 1.67.[5]:

i) U, $e \in \,]0,1]$ birim elemanlı ve $U(.,1)$, $[0,e[$ üzerinde sürekli olan bir konjanktif uninormdur ancak ve ancak bir t-norm T ve bir t-konorm S aşağıdaki eşitlik sağlanacak şekilde mevcuttur.

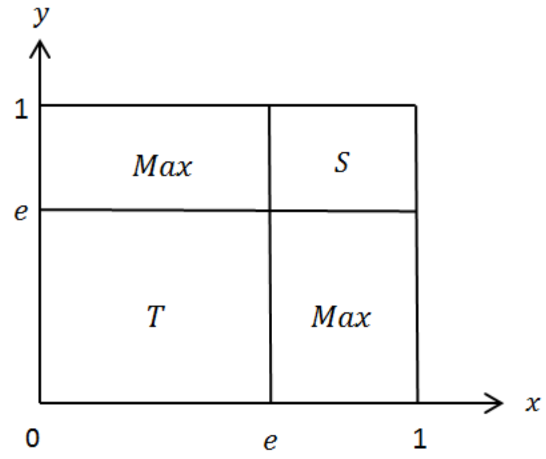
$$U(x,y) = \begin{cases} \phi_e{}^{-1}\Big(T\big(\phi_e(x),\phi_e(y)\big)\Big) & \text{eğer } 0 \le x,y \le e \text{ ise,} \\ \psi_e{}^{-1}\Big(S\big(\psi_e(x),\psi_e(y)\big)\Big) & \text{eğer } e \le x,y \le 1 \text{ ise,} \\ Min(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \tag{3}$$

ii) U, $e \in [0,1[$ birim elemanlı ve $U(.,0)$, $]e,1]$ üzerinde sürekli olan bir disjanktif uninormdur ancak ve ancak bir t-norm T ve bir t-konorm S aşağıdaki eşitlik sağlanacak şekilde mevcuttur.

$$U(x,y) = \begin{cases} \phi_e{}^{-1}\Big(T\big(\phi_e(x),\phi_e(y)\big)\Big) & \text{eğer } 0 \le x,y \le e \text{ ise,} \\ \psi_e{}^{-1}\Big(S\big(\psi_e(x),\psi_e(y)\big)\Big) & \text{eğer } e \le x,y \le 1 \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \tag{4}$$



Şekil 5. U_{Min} in bir sınıfı



Şekil 6. U_{Max} ın bir sınıfı

(3) formundaki uninormların sınıfı U_{Min} ve (4) formundaki uninormların sınıfı U_{Max} ile gösterilsin. Böylece U_{Min} ve U_{Max} ailelerin genel elemanları sırasıyla Şekil 5 ve Şekil 6 daki gibi verilebilir.

1.5.4. $[0,1]$ Üzerinde İdempotent Uninormlar

$A(e)$ de U üzerinde ek varsayımlar yapılarak kesin formül ile U nun bir gösterimi elde edilir.

Lemma 1.68.[12]: Eğer $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ işlemi, artan, $e \in]0,1[$ birim elemanına sahip ve $A(e)$ de $U(x,y) \in \{x,y\}$ ise, bu durumda e sabit noktalı azalan bir $g: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu vardır öyleki $A(e)$ üzerinde

$$U(x,y) = \begin{cases} Min(x,y) & \text{eğer } y < g(x) \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{eğer } y > g(x) \text{ ise,} \\ x \text{ veya } y & \text{eğer } y = g(x) \text{ ise.} \end{cases} \quad (5)$$

sağlanır.

İspat: $(x,y) \in A(e)$ ve $U(x,y) \in \{x,y\}$ olsun. Buna göre bir g fonksiyonu,

$$g(x) = \begin{cases} sup\{y: U(x,y) = x\} & \text{eğer } x \leq e \text{ ise,} \\ inf\{y: U(x,y) = x\} & \text{eğer } x > e \text{ ise.} \end{cases} \quad (6)$$

formülü ile tanımlansın.

$U(x,e) = x$ olduğundan $\{y: U(x,y) = x\} \neq \emptyset$ bulunur.

Eğer $x \leq e$ ise, $g(x) = sup\{y|U(x,y) = x\} \geq e$ sağlanır. Eğer $x > e$ ise, $g(x) = inf\{y|U(x,y) = x\} \leq e$ olur. Ayrıca, $g(e) = sup\{y|U(e,y) = e\} = sup\{e\} = e$ yani, $g(e) = e$ olur.

Eğer $x < e < y$ ise, bu durumda (6) ve U nun monotonluk özelliğinden $y < g(x)$ için, $x = U(x,e) \leq U(x,y) = x$ ve $y > g(x)$ için $U(x,y) \neq x$ bulunur. Bu nedenle $y < g(x)$ için $U(x,y) = x = Min(x,y)$ ve $y > g(x)$ için $U(x,y) = y = Max(x,y)$ elde edilir.

Şimdi $[0,e]$ ve $[e,1]$ üzerinde g fonksiyonunun azalan olduğu gösterilecektir. $x,y \in [0,e]$ ve $x \leq y$ olsun. Eğer $z \in]g(x),1]$ ise, U nun monotonluk özelliği ve (5) kullanılarak

$$x \leq y \Leftrightarrow z = U(x,z) \leq U(y,z)$$

elde edilir. Bu nedenle $U(y,z) = z \neq y$ ve $g(y) \leq z$ olur. Buradan $g(y) \leq inf\{z : g(x) < z\} = g(x)$ bulunur. Böylece, g , $[0,e]$ üzerinde azalandır.

Benzer şekilde, $g: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonunun $[e,1]$ üzerinde azalan olduğu gösterilir.

Lemma 1.68 de $U(x,y) \in \{x,y\}$ varsayımı U nun idempotent olduğunu garanti eder. Bununla birlikte $A(e)$ üzerinde $y = x$ alamayız. Şimdi tüm bölgelerde (5) formülünü gözönünde bulunduralım.

Teorem 1.69.[12]: $g: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu $e \in]0,1[$ sabit noktalı yani, $g(e) = e$ şartını sağlayan herhangi bir azalan fonksiyon olsun. Bu takdirde, $x,y \in [0,1]$ için

$$U(x,y) = \begin{cases} Min(x,y) & \text{eğer } y < g(x) \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{eğer } y > g(x) \text{ ise,} \\ x \text{ veya } y & \text{eğer } y = g(x) \text{ ise.} \end{cases} \tag{7}$$

ile tanımlanan $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu değişmeli ise, U idempotent uninormdur.

İspat: İlk olarak e nin birim eleman olduğu gösterilecektir. e, g fonksiyonunun sabit noktası olduğundan (7) formülü kullanılarak eğer $y < e = g(e)$ ise, $U(e,y) = Min(e,y) = y$; eğer $y > e = g(e)$ ise, $U(e,y) = Max(e,y) = y$; eğer $y = e = g(e)$ ise, $U(e,y) = U(e,e) = e$ elde edilir.

$0 \leq x \leq y \leq 1$ ve $z \in [0,1]$ olsun.

Eğer $y < g(z)$ ise, $x < g(z)$ sağlanır. Bu nedenle

$$U(z,x) = Min(z,x) \leq Min(z,y) = U(z,y)$$

bulunur.

Eğer $y > g(z)$ ise, $z \leq Max(z,y) = U(z,y)$ ve $x \leq Max(z,y) = U(z,y)$ bulunur. Ayrıca $U(z,x) \in \{z,x\}$ olduğundan $U(z,x) \leq U(z,y)$ elde edilir.

Eğer $y = g(z)$ ise, $U(z,y) \in \{z,y\}$ olur. $x = y$ iken $U(z,x) = U(z,y)$ sağlanır. $x \neq y$ iken $U(z,x) = Min(z,x) \leq Min(z,y) \leq U(z,y)$ elde edilir.

Tüm durumlar için $U(z,x) \leq U(z,y)$ elde edilir. U değişmeli olduğundan $U(x,z) \leq U(y,z)$ dir. Dolayısıyla, U monotondur.

U nun birleşme özelliğini sağladığı [29] da Önerme 2 den elde edilir.

Tanım 1.70.[24]: $N: [0,1] \to [0,1]$ bir fonksiyon olsun. Eğer N fonksiyonu, azalan ve $N(0) = 1$, $N(1) = 0$ şartlarını sağlıyorsa, negasyon olarak adlandırılır.

Tanım 1.71.[24]: $N: [0,1] \to [0,1]$ bir negasyon olsun. Eğer N negasyonu involutif yani, her $x \in [0,1]$ için $N\big(N(x)\big) = x$ ise, güçlü negasyon olarak adlandırılır.

Teorem 1.68 deki değişmelilik varsayımına g fonksiyonunun involutif özelliği karşılık getirilebilir.

Teorem 1.72.[12]: $N: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu $e \in]0,1[$ sabit noktalı yani, $N(e) = e$ şartını sağlayan herhangi bir güçlü negasyon olsun. Bu takdirde,

$$U(x,y) = \begin{cases} Min(x,y) & \text{eğer } y \leq N(x) \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \tag{8}$$

formülü bir konjanktif sol-sürekli idempotent uninorm ve

$$U(x,y) = \begin{cases} Min(x,y) & \text{eğer } y < N(x) \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \tag{9}$$

formülü bir disjanktif sağ-sürekli idempotent uninorm verir.

$N: [0,1] \to [0,1]$ bir negasyon olsun. (1), (2) ve (5) formüllerine dayalı yapılar genelde bir uninorm vermez.

Örnek 1.73.[12]: $N: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu $x \in [0,1]$ için $N(x) = 1 - x$ ile tanımlanan bir negasyon olsun. Bu durumda $x, y \in [0,1]$ için,

$$U(x,y) = \begin{cases} 2xy & \text{eğer } x,y \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{eğer } y > N(x) \text{ ise,} \\ Min(x,y) & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $U: [0,1]^2 \to [0,1]$ işlemi birleşmeli değildir. Gerçekten, $x = y = \frac{1}{4}$ ve $z = \frac{13}{16}$ için,

$$U(U(x,y),z) = U\left(U\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\frac{13}{16}\right) = U\left(\frac{1}{8},\frac{13}{16}\right) = \frac{1}{8}$$

ve

$$U\big(x, U(y,z)\big) = U\left(\frac{1}{4}, U\left(\frac{1}{4}, \frac{13}{16}\right)\right) = U\left(\frac{1}{4}, \frac{13}{16}\right) = \frac{13}{16}$$

bulunur. Bu nedenle her $x, y, z \in [0,1]$ için $U(U(x,y),z) = U\big(x, U(y,z)\big)$ eşitliği sağlanmaz.

Teorem 1.74.[12]: N: $[0,1] \to [0,1]$ güçlü bir negasyon olsun.

$$U(x,y) = \begin{cases} T^*(x,y) & \text{eğer } x, y \in [0,e] \text{ ise,} \\ S^*(x,y) & \text{eğer } x, y \in [e,1] \text{ ise,} \\ Min(x,y) & \text{eğer } x < e < y \leq N(x) \text{ veya } y \leq N(x) < e < x \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{eğer } x < e < N(x) < y \text{ veya } N(x) < y < e < x \text{ ise.} \end{cases} \tag{10}$$

formülü bir uninorm verir $\Leftrightarrow$ $T^* = Min$ ve $S^* = Max$ dır (yani (10) formülü (8) formülüne indirgenir).

İspat: Kabul edelim ki U, (10) formülüyle verilen bir uninorm olsun. T^* ın idempotent olduğunu gösterelim. $U(e,e) = e$ ve $U(0,0) = 0$ durumları açıktır. Eğer $a \in]0,e[$ ise, bu durumda $T^*(a,a) \leq T^*(a,e) = a$ olur. $T^*(a,a) < a$ olduğu varsayılsın. $c \in [e,1]$ için $N(a) < c < N\big(T^*(a,a)\big)$ olsun. T^* ın birleşme özelliği ve (10) formülünden $T^*(a,a) = U(T^*(a,a),c) = U\big(a, U(a,c)\big) = U(a,c) = c$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $T^*(a,a) = a$ dır. T^* idempotent t-norm ve tek idempont t-norm T_M minimum olduğundan $T^* = Min$ dır.

Şimdi $a \in [e,1]$ olduğu kabul edilsin. $a \in]e,1[$ için sınır koşulları uygulanırsa, bu durumda $S^*(a,a) \geq S^*(a,e) = a$ sağlanır. $S^*(a,a) > a$ olduğu varsayılsın. $c \in [0,e]$ için $N\big(S^*(a,a)\big) < c < N(a)$ olsun. S^* in birleşme özelliği ve (10) formülünden $S^*(a,a) = U(S^*(a,a),c) = U\big(a, U(a,c)\big) = U(a,c) = c$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $S^*(a,a) = a$ dır. S^* idempotent ve tek idempotent t-konorm S_M maksimum olduğundan $S^* = Max$ olur.

Tersine olarak, eğer $T^* = Min$ ve $S^* = Max$ ise, (10) formülü (8) formülüne indirgenir ve böylece (10) formülü bir uninorm verir.

$N(0) = 1$ olduğundan (10) formülünde $U(0,1) = 0$ bulunur. Bu nedenle bu teoremdeki uninorm konjanktifdir. Benzer sonuçlar, disjanktif uninormlar için de verilebilir.

Teorem 1.75.[12]: $N: [0,1] \to [0,1]$ güçlü bir negasyon olsun.

$$U(x,y) = \begin{cases} T^*(x,y) & \text{eğer } x,y \in [0,e] \text{ ise,} \\ S^*(x,y) & \text{eğer } x,y \in [e,1] \text{ ise,} \\ Min(x,y) & \text{eğer } x < e < y < N(x) \text{ veya } y < N(x) < e < x \text{ ise,} \\ Max(x,y) & \text{eğer } x < e < N(x) \leq y \text{ veya } N(x) \leq y < e < x \text{ ise.} \end{cases} \quad (11)$$

formülü bir uninorm verir $\Leftrightarrow$ $T^* = Min$ ve $S^* = Max$ dır (yani (11) formülü (9) formülüne indirgenir).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlar

Tanım 2.1.[40,20]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun. Eğer $U: L \times L \to L$ fonksiyonu değişmeli, birleşmeli, her iki değişkene göre artan ve her $x \in L$ için $U(x,e) = x$ koşulu sağlanacak şekilde $e \in L$ birim elemanına sahip ise, U, L üzerinde bir uninorm (eğer L sabit ise kısaca uninorm) olarak adlandırılır.

L üzerinde $e \in L$ birim elemanlı tüm uninormların kümesi $\mathcal{U}(e)$ ile gösterilecektir.

Notasyon: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun. $I_e := \{x \in L | x \parallel e\}$, $L_e := \{x \in L | x \leq e \text{ veya } e \leq x\}$ ve $A(e) :=]0, e] \times [e, 1[\cup [e, 1[\times]0, e]$ olarak tanımlansın.

Tanım 2.2.[40]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Eğer her $a, b_1, b_2 \in L$ için

$$U(a, b_1 \vee b_2) = U(a, b_1) \vee U(a, b_2)$$

eşitliği sağlanıyorsa, U uninormu $\vee -$ dağılmalı uninorm olarak adlandırılır.

[30] da [0,1] üzerinde lokal internal uninormlar çalışılmıştır. Burada bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesinin herhangi bir alt kümesi üzerinde lokal internal tanımı aşağıdaki şekilde verilecektir.

Tanım 2.3: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, A, L nin herhangi bir alt kümesi ve $F: A \times A \to A$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in A$ için

$$F(x,y) \in \{x \wedge y, x \vee y\}$$

sağlanıyorsa, F fonksiyonu A üzerinde lokal internal fonksiyon olarak adlandırılır.

Önerme 2.4: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun. Eğer $I_e \neq \emptyset$ ise, L üzerinde e birim elemanlı bir lokal internal uninorm mevcut değildir.

İspat: Kabul edelim ki L üzerinde e birim elemanlı bir lokal internal U uninormu mevcut olsun. $I_e \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $a \in I_e$ elemanı vardır. U lokal internal olduğundan $U(a,e) \in \{a \wedge e, a \vee e\}$ dır. Fakat a, e ile kıyaslanmaz olduğundan $a \wedge e \neq a$ ve $a \vee e \neq a$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup $I_e \neq \emptyset$ olması durumunda L üzerinde e birim elemanlı bir lokal internal uninorm mevcut değildir.

Notasyon: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. $U \downarrow L_e$ notasyonu, U nun L_e üzerine kışıtlanışını, $U \downarrow [0, e]$ notasyonu, U nun $[0, e]$ üzerine kısıtlanışını ve $U \downarrow [e, 1]$ notasyonu, U nun $[e, 1]$ üzerine kısıtlanışını göstersin.

Önerme 2.5: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

i) $(L_e, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafestir.

ii) $U \downarrow L_e : L_e \times L_e \to L_e$, bir uninormdur.

İspat:

i) İlk olarak $L_e = \{x \in L | x \leq e \text{ veya } e \leq x\}$ kümesinin kafes olduğu ispatlanacaktır. Bunun için her $x, y \in L_e$ için $x \wedge y \in L_e$ ve $x \vee y \in L_e$ olduğu gösterilmelidir.

1. $x \geq e$ ve $y \geq e$ olduğu kabul edilirse, $x \wedge y \geq e$ ve $x \vee y \geq e$ olup $x \wedge y \in L_e$ ve $x \vee y \in L_e$ dir.

2. $x \geq e$ ve $y \leq e$ olduğu kabul edilirse, $x \wedge y \leq e$ ve $x \vee y \geq e$ bulunur. Buna göre, $x \wedge y \in L_e$ ve $x \vee y \in L_e$ dir.

3. $x \leq e$ ve $y \geq e$ olduğu kabul edilirse, $x \wedge y \leq e$ ve $x \vee y \geq e$ olur. Dolayısıyla, $x \wedge y \in L_e$ ve $x \vee y \in L_e$ dir.

4. $x \leq e$ ve $y \leq e$ olduğu kabul edilirse, $x \wedge y \leq e$ ve $x \vee y \leq e$ olup $x \wedge y \in L_e$ ve $x \vee y \in L_e$ elde edilir.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olduğundan her $x \in L_e$ için $0 \leq x \leq 1$ sağlanacak şekilde 0 (en küçük) ve 1 (en büyük) elemanları mevcuttur. Dolayısıyla, $(L_e, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafestir.

ii) $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olduğundan U uninormu, L üzerinde değişme, birleşme, monotonluk ve birim eleman özelliklerini sağlar. Yani,
her $x, y \in L$ için $U(x, y) = U(y, x)$ dir. Buna göre, her $x, y \in L_e$ için
$U \downarrow L_e\ (x, y) = U \downarrow L_e\ (y, x)$ olup $U \downarrow L_e$ uninormu için değişme özelliği sağlanır.
Her $x, y, z \in L$ için $U(U(x, y), z) = U\big(x, U(y, z)\big)$ eşitliği sağlandığından her $x, y, z \in L_e$ için $U \downarrow L_e\ (U \downarrow L_e\ (x, y), z) = U \downarrow L_e\ \big(x, U \downarrow L_e\ (y, z)\big)$ olur. Dolayısıyla, $U \downarrow L_e$ uninormu için birleşme özelliği sağlanır.
Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $U(x, z) \leq U(y, z)$ olup her $x, y, z \in L_e$ için $x \leq y$ ise $U \downarrow L_e\ (x, z) \leq U \downarrow L_e\ (y, z)$ sağlanır. Böylece, $U \downarrow L_e$ uninormu birleşme özelliğini sağlar.

$e \in L$, U uninormunun birim elemanı olduğundan, her $x \in L$ için $U(x,e) = x$ dir. Bu nedenle her $x \in L_e$ için $U \downarrow L_e\ (x,e) = x$ dir. Dolayısıyla, $e \in L$, aynı zamanda $e \in L_e$ olup $U \downarrow L_e$ uninormunun birim elemanıdır.

Böylece $U \downarrow L_e$ nin L_e üzerinde bir uninorm olduğu gösterilmiş oldu.

Tanım 2.6.[40]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $U: L \times L \to L$ fonksiyonu, eğer azalmayan, birleşmeli ve sol (sağ) birim elemana yani her $x \in L$ için $U(e_L, x) = x$ $(U(x, e_R) = x)$ olacak şekilde $e_L \in L$ $(e_R \in L)$ elemanına sahip ise, sol (sağ) uninorm olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanımdan açıkca görülüyor ki, L üzerinde herhangi U sol (sağ) uninormu için $U(0,0) = 0$ ve $U(1,1) = 1$ sağlanır. Sol (sağ) birim elemanın bir tek olması gerekmez. Her $x, y \in L$ için $U(x,y) = y$ ile verilen projeksiyon operatörünün L deki her elemanı birim elemanıdır. Fakat sol (sağ) birim elemanlar tüm idempotent elemanlardır. Çünkü U nun herhangi sol (sağ) birim elemanı $e_L \in L$ $(e_R \in L)$ için $U(e_L, e_L) = e_L$ $(U(e_R, e_R) = e_R)$ elde edilir.

$U: L \times L \to L$ fonksiyonu, $e_L \in L$ $(e_R \in L)$ sol (sağ) birim elemanlı bir sol (sağ) uninorm ve bir $e_R \in L$ $(e_L \in L)$ sağ (sol) birim elemana sahip ise, $e_L = U(e_L, e_R) = e_R$ dir. $e = e_L = e_R$ olsun. Buna göre U, L üzerinde pseudo-uninorm olarak adlandırılır ve U nun birim elemanı e dir. U değişmeli ise, U, L üzerinde uninorm olarak adlandırılır.

Önerme 2.7: L bir Bool kafesi ve $e \in L$ olsun. e^*, e nin komplementini göstermek üzere, $U: L \times L \to L$ fonksiyonu keyfi $x, y \in L$ için $U(x,y) = x \wedge (y \vee e^*)$ şeklinde tanımlanırsa, U, L üzerinde bir sağ uninorm olur.

i) Birleşme özelliği: Her $x, y, z \in L$ için $U(U(x,y), z) = U\big(x, U(y,z)\big)$ olduğu gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
U\big(x, U(y,z)\big) &= U\big(x, y \wedge (z \vee e^*)\big) \\
&= x \wedge \Big(\big(y \wedge (z \vee e^*)\big) \vee e^*\Big) \\
&= x \wedge \big((y \vee e^*) \wedge (z \vee e^*)\big) \\
&= \big(x \wedge (y \vee e^*)\big) \wedge (z \vee e^*) \\
&= U(x \wedge (y \vee e^*), z) \\
&= U(U(x,y), z)
\end{aligned}
$$

ii) Monotonluk özelliği: Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise, $U(x,z) \leq U(y,z)$ olduğu gösterilecektir.

$$U(x,z) = x \wedge (z \vee e^*) \leq y \wedge (z \vee e^*) = U(y,z)$$

iii) Birim eleman özelliği: Her $x \in L$ için $U(x,e) = x$ olduğu gösterilmelidir.

$$U(x,e) = x \wedge (e \vee e^*) = x \wedge 1 = x$$

Önerme 2.8: L bir Bool kafesi ve $e \in L$ olsun. e^*, e nin komplementini göstermek üzere, $U: L \times L \to L$ fonksiyonu keyfi $x, y \in L$ için $U(x,y) = \big((x \wedge y) \vee e^*\big) \wedge (x \vee y)$ şeklinde tanımlanırsa, U, L üzerinde bir uninorm olur.

i) Değişme özelliği: Her x,$y \in L$ için $U(x,y) = U(y,x)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \big((x \wedge y) \vee e^*\big) \wedge (x \vee y) \\ &= \big((y \wedge x) \vee e^*\big) \wedge (y \vee x) \\ &= U(y,x) \end{aligned}$$

i) Birleşme özelliği: Her $x, y, z \in L$ için $U(U(x,y),z) = U\big(x, U(y,z)\big)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} U(U(x,y),z) &= U\Big(\big((x \wedge y) \vee e^*\big) \wedge (x \vee y), z\Big) \\ &= \Big[\Big\{\big((x \wedge y) \vee e^*\big) \wedge (x \vee y) \wedge z\Big\} \vee e^*\Big] \\ &\quad \wedge \Big[\Big\{\big((x \wedge y) \vee e^*\big) \wedge (x \vee y)\Big\} \vee z\Big] \\ &= [\{(x \vee e^*) \wedge (y \vee e^*) \wedge (x \vee y) \wedge z\} \vee e^*] \\ &\quad \wedge [\{(x \vee e^*) \wedge (y \vee e^*) \wedge (x \vee y)\} \vee z] \\ &= [(x \vee e^*) \wedge (y \vee e^*) \wedge (x \vee y \vee e^*) \wedge (z \vee e^*)] \\ &\quad \wedge [(x \vee z \vee e^*) \wedge (y \vee z \vee e^*) \wedge (x \vee y \vee z)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} U\big(x, U(y,z)\big) &= U\Big(x, \big((y \wedge z) \vee e^*\big) \wedge (y \vee z)\Big) \\ &= \Big[\Big\{x \wedge \big((y \wedge z) \vee e^*\big) \wedge (y \vee z)\Big\} \vee e^*\Big] \\ &\quad \wedge \Big[x \vee \Big\{\big((y \wedge z) \vee e^*\big) \wedge (y \vee z)\Big\}\Big] \\ &= [\{x \wedge (y \vee e^*) \wedge (z \vee e^*) \wedge (y \vee z)\} \vee e^*] \\ &\quad \wedge [x \vee \{(y \vee e^*) \wedge (z \vee e^*) \wedge (y \vee z)\}] \\ &= [(x \vee e^*) \wedge (y \vee e^*) \wedge (z \vee e^*) \wedge (y \vee z \vee e^*)] \\ &\quad \wedge [(x \vee y \vee e^*) \wedge (x \vee z \vee e^*) \wedge (x \vee y \vee z)] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $U(U(x,y),z) = U\big(x, U(y,z)\big)$ bulunur.

ii) Monotonluk özelliği: Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise, $U(x,z) \leq U(y,z)$ olduğu gösterilecektir.

$$U(x,z) = \big((x \wedge z) \vee e^*\big) \wedge (x \vee z)$$
$$\leq \big((y \wedge z) \vee e^*\big) \wedge (y \vee z)$$
$$= U(y,z)$$

iii) Birim eleman özelliği: Her $x \in L$ için $U(x,e) = x$ olduğu gösterilmelidir.

$$U(x,e) = \big((x \wedge e) \vee e^*\big) \wedge (x \vee e)$$
$$= \big((x \vee e^*) \wedge (e \vee e^*)\big) \wedge (x \vee e)$$
$$= \big((x \vee e^*) \wedge 1\big) \wedge (x \vee e)$$
$$= (x \vee e^*) \wedge (x \vee e)$$
$$= x \vee (e^* \wedge e)$$
$$= x \vee 0$$
$$= x$$

Önerme 2.9: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $U(0,0) = 0$ ve $U(1,1) = 1$ dir.

İspat: $0 \leq e$ ve U monoton olduğundan $U(0,0) \leq U(0,e)$ sağlanır. Ayrıca $e \in L$, U nun birim elemanı olduğundan $U(e,0) = 0$ dır. Dolayısıyla $U(0,0) = 0$ dır.

$e \leq 1$ ve U monoton olduğundan $U(1,1) \geq U(e,1)$ olur. Ayrıca $e \in L$, U nun birim elemanı olduğundan $U(e,1) = 1$ dir. Böylece $U(1,1) = 1$ elde edilir.

Notasyon: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. $\lambda := U(0,1)$ ile tanımlansın.

Önerme 2.10: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Herhangi $a \in [0,\lambda]$ ve $b \in [\lambda, 1]$ için $U(a,b) = \lambda$ elde edilir.

İspat: $0 \leq a \leq \lambda$, $\lambda \leq b \leq 1$ ve U monoton olduğundan

$$U(0,\lambda) \leq U(a,b) \leq U(1,\lambda) \qquad (12)$$

elde edilir. U nun birleşme, değişme özellikleri ve Önerme 2.9 kullanılarak

$$U(0,\lambda) = U\big(0, U(0,1)\big) = U(U(0,0), 1) = U(0,1) = \lambda$$

ve

$$U(1,\lambda) = U\big(1, U(0,1)\big) = U\big(1, U(1,0)\big) = U(U(1,1), 0) = U(1,0) = U(0,1) = \lambda$$

elde edilir. (12) eşitsizliğine göre $\lambda \leq U(a,b) \leq \lambda$ sağlanır. Böylece herhangi $a \in [0,\lambda]$ ve $b \in [\lambda, 1]$ için $U(a,b) = \lambda$ elde edilir.

Sonuç 2.11: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $U(\lambda,\lambda) = U(\lambda, 0) = U(\lambda, 1) = \lambda$ elde edilir.

Sonuç 2.12: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $U(\lambda, e \vee \lambda) = \lambda$, $U(\lambda, e \wedge \lambda) = \lambda$ ve $U(e \wedge \lambda, e \vee \lambda) = \lambda$ elde edilir.

Sonuç 2.13: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $\lambda = U(0,1)$, U uninormunun idempotent elemanıdır.

Teorem 2.14: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Eğer U, $A(e)$ üzerinde lokal internal uninorm ise, $\lambda = 0$ veya $\lambda = 1$ dir.

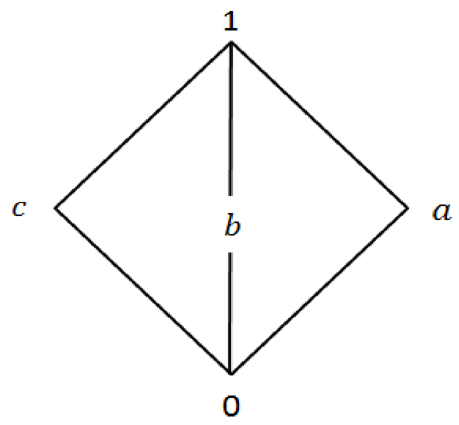
İspat: λ nın e ile kıyaslanamaz olduğu kabul edilsin. Sonuç 2.12 kullanılırsa, $U(e \wedge \lambda, e \vee \lambda) = \lambda$ dır. U uninormu $A(e)$ üzerinde lokal internal ve $(e \wedge \lambda, e \vee \lambda) \in A(e)$ olduğundan

$$U(e \wedge \lambda, e \vee \lambda) \in \{e \wedge \lambda, e \vee \lambda\}$$

bulunur. Böylece $\lambda = e \vee \lambda$ veya $\lambda = e \wedge \lambda$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\lambda = U(0,1)$, e ile kıyaslanabilirdir. $\lambda \geq e$ olduğu varsayılsın. Önerme 2.10 kullanılırsa, herhangi $b \in [\lambda, 1]$ ve $e \in [0, \lambda]$ için $U(e, b) = \lambda$ dır. Ayrıca $e \in L$, U nun birim elemanı olduğundan keyfi $b \in [\lambda, 1]$ için $U(e, b) = b$ elde edilir. Bu nedenle herhangi $b \in [\lambda, 1]$ için $b = \lambda$ olur. Dolayısıyla $\lambda = 1$ dir.

Benzer şekilde eğer $\lambda < e$ ise, $\lambda = 0$ olduğu ispatlanır.

Örnek 2.15: $L_1 = \{0, a, b, c, 1\}$ sınırlı kafesi aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 7. $L_1 = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi

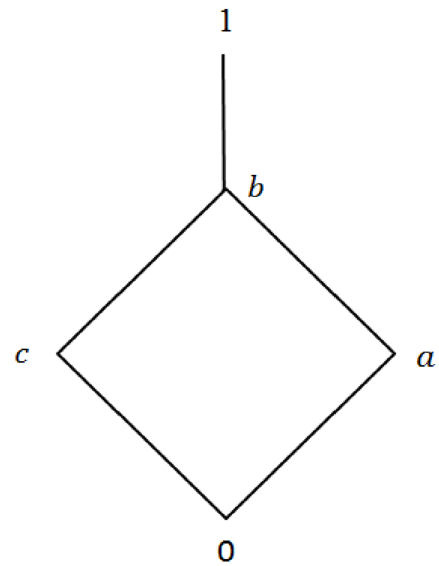
L_1 üzerinde U_1 ikili işlemi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

Tablo 1. L_1 kafesi üzerindeki U_1 uninormu

U_1	0	a	b	c	1
0	0	0	b	0	0
a	0	a	0	a	1
b	b	0	b	b	1
c	0	a	b	c	1
1	0	1	1	1	1

Bu durumda, U_1 , L_1 üzerinde c birim elemanlı bir uninorm olur.

Örnek 2.16: $L_2 = \{0, a, b, c, 1\}$ sınırlı kafesi aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 8. $L_2 = \{0, a, b, c, 1\}$ kafesi

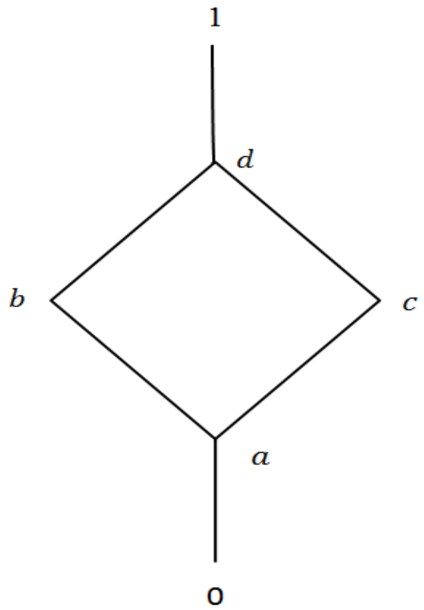
L_2 üzerinde U_2 ikili işlemi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

Tablo 2. L_2 kafesi üzerindeki U_2 uninormu

U_2	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	1
a	0	a	a	a	1
b	0	a	b	b	1
c	0	a	b	c	1
1	1	1	1	1	1

Bu durumda, U_2 , L_2 üzerinde c birim elemanlı bir uninorm olur.

Örnek 2.17: $L_3 = \{0, a, b, c, d, 1\}$ sınırlı kafesi aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 9. $L_3 = \{0, a, b, c, d, 1\}$ kafesi

L_3 üzerinde U_3 ikili işlemi, aşağıdaki şekilde tanımlansın.

Tablo 3. L_3 kafesi üzerindeki U_3 uninormu

U_3	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	1
a	0	a	0	0	a	1
b	0	0	b	0	b	1
c	0	0	0	c	c	1
d	0	a	b	c	d	1
1	1	1	1	1	1	1

Bu durumda, U_3 , L_3 üzerinde d birim elemanlı bir uninorm olur.

2.2. Sınırlı Kafesler Üzerinde Uninormlardan Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar Üretmek İçin Bazı Yöntemler

Teorem 2.18: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun.

Bu takdirde, $T : L \times L \to L$ fonksiyonu,

$$T(x,y) = \begin{cases} U(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ x \wedge y & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \tag{13}$$

şeklinde tanımlanırsa, T, L üzerinde bir t-norm olur.

İspat:

i) Değişme özelliği: Her x,$y \in L$ için $T(x,y) = T(y,x)$ olduğu gösterilecektir.

1. $(x,y) \in [0,e]^2$ olduğu kabul edilirse,

$$T(x,y) = U(x,y) = U(y,x) = T(y,x)$$

elde edilir.

2. $(x,y) \notin [0,e]^2$ olduğu kabul edilirse,

$$T(x,y) = x \wedge y = y \wedge x = T(y,x)$$

elde edilir.

ii) Birleşme özelliği: Her $x,y,z \in L$ için $T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$ olduğu gösterilecektir.

1. $(x,y) \in [0,e]^2$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $z \in [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(U(x,y),z) = U(U(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$$

bulunur.

1.2. Eğer $z \notin [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(U(x,y),z) = U(x,y) \wedge z = U(x,y)$$

ve

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y \wedge z) = T(x,y) = U(x,y)$$

elde edilir. Buradan

$$T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$$

bulunur.

2. $(x,y) \notin [0,e]^2$ olsun. Buna göre,

2.1. $x \notin [0,e]$ ve $y \notin [0,e]$ olduğu kabul edilsin.

2.1.1. Eğer $z \in [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y,z) = (x \wedge y) \wedge z = z$$

ve

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y \wedge z) = T(x,z) = x \wedge z = z$$

bulunur. Buradan

$$T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$$

elde edilir.

2.1.2. Eğer $z \notin [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y,z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

ve

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z)$$

bulunur. Buradan

$$T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$$

elde edilir.

2.2. $x \notin [0,e]$ ve $y \in [0,e]$ olduğu kabul edilsin.

2.2.1. Eğer $z \in [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y,z) = T(y,z) = U(y,z)$$

ve

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T\big(x,U(y,z)\big) = x \wedge U(y,z) = U(y,z)$$

bulunur. Buradan

$$T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$$

elde edilir.

2.2.2. Eğer $z \notin [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y,z) = T(y,z) = y \wedge z = y$$

ve

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y \wedge z) = T(x,y) = x \wedge y = y$$

bulunur. Buradan

$$T(T(x,y),z) = T\big(x,T(y,z)\big)$$

elde edilir.

2.3. $x \in [0,e]$ ve $y \notin [0,e]$ olduğu kabul edilsin.

2.3.1. Eğer $z \in [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y,z) = T(x,z) = U(x,z)$$

ve

$$T\big(x,T(y,z)\big) = T(x,y \wedge z) = T(x,z) = U(x,z)$$

bulunur. Buradan

$$T(T(x,y),z) = T\big(x, T(y,z)\big)$$

elde edilir.

2.3.2. Eğer $z \notin [0,e]$ ise,

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y, z) = T(x,z) = x \wedge z = x$$

ve

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z) = x$$

bulunur. Buradan

$$T(T(x,y),z) = T\big(x, T(y,z)\big)$$

elde edilir.

iii) Monotonluk özelliği: Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise, $T(x,z) \leq T(y,z)$ olduğu gösterilecektir.

1. $(x,z) \in [0,e]^2$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $y \in [0,e]$ ise,

$$T(x,z) = U(x,z) \leq U(y,z) = T(y,z)$$

elde edilir.

1.2.Eğer $y \notin [0,e]$ ise,

$$T(x,z) = U(x,z) \leq x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

elde edilir.

2. $(x,z) \notin [0,e]^2$ olsun. Buna göre,

2.1. $x \notin [0,e]$ ve $z \notin [0,e]$ olduğu kabul edilsin.

2.1.1. Eğer $y \in [0,e]$ ise,

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

elde edilir.

2.1.2. Eğer $y \notin [0,e]$ ise,

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

elde edilir.

2.2. $x \notin [0,e]$ ve $z \in [0,e]$ olduğu kabul edilirse, bu durumda $y \notin [0,e]$ olur. Bundan dolayı,

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

elde edilir.

2.3. $x \in [0,e]$ ve $z \notin [0,e]$ olduğu kabul edilsin.

2.3.1. Eğer $y \in [0,e]$ ise,

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

elde edilir.

2.3.2. Eğer $y \notin [0,e]$ ise,

$$T(x,z) = x \wedge z \leq y \wedge z = T(y,z)$$

elde edilir.

iv) Birim eleman özelliği: Her $x \in L$ için $T(x,1) = x$ olduğu gösterilmelidir.

1. $e = 1$ olduğu varsayılarak,

$$T(x,1) = U(x,1) = x$$

elde edilir.

2. $e < 1$ olduğu varsayılsın.

2.1. Eğer $x \in [0,e]$ ise,

$$T(x,1) = x \wedge 1 = x$$

elde edilir.

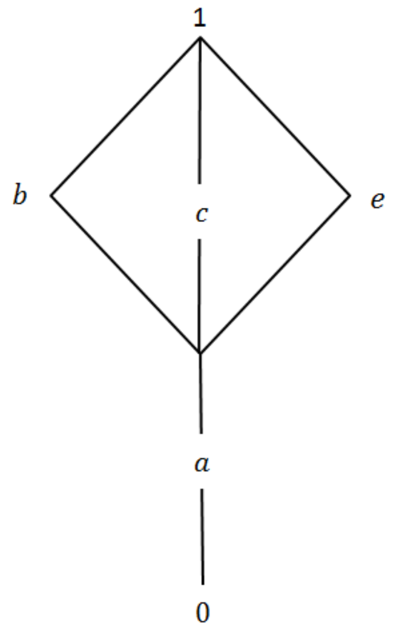
2.2. Eğer $x \notin [0,e]$ ise,

$$T(x,1) = x \wedge 1 = x$$

elde edilir.

Uyarı 2.19: Eğer Teorem 2.18 de bazı $x \in L$ elemanları e ile kıyaslanamıyor ise, herhangi L sınırlı kafesi üzerindeki bir t-norm, L üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm yardımıyla (13) formülü ile karakterize edilemez. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 2.20: $L = \{0, a, b, c, e, 1\}$ sınırlı bir kafesi ve L üzerindeki U uninormu aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 10. $L = \{0, a, b, c, e, 1\}$ kafesi

Tablo 4. L kafesi üzerindeki U uninormu

U	0	e	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0	1
e	0	e	a	b	c	1
a	0	a	0	0	0	1
b	0	b	0	0	0	1
c	0	c	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Kabul edelim ki Şekil 10 da verilen L sınırlı kafesi üzerinde tanımlanan Tablo 4 deki bir uninorm ile (13) formülü, L üzerinde bir t-norm versin. Bu durumda t-normun birleşme özelliğinden dolayı, $T(T(b,c),a) = T\big(b, T(c,a)\big)$ eşitliği sağlanmalıdır. Fakat

$$T(T(b,c),a) = T(b \wedge c, a) = T(a,a) = U(a,a) = 0$$

ve

$$T\big(b, T(c,a)\big) = T(b, c \wedge a) = T(b,a) = b \wedge a = a$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, kabul yanlış olup her L sınırlı kafesi üzerindeki t-norm, L üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm yardımıyla (13) formülü ile karakterize edilemez.

Aşağıdaki Teorem, Teorem 2.18 in duali olarak verilir.

Teorem 2.21: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $U: L \times L \to L$, $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm ve her $x \in L$ elemanı e ile kıyaslanabilir olsun.

Bu takdirde, $S : L \times L \to L$ fonksiyonu,

$$S(x,y) = \begin{cases} U(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ x \vee y & \text{aksi takdirde.} \end{cases} \tag{14}$$

şeklinde tanımlanırsa, S, L üzerinde bir t-konorm olur.

Teorem 2.21 in ispatı, Teorem 2.18 in ispatına dual olarak verilebilir.

Benzer şekilde açıkça görülebilir ki, her L sınırlı kafesi üzerindeki t-konorm, L üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm yardımıyla (14) formülü ile karakterize edilemez.

2.3. Sınırlı Kafesler Üzerinde Üçgensel Normlar ve Üçgensel Konormlar Yardımıyla Elde Edilen Uninormlar

Herhangi bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde en büyük $T_\wedge$ (infimum) t-normu, en küçük $S_\vee$ (supremum) t-konormu,

$$T_w(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & eğer\ 1 \in \{x,y\}\ ise, \\ 0 & aksi\ takdirde. \end{cases}$$

ile tanımlanan en küçük $T_w: L^2 \to L$ t-normu ve

$$S_w(x,y) = \begin{cases} x \vee y & eğer\ 0 \in \{x,y\}\ ise, \\ 1 & aksi\ takdirde. \end{cases}$$

ile tanımlanan en büyük $S_w: L^2 \to L$ t-konormu gözönüne alınsın. Buna göre, herhangi bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde t-normlar ve t-konormların varlığı bilinirken, herhangi bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde $e \in L \setminus \{0,1\}$ birim elemanlı U uninormunun varlığı bizim en iyi bilgimiz dahilinde literatürde henüz bilinmemektedir.

Bu bölümün ana amacı bu boşluğu doldurmaktır. Bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm inşa etmek için iki yöntem verilecektir. Bu yöntemlerin bir ürünü olarak bir $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı kafesi üzerinde $e \in L \setminus \{0,1\}$ birim elemanlı en küçük ve en büyük uninorm elde edilecektir.

Önerme 2.22.[20]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L \setminus \{0,1\}$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

i) $(x,y) \in A(e)$ için $x \wedge y \leq U(x,y) \leq x \vee y$,

ii) $(x,y) \in L \times [0,e]$ için $U(x,y) \leq x$,

iii) $(x, y) \in [0, e] \times L$ için $U(x, y) \leq y$,

iv) $(x, y) \in L \times [e, 1]$ için $x \leq U(x, y)$,

v) $(x, y) \in [e, 1] \times L$ için $y \leq U(x, y)$.

İspat: İspat için, U nun monotonluk ve birim eleman özellikleri kullanılacaktır.

i) $(x, y) \in]0, e] \times [e, 1[$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$x \wedge y = x = U(x, e) \leq U(x, y) \leq U(e, y) = y = x \vee y$$

elde edilir. Benzer şekilde, eğer $(x, y) \in [e, 1[\times]0, e]$ ise, $x \wedge y \leq U(x, y) \leq x \vee y$ sağlanır.

ii) $(x, y) \in L \times [0, e]$ için $U(x, y) \leq U(x, e) = x$ elde edilir.

iii) $(x, y) \in [0, e] \times L$ için $U(x, y) \leq U(e, y) = y$ elde edilir.

iv) $(x, y) \in L \times [e, 1]$ için $x = U(x, e) \leq U(x, y)$ elde edilir.

v) $(x, y) \in [e, 1] \times L$ için $y = U(e, y) \leq U(x, y)$ elde edilir.

Önerme 2.23.[20]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes, $e \in L$ ve U, L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olsun.

i) $T^* = U \downarrow [0, e]: [0, e]^2 \to [0, e]$ bir t-normdur.

ii) $S^* = U \downarrow [e, 1]: [e, 1]^2 \to [e, 1]$ bir t-konormdur.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes olsun. $\mathcal{U}$, L üzerinde tüm uninormların kümesini göstermek üzere, $U, V \in \mathcal{U}$ için

$$U \leq V \Leftrightarrow \text{Her } (x, y) \in L^2 \text{ için } U(x, y) \leq V(x, y)$$

şeklinde tanımlanan sıra ile $\mathcal{U}$ kümesi ele alınsın.

$\mathcal{U}$, en küçük elemanı T_w ve en büyük elemanı S_w olan bir kısmen sıralı kümedir.

$(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun. $e = 0$ için L üzerinde e birim elemanlı bir U uninormu (bu durumda U bir t-normdur) ve $e = 1$ için L üzerinde e birim elemanlı bir U uninormu (bu durumda U bir t-konormdur) mevcuttur. Diğer taraftan herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı bir uninormun var olup olmadığı merak edilebilir. Bu nedenle böyle bir uninormun varlığını göstermek için aşağıdaki teorem verilecektir. $[0, e]$ üzerindeki t-normların varlığına (benzer şekilde $[e, 1]$ üzerindeki t-konormların varlığına) dayanan aşağıdaki teorem ile herhangi bir L sınırlı kafesi ve keyfi $e \in L \backslash \{0,1\}$ elemanı için L üzerinde $e \in L \backslash \{0,1\}$ birim elemanlı bir uninormun varlığı garanti edilir.

Teorem 2.24.[20]: $(L, \leq, 0, 1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. Eğer T_e , $[0, e]$ üzerinde bir t-norm ve S_e , $[e, 1]$ üzerinde bir t-konorm ise, aşağıdaki şekilde tanımlanan $U_t: L^2 \to L$ ve $U_s: L^2 \to L$ fonksiyonları L üzerinde uninormlardır.

$$U_t(x,y) = \begin{cases} T_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ x \vee y & \text{eğer } (x,y) \in [0,e] \times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e] \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [0,e], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [0,e], x \parallel e \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

$$U_s(x,y) = \begin{cases} S_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ x \wedge y & \text{eğer } (x,y) \in [0,e[\times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e[\text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [e,1], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [e,1], x \parallel e \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

İspat: $U_t \downarrow [e,1]^2 = S_W$, $[e,1]$ üzerinde en büyük t-konorm ve $U_s \downarrow [0,e]^2 = T_W$, $[0,e]$ üzerinde en küçük t-normdur. Burada U_t nin bir uninorm olduğu ispatlanacaktır. Benzer yöntemler kullanılarak U_s nin bir uninorm olduğu gösterilir.

i) Değişme özelliği: Her $x, y \in L$ için $U_t(x,y) = U_t(y,x)$ olduğu gösterilecektir.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $y \leq e$ ise, $U_t(x,y) = T_e(x,y) = T_e(y,x) = U_t(y,x)$ elde edilir.

1.2. Eğer $y > e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = y \vee x = U_t(y,x)$ elde edilir.

1.3. Eğer $y \parallel e$ ise, $U_t(x,y) = y = U_t(y,x)$ elde edilir.

2. $x > e$ olduğu kabul edilsin.

2.1. Eğer $y \leq e$ ise, $U_t(x,y) = x \vee y = y \vee x = U_t(y,x)$ elde edilir.

2.2. Eğer $y > e$ ise, $U_t(x,y) = 1 = U_t(y,x)$ elde edilir.

2.3. Eğer $y \parallel e$ ise, $U_t(x,y) = 1 = U_t(y,x)$ elde edilir.

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilsin.

3.1. Eğer $y \leq e$ ise, $U_t(x,y) = x = U_t(y,x)$ elde edilir.

3.2. Eğer $y > e$ ise, $U_t(x,y) = 1 = U_t(y,x)$ elde edilir.

3.3. Eğer $y \parallel e$ ise, $U_t(x,y) = 1 = U_t(y,x)$ elde edilir.

ii) Birleşme Özelliği: Her $x,y,z \in L$ için $U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(U_t(x,y), z)$ olduğu gösterilecektir. x,y,z ve e elemanları arasındaki ilişki gözönüne alınarak ispat, mümkün olan tüm durumlara ayrılacaktır.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $y \leq e$, $z \leq e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = T_e(x, T_e(y,z)) = T_e(T_e(x,y), z) = U_t(U_t(x,y), z)$$

1.2. Eğer $y \leq e, z > e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,z) = z = U_t(T_e(x,y),z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

1.3. Eğer $y \leq e, z \parallel e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,z) = z = U_t(T_e(x,y),z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

1.4. Eğer $y > e, z \leq e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,y) = y = U_t(y,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

1.5. Eğer $y > e, z > e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,1) = 1 = U_t(y,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

1.6. Eğer $y > e, z \parallel e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,1) = 1 = U_t(y,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

1.7. Eğer $y \parallel e, z \leq e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,y) = y = U_t(y,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

1.8. Eğer $y \parallel e, z > e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,1) = 1 = U_t(y,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

1.9. Eğer $y \parallel e, z \parallel e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,1) = 1 = U_t(y,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2. $x > e$ olduğu kabul edilsin.

2.1. Eğer $y \leq e, z \leq e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t\big(x, T_e(y,z)\big) = x = U_t(x,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.2. Eğer $y \leq e, z > e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,z) = 1 = U_t(x,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.3. Eğer $y \leq e, z \parallel e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,z) = 1 = U_t(x,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.4. Eğer $y > e, z \leq e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,y) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.5. Eğer $y > e, z > e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.6. Eğer $y > e, z \parallel e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.7. Eğer $y \parallel e, z \leq e$ ise,

$$U_t\big(x, U_t(y,z)\big) = U_t(x,y) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.8. Eğer $y \parallel e, z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

2.9. Eğer $y \parallel e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilsin.

3.1. Eğer $y \leq e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x, T_e(y,z)) = x = U_t(x,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.2. Eğer $y \leq e, z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,z) = 1 = U_t(x,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.3. Eğer $y \leq e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,z) = 1 = U_t(x,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.4. Eğer $y > e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,y) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.5. Eğer $y > e, z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.6. Eğer $y > e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.7. Eğer $y \parallel e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,y) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.8. Eğer $y \parallel e, z > e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

3.9. Eğer $y \parallel e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x, U_t(y,z)) = U_t(x,1) = 1 = U_t(1,z) = U_t(U_t(x,y),z)$$

iii) Monotonluk özelliği: Eğer $x \leq y$ ise, her $z \in L$ için $U_t(x,z) \leq U_t(y,z)$ olduğu gösterilecektir. İspat, tüm muhtemel durumlara ayrılarak yapılacaktır.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilsin.

1.1. Eğer $y \leq e$, z$\leq e$ ise,

$$U_t(x,z) = T_e(x,z) \leq T_e(y,z) = U_t(y,z)$$

1.2. Eğer $y \leq e, z > e$ ise,

$$U_t(x,z) = z = U_t(y,z)$$

1.3. Eğer $y \leq e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x,z) = z = U_t(y,z)$$

1.4. Eğer $y > e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x,z) = T_e(x,z) \leq x \wedge z \leq y \wedge z \leq y = U_t(y,z)$$

1.5. Eğer $y > e, z > e$ ise,

$$U_t(x,z) = z \leq 1 = U_t(y,z)$$

1.6. Eğer $y > e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x,z) = z \leq 1 = U_t(y,z)$$

1.7. Eğer $y \parallel e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x,z) = T_e(x,z) \leq x \wedge z \leq y \wedge z \leq y = U_t(y,z)$$

1.8. Eğer $y \parallel e, z > e$ ise,

$$U_t(x,z) = z \leq 1 = U_t(y,z)$$

1.9. Eğer $y \parallel e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x,z) = z \leq 1 = U_t(y,z)$$

2. $x > e$ olduğu kabul edilsin.

2.1. Eğer $y > e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x,z) = x \leq y = U_t(y,z)$$

2.2. Eğer $y > e, z > e$ ise,

$$U_t(x,z) = 1 = U_t(y,z)$$

2.3. Eğer $y > e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x,z) = 1 = U_t(y,z)$$

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilsin.

3.1. Eğer $y > e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x,z) = x \leq y = U_t(y,z)$$

3.2. Eğer $y > e, z > e$ ise,

$$U_t(x,z) = 1 = U_t(y,z)$$

3.3. Eğer $y > e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x,z) = 1 = U_t(y,z)$$

3.4. Eğer $y \parallel e, z \leq e$ ise,

$$U_t(x,z) = x \leq y = U_t(y,z)$$

3.5. Eğer $y \parallel e, z > e$ ise,

$$U_t(x,z) = 1 = U_t(y,z)$$

3.6. Eğer $y \parallel e, z \parallel e$ ise,

$$U_t(x,z) = 1 = U_t(y,z)$$

iv) Birim eleman özelliği: Her $x \in L$ için $U_t(x,e) = x$ olduğu gösterilmelidir.

1. $x \leq e$ olduğu kabul edilirse,

$$U_t(x,e) = T_e(x,e) = x$$

elde edilir.

2. $x > e$ olduğu kabul edilirse,

$$U_t(x,e) = x \vee e = x$$

elde edilir.

3. $x \parallel e$ olduğu kabul edilirse,

$$U_t(x,e) = x$$

elde edilir.

Uyarı 2.25.[20]: Teorem 2.24 deki $U_t: L^2 \to L$ ve $U_s: L^2 \to L$ uninormları

$$U_t(x,y) = \begin{cases} T_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [0,e], y \notin [0,e] \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } x \notin [0,e], y \in [0,e] \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

$$U_s(x,y) = \begin{cases} S_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [e,1], y \notin [e,1] \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } x \notin [e,1], y \in [e,1] \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

eşitlikleri ile de verilebilir.

Sonuç 2.26.[20]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L \backslash \{0,1\}$ olsun. Eğer Teorem 2.24 de $[0,e]$ üzerinde T_e t-normu yerine $T_\wedge$ (infimum) en büyük t-norm ve $[e,1]$ üzerinde S_e t-konormu yerine $S_\vee$ (supremum) en küçük t-konorm alınırsa, bu durumda

$$U_{T_\wedge}(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ x \vee y & \text{eğer } (x,y) \in [0,e] \times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e] \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [0,e], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [0,e], x \parallel e \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

$$U_{S_\vee}(x,y) = \begin{cases} x \vee y & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ x \wedge y & \text{eğer } (x,y) \in [0,e[\times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e[\text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [e,1], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [e,1], x \parallel e \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $U_{T_\wedge}$ ve $U_{S_\vee}$ uninormları sırasıyla L üzerinde e birim elemanlı en büyük ve en küçük uninormlar olur.

İspat: İlk olarak, $U_{T_\wedge}$ uninormunun $\mathcal{U}(e)$ kümesinin en büyük elemanı olduğu gösterilecektir. Keyfi $U \in \mathcal{U}(e)$ seçilsin.

i) Eğer $(x,y) \in [0,e]^2$ ise, Önerme 2.23 i) ye göre $U \downarrow [0,e]: [0,e]^2 \to [0,e]$ bir t-normdur. $U_{T_\wedge}(x,y) = x \wedge y$ ve $T_\wedge(x,y) = x \wedge y$ t-normu $[0,e]$ üzerinde en büyük t-norm olduğundan her $(x,y) \in [0,e]^2$ için $U(x,y) \leq U_{T_\wedge}(x,y)$ bulunur.

ii) Eğer $(x,y) \in [0,e] \times]e,1] \cup]e,1] \times [0,e]$ ise, Önerme 2.22 i) kullanılarak $U(x,y) \leq x \vee y = U_{T_\wedge}(x,y)$ elde edilir.

iii) Eğer $x \in [0,e]$ ve $y \parallel e$ ise, Önerme 2.22 iii) kullanılarak $U(x,y) \leq y = U_{T_\wedge}(x,y)$ sağlanır.

iv) Eğer $y \in [0,e]$ ve $x \parallel e$ ise, Önerme 2.22 ii) kullanılarak $U(x,y) \leq x = U_{T_\wedge}(x,y)$ bulunur.

v) Aksi durumda, $U(x,y) \leq 1 = U_{T_\wedge}(x,y)$ olur.

Şimdi $U_{S_\vee}$ uninormunun $\mathcal{U}(e)$ kümesinin en küçük elemanı olduğu gösterilecektir. Keyfi $U \in \mathcal{U}(e)$ seçilsin.

i) Eğer $(x,y) \in [e,1]^2$ ise, Önerme 2.23 ii) ye göre $U \downarrow [e,1]: [e,1]^2 \to [e,1]$ bir t-konormdur. $U_{S_\vee}(x,y) = x \vee y$ ve $S_\vee(x,y) = x \vee y$ t-konormu $[e,1]$ üzerinde en küçük t-konorm olduğundan her $(x,y) \in [e,1]^2$ için $U_{S_\vee}(x,y) \leq U(x,y)$ bulunur.

ii) Eğer $(x,y) \in [0,e[\times [e,1] \cup [e,1] \times [0,e[$ ise, Önerme 2.22 i) kullanılarak $U_{S_\vee}(x,y) = x \wedge y \leq U(x,y)$ sağlanır.

iii) Eğer $x \in [e,1]$ ve $y \parallel e$ ise, Önerme 2.22 v) kullanılarak $U_{S_\vee}(x,y) = y \leq U(x,y)$ elde edilir.

iv) Eğer $y \in [e,1]$ ve $x \parallel e$ ise, Önerme 2.22 iv) kullanılarak $U_{S_\vee}(x,y) = x \leq U(x,y)$ elde edilir.

v) Aksi durumda, $U_{S_\vee}(x,y) = 0 \leq U(x,y)$ olur.

Sonuç 2.27.[20]: $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun.

i) Eğer $e \in L \backslash \{0\}$ elemanı L nin bir tek koatomu ve T_e , $[0,e]$ üzerinde bir t-norm ise, Teorem 2.24 kullanılarak U_t aşağıdaki gibi verilebilir ve bu şekilde verilen U_t , L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olur.

$$U_t(x,y) = \begin{cases} T_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [0,e], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [0,e], x \parallel e \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

ii) Eğer $e \in L \backslash \{1\}$ elemanı L nin bir tek atomu ve S_e , $[e, 1]$ üzerinde bir t-konorm ise, Teorem 2.24 kullanılarak U_S aşağıdaki gibi verilebilir ve bu şekilde verilen U_S , L üzerinde e birim elemanlı bir uninorm olur.

$$U_S(x,y) = \begin{cases} S_e(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [e,1], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [e,1], x \parallel e \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

Sonuç 2.28.[20]:

i) $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun. Eğer $e \in L \backslash \{0\}$ elemanı L nin bir tek koatomu ve Teorem 2.24 de $[0, e]$ üzerinde T_e t-normu yerine $T_\wedge$ (infimum) en büyük t-normu alınırsa, bu takdirde

$$U_\wedge(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [0,e], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [0,e], x \parallel e \text{ ise,} \\ 1 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

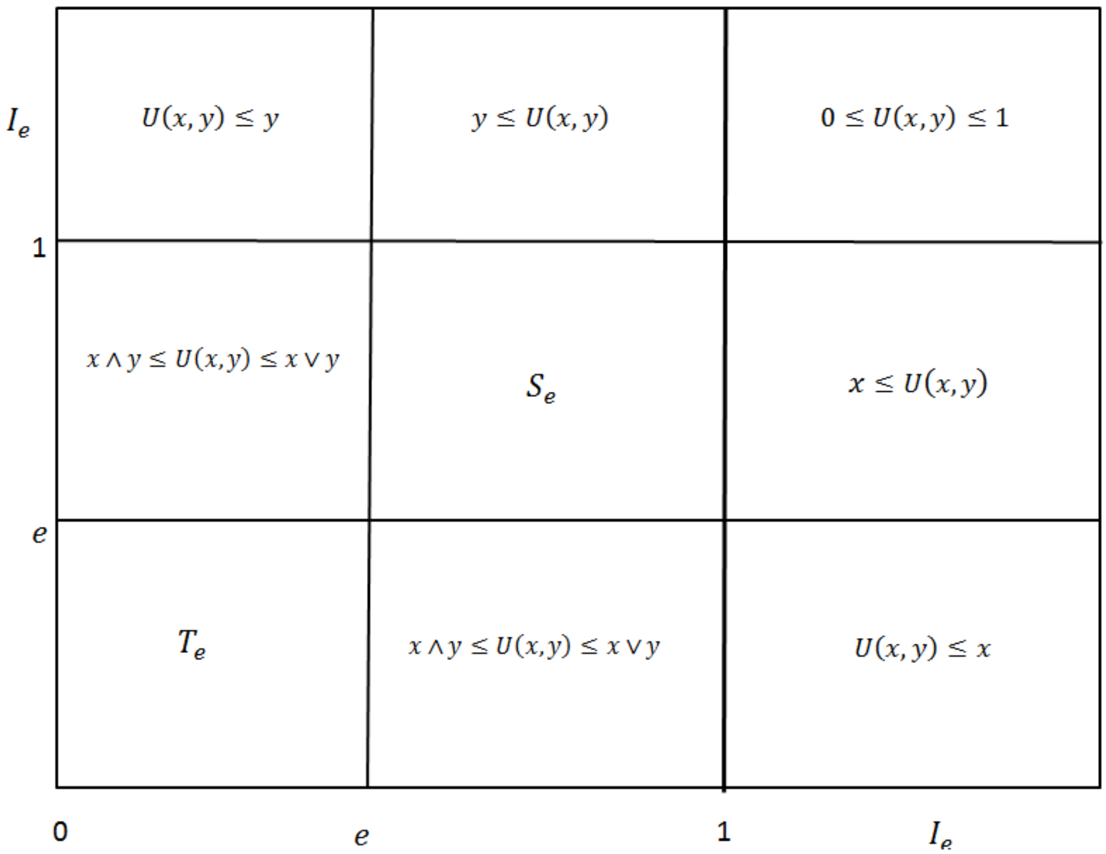
ile tanımlanan $U_\wedge: L^2 \to L$, $\mathcal{U}(e)$ kümesinde en büyük uninorm olur.

ii) $(L, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafes ve $e \in L$ olsun. Eğer $e \in L \backslash \{1\}$, L nin bir tek atomu ve Teorem 2.24 de $[e, 1]$ üzerinde S_e t-konormu yerine $S_\vee$ (supremum) en küçük t-konormu alınırsa, bu takdirde

$$U_\vee(x,y) = \begin{cases} x \vee y & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ y & \text{eğer } x \in [e,1], y \parallel e \text{ ise,} \\ x & \text{eğer } y \in [e,1], x \parallel e \text{ ise,} \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

ile tanımlanan $U_\vee: L^2 \to L$, $\mathcal{U}(e)$ kümesinde en küçük uninorm olur.

Önerme 2.22, Önerme 2.23 ve Sonuç 2.26 gözönünde bulundurularak sınırlı kafesler üzerindeki uninormların çatısal yapısı Şekil 11 deki gibi verilebilir.



Şekil 11. Uninormların yapısı

2.4. $L([0,1])$ Üzerinde Uninormlar

$L = L([0,1]) = \{[a,b] | 0 \leq a \leq x \leq b \leq 1\}$ ve $[a,b] \leq_L [c,d] :\Leftrightarrow a \leq c$ ve $b \leq d$ ile tanımlansın. $(L, \leq_L)$ in tam kafes olduğu kolayca gösterilebilir. $x,y \in L([0,1])$ için infimum operatörü $\wedge$ ve supremum operatörü $\vee$,

$$x \wedge y = [min(x_1, y_1), min(x_2, y_2)]$$

$$x \vee y = [max(x_1, y_1), max(x_2, y_2)]$$

şeklindedir. $L([0,1])$ üzerinde representable aggregasyon fonksiyonu olarak adlandırılan aggregasyonlar gözönüne alınarak $L([0,1])$ üzerinde aggregasyonlar, Deschrijver [10] tarafından önerilen yaklaşım ile kolayca elde edilebilir.

Tanım 2.29.[20]: $\boldsymbol{U}$, $L([0,1])$ üzerinde bir uninorm olsun. Her $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in L([0,1])$ için,

$$\boldsymbol{U}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [U_1(x_1, y_1), U_2(x_2, y_2)]$$

koşulunu sağlayan $[0,1]$ üzerinde U_1 ve U_2 uninormları mevcut ise, $\boldsymbol{U}$, $L([0,1])$ üzerinde t-representable uninorm olarak adlandırılır.

Önerme 2.30.[20]: $R: [0,1]^2 \to [0,1]$, $e \in [0,1]$ birim elemanlı bir uninorm olsun.

Bu takdirde,

$$\boldsymbol{U}([a,b], [c,d]) = [R(a,c), R(b,d)]$$

ile tanımlanan $\boldsymbol{U}: L([0,1])^2 \to L([0,1])$ fonksiyonu $[e,e]$ birim elemanlı bir uninormdur.

İspat:

i) Değişme özelliği: Her $[a,b], [c,d] \in L([0,1])$ için $\boldsymbol{U}([a,b],[c,d]) = \boldsymbol{U}([c,d],[a,b])$ olduğu gösterilecektir. R değişmeli olduğundan

$$\boldsymbol{U}([a,b], [c,d]) = [R(a,c), R(b,d)] = [R(c,a), R(d,b)] = \boldsymbol{U}([c,d],[a,b])$$

elde edilir.

ii) Birleşme özelliği: Her $[a,b], [c,d], [k,l] \in L([0,1])$ için

$\boldsymbol{U}\big([a,b], \boldsymbol{U}([c,d],[k,l])\big) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}([a,b],[c,d]),[k,l])$ olduğu gösterilecektir.

$$\boldsymbol{U}\big([a,b], \boldsymbol{U}([c,d],[k,l])\big) = \boldsymbol{U}([a,b],[R(c,k),R(d,l)]) = \big[R\big(a,R(c,k)\big), R\big(b,R(d,l)\big)\big]$$

ve

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}([a,b],[c,d]),[k,l]) = \boldsymbol{U}([R(a,c),R(b,d)],[k,l]) = [R(R(a,c),k), R(R(b,d),l)]$$

bulunur. R birleşmeli olduğundan

$$\boldsymbol{U}\big([a,b], \boldsymbol{U}([c,d],[k,l])\big) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}([a,b],[c,d]),[k,l])$$

elde edilir.

iii) Monotonluk özelliği: Eğer $[a,b] \leq_L [c,d]$ ise, her $[k,l] \in L([0,1])$ için $\boldsymbol{U}([a,b],[k,l]) \leq_L \boldsymbol{U}([c,d],[k,l])$ olduğu gösterilecektir. $[a,b] \leq_L [c,d]$ olduğundan $a \leq c$ ve $b \leq d$ dir. R nin monotonluk özelliği kullanılırsa,

$$\boldsymbol{U}([a,b],[k,l]) = [R(a,k), R(b,l)] \leq_L [R(c,k), R(d,l)] = \boldsymbol{U}([c,d],[k,l])$$

elde edilir.

iv) Birim eleman özelliği: Her $[a,b] \in L([0,1])$ için $\boldsymbol{U}([a,b],[e,e]) = [a,b]$ olduğu gösterilecektir. $e \in [0,1]$, R nin birim elemanı olduğundan

$$\boldsymbol{U}([a,b],[e,e]) = [R(a,e), R(b,e)] = [a,b]$$

elde edilir.

Uyarı 2.31.[20]: $\boldsymbol{U}: L([0,1])^2 \to L([0,1])$, $e < f$ olmak üzere $[e,f] \in L([0,1])$ birim elemanlı bir uninorm olsun. Bu takdirde, $\boldsymbol{U}$ uninormu, $L([0,1])$ üzerinde t-representable değildir. Yani,

$$\boldsymbol{U}([a,b],[c,d]) = [U_1(a,c), U_2(b,d)]$$

eşitliğini sağlayan ve $U_1 \le U_2$ olacak şekilde e birim elemanlı U_1 uninormu ve f birim elemanlı U_2 uninormu mevcut değildir. Bu durum, $U_1(e,f) = f \nleq e = U_2(e,f)$ olmasından kaynaklanmaktadır.

$$L^* = \{(x_1,x_2) | (x_1,x_2) \in [0,1]^2 \text{ ve } x_1 + x_2 \le 1\}$$

ve $(x_1,x_2), (y_1,y_2) \in L^*$ için $\le_{L^*}$ bağıntısı,

$$(x_1,x_2) \le_{L^*} (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1 \le y_1 \text{ ve } x_2 \ge y_2$$

şeklinde tanımlansın. [11] de $(L^*, \le_{L^*})$ kafesinin tam kafes olduğu gösterilmiştir. $x,y \in L^*$ için infimum operatörü $\wedge$ ve supremum operatörü $\vee$,

$$x \wedge y = \big(min(x_1,y_1), max(x_2,y_2)\big)$$

$$x \vee y = \big(max(x_1,y_1), min(x_2,y_2)\big)$$

şeklindedir. L^* üzerinde $pr_1: L^* \to [0,1]$ ve $pr_2: L^* \to [0,1]$ srasıyla ilk ve ikinci projeksiyon dönüşümleri, her $(x_1,x_2) \in L^*$ için $pr_1(x_1,x_2) = x_1$ ve $pr_2(x_1,x_2) = x_2$ olarak tanımlansın.

Önerme 2.32: $L([0,1])$ ve L^* kümeleri izomorftur.

İspat: $[a,b] \in L([0,1])$ için $0 \le a \le b \le 1$ dir. Buradan $a - b \le 0$ olup $a + (1-b) \le 1$ bulunur. Dolayısıyla $(a, 1-b) \in L^*$ dır.

Bu nedenle $\theta: L([0,1]) \to L^*$ dönüşümü $[a,b] \in L([0,1])$ için $\theta([a,b]) = (a, 1-b)$ şeklinde tanımlansın.

i) Birebirlik: Her $[a,b]$, $[c,d] \in L([0,1])$ için $\theta([a,b]) = \theta([c,d])$ olsun. Bu durumda $(a, 1-b) = (c, 1-d)$ olur. Buradan $a = c$ ve $b = d$ olup $[a,b] = [c,d]$ bulunur. Bu nedenle θ birebirdir.

ii) Örtenlik: Her bir $(z,t) \in L^*$ için $\theta([z, 1-t]) = (z,t)$ olacak şekilde bir $[z, 1-t] \in L([0,1])$ mevcut olduğundan θ örtendir.

iii) Kafes morfizmi: Her $[a,b]$, $[c,d] \in L([0,1])$ için

$\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([a,b]) \vee \theta([c,d])$ ve $\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([a,b]) \wedge \theta([c,d])$

olduğu gösterilmelidir.

Öncelikle $\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([a,b]) \vee \theta([c,d])$ olduğu gösterilecektir.

1. $max\{a,c\} = a$ ve $max\{b,d\} = b$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([\, max\{a,c\}, max\{b,d\}]) = \theta([a,b]) = (a, 1-b)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \vee \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \vee (c, 1-d) \\ &= (max\{a,c\}, min\{1-b, 1-d\}) \\ &= (a, 1-b)\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([a,b]) \vee \theta([c,d])$ sağlanır.

2. $max\{a,c\} = a$ ve $max\{b,d\} = d$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([\, max\{a,c\}, max\{b,d\}]) = \theta([a,d]) = (a, 1-d)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \vee \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \vee (c, 1-d) \\ &= (max\{a,c\}, min\{1-b, 1-d\}) \\ &= (a, 1-d)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([a,b]) \vee \theta([c,d])$ elde edilir.

3. $max\{a,c\} = c$ ve $max\{b,d\} = b$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([\, max\{a,c\}, max\{b,d\}]) = \theta([c,b]) = (c, 1-b)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \vee \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \vee (c, 1-d) \\ &= (max\{a,c\}, min\{1-b, 1-d\}) \\ &= (c, 1-b)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([a,b]) \vee \theta([c,d])$ dır.

4. $max\{a,c\} = c$ ve $max\{b,d\} = d$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([\, max\{a,c\}, max\{b,d\}]) = \theta([c,d]) = (c, 1-d)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \vee \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \vee (c, 1-d) \\ &= (max\{a,c\}, min\{1-b, 1-d\}) \\ &= (c, 1-d)\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\theta([a,b] \vee [c,d]) = \theta([a,b]) \vee \theta([c,d])$ sağlanır.

Şimdi $\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([a,b]) \wedge \theta([c,d])$ olduğu gösterilecektir.

1. $min\{a,c\} = a$ ve $min\{b,d\} = b$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([\,min\{a,c\}, min\{b,d\}]) = \theta([a,b]) = (a, 1-b)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \wedge \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \wedge (c, 1-d) \\ &= (min\{a,c\}, max\{1-b, 1-d\}) \\ &= (a, 1-b)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([a,b]) \wedge \theta([c,d])$ elde edilir.

2. $min\{a,c\} = a$ ve $min\{b,d\} = d$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([\,min\{a,c\}, min\{b,d\}]) = \theta([a,d]) = (a, 1-d)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \wedge \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \wedge (c, 1-d) \\ &= (min\{a,c\}, max\{1-b, 1-d\}) \\ &= (a, 1-d)\end{aligned}$$

olur. Böylece $\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([a,b]) \wedge \theta([c,d])$ elde edilir.

3. $min\{a,c\} = c$ ve $min\{b,d\} = b$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([\,min\{a,c\}, min\{b,d\}]) = \theta([c,b]) = (c, 1-b)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \wedge \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \wedge (c, 1-d) \\ &= (min\{a,c\}, max\{1-b, 1-d\}) \\ &= (c, 1-b)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([a,b]) \wedge \theta([c,d])$ dır.

4. $min\{a,c\} = c$ ve $min\{b,d\} = d$ olduğu kabul edilirse,

$$\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([\,min\{a,c\}, min\{b,d\}]) = \theta([c,d]) = (c, 1-d)$$

ve

$$\begin{aligned}\theta([a,b]) \wedge \theta([c,d]) &= (a, 1-b) \wedge (c, 1-d) \\ &= (min\{a,c\}, max\{1-b, 1-d\}) \\ &= (c, 1-d)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\theta([a,b] \wedge [c,d]) = \theta([a,b]) \wedge \theta([c,d])$ sağlanır.

Bu nedenle $[a,b] \in L([0,1])$ için $\theta([a,b]) = (a, 1-b)$ ile tanımlanan $\theta: L([0,1]) \to L^*$ dönüşümü birebir, örten ve kafes morfizmi olduğundan $L([0,1])$ ve L^* izomorftur.

Örnek 2.33.[9]: U, $[0,1]$ üzerinde $e_1 \in]0,1[$ birim elemanlı herhangi bir uninorm olsun. Bu durumda $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2] \in L([0,1])$ için

$$\boldsymbol{U}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \left[min\big(U(x_1, 1-y_2), U(y_1, 1-x_2)\big), 1 - U(1-x_2, 1-y_2)\right] \quad (15)$$

ile tanımlanan $\boldsymbol{U}: L([0,1])^2 \to L([0,1])$ fonksiyonu, $e = [e_1, 1-e_1] \in L([0,1])$ birim elemanlı bir uninormdur fakat t-representable değildir.

Bunun için

$$\boldsymbol{U}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \Big(min\big(U(x_1,1-y_2),U(y_1,1-x_2)\big), 1-U(1-x_2,1-y_2)\Big)$$

şeklinde tanımlanan $\boldsymbol{U}: (L^*)^2 \to L^*$ dönüşümünün $e = (e_1, 1-e_1) \in L^*$ birim elemanlı bir uninorm olduğu gösterilecektir. Buna göre, L^* ve $L([0,1])$ izomorf olduğundan (15) ile verilen $\boldsymbol{U}: L([0,1])^2 \to L([0,1])$ fonksiyonu, $e = [e_1, 1-e_1] \in L([0,1])$ birim elemanlı bir uninorm olur.

i) Değişme özelliği: Her (x_1, x_2),$(y_1, y_2) \in L^*$ için

$\boldsymbol{U}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \boldsymbol{U}\big((y_1,y_2),(x_1,x_2)\big)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) &= \Big(min\big(U(x_1,1-y_2),U(y_1,1-x_2)\big), 1-U(1-x_2,1-y_2)\Big)\\ &= \Big(min\big(U(y_1,1-x_2),U(x_1,1-y_2)\big), 1-U(1-y_2,1-x_2)\Big)\\ &= \boldsymbol{U}\big((y_1,y_2),(x_1,x_2)\big)\end{aligned}$$

bulunur.

ii) Birleşme özelliği: Her $(x_1,x_2),(x_3,x_4),(y_1,y_2) \in L^*$ için

$$\boldsymbol{U}\Big(\boldsymbol{U}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big),(x_3,x_4)\Big) = \boldsymbol{U}\Big((x_1,x_2),\boldsymbol{U}\big((y_1,y_2),(x_3,x_4)\big)\Big)$$

olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}\Big(\boldsymbol{U}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big),(x_3,x_4)\Big)\\ &= \boldsymbol{U}\Big(\Big(min\big(U(x_1,1-y_2),U(y_1,1-x_2)\big),1-U(1-x_2,1-y_2)\Big),(x_3,x_4)\Big)\\ &= \Big(min\Big(U\big(min\big(U(x_1,1-y_2),U(y_1,1-x_2)\big),1-x_4\big),U\big(x_3,U(1-x_2,1-y_2)\big)\Big),\\ &\qquad 1-U(U(1-x_2,1-y_2),1-x_4)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}\Big((x_1,x_2),\boldsymbol{U}\big((y_1,y_2),(x_3,x_4)\big)\Big)\\ &= \boldsymbol{U}\Big((x_1,x_2),\Big(min\big(U(y_1,1-x_4),U(x_3,1-y_2)\big),1-U(1-y_2,1-x_4)\Big)\Big)\\ &= \Big(min\Big(U\big(x_1,U(1-y_2,1-x_4)\big),U\big(min\big(U(y_1,1-x_4),U(x_3,1-y_2)\big),1-x_2\big)\Big),\\ &\qquad 1-U\big(1-x_2,U(1-y_2,1-x_4)\big)\Big)\end{aligned}$$

1. $U(x_1, 1-y_2) \leq U(y_1, 1-x_2)$ ve $U(x_3, 1-y_2) \leq U(y_1, 1-x_4)$ olduğu kabul edilirse, birleşme özelliğinin sağlandığı açıktır.

2. $U(x_1, 1-y_2) \leq U(y_1, 1-x_2)$ ve $U(x_3, 1-y_2) \geq U(y_1, 1-x_4)$ olduğu kabul edililirse, $1-y_2 = y_1$ bulunur. Bu da $U(x_3, 1-y_2) \geq U(y_1, 1-x_4)$ olması ile çelişir. Bu nedenle bu durum mümkün değildir.

3. $U(x_1, 1-y_2) \geq U(y_1, 1-x_2)$ ve $U(x_3, 1-y_2) \geq U(y_1, 1-x_4)$ olduğu kabul edilirse, $x_1 = 1-x_2$ ve $x_3 = 1-x_4$ bulunur.

$$\boldsymbol{U}\Big(\boldsymbol{U}\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big), (x_3, x_4)\Big)$$
$$= \Big(min\,\Big(U(U(y_1, x_1), x_3), U\big(x_3, U(x_1, 1-y_2)\big)\Big), 1 - U(U(1-x_2, 1-y_2), 1-x_4)\ \Big)$$

ve

$$\boldsymbol{U}\Big((x_1, x_2), \boldsymbol{U}\big((y_1, y_2), (x_3, x_4)\big)\Big)$$
$$= \Big(min\,\Big(U\big(x_1, U(1-y_2, x_3)\big), U(U(y_1, x_3), x_1)\Big), 1 - U\big(1-x_2, U(1-y_2, 1-x_4)\big)\Big)$$

elde edilir. U nun birleşme ve değişme özellikleri kullanılarak

$$\boldsymbol{U}\Big(\boldsymbol{U}\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big), (x_3, x_4)\Big) = \boldsymbol{U}\Big((x_1, x_2), \boldsymbol{U}\big((y_1, y_2), (x_3, x_4)\big)\Big)$$

elde edilir.

4. $U(x_1, 1-y_2) \geq U(y_1, 1-x_2)$ ve $U(x_3, 1-y_2) \leq U(y_1, 1-x_4)$ olduğu kabul edilirse, $y_1 = 1-y_2$ olur. Bu da $U(x_1, 1-y_2) \geq U(y_1, 1-x_4)$ olması ile çelişir. Bu nedenle bu durum mümkün değildir.

iii) Monotonluk özelliği: $[x_1, x_2]$,$[x_3, x_4]$,$[y_1, y_2] \in L([0,1])$ için eğer $(x_1, x_2) \leq\ (x_3, x_4)$ ise, $U\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \leq U\big((x_3, x_4), (y_1, y_2)\big)$ olduğu gösterilecektir.

$(x_1, x_2) \leq (x_3, x_4)$ olduğundan $x_1 \leq x_3$ ve $x_2 \geq x_4$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} U\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) &= \Big(min\big(U(x_1, 1-y_2), U(y_1, 1-x_2)\big), 1 - U(1-x_2, 1-y_2)\Big) \\ &\leq \Big(min\big(U(x_3, 1-y_2), U(y_1, 1-x_4)\big), 1 - U(1-x_4, 1-y_2)\Big) \\ &= U\big((x_3, x_4), (y_1, y_2)\big) \end{aligned}$$

elde edilir.

iv) Birim eleman özelliği: Her $(x_1, x_2) \in L^*$ için $U\big((x_1, x_2), (e_1, 1-e_1)\big) = (x_1, x_2)$ olduğu gösterilmelidir.

$$U\big((x_1,x_2),(e_1,1-e_1)\big)=\Big(min\big(U(x_1,e_1),U(e_1,1-x_2)\big),1-U(1-x_2,e_1)\Big)$$
$$=(min(x_1,1-x_2),x_2)$$
$$=(x_1,x_2)$$

Şimdi $\boldsymbol{U}:(L^*)^2\to L^*$ uninormununun t-representable olmadığı gösterilecektir. Gerçekten, kabul edelim ki $x_1\geq e_1,\ x_2<x_2'\leq 1-x_1,\ x=(x_1,x_2),\ x'=(x_1,x_2')$ ve $y=(e_1,0)$ olsun. Buna göre,

$$pr_1\boldsymbol{U}(x,y)=min\big(U(x_1,1),U(e_1,1-x_2)\big)=min(1,1-x_2)=1-x_2$$

ve

$$pr_1\boldsymbol{U}(x',y)=min\big(U(x_1,1),U(e_1,1-x_2')\big)=min(1,1-x_2')=1-x_2'$$

olup $pr_1\boldsymbol{U}(x,y)\neq pr_1\boldsymbol{U}(x',y)$ bulunur. $pr_1\boldsymbol{U}(x,y)$, x_2 den bağımsız olmadığından $\boldsymbol{U}:(L^*)^2\to L^*$ uninormu t-representable değildir. Dolayısıyla $\boldsymbol{U}:L([0,1])^2\to L([0,1])$ uninormu t-representable değildir.

Teorem 2.24 ün bir uygulaması olarak aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 2.34.[20]: $T:[0,1]^2\to[0,1]$ bir t-norm ve $S:[0,1]^2\to[0,1]$ bir t-konorm olsun. Bu durumda, Teorem 2.24 kullanılarak T t-normu ve S t-konormu yardımıyla $[0,1]$ birim elemanlı $\boldsymbol{U_t}:L([0,1])^2\to L([0,1])$ uninormu

$$\boldsymbol{U_t}([x_1,x_2],[y_1,y_2])=\begin{cases}[0,T(x_2,y_2)] & \text{eğer } x_1=\ y_1=0 \text{ ise,}\\ [x_1\vee y_1,x_2\vee y_2] & \text{eğer } (x_1=0,y_1>0 \text{ ve } y_2=1\ ) \\ & \text{veya } (x_2=1,x_1>0 \text{ ve } y_1=0) \text{ ise,}\\ [y_1,y_2] & \text{eğer } x_1=0 \text{ ve } [y_1,y_2]\parallel\ [0,1] \text{ ise,}\\ [x_1,x_2] & \text{eğer } y_1=0 \text{ ve } [x_1,x_2]\parallel\ [0,1] \text{ ise,}\\ [1,1] & \text{aksi takdirde.}\end{cases}$$

ve $[0,1]$ birim elemanlı $\boldsymbol{U_s}:L([0,1])^2\to L([0,1])$ uninormu

$$\boldsymbol{U_s}([x_1,x_2],[y_1,y_2])=\begin{cases}[S(x_1,y_1),1] & \text{eğer } x_2=\ y_2=1 \text{ ise,}\\ [x_1\wedge y_1,x_2\wedge y_2] & \text{eğer } (x_1=0,x_2<1 \text{ ve } y_2=1\ ) \\ & \text{veya } (x_2=1,y_2<1 \text{ ve } x_2=0) \text{ ise,}\\ [y_1,y_2] & \text{eğer } x_1=1 \text{ ve } [y_1,y_2]\parallel\ [0,1] \text{ ise,}\\ [x_1,x_2] & \text{eğer } x_2=1 \text{ ve } [x_1,x_2]\parallel\ [0,1] \text{ ise,}\\ [0,0] & \text{aksi takdirde.}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.35.[20]: $L([0,1])$ üzerinde $e=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\in L([0,1])$ birim elemanlı en büyük uninorm $\boldsymbol{U_{T_\wedge}}$,

$$
\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{T}_\wedge}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} [0, x_2 \wedge y_2] & \text{eğer } x_1 = y_1 = 0, x_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ve } y_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ise,} \\ [x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2] & \begin{array}{l} \text{eğer} \left(x_1 = 0, x_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right], y_1 \in \left]\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right], \ y_2 = 1 \right) \\ \text{veya} \left(x_2 = 1, x_1 \in \left]\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right], y_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ve } y_1 = 0\right), \end{array} \\ [y_1, y_2] & \text{eğer } x_1 = 0\ , x_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ve } [y_1,y_2] \parallel \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ise,} \\ [x_1, x_2] & \text{eğer } y_1 = 0, y_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ve } [x_1,x_2] \parallel \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ise,} \\ [1,1] & \text{aksi takdirde.} \end{cases}
$$

ve $L([0,1])$ üzerinde $e = \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \in L([0,1])$ birim elemanlı en küçük uninorm $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{S}_\vee}$ **,**

$$
\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{S}_\vee}([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = \begin{cases} [x_1 \vee y_1, 1] & \text{eğer } x_2 = y_2 = 1, x_1 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ve } y_1 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ise,} \\ [x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2] & \begin{array}{l} \text{eğer } \left(x_1 = 0, x_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right[, y_1 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ve } y_2 = 1 \right) \\ \text{veya} \left(x_2 = 1, y_2 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right[, y_1 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ve } x_2 = 0\right), \end{array} \\ [y_1, y_2] & \text{eğer } x_2 = 1, x_1 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ve } [y_1,y_2] \parallel \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ ise,} \\ [x_1, x_2] & \text{eğer } y_2 = 1, y_1 \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ve } [x_1,x_2] \parallel \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \text{ise,} \\ [0,0] & \text{aksi takdirde.} \end{cases}
$$

t- representable olmayan uninorm örnekleridir.

3. İRDELEME

T-normlar ve t-konormların özel bir genelleştirmesi olan uninormlar, ilk olarak Yager ve Rybalov [45] tarafından ele alındı ve Fodor ve arkadaşları [13] tarafından çalışıldı. Bu genelleştirmede işlemin etkisiz elemanı (veya birim elemanı) birim aralıktaki herhangi bir sayı olabilir ki bu da t-normlarda 1, t-konormlarda 0 dır. Uninormlar bulanık mantık, uzman sistemler, sinir ağları, aggregasyon ve bulanık sistem modeli gibi birçok alanda yararlılığı kanıtlanmış aggregasyon operatörlerinin özel bir çeşitidir [7,17,39,41,42,44]. Uninormlar, yapıları bir t-norm ve t-konormun özel bir birleşimi olması sebebiyle ilginçtirler [13]. Bilindiği üzere bir U uninormu sırasıyla $U(0,1) = 0$ ve $U(0,1) = 1$ olduğunda konjanktif ve disjanktiftir. Bu durum bulanık gerektirme fonksiyonlarının tanımında uninormların da kullanılmasını sağlar [6,35].

Birleşmeli ikili işlemler, genellikle n-li aggregasyon operatörlerinin ve çok boyutlu aggregasyonların genelleştirmesinde kullanılır. Çoğu durumda aggregasyon operatörleri için değişme özelliği istenmez.

Uninormların özelliklerinden değişme özelliği kaldırılarak t-normların genelleştirmesinde, Mas ve arkadaşları, [31] da $[0,1]$ üzerinde ve [34] de bir sonlu zincir üzerinde sol ve sağ uninorm kavramlarını; Wang ve Fang, [40] de bir tam kafes üzerinde sol ve sağ uninorm kavramlarını ele aldılar. T-normların genelleştirmesinden hareketle Liu [27], uninormların özelliklerinden değişme ve birleşme özelliklerini kaldırarak uninorm kavramını genelleştirdi ve bir tam kafes üzerinde yarı uninorm olarak adlandırılan yeni bir kavram tanımladı.

Bu tezde bir L sınırlı kafesinin herhangi bir alt kümesi üzerinde lokal internal tanımı verilerek keyfi $e \in L$ elemanı ile kıyaslanamayan bir eleman mevcut ise, L üzerinde e birim elemanlı bir lokal internal uninormun mevcut olmadığı gösterildi. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı ve özel bir alt bölge $A(e)$ üzerinde lokal internal olan bir U uninormu için $U(0,1)$ ın alabileceği değerler araştırıldı. İkinci kısımda, bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı verilen bir uninorm yardımıyla her $x \in L$ elemanı e ile kıyasaslanabilir olmak üzere L üzerinde bir T t-normu ve bir S t-konormu elde edildi. Herhangi bir sınırlı kafes üzerinde her zaman mevcut olduğu bilinen t-normlar ve t-konormlar kullanılarak keyfi $e \in L\backslash\{0,1\}$ elemanı için e birim elemanlı bir uninormun varlığı gösterildi [20]. Bunun bir ürünü olarak uninormların inşa yöntemi verildi ve bu yöntem kullanılarak verilen e birim elemanlı en büyük ve en küçük uninormlar bulundu [20].

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bölüm 2.1. de:

1. Bir L sınırlı kafesinde keyfi $e \in L$ elemanı ile kıyaslanamayan bir eleman mevcut ise, L üzerinde e birim elemanlı bir lokal internal uninormun mevcut olmadığı gösterildi.(Önerme 2.4)

2. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir U uninormu verilsin. Buna göre,

i. $(L_e, \leq, 0,1)$ sınırlı bir kafestir.

ii. $U \downarrow L_e : L_e \times L_e \to L_e$ bir uninormdur.

ifadeleri gösterildi. (Önerme 2.5)

3. Bir L Bool kafesi ve $e \in L$ verilsin. e^*, e nin komplementini göstermek üzere keyfi $x, y \in L$ için $U(x,y) = x \wedge (y \vee e^*)$ ile tanımlanan U fonksiyonunun L üzerinde bir sağ uninorm olduğu gösterildi. (Önerme 2.7)

4. Bir L Bool kafesi ve $e \in L$ verilsin. e^*, e nin komplementini göstermek üzere keyfi $x, y \in L$ için $U(x,y) = \left((x \wedge y) \vee e^*\right) \wedge (x \vee y)$ ile tanımlanan U fonksiyonunun L üzerinde bir uninorm olduğu gösterildi. (Önerme 2.8)

5. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir U uninormunun sınır şartlarını sağladığı gösterildi. (Önerme 2.9)

6. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir U uninormu verilsin. $\lambda := U(0,1)$ ile tanımlanırsa, herhangi $a \in [0, \lambda]$ ve $b \in [\lambda, 1]$ için $U(a,b) = \lambda$ eşitliğinin sağlandığı gösterildi. (Önerme 2.10)

7. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir U uninormu için $\lambda := U(0,1)$ ile tanımlanmak üzere $U(\lambda, \lambda) = U(\lambda, 0) = U(\lambda, 1) = \lambda$ olduğu gösterildi. (Sonuç 2.11)

8. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir U uninormu için $\lambda := U(0,1)$ ile tanımlanırsa, $U(\lambda, e \vee \lambda) = \lambda$, $U(\lambda, e \wedge \lambda) = \lambda$ ve $U(e \wedge \lambda, e \vee \lambda)$ olduğu gösterildi.

(Sonuç 2.12)

9. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir U uninormunun idempotent elemanı bulundu. (Sonuç 2.13)

10. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı ve özel bir alt bölge $A(e)$ üzerinde lokal internal olan bir U uninormu için $U(0,1) \in \{0,1\}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.14)

Bölüm 2.2. de:

1. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı verilen bir uninorm yardımıyla her $x \in L$ elemanı e ile kıyasalanabilir olmak üzere, L üzerinde bir T t-normu elde edildi. (Teorem 2.18)

2. Her L sınırlı kafesi üzerindeki t-normun, L üzerinde verilen $e \in L$ birim elemanlı bir uninorm yardımıyla (13) formülü ile karakterize edilemeyeceği bir örnek ile gösterildi. (Örnek 2.20)

3. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı verilen bir uninorm yardımıyla her $x \in L$ elemanı e ile kıyasalanabilir olmak üzere, L üzerinde bir S t-konormu elde edildi. (Teorem 2.21)

Bölüm 2.3. de:

1. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı bir U uninormu için

i. $(x, y) \in A(e)$ için $x \wedge y \leq U(x, y) \leq x \vee y$,

ii. $(x, y) \in L \times [0, e]$ için $U(x, y) \leq x$,

iii. $(x, y) \in [0, e] \times L$ için $U(x, y) \leq y$,

iv. $(x, y) \in L \times [e, 1]$ için $x \leq U(x, y)$,

v. $(x, y) \in [e, 1] \times L$ için $y \leq U(x, y)$

eşitsizliklerinin sağlandığı gösterildi [20].(Önerme 2.22)

2. Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı bir U uninormu verilsin. Buna göre,

i. $T^* = U \downarrow [0, e]: [0, e]^2 \to [0, e]$ bir t-normdur.

ii. $S^* = U \downarrow [e, 1]: [e, 1]^2 \to [e, 1]$ bir t-konormdur.

ifadeleri verildi [20]. (Önerme 2.23)

3. Bir L sınırlı kafesi ve keyfi $e \in L\backslash\{0,1\}$ elemanı için $[0, e]$ üzerindeki t-normların varlığına (benzer şekilde $[e, 1]$ üzerindeki t-konormların varlığına) dayanılarak L üzerinde bir uninormun mevcut olduğu gösterildi [20]. (Teorem 2.24)

4. Keyfi bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L\backslash\{0,1\}$ birim elemanlı en büyük ve en küçük uninormlar elde edildi [20]. (Sonuç 2.26)

5. L sınrlı bir kafes olmak üzere $e \in L\backslash\{0\}$ elemanı L nin bir tek koatomu ise, $[0, e]$ üzerindeki bir t-norm (benzer şekilde $e \in L\backslash\{1\}$ elemanı L nin bir tek atomu ise, $[e, 1]$ üzerindeki bir t-konorm) yardımıyla L üzerinde bir uninorm elde edildi [20]. (Sonuç 2.27)

6. Bir L sınrlı kafesi verilsin. $e \in L\backslash\{0\}$ elemanı L nin bir tek koatomu ise, $\mathcal{U}(e)$ kümesinde en büyük uninorm ve $e \in L\backslash\{1\}$ elemanı L nin bir tek atomu ise, $\mathcal{U}(e)$ kümesinde en küçük uninorm elde edildi [20]. (Sonuç 2.28)

Bölüm 2.4. de :

1. $[0,1]$ üzerinde e birim elemanlı bir uninorm yardımıyla $L([0,1])$ üzerinde $[e, e]$ birim elemanlı bir uninorm inşa edildi [20]. (Önerme 2.30)

2. $L([0,1])$ üzerinde $e < f$ olmak üzere $[e, f]$ birim elemanlı bir uninormun t-representable olamayacağı gösterildi [20]. (Uyarı 2.31)

3. $L([0,1])$ ve L^* kümelerinin izomorf olduğu gösterildi. (Önerme 2.32) [20]

4. $L([0,1])$ üzerindeki bütün uninormların t-representable olması gerekmediğine dair bir örnek verildi [20]. (Örnek 2.33)

5. $[0,1]$ üzerinde bir T t-normu ve bir S t-konormu kullanılarak $L([0,1])$ üzerinde $[0,1]$ birim elemanlı $\boldsymbol{U_t}$ ve $\boldsymbol{U_s}$ uninormları tanımlandı [20]. (Örnek 2.34)

6. $L([0,1])$ üzerinde t- representable olmayan uninormlara örnek olarak $e = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \in L([0,1])$ birim elemanlı en büyük uninorm $\boldsymbol{U_{T_\wedge}}$ ve en küçük uninorm $\boldsymbol{U_{S_\vee}}$ verildi [20]. (Örnek 2.35)

5. ÖNERİLER

Bir L sınırlı kafesi üzerinde $e \in L$ birim elemanlı verilen bir uninorm yardımıyla her $x \in L$ elemanı e ile kıyasalanabilir olmak üzere, L üzerindeki t-normların ve t-konormların karakterisazyonu sırasıyla

$$T(x,y) = \begin{cases} U(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [0,e]^2 \text{ ise,} \\ x \wedge y & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

ve

$$S(x,y) = \begin{cases} U(x,y) & \text{eğer } (x,y) \in [e,1]^2 \text{ ise,} \\ x \vee y & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

formülleri ile verilmektedir. Bir L sınırlı kafesi üzerinde t-normların ve t-konormların karakterisazyonunun L üzerinde $e \in L$ birim elemanlı verilen bir uninorm yardımıyla e ile kıyaslanamayan bazı $x \in L$ elemanları mevcut olmak üzere nasıl yapılacağı düşünülebilir.

Yapılan çalışmalarda bir sınırlı kafes üzerindeki t-normlardan ve t-konormlardan uninorm elde etme yöntemi verilerek en küçük ve en büyük uninormlar bulundu. Benzer şekilde bir sınırlı kafes üzerindeki t-normlardan ve t-konormlardan nullnorm elde etme yöntemi üzerinde çalışılabilir. Böylece herhangi bir L sınırlı kafesi üzerinde en küçük ve en büyük nullnorm inşa etme problemi ile ilgilenilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Birkhoff, G., Lattice Theory, American Mathematical Society Publishers, Providence, Rhode Island, 1967.

2. Calvo, T., De Baets, B. ve Fodor, J., The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001) 385-394.

3. Calvo, T., Kolesárová, A., Komorníková, M. ve Mesiar, R., Aggregation operators: properties, classes and construction methods, in Aggregation Operators. New Trends and Aplications, Calvo, T., Mayor, G. ve Mesiar, R., Eds, Heidelberg: Physica-Verlag, 2002, 3-104.

4. De Baets, B., Uninorms: the known classes, in Fuzzy Logic and Intelligent Technologies for Nuclear Science and Industry, Proceedings of the Third International FLINS Workshop, Ruan, D., Abderrahim, H.A., D'hont, P. ve Kerre, E.E., Eds, Singapore: World Scientific, 1998, 21-22.

5. De Baets, B., Idempotent Uninorms, Europen Journal of Operational Research, 118 (1999) 631-642.

6. De Baets, B. ve Fodor, J., Residual operators of uninorms, Soft Computing, 3 (1999) 89-100.

7. De Baets, B. ve Fodor, J., Van Melle's combining function in MYCIN is a representable uninorm: an alternative proof, In: De Baets, B., Mesiar, R., Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 133-136.

8. De Baets, B. ve Mesiar, R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

9. Deschrijver, G. ve Kerre, E.E., Uninorms in L^*-fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems, 148 (2004) 243-262.

10. Deschrijver, G. ve Kerre, E.E., Triangular norms and related operators in L^*-fuzzy set theory, in: Logical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms, Elsevier (2005).

11. Deschrijver, G. ve Kerre, E.E., On the relationship between some extensions of fuzzy set theory, Fuzzy Sets and Systems, 133,2 (2003) 227-235.

12. Drewniak, J. ve Drygas P., On a class of uninorms, International Journal Uncertainty Fuzziness Knowledge- Based Systems, 10 (2002) 5-10.

13. Fodor, J. C., Yager, R.R. ve Rybalov, A., Structure of uninorms, International Journal Uncertainty Fuzziness Knowledge- Based Systems, 5,4 (1997) 411-427.

14. Gabbay, D. ve Metcalfe, G., Fuzzy logic based on [0,1[-continuous uninorms, Arch. Math. Logic, 46 (2007) 425-449.

15. Grabisch, M., Lucmarichal, J., Mesiar, R. ve Pap, E., Aggregation Functions, Cambridge University Press, 2009.

16. Hájek, P., Havránek, T. ve Jirousek, R., Uncertain Information Processing in Expert Systems, Boca Raton: CRC Press., 1992.

17. Harjani, J. ve Sadarangani, K., Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets, Nonlinear Analysis, 71 (2009) 3403-3410.

18. Hu, S.K. ve Li, Z.F., The structure of continuous uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 124 (2001) 43-52.

19. Karaçal, F., On the direct decomposability of strong negations and S-implication operators on product lattices, Information Sciences, 176 (2006) 3011-3025.

20. Karaçal, F. ve Mesiar, R., Uninorms on bounded lattices, Fuzzy Sets and Systems, submitted.

21. Kesicioğlu, M.N., Karaçal, F. ve Mesiar, R., T-partial order and the equivalence classes of triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, submitted.

22. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

23. Komorníková, M. ve Mesiar, R., Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification, Fuzzy Sets and Systems, 17 (2011) 48-56.

24. Li, G. ve Liu, H., Continuity of left-continuous triangular norms with special associated negations, Fuzzy Sets and Systems, 226 (2013) 78-88.

25. Li, Y.M. ve Shi, Z.K., Remarks on uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems, 114 (2000) 377-380.

26. Li, Y.M. ve Shi, Z.K., Weak uninorms aggregation operators, Information Sciences, 124 (2000) 317-323.

27. Liu, H., Semi-uninorms and implications on a complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 191 (2012) 72-82.

28. Marichal, J.L., On the associativity functional equation, Fuzzy Sets and Systems, 114 (2000) 381-389.

29. Martin, J., On a theorem of Czogala and Drewniak (1984), Proc. EUROFUSE PM’01, Granada, 2001, 49-54.

30. Martin, J., Mayor, G. ve Torrens, J., On lokally internal monotonic operations, Fuzzy Sets and Systems, 137 (2003) 27-42.

31. Mas, M., Monserrat, M. ve Torrens, J., On left and right uninorms, International Journal Uncertainty Fuzziness Knowledge- Based Systems, 9,4 (2002) 491-507.

32. Mas, M., Mayor, G. ve Torrens, J., The modularity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 126,2 (2002) 207-218.

33. Mas, M., Mayor, G. ve Torrens, J., The distributivity condition for uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 128 (2002) 209-225.

34. Mas, M., Monserrat, M. ve Torrens, J., On left and right uninorms on a finite chain, Fuzzy Sets and Systems, 146 (2004) 3-17.

35. Mas, M., Monserrat, M. ve Torrens, J., Two types of implications derived from uninorms, Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007) 2612-2626.

36. Monserrat, M. ve Torrens, J., On the reversibility of uninorms and t-operators, Fuzzy Sets and Systems, 131,3 (2002) 303-314.

37. Schweizer, B. ve Sklar, A., Statistical metric spaces, Pacific Journal of Mathematics, 10 (1960) 313-334.

38. Schweizer, B. ve Sklar, A., Probabilistic Metric Spaces, New York: North-Holland, 1983.

39. Tsadiras, A. ve Margaritis, K., The MYCIN certainty factor handling function as uninorm operator and its use as a threshold function in artifical neurons, Fuzzy Sets and Systems, 93 (1998) 263-274.

40. Wang, Z. ve Fang, J., Residual operations of left and right uninorms on a complete lattice, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 22-31.

41. Yager, R.R., Uninorms in fuzzy systems modeling, Fuzzy Sets and Systems, 122 (2001) 167-175.

42. Yager, R.R., Defending aganist strategic manipulation in uninorm-based multi- agent decision making, Europen Journal of Operational Research, 141 (2002) 217-232.

43. Yager, R.R. ve Kreinovich, V., On the relation between two approaches to combining evidence: ordered abelian groups and uninorms, Journall of Intelligent and Fuzzy Systems, 14,1 (2003) 7-12.

44. Yager, R.R. ve Kreinovich, V., Universal approximation theorem for uninorm-based fuzzy systems modeling, Fuzzy Sets and Systems, 140,2 (2003) 331-339.

45. Yager, R.R. ve Rybalov, A., Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems, 80 (1996) 111-120.

ÖZGEÇMİŞ

Gül Deniz Çaylı, 1989 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini İzmir Mustafa Şık İlköğretim Okulunda ve lise öğrenimini İzmir Cengiz Topel Y.D.A Lisesinde tamamladı. 2007 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2011 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yılda Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında Tezli Yüksek Lisans programını kazandı. 2012 yılında ÖYP ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalına atanarak aynı üniversitede yüksek lisans eğitimine devam etti. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

Yabancı dili İngilizcedir.