KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS HİLBERT UZAYLARINDA $(\mathbb{R},+)$ GRUBUNUN PERİYODİK SÜREKLİ ÜNİTER GÖSTERİMLERİNE GÖRE DİK İZDÜŞÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seda ÖZTÜRK

HAZİRAN 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS HİLBERT UZAYLARINDA $(\mathbb{R},+)$ GRUBUNUN PERİYODİK SÜREKLİ ÜNİTER GÖSTERİMLERİNE GÖRE DİK İZDÜŞÜMLER

Seda ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22.05.2013
Tezin Savunma Tarihi : 17.06.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Seda ÖZTÜRK tarafından hazırlanan

KOMPLEKS HİLBERT UZAYLARINDA $(\mathbb{R},+)$ GRUBUNUN PERİYODİK SÜREKLİ ÜNİTER GÖSTERİMLERİNE GÖRE DİK İZDÜŞÜMLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 28/05/2013 gün ve 1507 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ**	…………………………
Üye	**: Prof.Dr.Mehmet AKBAŞ**	…………………………
Üye	**: Prof.Dr.Ekrem YANMAZ**	…………………………

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bir matematikçi olmak için kendime seçtiğim bu uzun ve zorlu yolda; bana farklı bir bakış açısı kazandırarak meslek hayatımın temellerini sağlam bir şekilde atmamı ve bu yola güçlü bir şekilde başlamamı sağlayan; öğrencisi olmaktan her zaman onur ve gurur duyduğum kendimi şanslı hissettiğim kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ' a; bana ayırdığı tüm vakitleri ve her zaman göstermiş olduğu sabır, itina, saygı, sevgi ve desteği için kendisine sonsuz teşekkürlerimi, saygı ve sevgilerimi sunarım.

Üzerimde emeği olan Karadeniz Teknik Üniversitesi'ndeki bütün saygıdeğer hocalarıma; tezi hazırlama sürecinde bana her zaman destek olan canım arkadaşlarıma ve beni bugünlere getiren, desteğini her zaman arkamda hissettiğim beni koşulsuzca seven sevgili aileme en içten teşekkürlerimi, saygı ve sevgilerimi sunarım.

Seda ÖZTÜRK
Trabzon, 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "KOMPLEKS HİLBERT UZAYLARINDA $(\mathbb{R},+)$ GRUBUNUN PERİYODİK SÜREKLİ ÜNİTER GÖSTERİMLERİNE GÖRE DİK İZDÜŞÜMLER" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ'un sorumluluğunda tamamladığımı, örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 22/05/2013

Seda ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

KOMPLEKS HİLBERT UZAYLARINDA $(\mathbb{R},+)$ GRUBUNUN PERİYODİK SÜREKLİ ÜNİTER GÖSTERİMLERİNE GÖRE DİK İZDÜŞÜMLER

Seda ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
2013, 141 Sayfa

Bu tezde; kompleks Hilbert uzaylarında Ek operatörler, Hermit operatörleri, İzdüşüm ve Dik İzdüşüm operatörleri inceleniyor. Ve bu incelenen temel bilgiler kullanılarak dik izdüşüm operatörlerinin bazı temel özellikleri ile yakınsaklık özellikleri veriliyor. Ve son olarak kompleks Hilbert uzaylarında Riesz-Frechet teoremi yardımıyla $(\mathbb{R},+)$ grubunun bir periyodik sürekli üniter α gösterimine göre bir $\{P_n^\alpha\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dik izdüşüm ailesi tanımlanıyor ve bu ailelerin bazı toplanabilme özellikleri veriliyor.

Anahtar Kelimeler: Ortogonal Projeksiyon, Üniter Gösterim, Hilbert Uzayları

Master Thesis

SUMMARY

Seda ÖZTÜRK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematic Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
2013, 141 Pages

In this thesis, Adjoint operators, Hermitian operators, Projection operators and Orthogonal projection operators on complex Hilbert spaces have been investigated.Using these basic informations, some fundamental and convergence properties of orthogonal projections have been mentioned and proved. And, finally, according to a periodic continuous unitary α representation of $(\mathbb{R},+)$ group on complex Hilbert space, an orthogonal projection family $\left\{P_n^\alpha\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ has been determined by means of 'Riesz-Frechet Theorem' on complex Hilbert spaces and some summability properties of these families are given.

Key Words: Orthogonal projections, Unitary representation, Hilbert spaces.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
(X,d)	: Metrik uzay
$(\mathbb{R},e)$	: Öklid metrik uzayı
$(\mathbb{C},e)$	: Kompleks metrik uzay
$B_d(x,r)$	: Açık top
$d(x_o,A)$	: x_o noktasının A kümesine uzaklığı
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
$(X,\lVert\ \rVert)$	: Normlu lineer uzay
$L(X,Y)$	: X 'den Y 'ye olan tüm lineer dönüşümler uzayı
$B(X,Y)$	: X 'den Y 'ye olan tüm sınırlı lineer dönüşümler uzayı
$B(X,F)$	: Sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı
$B(H)$	: H Hilbert uzayı üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörler uzayı
$l_2(\mathbb{C})$	: Kompleks iç çarpım uzayı
$l_2(\mathbb{R})$	: Reel iç çarpım uzayı
$\langle , \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\langle M \rangle$	: M kümesi tarafından üretilen alt uzay
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k$	: Genel terimi x_k olan bir sonsuz seri
$\lVert T \rVert$	: T lineer operatörünün normu
$ÇekT$	: T lineer operatörünün çekirdeği
$M^{\perp}$	: M kümesinin ortogonal bütünleyeni

$\oplus$: Direkt toplam

T^* : T lineer operatörünün eki

P_M : H 'nın M üzerine dik izdüşümü

$P(H)$: P operatörünün görüntü kümesi

$T \leq S$: T küçük eşittir S

$(B(H), \circ)$: Sınırlı lineer operatörlerin bileşke işlemine göre grubu

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\{x | x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, x(n) := x_n\}$

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümün 1.1,1.2,1.3 ve 1.4 numaralı paragrafları [9],[11]; 1.5 numaralı paragrafı [8]; 1.6,1.7,1.8 numaralı paragrafları [6],[8],[11],[12] esas olarak hazırlanılmış ve çalışma için ihtiyaç duyulan bazı teorem ve sonuçların ispatları verilmiştir.

1.1. Metrik Uzaylar

Tanım 1.1.1: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon ise; d 'ye X üzerinde tanımlı bir metrik ve (X,d) ikilisine bir metrik uzay denir.

i. $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$,

ii. $x, y \in X$ için $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

iii. $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

iv. $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ dır.

Örnek 1.1.2: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $x \in \mathbb{R}$ için $|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ olsun.

$$e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $e(x,y) := |x - y|$ olarak tanımlanırsa; e, $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik ve $(\mathbb{R}, e)$ bir metrik uzaydır. e metriğine, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı Öklid metriği denir.

Örnek 1.1.3: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $a : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$\forall x, y \in X$ için $a(x,y) := \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$ olarak tanımlanırsa; a, X üzerinde bir metrik ve (X,a) bir metrik uzaydır. a metriğine, X üzerinde tanımlı Ayrık metrik denir.

Örnek 1.1.4: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $B(X,\mathbb{R})$, X üzerinde tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların kümesi, yani;

$B(X,\mathbb{R}) := \{ f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ ve } \exists M_f > 0 \therefore \forall x \in X \text{ için } |f(x)| \leq M_f \}$ olsun. Buna göre;

$f, g \in B(X,\mathbb{R})$ için $\varnothing \neq \{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \} \subset \mathbb{R}$ alt kümesi üstten sınırlı olup

$\sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \}$ vardır ve $d_\infty : B(X,\mathbb{R}) \times B(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$\forall f, g \in B(X,\mathbb{R})$ için

$$d_\infty(f,g) := \sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \}$$

olarak tanımlanırsa; d_∞, $B(X,\mathbb{R})$ üzerinde bir metriktir.

Gerçekten; $d_\infty : B(X,\mathbb{R}) \times B(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\forall f, g \in B(X,\mathbb{R})$ için

$d_\infty(f,g) := \sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \}$ fonksiyonunun, $B(X,\mathbb{R})$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

i. $\forall f, g \in B(X,\mathbb{R})$ ve $\forall x \in X$ için

$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \} = d_\infty(f,g)$ olduğundan $d_\infty(f,g) \geq 0$ dır.

ii. $f, g \in B(X,\mathbb{R})$ için $d_\infty(f,g) = 0$ olsun. O halde;

$d_\infty(f,g) := \sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \}$ olduğundan $\forall x \in X$ için

$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \} = d_\infty(f,g) = 0$ dır. O halde; $\forall x \in X$ için $|f(x) - g(x)| = 0$ dır. Dolayısıyla; $f = g$ dir.

Tersine olarak; $f = g$ ise; $\forall x \in X$ için $|f(x) - g(x)| = 0$ dır.

O halde; $d_\infty(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \} = \sup\{0\} = 0$ dır.

iii. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $|x| = |-x|$ olduğundan $f, g \in B(X,\mathbb{R})$ için

$$\sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in X \} = \sup\{ |g(x) - f(x)| \mid x \in X \}$$

dır. O halde; $\forall f, g \in B(X,\mathbb{R})$ ve $\forall x \in X$ için $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$ dır.

iv. $\forall f, g, h \in B(X,\mathbb{R})$ ve $\forall x \in X$ için

$$0 \leq |f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \quad (*)$$

dır. $\forall x \in X$ için

$$|f(x)-g(x)| \leq \sup\{|f(x)-g(x)|| \ x \in X\} = d_\infty(f,g)$$

ve
$$|g(x)-h(x)| \leq \sup\{|g(x)-h(x)|| \ x \in X\} = d_\infty(g,h)$$

olduğundan $(*)$ 'dan $0 \leq |f(x)-h(x)| \leq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ olur.

O halde; $d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ sayısı, $\{|f(x)-h(x)|| \ x \in X\}$ kümesinin bir üst sınırı olup $\sup\{|f(x)-h(x)|| \ x \in X\} \leq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ dır. Dolayısı ile; $\forall f,g,h \in B(X,\mathbb{R})$ ve $\forall x \in X$ için $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ dır.

Teorem 1.1.5: (X,d) bir metrik uzay ve $\varnothing \neq Y \subset X$ bir alt küme olsun. Bu takdirde; $d \downarrow (Y \times Y) : Y \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, Y üzerinde bir metriktir ve $(Y, d \downarrow (Y \times Y))$ bir metrik uzaydır.

$(Y, d \downarrow (Y \times Y))$ metrik uzayına, (X,d) metrik uzayının bir alt metrik uzayı denir.

Kısalık için $(Y, d \downarrow (Y \times Y))$ alt metrik uzayı, (Y,d) ile gösterilir.

Tanım 1.1.6: (X,d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olsun.

i. $B_d(a,r) := \{x | x \in X \text{ ve } d(x,a) < r\} \subset X$ alt kümesine, X 'in d metriğine göre $a-$ merkezli ve $r-$ yarıçaplı açık top denir.

ii. $\overline{B_d}(a,r) := \{x | x \in X \text{ ve } d(x,a) \leq r\} \subset X$ alt kümesine, X 'in d metriğine göre $a-$ merkezli ve $r-$ yarıçaplı kapalı top denir.

Tanım 1.1.7: (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_o \in A$ olsun. $B_d(x_o, r_o) \subset A$ olacak şekilde bir $r_o > 0$ sayısı bulunabilirse; $x_o \in A$ noktasına, A kümesinin bir iç noktası denir.

A'nın tüm iç noktalarından oluşan kümeye A'nın içi denir ve A^o ile gösterilir.

A kümesinin tüm noktaları birer iç nokta ise; A kümesine, (X,d) metrik uzayında bir açık alt küme denir.

Teorem 1.1.8: (X,d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olsun. Bu takdirde;

$B_d(a,r) \subset X$ açık topu, (X,d) metrik uzayında bir açık alt kümedir.

Teorem 1.1.9: (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde;

i. $\varnothing, X$ birer açık alt kümedir.

ii. Λ bir damga kümesi olmak üzere; $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \wp(X)$, $\forall \lambda \in \Lambda$ için $O_\lambda \subset X$ açık alt kümelerinden oluşan bir alt küme ailesi ise; $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset X$ alt kümesi, bir açık alt kümedir.

iii. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $\{O_1, O_2, ..., O_m\} \subset \wp(X)$, $\forall i \in \{1,2,...,m\}$ için $O_i \subset X$ açık alt kümelerinden oluşan sonlu bir alt küme ailesi ise; $\bigcap_{i=1}^{m} O_i \subset X$ alt kümesi, bir açık alt kümedir.

Uyarı 1.1.10: Yukarıdaki teoremde sonlu elemanlı bir açık alt küme ailesinin kesişiminin açık bir alt küme olduğu belirtildi. Fakat bu, sonsuz küme ailesi için doğru değildir.
Örnek olarak; $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayını göz önüne alalım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $O_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}, U_n := (-n,n) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere; $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\mathbb{R})$ aileleri, $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayında sonlu elemanlı olmayan birer açık alt küme ailesidir.
Buradan; $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-n,n) = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ açık bir alt küme olduğundan, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\mathbb{R})$ açık küme ailesinin kesişimi bir açık alt kümedir. Fakat; $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ ve $\{0\} \subset \mathbb{R}$ bir açık alt küme olmadığından $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\mathbb{R})$ açık küme ailesinin kesişimi, $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayında bir açık alt küme değildir.

Tanım 1.1.11: (X,d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ bir alt küme olsun.

$K^c := X \setminus K$ alt kümesi, (X,d) metrik uzayında bir açık alt küme ise; K kümesine (X,d) metrik uzayında bir kapalı küme denir.

Teorem 1.1.12: (X,d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olsun. Bu takdirde;

$\overline{B_d}(a,r) \subset X$ kapalı topu, (X,d) metrik uzayında bir kapalı alt kümedir.

Teorem 1.1.13: (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde;

i. $\varnothing, X$ birer kapalı kümedir.

ii. Λ bir damga kümesi olmak üzere; $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \wp(X)$, $\forall \lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda \subset X$ kapalı alt kümelerinden oluşan bir alt küme ailesi ise; $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \subset X$ alt kümesi, kapalı bir alt kümedir.

iii. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $\{K_1, K_2, ..., K_m\} \subset \wp(X)$, $\forall i \in \{1,2,...,m\}$ için $K_i \subset X$ kapalı alt kümelerinden oluşan sonlu bir alt küme ailesi ise; $\bigcup_{i=1}^{m} K_i \subset X$ alt kümesi, kapalı bir alt kümedir.

Uyarı 1.1.14: Yukarıdaki teoremde; sonlu bir kapalı alt küme ailesinin birleşiminin kapalı bir alt küme olduğu belirtildi. Fakat bu, sonsuz alt küme ailesi için doğru değildir.
Örnek olarak; $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayını göz önüne alalım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $K_n := \left[0, 1-\frac{1}{n}\right], E_n := [-n,n] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere; $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\mathbb{R})$ sonlu elemanlı olmayan iki kapalı alt küme ailesidir. $[0,1) \subset \mathbb{R}$ alt kümesi, $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında kapalı bir alt küme olmadığından ve $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = [0,1)$ olduğundan $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\mathbb{R})$ kapalı alt küme ailesinin birleşimi, $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında bir kapalı alt küme değildir. Fakat; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$ kapalı bir alt küme olduğundan $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\mathbb{R})$ kapalı alt küme ailesinin birleşimi bir kapalı alt kümedir.

Tanım 1.1.15: (X,d) bir metrik uzay, $A\subset X$ bir alt küme ve $x_o \in X$ olsun.

$\forall r>0$ için $B_d(x_o,r)\cap A\neq\varnothing$ ise; $x_o\in X$ noktasına, A'nın bir kapanış noktası denir.

A'nın tüm kapanış noktalarından oluşan kümeye, A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

$A,B\subset X$ için $A\subset\overline{A}$ ve $A\subset B$ ise; $\overline{A}\subset\overline{B}$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 1.1.16: (X,d) bir metrik uzay ve $A\subset X$ bir alt küme olsun. Bu takdirde; $\overline{A}\subset X$ alt kümesi (X,d) metrik uzayında kapalı bir alt kümedir.

İspat: $\left(\overline{A}\right)^c\subset X$ alt kümesinin açık bir alt küme olduğu gösterilirse ispat biter.

i. $\left(\overline{A}\right)^c=\varnothing$ ise; ispat açık.

ii. $\left(\overline{A}\right)^c\neq\varnothing$ olması hali: $x_o\in\left(\overline{A}\right)^c$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. O halde;

$x_o\notin\overline{A}$ olduğundan $\exists r_o>0 \therefore B_d(x_o,r_o)\cap A=\varnothing$ dır. $B_d(x_o,r_o)$ açık bir alt küme olduğundan $\forall x\in B_d(x_o,r_o)$ için $\exists r_x>0 \therefore B_d(x,r_x)\subset B_d(x_o,r_o)$ dır.

Buradan; $B_d(x,r_x)\cap A=\varnothing$ olup $\forall x\in B_d(x_o,r_o)$ için $x\notin\overline{A}$ dir. O halde; $B_d(x_o,r_o)\cap\overline{A}=\varnothing$ dır. Buradan; $B_d(x_o,r_o)\subset\left(\overline{A}\right)^c$ dır. O halde; $x_o\in\left(\overline{A}\right)^c$ noktası, $\left(\overline{A}\right)^c\subset X$ alt kümesinin bir iç noktadır. $x_o\in\left(\overline{A}\right)^c$ noktası keyfi olduğundan, $\left(\overline{A}\right)^c\subset X$ alt kümesinin her noktası bir iç nokta olur. Dolayısıyla, $\left(\overline{A}\right)^c\subset X$ alt kümesi açık bir alt küme olup $\overline{A}\subset X$ kapalı bir alt kümedir.

Teorem 1.1.17: (X,d) bir metrik uzay ve $A\subset X$ bir alt küme olsun. $A\subset X$ alt kümesinin kapalı bir alt küme olması için gerek ve yeter koşul $A=\overline{A}$ olmasıdır.

İspat:

i. $A\subset X$ alt kümesi kapalı bir alt küme ise; $A=\overline{A}$ dır.

$A\subset\overline{A}$ olduğu biliniyor. $A\subset X$ alt kümesi kapalı bir alt küme olduğundan $A^c\subset X$ açık bir alt kümedir. $A^c\subset X$ alt kümesi açık bir alt küme ve $A^c\cap A=\varnothing$ olduğundan $A^c\cap\overline{A}=\varnothing$ dır. (Aksi halde; $\exists x_0\in X\therefore x_0\in\overline{A}\cap A^c$ dır. $x_0\in A^c$ ve $A^c\subset X$ açık bir alt küme olduğundan $\exists r_o>0\therefore B_d\left(x_0,r_o\right)\subset A^c$ dir. Dolayısı ile $B_d\left(x_0,r_o\right)\cap A=\varnothing$ olur ki bu $x_0\in\overline{A}$ olması ile çelişir.) $A^c\cap\overline{A}=\varnothing$ olduğundan $\overline{A}\subset\left(A^c\right)^c=A$ olur. $A\subset\overline{A}$ ve $\overline{A}\subset A$ olduğundan $A=\overline{A}$ dır.

ii. $A=\overline{A}$ ise; $A\subset X$ alt kümesi kapalı bir alt kümedir.

Teorem 1.1.16'ya göre $\overline{A}\subset X$ alt kümesi kapalı bir alt küme olduğundan $A\subset X$ kapalı bir alt kümedir.

Teorem 1.1.18: $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay ve $A\subset X$ bir alt küme olsun. Bu takdirde;

$$\overline{A}=\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E\subset X \qquad \text{dır.}$$

İspat: Teorem 1.1.13'deki ii'ye göre; $\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E\subset X$ alt kümesi kapalı bir alt küme ve $A\subset\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E$ dır. Dolayısıyla; $\overline{A}\subset\overline{\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E}$ olup, $\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E\subset X$ alt kümesi kapalı bir alt küme olduğundan bir önceki teoreme göre; $\overline{\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E}=\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E$ olduğu göz önüne alındığında, $\overline{A}\subset\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E$ dır. Diğer taraftan; $A\subset\overline{A}$ ve $\overline{A}\subset X$ kapalı bir alt küme olduğundan $\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E\subset\overline{A}$ dır. Dolayısıyla; $\overline{A}=\bigcap_{\substack{A\subset E\\ E\ kapalı}}E\subset X$ dır.

Tanım 1.1.19: $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay, $A\subset X$ bir alt küme ve $x_o\in X$ olsun.

$d\left(x_o,A\right):=\inf\left\{d\left(x_o,x\right)\middle|\ x\in A\right\}\geq 0$ genişletilmiş reel sayısına, x_o noktasının A kümesine olan uzaklığı denir.

Teorem 1.1.20: $\left(X,d\right)$ bir metrik uzay, $K\subset X$ kapalı bir alt küme ve $x_o\in K^c$ ise;

$d\left(x_o,K\right)>0$ dır.

Tanım 1.1.21: (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}\subset X$ bir dizi olsun. $\forall\mathcal{E}>0$ sayısına karşılık bir $N(\mathcal{E})\in\mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyleki $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(\mathcal{E})$ için $d(x_n,x)<\mathcal{E}$ olacak şekilde bir $x\in X$ noktası varsa; $\{x_n\}\subset X$ dizisine, (X,d) metrik uzayında yakınsak bir dizi ve $x\in X$ noktasına, $\{x_n\}\subset X$ dizisinin bir limiti denir.

Teorem 1.1.22: (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}\subset X$ bir dizi olsun.

$\{x_n\}\subset X$ dizisi, (X,d) metrik uzayında yakınsak ise; limiti tektir.

Teorem 1.1.23: (X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\}\subset X$ bir dizi ve $x\in X$ olsun.

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ olması için gerek ve yeter koşul $\{d(x_n,x)\}\subset\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ dizisinin $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x)=0$ olmasıdır.

Notasyon: (X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\}\subset X$ bir dizi ve $x\in X$ olsun.

$\{x_n\}\subset X$ dizisi yakınsak ve limiti $x\in X$ noktası ise; bu durum: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ veya $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x)=0$ veya $n\to+\infty$ için $x_n \overset{d}{\to} x$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1.24: (X,d) bir metrik uzay, $A\subset X$ bir alt küme ve $x_o\in X$ olsun. $x_o\in\overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olacak şekilde bir $\{x_n\}\subset A$ dizisinin mevcut olmasıdır.

İspat:

i. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olacak şekilde bir $\{x_n\}\subset A$ dizisi mevcut ise; $x_o\in\overline{A}$ dır.

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olduğundan $\forall r>0$ sayısı için $\exists N(r)\in\mathbb{N} \therefore \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için $d(x_n,x_o)<r$ dir. O halde; $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için $x_n\in B_d(x_o,r)$ dir. $\{x_n\}\subset A$ ve $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için $x_n\in B_d(x_o,r)$ olduğundan $x_n\in B_d(x_o,r)\cap A\neq\varnothing$ dır. $\forall r>0$ için $B_d(x_o,r)\cap A\neq\varnothing$ olduğundan $x_o\in\overline{A}$ dır.

ii. $x_o \in \overline{A}$ ise; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi mevcuttur. $x_o \in \overline{A}$ olduğundan $\forall r > 0$ için $B_d(x_o, r) \cap A \neq \varnothing$ dır. Özel olarak;

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $B_d\left(x_o, \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$ dır. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B_d\left(x_o, \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi mevcuttur. Açık olarak; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq d(x_n, x_o) \leq \dfrac{1}{n}$ dır. O halde; $\forall \mathcal{E} > 0$ sayısına, $N(\mathcal{E}) := EKE\left\{\ell \,\middle|\, \ell \in \mathbb{N} \;\; ve \;\; \dfrac{1}{\ell} < \mathcal{E}\right\}$ karşılık getirilirse;

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\mathcal{E})$ için $d(x_n, x_o) < \mathcal{E}$ dır. Bu ise; $\{x_n\} \subset A$ dizisinin yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Teorem 1.1.25: (X, d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ bir alt küme olsun. $K \subset X$ alt kümesinin kapalı bir alt küme olması için gerek ve yeter koşul K 'nın noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limitinin K 'ya ait olmasıdır.

İspat: $K \subset X$ kapalı bir alt küme ise; K 'nın noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limiti K 'ya aittir.

$\{x_n\} \subset K$, (X, d) metrik uzayında yakınsak ve $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ olan bir dizi ise; $x \in K$ dır. Farz edelim ki $x \notin K$ olsun. O halde; $x \in K^c$ dir. $K \subset X$ kapalı bir alt küme olduğundan K^c alt kümesi açıktır. K^c açık bir alt küme ve $x \in K^c$ olduğundan $B_d(x, r_o) \subset K^c$ olan en az bir $r_o > 0$ sayısı vardır. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ olduğundan bu $r_o > 0$ sayısına karşılık $\exists N(r_o) \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(r_o)$ için $d(x_n, x) < r_o$ dır. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(r_o)$ için $x_n \in B_d(x, r_o)$ dır. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(r_o)$ için $x_n \in B_d(x, r_o) \cap K \neq \varnothing$ dır. Fakat; $B_d(x, r_o) \subset K^c$ olduğundan $B_d(x, r_o) \cap K = \varnothing$ dır. $B_d(x, r_o) \cap K \neq \varnothing$ ve $B_d(x, r_o) \cap K = \varnothing$ olması bir çelişkidir. Çelişki; $x \notin K$ olduğunu varsaymaktan ileri geldi. O halde; $\{x_n\} \subset K$, (X,d) metrik uzayında yakınsak ve $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ olan bir dizi ise; $x \in K$ dır.

Tersine olarak; K'nın noktalarından oluşan ve yakınsak olan her dizinin limiti K'ya ait ise; $K \subset X$ alt kümesi kapalıdır. $K^c \subset X$ alt kümesinin, (X,d) metrik uzayında açık bir alt küme olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Farz edelim ki $K^c \subset X$ alt kümesi açık olmasın. O halde; $K^c \subset X$ açık alt kümesinin iç noktası olmayan en az bir $x_o \in K^c$ noktası vardır. O halde; $\forall r > 0$ için $B_d(x_o, r) \not\subset K^c$ dir.O halde;

$\forall r > 0$ için $B_d(x_o, r) \cap K \neq \varnothing$ dır. Özel olarak; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B_d\left(x_o, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \varnothing$ dır. O halde; $\exists \{x_n\} \subset K \therefore \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B_d\left(x_o, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \varnothing$ dır. Buradan; $\{x_n\} \subset K$ dizisi, yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ dır. O halde; $x_o \in K$ olur ki bu $x_o \in K^c$ olması ile çelişir. Dolayısı ile $K^c \subset X$'in her noktası bir iç nokta olduğundan $K^c \subset X$ açık bir alt küme ve $K \subset X$ alt kümesi kapalıdır.

Tanım 1.1.26: (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. $\forall \mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık bir $N(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyleki $\forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N(\mathcal{E})$ için $d(x_p, x_q) < \mathcal{E}$ ise; $\{x_n\} \subset X$ dizisine, (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 1.1.27: (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ bir dizi olsun. Bu takdirde;

$\{x_n\} \subset X$ dizisi yakınsak ise; bir Cauchy dizisidir.

Uyarı 1.1.28: Teorem 1.1.27'nin tersi doğru değildir.

Örneğin; $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayının, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, e)$ alt metrik uzayını göz önüne alalım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dizisi, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, e)$ alt metrik uzayında bir Cauchy dizisidir; fakat yakınsak değildir. Gerçekten;

$\forall \mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık $N(\mathcal{E}) := EKE\left\{ \ell \middle| \ell \in \mathbb{N} \ \ ve \ \ \frac{1}{\ell} < \frac{\mathcal{E}}{2} \right\}$ karşılık getirilirse;

$\forall p,q \in \mathbb{N},\, p,q \geq N(\mathcal{E})$ için $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} < \frac{1}{N(\mathcal{E})}$ ve $N(\mathcal{E}) \in \left\{ \ell \middle| \ell \in \mathbb{N} \ \ ve \ \ \frac{1}{\ell} < \frac{\mathcal{E}}{2} \right\}$ olduğundan

$\frac{1}{N(\mathcal{E})} < \frac{\mathcal{E}}{2}$ dır. O halde; $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} < \frac{\mathcal{E}}{2}$ dir. O halde; $\forall p,q \in \mathbb{N},\, p,q \geq N(\mathcal{E})$ için

$e(x_p, x_q) = |x_p - x_q| = \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \leq \left| \frac{1}{p} \right| + \left| \frac{1}{q} \right| < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$ olduğundan $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$

dizisi, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, e)$ alt metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Fakat; bu dizi, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, e)$ alt metrik uzayında yakınsak değildir. Farz edelim ki $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dizisi,

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, e)$ alt metrik uzayında yakınsak ve $x_o \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ noktası, $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$

dizisinin bir limiti olsun. Yani; $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olsun. O halde; $\frac{|x_o|}{4} > 0$ sayısına karşılık

$\exists N \equiv N(\frac{|x_o|}{4}) \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $\left| \frac{1}{n} - x_o \right| < \frac{|x_o|}{4}$ dır. Diğer taraftan; $\mathbb{N}$ doğal sayılar

kümesi üstten sınırlı olmadığından $\frac{4}{|x_o|} > 0$ sayısı $\mathbb{N}$ için bir üst sınır değildir. Dolayısı ile

$0 < \frac{4}{|x_o|} < N^*$ olan bir $N^* \in \mathbb{N}$ vardır. Açık olarak; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N^*$ için $0 < \frac{4}{|x_o|} < N^* \leq n$

yani; $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N^*} < \frac{|x_o|}{4}$ dir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{N, N^*\}$ doğal sayısı için

$0 < |x_o| = \left| x_o - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right| \leq \left| x_o - \frac{1}{n} \right| + \frac{1}{n} < \frac{|x_o|}{4} + \frac{|x_o|}{4} = \frac{|x_o|}{2}$ dır. Burada; $0 < |x_o|$ olduğundan

$1 < \frac{1}{2}$ çelişkisi elde edilir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dizisi, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, e)$ alt metrik uzayında yakınsak değildir.

Tanım 1.1.29: (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer; (X, d) metrik uzayında alınan her

Cauchy dizisi, bu uzayda yakınsak ise; (X,d) metrik uzayına bir tam metrik uzay denir.

Teorem 1.1.30: (X,d) bir tam metrik uzay ve $\varnothing \neq A \subset X$ olsun. (A,d) alt metrik uzayının bir tam metrik uzay olması için gerek ve yeter koşul A'nın (X,d) metrik uzayında kapalı bir alt küme olmasıdır.

İspat:

i. $A \subset X$ alt kümesi, (X,d) metrik uzayında kapalı bir alt küme ise; (A,d) alt metrik uzayı tamdır.

$\{x_n\} \subset A$, (A,d) alt metrik uzayında alınan keyfi bir Cauchy dizisi olsun. O halde; $\{x_n\} \subset X$ olup bu dizi, (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. (X,d) bir tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\} \subset X$ dizisi, (X,d) metrik uzayında yakınsaktır. O halde; $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ olsun. $A \subset X$ alt kümesi, (X,d) metrik uzayında kapalı bir alt küme olduğundan Teorem 1.1.25'den $x \in A$ dır. Dolayısı ile (A,d) alt metrik uzayında alınan her Cauchy dizisi, (A,d) alt metrik uzayında yakınsak olduğundan (A,d) alt metrik uzayı bir tam metrik uzaydır.

ii. (A,d) alt metrik uzayı bir tam metrik uzay ise; $A \subset X$ alt kümesi, (X,d) metrik uzayında kapalı bir alt kümedir.

$\{x_n\} \subset A$, (X,d) metrik uzayında yakınsak ve $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ olan bir dizi olsun. O halde; metrik uzaylarda yakınsak olan her dizi bir Cauchy dizi olduğundan $\{x_n\}$ dizisi, (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. O halde; $\{x_n\}$ dizisi, (A,d) alt metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. Ve (A,d) alt metrik uzayı bir tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi, (A,d) alt metrik uzayında yakınsaktır. $y \in A$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} y$ olsun. $x, y \in X$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} y$ olduğundan Teorem 1.1.22'den $x = y \in A$ dır. Dolayısıyla, Teorem 1.1.25'den $A \subset X$ alt kümesi, (X,d) metrik uzayında kapalı bir alt kümedir.

Teorem 1.1.31: $X \neq \varnothing$ olan bir küme olmak üzere; $(B(X,\mathbb{R}),d_\infty)$ metrik uzayı bir tam metrik uzaydır.

İspat: $\{f_n\},(B(X,\mathbb{R}),d_\infty)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde; $\forall \mathcal{E}>0$ sayısına karşılık bir $N(\mathcal{E})\in\mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyleki $\forall p,q\in\mathbb{N}, p,q\geq N(\mathcal{E})$ için

$$d_\infty(f_p,f_q)<\mathcal{E} \qquad (I)$$

dır.

$x\in X$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $0\leq |f_p(x)-f_q(x)|\leq d_\infty(f_p,f_q)$ olduğundan (I)'den $\forall p,q\in\mathbb{N}, p,q\geq N(\mathcal{E})$ için $|f_p(x)-f_q(x)|<\mathcal{E}$ olduğu görülür. O halde; $\{f_n(x)\}\subset\mathbb{R}$ dizisi, $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve $(\mathbb{R},e)$ bir tam metrik uzay olduğundan $\{f_n(x)\}\subset\mathbb{R}$ dizisi, $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında yakınsaktır. Böylece; $x\in X$ verildiğinde $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x\in X$ için $f(x):=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ olarak tanımlansın.

i. $f\in B(X,\mathbb{R})$ dir. Gerçekten; $\{f_n\},(B(X,\mathbb{R}),d_\infty)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $1>0$ sayısına karşılık bir $N_1(1)\in\mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyleki $\forall m,n\in\mathbb{N}, m,n\geq N_1(1)$ için $d_\infty(f_n,f_m)<1$ dır. Özel olarak; $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_1$ için $d_\infty(f_n,f_{N_1})<1$dir.O halde; $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_1$ ve $\forall x\in X$ için

$$0\leq |f_n(x)-f_{N_1}(x)|\leq d_\infty(f_n,f_{N_1})<1 \Rightarrow |f_n(x)-f_{N_1}(x)|<1$$

dir.Öte yandan; $\forall x\in X$ için $f(x):=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ olduğundan $1>0$ sayısına karşılık $\exists N_x\equiv N_x(1)\in\mathbb{N} \therefore \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_x$ için

$$|f(x)-f_{N_x}(x)|<1$$

dir. $x\in X$ verildiğinde $k\in\mathbb{N}, k:=\max\{N_x,N_1\}$ alınırsa;

$$\begin{aligned}0\leq |f(x)| &= |f(x)-f_k(x)+f_k(x)-f_{N_1}(x)+f_{N_1}(x)| \\ &\leq |f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-f_{N_1}(x)|+|f_{N_1}(x)| \\ &\leq 2+|f_{N_1}(x)| \qquad (II)\end{aligned}$$

olur. Burada; $f_{N_1} \in B(X,\mathbb{R})$ olduğundan $\exists M_{f_{N_1}} > 0$ sayısı öyleki $\forall u \in X$ için

$$\left| f_{N_1}(u) \right| \le M_{f_{N_1}} \qquad (III)$$

dır. Dolayısıyla, (II) ve (III) 'den $f \in B(X,\mathbb{R})$ dir.

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \overset{d_\infty}{=} f$ dir.

Gerçekten; $\{f_n\}, \left(B(X,\mathbb{R}), d_\infty\right)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $\mathcal{E} > 0$ verildiğinde $\frac{\mathcal{E}}{3} > 0$ sayısına karşılık bir $N \equiv N\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyleki $\forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \ge N$ için

$$d_\infty\left(f_p, f_q\right) < \frac{\mathcal{E}}{3} \qquad (*)$$

dır. Diğer taraftan; $x \in X$ verildiğinde $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ olduğundan $\frac{\mathcal{E}}{3} > 0$ sayısına karşılık $\exists N_x \equiv N_x\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right) \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N_x$ için

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \frac{\mathcal{E}}{3} \qquad (**)$$

dır. $k_x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı, $k_x := \max\{N, N_x\}$ olarak seçilirse; $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge N(\mathcal{E})$ ve $\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned} 0 \le \left| f_n(x) - f(x) \right| &= \left| f_n(x) - f_{k_x}(x) + f_{k_x}(x) - f(x) \right| \\ &\le \left| f_n(x) - f_{k_x}(x) \right| + \left| f_{k_x}(x) - f(x) \right| \\ &< \frac{\mathcal{E}}{3} + \frac{\mathcal{E}}{3} = 2\frac{\mathcal{E}}{3} \end{aligned}$$

dır. O halde; $2\frac{\mathcal{E}}{3} > 0$ sayısı $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge N\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right)$ için $\left\{ \left| f_n(x) - f(x) \right| \, x \in X \right\}$ kümelerinin bir üst sınırı olup $(*)$ ve $(**)$ 'dan $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge N$ için $d_\infty\left(f_n, f\right) < 2\frac{\mathcal{E}}{3} < \mathcal{E}$ olduğu görülür.

O halde; $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \overset{d_\infty}{=} f$ dır. Dolayısı ile $\left(B(X,\mathbb{R}), d_\infty\right)$ metrik uzayı bir tam metrik uzaydır.

Tanım 1.1.32: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $\varnothing \neq A \subset X$, $f: A \subset X \to Y$ ve $x_o \in A$ olsun. $\forall \mathcal{E} > 0$ için $\exists \delta(x_o,\mathcal{E}) > 0 \therefore d(x,x_o) < \delta(x_o,\mathcal{E})$ olan $\forall x \in A$ için $\rho(f(x), f(x_o)) < \mathcal{E}$ ise; f 'ye $x_o \in A$ noktasında süreklidir denir.

Eğer; f fonksiyonu, A'nın her noktasında sürekli ise; f 'ye A kümesi üzerinde süreklidir denir.

Tanım 1.1.33: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $\varnothing \neq A \subset X$, $f: A \subset X \to Y$ ve $x_o \in A$ olsun. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olan her $\{x_n\} \subset A$ dizisi için $\{f(x_n)\} \subset Y$ dizileri, (Y,ρ) metrik uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \overset{d}{=} f(x_o)$ ise; f fonksiyonuna, $x_o \in A$ noktasında dizisel süreklidir denir.

Teorem 1.1.34: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $\varnothing \neq A \subset X$, $f: A \subset X \to Y$ ve $x_o \in A$ olsun. f fonksiyonunun $x_o \in A$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun $x_o \in A$ noktasında dizisel sürekli olmasıdır.

İspat:

i. f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında sürekli ise; f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında dizisel süreklidir.

$\mathcal{E} > 0$ keyfi alalım. f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında sürekli olduğundan $\exists \delta(x_o,\mathcal{E}) > 0 \therefore d(x,x_o) < \delta(x_o,\mathcal{E})$ olan $\forall x \in A$ için $\rho(f(x), f(x_o)) < \mathcal{E}$ (I) dır.

$\{x_n\} \subset A$ yakınsak ve $x_o \in X$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ olan bir dizi olsun. (I)'deki $\delta(x_o,\mathcal{E}) > 0$ sayısına karşılık $\exists N(\delta(x_o,\mathcal{E})) \equiv N \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $d(x_n,x_o) < \delta(x_o,\mathcal{E})$ (II) dır. O halde; (I) ve (II)'den $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $\rho(f(x_n), f(x_o)) < \mathcal{E}$ elde edilir. Bu ise bize; $\{f(x_n)\} \subset Y$ dizisinin, (Y,ρ) metrik uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \overset{d}{=} f(x_o)$

olduğunu gösterir.

ii. f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında dizisel sürekli ise; f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında süreklidir.

Farz edelimki f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında sürekli olmasın. O halde; $\exists \mathcal{E}_o > 0 \therefore$ $r > 0$ sayısı ne olursa olsun $d(x_r, x_o) < r$ ve $\rho(f(x_r), f(x_o)) \geq \mathcal{E}_0$ olan en az bir $x_r \in A$ noktası vardır. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_o) < \frac{1}{n}$ $(*)$ ve $\rho(f(x_n), f(x_o)) \geq \mathcal{E}_0$ (**) olan bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi vardır. $(*)$ gösterir ki bu $\{x_n\} \subset A$ dizisi (X, d) metrik uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \overset{d}{=} x_o$ dir. Hipoteze göre; f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında dizisel sürekli olduğundan; $\{f(x_n)\} \subset Y$ dizisi, (Y, ρ) metrik uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \overset{d}{=} f(x_o)$ dır. O halde; (**) 'daki $\mathcal{E}_0 > 0$ sayısına karşılık $\exists N \equiv N(\mathcal{E}_0) \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $\rho(f(x_n), f(x_o)) < \mathcal{E}_0$ $(***)$ dır.
(**) ve $(***)$ 'dan $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $0 < \mathcal{E}_0 \leq \rho(f(x_n), f(x_o)) < \mathcal{E}_0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında dizisel sürekli ise; f fonksiyonu, $x_o \in A$ noktasında süreklidir.

Tanım 1.1.35: (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $\varnothing \neq A \subset X$, $f : A \subset X \to Y$ olsun. $\forall \mathcal{E} > 0$ için $\exists \delta(A, \mathcal{E}) > 0 \therefore d(x_1, x_2) < \delta(A, \mathcal{E})$ olan $\forall x_1, x_2 \in A$ için $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \mathcal{E}$ ise; f fonksiyonuna, A üzerinde düzgün süreklidir denir.

Tanımdan görülüyor ki , $\varnothing \neq A \subset X$, $f : A \subset X \to Y$ dönüşümü düzgün sürekli ise; f fonksiyonu A üzerinde süreklidir. Fakat; bunun tersi genelde doğru değildir.
Örnek olarak; $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayını göz önüne alalım. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) := x^2$ olarak tanımlanırsa; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli fakat;

düzgün sürekli değildir. Gerçekten; $\mathcal{E} > 0$ keyfi alınan bir sayı ve $x_o \in \mathbb{R}$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $\delta(x_o,\mathcal{E}) := \min\left\{1, \frac{\mathcal{E}}{1+2|x_o|}\right\} > 0$ olarak alınırsa; $|x - x_o| < \delta(x_o,\mathcal{E})$ olan $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &= |x^2 - x_o^2| = |x - x_o||x + x_o| \\ &= |x - x_o||x - x_o + 2x_o| \\ &\leq (|x - x_o| + 2|x_o|)|x - x_o| \\ &< (1+2|x_o|)\frac{\mathcal{E}}{(1+2|x_o|)} = \mathcal{E} \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu, $x_o \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir. $x_o \in \mathbb{R}$ keyfi alınan bir nokta olduğundan f fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

Fakat; f fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir. Farz edelim ki f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olsun. O halde; $\forall \mathcal{E} > 0$ için $\exists \delta(\mathbb{R},\mathcal{E}) > 0 \therefore$ $|x_1 - x_2| < \delta(\mathbb{R},\mathcal{E})$ olan $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \mathcal{E}$ dır.

Özel olarak ; $x_1 := \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{4} \in \mathbb{R}$, $x_2 := \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4} \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa; $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ olduğundan $\forall \mathcal{E} > 0$ için $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| = \frac{2}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2} = 1 < \mathcal{E}$ çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile f fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

Sonuç 1.1.36: $a,b \in \mathbb{R}; a < b$ olan iki reel sayı,

$$C([a,b],\mathbb{R}) := \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sürekli bir fonksiyon} \}$$

ve $\quad B([a,b],\mathbb{R}) := \{ f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ sınırlı bir fonksiyon} \}$ olmak üzere;

$C([a,b],\mathbb{R}) \subset B([a,b],\mathbb{R})$ alt kümesi, $(B([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ tam metrik uzayında kapalı bir alt küme ve $(C([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ alt metrik uzayı bir tam metrik uzaydır.

İspat: $\{f_n\} \subset C([a,b],\mathbb{R}), (B([a,b],\mathbb{R}), d_\infty)$ metrik uzayında yakınsak ve limiti

$f \in B([a,b],\mathbb{R})$ olan bir dizi olsun. $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Bunun için; $x_o \in [a,b]$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olmak üzere; f 'nin $x_o \in [a,b]$'de sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathcal{E} > 0$ keyfi olsun. $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \overset{d_\infty}{=} f$ olduğundan $\exists N(\mathcal{E}) \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\mathcal{E})$ için $d_\infty(f_n, f) < \dfrac{\mathcal{E}}{4}$ dir. Özel olarak; $N(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ için $d_\infty\left(f_{N(\varepsilon)}, f\right) < \dfrac{\mathcal{E}}{4}$ dir. O halde; $\forall x \in [a,b]$ için $0 \leq \left|f_{N(\varepsilon)}(x) - f(x)\right| < \dfrac{\mathcal{E}}{4}$ dir. $f_{N(\varepsilon)} \in C([a,b],\mathbb{R})$ olduğundan $f_{N(\varepsilon)}$, $x_o \in [a,b]$ noktasında süreklidir. O halde; $\dfrac{\mathcal{E}}{4} > 0$ sayısına karşılık $|x - x_o| < \delta(x_o, \mathcal{E})$ olan $\forall x \in [a,b]$ için $\left|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_o)\right| < \dfrac{\mathcal{E}}{4}$ olacak şekilde bir $\delta(x_o, \mathcal{E}) > 0$ sayısı vardır.

$\forall x \in [a,b]$, $|x - x_o| < \delta(x_o, \mathcal{E})$ için

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_o)| &= \left|f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x) + f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_o) + f_{N(\varepsilon)}(x_o) - f(x_o)\right| \\
&\leq \left|f(x) - f_{N(\varepsilon)}(x)\right| + \left|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_o)\right| + \left|f_{N(\varepsilon)}(x_o) - f(x_o)\right| \\
&\leq \frac{\mathcal{E}}{4} + \frac{\mathcal{E}}{4} + \frac{\mathcal{E}}{4} = 3\frac{\mathcal{E}}{4} < \mathcal{E}
\end{aligned}
$$

olduğundan f fonksiyonu, $x_o \in [a,b]$'de süreklidir. $x_o \in [a,b]$ keyfi fakat sabit alındığından $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ dir. Teorem 1.1.25, Teorem 1.1.30 ve Teorem 1.1.31'e göre; $\left(C([a,b],\mathbb{R}), d_\infty\right)$ bir tam metrik uzaydır.

Teorem 1.1.37: $(X,d),(Y,\rho)$ iki metrik uzay olsun. Bu takdirde;
$\sigma : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ için

$$\sigma\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := d(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2),$$

fonksiyonu, $(X \times Y)$ üzerinde bir metrik ve $(X \times Y, \sigma)$ bir metrik uzaydır.

Bu $(X \times Y, \sigma)$ metrik uzayına; (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylarının kartezyen çarpımı denir.

İspat:

i. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olduğundan $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ için $d(x_1,x_2)\geq 0, \rho(y_1,y_2)\geq 0$ dır. O halde; $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ için $\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2)):=d(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2)\geq 0$ dır.

ii. $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ için $\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0$ olsun. O halde $d(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2)=0$ dır. Dolayısıyla $d(x_1,x_2)\geq 0, \rho(y_1,y_2)\geq 0$ ve $d(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2)=0$ olduğundan $d(x_1,x_2)=0, \rho(y_1,y_2)=0$ dır. O halde; $x_1,x_2\in X; y_1,y_2\in Y$ ve (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olduğundan $x_1=x_2$ ve $y_1=y_2$ dir. Dolayısıyla; $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ için $\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0$ ise; $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ dır.

Tersine olarak; $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ için $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ olsun. O halde; $x_1=x_2, y_1=y_2$ olduğundan $d(x_1,x_2)=0, \rho(y_1,y_2)=0$ dır. Dolayısıyla; $\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2)):=d(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2)=0$ dır.

iii. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olduğundan $\forall x_1,x_2\in X$ ve $\forall y_1,y_2\in Y$ için $d(x_1,x_2)=d(x_2,x_1)$ ve $\rho(y_1,y_2)=\rho(y_2,y_1)$ dir. $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$ için

$$\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2)):=d(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2)=d(x_2,x_1)+\rho(y_2,y_1)=\sigma((x_2,y_2),(x_1,y_1))$$

dır.

iv. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olduğundan $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in X\times Y$ için

$$\begin{aligned}\sigma((x_1,y_1),(x_3,y_3))=d(x_1,x_3)+\rho(y_1,y_3)&\leq d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\rho(y_1,y_2)+\rho(y_2,y_3)\\&\leq(d(x_1,x_2)+\rho(y_1,y_2))+(d(x_2,x_3)+\rho(y_2,y_3))\\&\leq\sigma((x_1,y_1),(x_2,y_2))+\sigma((x_2,y_2),(x_3,y_3))\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla; $\rho, X\times Y$ üzerinde bir metrik ve $(X\times Y,\sigma)$ bir metrik uzaydır.

Teorem 1.1.38: (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay; $(X\times Y,\sigma)$,bu iki metrik uzayın çarpımı; $\{x_n\}\subset X,\{y_n\}\subset Y$, $x\in X$ ve $y\in Y$ olsun. $\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y$ dizisinin $(X\times Y,\sigma)$ metrik uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)\overset{\sigma}{=}(x,y)$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\overset{d}{=}x$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n\overset{\rho}{=}y$ olmasıdır.

İspat: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\sigma((x_n,y_n),(x,y))=d(x_n,x)+\rho(y_n,y)$ (*)

ve
$$\left.\begin{array}{l} d(x_n,x)\le\sigma((x_n,y_n),(x,y)) \\ \rho(y_n,y)\le\sigma((x_n,y_n),(x,y)) \end{array}\right\} \qquad (**)$$

dir. (*) eşitliği, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\overset{d}{=}x$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n\overset{\rho}{=}y$ ise; $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)\overset{\sigma}{=}(x,y)$ olduğunu gösterir.

(**) eşitliği, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n)\overset{\sigma}{=}(x,y)$ ise; $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\overset{d}{=}x$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n\overset{\rho}{=}y$ olduğunu gösterir.

Teorem 1.1.39: (X,d) bir metrik uzay ve $(X\times X,\sigma)$, (X,d) metrik uzayının kendisiyle kartezyen çarpımı olsun. Bu takdirde; $d:(X\times X,\sigma)\to(\mathbb{R},e)$ fonksiyonu, $(X\times X,\sigma)$ metrik uzayından, $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayına düzgün süreklidir.

İspat: $\forall (x,y),(u,v)\in X\times X$ için $\sigma((u,v),(x,y))=d(u,x)+d(v,y)$

olduğundan $d(u,x)+d(v,y)\le 2\sigma((u,v),(x,y))$ dir. O halde; $\forall\mathcal{E}>0$ sayısına, $\delta\equiv\delta(X\times X,\mathcal{E}):=\dfrac{\mathcal{E}}{2}>0$ sayısı karşılık getirilirse;

$\sigma((u,v),(x,y))<\delta$ olan $\forall (x,y),(u,v)\in X\times X$ için,

$$e(d(u,v),d(x,y))=\left|d(u,v)-d(x,y)\right|\le d(x,u)+d(v,y)\le 2\sigma((u,v),(x,y))<\mathcal{E}$$

dir. Dolayısıyla, $d:(X\times X,\sigma)\to(\mathbb{R},e)$ fonksiyonu, $X\times X$ üzerinde düzgün süreklidir.

Teorem 1.1.40: (X,d) bir metrik uzay, $A\subset X$ bir alt küme ve $x_o\in X$ olsun. Bu takdirde;

$$d(x_o,A)=d(x_o,\overline{A}) \quad \text{dır.}$$

İspat: $S:=\{d(x_o,a)\,|\,a\in A\}$ ve $T:=\{d(x_o,b)\,|\,b\in\overline{A}\}$ olsun. $A\subset\overline{A}$ olduğundan $S\subset T$ dir.

O halde; $d(x_o,\overline{A}) = \inf T \le \inf S = d(x_o, A)$ dir.

Tersine olarak; $b \in \overline{A}$ keyfi alınan bir nokta olsun. O halde; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ olan en az bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi vardır. O halde; Teorem 1.1.38'den $\{(x_o, x_n)\} \subset X \times X$ dizisi, $(X \times X, \sigma)$ metrik uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_o, x_n) \overset{\sigma}{=} (x_o, b)$ dir. Diğer taraftan; $d : (X \times X, \sigma) \to (\mathbb{R}, e)$ fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan süreklidir. Dolayısıyla; dizisel süreklidir. O halde; $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_o, x_n) \overset{\sigma}{=} (x_o, b)$ olan $\{(x_o, x_n)\} \subset X \times X$ dizisi için $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_o, x_n) = d(x_o, b)$ dir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$ olduğundan $d(x_o, A) \le d(x_o, x_n)$ dir. Burada; $n \to +\infty$ için limit alınırsa; $d(x_o, A) \le d(x_o, b)$ olur. O halde; $d(x_o, A) \ge 0$ sayısı, $\{d(x_o, b) \mid b \in \overline{A}\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kümesinin bir alt sınırı olup $d(x_o, A) \le \inf\{d(x_o, b) \mid b \in \overline{A}\} = d(x_o, \overline{A})$ dir. Dolayısıyla; $d(x_o, A) = d(x_o, \overline{A})$ dir.

Tanım 1.1.41: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun. $\overline{A} = X$ ise; A alt kümesine, (X, d) metrik uzayında yoğun bir alt küme denir.

Tanım 1.1.42: (X, d) bir metrik uzay olsun. X 'in $\overline{A} = X$ olacak şekilde sayılabilir bir $A \subset X$ alt kümesi bulunabilirse; (X, d) metrik uzayına bir ayrılabilir metrik uzay denir.

Tanım 1.1.43: $(X, d), (Y, \rho)$ iki metrik uzay ve $f : (X, d) \to (Y, \rho)$, $\forall x_1, x_2 \in X$ için $\rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ koşulunu sağlayan bir dönüşüm ise; f dönüşümüne; (X, d) metrik uzayından (Y, ρ) metrik uzayına tanımlı bir izometri denir.

Tanımdan görülüyor ki $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ dönüşümü bir izometri ise; f dönüşümü birebir ve düzgün süreklidir.

1.2. Lineer Uzaylar

Tanım 1.2.1: $X \neq \emptyset$ olan bir küme ve $(F,+,\cdot)$ bir cisim olsun. X üzerinde tanımlı

$\oplus : X \times X \to X$, $(x,y) \to x \oplus y$ ikili işlemi ve $(F,+,\cdot)$ cisminin elemanları ile X 'in elemanlarının $\odot : F \times X \to X$, $(\alpha, x) \to \alpha \odot x$ skaler çarpımı aşağıdaki koşulları sağlarsa; X 'e, $(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde bir lineer uzay veya bir $F-$lineer uzay denir.

i. $\forall x, y, z \in X$ için
   - $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$,
   - $\exists \theta \in X \therefore x \oplus \theta_X = x$,
   - $\exists x^* \in X \therefore x \oplus x^* = \theta_X$,
   - $x \oplus y = y \oplus x$ dır.

ii. $\forall x \in X$ için $1_F \odot x = x$ dır. ($1_F, F$ cisminin çarpmaya göre birim elemanıdır.)

iii. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için
   - $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$,
   - $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$,
   - $\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \odot \beta) \odot x$ dır.

X bir $F-$lineer uzay ise; X 'in elemanlarına vektör ve F 'nin elemanlarına skaler adı verilir.

i aksiyomu ile belirli $\theta_X \in X$ 'e X lineer uzayının sıfır elemanı denir. Bir lineer uzayda sıfır elemanın tek olduğu kolayca görülür.

$\forall x \in X$ verildiğinde $x \oplus x^* = x^* \oplus x = \theta_X$ koşulunu sağlayan $x^* \in X$ elemanının tek olduğu kolayca gösterilir ve $-x := x^*$ yazılır, $x^* \in X$ 'e toplama işleminin tersi denir.

$0 \in F, F$ cisminin sıfır elemanı ve $\theta_X \in X$, X lineer uzayının sıfır elemanı ise; $\forall \alpha \in F, \forall x \in X$ için $0 \odot x = \theta_X$ ve $\alpha \odot \theta_X = \theta_X$ olduğu iii aksiyomu ile görülür.

Örnek 1.2.2: $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $(\mathbb{C},+,.)$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $(\mathbb{R},+,.)$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

Örnek 1.2.3: $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ ve $X\neq\varnothing$ olmak üzere; $B([a,b],\mathbb{R})$ ve $C([a,b],\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde birer lineer uzaydır.

Tanım 1.2.4: X bir $F-$ lineer uzay ve $\varnothing\neq Y\subset X$ olsun. Y, F cismi üzerinde bir lineer uzay ise; Y lineer uzayına , X lineer uzayının bir alt lineer uzayı denir.

Teorem 1.2.5: X bir $F-$ lineer uzay ve $\varnothing\neq Y\subset X$ olsun. Y 'nin, X 'in bir alt lineer uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\forall y_1,y_2\in Y$ ve $\forall\alpha,\beta\in F$ için $\alpha y_1+\beta y_2\in Y$ olmasıdır.

Örnek 1.2.6 : $C([a,b],\mathbb{R})$ lineer uzayı, $B([a,b],\mathbb{R})$ lineer uzayının bir alt lineer uzayıdır.

Tanım 1.2.7: $X,(F,+,\cdot)$ cismi üzerinde sıfır elemanı $\theta\in X$ olan bir lineer uzay ve $0\in F$, F cisminin sıfır elemanı olsun. $m\in\mathbb{N}$, $\{x_1,x_2,...,x_m\}\subset X$ ve $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\}\subset F$ olmak üzere;

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_mx_m=\theta \quad (*)$$

denkleminin F 'deki tek çözümü $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=0$ ise; $x_1,x_2,...,x_m\in X$ vektörlerine, F cismi üzerinde lineer bağımsız vektörler denir. Eğer; $(*)$ 'daki denklemin en az bir $i\in\{1,2,...,m\}$ için; $\alpha_i\neq 0$ olan bir $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in F$ çözümü varsa; $x_1,x_2,...,x_m\in X$ vektörlerine, F cismi üzerinde lineer bağımlı vektörler denir.

Teorem 1.2.8: X bir $F-$ lineer uzay ve $\varnothing\neq M\subset X$ bir alt küme olsun. Bu takdirde;

$$\langle M\rangle:=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_mx_m \mid m\in\mathbb{N},\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in F \text{ ve } x_1,x_2,...,x_m\in M\}\subset X$$

alt kümesi, X 'in bir alt lineer uzayıdır.

Tanım 1.2.9: X bir $F-$ lineer uzay ve $\varnothing\neq M\subset X$ bir alt küme olsun.
$\langle M\rangle:=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_mx_m \mid m\in\mathbb{N},\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in F \text{ ve } x_1,x_2,...,x_m\in M\}\subset X$ alt lineer uzayına, $M\subset X$ alt kümesi tarafından üretilen alt lineer uzay denir.

Teorem 1.2.10: X bir $F-$ lineer uzay ve $\{A_i\}_{i\in I} \subset X$ bir alt lineer uzay ailesi olsun.

Bu takdirde; $\bigcap_{i\in I} A_i \subset X$, X 'in bir alt lineer uzayıdır.

İspat: $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ve $\alpha, \beta \in F$ keyfi olsun. O halde; $\forall i \in I$ için $A_i \subset X$ için $x, y \in A_i$ ve $\forall i \in I$ için $A_i \subset X$ birer alt lineer uzay olduğundan $\forall i \in I$ için $\alpha x + \beta y \in A_i$ dir. O halde; $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ dir. O halde; Teorem 1.2.5'e göre; $\bigcap_{i\in I} A_i \subset X$, X 'in bir alt lineer uzayıdır.

Teorem 1.2.11: X bir $F-$ lineer uzay ve $M \subset X$ olsun.

Bu takdirde; $\langle M \rangle = \bigcap_{\substack{A\subset X \text{ alt lineer uzay} \\ M\subset A}} A$ ve $\langle M \rangle \subset X$, M 'yi içeren en küçük alt lineer uzaydır.

Tanım 1.2.12: X bir $F-$ lineer uzay olsun. $\langle M \rangle = X$ olacak şekilde bir $\varnothing \neq M \subset X$ alt kümesi varsa; M alt kümesine, X 'in bir üretici sistemi denir.

Tanım 1.2.13: X bir $F-$ lineer uzay ve $A \subset X$ bir alt küme olsun.

i. $A \subset X$ alt kümesinde alınan her sonlu vektör aralarında lineer bağımsız ise; $A \subset X$ alt kümesine, X 'in bir lineer bağımsız alt kümesi denir.

ii. $A \subset X$ alt kümesinde aralarında lineer bağımlı olan sonlu elemanlı bir takım seçilebilirse; $A \subset X$ alt kümesine, X 'in bir lineer bağımlı alt kümesi denir.

Örnek 1.2.14: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $A := \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ alt kümesi, $C([0,1], \mathbb{R})$ uzayında, lineer bağımsız bir alt kümedir.

Gerçekten; $m \in \mathbb{N}$ için $\{x^{n_1}, x^{n_2}, ..., x^{n_m}\} \subset \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ sonlu bir takım olsun.

Genelliği bozmaksızın $0 \leq n_1 < n_2 < ... < n_m$ olduğunu kabul edelim. $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \subset F$,

$$\alpha_1.x^{n_1} + \alpha_2.x^{n_2} + ... + \alpha_m x^{n_m} = 0 \quad (*)$$

koşulunu sağlayan m tane skaler olsun. $(*)$ 'daki denklemde;

$n_1 = 0$ ise; $(*)$ denklemi $\alpha_1.1 + \alpha_2.x^{n_2} + ... + \alpha_m x^{n_m} = 0$ denklemine dönüşür.

$x = 0$ için $\alpha_1 = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $\alpha_1.1 + \alpha_2.x^{n_2} + ... + \alpha_m x^{n_m} = 0$ denkleminde $\alpha_1 = 0$ alındığında $\forall x \in [0,1]$ için $\alpha_2.x^{n_2} + ... + \alpha_m x^{n_m} = 0$ olur. Şimdi; her iki tarafın n_2. mertebeden türevi alınırsa;

$n_2!\alpha_2 + n_3(n_3 - 1)...(n_3 - n_2 + 1)\alpha_3 x^{n_3 - n_2} + ... + n_m(n_m - 1)...(n_m - n_2 + 1)\alpha_m x^{n_m - n_2} = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte $x = 0$ alınırsa; $\alpha_2 = 0$ olduğu görülür.

$\alpha_1.1 + \alpha_2.x^{n_2} + ... + \alpha_m x^{n_m} = 0$ denkleminde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ alınırsa; $\forall x \in [0,1]$ için $\alpha_3.x^{n_3} + ... + \alpha_m x^{n_m} = 0$ olur. Şimdi; her iki tarafın n_3. mertebeden türevi alınırsa; $\alpha_3 = 0$ olduğu görülür. Benzer işlemler tekrarlandığında $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ dır. Eğer; $1 \leq n_1$ ise; $\alpha_1.x^{n_1} + \alpha_2.x^{n_2} + ... + \alpha_m x^{n_m} = 0$ denkleminin her iki tarafının n_1.mertebeden türevi alınır ve elde edilen denklemde $x = 0$ yazılırsa; $\alpha_1 = 0$ olduğu görülür. $(*)$ denkleminde $\alpha_1 = 0$ yazılır ve elde edilen denklemin n_2.mertebeden türevi alınır ve $x = 0$ yazılırsa $\alpha_2 = 0$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse; $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ olduğu görülür. O halde; $A := \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ alt kümesi, $C([0,1], \mathbb{R})$ uzayında, lineer bağımsız bir alt kümedir.

Tanım 1.2.15: X bir $F-$ lineer uzay ve $\varnothing \neq B \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer; $B \subset X, X$ 'in bir üretici sistemi ve lineer bağımsız bir alt kümesi ise; $B \subset X$ alt kümesine, X lineer uzayının bir tabanı denir.

Tanım 1.2.16: M, N iki küme olsun. Eğer; M 'den N 'ye tanımlı birebir ve örten bir $f : M \to N$ dönüşümü varsa; M kümesi, N kümesi ile eşgüçlüdür denir.

Teorem 1.2.17: X bir $F-$ lineer uzay olsun. Eğer; $\varnothing \neq B_1, B_2 \subset X$; X lineer uzayının birer tabanı ise; B_1 ve B_2 tabanlar eşgüçlüdür.

Sonuç 1.2.18: X bir $F-$ lineer uzay olsun. Eğer; X 'in eleman sayısı $n\in\mathbb{N}$ olan sonlu elemanlı bir tabanı varsa; X 'in tüm tabanları sonlu ve eleman sayısı $n\in\mathbb{N}$ dir.

Tanım 1.2.19: X bir $F-$ lineer uzay olsun. Eğer; X 'in sonlu $n\in\mathbb{N}$ elemanlı bir B tabanı varsa; X 'e sonlu boyutlu bir lineer uzay, $n\in\mathbb{N}$ doğal sayısına ise; X lineer uzayının boyutu denir ve $\text{boy}\, X := n$ ile gösterilir. Eğer; X lineer uzayı sonlu boyutlu değilse; X 'e sonsuz boyutlu bir lineer uzay denir ve $\text{boy}\, X := +\infty$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.20: X bir $F-$ lineer uzay ve $K\subset X$ olsun. $\forall x,y\in K$ ve $\forall t\in[0,1]$ için $tx+(1-t)y\in K$ ise; $K\subset X$ alt kümesine; X 'in bir konveks alt kümesi denir.

Teorem 1.2.21: X bir $F-$ lineer uzay ve $A,B\subset X$ olan iki alt lineer uzay olsun. Bu takdirde; $A+B:=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}\subset X$ alt kümesi, X 'in bir alt lineer uzayı ve $A+B=\langle A\cup B\rangle$ dır. $A+B\subset X$ alt uzayına; $A,B\subset X$ alt lineer uzaylarının toplamı denir.

İspat: $x,y\in A+B$ ve $\alpha,\beta\in F$ keyfi olsun. O halde; $x,y\in A+B$ olduğundan $x=a_1+b_1$ ve $y=a_2+b_2$ olacak şekilde $a_1,a_2\in A$ ve $b_1,b_2\in B$ elemanları mevcuttur.
$\alpha x+\beta y=\alpha(a_1+b_1)+\beta(a_2+b_2)=(\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2)$ dir. O halde; $A,B\subset X$ iki alt lineer uzay olduğundan $(\alpha a_1+\beta a_2)\in A$, $(\alpha b_1+\beta b_2)\in B$ dir. Dolayısı ile; $\alpha x+\beta y\in A+B$ dir. $x,y\in A+B$ ve $\alpha,\beta\in F$ keyfi olduğundan $\forall x,y\in A+B$ ve $\forall\alpha,\beta\in F$ için $\alpha x+\beta y\in A+B$ dir. Yani; $A+B\subset X$ alt kümesi, X 'in bir alt lineer uzayıdır. Son olarak; $A+B=\langle A\cup B\rangle$ olduğunu gösterilirse; ispat tamamlanır. $x\in\langle A\cup B\rangle$ keyfi olsun. O halde;
$\langle A\cup B\rangle=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_mx_m \mid m\in\mathbb{N}, \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\in F \text{ ve } x_1,x_2,...,x_m\in A\cup B\}$
olduğundan $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere; $\exists c_1,c_2,...,c_m\in F$ ve $\exists x_1,x_2,...,x_m\in A\cup B$ $\therefore$
$x=c_1x_1+c_2x_2+...+c_mx_m$ dir. Burada üç hal söz konusudur:

- $x_1,x_2,...,x_m\in A$ ise; $x\in A$ olduğundan $x=x+\theta\in A+B$ dir.

- $x_1, x_2, ..., x_m \in B$ ise; $x \in B$ olduğundan $x = \theta + x \in A + B$ dir.
- $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \not\subset A$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \not\subset B$ olması hali. Bu halde;

$\{x_1, x_2, ..., x_m\} \cap A = \{x_{i_1}, ..., x_{i_l}\}$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \cap B = \{x_{i_{l+1}}, ..., x_{i_m}\}$

ise; $x = (c_{i_1} x_{i_1} + ... + c_{i_l} x_{i_l}) + (c_{i_{l+1}} x_{i_{l+1}} + ... + c_{i_m} x_{i_m}) \in A + B$ dir.

Dolayısı ile; $\forall x \in \langle A \cup B \rangle$ için $x \in A + B$ olduğundan $\langle A \cup B \rangle \subset A + B$ dir. Tersine olarak; $x \in A + B$ keyfi alalım. O halde; $\exists a \in A, b \in B \therefore x = a + b$ dir. $x = a + b \in \langle A \cup B \rangle$ olduğundan $A + B \subset \langle A \cup B \rangle$ dir. Dolayısı ile; $\langle A \cup B \rangle \subset A + B$ ve $A + B \subset \langle A \cup B \rangle$ olduğundan $\langle A \cup B \rangle = A + B$ dir.

Tanım 1.2.22: X bir $F-$ lineer uzay ve $A, B \subset X$ olan iki alt lineer uzay olsun. $A \cap B = \{\theta\}$ ise; $A + B \subset X$ lineer uzayına; A, B lineer uzaylarının direkt toplamı denir ve $A \oplus B$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.23: X bir $F-$ lineer uzay ve $A, B \subset X$ iki alt lineer uzay olsun. $H = A \oplus B$ ise; $\forall x \in H$ için $x = x_A + x_B$ olacak şekilde bir tek $(x_A, x_B) \in A \times B$ çifti vardır.

İspat: $H = A \oplus B$ olduğundan $A \cap B = \{\theta\}$ dır. $x \in H$ keyfi fakat sabit alınsın. $H = A + B$ olduğundan $x = a + b$ olan en az bir $(a, b) \in A \times B$ çifti vardır. $(a^*, b^*) \in A \times B$, $x = a^* + b^*$ olan başka bir çift olsun. $x = a^* + b^*$ ve $x = a + b$ olduğundan $a^* + b^* = a + b$ dolayısıyla $a^* - a = b^* - b$ olur. $a, a^* \in A$; $b, b^* \in B$ ve $A, B \subset X$ iki alt lineer uzay olduğundan $a^* - a \in A$ ve $b^* - b \in B$ dir. O halde; $a^* - a = b^* - b$ olduğundan $a^* - a = b^* - b \in A \cap B = \{\theta\}$ olduğu görülür. Son ifade; $a^* = a$ ve $b^* = b$ olduğunu gösterir. O halde; $\forall x \in H$ için $x = x_A + x_B$ olacak şekilde bir tek $(x_A, x_B) \in A \times B$ çifti vardır.

1.3. Lineer Dönüşümler

Tanım 1.3.1: X,Y aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki lineer uzay ve $T:X\to Y$ bir dönüşüm olsun.

Eğer; $\forall x_1,x_2\in X$ ve $\forall\alpha,\beta\in F$ için $T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha T(x_1)+\beta T(x_2)$ ise; $T:X\to Y$ dönüşümüne, X ’den Y ’ye tanımlı bir lineer dönüşüm denir.

Teorem 1.3.2: X,Y aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki lineer uzay ve $T:X\to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde;

i. $n\in\mathbb{N}$, $x_1,x_2,...,x_n\in X$ ve $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in F$ için $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(x_i)$

dir.

ii. θ_X, X lineer uzayının sıfır elemanı olmak üzere; $T(\theta_X)=\theta_Y$ dir.

iii. $\forall x\in X$ için $T(-x)=-T(x)$ dir.

İspat: $T:X\to Y$ dönüşümü lineer olduğundan $\forall x_1,x_2\in X$ ve $\forall\alpha,\beta\in F$ için

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha T(x_1)+\beta T(x_2) \qquad (*) \quad \text{dır.}$$

i. Tümevarım yoluyla yapılır.

$n=1$ için doğruluğu açık. O halde; n için doğru, yani; $x_1,x_2,...,x_n\in X$ ve $\alpha_1,...,\alpha_n\in F$ için $T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(x_i)$ olsun. $n+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\in X$ ve $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}\in F$ için

$$\begin{aligned}
T\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i\right)&=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\alpha_{n+1}x_{n+1}\right)\\
&=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)+T(\alpha_{n+1}x_{n+1})\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(x_i)+\alpha_{n+1}T(x_{n+1})\\
&=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i T(x_i)
\end{aligned}$$

dır.

ii. $T: X \to Y$ bir lineer dönüşüm olduğundan $(*)$ denkleminde $x_1, x_2 \in X$ ve $\alpha = \beta = 0$ alınırsa; $0.x_1 = 0.x_2 = \theta_X$ ve $0.T(x_1) = 0.T(x_2) = \theta_Y$ olduğundan $T(\theta_X) = \theta_Y$ dir.

iii. $(*)$ denkleminde $\alpha = \beta = 1, x_1 = x, x_2 = -x$ alınırsa;
$1.x + 1.(-x) = x + (-x) = \theta_X$, $1.T(x) + 1.T(-x) = T(x) + T(-x)$ ve $T(\theta_X) = \theta_Y$ olduğundan $T(x) + T(-x) = \theta_Y$ olduğu görülür. Her iki tarafa $-T(x) \in Y$ ilave edilir ve toplama işleminin geçişli bir işlem olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
-T(x) + \left(T(x) + T(-x)\right) &= -T(x) + \theta_Y \\
\left(-T(x) + T(x)\right) + T(-x) &= -T(x) \\
\theta_Y + T(-x) &= -T(x) \\
T(-x) &= -T(x)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 1.3.3: X, Y aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki lineer uzay ve $T, S : X \to Y$ iki lineer dönüşüm olsun. $L(X,Y) := \{T \mid T : X \to Y \text{ bir lineer dönüşüm}\}$ kümesi üzerinde iki lineer operatörün toplamı ve bir lineer operatörün bir skalerle çarpımı
$\forall T, S \in L(X,Y)$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$(T+S)(x) := T(x) + S(x) \quad \text{ve}$$

$$(\alpha T)(x) := \alpha T(x)$$

şeklinde tanımlanırsa; $L(X,Y)$ kümesi, F cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

İspat: $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $(T+S)(\alpha x_1 + \beta x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2) + S(\alpha x_1 + \beta x_2)$ dır.
$T, S \in L(X,Y)$ olduğundan $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$\begin{aligned}
(T+S)(\alpha x_1 + \beta x_2) &= T(\alpha x_1 + \beta x_2) + S(\alpha x_1 + \beta x_2) \\
&= \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) + \alpha S(x_1) + \beta S(x_2) \\
&= \alpha (T+S)(x_1) + \beta (T+S)(x_2)
\end{aligned}$$

dır. Dolayısı ile $T+S \in L(X,Y)$ dir. Diğer taraftan; $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda \in F$ için $(\lambda T)(\alpha x_1+\beta x_2)=\lambda T(\alpha x_1+\beta x_2)$ dir. Ve $T \in L(X,Y)$ olduğundan

$$\begin{aligned}(\lambda T)(\alpha x_1+\beta x_2) &= \lambda T(\alpha x_1+\beta x_2)\\ &= \lambda(\alpha T(x_1)+\beta T(x_2))\\ &= \lambda(\alpha T(x_1))+\lambda(\beta T(x_2))\\ &= \alpha(\lambda T(x_1))+\beta(\lambda T(x_2))\\ &= \alpha(\lambda T)(x_1)+\beta(\lambda T)(x_2)\end{aligned}$$

dır. Dolayısı ile $\alpha T \in L(X,Y)$ dir. Toplama işlemine ve F 'nin elemanları ile elemanlarının skaler çarpımına göre kapalı olan $L(X,Y)$ kümesinin, F üzerinde bir lineer uzay olması için gerekli aksiyomları sağladığı kolayca görülür.

Bu lineer uzayın sıfır elemanı, $O: X \to Y, \forall x \in X$ için $O(x) := \theta_Y$ şeklinde tanımlanan lineer dönüşümdür.

Tanım 1.3.4: X, Y aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki lineer uzay ve $T: X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun.

i. $\{x \in X \mid T(x)=\theta_Y\} \subset X$ alt kümesine, T lineer dönüşümünün çekirdeği denir ve $\text{Çek}T=\{x \in X \mid T(x)=\theta_Y\} \subset X$ ile gösterilir.

ii. $\{T(x) \mid x \in X\} \subset Y$ alt kümesine, T lineer dönüşümünün görüntü kümesi denir ve $\text{Res}T=\{T(x) \mid x \in X\} \subset Y$ ile gösterilir.

Teorem 1.3.5: X, Y aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki lineer uzay ve $T \in L(X,Y)$ olsun. Bu takdirde;

i. $\text{Çek}T \subset X$ alt kümesi, X lineer uzayının bir alt lineer uzayıdır.

ii. $\text{Res}T \subset Y$ alt kümesi, Y lineer uzayının bir alt lineer uzayıdır.

İspat:

i. $T \in L(X,Y)$ olduğundan $\forall x_1, x_2 \in \text{Çek}T$ ve $\forall \alpha, \beta \in F$ için

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha T(x_1)+\beta T(x_2)$$

$$T\left(\alpha x_1+\beta x_2\right)=\alpha.\theta_Y+\beta.\theta_Y=\theta_Y$$

$$T\left(\alpha x_1+\beta x_2\right)=\theta_Y$$

dır. Dolayısıyla, $\alpha x_1+\beta x_2\in ÇekT$ olduğundan $ÇekT\subset X$ alt kümesi X 'in bir alt lineer uzayıdır.

ii. $y_1,y_2\in \operatorname{Res}T$ ve $\alpha,\beta\in F$ keyfi olsun. $y_1,y_2\in \operatorname{Res}T$ olduğundan $\exists x_1,x_2\in X\therefore y_1=T(x_1),y_2=T\left(x_2\right)$ dır. O halde; $y_1,y_2\in \operatorname{Res}T$ ve $\alpha,\beta\in F$ için $\alpha y_1+\beta y_2=\alpha T\left(x_1\right)+\beta T\left(x_2\right)$ dir. Ve $T\in L(X,Y)$ olduğundan $y_1,y_2\in \operatorname{Res}T$ ve $\alpha,\beta\in F$ için $\alpha T\left(x_1\right)+\beta T\left(x_2\right)=T\left(\alpha x_1+\beta x_2\right)$ dir.

Buradan; $y_1,y_2\in \operatorname{Res}T$ ve $\alpha,\beta\in F$ için $\alpha y_1+\beta y_2=T\left(\alpha x_1+\beta x_2\right)$ olması $\alpha x_1+\beta x_2\in X$ için $\alpha y_1+\beta y_2\in Y$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla; $\forall y_1,y_2\in \operatorname{Res}T$ ve $\forall\alpha,\beta\in F$ için $\alpha y_1+\beta y_2\in Y$ olduğundan $\operatorname{Res}T\subset Y$ kümesi, Y lineer uzayının bir alt lineer uzayıdır.

1.4. Normlu Lineer Uzaylar

Bu kısımda, $\left(F,+,\cdot\right)$ cismi olarak $\left(\mathbb{R},+,\cdot\right)$ reel sayılar cismi veya $\left(\mathbb{C},+,\cdot\right)$ kompleks sayılar cismi göz önüne alınacaktır.

Teorem 1.4.1 (*Hölder Eşitsizliği*):

$n\in\mathbb{N}$, $a_1,a_2,...,a_n\in F$ ve $b_1,b_2,...,b_n\in F$ olsun. $p,q\in\mathbb{R}^+$ ve $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ise;

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|.|b_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ dır.

Teorem 1.4.2 (*Minkowski Eşitsizliği*):

$p\in\mathbb{R}^+, p\ge 1$ olan bir sayı ve $n\in\mathbb{N}$ için $a_1,a_2,...,a_n\in F$, $b_1,b_2,...,b_n\in F$ ise;

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ dır.

Teorem 1.4.3 (*Sürekli Fonksiyonlar İçin Hölder Eşitsizliği*): $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ olan iki reel sayı , $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon ve $p,q\in\mathbb{R}^+$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ koşulunu sağlayan iki sayı ise;

$$\int_a^b |f(x)|.|g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{dır.}$$

Teorem 1.4.4 (*Sürekli Fonksiyonlar İçin Minkowski Eşitsizliği*): $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ olan iki reel sayı , $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon ve $p\in\mathbb{R}^+, p\ge 1$ olan bir sayı ise;

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{dır.}$$

Tanım 1.4.5: X bir $F-$lineer uzay olsun. $\|\ \|: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon ise; $\|\ \|: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna, X üzerinde tanımlı bir norm ve $(X,\|\ \|)$ ikilisine de bir normlu $F-$ lineer uzay denir.

i. $\forall x\in X$ için $\|x\|\ge 0$,

ii. $x\in X$ için $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$,

iii. $\forall x\in X$ ve $\forall \alpha\in F$ için $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$,

iv. $\forall x,y\in X$ için $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ dır.

$F\equiv\mathbb{R}$ ise; $(X,\|\ \|)$normlu$F-$ lineer uzayına bir reel lineer uzay; $F\equiv\mathbb{C}$ ise; $(X,\|\ \|)$ normlu $F-$lineer uzayına bir kompleks lineer uzay denir.

Örnek 1.4.6: $X\neq\varnothing$ olan bir küme ve

$B(X,F):=\{f \mid f:X\to F \text{ ve} \exists M_f>0 \therefore |f(x)|\le M_f\}$ olsun.

i. $f,g\in B(X,F)$ ve $\alpha\in F$ için

- $f=g$ dir. $\Leftrightarrow \forall x\in X$ için $f(x)=g(x)$

- $\forall x \in X$ için $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $\forall x \in X$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$

şeklinde tanımlanırsa; $f+g, \alpha f \in B(X,F)$ ve $B(X,F)$, F üzerinde bir lineer uzaydır.

ii. $\| \ \|_\infty : B(X,F) \to \mathbb{R}, \forall f \in B(X,F)$ için $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ olarak tanımlanan bir fonksiyon ise; $\| \ \|_\infty : B(X,F) \to F$ fonksiyonu, $B(X,F)$ üzerinde bir normdur. Gerçekten;

i. $\forall f, g \in B(X,F)$ olduğundan $\exists M_f, M_g > 0 \therefore |f(x)| \le M_f$, $|g(x)| \le M_g$ dir. $\forall x \in X$ için $|(f+g)(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M_f + M_g$ olduğundan $f+g$ fonksiyonu, X üzerinde sınırlıdır. Öte yandan; $\forall \alpha \in F$ ve $\forall x \in X$ için $|(\alpha f)(x)| = |\alpha||f(x)| \le |\alpha| M_f$ olduğundan αf fonksiyonu X üzerinde sınırlıdır. Dolayısıyla; $\forall f, g \in B(X,F)$ ve $\forall \alpha \in F$ için $f+g, \alpha f \in B(X,F)$ dır. Fonksiyonlar arasındaki toplama işlemi birleşme ve değişme özellikli bir işlem olduğundan $B(X,F)$ 'nin F üzerinde bir lineer uzay olması için gerekli aksiyomların sağlandığı kolayca görülür.

ii. $\| \ \|_\infty : B(X,F) \to \mathbb{R}, \forall f \in B(X,F)$ için $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ olarak tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere; $\| \ \|_\infty : B(X,F) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $B(X,F)$ üzerinde bir norm olduğunu gösterelim.

- $\forall f \in B(X,F)$ ve $\forall x \in X$ için $0 \le |f(x)| \le \|f\|_\infty$ olduğundan $\forall f \in B(X,F)$ için $\|f\|_\infty \ge 0$ dır.
- $f \in B(X,F)$ için $\|f\|_\infty = 0$ olsun. $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ olduğundan $\forall x \in X$ için $0 \le |f(x)| \le \|f\|_\infty = 0$ dır. O halde; $\forall x \in X$ için $|f(x)| = 0$ olduğundan $f = \mathrm{O}$ dır. Tersine olarak; $\forall x \in X$ için $f = \mathrm{O}$ olsun. O halde; $\forall x \in X$ için $|\mathrm{O}(x)| = 0$ olduğundan $\sup\{|f(x)| \mid x \in X\} = \sup\{\mathrm{O}(x) \mid x \in X\} = \sup\{0 \mid x \in X\} = 0$ ve dolayısıyla $\|\mathrm{O}\|_\infty = 0$ dır.
- $\forall f \in B(X,F), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in X$ için

$$\|\alpha f\|_{\infty} = \sup\left\{\|(\alpha f)(x)\| \; x \in X\right\} = \sup\left\{\|\alpha f(x)\| \; x \in X\right\}$$
$$= \sup\left\{|\alpha|\|f(x)\| \; x \in X\right\}$$
$$= |\alpha| \sup\left\{\|f(x)\| \; x \in X\right\}$$
$$= |\alpha| \|f\|_{\infty}$$

dır.

- $\forall f, g \in B(X,F)$ ve $\forall x \in X$ için $0 \leq |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ dır.

O halde; $\forall x \in X$ için $\|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \geq 0$ sayısı, $\sup\left\{\|(f+g)(x)\| \; x \in X\right\}$ kümesinin bir üst sınırı olup

$$\sup\left\{\|(f+g)(x)\| \; x \in X\right\} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

dır. O halde; $\forall f, g \in B(X,F)$ için $\|f+g\|_{\infty} = \sup\left\{\|(f+g)(x)\| \; x \in X\right\}$ olduğundan $\|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ dir.

Teorem 1.4.7: $(X, \| \;\|)$ normlu bir $F-$ lineer uzay olsun. Bu takdirde;

$$\forall x, y \in X \text{ için } \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \text{ dır.}$$

İspat: $\forall x, y \in X$ için

$$\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad \text{ve}$$
$$\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

dir.

Öte yandan; $\|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\|$ olduğundan $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|x - y\| + \|x\| \Rightarrow -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$ dır. Dolayısıyla; $\forall x, y \in X$ için $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ dir.

Teorem 1.4.8: $(X, \| \;\|)$ normlu bir $F-$lineer uzay olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$\forall x, y \in X$ için $d_{\|\ \|} := \|x-y\|$ olarak tanımlanırsa; $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe; X üzerindeki $\|\ \|$ normu tarafından üretilen metrik denir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Örneğin;
$X \neq \varnothing$, en az iki elemanlı olan bir $F-$ lineer uzay ve a, X üzerinde tanımlı ayrık metrik olsun. a metriği, X üzerinde tanımlı bir norm tarafından üretilemez. Farz edelim ki X üzerinde tanımlı ve ürettiği $d_{\|\ \|}$ metriği $d_{\|\ \|} = a$ olan bir $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ normu mevcut olsun.

O halde; $\forall x, y \in X$ için $a(x,y) = d_{\|\ \|}(x,y) = \|x-y\|$ dir. X en az iki elemanlı olan bir $F-$ lineer uzay olduğundan $x_o \neq y_o$ olan $x_o, y_o \in X$ noktaları mevcuttur. $\alpha \in F$ sayısı $|\alpha| \neq 1$ olacak şekilde seçilirse; $\alpha x_o \neq \alpha y_o$ dır. O halde; buradan

$$1 = a(\alpha x_o, \alpha y_o) = d_{\|\ \|}(\alpha x_o, \alpha y_o) = \|\alpha x_o - \alpha y_o\| = |\alpha| \|x_o - y_o\| = |\alpha| d_{\|\ \|}(x_o, y_o) = |\alpha| a(x_o, y_o) = |\alpha|$$

elde edilir ki; bu $|\alpha| \neq 1$ olması ile çelişir.

O halde; a ayrık metriği X üzerinde tanımlı hiç bir norm tarafından üretilemez.

Teorem 1.4.9: $X \neq \varnothing$ bir $F-$ lineer uzay ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, X üzerinde tanımlı bir metrik olsun. d 'nin X üzerinde tanımlı bir tek norm tarafından üretilmesi için gerek ve yeter koşul $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ ve $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ koşullarını sağlayan bir metrik olmasıdır.

İspat:

I. d metriği, $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ ve $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ koşullarını sağlayan bir metrik ise; X üzerinde tanımlı bir $d = d_{\|\ \|}$ olacak şekilde bir tek $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ normu vardır.

$\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x \in X$ için $\|x\| := d(x, \theta)$ değerini alan fonksiyon olsun. $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$, X üzerinde bir norm ve $d = d_{\|\ \|}$ dır. Gerçekten;

i. $\forall x \in X$ için $d(x,\theta) \geq 0$ olduğundan $\|x\| = d(x,\theta) \geq 0$ dır.

ii. d, X üzerinde bir metrik olduğundan $x \in X$ için $\|x\| = d(x,\theta) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dır.

iii. $\forall \alpha \in F$ ve $\forall x \in X$ için $\|\alpha x\| = d(\alpha x, \theta) = d(\alpha x, \alpha\theta) = |\alpha| d(x,\theta) = |\alpha| \|x\|$ dır.

iv. $\forall x, y \in X$ için $x+y, y, \theta \in X$ ve ve d , X üzerinde $d(x+y, \theta+y) = d(x,\theta)$ koşulunu sağlayan bir metrik olduğundan

$$\|x+y\| = d(x+y,\theta) \leq d(x+y,y) + d(y,\theta) = d(x,\theta) + d(y,\theta)$$

dır. Dolayısıyla; $\forall x, y \in X$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir. Böylece; d 'nin en az bir metrik tarafından üretildiği gösterildi. $\| \;\|, \| \;\|_* : X \to \mathbb{R}$; d metriğini üreten gibi iki norm olsun. $\forall x \in X$ için $\|x\| = \|x\|_*$ olduğu gösterilirse; d 'nin bir tek norm tarafından üretildiği gösterilmiş olur. $\| \;\|, \| \;\|_*$ normlarının her ikisi d metriğini üreten normlar olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = \|x-y\|$ ve $d(x,y) = \|x-y\|_*$ dir. O halde; $\|x-y\| = \|x-y\|_*$ dır. $y := \theta$ alınırsa; $\forall x \in X$ için $\|x\| = \|x\|_*$ olduğundan ispat tamamlanır.

II. d , X üzerinde tanımlı bir norm tarafından üretilirse; d metriği $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ ve $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ koşullarını sağlar.

Gerçekten; $\| \;\| : X \to \mathbb{R}$ normu, d metriğini üreten norm olsun. O halde; $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x-y\| = |\alpha| d(x,y)$$

ve

$$d(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y),$$

yani; $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ ve $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ şartlarının sağlandığı görülür.

Tanım 1.4.10: $(X, \| \;\|)$ normlu $F-$ lineer uzayı, normun ürettiği metriğe göre bir tam metrik uzay ise; $(X, \| \;\|)$ normlu $F-$lineer uzayına, bir Banach uzayı denir.

Teorem 1.4.11:

$p \geq 1$ için $l_p(F) := \left\{ x := (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \,\middle|\, \{x_n\} \subset F \text{ bir dizi ve } \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty \right\}$

kümesi üzerinde $x=(x_1,x_2,...,x_k,...), y=(y_1,y_2,...,y_k,...)\in l_p(F)$ ve $\alpha\in F$ için $x=y$ olması, $x+y$ toplamı ve αx skaler çarpımı;

- $x=y$ dir. $\Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}$ için $x_k=y_k$ ise;
- $x+y:=(x_1+y_1,...,x_k+y_k,...)$,
- $\alpha x:=(\alpha x_1,...,\alpha x_k,...)$,

şeklinde tanımlanırsa; $x+y,\alpha x\in l_p(F)$ olup $l_p(F), F$ üzerinde bir lineer uzaydır.

İspat: $x=(x_1,x_2,...,x_k,...), y=(y_1,y_2,...,y_k,...)\in l_p(F)$ olduğundan

$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p<+\infty$ ve $\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|^p<+\infty$ dır. O halde; $|\alpha|^p\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p=\sum_{k=1}^{+\infty}|\alpha|^p|x_k|^p=\sum_{k=1}^{+\infty}|\alpha x_k|^p<+\infty$

olduğundan $\alpha x\in l_p(F)$ dir.

Öte yandan; $S_n:=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p, T_n:=\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p$ ve $R_n:=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p$ sırasıyla $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p$, $\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|^p$ ve $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k+y_k|^p$ serilerinin n.kısmi toplamları olsun. $x,y\in l_p(F)$ olduğundan $\{S_n\},\{T_n\}$ dizileri yakınsaktır. O halde; negatif terimli olmayan $\{S_n\}$ ve $\{T_n\}$ dizileri, monoton artan ve üstten sınırlı dizilerdir. Benzer şekilde; $\{R_n\}$ dizisi negatif terimli olmayan, monoton artan bir dizi olup Teorem 1.4.2 göz önüne alındığında;

$$0\le(R_n)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=(S_n)^{\frac{1}{p}}+(T_n)^{\frac{1}{p}}$$

dir. O halde; $\left\{(R_n)^{\frac{1}{p}}\right\}$ dizisi üstten sınırlıdır. Bu nedenle; $\{R_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır.

Dolayısıyla; $\{R_n\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan yakınsaktır. $\{R_n\}$ dizisinin yakınsak olması $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k+y_k|^p$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir.

O halde; $\forall x,y\in l_p(F)$ için $x+y\in l_p(F)$ dir. $l_p(F)$ kümesinin toplama işlemine ve F 'nin elemanları ile elemanlarının skaler çarpımına göre kapalı olan $l_p(F)$ kümesinin F

üzerinde lineer uzay olması için gerekli aksiyomları sağladığı kolayca görülür.

Teorem 1.4.12: $l_p(F)$, $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ için $\| \ \|_p : l_p(F) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p(F)$ için $\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ olarak tanımlanırsa; $\| \ \|_p$ fonksiyonu $l_p(F)$, $F-$lineer uzayı üzerinde bir norm ve $\left(l_p(F), \| \ \|_p\right)$ normlu $F-$ lineer uzayı bir $F-$Banach uzayıdır.

İspat: $\| \ \|_p : l_p(F) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $l_p(F)$, $F-$lineer uzayı üzerinde bir normdur.

i. $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p(F)$ için $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_k|^p \geq 0$ olduğundan $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \geq 0$ dır. Dolayısıyla, $\forall x \in l_p(F)$ için $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ dır.

ii. $l_p(F)$'nin sıfır elemanı $\theta = (0, 0, ..., 0, ...)$ olduğundan $\|\theta\|_p = 0$ dır. Tersine olarak; $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p(F)$ için $\|x\|_p = 0$ ise; $x = \theta$ dır. Gerçekten; $\|x\|_p = 0$ olduğundan $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$, $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p = 0$ dır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_k|^p \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p = 0$ olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_k|^p = 0$ dır. O halde; $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ olup $x = \theta$ olur.

iii. $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \in l_p(F)$, $\forall \alpha \in F$ için $\alpha x := (\alpha x_1, ..., \alpha x_k, ...) \in l_p(F)$, $|\alpha|^p \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha x_k|^p < +\infty$ olduğundan $\left(|\alpha|^p \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ yani; $|\alpha| \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ dir. Son eşitlik, $\forall x \in l_p(F)$ için $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p$ olduğunu gösterir.

iv. $\forall x, y \in l_p(F)$ için $x + y \in l_p(F)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için Teorem 1.4.2'e göre;

$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k+y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ olduğundan eşitsizliğin sağ ve solunda bulunan dizilerin yakınsak olduğu göz önüne alındığında; $n \to +\infty$ için yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa;

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k+y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|y_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

olduğu görülür. O halde; $\| \ \|_p : l_p(F) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $l_p(F)$ üzerinde bir normdur.

Son olarak; $\left(l_p(F), \| \ \|_p\right)$ normlu $F-$ lineer uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. $\left\{x^{(n)}\right\} \subset l_p(F)$, $\left(l_p(F), \| \ \|_p\right)$ normlu $F-$ lineer uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)} := \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...\right) \in l_p(F)$ olmak üzere; $\mathcal{E} > 0$ verildiğinde $\frac{\mathcal{E}}{2} > 0$ sayısına karşılık $\exists N\left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right) \equiv N \in \mathbb{N} \therefore \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N$ için $\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_p < \frac{\mathcal{E}}{2}$ dır.Buradan; $\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N$ için

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\mathcal{E}}{2}$$

dir. O halde; $\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N$ için

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|^p < \left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right)^p \qquad (*)$$

dir.

(*) ifadesi $k \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit alındığında $\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N$ için $\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| < \frac{\mathcal{E}}{2} < \mathcal{E}$ dır. O halde; $\left\{x_k^{(n)}\right\} \subset F$ dizilerinin her biri birer Cauchy dizisi, dolayısı ile yakınsaktır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k := \lim_{n\to+\infty} x_k^{(n)}$ ve $x := \left(x_1, x_2, ..., x_k, ...\right) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ olsun.

$l \in N$ keyfi fakat sabit alınan bir sayı olsun. O halde; $\forall n,m \in \mathbb{N}, n,m \geq N$ için

$\sum_{k=1}^{l} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right|^p$ dizisi, $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right|^p$ serisinin l. kısmi toplamı olsun. O halde; $(*)$'dan

$\forall n,m \in \mathbb{N}, n,m \geq N$ için $\sum_{k=1}^{l} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p$ olur. O halde; $m \to +\infty$ için limit

alınırsa; $\sum_{k=1}^{l} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p$ dır.

Bu eşitsizlik, $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $n \geq N$ olacak şekilde keyfi fakat sabit alındığında

$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p$ serisinin $l \in \mathbb{N}$ için l.kısmi toplamı olan $S_l := \sum_{k=1}^{l} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p$ kısmi toplamının

üstten sınırlı olduğunu gösterir. $\{S_l\}$ dizisi monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan S_l

dizisi yakınsaktır. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ için $\sum_{k=1}^{+\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p$ serisi yakınsak ve

$\lim_{l \to +\infty} S_l = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p$ dır.

O halde; özel olarak $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $l \to +\infty$ limit alınırsa; $\sum_{k=1}^{l} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p$

eşitsizliğinden $\sum_{i=1}^{+\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k \right|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p$ dır. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $\left\| x^{(n)} - x \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

elde edilir. Bu bize; $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için $\left(x^{(n)} - x \right) \in l_p(F)$ olduğunu ve $x^{(n)} \in l_p(F)$

olduğundan $x = x^{(n)} - \left(x^{(n)} - x \right) \in l_p(F)$ olduğunu gösterir. Ayrıca; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ için

$\left\| x^{(n)} - x \right\|_p < \varepsilon$ olması $\left\{ x^{(n)} \right\} \subset l_p(F)$ Cauchy dizisinin yakınsak ve $\lim_{n \to +\infty} x^{(n)} \overset{\| \|_p}{=} x$ olduğunu

gösterir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Uyarı 1.4.13: Her normlu lineer uzay bir Banach uzayı değildir.

Örneğin; $\| \|_1 : C([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ için

$\| f\|_1 := \int_{-1}^{1} | f(t)| dt$ şeklinde tanımlanırsa; $\| \ \|_1$ fonksiyonu, $C([-1,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı üzerinde bir normdur. Fakat; $\left(C([-1,1],\mathbb{R}),\| \ \|_1\right)$ normlu lineer uzayı bir Banach uzayı değildir. Gerçekten;

Eğer; $\left(C([-1,1],\mathbb{R}),\| \ \|_1\right)$ normlu lineer uzayı bir Banach uzayı olsaydı; bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak olurdu. $\{ f_n\} \subset C([-1,1],\mathbb{R})$ dizisi $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $\forall x\in[-1,1]$ için

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & ,-1\le x\le 0 \\ nx & ,0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ 1 & ,\dfrac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa; $\{ f_n\}$ dizisi $C([-1,1],\mathbb{R})$ bir Cauchy dizisidir fakat; yakınsak değildir. Gerçekten; $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_n \in C([-1,1],\mathbb{R})$ olduğundan $\{ f_n\} \subset C([-1,1],\mathbb{R})$ dir. Genelliği bozmaksızın $m,n\in\mathbb{N}$ için $n<m$ olsun. O halde; $\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\| f_m - f_n\|_1 &= \int_{-1}^{1} | f_m(x) - f_n(x)| dx = \int_{-1}^{0} | f_m(x) - f_n(x)| dx + \int_{0}^{\frac{1}{m}} | f_m(x) - f_n(x)| dx \\ &\quad + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} | f_m(x) - f_n(x)| dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} | f_m(x) - f_n(x)| dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\| f_m - f_n\|_1 &= \int_{-1}^{0} |0-0| dx + \int_{0}^{\frac{1}{m}} |mx-nx| dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |1-nx| dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} |1-1| dx \\ &= \frac{(m-n)}{2m^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)\right) < \frac{1}{n}\end{aligned}$$

dir. O halde; $\forall \mathcal{E}>0$ sayısına, $N(\mathcal{E}) := EKE\left\{ l \,\middle|\, l\in\mathbb{N} \text{ ve } \dfrac{1}{l}<\mathcal{E}\right\}$ sayısı karşılık getirilirse; $\forall m,n\in\mathbb{N}, m>n\ge N(\mathcal{E})$ için $\| f_m - f_n\|_1 < \mathcal{E}$ olur. Dolayısıyla; $\{ f_n\} \subset C([-1,1],\mathbb{R})$ dizisi

$\left(C([-1,1],\mathbb{R}),\|\ \|_1\right)$ normlu lineer uzayında bir Cauchy dizisidir.

Farz edelim ki $\{f_n\}\subset C([-1,1],\mathbb{R})$ dizisi, $\left(C([-1,1],\mathbb{R}),\|\ \|_1\right)$ normlu lineer uzayında yakınsak ve $f\in C([-1,1],\mathbb{R})$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n \overset{\|\ \|_1}{=} f$ olsun. O halde; $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\therefore\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(\varepsilon)$ için $\|f_n-f\|_1<\varepsilon$ dır. $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(\varepsilon)$ için

$$\|f_n-f\|_1=\int_{-1}^{0}|f_n(x)-f(x)|dx+\int_{0}^{1}|f_n(x)-f(x)|dx<\varepsilon \quad (*) \text{ dir.}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in[-1,0]$ için $f_n(x)=0$ olduğundan (*) eşitsizliğinden $\forall\varepsilon>0$ için

$0\leq\int_{-1}^{0}|f_n(x)-f(x)|dx=\int_{-1}^{0}|f(x)|dx<\varepsilon$ elde edilir. $f\in C([-1,1],\mathbb{R})$ ve $\forall\varepsilon>0$ için

$0\leq\int_{-1}^{0}|f(x)|dx<\varepsilon$ olduğunda $\forall x\in[-1,0]$ için $f(x)=0$ olduğu görülür. O halde; $f(0)=0$ dır.

$\alpha\in(0,1]$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. O halde; $\frac{1}{n}<\alpha, n\geq N(\varepsilon)$ olan bir $n\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır ve $(\alpha,1]\subset[\alpha,1]\subset\left[\frac{1}{n},1\right]$ ve $\forall x\in\left[\frac{1}{n},1\right]$ için $f_n(x)=1$ olduğundan

$0\leq\int_{\alpha}^{1}|f_n(x)-f(x)|dx\leq\int_{\frac{1}{n}}^{1}|f_n(x)-f(x)|dx\leq\int_{0}^{1}|f_n(x)-f(x)|dx$ olduğundan (*)

eşitsizliğinden $n\in\mathbb{N}$ sayısı, $\frac{1}{n}<\alpha, n\geq N(\varepsilon)$ olarak alınırsa;

$\forall\varepsilon>0$ için $0\leq\int_{\alpha}^{1}|1-f(x)|dx<\varepsilon$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\int_{\alpha}^{1}|1-f(x)|dx=0$ olup $\forall x\in[\alpha,1]$ için $f(x)=1$ dır. O halde; $f(\alpha)=1$ dır. Diğer taraftan; $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} f(\alpha)=f(0)=1$ dir. Bu ise;

$f(0)=0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla; $\{f_n\}\subset C([-1,1],\mathbb{R})$ dizisi, $\left(C([-1,1],\mathbb{R}),\|\ \|_1\right)$ normlu lineer uzayında yakınsak değildir. O halde; $\left(C([-1,1],\mathbb{R}),\|\ \|_1\right)$ normlu lineer uzayı bir Banach uzayı değildir.

Teorem 1.4.14: $\left(X,\|\ \|\right)$ normlu bir lineer uzay, $x_o \in X, \alpha \in F$ ve $\{\alpha_n\} \subset F$, $\{x_n\} \subset X$ iki dizi olsun. Bu takdirde; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{\|\ \|}{=} x_o$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \overset{F}{=} \alpha$ ise; $\{\alpha_n x_n\} \subset X$ dizisi, $\left(X,\|\ \|\right)$ normlu lineer uzayında yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n x_n \overset{\|\ \|}{=} \alpha x_o$ dır.

1.5. Normlu Lineer Uzaylarda Yakınsak Seriler ve Sıralı Olmayan Damga Kümeli Yakınsak Seriler

Tanım 1.5.1.[8]: $(X,\|\ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay ve $\{x_k\} \subset X$ bir dizi olsun. $S_1 := x_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ için $S_n := S_{n-1} + x_n$ şeklinde tanımlanan $\{S_n\} \subset X$ dizisine; $(X,\|\ \|)$ normlu $F-$lineer uzayında genel terimi $x_k \in X$ olan bir sonsuz seri denir ve $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.2.[8]: $(X,\|\ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay ve $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k$ bu uzayda verilen bir seri olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \in X$ elemanına, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k$ serisinin $n.$ kısmi toplamı denir.

Eğer; $\{S_n\}$ dizisi bu uzayda $x \in H$ noktasına yakınsak yani; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n \overset{\|\ \|}{=} x$ ise; $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k$ serisine yakınsak ve toplamı x 'dir denir ve bu durum $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k = x$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.3.[8]: $(X,\|\ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay, $I \neq \emptyset$ bir damga kümesi ve $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ olsun. $\forall \emptyset \neq J \subset I$ sonlu alt kümesi için $\sum\limits_{j\in J} x_j \in X$ elemanlarından oluşan $\left\{ \sum\limits_{j\in J} x_j \,\middle|\, \emptyset \neq J \subset I \text{ ve } J \text{ sonlu} \right\} \subset X$ alt kümesine; $i \in I$ için $i.$ genel terimi $x_i \in X$ olan I damgalı bir seri denir ve $\sum\limits_{i\in I} x_i \subset X$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.4.[8]: $(X,\|\ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay, $I \neq \emptyset$ bir damga kümesi ve $\sum\limits_{i\in I} x_i$ bu uzayda verilen bir seri olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık sonlu bir $\emptyset \neq J_\varepsilon \subset I$ alt kümesi bulunabilir öyleki $J_{\mathcal{E}} \subset J$ olan her sonlu $J \subset I$ alt kümesi için $\left\| x - \sum_{j \in J} x_j \right\| < \mathcal{E}$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa, $\sum_{i \in I} x_i$ serisine yakınsak ve $x \in X$ 'e $\sum_{i \in I} x_i$ serisinin bir toplamı denir.

Teorem 1.5.5: $(X, \| \ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay, $I \neq \emptyset$ bir damga kümesi ve $\sum_{i \in I} x_i$ bu uzayda verilen bir seri olsun. $\sum_{i \in I} x_i$ serisi bu normlu lineer uzayda yakınsak ise; $\sum_{i \in I} x_i$ serisinin toplamı tektir.

İspat: $x, y \in X$ **,** $\sum_{i \in I} x_i$ serisinin yakınsak olduğu iki nokta ve $\mathcal{E} > 0$ keyfi alınan bir pozitif sayı olsun. $x \in X$ noktası, $\sum_{i \in I} x_i$ serisinin toplamı olduğundan $\frac{\mathcal{E}}{2} > 0$ için $\exists \emptyset \neq J_{\mathcal{E}}^* \subset I$ sonlu

$\therefore \forall J_{\mathcal{E}}^* \subset J \subset I$ sonlu J alt kümesi için $\left\| x - \sum_{j \in J} x_j \right\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ (*)

dir. Benzer şekilde; $y \in X$ noktası, $\sum_{i \in I} x_i$ serisinin toplamı olduğundan $\frac{\mathcal{E}}{2} > 0$ için

$\exists \emptyset \neq J_{\mathcal{E}}^{**} \subset I$ sonlu $\therefore \forall J_{\mathcal{E}}^{**} \subset J \subset I$ sonlu J alt kümesi için $\left\| y - \sum_{j \in J} x_j \right\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ (**)

dir. $J_{\mathcal{E}} := J_{\mathcal{E}}^* \cup J_{\mathcal{E}}^{**}$ alınırsa; (*) ve (**) 'dan

$$0 \leq \| x - y \| = \left\| x - \sum_{j \in J} x_j + \sum_{j \in J} x_j - y \right\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$$

$$0 \leq \| x - y \| \leq \left\| x - \sum_{j \in J} x_j \right\| + \left\| \sum_{j \in J} x_j - y \right\|$$

$$0 \leq \| x - y \| < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$$

olduğu görülür. $\forall \mathcal{E} > 0$ için $0 \leq \| x - y \| < \mathcal{E}$ olduğundan $\| x - y \| = 0$ dolayısıyla; $x = y$ dir.

Notasyon: $(X, \| \ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay, $\sum_{i \in I} x_i$ bu uzayda yakınsak ve toplamı $x \in X$

olan bir seri ise; bu durum $x = \sum_{i \in I} x_i$ şeklinde gösterilir.

Bu paragrafın geriye kalan kısmında normlu lineer uzaylarda I damga kümesinin $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olması halinde, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k$ şeklindeki serilerin yakınsaklığı ile ilgili bazı teoremler ve ispatları verilecektir.

Teorem 1.5.6: $(X, \| \ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi ve $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X$ olsun. $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k, \sum_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serileri yakınsak ve $u, v \in X$ için $u := \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$, $v := \sum_{k=-\infty}^{-1} x_k$ ise; $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak ve $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = u + v$ dir.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ ve $T_n := \sum_{k=-n}^{-1} x_k$ sırasıyla $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k, \sum_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serilerinin $n.$ kısmi toplamları olsun. $\lim_{n \to +\infty} S_n = u$ ve $\lim_{n \to +\infty} T_n = v$ olduğundan $\forall \mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık bir $N(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir $\therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\mathcal{E})$ için

$$\|u - S_n\| = \left\| u - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| < \frac{\mathcal{E}}{2} \qquad (*)$$

ve

$$\|v - T_n\| = \left\| v - \sum_{k=-n}^{-1} x_k \right\| < \frac{\mathcal{E}}{2} \qquad (**)$$

dir. $J_{\mathcal{E}} := [-N(\mathcal{E}), N(\mathcal{E})] \cap \mathbb{Z}$ alınırsa; $\varnothing \neq J_{\mathcal{E}} \subset J \subset \mathbb{Z}$ olan her sonlu J alt kümesi için $m_j :=$ En küçük eleman J ve $n_j :=$ En büyük eleman$J$ ise; $m_j \leq -N(\mathcal{E})$ ve $n_j \geq N(\mathcal{E})$

olduğundan
$$\sum_{k \in J} x_k = \sum_{k=m_j}^{-1} x_k + \sum_{k=0}^{n_j} x_k \qquad (***)$$

dir. O halde; $(*)$, $(**)$ ve $(***)$ 'dan her sonlu $J \subset \mathbb{Z} \therefore \varnothing \neq J_{\mathcal{E}} \subset J$ için $\left\| u + v - \sum_{k \in J} x_k \right\| < \mathcal{E}$

olduğu görülür. O halde; $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak ve $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = u + v$ dır.

Teorem 1.5.7: $(X, \| \ \|)$ normlu bir $F-$lineer uzay ve $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset X$ olsun. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak ve $x \in X$ için $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k$ ise; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n.$ genel terimi $S_n := \sum_{k=-n}^{n} x_k$ olan

$\{S_n\} \subset X$ dizisi yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = x$ dir.

İspat: $x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ olduğundan $\forall\mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık sonlu elemanlı bir $\varnothing \neq J_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{Z}$ alt kümesi vardır öyleki $J_{\mathcal{E}} \subset J \subset \mathbb{Z}$ olan $\forall J \subset \mathbb{Z}$ için $\left\| x - \sum\limits_{k\in J} x_k \right\| < \mathcal{E}$ dir. O halde;

$N(\mathcal{E}) := \max\{|m| \mid m \in J_{\mathcal{E}}\} + 1$ olsun. Bu takdirde; $J_{\mathcal{E}} \subset [-N(\mathcal{E}), N(\mathcal{E})] \cap \mathbb{Z}$ olduğundan $n \geq N(\mathcal{E})$ olan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $J_{\mathcal{E}} \subset [-n,n] \cap \mathbb{Z}$ dir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\mathcal{E})$ için

$$\|x - S_n\| = \left\| x - \sum_{k=-n}^{n} x_k \right\| = \left\| x - \sum_{k\in[-n,n]\cap\mathbb{Z}} x_k \right\| < \mathcal{E}$$

dir. O halde; $\{S_n\} \subset X$ dizisi yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = x$ dir.

Uyarı 1.5.8: Bu teoremin tersi genelde doğru değildir.

Örnek olarak; $(\mathbb{R}, |\ |)$ reel normlu lineer uzayında $x_0 = 0$ ve $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $x_k = \dfrac{1}{k}$ olan $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisi göz önüne alınsın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n := \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k = 0$ olduğundan $\{S_n\} \subset \mathbb{R}$ dizisi yakınsak ve $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$ dır. Fakat; $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak değildir. Varsayalım ki; $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak ve $x \in \mathbb{R}$ için $x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ olsun. O halde; $1 > 0$ sayısına karşılık sonlu elemanlı boştan farklı bir $J_1 \subset \mathbb{Z}$ alt kümesi bulunabilir öyleki $J_1 \subset J \subset \mathbb{Z}$ olan her sonlu J alt kümesi için $\left| x - \sum\limits_{k\in J} x_k \right| < 1$ dir.

O halde; $N := Max\{|m| \mid m \in J_1\} + 1$ alınırsa; $J_1 \subset [-N, N] \cap \mathbb{Z}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $J_1 \subset [-N, N+n] \cap \mathbb{Z}$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=N+1}^{N+n} \frac{1}{k} = \left| \left(\sum_{k\in[-N,N+n]\cap\mathbb{Z}} x_k - x \right) + \left(x - \sum_{k\in[-N,N]\cap\mathbb{Z}} x_k \right) \right| < 2 \text{ dolayısıyla; } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için}$$

$\sum\limits_{k=1}^{N+n} \dfrac{1}{k} < 2 + N$ olduğu görülür ki bu negatif terimli olmayan $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k}$ harmonik serisinin ıraksak olması ile çelişir. O halde; $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak değildir.

Teorem 1.5.9: $(X,\|\ \|)$ bir $F-$Banach uzayı ve $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset X$ olsun. $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k, \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serilerinin yakınsak olmasıdır.

İspat:

i. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k, \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serileri yakınsak ise; $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsaktır.

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k, \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serileri yakınsak ve $u,v\in X$ için $u=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k, v=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} x_k$ ise; $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak ve $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k = u+v$ olduğu Teorem 1.5.6'dan biliniyor.

ii. $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisi yakınsak ise; $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k, \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serileri yakınsaktır.

$\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ serisinin yakınsak olduğu veriliyor. $x\in X$ için $x=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$, $T_n := \sum\limits_{k=-n}^{-1} x_k$ sırasıyla $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k, \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serilerinin $n.$ kısmi toplamları olsun. $x=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k$ olduğundan $\forall\mathcal{E}>0$ için sonlu elemanlı boştan farklı bir $J_{\mathcal{E}}\subset\mathbb{Z}$ alt kümesi vardır öyleki $J_{\mathcal{E}}\subset J$ olan her sonlu $J\subset\mathbb{Z}$ alt kümesi için $\left\| x-\sum\limits_{k\in J} x_k \right\| < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$ dir.

$N(\mathcal{E}) := Max\{|m| \,|\, m\in J_{\mathcal{E}}\}+1$ alınırsa; $\forall p\geq q\geq N(\mathcal{E})$ için $J_{\mathcal{E}}\subset[-N(\mathcal{E}),p]\cap\mathbb{Z}$ ve $J_{\mathcal{E}}\subset[-N(\mathcal{E}),q]\cap\mathbb{Z}$ olduğundan $\forall p,q\in\mathbb{N} \therefore p\geq q\geq N(\mathcal{E})$ için

$$\|S_p-S_q\| = \left\| \left(\sum_{k\in[-N(\mathcal{E}),p]\cap\mathbb{Z}} x_k - x \right) + \left(x - \sum_{k\in[-N(\mathcal{E}),q]\cap\mathbb{Z}} x_k \right) \right\| < \mathcal{E}$$

dir. O halde; $\{S_n\}\subset X$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla; $(X,\|\ \|)$ bir $F-$Banach uzayı olduğundan $\{S_n\}\subset X$ dizisi yakınsaktır. $\{S_n\}\subset X$ dizisinin yakınsak olması $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$

serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Benzer şekilde; $\{T_n\} \subset X$ dizisi bir Cauchy dizisi olduğundan yakınsak ve dolayısı ile $\sum_{k=-\infty}^{-1} x_k$ serisi yakınsaktır.

1.6. Normlu Lineer Uzaylarda Sınırlı Lineer Dönüşümler

Tanım 1.6.1: $(X, \| \ \|_X)$ ve $(Y, \| \ \|_Y)$ iki normlu $F-$ lineer uzay ve $T \in L(X,Y)$ olsun. $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sayısı varsa; T dönüşümüne $(X, \| \ \|_X)$ normlu $F-$lineer uzayından $(Y, \| \ \|_Y)$ normlu $F-$lineer uzayına bir sınırlı lineer dönüşüm denir.

Notasyon: $(X, \| \ \|_X)$ normlu $F-$ lineer uzayından, $(Y, \| \ \|_Y)$ normlu $F-$lineer uzayına olan tüm sınırlı fonksiyonların kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir. Yani;

$$B(X,Y) := \{T \mid T : X \to Y \text{ sınırlı bir lineer dönüşüm}\} \text{ dir.}$$

Eğer; $X = Y$ ise; $B(X,X) = B(X)$ ile gösterilir.

Örnek 1.6.2: $T : \left(C([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty\right) \to \left(\mathbb{R}, | \ |\right)$ fonksiyonu, $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R})$ için $T(f) := \int_0^1 f(t)dt$ olarak tanımlanırsa; T dönüşümü $C([0,1],\mathbb{R})$ üzerinde sınırlı bir lineer dönüşümdür. Gerçekten; $\forall f, g \in C([0,1],\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g) &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)dt = \int_0^1 \alpha f(t) + \beta g(t) dt \\ &= \alpha \int_0^1 f(t)\,dt + \beta \int_0^1 g(t)\,dt \\ &= \alpha T(f) + \beta T(g) \end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü lineer bir dönüşümdür. Öte yandan; $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R})$ için $0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty$ olduğundan

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 f(t)dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty$$ dir. $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R})$ için

$|T(f)| \leq \|f\|_\infty$ eşitsizliği, T lineer dönüşümünün sınırlı bir lineer dönüşüm olduğunu gösterir.

Örnek 1.6.3:

$C^1([0,1],\mathbb{R}) := \{ f \mid f:[0,1]\to\mathbb{R}\ \text{sürekli bir fonksiyon ve}\ \forall x\in[0,1]\ \text{için}\ f'\ \text{mevcut ve}\ f'\in C([0,1],\mathbb{R}) \}$ olsun. $C^1([0,1],\mathbb{R})$ kümesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay ve $C^1([0,1],\mathbb{R}) \subset C([0,1],\mathbb{R})$ olduğundan $(C^1([0,1],\mathbb{R}),\| \|_\infty)$, $(C([0,1],\mathbb{R}),\| \|_\infty)$'nin bir alt lineer uzayıdır.

$$T:(C^1([0,1],\mathbb{R}),\| \|_\infty) \to (C([0,1],\mathbb{R}),\| \|_\infty)$$

dönüşümü, $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R})$ için $T(f) := f'$ olarak tanımlanırsa; $\forall f,g \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ ve $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ olduğundan $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ dır. O halde; T dönüşümü lineerdir.

Fakat; T dönüşümü sınırlı değildir. Eğer; T dönüşümü, sınırlı bir lineer dönüşüm olsaydı $\forall f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ için $\|T(f)\|_\infty \leq M_T \|f\|_\infty$ olacak şekilde bir $M_T > 0$ sayısı bulunabilirdi. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $f_n(t) := t^n$ olarak tanımlanırsa, açık olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ olup $f_n'(t) = n.t^{n-1}$ dir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T(f_n)\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = n$ ve $\|f_n\|_\infty = 1$ dir. Buradan; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T(f_n)\|_\infty \leq M_T \|f_n\|_\infty$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n \leq M_T$ olur ki; bu $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin üstten sınırlı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, T lineer dönüşümü sınırlı değildir.

Teorem 1.6.4: $(X,\| \|_X)$ ve $(Y,\| \|_Y)$ iki normlu $F-$ lineer uzay ve $T \in L(X,Y)$ olsun. Bu takdirde; aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

i. $T, \theta_X \in X$ noktasında süreklidir.
ii. T, X üzerinde süreklidir.
iii. T, X üzerinde sınırlıdır.

iv. T, X üzerinde düzgün süreklidir.

İspat:

$i \Rightarrow ii$ $T, \theta_X \in X$ noktasında sürekli ise; T, X üzerinde süreklidir.

$a \in X$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $T, \theta_X \in X$ noktasında sürekli olduğundan $\forall \mathcal{E} > 0$ için $\exists \delta \equiv \delta(\theta_X, \mathcal{E}) > 0 \therefore \|x - \theta_X\|_X < \delta$ olan $\forall x \in X$ için $\|T(x) - T(\theta_X)\|_Y < \mathcal{E}$ dır. $T(\theta_X) = \theta_Y$ olduğundan $\|x\|_X < \delta$ olan $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y < \mathcal{E}$ dır. O halde; $\|x - a\|_X < \delta$ olan $\forall x \in X$ için $\|T(x-a)\|_Y = \|T(x) - T(a)\|_Y < \mathcal{E}$ dır. Dolayısıyla; T, $a \in X$ noktasında süreklidir. $a \in X$ noktası keyfi olduğundan T, X üzerinde süreklidir.

$ii \Rightarrow iii$ T, X üzerinde sürekli ise; T, X üzerinde sınırlıdır.

T, X üzerinde sürekli olduğundan X 'in her noktasında süreklidir. O halde; $\theta_X \in X$ noktasında süreklidir. O halde; $1 > 0$ için $\exists \delta \equiv \delta(\theta_X, 1) > 0 \therefore \|u - \theta_X\|_X = \|u\|_X < \delta$ olan $\forall u \in X$ için $\|T(u) - T(\theta_X)\|_Y = \|T(u)\|_Y < 1$ dır.

$x \in X$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $x \in X \setminus \{\theta_X\}$ ise;

$$\frac{\delta}{2\|x\|_X} x \in X \text{ için } \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta \text{ olduğundan}$$

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2\|x\|_X} x \right) \right\|_Y = \left\| \frac{\delta}{2\|x\|_X} T(x) \right\|_Y = \left| \frac{\delta}{2\|x\|_X} \right| \|T(x)\|_Y = \frac{\delta}{2\|x\|_X} \|T(x)\|_Y < 1 \text{ dir. O halde;}$$

$x \in X \setminus \{\theta_X\}$ için $\|T(x)\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X$ dir. $\|T(\theta_X)\|_Y = \|\theta_Y\|_Y = 0 = \frac{2}{\delta}\|\theta_X\|_X$ dir. O halde;

$M := \frac{2}{\delta}$ alınırsa; $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ olduğundan T, X üzerinde sınırlıdır.

$iii \Rightarrow iv$ T, X üzerinde sınırlı ise; T, X üzerinde düzgün süreklidir.

$x, y \in X$ keyfi fakat sabit alınan iki nokta olsun. $x - y \in X$ ve T, X üzerinde sınırlı olduğundan $\exists M \geq 0$ sayısı öyleki $\|T(x-y)\|_Y = \|T(x) - T(y)\|_Y \leq M\|x-y\|_X$ dir. O halde;

$\forall \mathcal{E}>0$ için $\delta := \dfrac{\mathcal{E}}{1+M}$ olarak alınırsa; $\|x-y\|_X < \delta$ ve $\forall x, y \in X$ için

$\|T(x)-T(y)\|_Y \leq M\|x-y\|_X < M\delta = M\dfrac{\mathcal{E}}{1+M} < \mathcal{E}$ olur. O halde; T, X üzerinde düzgün süreklidir.

$iv \Rightarrow i$ T, X üzerinde düzgün sürekli olduğundan T, X üzerinde süreklidir. O halde; $T, \theta_X \in X$ noktasında süreklidir.

Tanım 1.6.5: $(X, \| \ \|_X)$ ve $(Y, \| \ \|_Y)$ iki normlu $F-$lineer uzay ve $T \in B(X,Y)$ olsun. $T \in B(X,Y)$ olduğundan $\left\{M \middle| M \geq 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\right\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kümesi boştan farklıdır. Üstelik, $0 \in \mathbb{R}$ sayısı bu kümenin bir alt sınırıdır. O halde; $\left\{M \middle| M \geq 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\right\}$ kümesinin infimumu mevcuttur.

$$\|T\| := \inf\left\{M \middle| M \geq 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\right\} \geq 0$$

sayısına, T sınırlı lineer dönüşümünün normu denir.

Teorem 1.6.6: $(X, \| \ \|_X)$ ve $(Y, \| \ \|_Y)$ iki normlu $F-$ lineer uzay ve $T \in B(X,Y)$ olsun. Bu takdirde; $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ dır.

İspat: $S_T := \left\{M \middle| M \geq 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\right\}$ olsun. $\|T\| := \inf S_T$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T\| \leq M_n < \left(\|T\| + \dfrac{1}{n}\right)$ olacak şekilde $M_n \in S_T$ sayıları mevcuttur. O halde; $\forall x \in X$ için $\|x\|_X \geq 0$ olduğundan $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\|T\|\|x\|_X \leq M_n\|x\|_X < \left(\|T\| + \frac{1}{n}\right)\|x\|_X \ (*)$$

dir. Öte yandan; $M_n \in S_T$ olduğundan $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T(x)\|_Y \leq M_n\|x\|_X$ (**) dir. $(*)$ ve $(**)$'dan $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|T(x)\|_Y \leq \left(\|T\| + \dfrac{1}{n}\right)\|x\|_X$ dir.

Son eşitsizlikten, $x \in X$ noktaları sabit tutulup $n \to +\infty$ için limit alınırsa;

$\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|T(x)\|_Y$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 1.6.7: $(X,\|\ \|_X),(Y,\|\ \|_Y)$ ve $(Z,\|\ \|_Z)$ üç normlu $F-$ lineer uzay olsun. $T\in B(X,Y), S\in B(Y,Z)$ ise; $ST\in B(X,Z)$ ve $\|ST\|\le\|S\|\|T\|$ dır.

İspat: $\forall x,y\in X$ ve $\forall\alpha,\beta\in F$ için

$$\begin{aligned}ST(\alpha x+\beta y)&=S(T(\alpha x+\beta y))\\&=S(\alpha T(x)+\beta T(y))\\&=\alpha S(T(x))+\beta S(T(x))\\&=\alpha(ST)(x)+\beta(ST)(x)\end{aligned}$$

olduğundan $ST\in L(X,Z)$ dir. Öte yandan; $\forall x\in X$ için

$$\|(ST)(x)\|_Z=\|S(T(x))\|_Z\le\|S\|\|T(x)\|_Y\le\|S\|\|T\|\|x\|_X \text{ olduğundan}$$

$ST\in B(X,Z)$ ve $\|ST\|\le\|S\|\|T\|$ dir.

Sonuç 1.6.8: $T\in B(X)$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $T^n\in B(X)$ ve $\|T^n\|\le\|T\|^n$ dir.

İspat: $1\in\mathbb{N}$ için $\|T\|\le\|T\|$ olduğundan iddia doğrudur. Tümevarım hipotezi olarak $n\in\mathbb{N}$ için iddianın doğru yani; $\|T^n\|\le\|T\|^n$ olduğunu kabul edelim.O halde; $n+1$ için tümevarım hipotezi ve Teorem 1.6.7'den $\|T^{n+1}\|=\|T^nT\|\le\|T^n\|\|T\|\le\|T\|^n\|T\|=\|T\|^{n+1}$ olduğu görülür. O halde; tümevarım ile ispat metoduna göre; $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\|T^n\|\le\|T\|^n$ dir.

Teorem 1.6.9: $(X,\|\ \|_X)$ ve $(Y,\|\ \|_Y)$ iki normlu $F-$ lineer uzay, $T\in L(X,Y)$ ve $A:=\left\{\|T(x)\|_Y \,\middle|\, x\in X \text{ ve } \|x\|_X\le 1\right\}\subset\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ olsun. $T\in B(X,Y)$ olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin boştan farklı ve üstten sınırlı bir küme olmasıdır. Şartlardan birinin sağlanması halinde $\|T\|=\sup A$ dır.

İspat:

i. $T\in B(X,Y)$ ise; $A:=\left\{\|T(x)\|_Y \,\middle|\, x\in X \text{ ve } \|x\|_X\le 1\right\}\subset\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ alt kümesi boştan farklı , üstten sınırlı bir alt küme ve $\|T\|=\sup A$ dir.

$\theta_X\in X$ için $\|\theta_X\|_X=0\le 1$ olduğundan A alt kümesinin tanımından

$\left\|T\left(\theta_X\right)\right\|_Y=\left\|\theta_Y\right\|_Y=0\in A$ olup; $A\neq\varnothing$'dır. $T\in B(X,Y)$ olduğundan $\forall x\in X$ için $\left\|T\left(x\right)\right\|_Y\leq\left\|T\right\|\left\|x\right\|_X$ dir. Son eşitsizlikten; $\left\|x\right\|_X\leq 1$ koşulunu sağlayan $\forall x\in X$ için $\left\|T\left(x\right)\right\|_Y\leq\left\|T\right\|$ olduğu görülür. Dolayısıyla A kümesi, $\left\|T\right\|\geq 0$ sayısı ile üstten sınırlıdır. $\varnothing\neq A\subset\mathbb{R}$ üstten sınırlı olduğundan $\sup A$ vardır ve $\left\|T\right\|\geq 0$ sayısı, A'nın bir üst sınırı olduğundan $\alpha:=\sup A\leq\left\|T\right\|$ dir. $x\in X$ olmak üzere; $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\in X$ ve $\left\|\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\right\|_X\leq 1$ olduğundan $\left\|T\left(\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\right)\right\|_Y\in A$ dir. O halde; $\forall\varepsilon>0$ sayısı için ve $\forall x\in X$ için $\left\|T\left(\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\right)\right\|_Y\leq\sup A=\alpha$, yani; $\forall\varepsilon>0$ sayısı için ve $\forall x\in X$ için

$$\left\|T\left(x\right)\right\|_Y\leq\alpha\left(\left\|x\right\|_X+\varepsilon\right)$$

dir. $x\in X$ noktaları sabit olarak düşünüldüğünde $\left\|T\left(x\right)\right\|_Y\leq\alpha\left(\left\|x\right\|_X+\varepsilon\right)$ eşitliğinin her iki tarafının $\varepsilon\to 0^+$ için limiti alınırsa; $\forall x\in X$ için $\left\|T\left(x\right)\right\|_Y\leq\alpha\left\|x\right\|_X$ dir. O halde; $\left\|T\right\|$'nin tanımından $\left\|T\right\|\leq\alpha$ olur. Dolayısıyla; $\left\|T\right\|\leq\alpha$ ve $\alpha\leq\left\|T\right\|$ olduğundan $\sup A=\left\|T\right\|$ dır.

ii. $A:=\left\{\left\|T\left(x\right)\right\|_Y \middle| x\in X \text{ ve } \left\|x\right\|_X\leq 1\right\}\subset\mathbb{R}^+\cup\left\{0\right\}$ alt kümesi boştan farklı, üstten sınırlı bir alt küme ise; $T\in B(X,Y)$ ve $\left\|T\right\|=\sup A$ dır.

A kümesi boştan farklı ve üstten sınırlı olduğundan A'nın en küçük üst sınırı vardır. $\alpha:=\sup A$ olsun. $0\in A$ olduğundan $\alpha\geq 0$ dır. $x\in X$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısı için $\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\in X$ ve $\left\|\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\right\|_X\leq 1$ olduğundan $\left\|T\left(\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\right)\right\|_Y\in A$ dir. O halde; $\forall\varepsilon>0$ sayısı ve $\forall x\in X$ için $\left\|T\left(\dfrac{1}{\left\|x\right\|_X+\varepsilon}x\right)\right\|_Y\leq\alpha$, yani; $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall x\in X$ için

$\left\|T\left(x\right)\right\|_Y\leq\alpha\left(\left\|x\right\|_X+\varepsilon\right)$ dir. $x\in X$ noktaları sabit olarak düşünüldüğünde $\left\|T\left(x\right)\right\|_Y\leq\alpha\left(\left\|x\right\|_X+\varepsilon\right)$ eşitliğinin her iki tarafının $\varepsilon\to 0^+$ için limiti alınırsa;

$\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \alpha \|x\|_X$ dir. O halde; $T \in B(X,Y)$ dir.

$$\|T\| := \inf\left\{M : M \geq 0 \therefore \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\right\} \text{olduğundan } \|T\| \leq \alpha \text{ dir.}$$

Diğer taraftan; $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ ve $\|x\|_X \leq 1$ olduğundan $\forall\ x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|$ dir. O halde; $\|T\| \geq 0$ sayısı, A kümesinin bir üst sınırı olduğundan $\alpha \leq \|T\|$ dir. Dolayısıyla; $\|T\| \leq \alpha$ ve $\alpha \leq \|T\|$ olduğundan $\alpha = \|T\|$ dir.

Teorem 1.6.10: $(X, \|\ \|_X)$ ve $(Y, \|\ \|_Y)$ iki normlu $F-$ lineer uzay olsun. Bu takdirde;

i. $B(X,Y)$ kümesi üzerindeki toplama ve skalerle çarpma işlemi

$\forall T, S \in B(X,Y)$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$(T+S)(x) := T(x) + S(x) \quad \text{ve} \quad (\alpha T)(x) := \alpha T(x) \quad \text{olarak tanımlanırsa;}$$

$B(X,Y)$ kümesi, F cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

ii. $\|\ \| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall T \in B(X,Y)$ için

$\|T\| := \inf\left\{M \mid M \geq 0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\right\}$ olarak tanımlanırsa; $\|\ \|$ fonksiyonu, $B(X,Y)$ üzerinde bir normdur.

İspat:

i. $T, S \in B(X,Y)$ olduğundan $\exists M_T, M_S \geq 0 \therefore \forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq M_T\|x\|_X$ ve $\|S(x)\|_Y \leq M_S\|x\|_X$ dir. O halde; $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için

$$\begin{aligned}\|(T+S)(x)\|_Y &= \|T(x) + S(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \\ &\leq M_T\|x\|_X + M_S\|x\|_X = (M_T + M_S)\|x\|_X\end{aligned}$$

ve $\|(\alpha T)(x)\|_Y = \|\alpha T(x)\|_Y = |\alpha|\|T(x)\|_Y \leq |\alpha| M\|x\|_X$ olduğundan $T+S, \alpha T \in B(X,Y)$ dir. Toplama işlemine ve F 'nin elemanları ile elemanlarının skaler çarpımına göre kapalı olan $B(X,Y)$ kümesinin, F üzerinde bir lineer uzay olması için gerekli aksiyomları sağladığı kolayca görülür.

Bu lineer uzayın sıfır elemanı, $O : X \to Y, \forall x \in X$ için $O(x) := \theta_Y$ şeklinde tanımlanan sınırlı lineer dönüşümdür.

ii. $\| \ \|$ fonksiyonunun, $B(X,Y)$ üzerinde bir norm olduğunu gösterelim.

- $\forall T \in B(X,Y)$ için $\|T\| \geq 0$ olduğu açıktır.
- $T \in B(X,Y)$ için $\|T\| = 0$ olsun.

O halde; $\|T\| := \inf\left\{M \mid M \geq 0 \text{ ve} \forall x \in X \text{ için} \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X\right\}$ olduğundan $\forall x \in X$ için Teorem 1.6.6' dan $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ olduğundan $0 \leq \|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X = 0.\|x\|_X = 0$ olduğundan $\|T(x)\|_Y = 0$ dır. O halde; $\|T(x)\|_Y = 0 \Leftrightarrow T(x) = \theta_Y$ olduğundan $\forall x \in X$ için $T(x) = \theta_Y$ ise; $T = O$ dır. Tersine olarak; $T = O$ olsun. O halde; $\forall x \in X$ için $\|O(x)\|_Y = \|\theta_Y\|_Y = 0 = 0.\|x\|_X$ olduğundan $O \in B(X,Y)$ ve $0 \leq \|O\| \leq 0$ dır. Dolayısıyla; $\|O\| = 0$ dır.

- $\forall \alpha \in F$ ve $\forall T \in B(X,Y)$ ise; $\|\alpha T\| = \alpha\|T\|$ dir.

$\alpha = 0$ ise ispat açık.

$\alpha \neq 0$ olsun. O halde; $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ olduğundan $|\alpha|\|T(x)\|_Y \leq |\alpha|\|T\|\|x\|_X$ dır. O halde; $\forall x \in X$ için $\|(\alpha T)(x)\|_Y \leq (|\alpha|\|T\|)\|x\|_X$ dır. Dolayısı ile $\|\alpha T\| \leq |\alpha|\|T\|$ dir.

Tersine olarak; $\forall x \in X$ için

$\|(\alpha T)(x)\|_Y \leq \|\alpha T\|\|x\|_X$ olduğundan $|\alpha|\|T(x)\|_Y \leq \|\alpha T\|\|x\|_X \Rightarrow \|T(x)\|_Y \leq \dfrac{1}{|\alpha|}\|\alpha T\|\|x\|_X$ dır.

O halde; $\|T\| \leq \dfrac{1}{|\alpha|}\|\alpha T\| \Rightarrow |\alpha|\|T\| \leq \|\alpha T\|$ dır. Dolayısıyla; $\|\alpha T\| \leq |\alpha|\|T\| \text{ ve} |\alpha|\|T\| \leq \|\alpha T\|$

$\|\alpha T\| = \alpha\|T\|$ dır.

- $T, S \in B(X,Y)$ keyfi olsun. $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ ve $\|S(x)\|_Y \leq \|S\|\|x\|_X$

olduğundan $\forall x \in X$ için $\|(T+S)(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|_X$ dir. O halde; $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ dir.

Teorem 1.6.11: $(X, \| \ \|_X)$ ve $(Y, \| \ \|_Y)$ iki normlu $F-$ lineer uzay olsun. $(Y, \| \ \|_Y)$ normlu $F-$ lineer uzayı bir Banach uzayı ise; $(B(X,Y), \| \ \|)$ sınırlı lineer dönüşümler uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat: $\{T_n\} \subset B(X,Y)$, $\left(B(X,Y),\| \ \|\right)$normlu $F-$ lineer uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde; $\forall \mathcal{E} > 0$ için $\exists N(\mathcal{E}) \equiv N \in \mathbb{N} \therefore \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N$ için $\|T_p - T_q\| < \mathcal{E}$ dır. O halde;

$x_o \in X$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $\{T_n\} \subset B(X,Y)$, $\left(B(X,Y),\| \ \|\right)$ normlu lineer uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $\mathcal{E} > 0$ verildiğinde $\dfrac{\mathcal{E}}{1+\|x_o\|_X} > 0$ sayısına karşılık $\exists N\left(\dfrac{\mathcal{E}}{1+\|x_o\|_X}\right) \equiv N \in \mathbb{N} \therefore \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N$ için $\|T_p - T_q\| < \dfrac{\mathcal{E}}{1+\|x_o\|_X}$ $(*)$ dir. Öte yandan; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n \in B(X,Y)$ olduğundan $p,q \in \mathbb{N}$ için $T_p - T_q \in B(X,Y)$ dir. O halde; $\forall x \in X$ için $\left\|\left(T_p - T_q\right)(x)\right\|_Y \leq \|T_p - T_q\|\|x\|_X$, yani;

$$\left\|T_p(x) - T_q(x)\right\|_Y \leq \|T_p - T_q\|\|x\|_X$$

olduğundan $(*)$ 'dan $\forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N\left(\dfrac{\mathcal{E}}{1+\|x_o\|_X}\right)$ için $\left\|T_p(x_o) - T_q(x_o)\right\|_Y < \mathcal{E}$ dır. Bu bize gösteriyor ki $x_o \in X$ keyfi fakat sabit alındığında $\{T_n(x_o)\} \subset Y$ dizileri, $(Y,\| \ \|_Y)$ normlu $F-$ lineer uzayında bir Cauchy dizisidir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in X$ için $\{T_n(x)\} \subset Y$ dizileri, $(Y,\| \ \|_Y)$ normlu $F-$lineer uzayında birer Cauchy dizisi ve $(Y,\| \ \|_Y)$ normlu $F-$lineer uzayı bir Banach uzayı olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{T_n(x)\} \subset Y$ dizileri bu uzayda yakınsaktır. O halde; $\forall x \in X$ için $T(x) :\overset{\| \ \|_Y}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)$ olan bir $T: X \to Y$ dönüşümü vardır.

i. $T: X \to Y$ dönüşümü sınırlı bir lineer dönüşümdür.

Gerçekten; $\forall x,y \in X$ ve $\forall \alpha,\beta \in F$ için

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &\overset{\| \ \|_Y}{=} \lim_{n\to+\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to+\infty} \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) \\ &= \alpha \lim_{n\to+\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to+\infty} T_n(y) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$

dir. O halde; T dönüşümü lineerdir. Öte yandan; $\forall x \in X$ için $T(x) :\overset{\| \ \|_Y}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)$ idi. O halde; $x \in X$ keyfi fakat sabit alındığında $x \in X \setminus \{\theta_X\}$ için $\|x\|_X > 0$ sayısına karşılık

$\exists N_x \equiv N_x\left(\|x\|_X\right) \in N \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_x$ için $\|T_n(x) - T(x)\|_Y < \|x\|_X$ $(*)$ dır. Ayrıca;

$\{T_n\} \subset B(X,Y)$ bir Cauchy dizisi olduğundan $1 > 0$ sayısına karşılık

$\exists N \equiv N(1) \in \mathbb{N} \therefore \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N$ için $\|T_p - T_q\| < 1$dir. Özel olarak; $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N$ için $\|T_p - T_N\| < 1$ dir. $\forall p \in \mathbb{N}, p \geq N$ için $\|T_p(x) - T_N(x)\|_Y \leq \|T_p - T_N\| \|x\|_X < \|x\|_X$ $(**)$ dir.

$\forall p \in \mathbb{N}$ sayısı için $p \geq N, N_x$ alındığında $(*),(**)$ 'dan

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_Y &= \|T(x) - T_p(x) + T_p(x) - T_N(x) + T_N(x)\|_Y \\
&\leq \|T_p(x) - T(x)\|_Y + \|T_p(x) - T_N(x)\|_Y + \|T_N(x)\|_Y \\
&\leq \|x\|_X + \|x\|_X + \|T_N\| \|x\|_X \\
&\leq \left(2 + \|T_N\|\right) \|x\|_X
\end{aligned}$$

dir. $x = \theta_X$ ise; $\|T(\theta_X)\|_Y = 0 \leq \left(2 + \|T_N\|\right) \|\theta_X\|_X = 0$ olur. Dolayısıyla; $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y \leq \left(2 + \|T_N\|\right) \|x\|_X$ olduğundan dolayı $T \in B(X,Y)$ dir.

ii. $\lim_{n \to +\infty} T_n \overset{\|\,\|}{=} T$ dir. Gerçekten;

$\mathcal{E} > 0$ keyfi olsun. $\{T_n\} \subset B(X,Y)$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\frac{\mathcal{E}}{3} > 0$ sayısına karşılık

$\exists N\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\right) \equiv N \in \mathbb{N} \therefore \forall p,q \in \mathbb{N}, p,q \geq N$ için $\|T_p - T_q\| < \frac{\mathcal{E}}{3}$ $(*)$ dır. $x \in X \setminus \{\theta_X\}$ keyfi alalım. O halde; $T(x) := \overset{\|\,\|_Y}{\lim_{n \to +\infty}} T_n(x)$ olduğundan $\frac{\mathcal{E}}{3}\|x\|_X > 0$ sayısına karşılık

$\exists N_x \equiv N_x\left(\frac{\mathcal{E}}{3}\|x\|_X\right) \in \mathbb{N} \therefore \forall p \in \mathbb{N}, p \geq N_x$ için $\|T_p(x) - T(x)\|_Y < \frac{\mathcal{E}}{3}\|x\|_X$ $(**)$ dir.

$(*)$ ve $(**)$'dan $\forall p \in N, p \geq N, N_x$ olarak seçilirse; $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\mathcal{E})$ için

$$\begin{aligned}
\|T_n(x) - T(x)\|_Y &= \|T_n(x) - T_p(x) + T_p(x) - T(x)\|_Y \\
&\leq \|T_n(x) - T_p(x)\|_Y + \|T_p(x) - T(x)\|_Y \\
&\leq \|T_n - T_p\| \|x\|_X + \frac{\mathcal{E}}{3}\|x\|_X \\
&< \frac{2}{3}\mathcal{E}\|x\|_X
\end{aligned}$$

olur. $\theta_X \in X$ için $0 = \left\| T_n(\theta_X) - T(\theta_X) \right\|_Y < \dfrac{2}{3}\left\| \theta_X \right\|_X = 0$ dir. O halde; $\forall x \in X \therefore \|x\|_X \leq 1$ve

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\mathcal{E})$ için $\left\| T_n(x) - T(x) \right\|_Y < \dfrac{2\mathcal{E}}{3}\|x\|_X < \dfrac{2\mathcal{E}}{3}$ dir. Dolayısıyla;

$\forall x \in X \therefore \|x\|_X \leq 1$ve $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\mathcal{E})$ için

$$\|T_n - T\| = \sup\left\{ \left\| (T_n - T)(x) \right\|_Y \,\middle|\, x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\} < \frac{2\mathcal{E}}{3} < \mathcal{E}$$

olur. Son eşitsizlikten; $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n \overset{\|\ \|}{=} T$ dir.

Tanım 1.6.12: $(X, \|\ \|_X)$ normlu bir $F-$ lineer uzay olsun. $f : X \to F$ sınırlı bir lineer dönüşüm ise; f fonksiyonuna, X üzerinde tanımlı sınırlı bir lineer fonksiyonel denir.

Teorem 1.6.13: $(X, \|\ \|_X)$ ve $(Y, \|\ \|_Y)$ iki $F-$ normlu lineer uzay ve $T \in B(X,Y)$ olsun. Bu takdirde; $ÇekT \subset X, X$ kapalı bir alt uzayıdır.

İspat: $T \in B(X,Y)$ olduğundan T süreklidir. Dolayısıyla T dizisel süreklidir. $ÇekT \subset X, X$ 'in bir alt lineer uzay olduğu biliniyor.

$x \in \overline{ÇekT}$ keyfi olsun. O halde; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ olan en az bir $\{x_n\} \subset ÇekT$ dizisi mevcuttur. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in ÇekT$ olduğundan $T(x_n) = 0$ ve $T \in B(X,Y)$ dizisel sürekli olduğundan $T(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} T(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \theta_Y = \theta_Y$ olur. Son eşitlikten; $x \in \overline{ÇekT}$ için $x \in ÇekT$ olduğundan $\overline{ÇekT} \subset ÇekT$ dir. Dolayısıyla; $\overline{ÇekT} = ÇekT$ olduğundan Teorem 1.1.17'den $ÇekT \subset X$ kapalı bir alt lineer uzaydır.

Sonuç 1.6.14: $(X, \|\ \|_X)$ normlu bir $F-$ lineer uzay ve $f \in B(X,F)$ ise; $Çekf \subset X, X$ 'in kapalı bir alt lineer uzayıdır.

Teorem 1.6.15: $(X, \|\ \|_X)$ ve $(Y, \|\ \|_Y)$ iki normlu $F-$lineer uzay ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T 'nin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X$ için

$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ olmasıdır.

İspat:

i. T lineer dönüşümü bir izometri ise; $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ dir.

T bir izometri olduğundan $\forall x, y \in X$ için $\|T(x) - T(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için $\|T(x) - T(\theta_X)\|_Y = \|x - \theta_X\|_X$ olduğundan $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ dir.

ii. $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ ise; T lineer dönüşümü bir izometridir.

$\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ olduğundan $x, y \in H$ keyfi alındığından $x - y \in H$ olduğu göz önüne alındığında; $\|T(x-y)\|_Y = \|x - y\|_X$ dir. O halde; T lineer olduğundan $\|T(x-y)\|_Y = \|T(x) - T(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ ve dolayısı ile; $\forall x, y \in X$ için $\|T(x) - T(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ dir. Son eşitlikten; $T : X \to Y$ lineer dönüşümü bir izometridir.

Teorem 1.6.16: $(X, \| \ \|_X)$ ve $(Y, \| \ \|_Y)$, $X \neq \{\theta_X\}$ olan iki normlu $F-$lineer uzay ve $T : X \to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T lineer dönüşümü bir izometri ise; T sınırlı bir lineer dönüşüm olup $\|T\| = 1$ dir.

İspat: $X \neq \{\theta_X\}$ olduğundan $\exists x_0 \in X \therefore x_0 \neq \theta_X$ dir. $T : X \to Y$ bir izometri olduğundan $\forall x \in X$ için $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ dır. O halde; $\|T\| \leq 1$ dir. Diğer taraftan; $\|T(x_0)\|_Y = \|x_0\|_X$ olduğundan $\left\| T\left(\frac{1}{\|x_0\|_X} x_0 \right) \right\|_Y = 1$ dir. $\frac{1}{\|x_0\|_X} x_0 \in X$ için $\left\| \frac{1}{\|x_0\|_X} x_0 \right\|_X = 1$ ve $\left\| T\left(\frac{1}{\|x_0\|_X} x_0 \right) \right\|_Y = 1$ olduğundan $1 \in \left\{ \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\}$ dir. O halde;

$1 \leq \sup\left\{ \|T(x)\|_Y \,\middle|\, x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\} = \|T\|$ dir. Dolayısıyla; $\|T\| \leq 1$ ve $1 \leq \|T\|$ olduğundan $\|T\| = 1$ dir.

Uyarı 1.6.17: Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani; $(X, \| \ \|_X)$ ve $(Y, \| \ \|_Y)$ iki normlu $F-$lineer uzayları için $\|T\|=1$ olan sınırlı bir $T:X\to Y$ dönüşümünün daima bir izometri olması gerekmez.

Gerçekten; $l_2(\mathbb{C}):=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_k,...) \mid \{x_n\}\subset\mathbb{C}\text{ bir dizi ve }\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2<+\infty\right\}$ olmak üzere; $(l_2(\mathbb{C}),\|\ \|_2)$ kompleks normlu lineer uzayını göz önüne alalım. Bilindiği üzere; $\forall x\in l_2(\mathbb{C})$ için $\|x\|_2:=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ dir. Bu takdirde; $e_1:=(1,0,...,0,...)\in l_2(\mathbb{C})$ olmak üzere; $\forall x=(x_1,...,x_k,...)\in l_2(\mathbb{C})$ için $T:l_2(\mathbb{C})\to l_2(\mathbb{C})$ dönüşümü $T(x):=x_1e_1$ olarak tanımlanırsa; T, sınırlı bir lineer dönüşümdür. Gerçekten; $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ve $\forall x,y\in l_2(\mathbb{C})$ için

$$\begin{aligned}T(\alpha x+\beta y)&=T(\alpha x_1+\beta y_1,0,...,0,...)\\&=\alpha T(x_1,0,...,0,...)+\beta T(y_1,0,...,0,...)\\&=\alpha T(x)+\beta T(y)\end{aligned}$$

olduğundan $T:l_2(\mathbb{C})\to l_2(\mathbb{C})$ dönüşümü lineerdir. Öte yandan;

$\|T(x)\|_2=|x_1|\le\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|_2$ olduğundan $T:l_2(\mathbb{C})\to l_2(\mathbb{C})$ lineer dönüşümü sınırlıdır ve $\|T\|\le 1$ $(*)$ dir. Diğer taraftan; $e_1=(1,0,...,0,...)\in l_2(\mathbb{C})$ için $T(e_1)=e_1$ ve $\|T(e_1)\|_2=\|e_1\|_2=1$ olduğundan $1\le\|T\|$ $(**)$ dir.

$(*)$ ve $(**)$ ile $\|T\|=1$ dir. Fakat; $T:l_2(\mathbb{C})\to l_2(\mathbb{C})$ dönüşümü bir izometri değildir.

Gerçekten;

$x=(i,2,0,...,0,...),\ y=(i,0,-2,0,...,0,...)\in l_2(\mathbb{C})$ için

$x-y=(0,2,2,0,...,0,...)\in l_2(\mathbb{C})$ ve $\|x-y\|_2=2\sqrt{2}$ dir. $T(x)-T(y)=(0,0,...,0,...)$

$\|T(x)-T(y)\|_2=0\ne 2\sqrt{2}=\|x-y\|_2$ olduğundan $\forall x,y\in X$ için $\|T(x-y)\|_Y=\|x-y\|_X$ koşulu sağlanmaz. O halde; $T:l_2(\mathbb{C})\to l_2(\mathbb{C})$ dönüşümü bir izometri değildir.

Öte yandan; herhangi bir $(X,\|\ \|_X)$ normlu lineer uzayında, $I:X\to X$ özdeş dönüşümü bir izometri olup $\|I\|=1$ dir.

1.7. İç Çarpım Uzayları

Bu kısımda, $(F,+,\cdot)$ cismi olarak $(\mathbb{R},+,\cdot)$ reel sayılar cismi veya $(\mathbb{C},+,\cdot)$ kompleks sayılar cismi göz önüne alınacaktır.

Tanım 1.7.1: H bir $F-$ lineer uzay olsun. $\langle,\rangle : H\times H \to F$, aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm ise; $\langle,\rangle$ dönüşümüne, H üzerinde tanımlı bir $F-$iç çarpım ve $(H,\langle,\rangle)$ ikilisine de bir $F-$iç çarpım uzayı denir.

i. $\forall x\in H$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$,

ii. $x\in H$ için $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=\theta$,

iii. $\forall x,y\in H$ için $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,

iv. $\forall \alpha,\beta\in F$ ve $\forall x,y,z\in H$ için $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$ dır.

Örnek 1.7.2: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $n\in\mathbb{N}$ bir doğal sayı olmak üzere;
$\mathbb{R}^n := \{x:=(x_1,\dots,x_n) \mid \forall i\in\{1,\dots,n\}$ için $x_i\in\mathbb{R}\}$ olsun.
$\forall x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $x+y$ toplamı ve αx skaler çarpımı;

$$x+y := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

ve

$$\alpha x := (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$$

şeklinde tanımlanırsa; $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R},+,.)$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır. Diğer taraftan;

$$\langle,\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ fonksiyonu,}$$

$\forall x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ için $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ şeklinde tanımlanırsa; $\langle,\rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır. Gerçekten;

i. $\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ için $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $x_i\in\mathbb{R}$ olduğundan; $x_i^2\geq 0$ dır.

O halde; $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ dır.

ii. $\theta=(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ için $\langle\theta,\theta\rangle=\sum_{i=1}^{n} 0^2=0$ olduğu açıktır. Tersine olarak; $x\in\mathbb{R}^n$ için $\langle x,x\rangle=0$ olsun. O halde; $\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i^2=0$ olduğundan $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$ için $x_i=0$ dır.

Dolayısıyla; $x=(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ olduğundan $x=\theta$ dır.

iii. $\forall x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ için $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i=\langle y,x\rangle$ dır.

iv. $\forall x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n), z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ ve $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için;

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)z_i\,,$$

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\sum_{i=1}^{n}\big((\alpha x_i)z_i+(\beta y_i)z_i\big),$$

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\sum_{i=1}^{n}\big(\alpha(x_i z_i)+\beta(y_i z_i)\big),$$

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i z_i)+\sum_{i=1}^{n}\beta(y_i z_i),$$

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i z_i+\beta\sum_{i=1}^{n}y_i z_i\,,$$

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle \text{ dır.}$$

Dolayısıyla; $\langle,\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ reel lineer uzayı üzerinde bir reel iç çarpım ve $(\mathbb{R}^n,\langle,\rangle)$ bir reel iç çarpım uzayıdır.

Örnek 1.7.3: $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $n\in\mathbb{N}$ bir doğal sayı olmak üzere;

$\mathbb{C}^n:=\{z:=(z_1,\ldots,z_n)\mid \forall i\in\{1,\ldots,n\}$ için $z_i\in\mathbb{C}\}$ olsun.

$\forall z=(z_1,\ldots,z_n), w=(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{C}^n$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için $z+w$ toplamı ve αz skaler çarpımı;

$$z+w:=(z_1+w_1,\ldots,z_n+w_n)$$

ve $\alpha z := (\alpha z_1, \cdots, \alpha z_n)$ şeklinde tanımlanırsa;

$\mathbb{C}^n, (\mathbb{C}, +, .)$ cismi üzerinde bir kompleks lineer uzaydır. Diğer taraftan;

$\langle , \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$ için $\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$ şeklinde tanımlanırsa; $\langle , \rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir kompleks iç çarpımdır.

i. $\forall z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ için $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $z_i \in \mathbb{C}$ için $z_i \overline{z_i} = |z_i|^2 \geq 0$ olduğundan; $\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0$ dır.

ii. $\theta = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$ için $\langle \theta, \theta \rangle = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0$ dır. Tersine olarak; $z \in \mathbb{C}^n$ için $\langle z, z \rangle = 0$ olsun. O halde; $\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 0$ olduğundan $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $|z_i| = 0$ dır. Dolayısıyla; $z = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$ dır.

iii. $\forall z = (z_1, z_2, ..., z_n), w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$ için

$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} z_i = \overline{\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{z_i}} = \overline{\langle w, z \rangle}$ dır.

iv. $\forall z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n), \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için;

$$\langle \alpha z + \beta w, \zeta \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha z_i + \beta w_i) \overline{\zeta_i},$$

$$\langle \alpha z + \beta w, \zeta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left((\alpha z_i) \overline{\zeta_i} + (\beta w_i) \overline{\zeta_i} \right),$$

$$\langle \alpha z + \beta w, \zeta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha \left(z_i \overline{\zeta_i} \right) + \beta \left(w_i \overline{\zeta_i} \right) \right),$$

$$\langle \alpha z + \beta w, \zeta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha \left(z_i \overline{\zeta_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \beta \left(w_i \overline{\zeta_i} \right),$$

$$\langle \alpha z + \beta w, \zeta \rangle = \alpha \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{\zeta_i} + \beta \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{\zeta_i},$$

$$\langle \alpha z+\beta w,\zeta\rangle=\alpha\langle z,\zeta\rangle+\beta\langle w,\zeta\rangle$$

dır. Dolayısıyla, $\langle,\rangle:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ fonksiyonu, $\mathbb{C}^n$ lineer uzayı üzerinde bir kompleks iç çarpım ve $\left(\mathbb{C}^n,\langle,\rangle\right)$ bir kompleks iç çarpım uzayıdır.

Örnek 1.7.4: $\langle,\rangle:l_2(\mathbb{C})\times l_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C},\forall z=(z_1,z_2,...,z_k,...),w=(w_1,w_2,...,w_k,...)\in l_2(\mathbb{C})$ için $\langle z,w\rangle:=\sum_{k=1}^{+\infty}z_k\overline{w_k}$ şeklinde tanımlanırsa; $\langle,\rangle$ fonksiyonu, $l_2(\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Gerçekten; $z=(z_1,z_2,...,z_k,...),w=(w_1,w_2,...,w_k,...)\in l_2(\mathbb{C})$ olduğundan $\sum_{k=1}^{+\infty}|z_k|^2<+\infty,\sum_{k=1}^{+\infty}|w_k|^2<+\infty$ dır. Dolayısıyla; $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(|z_k|^2+|w_k|^2\right)<+\infty$ dır. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $\left|z_k\overline{w_k}\right|=|z_k||w_k|\le\frac{1}{2}\left(|z_k|^2+|w_k|^2\right)$ olduğundan negatif terimli olmayan seriler için Birinci karşılaştırma teoremine göre $\sum_{k=1}^{+\infty}\left|z_k\overline{w_k}\right|<+\infty$ dır. Dolayısıyla, $\sum_{k=1}^{+\infty}z_k\overline{w_k}$ serisi mutlak yakınsaktır ve mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{+\infty}z_k\overline{w_k}$ kompleks serisi yakınsaktır. Dolayısıyla; $\forall z=(z_1,z_2,...,z_k,...),w=(w_1,w_2,...,w_k,...)\in l_2(\mathbb{C})$ için $\langle z,w\rangle:=\sum_{k=1}^{+\infty}z_k\overline{w_k}\in\mathbb{C}$ dir. $\langle,\rangle:l_2(\mathbb{C})\times l_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun iç çarpımın tüm özellikleri sağladığı kolayca görülür. Dolayısıyla; $\left(l_2(\mathbb{C}),\langle,\rangle\right)$ bir kompleks iç çarpım uzayıdır.

Örnek 1.7.5: $\langle,\rangle:l_2(\mathbb{R})\times l_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\forall x=(x_1,x_2,...,x_k,...),y=(y_1,y_2,...,y_k,...)\in l_2(\mathbb{R})$ için $\langle x,y\rangle:=\sum_{k=1}^{+\infty}x_ky_k$ şeklinde tanımlanırsa; $\langle,\rangle$ fonksiyonu, $l_2(\mathbb{R})$ üzerinde bir iç çarpımdır.

Tanım 1.7.6: $\left(H,\langle,\rangle\right)$ bir $F-$iç çarpım uzayı ve $x,y\in H$ olsun. $\langle x,y\rangle\in F$ sayısına;

$x \in H$ elemanı ile $y \in H$ elemanının iç çarpımı denir.

Teorem 1.7.7: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$iç çarpım uzayı olsun. Bu taktirde;

i. $\forall x \in H$ için $\langle \theta, x\rangle = 0$ dır.

ii. $\forall \alpha,\beta \in F$ ve $\forall x,y,z \in H$ için $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,z\rangle$ dır.

İspat:

i. $\langle,\rangle : H \times H \to F$, H üzerinde tanımlı bir iç çarpım olduğundan $\forall \alpha,\beta \in F$ ve $\forall u,v,w \in H$ için $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$ dir. Son eşitlikte; $x \in H$ için $w := x,\ \alpha := 0,\ \beta := 0$ alınırsa; $\langle 0.u + 0.v, x\rangle = 0\langle u,x\rangle + 0\langle v,x\rangle \Rightarrow \langle \theta + \theta, x\rangle = 0 + 0 \Rightarrow$ $\langle \theta, x\rangle = 0$ elde edilir.

ii. $\forall \alpha,\beta \in F$ ve $\forall x,y,z \in H$ için

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y,x\rangle + \beta\langle z,x\rangle} = \overline{\alpha\langle y,x\rangle} + \overline{\beta\langle z,x\rangle}$$

$$= \overline{\alpha}\,\overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\beta}\,\overline{\langle z,x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,z\rangle \text{ dir.}$$

Teorem 1.7.8 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$iç çarpım uzayı olsun. Bu taktirde; $\forall x,y \in H$ için $|\langle x,y\rangle| \le (\langle x,x\rangle)^{1/2}(\langle y,y\rangle)^{1/2}$ dır.

İspat:

i. $(\langle x,x\rangle)^{1/2}(\langle y,y\rangle)^{1/2} = 0$ ise; $\langle x,x\rangle = 0$ veya $\langle y,y\rangle = 0$ dır. O halde; $x = \theta$ veya $y = \theta$ olduğundan $\langle x,y\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla $|\langle x,y\rangle| = 0$ olup eşitsizlik doğrudur.

ii. $(\langle x,x\rangle)^{1/2}(\langle y,y\rangle)^{1/2} \ne 0$ olsun. O halde; $\langle x,x\rangle \ne 0$ ve $\langle y,y\rangle \ne 0$ olup; $\forall \lambda \in F$ için

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \ge 0 \quad \text{olduğundan}$$

$$\Rightarrow \langle x, x + \lambda y\rangle + \lambda\langle y, x + \lambda y\rangle \ge 0$$

$$\Rightarrow \langle x,x\rangle + \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\left(\langle y,x\rangle + \overline{\lambda}\langle y,y\rangle\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow \langle x,x\rangle + \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle \ge 0$$

$$\Rightarrow \langle x,x\rangle + \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\overline{\langle x,y\rangle} + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \geq 0$$

dır. Son eşitsizlik; $\forall\lambda \in F$ için doğru olduğundan $\lambda := -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} \in F$ için de doğrudur.

O halde; $\langle x,x\rangle + \overline{\left(-\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)}\langle x,y\rangle + \left(-\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right)\overline{\langle x,y\rangle} + \left|-\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right|^2\langle y,y\rangle \geq 0$ dır. Buradan;

$\langle x,x\rangle - \dfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \geq 0$ olup $|\langle x,y\rangle| \leq (\langle x,x\rangle)^{1/2}(\langle y,y\rangle)^{1/2}$ elde edilir.

Teorem 1.7.9: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı olsun. $\|\ \|_{\langle,\rangle} : H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x \in H$ için $\|x\|_{\langle,\rangle} := (\langle x,x\rangle)^{1/2}$ olarak tanımlanırsa; $\|\ \|_{\langle,\rangle}$, H üzerinde bir normdur.

İspat:

i. $\forall x \in H$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$ olduğundan $\|x\|_{\langle,\rangle} := (\langle x,x\rangle)^{1/2} \geq 0$ dır.

ii. $\theta \in H$ için $\langle \theta,\theta\rangle = 0$ olduğundan $\|\theta\|_{\langle,\rangle} = 0$ dır. Tersine olarak; $x \in H$ için $\|x\|_{\langle,\rangle} = 0$ olsun. O halde; $(\langle x,x\rangle)^{1/2} = 0$ olduğundan $\langle x,x\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla; $x = \theta$ dır.

iii. $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ ve $\forall x \in H$ için $\|\lambda x\|_{\langle,\rangle} := (\langle \lambda x,\lambda x\rangle)^{1/2}$ ve $\langle \lambda x,\lambda x\rangle = \lambda\langle x,\lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle = |\lambda|^2\langle x,x\rangle$ olduğundan $\forall\lambda \in F$ ve $\forall x \in H$ için $\|\lambda x\|_{\langle,\rangle} = \left(|\lambda|^2\langle x,x\rangle\right)^{1/2} = |\lambda|(\langle x,x\rangle)^{1/2} = |\lambda|\|x\|_{\langle,\rangle}$ dir. Dolayısıyla; $\forall\lambda \in F$ ve $\forall x \in H$ için $\|\lambda x\|_{\langle,\rangle} = |\lambda|\|x\|_{\langle,\rangle}$ dir.

iv. $\forall x,y \in H$ için $|\langle x,y\rangle| \leq (\langle x,x\rangle)^{1/2}(\langle y,y\rangle)^{1/2}$ olduğu göz önüne alındığında;

$\forall x,y \in H$ için

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{\langle,\rangle}^2 &= \|x\|_{\langle,\rangle}^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|_{\langle,\rangle}^2 = \|x\|_{\langle,\rangle}^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x,y\rangle) + \|y\|_{\langle,\rangle}^2 \\
&\leq \|x\|_{\langle,\rangle}^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|_{\langle,\rangle}^2 \\
&\leq \|x\|_{\langle,\rangle}^2 + 2(\langle x,x\rangle)^{1/2}(\langle y,y\rangle)^{1/2} + \|y\|_{\langle,\rangle}^2
\end{aligned}$$

$$=\|x\|_{\langle,\rangle}^2+2\|x\|_{\langle,\rangle}\|y\|_{\langle,\rangle}+\|y\|_{\langle,\rangle}^2$$
$$=\left(\|x\|_{\langle,\rangle}+\|y\|_{\langle,\rangle}\right)^2$$

dir. O halde; $\forall x,y\in H$ için $\|x+y\|_{\langle,\rangle}\le\|x\|_{\langle,\rangle}+\|y\|_{\langle,\rangle}$ dir. Dolayısıyla; $\|\ \|_{\langle,\rangle}, H$ üzerinde bir normdur ve $\|\ \|_{\langle,\rangle}$ normuna H üzerinde $\langle,\rangle$ iç çarpımının ürettiği norm denir. Kolaylık olsun diye; $\|\ \|_{\langle,\rangle}$ yerine; $\|\ \|$ sembolü kullanılır.

Teorem 1.7.10: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı ve $\|\ \|:H\to\mathbb{R}$, H üzerinde $\langle,\rangle$ iç çarpımının ürettiği norm ise; $\forall\, x,y\in H$ için

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2=\sum_{k=0}^{3}i^k\left\|x+i^ky\right\|^2 \text{ dir.}$$

İspat: $x,y\in H$ için

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2$$
$$-\|x-y\|^2=-\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle-\|y\|^2$$
$$i\|x+iy\|^2=i\|x\|^2+\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+i\|y\|^2$$
$$-i\|x-iy\|^2=-i\|x\|^2+\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle-i\|y\|^2$$

olduğundan eşitliklerinin hepsini taraf tarafa toplarsak;

$$4\langle x,y\rangle=\sum_{k=0}^{3}i^k\left\|x+i^ky\right\|^2$$

elde edilir.

Teorem 1.7.11 (Paralel Kenar Kuralı): $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı ve $\|\ \|:H\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, H üzerinde $\langle,\rangle$ iç çarpımının ürettiği norm olsun. Bu taktirde; $\forall\, x,y\in H$ için

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \text{ dir.}$$

İspat: $\forall\, x,y\in H$ için

$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2$ ve $\|x-y\|^2=\|x\|^2-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\|y\|^2$ olduğundan iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa; $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ elde edilir.

Tanım 1.7.12: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı ve $x,y\in H$ olsun. $\langle x,y\rangle=0$ ise; $x\in H$ vektörü, $y\in H$ vektörüne diktir denir ve $x\perp y$ yazılır.

Tanım 1.7.13: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$iç çarpım uzayı ve $M,N\subset H$ iki alt küme olsun.

i. $\forall m\in M$ için $\langle x,m\rangle=0$ ise; $x\in H$ vektörüne; M alt kümesine diktir denir ve bu durum $x\perp M$ ile gösterilir.

ii. $\forall m\in M,\forall n\in N$ için $\langle m,n\rangle=0$ ise; $M\subset H$ alt kümesi, $N\subset H$ alt kümesine diktir denir ve $M\perp N$ ile gösterilir.

$M\perp N$ ise; $N\perp M$ olduğu kolayca görülür.

Teorem 1.7.14 (Pisagor Teoremi): $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı ve $\|\ \|:H\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, H üzerinde $\langle,\rangle$ iç çarpımının ürettiği norm olsun. Bu takdirde; $x,y\in H$

$$x\perp y \text{ ise; } \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \text{ dir.}$$

İspat: $x,y\in H$ için $x\perp y$ olsun. O halde; $\langle x,y\rangle=0$ dir. Buradan; $\overline{\langle y,x\rangle}=0$ olduğundan $\langle y,x\rangle=0$ dır. O halde; $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ olduğundan $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ dir.

Teorem 1.7.15: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı olsun. $\{x_n\},\{y_n\}\subset H$ dizileri sırasıyla $x,y\in H$ noktalarına yakınsak iki dizi ise; $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle x_n,y_n\rangle=\langle x,y\rangle$ dir.

İspat: $\varepsilon>0$ keyfi olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\right| = \left|\langle x_n - x + x, y_n - y + y\rangle - \langle x, y\rangle\right|$$
$$= \left|\langle x_n - x, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle + \langle x, y_n - y\rangle + \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle\right|$$
$$\le \left|\langle x_n - x, y_n - y\rangle\right| + \left|\langle x_n - x, y\rangle\right| + \left|\langle x, y_n - y\rangle\right|$$
$$\le \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| + \|x\|\|y_n - y\|$$

dir. O halde; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ olduğundan

$$\exists N_1\left(\left\{\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{4}}\right\}\right) \equiv N_1 \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N_1 \text{ için} \|x_n - x\| < \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{4}} \text{ ve}$$

$$\exists N_2\left(\left\{\frac{\mathcal{E}}{4(1+\|y\|)}\right\}\right) \equiv N_2 \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N_2 \text{ için } \|x_n - x\| < \frac{\mathcal{E}}{4(1+\|y\|)} \quad (*)$$

dır. Diğer taraftan; $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ olduğundan

$$\exists N_3\left(\left\{\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{4}}\right\}\right) \equiv N_3 \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N_3 \text{ için} \|y_n - y\| < \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{4}} \text{ ve}$$

$$\exists N_4\left(\left\{\frac{\mathcal{E}}{4(1+\|x\|)}\right\}\right) \equiv N_4 \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N}, n \ge N_4 \text{ için } \|y_n - y\| < \frac{\mathcal{E}}{4(1+\|x\|)} \quad (**)$$

dır. O halde; $N(\mathcal{E}) := \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ olarak seçilirse; (*) ve (**)'dan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\right| < \frac{\mathcal{E}}{4} + \frac{\mathcal{E}}{4(1+\|y\|)}\|y\| + \frac{\mathcal{E}}{4(1+\|x\|)}\|x\| = \frac{3\mathcal{E}}{4} < \mathcal{E}$ elde edilir. Dolayısıyla; $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$ dır.

Tanım 1.7.16: $(H, \langle,\rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı ve $M \subset H$ olsun.

$M^{\perp} := \{x \mid x \in H \text{ ve } x \perp M\} \subset H$ alt kümesine; $M \subset H$'nin ortogonal bütünleyeni denir.

$\forall m \in M$ için $\langle \theta, m\rangle = 0$ olduğundan $\theta \perp M$ dolayısıyla $\theta \in M^{\perp}$ dir. Dolayısı ile $M^{\perp} \ne \varnothing$ dır.

Teorem 1.7.17: $(H, \langle,\rangle)$ bir $F-$iç çarpım uzayı ve $M \subset H$ olsun. Bu taktirde; $M^{\perp} \subset H$**,** H'nın kapalı bir alt lineer uzayıdır.

İspat: $\forall x \in M^{\perp}$ ve $\forall m \in M$ için $\langle x, m \rangle = 0$ dır. $\forall \alpha, \beta \in F$, $\forall x, y \in M^{\perp}$ ve $\forall m \in M$ için $\langle \alpha x + \beta y, m \rangle = \alpha \langle x, m \rangle + \beta \langle y, m \rangle = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ olduğundan $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$ dir. O halde; $M^{\perp} \subset H$, H 'nın bir alt lineer uzayıdır.

Diğer taraftan; $M^{\perp} \subset H$ alt lineer uzayının kapalı olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır. $\{x_n\} \subset M^{\perp}$, $x \in H$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $\forall m \in M$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\langle x_n, m \rangle = 0$ dır. $m \in M$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta için $\{(x_n, m)\} \subset H \times H$ dizisi yakınsak, $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n, m) \overset{\|\ \|}{=} (x, m)$ ve $\langle , \rangle : H \times H \to F$ fonksiyonu sürekli, dolayısıyla; dizisel sürekli olduğundan $\forall m \in M$ için $\langle x, m \rangle = \lim\limits_{n \to +\infty} \langle x_n, m \rangle = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ dır. O halde; $x \perp M$ olduğundan $x \in M^{\perp}$ dir. Teorem 1.1.25'den $M^{\perp} \subset H$ alt lineer uzayı bir kapalı alt lineer uzaydır.

1.8. Hilbert Uzayları

Tanım 1.8.1: $(H, \langle , \rangle)$ bir $F-$ iç çarpım uzayı ve $\|\ \| : H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, H üzerinde $\langle , \rangle$ iç çarpımının ürettiği norm olsun. $(H, \|\ \|)$ normlu $F-$lineer uzayı bir Banach uzayı ise; $(H, \langle , \rangle)$ iç çarpım uzayına bir $F-$Hilbert uzayı denir.

Örnek 1.8.2: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $\mathbb{R}^n$ reel lineer uzayı $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$ iç çarpımına göre bir reel Hilbert uzayıdır.

Örnek 1.8.3: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $\mathbb{C}^n$ kompleks lineer uzayı $\langle , \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\langle z, w \rangle := \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$ iç çarpımına göre bir kompleks Hilbert uzayıdır.

Örnek 1.8.4: $l_2(\mathbb{R})$ reel lineer uzayı,

$\langle , \rangle : l_2(\mathbb{R}) \times l_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...), y = (y_1, y_2, ..., y_k, ...) \in l_2(\mathbb{R})$ için

$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k$ iç çarpımına göre bir reel bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 1.8.5: $l_2(\mathbb{C})$ kompleks lineer uzayı,

$\langle , \rangle : l_2(\mathbb{C}) \times l_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \forall z = (z_1, z_2, ..., z_k, ...), w = (w_1, w_2, ..., w_k, ...) \in l_2(\mathbb{C})$ için

$\langle z, w \rangle := \sum_{k=1}^{+\infty} z_k \overline{w_k}$ iç çarpımına göre bir kompleks Hilbert uzayıdır.

Teorem 1.8.6 (En Kısa Uzaklık Teoremi): $(H, \langle , \rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı , $\varnothing \neq K \subset H$ kapalı ve konveks bir alt küme ve $a \in H$ olsun. Bu takdirde; $d(a, K) = \|a-k\|$ olacak şekilde bir tek $k \in K$ noktası vardır.

İspat: $d(a, K) := \inf\{\|a-x\| : x \in K\}$ olduğundan $d^2(a, K) := \inf\left\{\|a-x\|^2 : x \in K\right\}$ dır.

O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $d^2(a, K) \leq \|a-x_n\|^2 < d^2(a, K) + \frac{1}{n}$ olan bir $\{x_n\} \subset K$ dizisi vardır ve bu $\{x_n\} \subset K$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d^2(a, K) \leq \|a-x_n\|^2 < d^2(a, K) + \frac{1}{n}$ koşulunu sağladığından $\left\{\|a-x_n\|^2\right\} \subset \mathbb{R}$ dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to+\infty} \|a-x_n\|^2 = d^2(a, K)$ olur.

Diğer taraftan; paralel kenar kuralına göre; $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\|(x_n - a) + (x_m - a)\|^2 + \|(x_n - a) - (x_m - a)\|^2 = 2\left(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2\right)$$

$$\|(x_n + x_m) - 2a\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2\right)$$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x_n - a\|^2 + \|x_m - a\|^2\right) - 4\left\|\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m\right) - a\right\|^2 \qquad (*)$$

dir. $K \subset H$ konveks ve $\{x_n\} \subset K$ olduğundan $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m\right) \in K$ dır.

O halde; $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $d(a, K) \leq \left\|\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m\right) - a\right\|$ olduğundan ve

$d^2(a,K) \le \left\| \left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \right) - a \right\|^2$ dir. O halde; $-4\left\| \left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \right) - a \right\|^2 \le -4d^2(a,K)$ dir.

O halde; $\|x_n - a\|^2 \le d^2(a,K) + \frac{1}{n}$ ve $\|x_m - a\|^2 \le d^2(a,K) + \frac{1}{m}$ olduğundan (*)

eşitliğinden $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n - x_m\| < \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{2}{m}} < \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$ dir. O halde;

$N(\mathcal{E}) := EKE\left\{ l \middle| l \in \mathbb{N} \text{ ve } \frac{1}{l} < \frac{\mathcal{E}}{4} \right\}$ olarak seçilirse; $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n - x_m\| < \mathcal{E}$ olur. Bu ise; $\{x_n\} \subset K$ dizisinin H'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. O halde; $\{x_n\} \subset K$ dizisi H'da yakınsaktır. $k \in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n := k$ olsun. $K \subset H$ kapalı, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = k$ ve $\{x_n\} \subset K$ olduğundan $k \in K$ dır. $d^2(a,K) = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - a\|^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = k$ ve $\| \ \|$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - a\|^2 = \|k - a\|^2$ dir. Dolayısıyla; $d^2(a,K) = \|k - a\|^2$ olduğundan $d(a,K) = \|a - k\|$ dır.

Son olarak; $k \in K$ noktasının tek olduğunu gösterelim. $k^* \in K$, $d(a,K) = \|k^* - a\|$ koşulunu sağlayan başka bir nokta olsun. $K \subset H$ konveks ve $k, k^* \in K$ olduğundan

$\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k^* \right) \in K$ dır. O halde; $d(a,K) \le \left\| \left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k^* \right) - a \right\|$ olduğundan

$4d^2(a,K) \le \left\| \left(k + k^* \right) - 2a \right\|^2$ (*) dır. Paralel kenar kuralına göre ,

$\left\| (k-a) + (k^* - a) \right\|^2 + \left\| (k-a) - (k^* - a) \right\|^2 = 2\left(\|k-a\|^2 + \|k^* - a\|^2 \right)$ dır. (*)'da her iki tarafa $\|k - k^*\|^2 \ge 0$ sayısı eklenirse;

$$4d^2(a,K) + \|k - k^*\|^2 \le \left\| (k + k^*) - 2a \right\|^2 + \|k - k^*\|^2 \text{ olur. O halde;}$$

$$4d^2(a,K) + \|k - k^*\|^2 \le \left\| (k-a) + (k^* - a) \right\|^2 + \left\| (k-a) - (k^* - a) \right\|^2$$

$4d^2(a,K) + \|k - k^*\|^2 \le 2\left(\|k-a\|^2 + \|k^* - a\|^2 \right)$ dır. $d(a,K) = \|k - a\|$ ve $d(a,K) = \|k^* - a\|$ olduğundan $4d^2(a,K) + \|k - k^*\|^2 \le 4d^2(a,K)$ dır. O halde; $0 \le \|k - k^*\|^2 \le 0$ olduğundan

$\left\|k-k^*\right\|^2=0$ dır. Dolayısıyla; $k=k^*$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 1.8.7: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı , $\varnothing\neq K\subset H$ kapalı bir alt uzay, $a\in H$ ve $k_0\in K$ olsun. $d(a,K)=\|a-k_0\|$ olması için gerek ve yeter koşul $(a-k_0)\perp K$ olmasıdır.

İspat:

i. $k_0\in K$ için $d(a,K)=\|a-k_0\|$ ise; $(a-k_0)\perp K$ dır.

$k\in K$ keyfi fakat sabit olan bir nokta olsun. $k=\theta$ ise; $\langle a-k_0,\theta\rangle=0$ dır.

$k\neq\theta$ ise; $\|k\|^2>0$ ve $K\subset H$ alt uzay olduğundan $k_0+\dfrac{\langle a-k_0,k\rangle k}{\|k\|^2}\in K$ olur. O halde;

$$d^2(a,K)\leq\left\|a-k_0-\frac{\langle a-k_0,k\rangle k}{\|k\|^2}\right\|^2 \text{ dir.}$$

$$d^2(a,K)\leq\|a-k_0\|^2-2\frac{|\langle a-k_0,k\rangle|^2}{\|k\|^2}+\frac{|\langle a-k_0,k\rangle|^2}{\|k\|^2} \text{ olduğundan}$$

$d^2(a,K)\leq d^2(a,K)-\dfrac{|\langle a-k_0,k\rangle|^2}{\|k\|^2}$ ve buradan $\langle a-k_0,k\rangle=0$ dır. O halde; $\forall k\in K$ için $\langle a-k_0,k\rangle=0$ olduğundan $(a-k_0)\perp K$ dır.

ii. $k_0\in K$ için $(a-k_0)\perp K$ ise; $d(a,K)=\|a-k_0\|$ dır.

$k_0\in K$ ve $d(a,K):=\inf\{\|a-x\|:x\in K\}$ olduğundan $d(a,K)\leq\|a-k_0\|$ dir. Diğer taraftan; $(a-k_0)\perp K$ olduğundan $\forall k\in K$ için $\langle a-k_0,k\rangle=0$ dır. $\forall k\in K$ için $k_0-k\in K$ ve $(a-k_0)\perp K$ olduğundan Pisagor teoremine göre; $\|a-k_0+k_0-k\|^2=\|a-k_0\|^2+\|k_0-k\|^2$ dır. O halde; $\forall k\in K$ için $\|a-k\|^2=\|a-k_0+k_0-k\|^2=\|a-k_0\|^2+\|k_0-k\|^2\geq\|a-k_0\|^2$ yani; $\|a-k_0\|\leq d(a,K)$ dır. Dolayısı ile; $d(a,K)\leq\|a-k_0\|$ ve $\|a-k_0\|\leq d(a,K)$ olduğundan $d(a,K)=\|a-k_0\|$ dir.

Teorem 1.8.8: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ Hilbert uzayı ve $\varnothing\neq M\subset H$ kapalı bir alt lineer uzay olsun. Bu takdirde; $H=M\oplus M^{\perp}$ dir.

İspat: $x \in H$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $M \subset H$ kapalı bir alt uzay olduğundan $d(x,M) = \|x - x_M\|$ olan bir tek $x_M \in M$ mevcuttur. Teorem 1.8.7' den dolayı $x - x_M \perp M$ dir. O halde, $x - x_M \in M^{\perp}$ dir. Buradan; $x - x_M = x_{M^{\perp}}$ olacak şekilde en az bir $x_{M^{\perp}} \in M^{\perp}$ mevcuttur. Yani; $x = x_M + x_{M^{\perp}}$ dir. Öte yandan; $x = m + n$ olacak şekilde $m \in M, n \in M^{\perp}$ mevcut olsun. $x = x_M + x_{M^{\perp}}$ ve $x = m + n$ olduğundan $x_M + x_{M^{\perp}} = m + n$ dir. O halde; $x_M - m = n - x_{M^{\perp}}$ ve $(x_M - m) \in M, (n - x_{M^{\perp}}) \in M^{\perp}$ ve $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$ olduğundan $x_M - m = \theta, n - x_{M^{\perp}} = \theta$ dır. O halde; $x_M = m, x_{M^{\perp}} = n$ dir. Dolayısıyla; $\forall x \in H$ için $x = x_M + x_{M^{\perp}}$ olacak şekilde bir tek $(x_M, x_{M^{\perp}}) \in M \times M^{\perp}$ ikilisi mevcuttur. Dolayısıyla; $\forall x \in H$ için $x = x_M + x_{M^{\perp}}$ ve $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$ olduğundan $H = M \oplus M^{\perp}$ dir.

Teorem 1.8.9: $(H, \langle , \rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $\varnothing \neq M \subset H$ bir alt küme olsun. Bu takdirde; $M^{\perp} = \left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp}$ dir.

İspat: $u \in \left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp}$ keyfi olsun. O halde; $\forall v \in \overline{\langle M \rangle}$ için $\langle u, v \rangle = 0$ dır. Öte yandan; $\forall m \in M$ için $m \in \langle M \rangle$ ve $\langle M \rangle \subset \overline{\langle M \rangle}$ olduğundan $m \in \overline{\langle M \rangle}$ dir. O halde; $\langle u, m \rangle = 0$ dır. $\forall m \in M$ için $\langle u, m \rangle = 0$ olduğundan $u \in M^{\perp}$ dir. O halde; $\left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp} \subset M^{\perp}$ dir.

Tersine olarak; $x \in M^{\perp}$ ise; $\forall m \in M$ için $\langle x, m \rangle = 0$ dır. Dolayısı ile $\forall u \in \langle M \rangle$ için $\langle x, u \rangle = 0$ dır. O halde; iç çarpım fonksiyonunun sürekliliğinden dolayı $\forall v \in \overline{\langle M \rangle}$ için $\langle x, v \rangle = 0$ olup; $x \in \left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp}$ dir. O halde; $M^{\perp} \subset \left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp}$ dır. Dolayısıyla; $\left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp} \subset M^{\perp}$ ve $M^{\perp} \subset \left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp}$ olduğundan $M^{\perp} = \left(\overline{\langle M \rangle}\right)^{\perp}$ dir.

Teorem 1.8.10: $(H, \langle , \rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $\varnothing \neq M \subset H$ bir alt küme olsun. $\overline{\langle M \rangle} = H$ olması için gerek ve yeter koşul $M^{\perp} = \{\theta\}$ olmasıdır.

İspat:

i. $\overline{\langle M\rangle}=H$ ise; $M^{\perp}=\{\theta\}$ dir.

$x\in M^{\perp}$ olsun. O halde; $x\in H$ ve $x\perp M$ dir. $\forall y\in M$ için $x\perp y$,dolayısıyla $\langle x,y\rangle=0$ dır. O halde; $\forall u\in\overline{\langle M\rangle}$ için $\langle x,u\rangle=0$ dır. O halde; $x\perp\overline{\langle M\rangle}$dir. $\overline{\langle M\rangle}=H$ olduğundan $x\perp x$ dir. O halde; $\langle x,x\rangle=0$dır. Dolayısıyla $x=\theta$ dır. Sonuç olarak; $\overline{\langle M\rangle}=H$ ise; $\forall x\in M^{\perp}$ için $x=\theta$ olduğundan $M^{\perp}=\{\theta\}$ dır.

ii. $M^{\perp}=\{\theta\}$ ise; $\overline{\langle M\rangle}=H$ dır. Farz edelim ki $\overline{\langle M\rangle}\neq H$ olsun. O halde; $\exists x_o\in H\therefore x_o\in H\setminus\overline{\langle M\rangle}$ dır. O halde; $x_o\in H$ için $x_o\notin\overline{\langle M\rangle}$ dır. $\overline{\langle M\rangle}\subset H$ bir alt lineer uzay olduğundan $\theta\in\overline{\langle M\rangle}$ dır. O halde; $x_o\neq\theta$ dır. Öte yandan; $\overline{\langle M\rangle}\subset H,H$ ’da kapalı bir alt lineer uzay olduğundan Teorem 1.8.8’ den $H=\overline{\langle M\rangle}\oplus\left(\overline{\langle M\rangle}\right)^{\perp}$ dır. Buradan; $x_o\notin\overline{\langle M\rangle}$ olduğundan $x_o\in\left(\overline{\langle M\rangle}\right)^{\perp}$ dir. Diğer taraftan; yukarıdaki teoremden $M^{\perp}=\left(\overline{\langle M\rangle}\right)^{\perp}$ olduğundan $\left(\overline{\langle M\rangle}\right)^{\perp}=\{\theta\}$ dır. O halde; $x_o\in\left(\overline{\langle M\rangle}\right)^{\perp}$ için $x_o=\theta$ olur ki bu $x_o\neq\theta$ olmasıyla çelişir. Dolayısı ile $M^{\perp}=\{\theta\}$ ise; $\overline{\langle M\rangle}=H$ dır.

Sonuç 1.8.11: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $M\subset H$ bir kapalı alt lineer uzay olsun.

$M^{\perp}=\{\theta\}$ olması için gerek ve yeter koşul $M=H$ olmasıdır.

İspat: $M\subset H$ bir kapalı alt lineer uzay olduğundan $\overline{\langle M\rangle}=M$ dir. Dolayısı ile yukarıdaki teoreme göre ispat açıktır.

Teorem 1.8.12: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $M,N\subset H$; $M\perp N$ olan kapalı iki alt lineer uzay olsun. Bu takdirde; $M\oplus N\subset H$ kapalı bir alt lineer uzaydır.

İspat: $M\perp N$ olduğundan $M\cap N=\{\theta\}$ dır. O halde; $M\oplus N\subset H$ tanımlıdır.

$\{z_n\}\subset M\oplus N$ yakınsak ve $z\in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty}z_n=z$ olan herhangi bir dizi olsun. Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisi olduğundan $\{z_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $z_n\in M\oplus N$ olduğundan

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n = x_n + y_n$ olacak şekilde $\{x_n\} \subset M$ ve $\{y_n\} \subset N$ dizileri mevcuttur.

$\{z_n\} \subset M \oplus N$ bir Cauchy dizi olduğundan $\forall \mathcal{E} > 0$ için $\exists N(\mathcal{E}) \in \mathbb{N} \therefore$

$\forall m,n \in \mathbb{N}, m,n \geq N(\mathcal{E})$ için $\|z_n - z_m\| < \mathcal{E}$ dır. Diğer taraftan; $M \perp N$ olduğundan

$\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $\|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$ dir. Son eşitlik; $\{x_n\} \subset M$ ve $\{y_n\} \subset N$ dizilerinin birer Cauchy dizi olduğunu gösterir. O halde; $\{x_n\} \subset M$ ve $\{y_n\} \subset N$ dizileri yakınsaktır. $x, y \in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n := x$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n := y$ olsun. $M, N \subset H$ kümeleri kapalı olduğundan $x \in M$ ve $y \in N$ dir. Diğer taraftan; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n = x_n + y_n$ olduğundan $z = x + y \in M \oplus N$ dir. O halde; Teorem 1.1.25' den $M \oplus N \subset H$ kapalı bir alt lineer uzaydır.

Tanım 1.8.13: $(H, \langle , \rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $\varnothing \neq M \subset H$ olsun. $\forall x \in M$ için $\|x\| = 1$ ve $x \neq y$ olan $\forall x, y \in M$ için $x \perp y$ ise; $M \subset H$ alt kümesine, H 'nın ortonormal bir alt kümesi denir.

$M \subset H$ ortonormal alt kümesi $M^{\perp} = \{\theta\}$ koşulunu sağlıyorsa; $M \subset H$ alt kümesine, H 'nın bir tam ortonormal alt kümesi denir.

Teorem 1.8.14: $(H, \langle , \rangle)$ ayrılabilir bir $F-$Hilbert uzayı ve $\varnothing \neq M \subset H$ olsun. $M \subset H$ bir tam ortonormal alt küme ise; $M \subset H$ sayılabilir bir alt kümedir.

İspat: $(H, \langle , \rangle)$ ayrılabilir bir $F-$Hilbert uzayı olduğundan $\overline{X} = H$ olan sayılabilir bir $X \subset H$ alt kümesi mevcuttur. $\varnothing \neq I \subset \mathbb{N}$ için $X := \{x_n | n \in I \subset \mathbb{N}\}$ olsun. $\overline{X} = H$ olduğundan $\overline{X} := \overline{\{x_n | n \in I \subset \mathbb{N}\}}$ dir. $\varnothing \neq M \subset H$ olduğundan $\forall m \in M$ için $m \in \overline{X}$ dir. O halde; $\forall \mathcal{E} > 0$ için $B_{\|\,\|}(m, \mathcal{E}) \cap X \neq \varnothing$ dır. O halde; $\|m - x_l\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ olan en az bir $x_l \in X$ mevcuttur. Öte yandan; $\varnothing \neq \left\{ l \middle| l \in \mathbb{N} \text{ ve } \|m - x_l\| < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \subset \mathbb{N}$ dır. O halde;

$n_m := EKE\left\{ l \middle| l \in \mathbb{N} \text{ ve } \|m - x_l\| < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \subset \mathbb{N}$ olsun. $n_m \in \left\{ l \middle| l \in \mathbb{N} \text{ ve } \|m - x_l\| < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \subset \mathbb{N}$ olduğundan $\|m - x_{n_m}\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ dır. $\phi : M \to \mathbb{N}$ fonksiyonu, $\forall m \in M$ için $\phi(m) := n_m$ olarak tanımlansın. İddia: ϕ, birebir bir fonksiyondur.

$m_1, m_2 \in M; m_1 \neq m_2$ olsun. $\phi(m_1) \neq \phi(m_2)$ olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır. $m_1, m_2 \in M; m_1 \neq m_2$ olduğundan $m_1 \perp m_2$ ve $\|m_1\| = 1, \|m_2\| = 1$ dir. O halde;

$\|m_1 - m_2\|^2 = \|m_1\|^2 + \|m_2\|^2 = 2$ olduğundan $\|m_1 - m_2\| = \sqrt{2}$ dir. Öte yandan;

$$\|m_1 - m_2\| = \left\|m_1 - x_{n_{m_1}} + x_{n_{m_1}} - m_2\right\|$$
$$\|m_1 - m_2\| \leq \left\|m_1 - x_{n_{m_1}}\right\| + \left\|x_{n_{m_1}} - m_2\right\|$$

ve $\|m_1 - m_2\| = \sqrt{2}$, $\left\|m_1 - x_{n_{m_1}}\right\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left\|x_{n_{m_1}} - m_2\right\|$ dir. Son eşitsizlikten; $n_{m_1} \neq n_{m_2}$, yani; $\phi(m_1) \neq \phi(m_2)$ elde edilir ve ispat tamamlanır. ($n_{m_1} = n_{m_2}$ olsaydı, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left\|m_2 - x_{n_{m_1}}\right\| = \left\|m_2 - x_{n_{m_2}}\right\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ çelişkisi elde edilirdi.)

Teorem 1.8.15: $(H, \langle , \rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı olsun. H'nın ayrılabilir bir Hilbert uzayı olması için gerek ve yeter koşul H'nın sayılabilir, ortonormal bir tam tabanının mevcut olmasıdır.

Teorem 1.8.16 (Riesz- Frechet Teoremi): $(H, \langle , \rangle)$ bir $F-$ Hilbert uzayı ve $f \in B(H, F)$ olsun. Bu takdirde; $\forall x \in H$ için $f(x) = \langle x, a \rangle$ ve $\|f\| = \|a\|$ olacak şekilde bir tek $a \in H$ noktası vardır.

İspat: $M := Çekf$ olsun. $f(\theta) = 0$ olduğundan $\theta \in M$ ve $M \neq \emptyset$ dır. Öte yandan; $f \in B(H, F)$ olduğundan Sonuç 1.6.14'den $Çekf \subset H$, H'nın kapalı bir alt uzayıdır.

i. $M = H$ ise; $\forall x \in H$ için $f(x) = 0$ olduğundan $f = O$ dır. O halde; $a := \theta$ olarak alınırsa; $\forall x \in H$ için $f(x) = \langle x, \theta \rangle$ ve $\|f\| = \|O\| = 0 = \|\theta\|$ koşulları sağlanır.

ii. $M \neq H$ olsun. O halde; $f(y) \neq 0$ olan en az bir $y \in H$ noktası vardır.

$f(y) \neq 0$ olan $y \in H$ için $\frac{1}{f(y)} y \in H$ ve $f\left(\frac{1}{f(y)} y\right) = 1$ olduğundan $f \neq O$ ise; $f(z) = 1$ koşulunu sağlayan en az bir $z \in H$ mevcuttur. $f(z) = 1$ olduğundan $z \neq \theta$ dır. O halde; $x \in X$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta ve $a := \frac{1}{\|z\|^2} z \in H$ olsun. $x - f(x)z \in H$ için

$f(x - f(x)z) = f(x) - f(x).f(z) = f(x) - f(x).1 = 0$ olduğundan $x - f(x)z \in M$ dir.

O halde; Teorem 1.8.8'e göre; $H = M \oplus M^{\perp}$ ve $z \in H$ için $f(z) = 1$ olduğundan $z \in M^{\perp}$, dolayısıyla $a := \frac{1}{\|z\|^2} z \in M^{\perp}$ dir. $\forall x \in H$ için $x - f(x)z \in M$ ve $a \in M^{\perp}$ olduğundan

$\forall x \in H$ için $\langle x - f(x)z, a \rangle = 0$ dır. Dolayısıyla; $\forall x \in H$ için

$$\langle x - f(x)z, a \rangle = 0$$
$$\langle x, a \rangle - f(x)\langle z, a \rangle = 0$$
$$\langle x, a \rangle - f(x)\left\langle z, \frac{1}{\|z\|^2} z \right\rangle = 0$$
$$\langle x, a \rangle - f(x)\frac{\langle z, z \rangle}{\|z\|^2} = 0$$
$$\langle x, a \rangle - f(x) = 0$$

dır. Yani; $\forall x \in H$ için $f(x) = \langle x, a \rangle$ dır. Öte yandan; Cauchy Scwhartz Eşitsizliğinden $|f(x)| = |\langle x, a \rangle| \leq \|x\| \|a\|$ olduğundan $\|f\| \leq \|a\|$ dır. Diğer taraftan; $f(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2$ olduğundan $\|a\| = \left| f\left(\frac{1}{\|a\|} a\right) \right| \in \{ |f(x)| \, x \in H, \|x\|_X \leq 1 \}$ olduğundan $\|a\| \leq \|f\|$ dır.

Dolayısıyla; $\|f\| \leq \|a\|$ ve $\|a\| \leq \|f\|$ olduğundan $\|f\| = \|a\|$ dır.

Son olarak; $a \in H$ 'nin tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $a, b \in H, \forall x \in H$ için $f(x) = \langle x, a \rangle$ ve $f(x) = \langle x, b \rangle$ koşullarını sağlayan iki nokta olsun. O halde; $\forall x \in H$ için $\langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle$ dir. Buradan; $\forall x \in H$ için $\langle x, a \rangle - \langle x, b \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, a - b \rangle = 0$ dir. O halde; $x := a - b \in H$ alınırsa; $0 = \langle a - b, a - b \rangle$ olduğundan $a - b = \theta$ dolayısıyla $a = b$ dir.

Teorem 1.8.17: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $T:H\to H$ bir lineer dönüşüm olsun. $\forall x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle=0$ ise; $T=O$ dır.

İspat: $\forall x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle=0$ olduğundan $y:=T(x)\in H$ alınırsa; $T(x)=\theta$ olur. $\forall x\in H$ için $T(x)=\theta$ olduğundan $T=O$ dır.

Teorem 1.8.18: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $S,T:H\to H$ iki lineer dönüşüm olsun. $\forall x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle=\langle S(x),y\rangle$ ise; $T=S$ dir.

İspat: $\forall x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle=\langle S(x),y\rangle$ olduğundan

$\langle T(x)-S(x),y\rangle=\langle (T-S)(x),y\rangle=0$ dir. O halde; yukarıdaki teoremden $T=S$ dir.

Teorem 1.8.19: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. Bu takdirde;

$T\in B(H),\forall x\in H$ için $\langle T(x),x\rangle=0$ şartını sağlayan sınırlı bir lineer operatör ise; $T=O$ dır.

İspat: İç çarpım ve bir lineer dönüşümün özellikleri kullanılarak $\forall x,y\in H$ için

$\langle T(x+y),x+y\rangle+i\langle T(x+iy),x+iy\rangle-\langle T(x-y),x-y\rangle-i\langle T(x-iy),x-iy\rangle=4\langle T(x),y\rangle$

yani,

$$4\langle T(x),y\rangle=\sum_{k=0}^{3} i^k\left\langle T(x+i^k y),x+i^k y\right\rangle \quad (*)$$

olduğu görülür. $T\in B(H),\forall x\in H$ için $\langle T(x),x\rangle=0$ şartını sağlayan sınırlı bir lineer operatör olduğundan $(*)$'dan dolayı $\forall x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle=0$ dır. O halde; Teorem 1.8.17' den $T=O$ dır.

Bu teorem reel Hilbert uzaylarında doğru değildir. Gerçekten; $(\mathbb{R}^2,\langle,\rangle)$ Hilbert uzayını göz önüne alalım. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ fonksiyonu, $\forall\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ için $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right):=\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$ olarak tanımlanırsa; $T\in B(\mathbb{R}^2)$ dir. Fakat;

$$\left\langle T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle = (-y)x + xy = 0 \text{ olmasına rağmen } T \neq O \text{ dır.}$$

Teorem 1.8.20: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $T\in B(H)$ olsun. Bu takdirde; $\forall x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle = \langle x,T^*(y)\rangle$ koşulunu sağlayan ve $\|T\|=\|T^*\|$ olan bir tek $T^*\in B(H)$ mevcuttur.

İspat: $y\in H$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olmak üzere; $f_y : H\to F$ fonksiyonu, $\forall x\in H$ için $f_y(x) := \langle T(x),y\rangle$ olsun. $\forall x_1,x_2\in H$ ve $\forall \alpha,\beta\in F$ için

$$\begin{aligned} f_y(\alpha x_1+\beta x_2) &= \langle T(\alpha x_1+\beta x_2),y\rangle \\ &= \langle \alpha T(x_1)+\beta T(x_2),y\rangle \\ &= \alpha\langle T(x_1),y\rangle + \beta\langle T(x_2),y\rangle \\ &= \alpha f_y(x_1)+\beta f_y(x_2) \end{aligned}$$

olduğundan f_y dönüşümü lineerdir. Öte yandan; $\forall x\in H$ için

$|f_y(x)| = |\langle T(x),y\rangle| \leq \|T(x)\|\|y\| \leq (\|T\|\|y\|)\|x\|$ dir.O halde; $f_y\in B(H,F)$ dir. O halde; Riesz Frechet Teoreminden $\forall x\in H$ için $f_y(x)=\langle x,z_y\rangle$ olacak şekilde bir tek $z_y\in H$ noktası vardır ve $\|f_y\|=\|z_y\|$ dir. O halde; $\forall x\in H$ için $\langle T(x),y\rangle = \langle x,z_y\rangle$ dır.

$T^* : H\to H$ dönüşümü; $y\in H$ için $z_y\in H$ noktası, $\forall x\in H$ için $\langle T(x),y\rangle=\langle x,z_y\rangle$ koşulunu sağlayan nokta olmak üzere; $T^*(y):=z_y$ olarak tanımlanırsa, $T^*\in B(H)$ ve $\|T\|=\|T^*\|$ dır. Gerçekten; $\forall \alpha,\beta\in F$ ve $\forall y_1,y_2\in H$

$$\begin{aligned} \langle x,T^*(\alpha y_1+\beta y_2)\rangle &= \langle T(x),\alpha y_1+\beta y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle T(x),y_1\rangle + \overline{\beta}\langle T(x),y_2\rangle \\ &= \overline{\alpha}\langle x,T^*(y_1)\rangle + \overline{\beta}\langle x,T^*(y_2)\rangle \\ &= \langle x,\alpha T^*(y_1)\rangle + \langle x,\beta T^*(y_2)\rangle \\ &= \langle x,\alpha T^*(y_1)+\beta T^*(y_2)\rangle \end{aligned}$$

dir. O halde; $\forall \alpha,\beta\in F$ ve $\forall y_1,y_2\in H$ için $\langle x,T^*(\alpha y_1+\beta y_2)-\alpha T^*(y_1)-\beta T^*(y_2)\rangle = 0$

dır. Son eşitlikte; $x := T^*\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) - \alpha T^*\left(y_1\right) - \beta T^*\left(y_2\right) \in H$ alınırsa;

$T^*\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) - \alpha T^*\left(y_1\right) - \beta T^*\left(y_2\right) = \theta$, dolayısıyla;

$T^*\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = \alpha T^*\left(y_1\right) + \beta T^*\left(y_2\right)$ olduğu görülür. Yani; T^* dönüşümü lineerdir.

$\forall x, y \in H$ için $\left\langle x, T^*\left(y\right)\right\rangle = \left\langle T\left(x\right), y\right\rangle$ olduğundan $x := T^*(y)$ alınır ve Cauchy- Schwarz Eşitsizliği kullanılırsa; $\forall y \in H$ için $\left\|T^*\left(y\right)\right\|^2 \le \|T\|\left\|T^*\left(y\right)\right\|\|y\|$ elde edilir. Son eşitsizlikten; $T^*(y) \neq \theta$ ise; $\left\|T^*\left(y\right)\right\| \le \|T\|\|y\|$ dır. $T^*(y) = \theta$ ise; $\left\|T^*\left(y\right)\right\| \le \|T\|\|y\|$ eşitsizliği doğrudur. O halde; $\forall y \in H$ için $\left\|T^*\left(y\right)\right\| \le \|T\|\|y\|$ dır. Dolayısıyla; $T^* \in B(H)$ ve $\left\|T^*\right\| \le \|T\|$ dir. Diğer taraftan; $\forall x, y \in H$ için $\left\langle T\left(x\right), y\right\rangle = \left\langle x, T^*\left(y\right)\right\rangle$ olduğundan $y := T\left(x\right)$ alınır ve Cauchy- Schwarz Eşitsizliği kullanılırsa; $\forall x \in H$ için $\left\|T\left(x\right)\right\|^2 \le \left\|T^*\right\|\left\|T\left(x\right)\right\|\|x\|$ dır. Bu eşitsizlikten; yukarıdaki gibi işlem yapılırsa; $\forall x \in H$ için $\left\|T\left(x\right)\right\| \le \left\|T^*\right\|\|x\|$ dolayısı ile; $\|T\| \le \left\|T^*\right\|$ elde edilir. O halde; $\|T\| = \left\|T^*\right\|$ dir.

Son olarak; $T^* \in B(H)$'ın tek olduğunu gösterelim. $T^*, S^* \in B(H)$; $\forall x, y \in H$ için $\left\langle T(x), y\right\rangle = \left\langle x, T^*\left(y\right)\right\rangle$, $\left\langle T(x), y\right\rangle = \left\langle x, S^*\left(y\right)\right\rangle$ ve $\|T\| = \left\|T^*\right\|$, $\|T\| = \left\|S^*\right\|$ koşullarını sağlayan iki sınırlı lineer dönüşüm olsun. O halde; $\forall x, y \in H$ için $\left\langle x, T^*\left(y\right)\right\rangle = \left\langle x, S^*\left(y\right)\right\rangle$ olduğundan $\left\langle x, \left(T^* - S^*\right)\left(y\right)\right\rangle = 0$ dır. Dolayısıyla; Teorem 1.8.17'den $T^* = S^*$ olup ispat tamamlanır.

Tanım 1.8.21: $\left(H, \langle , \rangle\right)$ bir $F-$Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. $\forall x, y \in H$ için $\left\langle T(x), y\right\rangle = \left\langle x, T^*\left(y\right)\right\rangle$ koşulunu sağlayan ve $\|T\| = \left\|T^*\right\|$ olan, varlığı ve tekliği yukarıdaki teorem ile ispat edilen $T^* \in B(H)$ sınırlı lineer dönüşümüne, $T \in B(H)$ sınırlı lineer dönüşümünün eki denir.

Teorem 1.8.22: $(H,\langle,\rangle)$ bir $F-$ Hilbert uzayı, $T,S\in B(H)$ ve $\alpha\in F$ olsun. Bu takdirde;

i. $T^{**}=T$

ii. $(T+S)^{*}=T^{*}+S^{*}$ dır.

iii. $(TS)^{*}=S^{*}T^{*}$ dır.

iv. $(\alpha T)^{*}=\overline{\alpha}T^{*}$ dır.

İspat: $T,S\in B(H)$ olduğundan $\forall x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^{*}(y)\rangle$ ve $\langle S(x),y\rangle=\langle x,S^{*}(y)\rangle$ koşulunu sağlayan $T^{*},S^{*}\in B(H)$ sınırlı lineer dönüşümleri mevcuttur. $T+S,\alpha T,TS,T^{*}\in B(H)$ olduğundan $(T+S)^{*},(\alpha T)^{*},(TS)^{*},T^{**}\in B(H)$ ekleri vardır ve tek türlü olarak belirlidir.

i. $\forall x,y\in H$ için $\langle T^{*}(x),y\rangle=\overline{\langle y,T^{*}(x)\rangle}=\overline{\langle T(y),x\rangle}=\langle x,T(y)\rangle$ olduğundan $T^{**}=T$ dir.

ii. $\forall x,y\in H$ için

$$\begin{aligned}\langle (T+S)(x),y\rangle&=\langle T(x)+S(x),y\rangle\\&=\langle T(x),y\rangle+\langle S(x),y\rangle\\&=\langle x,T^{*}(y)\rangle+\langle x,S^{*}(y)\rangle\\&=\langle x,(T^{*}+S^{*})(y)\rangle\end{aligned}$$

olduğundan $(T+S)^{*}=T^{*}+S^{*}$ dır.

iii. $\forall x,y\in H$ için

$$\langle (TS)(x),y\rangle=\langle T(S(x)),y\rangle=\langle S(x),T^{*}(y)\rangle=\langle x,S^{*}(T^{*}(y))\rangle=\langle x,(S^{*}T^{*})(y)\rangle$$

olduğundan $(TS)^{*}=S^{*}T^{*}$ dır.

iv. $\forall x,y\in H$ için

$$\langle(\alpha T)(x),y\rangle=\langle \alpha T(x),y\rangle=\alpha\langle T(x),y\rangle=\alpha\langle x,T^{*}(y)\rangle=\langle x,\overline{\alpha}T^{*}(y)\rangle=\langle x,(\overline{\alpha}T^{*})(y)\rangle$$

olduğundan $(\alpha T)^{*}=\overline{\alpha}T^{*}$ dır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Kompleks Hilbert Uzaylarında Operatörler

Tanım 2.1.1: $\left(H,\langle,\rangle\right)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. $T:H\to H$ dönüşümü bir lineer dönüşüm ise; T 'ye $\left(H,\langle,\rangle\right)$ kompleks Hilbert uzayında bir lineer operatör denir.

Tanım 2.1.2.[6]: $\left(H,\langle,\rangle\right)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T\in B(H)$ olsun.

$T:H\to H$ dönüşümü örten bir izometri ise; T 'ye bir üniter operatör denir.

Tanım 2.1.3.[6]: $\left(H,\langle,\rangle\right)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T\in B(H)$ olsun.

$T:H\to H$ dönüşümü birebir ve örten ise; T 'ye bir tersinir operatör denir ve T operatörünün tersi T^{-1} ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem [6: Sayfa 121]'de verilen problemin çözümü olarak verilmektedir.

Teorem 2.1.4: $\left(H,\langle,\rangle\right)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T\in B(H)$ olsun. Bu takdirde; aşağıdakiler birbirine denktir:

i. T üniterdir.
ii. T $1-1$,örten ve $T^{-1}=T^{*}$ dır.
iii. $T^{*}T=TT^{*}=I$ dır.
iv. T,T^{*} birer izometridir.
v. T izometri ve T^{*} $1-1$ dir.
vi. T^{*} üniterdir.

İspat :

$i\Rightarrow ii$ T bir üniter operatör ise; T $1-1$,örten ve $T^{-1}=T^{*}$ dır.

T bir üniter operatör olduğundan örten bir izometridir. O halde; T birebirdir ve dolayısıyla; T, tersinir bir operatördür . Öte yandan; $T \in B(H)$ olduğundan Teorem 1.8.20' ye göre; $\exists T^* \in B(H) \therefore \forall x, y \in H$ için $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ dır. O halde; $y := T(x)$ alınırsa; $\langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, T^*(T(x)) \rangle$ olduğundan $\|T(x)\|^2 = \langle x, T^*(T(x)) \rangle$ dır.

T bir izometri olduğundan Teorem 1.4.15' den $\forall x \in H$ için $\|T(x)\| = \|x\|$ dir. O halde;

$$\forall x \in H \text{ için } \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|T(x)\|^2 = \langle x, T^*(T(x)) \rangle$$

dir. O halde; $\forall x \in H$ için $\langle x, x - T^*(T(x)) \rangle = \langle x, x - (T^*T)(x) \rangle = \langle x, (I - T^*T)(x) \rangle = 0$ dır. Teorem 1.8.19' den dolayı $I = T^*T$ elde edilir. O halde; eşitliğin her iki tarafının T^{-1} ile bileşkesi alınırsa; $T^{-1} = (T^*T)T^{-1} = T^*(TT^{-1}) = T^*$, yani; $T^{-1} = T^*$ dir.

$ii \Rightarrow iii$ T, birebir örten ve $T^{-1} = T^*$ ise; $T^*T = TT^* = I$ dır.

$T^{-1} = T^*$ olduğundan eşitliğin her iki tarafının önce sağdan, daha sonra soldan T operatörü ile bileşkesi alınırsa; $I = T^{-1}T = T^*T$ ve $I = TT^{-1} = TT^*$ olduğundan $TT^* = T^*T = I$ dır.

$iii \Rightarrow iv$ $TT^* = T^*T = I$ ise; T, T^* birer izometridir.

$T \in B(H)$ olduğundan Teorem 1.8.20' den $\exists T^* \in B(H) \therefore \forall x, y \in H$ için $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ dır. O halde; $y := T(x)$ alınırsa, $\langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, T^*(T(x)) \rangle$ olduğundan $\|T(x)\|^2 = \langle x, (T^*T)(x) \rangle = \langle x, I(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ dır. O halde; $\forall x \in H$ için $\|T(x)\| = \|x\|$ dir. Dolayısı ile; Teorem 1.4.5' den T bir izometridir.

Benzer şekilde, $x := T^*(y)$ alınırsa, $\forall y \in H$ için $\|T^*(y)\| = \|y\|$ elde edilir.

$iv \Rightarrow v$ T, T^* birer izometri ise; T bir izometri ve T^*, birebirdir.

İspat açık.

$v \Rightarrow vi$ T bir izometri ve T^* birebir ise; T^* bir üniter operatördür.

$T \in B(H)$ olduğundan Riesz-Frechet teoreminden $\exists T^* \in B(H) \therefore \forall x, y \in H$ için

$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ dır. O halde; $y := T(x)$ alıp, T ’ nin bir izometri olduğu kullanılırsa; $\forall x, y \in H$ için $T^*T = I$ elde edilir. O halde; $T^*T = I$ olduğundan T^* örtendir.

($b \in H$ keyfi alalım. $T(b) := a \in H$ olarak tanımlanırsa; $(T^*T)(b) = I(b)$ olduğundan $T^*(T(b)) = b$ ve dolayısı ile; $T^*(a) = b$ dır.)

T^* birebir ve örten olduğundan tersinir bir operatördür. O halde; $T^*(T^*)^{-1} = I$ olduğu göz önüne alınırsa; $T^*T = I$ ve $T^*(T^*)^{-1} = I$ olduğundan $T = (T^*)^{-1}$ dir. Yani; $T^{-1} = T^*$ dir. O halde; T bir izometri olduğundan $\forall x \in H$ için $\|x\| = \|I(x)\| = \|T(T^{-1}(x))\| = \|T^{-1}(x)\|$ dır. Dolayısıyla; $T^{-1} = T^*$ olduğundan $\forall x \in H$ için $\|T^*(x)\| = \|x\|$ dır. Yani; T^* üniterdir.

$vi \Rightarrow i$ T^* üniter bir operatör ise; T üniter bir operatördür.

T^* üniter bir operatör olduğundan örten bir izometridir.

Ayrıca; $T^* \in B(H)$ olduğundan Teorem 1.8.20’den $\exists (T^*)^* \in B(H) \therefore \forall x, y \in H$ için

$\langle T^*(x), y \rangle = \langle x, (T^*)^*(y) \rangle$ dır. Biliyoruz ki $(T^*)^* = T$ dır. O halde; $\forall x, y \in H$ için

$\langle T^*(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ dır. Son eşitlikte; $y := T^*(x)$ alınırsa; $TT^* = I$ olur. Buradan

görülüyor ki $(TT^*)(H) = T(T^*(H)) = I(H) = H$ dır. T^* örten olduğundan $T(H) = H$ dır. O halde; T örten bir dönüşümdür. Öte yandan, $TT^* = I$ ve T^* bir izometri olduğundan $\forall x \in H$ için $\|(TT^*)(x)\| = \|T(T^*(x))\| = \|I(x)\| = \|x\| = \|T^*(x)\|$ dır. Dolayısı ile $\forall x \in H$ için

$\left\|T\left(T^*(x)\right)\right\| = \left\|T^*(x)\right\|$ olduğundan T, üniter bir operatördür.

Tanım 2.1.5.[4]: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun.

$T = T^*$ ise; $T \in B(H)$ dönüşümüne, bir Hermit operatörü denir.

Teorem 2.1.6.[4]: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Bu takdirde;

$T = A + iB$ olacak şekilde tek türlü olarak belirli $A, B \in B(H)$ Hermit operatörleri vardır.

İspat: $T \in B(H)$ olduğundan $T^* \in B(H)$ eki mevcuttur. $A := \frac{1}{2}\left(T + T^*\right), B := \frac{1}{2i}\left(T - T^*\right)$

olsun. O halde; $A, B \in B(H)$ olup $T^{**} = T$ olduğundan $A^* = A, B^* = B$ dir. Dolayısı ile; $A, B \in B(H)$ iki Hermit operatörü olup $A + iB = T$ koşulunu sağlar.

Son olarak; $A + iB = T$ koşulunu sağlayan $A, B \in B(H)$ Hermit operatörlerinin tek olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır. $C, D \in B(H)$; $C + iD = T$ olan iki Hermit operatörü olsun. O halde; $A + iB = C + iD$ $(*)$

ve $(A + iB)^* = (C + iD)^*$ $(**)$

dir. $A^* = A, B^* = B, C^* = C, D^* = D$ olduğundan $(**)$ 'dan $A - iB = C - iD$ $(***)$ dir. $(*)$ ve $(***)$ 'daki eşitlikleri taraf taraf toplarsak $A = C$; $(***)$ denklemini -1 ile çarpıp $(*)$ denklemi ile taraf tarafa toplarsak $B = D$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.7.[4]: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ olsun. Bu takdirde;

T 'nin bir Hermit operatörü olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in H$ için $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

İspat:

i. $T \in B(H)$ bir Hermit operatörü ise; $\forall x \in H$ için $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ dir. $T \in B(H)$ bir

Hermit operatörü olduğundan $T^* = T$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için

$\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$ olduğundan $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ dir.

ii. $\forall x \in H$ için $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ ise; $T \in B(H)$ bir Hermit operatörüdür.

$\forall x, y \in H$ için $4\langle T(x), y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle T(x+i^k y), x+i^k y\rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned} 4\langle T(x), y\rangle &= \sum_{k=0}^{3} i^k \langle T(x+i^k y), x+i^k y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \overline{\langle x+i^k y, T(x+i^k y)\rangle} \\ &= \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x+i^k y, T(x+i^k y)\rangle = 4\langle x, T(y)\rangle \end{aligned}$$

dir. $\forall x, y \in H$ için $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ olduğundan $T^* = T$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.8.[4]: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ bir Hermit operatörü olsun.

i. $\forall x \in H$ için $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ ise; T 'ye bir pozitif Hermit operatörü denir.

ii. $\forall x \in H$ için $\langle T(x), x\rangle \leq 0$ ise; T 'ye bir negatif Hermit operatörü denir.

Tanım 2.1.9.[4]: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T, S \in B(H)$ iki Hermit operatörü olsun. T, S ; $\forall x \in H$ için $\langle T(x), x\rangle \leq \langle S(x), x\rangle$ koşulunu sağlayan iki Hermit operatörü ise; T 'ye S 'den küçük veya eşittir denir ve $T \leq S$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.10: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı, $T \in B(H)$

ve $M := \sup\left\{ \left|\langle T(x), x\rangle\right| \,\middle|\, x \in H, \|x\| = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun. Bu takdirde; $\forall u \in H$ için

$$\left|\langle T(u), u\rangle\right| \leq M.\|u\|^2 \qquad (*)$$

dir.

İspat: $M := \sup\left\{\left|\langle T(x),x\rangle\right| \,\middle|\, x\in H, \|x\|=1\right\} \subset \mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ olduğundan $\forall x\in H$ ve $\|x\|=1$ için

$\left|\langle T(x),x\rangle\right| \le M$ dir. O halde; $u\in H$ keyfi olsun. $u=\theta$ ise; $0=\left|\langle T(\theta),\theta\rangle\right|\le M.\|\theta\|^2=0$

olduğundan $(*)$'daki eşitsizlik doğrudur. $u\neq\theta$ olsun. O halde; $\frac{1}{\|u\|}u\in H$ için $\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\|=1$

olduğundan $\left|\left\langle T(\frac{1}{\|u\|}u),\frac{1}{\|u\|}u\right\rangle\right|\le M$ dir. Buradan; $\left|\left\langle T(\frac{1}{\|u\|}u),\frac{1}{\|u\|}u\right\rangle\right|=\frac{1}{\|u\|^2}\left|\langle T(u),u\rangle\right|$

olduğundan $\left|\langle T(u),u\rangle\right|\le M\|u\|^2$ olur. Dolayısı ile $\forall u\in H$ için $\left|\langle T(u),u\rangle\right|\le M.\|u\|^2$ dir.

Teorem 2.1.11: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T\in B(H)$ bir Hermit operatörü olsun. Bu takdirde;

$$\|T\|=\sup\left\{\left|\langle T(x),x\rangle\right| \,\middle|\, x\in H, \|x\|=1\right\}$$

dır.

İspat: $M := \sup\left\{\left|\langle T(x),x\rangle\right| \,\middle|\, x\in H, \|x\|=1\right\} \subset \mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ olsun. $\forall x\in H$ için Cauchy Schwarz Eşitsizliğinden; $\left|\langle T(x),x\rangle\right|\le\|T(x)\|.\|x\|$ dir. $T\in B(H)$ olduğundan $\forall x\in H$ için

$\left|\langle T(x),x\rangle\right|\le\|T(x)\|.\|x\|\le\|T\|\|x\|\|x\|=\|T\|\|x\|^2$ dir. O halde; $\forall x\in H$ ve $\|x\|=1$ için

$\left|\langle T(x),x\rangle\right|\le\|T\|$ dir. O halde; $\|T\|\ge 0$ sayısı, $\left\{\left|\langle T(x),x\rangle\right| \,\middle|\, x\in H, \|x\|=1\right\}$ kümesinin bir üst

sınırı olduğundan $M\le\|T\|$ dir. Tersine olarak;

$\forall x,y\in H$ için $\langle T(x+y),x+y\rangle=\langle T(x),x\rangle+\langle T(x),y\rangle+\langle T(y),x\rangle+\langle T(y),y\rangle$ ve T, bir Hermit operatörü olduğundan $\forall x,y\in H$ için

$$\langle T(x+y),x+y\rangle=\langle T(x),x\rangle+2\operatorname{Re}\langle T(x),y\rangle+\langle T(y),y\rangle \qquad (*)$$

elde edilir. Benzer şekilde; $\forall x, y \in H$ için

$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle T(x), x\rangle - 2\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle + \langle T(y), y\rangle \qquad (**)$$

dir. $(*)$ ve $(**)$'dan $\forall x, y \in H$ için

$$4\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle$$

$$\begin{aligned}\left|4\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle\right| &= \left|\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\right| \\ &\leq \left|\langle T(x+y), x+y\rangle\right| + \left|\langle T(x-y), x-y\rangle\right|\end{aligned}$$

ve Teorem 2.1.10 ile Teorem 1.7.11 göz önüne alınırsa; $\forall x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}\left|4\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle\right| &\leq M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 \\ \left|4\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle\right| &\leq M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\ \left|4\operatorname{Re}\langle T(x), y\rangle\right| &\leq 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad (***)\end{aligned}$$

dır. O halde; $x \in H, \|x\| \leq 1$ için $T(x) = \theta$ ise; $\|T(x)\| = 0 \leq M$ dir. $T(x) \neq \theta$ ise; $x \neq \theta$ olup

$(***)$ eşitsizliğinde $y := \dfrac{\|x\|}{\|T(x)\|} T(x) \in H$ alınırsa; $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ dir.

O halde; $M \geq 0$ sayısı, $\left\{\|T(x)\| \mid x \in H, \|x\| \leq 1\right\}$ olan kümenin bir üst sınırı olduğundan

$\|T\| = \sup\left\{\|T(x)\| \mid x \in H, \|x\| \leq 1\right\} \leq M$ dir. Yani; $\forall x \in H$ için $\|T\| \leq M$ dir. Dolayısı ile;

$\|T\| \leq M$ ve $M \leq \|T\|$ olduğundan $\|T\| = M$ dir.

Teorem 2.1.12: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ bir pozitif Hermit operatörü olsun. Bu takdirde; $\forall x, y \in H$ için

$$\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2 \leq \langle T(x), x\rangle \langle T(y), y\rangle \quad (*) \quad \text{dır.}$$

İspat: $x,y\in H$ için $\langle T(x),x\rangle,\langle T(y),y\rangle\geq 0$ olduğundan $\langle T(x),y\rangle=0$ ise; $(*)$ eşitsizliği doğrudur. $x,y\in H$ için $\langle T(x),y\rangle\neq 0$ olduğunda $(*)$ eşitsizliğinin doğru olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır.

$T\in B(H)$'nin bir pozitif Hermit operatörü olduğu göz önüne alındığında,

$\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için

$$0\leq\langle T(x-\alpha y),x-\alpha y\rangle=\langle T(x),x\rangle-\overline{\alpha}\langle T(x),y\rangle-\alpha\langle T(y),x\rangle+|\alpha|^2\langle T(y),y\rangle,$$

$$0\leq\langle T(x),x\rangle-\overline{\alpha}\langle T(x),y\rangle-\alpha\overline{\langle T(x),y\rangle}+|\alpha|^2\langle T(y),y\rangle \quad (**)$$

dir. $\langle T(x),y\rangle\neq 0$ olduğundan $\langle T(x),x\rangle>0$ ve $\langle T(y),y\rangle>0$ dır.

Gerçekten;

I. $\langle T(x),x\rangle=0$ ve $\langle T(y),y\rangle>0$ ise; $(**)$ denklemi $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için doğru olduğundan $\alpha:=\dfrac{\langle T(x),y\rangle}{\langle T(y),y\rangle}\in\mathbb{C}$ için de doğrudur. O halde;

$$0\leq\langle T(x),x\rangle-\overline{\frac{\langle T(x),y\rangle}{\langle T(y),y\rangle}}\langle T(x),y\rangle-\frac{\langle T(x),y\rangle}{\langle T(y),y\rangle}\overline{\langle T(x),y\rangle}+\left|\frac{\langle T(x),y\rangle}{\langle T(y),y\rangle}\right|^2\langle T(y),y\rangle$$

olduğundan $|\langle T(x),y\rangle|^2\leq 0$ olur ki; bu $\langle T(x),y\rangle\neq 0$ olmasıyla çelişir.

II. $\langle T(x),x\rangle=0$ ve $\langle T(y),y\rangle=0$ ise; $(**)$ denklemi $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için doğru olduğundan $\alpha:=\langle T(x),y\rangle\in\mathbb{C}$ için de doğrudur. O halde; $x,y\in H$ için

$$0\leq-\overline{\langle T(x),y\rangle}\langle T(x),y\rangle-\langle T(x),y\rangle\overline{\langle T(x),y\rangle}=-2|\langle T(x),y\rangle|^2 \text{ olduğundan}$$

$\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2 \le 0$ olur ki; bu $\langle T(x), y\rangle \ne 0$ olmasıyla çelişir.

III. $\langle T(x), x\rangle > 0$ ve $\langle T(y), y\rangle = 0$ ise; $(**)$ denklemi $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için doğru olduğundan $\alpha := \dfrac{\langle T(x), y\rangle}{\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2}\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{C}$ için de doğrudur. O halde; $x, y \in H$ için

$$0 \le \langle T(x), x\rangle - \overline{\frac{\langle T(x), y\rangle}{\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2}\langle T(x), x\rangle}\langle T(x), y\rangle - \frac{\langle T(x), y\rangle}{\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2}\langle T(x), x\rangle\overline{\langle T(x), y\rangle}$$

$$0 \le \langle T(x), x\rangle - 2\frac{\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2}{\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2}\langle T(x), x\rangle = -\langle T(x), x\rangle$$

$\langle T(x), x\rangle \le 0$ elde edilir ki; bu $\langle T(x), x\rangle > 0$ olması ile çelişir. O halde; $x, y \in H$ için $\langle T(x), y\rangle \ne 0$ ise; $\langle T(x), x\rangle > 0$ ve $\langle T(y), y\rangle > 0$ olmak zorundadır. Bu halde; (**) eşitsizliğinde $\alpha := \dfrac{\langle T(x), y\rangle}{\langle T(y), y\rangle} \in \mathbb{C}$ alınırsa; $x, y \in H$ için $\langle T(x), y\rangle \ne 0$ ise;

$\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2 \le \langle T(x), x\rangle\langle T(y), y\rangle$ elde edilir.

Sonuç 2.1.13: $(H, \langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $T \in B(H)$ bir pozitif Hermit operatörü olsun. Bu takdirde; $\forall x \in H$ için $\|T(x)\|^2 \le \|T\|\langle T(x), x\rangle$ dir.

İspat: Teorem 2.1.12' den $\forall x, y \in H$ için $\left|\langle T(x), y\rangle\right|^2 \le \langle T(x), x\rangle\langle T(y), y\rangle$ olduğundan $y := T(x) \in H$ alınırsa; $\forall x \in H$ için

$$\left|\langle T(x), T(x)\rangle\right|^2 \le \langle T(x), x\rangle\langle T(T(x)), T(x)\rangle$$

$$\|T(x)\|^4 \le \left|\langle T(x), x\rangle\right|\left|\langle T(T(x)), T(x)\rangle\right| \qquad (*)$$

dir. Cauchy- Schwarz Eşitsizliğine göre; $\left|\left\langle T\left(T(x)\right), T(x)\right\rangle\right| \leq \left\|T\left(T(x)\right)\right\| \left\|T(x)\right\|$ olduğundan

$\left\|T\left(T(x)\right)\right\| \leq \|T\| \|T(x)\|$ olduğu göz önüne alındığında (*) eşitsizliğinden $\forall x \in H$ için

$\|T(x)\|^4 \leq \|T\| \left\langle T(x), x\right\rangle \|T(x)\|^2$ olduğu görülür. Son eşitsizlikten; $\forall x \in H$ için

$\|T(x)\|^2 \leq \|T\| \left\langle T(x), x\right\rangle$ elde edilir.

Teorem 2.1.14: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı, $\{T_n\} \subset B(H)$ bir pozitif Hermit operatörleri dizisi ve $B \in B(H)$ bir pozitif Hermit operatörü olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n \leq T_{n+1} \leq B$$

ise; $\forall x \in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x) = T(x)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n \leq T \leq B$ olan bir tek $T \in B(H)$ pozitif Hermit operatörü vardır.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_n \leq T_{n+1} \leq B$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in H$ için

$$0 \leq \langle T_1(x), x\rangle \leq \langle T_2(x), x\rangle \leq \ldots \leq \langle T_n(x), x\rangle \leq \langle T_{n+1}(x), x\rangle \leq \langle B(x), x\rangle \quad (*)$$

dir. $x \in H$ keyfi fakat sabit alındığında (*) eşitsizliği; $\{\langle T_n(x), x\rangle\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dizisinin monoton artan ve üstten sınırlı olduğunu gösterir. O halde; $\{\langle T_n(x), x\rangle\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dizisi yakınsak; dolayısıyla bir Cauchy dizisidir. O halde; $x \in H$ keyfi fakat sabit alındığında $\forall \mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık bir $N(x,\mathcal{E}) \in \mathbb{N}$ bulunabilir $\therefore$ $\forall n, m \in \mathbb{N} \therefore m \geq n \geq N(x,\mathcal{E})$

için $\left|\langle T_m(x), x\rangle - \langle T_n(x), x\rangle\right| = \left|\langle (T_m - T_n)(x), x\rangle\right| < \dfrac{\mathcal{E}^2}{\left(1+\|B-T_1\|\right)\left(1+\|x\|^2\right)}$ (**) dir.

Diğer taraftan; $\forall n, m \in \mathbb{N} \therefore m \geq n \geq 1$ ve $\forall x \in H$ için

$0\leq\langle (T_m-T_n)(x),x\rangle\leq\langle (B-T_1)(x),x\rangle$ olduğundan $T_m-T_n\in B(H)$ Hermit operatörleri ile $B-T_1\in B(H)$ Hermit operatörü pozitif operatörlerdir. O halde;

$\forall n,m\in\mathbb{N}\therefore m\geq n\geq N(x,\mathcal{E})$ ve $\forall x\in H$ için $\|(T_m-T_n)(x)\|^2\leq\|T_m-T_n\|\langle (T_m-T_n)(x),x\rangle$ dir.

O halde; $\forall n,m\in\mathbb{N}\therefore m\geq n\geq N(x,\mathcal{E})$ ve $x\in H$ için

$$\|(T_m-T_n)(x)\|^2\leq\|T_m-T_n\|\frac{\mathcal{E}^2}{\left(1+\|B-T_1\|\right)\left(1+\|x\|^2\right)}$$

$$\|T_m(x)-T_n(x)\|^2\leq\|T_m-T_n\|\frac{\mathcal{E}^2}{\left(1+\|B-T_1\|\right)\left(1+\|x\|^2\right)}\qquad(***)$$

dir. $\forall n,m\in\mathbb{N}\therefore m\geq n\geq 1$ için $T_m-T_n\in B(H),\, B-T_1\in B(H)$ Hermit operatörleri pozitif ve $\forall x\in H$ için $0\leq\langle (T_m-T_n)(x),x\rangle\leq\langle (B-T_1)(x),x\rangle$ ve Teorem 2.1.11'e göre

$$\|T_m-T_n\|=\sup\left\{\left|\langle (T_m-T_n)(x),x\rangle\right| x\in H,\|x\|=1\right\}$$

ve $$\|B-T_1\|=\sup\left\{\left|\langle (B-T_1)(x),x\rangle\right| x\in H,\|x\|=1\right\}$$

olduğundan $\|T_m-T_n\|\leq\|B-T_1\|$ dir. O halde; (***) eşitsizliğinden $\forall x\in H$ ve $\forall n,m\in\mathbb{N}\therefore m\geq n\geq N(x,\mathcal{E})$ için $\|T_m(x)-T_n(x)\|<\mathcal{E}$ elde edilir. Dolayısıyla; $\forall x\in H$ için $\{T_n(x)\}\subset H$ dizileri birer Cauchy dizisidir. O halde; H Hilbert uzayı olduğundan $\{T_n(x)\}\subset H$ dizileri yakınsaktır. $T:H\to H$ dönüşümü $\forall x\in H$ için $T(x):=\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)$ şeklinde tanımlanırsa; T dönüşümü istenilen şartları sağlar. Gerçekten; $\forall x,y\in H$ ve $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ için $T_n(\alpha x+\beta y)=\alpha T_n(x)+\beta T_n(y)$ ve $T(x):=\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)$ olduğundan

$T\left(\alpha x+\beta y\right)=\alpha T(x)+\beta T(y)$ dir. O halde; T lineerdir. Diğer taraftan;

$\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in H$ için $0\leq\left\langle T_1(x),x\right\rangle\leq\left\langle T_2(x),x\right\rangle\leq\ldots\leq\left\langle T_n(x),x\right\rangle\leq\left\langle T_{n+1}(x),x\right\rangle\leq\left\langle B(x),x\right\rangle$

olduğu biliniyor. $\|B\|=\sup\left\{\left|\left\langle B(x),x\right\rangle\right| x\in H,\|x\|=1\right\}=\sup\left\{\left\langle B(x),x\right\rangle \middle| x\in H,\|x\|=1\right\}$ ve

$\|T_n\|=\sup\left\{\left|\left\langle T_n(x),x\right\rangle\right| x\in H,\|x\|=1\right\}=\sup\left\{\left\langle T_n(x),x\right\rangle \middle| x\in H,\|x\|=1\right\}$ olduğundan

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $\|T_n\|\leq\|B\|$ dir. $\theta\in H$ için $\|T(\theta)\|=0\leq\left(1+\|B\|\right)\|\theta\|$ dır.

$x\in H\setminus\{\theta\}$ ise; $T(x):=\lim\limits_{n\to+\infty}T_n(x)$ olduğundan

$\|x\|>0$ sayısına karşılık $\exists N_x\equiv N_x\left(\|x\|\right)\in\mathbb{N}\therefore\forall n\in\mathbb{N},n\geq N_x$ için $\left\|T(x)-T_{N_x}(x)\right\|<\|x\|$ dir. O halde;

$$\begin{aligned}\|T(x)\|&=\left\|T(x)-T_{N_x}(x)+T_{N_x}(x)\right\|\leq\left\|T(x)-T_{N_x}(x)\right\|+\left\|T_{N_x}(x)\right\|\\&<\|x\|+\left\|T_{N_x}\right\|\|x\|\leq\|x\|+\|B\|\|x\|\leq\left(1+\|B\|\right)\|x\|\end{aligned}$$

dir. Dolayısı ile; $\forall x\in H$ için $\|T(x)\|\leq\left(1+\|B\|\right)\|x\|$ dır. Son eşitsizlik; $T\in B(H)$ olduğunu

gösterir. O halde; $T^*\in B(H)$ mevcuttur ve $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x,y\in H$ için

$\left\langle T_n(x),y\right\rangle=\left\langle x,T_n(y)\right\rangle$ olduğundan iç çarpımın sürekliliği göz önüne alındığında $n\to+\infty$ için limit alındığında $\forall x,y\in H$ için $\left\langle T(x),y\right\rangle=\left\langle x,T(y)\right\rangle$ olduğu görülür. O halde; $T=T^*$ olduğundan $T\in B(H)$ bir Hermit operatörüdür. $n\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. $\forall m\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in H$ için $0\leq\left\langle T_n(x),x\right\rangle\leq\left\langle T_{n+m}(x),x\right\rangle$ olduğundan $m\to+\infty$ için limit alındığında; $\forall x\in H$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0\leq\left\langle T_n(x),x\right\rangle\leq\left\langle T(x),x\right\rangle$ dir. O halde; $T\in B(H)$ Hermit operatörü pozitif olup, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0\leq T_n\leq T$ dir. Diğer taraftan; $0\leq T_n\leq B$ olduğundan $\forall x\in H$ için $0\leq\left\langle T_n(x),x\right\rangle\leq\left\langle B(x),x\right\rangle$ dir. Son eşitsizliğin; $n\to+\infty$ için limiti alınırsa; $\forall x\in H$ için $0\leq\left\langle T(x),x\right\rangle\leq\left\langle B(x),x\right\rangle$ elde edilir. Yani; $T\leq B$ dir. Dolayısı ile;

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in H$ için $0 \leq \langle T_n(x), x \rangle \leq \langle T(x), x \rangle \leq \langle B(x), x \rangle$ dir. Dolayısı ile; $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$0 \leq T_n \leq T \leq B$ dir. Son olarak; T 'nin tek olduğunu gösterelim. $T, S \in B(H)$

$\forall x \in H$ için $T(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} T_n(x)$, $S(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} T_n(x)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq T_n \leq T \leq B$,

$0 \leq T_n \leq S \leq B$ olan iki pozitif Hermit operatörü olsun. Normlu lineer uzaylarda yakınsak olan dizilerin limitinin tekliğinden $\forall x \in H$ için $T(x) = S(x)$ dir. O halde; $T = S$ olup; ispat tamamlanır.

Bu teoremin daha genel şekli [7:Sayfa 222]'de verilmektedir. Aşağıdaki teorem ispatsız bir uyarı olarak [7:Sayfa 222]'de verilmektedir.

Teorem 2.1.15: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{T_n\} \subset B(H)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_{n+1} \leq T_n \leq ... \leq T_2 \leq T_1$ koşulunu sağlayan bir Hermit operatörleri dizisi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \leq T_n$ koşulunu sağlayan bir $B \in B(H)$ bir Hermit operatörü varsa; $\forall x \in H$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n(x) = T(x)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \leq T \leq T_n$ olan bir tek $T \in B(H)$ Hermit operatörü vardır.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \leq T_{n+1} \leq T_n \leq ... \leq T_2 \leq T_1$ olduğundan $0 \leq T_n - T_{n+1}$ ve $0 \leq T_1 - T_n \leq T_1 - B$ dir. O halde; $\{S_n\} \subset B(H)$ dizisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_n := T_1 - T_n$ olarak tanımlanırsa; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $S_{n+1} - S_n = T_n - T_{n+1} \geq 0$ olduğundan; $\{S_n\} \subset B(H)$, pozitif bir Hermit operatörleri dizisi olup; $T_1 - B \in B(H)$ pozitif Hermit operatörü olmak üzere; $S_n = (T_1 - B) - (T_n - B)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq T_1 - B$ koşulunu sağlar. O halde; bir önceki teoreme göre; $\forall x \in H$ için $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = S(x)$ olan ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$0 \leq S_n \leq S \leq T_1 - B$ olan bir tek $S \in B(H)$ pozitif Hermit operatörü vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$S_n := T_1 - T_n$ ve $\forall x \in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$ olduğundan $\forall x \in H$ için

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x) = T_1(x) - S(x)$ dir. O halde; $T := T_1 - S$ alınırsa; $T \in B(H)$ bir Hermit operatörü olup $B \leq T$ ve $\forall x \in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x) = T(x)$ dir. Öte yandan; $S_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ ve $S_n := T_1 - T_n$ olduğundan $T_1 - T_n \leq S$ dir. O halde; $T = T_1 - S \leq T_n$ dir. Dolayısı ile; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \leq T \leq T_n$ dir. T 'nin tekliği açıktır.

2.2. İzdüşüm ve Dik İzdüşüm Operatörleri

Bu pragraf [4], [5] ve [7] göz önünde bulundurularak hazırlanılmıştır.

Teorem 2.2.1: $(H, \langle , \rangle)$ bir kompleks Hilbert uzayı ve $M \subset H$ kapalı bir alt lineer uzay olsun. Bu takdirde; aşağıdaki şartları sağlayan bir $P_M \in B(H)$ pozitif Hermit operatörü vardır.

i. $P_M(H) = M$ ve $\forall m \in M$ için $P_M(m) = m$

ii. $Çek P_M = M^{\perp}$,

iii. $P_M^2 = P_M$,

iv. $\forall x, y \in H$ için $\langle P_M(x), y \rangle = \langle x, P_M(y) \rangle$ ve $\langle P_M(x), x \rangle \geq 0$,

v. $0 \leq \|P_M\| \leq 1$,

vi. $P_{M^{\perp}} = I - P_M$

vii. $M, N \subset H$ kapalı alt uzayları için $P_M = P_N$ olması için gerek ve yeter koşul $M = N$ dir.

İspat: Teorem 1.7.17'den herhangi bir $\varnothing \neq K \subset H$ için $K^{\perp} \subset H$ kapalı bir alt lineer uzay ve $M \subset H$ kapalı bir alt lineer uzay olduğundan $H = M \oplus M^{\perp}$ olduğu biliniyor.

O halde; $\forall x \in H$ için $x = x_M + x_{M^\perp}$ olacak şekilde bir tek $\left(x_M, x_{M^\perp}\right) \in M \times M^\perp$ çifti vardır.

$P_M : H \to H$ dönüşümü, $\forall x \in H$ için $P_M\left(x\right) := x_M$ olarak tanımlansın. $P_M \in B(H)$ dır.

Gerçekten; $x, y \in H$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ keyfi olsun. $H = M \oplus M^\perp$ olduğundan $x, y \in H$ için

$x = x_M + x_{M^\perp}$ ve $y = y_M + y_{M^\perp}$ olacak şekilde tek türlü belirli

$\left(x_M, x_{M^\perp}\right), \left(y_M, y_{M^\perp}\right) \in M \times M^\perp$ ikilileri mevcuttur. O halde;

$\alpha x + \beta y = \alpha\left(x_M + x_{M^\perp}\right) + \beta\left(y_M + y_{M^\perp}\right) = \left(\alpha x_M + \beta y_M\right) + \left(\alpha x_{M^\perp} + \beta y_{M^\perp}\right)$ olduğundan $P_M\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha x_M + \beta y_M = \alpha P_M\left(x\right) + \beta P_M\left(y\right)$ dir. Dolayısıyla; $\forall x, y \in H$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $P_M\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha P_M\left(x\right) + \beta P_M\left(y\right)$ olduğundan P_M dönüşümü lineerdir. Öte yandan; $\forall x \in H$ için $\left\|P_M\left(x\right)\right\|^2 = \left\|x_M\right\|^2 \le \left\|x_M\right\|^2 + \left\|x_{M^\perp}\right\|^2 = \left\|x\right\|^2$ olduğundan $\left\|P_M\left(x\right)\right\| \le \left\|x\right\|$ dır. Dolayısıyla; P_M dönüşümü sınırlı bir lineer operatör, yani; $P_M \in B(H)$ dır.

i. $\forall m \in M$ için $\theta \in M^\perp$, $m = m + \theta$ koşulunu sağladığından $\forall m \in M$ için $P_M\left(m\right) = m$ dir.

$\forall x \in H$ için $P_M\left(x\right) := x_M$ olduğundan $P_M\left(H\right) \subset M$ dır. Diğer taraftan; $\forall m \in M$ için

$m = P_M\left(m\right) \in P_M\left(H\right)$ olduğundan $M \subset P_M\left(H\right)$ dir. Dolayısı ile; $P_M\left(H\right) \subset M$ ve

$M \subset P_M\left(H\right)$ olduğundan $P_M\left(H\right) = M$ dir.

ii. $x \in \textit{Çek}P_M$ keyfi olsun. O halde; $x = x_M + x_{M^\perp}$ olan $\left(x_M, x_{M^\perp}\right) \in M \times M^\perp$ ikilisi için $P_M\left(x\right) = x_M = \theta$ dır. O halde; $x_M = \theta$ ve $x = x_M + x_{M^\perp}$ olduğundan $x = x_{M^\perp} \in M^\perp$ dir.

Dolayısı ile; $\textit{Çek}P_M \subset M^\perp$ dir. Tersine olarak; $x \in M^\perp$ keyfi olsun. O halde; $\forall m \in M$ için $\left\langle x, m\right\rangle = 0$ dır. $\forall x \in H$ için $x = x_M + x_{M^\perp}$ olacak şekilde bir tek $\left(x_M, x_{M^\perp}\right) \in M \times M^\perp$ ikilisi mevcut olduğundan son eşitlikten; $\langle x, x_M \rangle = \langle x_M + x_{M^\perp}, x_M \rangle = \|x_M\|^2 + \langle x_M, x_{M^\perp} \rangle$ ve

$\langle x, x_M \rangle = 0$, $\langle x_M, x_{M^\perp} \rangle = 0$ olduğu göz önüne alındığında $\|x_M\|^2 = 0$, dolayısıyla $x_M = \theta$ ve

$P_M(x) = \theta$ yani; $x \in ÇekP_M$ ve $M^\perp \subset ÇekP_M$ dir. Dolayısı ile; $M^\perp \subset ÇekP_M$ ve $ÇekP_M \subset M^\perp$

olduğundan $ÇekP_M = M^\perp$ dir.

iii. $x \in X$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. O halde; $x = x_M + x_{M^\perp}$ olan $(x_M, x_{M^\perp}) \in M \times M^\perp$ ikilisi için $P_M(P_M(x)) = P_M(x_M) = x_M = P_M(x)$ dir. Dolayısıyla; $\forall x \in H$ için $P_M^2(x) = P_M(x)$ yani; $P_M^2 = P_M$ dir.

iv. $x, y \in H$ ve $(x_M, x_{M^\perp}), (y_M, y_{M^\perp}) \in M \times M^\perp$ ikilileri için $x = x_M + x_{M^\perp}$, $y = y_M + y_{M^\perp}$ olsun. O halde; $\forall x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}
\langle P_M(x), y \rangle &= \langle x_M, y_M + y_{M^\perp} \rangle \\
&= \langle x_M, y_M \rangle + \langle x_M, y_{M^\perp} \rangle \\
&= \langle x_M, y_M \rangle \\
&= \langle x_M, P_M(y) \rangle \\
&= \langle x_M, P_M(y) \rangle + \langle x_{M^\perp}, P_M(y) \rangle \\
&= \langle x_M + x_{M^\perp}, P_M(y) \rangle \\
&= \langle x, P_M(y) \rangle
\end{aligned}$$

Yani; $\forall x, y \in H$ için $\langle P_M(x), y \rangle = \langle x, P_M(y) \rangle$ dir. Öte yandan; $\forall x \in H$ için

$\langle P_M(x), x \rangle = \langle x_M, x_M + x_{M^\perp} \rangle = \|x_M\|^2 \geq 0$ dir.

v. Yukarıda; $\forall x \in H$ için $\|P_M(x)\| \leq \|x\|$ olduğu görüldüğünden $0 \leq \|P_M\| \leq 1$ dir.

vi. $M^\perp \subset H$ kapalı bir alt uzay olduğundan teoremin ilk beş koşulunu sağlayan $P_{M^\perp} \in B(H)$ pozitif Hermit operatörü vardır ve $\forall x \in H$ için

$(I-P_M)(x)=x-P_M(x)=x-x_M=x_{M^\perp}=P_{M^\perp}(x)$ olduğundan $P_{M^\perp}=I-P_M$ dir.

vii. $M,N\subset H$ kapalı alt lineer uzayları için $P_M=P_N$ ise; $M=N$ dir.

$P_M=P_N$ olduğundan $P_M(H)=P_N(H)$ dir. O halde; $P_M(H)=M$ ve $P_N(H)=N$ olduğundan $M=N$ dir. Tersine olarak; $M,N\subset H$ kapalı alt lineer uzayları için $M=N$ ise; $P_M=P_N$ dir. $M,N\subset H$ kapalı alt linner uzayları için $H=M\oplus M^\perp$ ve $H=N\oplus N^\perp$ dır. O halde; $\forall x\in H$ için $x=x_M+x_{M^\perp}$ ve $x=x_N+x_{N^\perp}$ olacak şekilde tek türlü belirli $(x_M,x_{M^\perp})\in M\oplus M^\perp$ ve $(x_N,x_{N^\perp})\in N\oplus N^\perp$ çiftleri mevcuttur.

O halde; $M=N$, $P_M(x)=x_M\in M$ ve $P_N(x)=x_N\in N$, yani; $x_M=x_N$ olduğundan $\forall x\in H$ için $P_M(x)=P_N(x)$ dir. Dolayısıyla; $P_M=P_N$ dir.

Tanım 2.2.2: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $M\subset H$ kapalı bir alt uzay olsun. Bu takdirde; yukarıdaki teoremde varlığı ve tekliği bilinen $P_M\in B(H)$ pozitif Hermit operatörüne; H 'nın M üzerine dik izdüşümü denir.

Tanım 2.2.3: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P:H\to H$ bir lineer dönüşüm olsun. $P^2=P$ ise; P 'ye H üzerinde bir izdüşüm operatörü denir.

Kolayca görülür ki $P:H\to H$ bir izdüşüm operatörü ise; $(I-P)^2=I-P$ olduğundan $I-P:H\to H$ lineer operatörü de bir izdüşüm operatörüdür.

Teorem 2.2.4: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı, $P:H\to H$ bir izdüşüm operatörü ve $M:=P(H),N:=(I-P)(H)$ olsun. Bu takdirde; $\forall x\in M$ için $P(x)=x$ ve $H=M\oplus N$ dir.

İspat: $x\in M$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. $M:=P(H)$ olduğundan $x=P(h)$ olacak şekilde en az bir $h \in H$ elemanı vardır. O halde; $P(x) = P\big(P(h)\big) = P^2\big(h\big) = P(h) = x$ dir. $x \in M$ keyfi alındığından $\forall x \in M$ için $P(x) = x$ dir.

Son olarak; $H = M \oplus N$ olduğunu gösterelim.

$u \in M \cap N$ keyfi alalım. $u \in N$ ve $N := \big(I - P\big)\big(H\big)$ olduğundan $\exists y \in H \therefore u = \big(I - P\big)\big(y\big)$ dir. O halde;

$$P(u) = P\Big(\big(I - P\big)\big(y\big)\Big) = P\big(y - P(y)\big) = P(y) - P\big(P(y)\big) = P(y) - P^2(y) = P(y) - P(y) = \theta$$

dır. Diğer taraftan; $u \in M$ olduğundan $P(u) = u$ dır. O halde; $u = \theta$ dır. $u \in M \cap N$ keyfi olduğundan $M \cap N = \{\theta\}$ dır. Öte yandan; $\forall x \in H$ için

$x = P(x) + x - P(x) + = P(x) + \big(I - P\big)\big(x\big)$ dır. $\big(I - P\big)(x) \in \big(I - P\big)(H) = N$ ve

$P(x) \in P(H) = M$ olduğundan $H = M \oplus N$ dır.

Tanım 2.2.5: $\big(H, \langle , \rangle\big)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P : H \to H$ bir izdüşüm operatörü

olsun. $\forall x, y \in H$ için $\big\langle P\big(x\big), y\big\rangle = \big\langle x, P\big(y\big)\big\rangle$ ise; P operatörüne, bir dik izdüşüm operatörü denir.

Tanımdan görülüyor ki; $P : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörü ise; $I - P : H \to H$ operatörü de bir dik izdüşüm operatörüdür.

Sonuç 2.2.6: $\big(H, \langle , \rangle\big)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. $P : H \to H$ bir dik izdüşüm

operatörü ise; $\forall x \in H$ için $\big\langle P\big(x\big), x\big\rangle \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in H$ için $\big\langle P\big(x\big), x\big\rangle \geq 0$ dır.

İspat: $P : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörü olduğundan $\forall x, y \in H$ için

$\big\langle P\big(x\big), y\big\rangle = \big\langle x, P\big(y\big)\big\rangle$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için $\big\langle P\big(x\big), x\big\rangle = \big\langle x, P\big(x\big)\big\rangle = \overline{\big\langle P\big(x\big), x\big\rangle}$

olduğundan $\big\langle P\big(x\big), x\big\rangle \in \mathbb{R}$ dir. Öte yandan; $\forall x, y \in H$ için $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$

olduğundan $\forall x \in H$ için $\langle P(x), P(x) \rangle = \langle x, P(P(x)) \rangle$ dır. O halde; $\forall x \in H$ için

$0 \leq \|P(x)\|^2 = \langle x, P(x) \rangle$ olduğundan $\forall x \in H$ için $0 \leq \langle P(x), x \rangle$ dir.

Teorem 2.2.7: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. $P : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörü olsun. Bu takdirde;

i. P operatörü sınırlı bir lineer operatördür ve $0 \leq \|P\| \leq 1$ dır.

ii. $P \neq O$ ise; $\|P\| = 1$ dir.

İspat:

i. $M := P(H)$ ve $N := (I - P)(H)$ olsun. O halde; Teorem 2.2.4'e göre $H = M \oplus N$ ve $M = \{P(x) \mid x \in H\}$, $N = \{(I-P)(y) \mid y \in H\}$ olduğundan $\forall x, y \in H$ için

$$
\begin{aligned}
\langle P(x), (I-P)(y) \rangle &= \langle x, P((I-P)(y)) \rangle \\
&= \langle x, P(y - P(y)) \rangle \\
&= \langle x, P(y) - P^2(y) \rangle \\
&= \langle x, \theta \rangle = 0
\end{aligned}
$$

dır. O halde; $M \perp N$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için $x = P(x) + (I-P)(x)$ ve $P(x) \perp (I-P)(x)$ olduğundan $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|(I-P)(x)\|^2$ dir. Açıkça görülüyor ki $\forall x \in H$ için $\|P(x)\| \leq \|x\|$ dir. O halde; $P : H \to H$ dik izdüşüm operatörü sınırlı ve $0 \leq \|P\| \leq 1$ dir.

ii. $P \neq O$ ise; $\exists x_o \in H \setminus \{\theta\} \therefore P(x_o) \neq \theta$ dır. $\frac{1}{\|P(x_o)\|} P(x_o) \in H$ için $\left\| \frac{1}{\|P(x_o)\|} P(x_o) \right\| = 1$ ve $\left\| P\left(\frac{1}{\|P(x_o)\|} P(x_o) \right) \right\| = 1$ olduğundan $1 \in \{\|P(x)\| \mid x \in H, \|x\| \leq 1\}$ dir.

O halde; $1 \le \|P\|$ dir. $\|P\| \le 1$ ve $P \ne O$ için $1 \le \|P\|$ olduğundan $P \ne O$ ise; $\|P\| = 1$ dir.

Teorem 2.2.8: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörü olsun. Bu takdirde; $M := P(H)$ ve $N := (I - P)(H)$ ise; $M^{\perp} = ÇekP$ ve $ÇekP = N$ dir.

İspat: $y \in ÇekP$ olsun. O halde; $P(y) = \theta$ dır. O halde; $\forall m \in M = P(H)$ için $\langle m, P(y) \rangle = 0$ dır. $\forall x \in H$ için $\langle P(x), P(y) \rangle = 0$ dır. O halde; P bir dik izdüşüm operatörü olduğundan $\forall x \in H$ için $\langle P(x), y \rangle = \langle P^2(x), y \rangle = \langle P(P(x)), y \rangle = \langle P(x), P(y) \rangle = 0$ dır. O halde; $y \in M^{\perp}$ dir. Dolayısıyla; $ÇekP \subset M^{\perp}$ dir. Tersine olarak; $u \in M^{\perp}$ olsun. $\forall x \in H$ için $P(x) \in P(H) = M$ olduğundan $\langle u, P(x) \rangle = 0$ dır. O halde; P bir dik izdüşüm operatörü olduğundan $\forall x \in H$ için $\langle P(u), x \rangle = 0$ dır. Son eşitlikte; $x := P(u)$ alındığından $P(u) = \theta$ olduğu görülür. O halde; $u \in ÇekP$ dir. Sonuç olarak; $\forall u \in M^{\perp}$ için $u \in ÇekP$ olduğundan $M^{\perp} \subset ÇekP$ dir. Dolayısıyla; $ÇekP \subset M^{\perp}$ ve $M^{\perp} \subset ÇekP$ olduğundan $M^{\perp} = ÇekP$ dir.

Son olarak; $ÇekP = N$ olduğunu gösterelim. $x \in ÇekP$ keyfi olsun. O halde; $P(x) = \theta$ dır. O halde; $x = (x - P(x)) + P(x) = (x - P(x)) + \theta = (x - P(x)) = (I - P)(x) \in (I - P)(H) = N$ olduğundan $ÇekP \subset N$ dir. Tersine olarak; $y \in N = (I - P)(H)$ olsun. O halde; $\exists x \in H \therefore y = (I - P)(x) = x - P(x)$ dir. O halde; $P(y) = \theta$ olduğundan $y \in ÇekP$ dir. O halde; $N \subset ÇekP$ dir. Dolayısıyla; $ÇekP \subset N$ ve $N \subset ÇekP$ olduğundan $ÇekP = N$ dir.

Teorem 2.2.9: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P : H \to H$ bir lineer operatör olsun. P'nin bir dik izdüşüm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $P = P_M$ olacak şekilde bir tek kapalı $M \subset H$ alt lineer uzayının olmasıdır.

İspat:

i. $P = P_M$ olacak şekilde bir tek kapalı $M \subset H$ alt lineer uzayı varsa Teorem 2.2.1'e göre $P = P_M$ operatörünün bir dik izdüşüm operatörü olduğu açıktır.

ii. P bir dik izdüşüm operatörü ise; $P = P_M$ olacak şekilde bir tek kapalı $M \subset H$ alt lineer uzayı vardır. $M := P(H)$ olsun. Bu takdirde; $M \subset H$, H 'nın bir alt lineer uzayıdır. Diğer taraftan; $M \subset H$ kapalıdır. Gerçekten; $\{x_n\} \subset M$ yakınsak ve $x \in H$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{\|\ \|}{=} x$ olan bir dizi ise; $\forall m \in M = P(H)$ için $P(m) = m$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P(x_n) = x_n$ dir. $P \in B(H)$ olduğundan süreklidir, dolayısı ile dizisel süreklidir. O halde; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \overset{\|\ \|}{=} x$ olduğundan $\lim\limits_{n\to+\infty} P(x_n) \overset{\|\ \|}{=} P(x)$ dir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P(x_n) = x_n$ eşitliğinden $x = P(x) \in P(H) = M$ olduğu görülür. O halde; $M \subset H$ kapalıdır. Ve $H = M \oplus M^{\perp}$ olduğundan $M^{\perp} = ÇekP$ ve $ÇekP = (I - P)(H)$ olduğu göz önüne alındığında; $\forall x \in H$ için $P(x) \in M, (I-P)(x) \in M^{\perp} = ÇekP$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için $x = P(x) + (I-P)(x)$ olduğundan $M \subset H$ kapalı alt uzayının tanımladığı $P_M : H \to H$ dik izdüşüm operatörü için $P_M(x) = P(x)$ dir. $\forall x \in H$ için $P_M(x) = P(x)$ olduğundan $P = P_M$ olur.

Son olarak; $P = P_M$ olan $M \subset H$ kapalı alt uzayının tek olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır. Farz edelim ki $P = P_N$ olan başka bir $N \subset H$ kapalı alt uzayı olsun. O halde; $P_M = P_N$ olduğundan Teorem 2.2.1'in vii şıkkı göz önüne alındığında $M = N$ dir.

Sonuç 2.2.10: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P \in B(H)$ bir izdüşüm operatörü ise; $P : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörüdür.

İspat: $M := P(H)$ olsun. $P \in B(H)$ olduğundan P süreklidir. Dolayısı ile dizisel süreklidir. Öte yandan; P bir izdüşüm operatörü olduğundan $\forall x \in H$ için $P^2(x) = P(x)$ dir.

Bu nedenle; $\forall m \in M = P(H)$ için $P(m) = m$ dir. $\forall m \in M$ için $P(m) = m$ ve P 'nin dizisel sürekli olması $M \subset H$ alt lineer uzayının kapalı bir alt lineer uzay olduğunu gösterir. Diğer taraftan; $P : H \to H$ bir izdüşüm operatörü olduğundan Teorem 2.2.4'e göre $H = M \oplus (I - P)(H)$ dır. Öte yandan; $I - P : H \to H$ sınırlı bir izdüşüm operatörü olduğundan $(I - P)(H) \subset H$ kapalı bir alt lineer uzaydır. Kolayca görülür ki $(I - P)(H) = ÇekP$ dir. O halde; $H = M \oplus ÇekP$ dir. $H = M \oplus ÇekP$ olduğundan $M \subset H$ kapalı alt lineer uzayı için H 'nın M üzerine $P_M : H \to H$ dik izdüşüm operatörünü göz önüne alalım. $H = M \oplus ÇekP$ olduğundan $\forall x \in H$ için $x = x_M + x_{ÇekP}$ olacak şekilde tek türlü belirli $(x_M, x_{ÇekP}) \in M \times ÇekP$ çifti vardır. O halde; $P(x_M) = x_M$, $P(x_{ÇekP}) = \theta$ ve $P_M(x) = x_M$ olduğundan $\forall x \in H$ için $P(x) = P(x_M + x_{ÇekP}) = x_M = P_M(x)$, yani; $\forall x \in H$ için $P(x) = P_M(x)$ dir. Dolayısı ile $P = P_M$ olup Teorem 2.2.9'dan $P \in B(H)$ izdüşüm operatörü bir dik izdüşüm operatörüdür.

Teorem 2.2.11: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı, $M, L \subset H$ iki kapalı alt lineer uzay ve P_M, P_L sırasıyla H 'nın M ve L üzerine dik izdüşüm operatörleri olsun. Bu takdirde; aşağıdaki şartlar birbirine denktir:

i. $L \subset M$,

ii. $P_M P_L = P_L$,

iii. $P_L P_M = P_L$,

iv. $\forall x \in H$ için $\|P_L(x)\| \leq \|P_M(x)\|$,

v. $O \leq P_L \leq P_M$

dır.

İspat:

i $\Rightarrow$ ii $L \subset M$ ise; $\forall x \in H$ için $P_L(x) \in L$ olduğundan $P_L(x) \in M$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için $\left(P_M P_L\right)(x) = P_M\left(P_L(x)\right) = P_L(x)$ dir. Dolayısıyla; $P_M P_L = P_L$ dir.

ii $\Rightarrow$ iii $P_M P_L = P_L$ olduğundan $\left(P_M P_L\right)^* = \left(P_L\right)^*$ için $\left(P_L\right)^*\left(P_M\right)^* = \left(P_M\right)^*$ dır. Dolayısıyla, $P_L P_M = P_M$ dir.

iii $\Rightarrow$ iv $P_L P_M = P_L$ ise; $\forall x \in H$ için

$$\left\|P_L(x)\right\| = \left\|\left(P_L P_M\right)(x)\right\| = \left\|P_L\left(P_M(x)\right)\right\| \leq \left\|P_L\right\|\left\|P_M(x)\right\| \leq \left\|P_M(x)\right\|$$ olduğundan

$\forall x \in H$ için $\left\|P_L(x)\right\| \leq \left\|P_M(x)\right\|$ dir.

iv $\Rightarrow$ v $\forall x \in H$ için $\left\|P_L(x)\right\| \leq \left\|P_M(x)\right\|$ olduğundan

$$0 \leq \left\|P_L(x)\right\|^2 \leq \left\|P_M(x)\right\|^2$$
$$0 = \left\langle O(x), x\right\rangle \leq \left\langle P_L(x), P_L(x)\right\rangle \leq \left\langle P_M(x), P_M(x)\right\rangle$$

dir. O halde; P_M, P_L birer dik izdüşüm operatörü olduğundan $\forall x \in H$ için

$0 = \left\langle O(x), x\right\rangle \leq \left\langle P_L(x), x\right\rangle \leq \left\langle P_M(x), x\right\rangle$ dır. Son eşitsizlik; $O \leq P_L \leq P_M$ olduğunu gösterir.

v $\Rightarrow$ i Aksini varsayalım. Yani; $L \not\subset M$ olsun. O halde; $\exists x_o \in L \therefore x_o \notin M$ dir. $x_o \notin M$ ve $x_o \in H$ olduğundan $M \neq H$ dir. O halde; $x_o = x_M + x_{M^\perp}$ olacak şekilde

$\exists!\left(x_M, x_{M^\perp}\right) \in M \times M^\perp$ ve $x_{M^\perp} \neq \theta$ dır. Ayrıca; $P_M(x_0) = x_M$ ve $x_o \in L$ olduğundan

$P_L\left(x_o\right) = x_o$ dır. O halde;

$$0 \leq \left\langle P_L\left(x_o\right), x_o\right\rangle \leq \left\langle P_M\left(x_o\right), x_o\right\rangle$$
$$0 \leq \left\langle x_o, x_o\right\rangle \leq \left\langle x_M, x_M + x_{M^\perp}\right\rangle$$
$$0 \leq \left\|x_o\right\|^2 \leq \left\|x_M\right\|^2$$

dir. Fakat; $x_o = x_M + x_{M^\perp}$ olduğundan $\|x_o\|^2 = \|x_M\|^2 + \|x_{M^\perp}\|^2$ ve $\|x_{M^\perp}\| > 0$ olması

$\|x_M\|^2 < \|x_0\|^2$ olur ki; bu $\|x_0\|^2 \le \|x_M\|^2$ olmasıyla çelişir. O halde; $L \subset M$ dir.

$L \subset M$ olması halinde bu teoremin ii,iii ve iv kısımları [5: sayfa 211]'de verilmektedir.

Notasyon: $P,Q: H \to H$ iki operatör ise; kısalık için iki operatör arasındaki bileşke işlemi $PQ \equiv P \circ Q$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.12: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P,Q: H \to H$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $PQ = O$ ise; P dik izdüşüm operatörü, Q dik izdüşüm operatörüne diktir denir ve $P \perp Q$ ile gösterilir.

Sonuç 2.2.13: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P,Q: H \to H$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. Eğer; $P \perp Q$ ise; $Q \perp P$ dir.

İspat: $P \perp Q$ olsun. O halde; $PQ = O$ dır. O halde; $(PQ)^* = (O)^*$ olduğundan $Q^* P^* = O$ ve $Q^* = Q$, $P^* = P$ olduğu göz önüne alınırsa; $QP = O$ dır. Dolayısıyla; $P \perp Q$ ise; $Q \perp P$ dir.

Teorem 2.2.14: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı, $M, N \subset H$ iki kapalı alt uzay ve P_M, P_N sırasıyla H'nın M, N alt uzayları üzerine dik izdüşüm operatörleri olsun. Bu takdirde; $P_M \perp P_N$ olması için gerek ve yeter şart $M \perp N$ olmasıdır.

İspat:

i. $M \perp N$ ise; $P_M \perp P_N$ dir. $\forall x \in H$ için $P_M(x) \in M$, $P_N(x) \in N$ ve $M \perp N$

olduğundan $\forall x \in H$ için $\langle P_M(x), P_N(x) \rangle = 0$ dır. O halde; P_M bir dik izdüşüm operatörü olduğundan $\forall x \in H$ için $\langle P_M(x), P_N(x) \rangle = \langle x, P_M(P_N(x)) \rangle = \langle x, (P_M P_N)(x) \rangle$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için $\langle x, (P_M P_N)(x) \rangle = 0$ olduğundan $P_M P_N = O$ dır. Dolayısıyla; $P_M \perp P_N$ dir.

ii. $P_M \perp P_N$ ise; $M \perp N$ dır. $m \in M, n \in N$ için $P_M(m) = m$, $P_N(n) = n$ ve P_M , P_N dik izdüşüm operatörleri için $P_M P_N = O$ olduğundan $\forall m \in M, \forall n \in N$ için $\langle m, n \rangle = \langle P_M(m), P_N(n) \rangle = \langle m, P_M(P_N(n)) \rangle = \langle m, (P_M P_N)(n) \rangle = \langle m, \theta \rangle = 0$ dır. Dolayısıyla; $M \perp N$ dir.

Teorem 2.2.15: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P, Q : H \to H$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $P \perp Q$ olması için gerek ve yeter şart $P + Q : H \to H$ operatörünün bir dik izdüşüm operatörü olmasıdır. Bu halde; $P + Q = P_{P(H) \oplus Q(H)}$ dir.

İspat:

i. $P, Q : H \to H$; $P \perp Q$ olan iki dik izdüşüm operatörü ise; $P + Q : H \to H$ operatörü bir dik izdüşüm operatörüdür.

$(P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q$ olduğundan $P + Q : H \to H$ operatörü bir izdüşüm operatörüdür. Öte yandan; $\forall x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} \langle (P+Q)(x), y \rangle &= \langle P(x), y \rangle + \langle Q(x), y \rangle \\ &= \langle x, P(y) \rangle + \langle x, Q(y) \rangle \\ &= \langle x, (P+Q)(y) \rangle \end{aligned}$$

olduğundan $P + Q : H \to H$ operatörü bir dik izdüşüm operatörüdür.

ii. $P + Q : H \to H$ operatörü bir dik izdüşüm operatörü ise; $P \perp Q$ dir.

$P + Q : H \to H$ operatörü bir dik izdüşüm operatörü olduğundan $(P+Q)^2 = P + Q$ dir.

O halde; $P^2+PQ+QP+Q^2=P+Q$ (*) ve $P,Q:H\to H$ iki dik izdüşüm operatörü olduğundan $P^2=P, Q^2=Q$ dir. O halde; (*)'dan $PQ+QP=O$ (**) olur. O halde; (**) eşitliğinden

$$\begin{aligned} P(PQ+QP) &= O \\ P^2Q+PQP &= O \\ PQ+PQP &= O \quad (***) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (PQ+PQP)P &= O \\ PQP+PQP^2 &= O \\ 2PQP &= O \\ PQP &= O \ (****) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde; $(***)$ ve $(****)$' dan $PQ=O$ yani; $P\perp Q$ dir.

Son olarak; $P\perp Q$ olduğundan $P(H)\perp Q(H)$ dir. $P(H)\cap Q(H)=\{\theta\}$ ve $P,Q\in B(H)$ olduğundan $P(H)\oplus Q(H)=\{m+n \mid m\in P(H), n\in Q(H)\}\subset H$ alt lineer uzayı Teorem 1.8.12'den kapalı bir alt lineer uzaydır. O halde; $\forall x\in H$ için

$x=P(x)+Q(x)+(x-P(x)-Q(x))$, $P(x)+Q(x)\in P(H)\oplus Q(H)$

ve $(x-P(x)-Q(x))\in (P(H)\oplus Q(H))^{\perp}$ olduğundan $P_{P(H)\oplus Q(H)}(x)=P(x)+Q(x)$ dir.

O halde; $P+Q=P_{P(H)\oplus Q(H)}$ dir.

Bu paragrafın geriye kalan kısmında [4: Paragraf 9.7]'nın sonunda verilen problemler, birbirini takip eden teoremler olarak ifade edilerek ispatları verilecektir.

Teorem 2.2.16: $n\in\mathbb{N}$ ve $P_1,P_2,...,P_n\in B(H)$ birer dik izdüşüm operatörleri ve

$P=P_1+P_2+...+P_n\in B(H)$ olsun. P 'nin bir dik izdüşüm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $k \neq l$ olan $\forall k,l \in \{1,2,...,n\}$ için $P_k P_l = O$ dır. Bu halde; $P = P_{P_1(H)\oplus...\oplus P_n(H)}$ dır.

İspat:

i. $P_1, P_2, ..., P_n \in B(H), k \neq l$ olan $\forall k,l \in \{1,2,...,n\}$ için $P_k P_l = O$ koşulunu sağlayan dik izdüşüm operatörleri ise; $P = P_1 + P_2 + ... + P_n \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörüdür.

$P_1, P_2, ..., P_n \in B(H)$ dik izdüşüm operatörleri olduğundan $\forall k \in \{1,2,...,n\}$ için $P_k^* = P_k$ ve $P_k^2 = P_k$ dır. O halde; $(P_1 + P_2 + ... + P_n)^* = P_1^* + P_2^* + ... + P_n^* = P_1 + P_2 + ... + P_n$ olduğundan $P = P^*$ dır. Öte yandan; $k \neq l$ olan $\forall k,l \in \{1,2,...,n\}$ için $P_k P_l = O$ olduğundan tümevarım yöntemiyle $P^2 = (P_1 + P_2 + ... + P_n)^2 = P_1^2 + P_2^2 + ... + P_n^2 = P$ olduğu görülür. O halde; $P = P_1 + P_2 + ... + P_n \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörüdür.

ii. $n \in \mathbb{N}$ ve $P_1, P_2, ..., P_n \in B(H)$ dik izdüşüm operatörleri için $P = P_1 + P_2 + ... + P_n \in B(H)$ operatörü bir dik izdüşüm operatörü ise; $k \neq l$ olan $\forall k,l \in \{1,2,...,n\}$ için $P_k P_l = O$ dır. $n = 2$ için Teorem 2.2.15 ile ispat açık. Tümevarım hipotezi olarak $n \in \mathbb{N} \therefore n \geq 3$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim ve bu kabul altında $n+1$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim. $P_1, P_2, ..., P_n, P_{n+1} \in B(H)$; $P = P_1 + P_2 + ... + P_n + P_{n+1} \in B(H)$ toplamı bir dik izdüşüm operatörü olan $n+1$ sayıda dik izdüşüm operatörleri olsun. Bu takdirde; $P_1, P_2, ..., P_n \in B(H)$; n sayıda dik izdüşüm operatörü olduğundan Tümevarım hipotezine göre $Q = P_1 + P_2 + ... + P_n \in B(H)$ operatörü bir dik izdüşüm operatörü olup $k \neq l$ olan $\forall k,l \in \{1,2,...,n\}$ için $P_k P_l = O$ koşulu sağlanır ve $Q(H) = (P_1 + P_2 + ... + P_n)(H) = P_1(H) \oplus P_2(H) \oplus ... \oplus P_n(H)$ dır. Diğer taraftan; $P = P_1 + P_2 + ... + P_n + P_{n+1} = Q + P_{n+1}$ bir dik izdüşüm operatörü olduğundan Teorem 2.2.15'e göre; $Q \perp P_{n+1}$ dir. O halde; Teorem 2.2.14'e göre; $Q(H) \perp P_{n+1}(H)$ dır. Ayrıca; $Q(H) = (P_1 + P_2 + ... + P_n)(H) = P_1(H) \oplus P_2(H) \oplus ... \oplus P_n(H)$ olduğundan $\forall k \in \{1,2,...,n\}$

için $P_{n+1}(H) \perp P_k(H)$, yani; $P_{n+1} \perp P_k$ dır. $k \neq l$ olan $\forall k,l \in \{1,2,...,n\}$ için $P_k P_l = O$

olduğu göz önüne alındığında $k \neq l$ olan $\forall k,l \in \{1,2,...,n,n+1\}$ için $P_k P_l = O$ dır.

$P(H) = Q(H) \oplus P_{n+1}(H) = P_1(H) \oplus P_2(H) \oplus ... \oplus P_n(H) \oplus P_{n+1}(H)$ olduğundan Teorem 2.2.1'in vii şıkkı göz önüne alındığında $P = P_{P_1(H)\oplus...\oplus P_n(H)}$ dir. Dolayısıyla; ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.17: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P,Q : H \to H$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $PQ = QP$ olması için gerek ve yeter şart $PQ : H \to H$ operatörünün bir dik izdüşüm operatörü olmasıdır. Bu halde; $PQ = P_{P(H)\cap Q(H)}$ dir.

İspat:

i. $PQ : H \to H$ operatörü bir dik izdüşüm operatörü ise; $PQ = QP$ dir.

$PQ : H \to H$ operatörü bir dik izdüşüm operatörü olduğundan $(PQ)^2 = PQ$ ve $\forall x,y \in H$ için

$$\begin{aligned}
\langle (PQ)(x), y\rangle &= \langle x, (PQ)(y)\rangle \\
\langle Q(x), P(y)\rangle &= \langle x, (PQ)(y)\rangle \\
\langle x, (QP)(y)\rangle &= \langle x, (PQ)(y)\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan $\langle x, (QP - PQ)(y)\rangle = 0$ dır. O halde; $QP - PQ = O$ olduğundan $QP = PQ$ dır.

ii. $QP = PQ$ ise; $PQ : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörüdür.

$(PQ)^2 = (PQ)(PQ) = PQPQ = PPQQ = P^2Q^2 = PQ$ olduğundan $PQ : H \to H$ operatörü bir izdüşüm operatörüdür. Öte yandan; $\forall x,y \in H$ için

$$\langle (PQ)(x), y\rangle = \langle P(Q(x)), y\rangle = \langle Q(x), P(y)\rangle = \langle x, (QP)(y)\rangle = \langle x, (PQ)(y)\rangle$$

olduğundan $PQ : H \to H$ operatörü bir dik izdüşüm operatörüdür.

Son olarak; $PQ = P_{P(H)\cap Q(H)}$ olduğunu gösterelim. $PQ = QP$ olduğundan $\forall x \in H$ için

$(PQ)(x) = P(Q(x)) \in P(H)$ ve $(PQ)(x) = (QP)(x) = Q(P(x)) \in Q(H)$ olduğundan

$(PQ)(x) \in P(H)\cap Q(H)$ dir. Diğer taraftan; $P(H)\cap Q(H) \subset H$ alt lineer uzayı kapalı ve

$\forall x \in H$ için $x = (PQ)(x) + (x-(PQ)(x))$ ve $(PQ)(x) \in P(H)\cap Q(H)$

$(x-(PQ)(x)) \in (P(H)\bigcap Q(H))^{\perp}$ olduğundan $\left(P_{P(H)\cap Q(H)}\right)(x) = (PQ)(x)$ dir. Dolayısı ile; $\forall x \in H$ için $(PQ)(x) = \left(P_{P(H)\cap Q(H)}\right)(x)$ olduğundan $PQ = P_{P(H)\cap Q(H)}$ dir.

Teorem 2.2.18: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{P_n\} \subset B(H)$ bir dik izdüşüm operatörleri dizisi olsun. $\forall x \in H$ için $\{P_n(x)\} \subset H$ dizileri yakınsak ve $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$ ise; $P: H \to H$ dönüşümü bir dik izdüşüm operatörüdür.

İspat: Hipoteze göre; $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x, y \in H$ için $P_n^2 = P_n$, $\langle P_n(x), y\rangle = \langle x, P_n(y)\rangle$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = P(x)$ ve $0 \le \|P_n\| \le 1$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için $P(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x)$ olduğundan P'nin lineerliği açıktır. Öte yandan; iç çarpım fonksiyonu sürekli olduğundan $\langle P_n(x), y\rangle = \langle x, P_n(y)\rangle$ eşitliğinin $n \to +\infty$ için limiti alınırsa; $\forall x, y \in H$ için

$\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$ dir. Ayrıca; $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = P(x)$ eşitliği $\forall x \in H$ için doğru olduğundan $P(x) \in H$ için de doğrudur. O halde; $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(P(x)) = P(P(x))$ dir. Buradan; $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in H$ için

$$\begin{aligned}
\|P^2(x) - P_n^2(x)\| &= \|P^2(x) - P_n(P(x)) + P_n(P(x)) - P_n^2(x)\| \\
&\le \|P^2(x) - P_n(P(x))\| + \|P_n(P(x)) - P_n^2(x)\| \\
&\le \|P^2(x) - P_n(P(x))\| + \|P_n(P(x) - P_n(x))\| \\
&\le \|P^2(x) - P_n(P(x))\| + \|P_n\|\|P(x) - P_n(x)\| \\
&\le \|P^2(x) - P_n(P(x))\| + \|P(x) - P_n(x)\|
\end{aligned}$$

olduğundan $\forall x \in H$ için $\lim_{n\to+\infty} P_n^2(x) = P^2(x)$ dir. O halde; $\forall x, y \in H$ için

$\langle P_n(x), y\rangle = \langle P_n^2(x), y\rangle$ eşitliğinin her iki tarafının $n \to +\infty$ için limiti alınırsa;

$\langle P(x), y\rangle = \langle P^2(x), y\rangle$ elde edilir. O halde; $\forall x, y \in H$ için $\left\langle \left(P - P^2\right)(x), y\right\rangle = 0$ olduğundan $(P - P^2) = O$ yani; $P = P^2$ dir. Sonuç olarak; $P : H \to H$ lineer, $P = P^2$ ve $\forall x, y \in H$ için $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$ olduğundan P bir dik izdüşüm operatörüdür.

Teorem 2.2.19: $(H, \langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{P_n\} \subset B(H)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_1 \le ... \le P_n \le P_{n+1} \le I$ olan bir dik izdüşüm operatör dizisi ise; $\forall x \in H$ için $\{P_n(x)\} \subset H$ dizileri yakınsak ve $P : H \to H$, $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$, H 'nin $\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle} \subset H$ kapalı alt uzayı üzerine dik izdüşüm operatörüdür. Yani; $P = P_{\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}}$ dir.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_1 \le ... \le P_n \le P_{n+1} \le I$ olduğundan Teorem 2.1.14'e göre; $\forall x \in H$ için $P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ olan ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_n \le P \le I$ koşulunu sağlayan bir tek $P \in B(H)$ Hermit operatörü vardır. Bir önceki teoreme göre; P, bir dik izdüşüm operatörü olup $P(H) \subset H$ kapalı alt lineer uzayı için $P = P_{P(H)}$ dır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n = P_{P_n(H)}$ ve $0 \le P_n \le P \le I$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n(H) \subset P(H)$ olup $\bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \subset P(H)$ dır. O halde; $\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle} \subset P(H)$ dır. $\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle} \subset H$ kapalı alt lineer uzayının belirlediği $P_{\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}} : H \to H$ dik izdüşüm operatörü göz önüne alınırsa; $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$P_n(H) \subset \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_n \le P_{n+1} \le P_{\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}}$ dir. O halde;

$\forall x \in H$ için $P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ olduğundan $0 \le P_n \le P \le P_{\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}}$ dir. O halde;

$P(H) \subset \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}$ dir. Dolayısıyla; $\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle} \subset P(H)$ ve $P(H) \subset \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}$

olduğundan $P(H) = \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}$ dir.

Teorem 2.2.20: $(H, \langle , \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{P_n\} \subset B(H)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_{n+1} \le P_n \le I$ olan bir dik izdüşüm operatör dizisi ise; $\forall x \in H$ için $\{P_n(x)\} \subset H$ dizisi yakınsak ve $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ ise; $P : H \to H$ dik izdüşüm operatörü, H 'nın $\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \subset H$ kapalı alt uzayı üzerine dik izdüşümüdür. Yani; $P = P_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)}$ dir.

İspat: Her dik izdüşüm operatörü bir Hermit operatörü ve verilen hipoteze göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_{n+1} \le P_n \le I$ olduğundan Teorem 2.1.15'den , $\forall x \in H$ için $\{P_n(x)\} \subset H$ dizileri yakınsak ve $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ ise; $P : H \to H$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P \le P_n \le I$ koşulunu sağlayan bir Hermit operatörüdür. Öte yandan; Teorem 2.2.18'e göre $P : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörüdür. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P \le P_n$ olduğundan Teorem 2.2.11' e göre; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P(H) \subset P_n(H)$, dolayısıyla $P(H) \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)$ dır.

Diğer taraftan; $\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \subset H$ kapalı bir alt uzay olduğundan $P_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)} : H \to H$ dik izdüşüm operatörü $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)} \le P_{n+1} \le P_n \le I$ koşulunu sağlar. O halde; Teorem 2.1.15 ve Teorem 2.2.18 göz önüne alındığında; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)} \le Q \le P_n \le I$ ve $\forall x \in H$ için $Q(x) := \lim_{n \to +\infty} P_n(x)$ olan bir tek $Q \in B(H)$ dik izdüşüm operatörü vardır. $\forall x \in H$ için

$P(x) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x) = Q(x)$ olduğundan $P = Q$ dır. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$0 \le P_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)} \le Q = P \le P_n \le I$ dir. Son eşitsizlik; Teorem 2.2.11'e göre; $\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \subset P(H)$ olduğunu gösterir. Dolayısı ile; $P(H) \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)$ ve $\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \subset P(H)$ olduğundan

$P(H) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)$ yani; $P = P_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)}$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.21: $P, Q \in B(H)$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $PQ = QP$ ise;

$P + Q - PQ \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörüdür ve $P + Q - PQ = P_{P(H)+Q(H)}$ dır.

İspat: $P, Q \in B(H)$ iki dik izdüşüm operatörü olduğundan $P^2 = P, Q^2 = Q$ ve

$P^* = P, Q^* = Q$ dır. O halde; $PQ = QP$ ise;

$(P + Q - PQ)^* = P^* + Q^* - (PQ)^* = P^* + Q^* - Q^*P^* = P + Q - QP = P + Q - PQ$ ve

$$\begin{aligned}(P + Q - PQ)^2 &= (P + Q - PQ)(P + Q - PQ) \\ &= P^2 + PQ - P^2Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PPQPQ \\ &= P + Q - PQ\end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde; $P + Q - PQ \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörüdür. Diğer taraftan; $(P + Q - PQ)(H) = P(H) + Q(H)$ dır. Gerçekten; $u \in P(H) + Q(H)$ keyfi olsun. O halde;

$\exists x, y \in H \therefore u = P(x) + Q(y)$ dir. O halde; $P(u) = P(P(x) + Q(y)) = P(x) + (PQ)(y)$,

$Q(u) = Q(P(x) + Q(y)) = (QP)(x) + Q(y)$ ve
$(PQ)(u) = (PQ)(P(x)) + (PQ)(Q(y)) = (PQ)(x) + (PQ)(y)$

olduğundan $u = P(x) + Q(y) = P(u) + Q(u) - (PQ)(u) \in (P + Q - PQ)(H)$ dir. O halde; $P(H) + Q(H) \subset (P + Q - PQ)(H)$ dir. Tersine olarak; $w \in (P + Q - PQ)(H)$ keyfi olsun. O halde; $\exists h \in H \therefore w = P(h) + Q(h) - (PQ)(h)$ dir. O halde;

$w = P(h) - P(Q(h)) + Q(h) = P(h - Q(h)) + Q(h) \in P(H) + Q(H)$ olduğundan $(P + Q - PQ)(H) \subset P(H) + Q(H)$ dir. Dolayısıyla;

$P(H) + Q(H) \subset (P + Q - PQ)(H)$ ve $(P + Q - PQ)(H) \subset P(H) + Q(H)$ olduğundan

$(P + Q - PQ)(H) = P(H) + Q(H)$ dır. $(P + Q - PQ) \in B(H)$ dik izdüşüm operatörü

olduğundan $(P + Q - PQ)(H) \subset H$ alt lineer uzayı kapalıdır. Bu nedenle;

$P(H) + Q(H) \subset H$ alt lineer uzayı kapalıdır. O halde; Teorem 2.2.1' e göre

$P + Q - PQ = P_{P(H)+Q(H)}$ dır.

Teorem 2.2.22: $P, Q \in B(H)$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $P - Q \in B(H)$

operatörünün bir dik izdüşüm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $Q \leq P$ olmasıdır.

Bu halde; $P - Q = P_{P(H)\cap(I-Q)(H)}$ dır.

İspat:

i. $P - Q \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörü ise; $Q \leq P$ dir.

$P - Q \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörü olduğundan $(P - Q)^2 = P - Q$ ve

$(P - Q)^* = P - Q$ dır. O halde; $\forall x \in H$ için

$0 \le \langle (P-Q)(x), (P-Q)(x) \rangle = \langle x, (P-Q)(x) \rangle = \langle x, P(x) \rangle - \langle x, Q(x) \rangle$

olduğundan $\forall x \in H$ için $0 \le \langle x, Q(x) \rangle \le \langle x, P(x) \rangle$ dir. Dolayısıyla; $Q \le P$ dir.

ii. $Q \le P$ ise; $P-Q \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörüdür.

$Q \le P$ olduğundan $\forall x \in H$ için $\langle x, Q(x) \rangle \le \langle x, P(x) \rangle$ dir. O halde; $\forall x \in H$ için

$\|Q(x)\| \le \|P(x)\|$ dir. Teorem 2.2.11'a göre $QP = Q, PQ = Q$ dır. Diğer taraftan;

$(P-Q)^2 = P^2 - PQ - QP + Q^2$ dir. O halde; $(P-Q)^2 = P - Q$ olduğu açıktır. Öte yandan;

$(P-Q)^* = P^* - Q^* = P - Q$ olduğundan $P-Q \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörüdür.

$P - Q = P_{P(H) \cap (I-Q)(H)}$ olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır.

$P-Q, P, (I-Q) \in B(H)$ operatörlerinin her biri birer dik izdüşüm operatörüdür. Diğer taraftan; yukarıda gösterildiği üzere; $QP = PQ$ olduğu kullanılarak $P(I-Q) = (I-Q)P$ olduğu görülür.
O halde; $P - Q = P(I-Q)$ olduğundan Teorem 2.2.17'ye göre; $P - Q = P_{P(H) \cap (I-Q)(H)}$ dir.

Teorem 2.2.23: $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(H)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \ne n$ için $P_m P_n = O$ olan bir dik izdüşüm operatörleri olsun. Bu takdirde; $\forall x \in H$ için $\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(x)$ serisi yakınsak ve $\forall x \in H$ için

$P(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(x)$ ise; $P : H \to H$ bir dik izdüşüm operatörü ve $P = P_{\overline{\left\langle \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k(x) \right\rangle}}$ dir.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n := \sum_{k=1}^{n} P_k$ olsun. Verilen hipotez ve Teorem 2.2.16'e göre; $\{E_n\} \subset B(H)$ bir dik izdüşüm operatör dizisidir. Diğer taraftan; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le E_1 \le \ldots \le E_n \le E_{n+1} \le I$ dir. Gerçekten; $E_n(H) \subset H$ alt lineer uzayı kapalı olduğundan

$H = E_n(H) \oplus \left(E_n(H)\right)^{\perp}$ olduğu göz önüne alınırsa; $\forall x \in H$ için $x = x_{E_n(H)} + x_{(E_n(H))^{\perp}}$ olacak

şekilde bir tek $\left(x_{E_n(H)}, x_{(E_n(H))^{\perp}}\right) \in \left(E_n(H) \times \left(E_n(H)\right)^{\perp}\right)$ çifti vardır ve $E_n(x) = x_{E_n(H)}$ dir.

O halde; $\|E_n(x)\|^2 = \left\|x_{E_n(H)}\right\|^2 \leq \left\|x_{E_n(H)}\right\|^2 + \left\|x_{(E_n(H))^{\perp}}\right\|^2 = \|x\|^2$ olduğundan $\forall x \in H$ için

$\|E_n(x)\| \leq \|x\|$ dir. Öte yandan; $\forall x \in H$ için $\|I(x)\| = \|x\|$ olduğundan $\forall x \in H$ için

$\|E_n(x)\| \leq \|I(x)\|$ dir. Ayrıca; $\forall x \in H$ için

$$0 \leq \|E_{n+1}(x)\|^2 = \langle E_{n+1}(x), E_{n+1}(x)\rangle = \langle E_n(x) + P_{n+1}(x), E_n(x) + P_{n+1}(x)\rangle$$

$$0 \leq \|E_{n+1}(x)\|^2 = \langle E_{n+1}(x), E_{n+1}(x)\rangle = \|E_n(x)\|^2 + \|P_{n+1}(x)\|^2 + \langle E_n(x), P_{n+1}(x)\rangle + \langle P_{n+1}(x), E_n(x)\rangle$$

$$0 \leq \|E_{n+1}(x)\|^2 = \|E_n(x)\|^2 + \|P_{n+1}(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\langle P_k(x), P_{n+1}(x)\rangle + \sum_{k=1}^{n}\langle P_{n+1}(x), P_k(x)\rangle$$

$$0 \leq \|E_{n+1}(x)\|^2 = \|E_n(x)\|^2 + \|P_{n+1}(x)\|^2$$

elde edilir. O halde; $0 \leq \|E_n(x)\| \leq \|E_{n+1}(x)\|$ dir.

Sonuç olarak; $\forall x \in H$ için $0 \leq \|E_n(x)\| \leq \|E_{n+1}(x)\| \leq \|I(x)\|$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq E_1 \leq \ldots \leq E_n \leq E_{n+1} \leq I$ dır. O halde; Teorem 2.2.19'e göre; $\forall x \in H$ için $\{E_n(x)\} \subset H$ dizileri yakınsak ve $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim_{n \to +\infty} E_n(x)$ olan $P : H \to H$ operatörü, H 'nın $\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n(H) \right\rangle} \subset H$ kapalı alt uzayı üzerine bir dik izdüşüm operatörüdür.Yani;

$P = P_{\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n(H) \right\rangle}}$ dir. Fakat; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ olduğundan $\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n(H) \right\rangle} = \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}$

dir. Öte yandan; $\forall x \in H$ için $E_n(x) := \sum_{k=1}^{n} P_k(x)$, $\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(x)$ serisinin $n.$ kısmi toplamıdır. O halde; $\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(x)$ serisi yakınsak ve $P(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(x)$ dir.

2.3. Kompleks Hilbert Uzaylarında $(\mathbb{R},+)$ Grubunun Periyodik Sürekli Üniter Gösterimlerine Göre Dik İzdüşümler

$(\mathbb{R},+,.)$ reel sayılar cismi; $(H,\langle,\rangle)$ bir kompleks Hilbert uzayı, $(\mathbb{R},+)$, $\mathbb{R}$ 'nin toplama işlemine göre değişmeli grubu, $(\mathbb{R},e)$ Öklid metrik uzayı ve $(\mathbb{R}^2,e_2)$, $(\mathbb{R},e)$ 'nin kendisi ile kartezyen çarpımı olsun.

Bu takdirde; kolayca gösterilir ki

$$\begin{array}{ccc} f:(\mathbb{R}^2,e_2)\to(\mathbb{R},e) & & g:(\mathbb{R},e)\to(\mathbb{R},e) \\ (x,y)\to f(x,y):=x+y & \text{ve} & x\to g(x):=-x \end{array}$$

dönüşümleri süreklidir.

Tanım 2.3.1.[3: Sayfa134]: $\alpha:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$; $\alpha(0)=I$ ve $\forall s,t\in\mathbb{R}$ için

$\alpha(s+t)=\alpha(s)\alpha(t)$ koşullarını sağlayan bir dönüşüm ise; α dönüşümüne, $(\mathbb{R},+)$

grubunun H Hilbert uzayında bir gösterimi denir.

Tanımdan görülüyor ki; $t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t)\alpha(-t)=\alpha(t+(-t))=\alpha(0)=I$ olduğundan $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t)\in B(H)$ operatörleri birebir, örten ve tersleri sürekli olan operatörlerdir. Bu nedenle; $GL(H):=\{T\,|\,T\in B(H),T^{-1}$ mevcut ve $T^{-1}\in B(H)\}$ ise; $GL(H)$ 'nın bileşke işlemine göre bir grup olduğu göz önüne alındığında $\alpha((\mathbb{R},+))\subset GL(H)$ dır ve $\alpha:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$ gösterimi $(\mathbb{R},+)$ grubundan $GL(H)$ grubuna tanımlı bir grup homomorfizmasıdır.

Öte yandan; $\forall s,t\in\mathbb{R}$ için $s+t=t+s$ olduğundan $\alpha(s+t)=\alpha(t+s)$,

yani; $\alpha(s)\alpha(t)=\alpha(t)\alpha(s)$ dir.

Tanım 2.3.2.[3]: $\alpha:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$, $(\mathbb{R},+)$ grubunun H 'da bir gösterimi ve $x\in H$ olsun. $\alpha_x:(\mathbb{R},e)\to(H,\langle,\rangle)$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha_x(t):=\alpha(t)(x)$ dönüşümü sürekli ise;

$x \in H$ noktasına $\alpha : (\mathbb{R},+) \to (B(H),\circ)$ gösteriminin bir süreklilik noktası denir.

Teorem 2.3.3: $\alpha : (\mathbb{R},+) \to (B(H),\circ)$, $(\mathbb{R},+)$ grubunun H 'da bir gösterimi ve $x \in H$ olsun. $x \in H$ noktasının, α gösteriminin bir süreklilik noktası olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{t\to 0} \alpha(t)(x) = x$ olmasıdır.

İspat:

i. $x \in H$ noktası, α gösteriminin bir süreklilik noktası ise; $\lim_{t\to 0} \alpha(t)(x) = x$ dir.

$x \in H$ noktası, α gösteriminin bir süreklilik noktası olduğundan $\alpha_x : (\mathbb{R},e) \to (H,\langle,\rangle)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha_x(t) := \alpha(t)(x)$ dönüşümü süreklidir. O halde; α_x, $0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olduğundan $\forall \mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık $|t-0| < \delta(0,\mathcal{E})$ koşulunu sağlayan $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \|\alpha_x(t) - \alpha_x(0)\| &= \|\alpha(t)(x) - \alpha(0)(x)\| \\ &= \|\alpha(t)(x) - I(x)\| \\ &= \|\alpha(t)(x) - x\| < \mathcal{E} \end{aligned}$$

koşulunu sağlayan bir $\delta(0,\mathcal{E}) > 0$ sayısı vardır. Son eşitsizlikten; $0 < |t-0| < \delta(0,\mathcal{E})$ olan $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha(t)(x) - x\| < \mathcal{E}$, yani; $\lim_{t\to 0} \alpha(t)(x) = x$ olduğu görülür.

ii. $\lim_{t\to 0} \alpha(t)(x) = x$ ise; $x \in H$ noktası, α gösteriminin bir süreklilik noktasıdır.

$t_0 \in \mathbb{R}$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $\alpha_x : (\mathbb{R},e) \to (H,\langle,\rangle)$ fonksiyonunun $t_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır.

$\lim_{t\to 0} \alpha(t)(x) = x$ olduğundan $\forall \mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık $|u-0| < \delta(0,\mathcal{E})$ olan $\forall u \in \mathbb{R}$ için

$\|\alpha(u)(x) - x\| < \dfrac{\mathcal{E}}{1 + \|\alpha(t_0)\|}$ olacak şekilde bir $\delta(0,\mathcal{E}) > 0$ sayısı vardır.

$\alpha(0)(x) = I(x) = x$ olduğundan son eşitsizlik göz önüne alındığında

$\forall t \in \mathbb{R} \therefore |t - t_0| < \delta(0, \mathcal{E})$ için

$$\begin{aligned}
\|\alpha_x(t) - \alpha_x(t_o)\| &= \|\alpha(t)(x) - \alpha(t_o)(x)\| \\
&= \|\alpha(t_o + (t - t_o))(x) - \alpha(t_o)(x)\| \\
&= \|(\alpha(t_o)\alpha(t - t_o))(x) - \alpha(t_o)(x)\| \\
&= \|\alpha(t_o)(\alpha(t - t_o)(x) - x)\| \\
&\leq \|\alpha(t_o)\| \|\alpha(t - t_o)(x) - x\| \\
&< \mathcal{E}
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla; α_x dönüşümü $t_o \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir.

Tanım 2.3.4.[3:Sayfa 134]: $\alpha : (\mathbb{R}, +) \to (B(H), \circ)$, $(\mathbb{R}, +)$ grubunun H 'da bir gösterimi olsun. $\forall x \in H$ noktası α 'nın bir süreklilik noktası ise; α gösterimine, $(\mathbb{R}, +)$ grubunun H 'da kuvvetli sürekli bir gösterimi denir.

Bu paragrafın geriye kalan kısmında kuvvetli sürekli gösterim yerine sadece sürekli gösterim ifadesini kullanacağız.

Tanım 2.3.5.[3:Sayfa135]: $\alpha : (\mathbb{R}, +) \to (B(H), \circ)$, $(\mathbb{R}, +)$ grubunun H 'da bir gösterimi olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha(t) \in B(H)$ operatörleri üniter ise; α 'ya $(\mathbb{R}, +)$ grubunun H 'da bir üniter gösterimi denir.

Tanımdan görülüyor ki her üniter gösterim süreklidir.

Örnek 2.3.6: $(\mathbb{C}^2, \langle , \rangle)$, kompleks Hilbert uzayı olmak üzere;

$\alpha : (\mathbb{R}, +) \to (B(\mathbb{C}^2), \circ)$, $\forall z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için $\alpha(t)(z) := \begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ olarak

tanımlanırsa; α, $(\mathbb{R}, +)$ grubunun H 'da bir üniter gösterimidir.

Örnek 2.3.7: $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı olmak üzere;

$\alpha:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t):=e^{it}I$ olarak tanımlanırsa; α, $(\mathbb{R},+)$ grubunun H 'da bir üniter gösterimidir.

Tanım 2.3.8.[3]: $\alpha:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$, $(\mathbb{R},+)$ grubunun H 'da bir gösterimi olsun.

$\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t)=\alpha(t+T)$ olacak şekilde sabit bir $T>0$ sayısı varsa; α gösterimine periyodik ve $T>0$ sayısına, α gösteriminin periyodu denir.

$\alpha:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$, $(\mathbb{R},+)$ grubunun H 'da $T>0$ periyodlu bir gösterimi olsun. Bu takdirde; $\beta:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$ dönüşümü $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\beta(t):=\alpha(Tt)$ şeklinde tanımlanırsa; kolayca görülür ki β, $(\mathbb{R},+)$ grubunun H 'da periyodu 1 olan bir gösterimidir. Bundan dolayı periyodik bir gösterimden söz edildiğinde periyodunun daima 1 olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 2.3.9: $\alpha:(\mathbb{R},+)\to(B(H),\circ)$, $(\mathbb{R},+)$ grubunun, H 'da periyodik sürekli üniter

bir gösterimi olsun. Bu takdirde; aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{P_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset B(H)$ dik izdüşüm operatörleri ailesi vardır.

i. $\forall s\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(s)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(s)$,

ii. $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(t)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(t)=e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}$,

iii. $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}P_m^{\alpha}=\begin{cases}P_n^{\alpha}, & n=m\\ O, & n\neq m\end{cases}$,

iv. $n\neq m$ olan $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(H)\perp P_m^{\alpha}(H)$,

v. $\forall n\in\mathbb{Z}$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big)=e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H)$,

vi. $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $\forall x\in P_n^{\alpha}(H)$ için $\alpha(t)(x)=e^{2n\pi it}x$,

vii. $n\in\mathbb{Z}$ olsun. $\varnothing\neq L\subset H$, $\forall x\in L$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t)(x)=e^{2n\pi it}x$ koşulunu sağlayan bir alt küme ise; $L\subset P_n^{\alpha}(H)$

dir.

İspat: $x \in H$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $\alpha_x : (\mathbb{R}, e) \to (H, \langle , \rangle), \forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha_x(t) := \alpha(t)(x)$ fonksiyonu ve $\langle , \rangle : H \times H \to H$ iç çarpım fonksiyonu sürekli olduklarından $y \in H$ keyfi fakat sabit alındığında $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\langle y, \alpha(t)(x) \rangle$ değerini alan fonksiyon, her kapalı aralık üzerinde sürekli dolayısı ile; $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olduğundan bu kapalı aralık üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur.

$\Phi_n{}^x : H \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall y \in H$ için $\Phi_n{}^x(y) := \int_0^1 e^{2n\pi it} \langle y, \alpha(t)(x) \rangle dt$

şeklinde tanımlansın. İç çarpımın ve integralin özellikleri kullanılırsa; $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ve

$\forall y_1, y_2 \in H$ için

$$\Phi_n{}^x(ay_1 + by_2) = a\Phi_n{}^x(y_1) + b\Phi_n{}^x(y_2) \qquad (1)$$

dir. Öte yandan; Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve α gösteriminin üniter olduğu kullanılırsa;

$\forall y \in H$ için

$$\left|\Phi_n{}^x(y)\right| \leq \|x\|\|y\| \qquad (2)$$

elde edilir. Dolayısı ile (1) ve (2)'den $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall x \in H$ için $\Phi_n{}^x : H \to \mathbb{C}$

operatörlerinin her biri bir sınırlı lineer fonksiyoneldir. O halde; $x \in H$ keyfi fakat sabit alındığında Riesz- Frechet teoremine göre; $\forall y \in H$ için $\Phi_n{}^x(y) = \langle y, P_n^\alpha(x) \rangle$ ve

$\|\Phi_n{}^x\| = \|P_n^\alpha(x)\|$ koşulunu sağlayan bir tek $P_n^\alpha(x) \in H$ noktası vardır. $n \in \mathbb{Z}$ ve $x \in H$

verildiğinde; $P_n^\alpha(x) \in H$ ve $\forall y \in H$ için $\Phi_n{}^x(y) = \langle y, P_n^\alpha(x) \rangle$ koşulunu sağlayan nokta

olmak üzere; $P_n^\alpha : H \to H$, $\forall x \in H$ için $(P_n^\alpha)(x) := P_n^\alpha(x)$ değerini alan dönüşüm olsun. $\forall y \in H$ için $\left|\Phi_n{}^x(y)\right| \leq \|x\|\|y\|$ olduğundan $\|\Phi_n{}^x\| \leq \|x\|$ dir. $\|\Phi_n{}^x\| = \|P_n^\alpha(x)\|$ olduğundan

$\forall x \in H$ için $\left\|P_n^{\alpha}(x)\right\| \le \|x\|$ dir. Diğer taraftan; $\forall y \in H$ için

$\Phi_n^{\,x}(y) := \int_0^1 e^{2n\pi it}\left\langle y, \alpha(t)(x)\right\rangle dt$ ve $\Phi_n^{\,x}(y) = \left\langle y, P_n^{\alpha}(x)\right\rangle$ olduğundan $\forall y \in H$ için

$\left\langle y, P_n^{\alpha}(x)\right\rangle = \int_0^1 e^{2n\pi it}\left\langle y, \alpha(t)(x)\right\rangle dt$ dir. O halde; $\forall y \in H$ için

$\overline{\left\langle y, P_n^{\alpha}(x)\right\rangle} = \overline{\int_0^1 e^{2n\pi it}\left\langle y, \alpha(t)(x)\right\rangle dt}$ dir. Son eşitlikte; $\forall y \in H$ için

$\overline{\int_0^1 e^{2n\pi it}\left\langle y, \alpha(t)(x)\right\rangle dt} = \int_0^1 \overline{e^{2n\pi it}\left\langle y, \alpha(t)(x)\right\rangle} dt = \int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle \alpha(t)(x), y\right\rangle dt$ ve

$\overline{\left\langle y, P_n^{\alpha}(x)\right\rangle} = \left\langle P_n^{\alpha}(x), y\right\rangle$ olduğu göz önüne alınırsa; $\forall x, y \in H$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\left\langle P_n^{\alpha}(x), y\right\rangle = \int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle \alpha(t)(x), y\right\rangle dt \qquad (3)$$

elde edilir. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha(t) \in B(H)$ olduğundan ve integralin özellikleri kullanılırsa; (3) eşitliğinden $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ve $\forall x_1, x_2 \in H$ için

$$\begin{aligned}\left\langle P_n^{\alpha}(ax_1 + bx_2), y\right\rangle &= \int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle \alpha(t)(ax_1 + bx_2), y\right\rangle dt \\ &= a\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle \alpha(t)(x_1), y\right\rangle dt + b\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle \alpha(t)(x_2), y\right\rangle dt \\ &= a\left\langle P_n^{\alpha}(x_1), y\right\rangle + b\left\langle P_n^{\alpha}(x_2), y\right\rangle\end{aligned}$$

$$\left\langle P_n^{\alpha}(ax_1 + bx_2), y\right\rangle = a\left\langle P_n^{\alpha}(x_1), y\right\rangle + b\left\langle P_n^{\alpha}(x_2), y\right\rangle$$

$$\left\langle P_n^{\alpha}(ax_1 + bx_2), y\right\rangle - a\left\langle P_n^{\alpha}(x_1), y\right\rangle - b\left\langle P_n^{\alpha}(x_2), y\right\rangle = 0$$

$$\left\langle P_n^{\alpha}(ax_1 + bx_2), y\right\rangle + \left\langle -aP_n^{\alpha}(x_1) - bP_n^{\alpha}(x_2), y\right\rangle = 0$$

$$\left\langle P_n^{\alpha}(ax_1+bx_2)-\left(aP_n^{\alpha}(x_1)+bP_n^{\alpha}(x_2)\right),y\right\rangle=0$$

elde edilir. O halde; $y:=P_n^{\alpha}(ax_1+bx_2)-\left(aP_n^{\alpha}(x_1)+bP_n^{\alpha}(x_2)\right)\in H$ alınırsa; $\forall a,b\in\mathbb{C}$ ve $\forall x_1,x_2\in H$ için

$$P_n^{\alpha}(ax_1+bx_2)=aP_n^{\alpha}(x_1)+bP_n^{\alpha}(x_2)$$

elde edilir. O halde; $P_n^{\alpha}:H\to H$ dönüşümü lineerdir. $P_n^{\alpha}:H\to H$ dönüşümü lineer ve $\forall x\in H$ için $\left\|P_n^{\alpha}(x)\right\|\le\|x\|$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}\in B(H)$ ve $0\le\left\|P_n^{\alpha}\right\|\le 1$ dir.

i. $\forall s\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(s)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(s)$ dir.

Gerçekten; $\forall s,t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(s+t)=\alpha(s)\alpha(t)$ olduğundan (3) eşitliği ve ek operatörün tanımı göz önüne alındığında $\forall s\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ ve $\forall x,y\in H$ için

$$\begin{aligned}
\left\langle\left(\alpha(s)P_n^{\alpha}\right)(x),y\right\rangle&=\left\langle\alpha(s)\left(P_n^{\alpha}(x)\right),y\right\rangle\\
&=\left\langle P_n^{\alpha}(x),\alpha^*(s)(y)\right\rangle\\
&=\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle\alpha(t)(x),\alpha^*(s)(y)\right\rangle dt\\
&=\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle\alpha(s)\left(\alpha(t)(x)\right),y\right\rangle dt\\
&=\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle\left(\alpha(s)\alpha(t)\right)(x),y\right\rangle dt\\
&=\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle\left(\alpha(t)\alpha(s)\right)(x),y\right\rangle dt\\
&=\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle\alpha(t)\left(\alpha(s)(x)\right),y\right\rangle dt\\
&=\left\langle\left(P_n^{\alpha}\alpha(s)\right)(x),y\right\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan $\forall s\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(s)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(s)$ elde edilir.

ii. $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(t)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(t)=e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}$ dir.

Gerçekten; $t\in\mathbb{R}$ keyfi fakat sabit alınsın. $\forall s\in\mathbb{R}$ için $\alpha(s+t)=\alpha(s)\alpha(t)$ olduğundan (3) eşitliği ve ek operatörün tanımı göz önüne alındığında $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall x, y \in H$ için

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\alpha(t) P_n^{\alpha}\right)(x), y \right\rangle &= \left\langle P_n^{\alpha}(x), \alpha^*(t)(y) \right\rangle \\ &= \int_0^1 e^{-2n\pi is} \left\langle \alpha(s)(x), \alpha^*(t)(y) \right\rangle ds \\ &= \int_0^1 e^{-2n\pi is} \left\langle \alpha(t)\left(\alpha(s)(x)\right), y \right\rangle ds \\ &= \int_0^1 e^{-2n\pi is} \left\langle \alpha(s+t)(x), y \right\rangle ds \qquad (4)\end{aligned}$$

dir. $\int_0^1 e^{-2n\pi is} \left\langle \alpha(s+t)(x), y \right\rangle ds$ integralini hesaplamak için $s = u - t$ dönüşümü yapılırsa;

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-2n\pi is} \left\langle \alpha(s+t)(x), y \right\rangle ds &= \int_t^{t+1} e^{-2n\pi i(u-t)} \left\langle \alpha(u)(x), y \right\rangle du \\ &= e^{2n\pi it} \int_t^{t+1} e^{-2n\pi iu} \left\langle \alpha(u)(x), y \right\rangle du \qquad (5)\end{aligned}$$

olduğu görülür. (4) ve (5) eşitliklerinden $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall x, y \in H$ için

$$\left\langle \left(\alpha(t) P_n^{\alpha}\right)(x), y \right\rangle = e^{2n\pi it} \int_t^{t+1} e^{-2n\pi iu} \left\langle \alpha(u)(x), y \right\rangle du \qquad (6)$$

elde edilir. $x, y \in H$ için $F(t) := \int_t^{t+1} e^{-2n\pi iu} \left\langle \alpha(u)(x), y \right\rangle du$ olsun. $e^{-2n\pi iu} \left\langle \alpha(u)(x), y \right\rangle$

fonksiyonu sürekli olduğundan İntegral Hesabın Birinci Temel teoremi [8] ve [2] Leibnitz kuralına göre; $F(t)$ fonksiyonu türevlenebilir ve

$$F'(t) = e^{-2n\pi i(t+1)} \left\langle \alpha(t+1)(x), y \right\rangle (t+1)' - e^{-2n\pi it} \left\langle \alpha(t)(x), y \right\rangle (t)',$$

$$F'(t) = e^{-2n\pi i(t+1)} \left\langle \alpha(t+1)(x), y \right\rangle - e^{-2n\pi it} \left\langle \alpha(t)(x), y \right\rangle,$$

$$F'(t) = e^{-2n\pi it} \left\langle \alpha(t+1)(x) - \alpha(t)(x), y \right\rangle$$

dir. Öte yandan; $\alpha : (\mathbb{R}, +) \to \left(B(H), \circ\right)$, $(\mathbb{R}, +)$ grubunun H 'da 1 periyotlu sürekli üniter gösterimi olduğundan $\alpha(1+t)=\alpha(t)$ olduğu göz önüne alınırsa; $F'(t)=0$ dır. O halde; F fonksiyonu sabittir. Dolayısı ile;

$$F(t)=F(0)=\int_0^1 e^{-2n\pi iu}\left\langle \alpha(u)(x),y\right\rangle du=\left\langle P_n^{\alpha}(x),y\right\rangle \tag{7}$$

dır. (6) ve (7) 'den $t\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ ve $\forall x,y\in H$ için

$$\left\langle \left(\alpha(t)P_n^{\alpha}\right)(x),y\right\rangle = e^{2n\pi it}\left\langle P_n^{\alpha}(x),y\right\rangle=\left\langle e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(x),y\right\rangle$$

$$\left\langle \left(\alpha(t)P_n^{\alpha}-e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}\right)(x),y\right\rangle=0$$

olduğu görülür. Son eşitlikten; $t\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(t)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(t)=e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}$ olduğunu gösterir ve $t\in\mathbb{R}$ keyfi alındığından ispat tamamlanır.

iii. $\forall m,n\in\mathbb{Z}, \forall x,y\in H$ için (3) eşitliği ve ii göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(P_n^{\alpha}P_m^{\alpha}\right)(x),y\right\rangle &= \left\langle P_n^{\alpha}\left(P_m^{\alpha}(x)\right),y\right\rangle \\
&=\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle \alpha(t)\left(P_m^{\alpha}(x)\right),y\right\rangle dt \\
&=\int_0^1 e^{-2n\pi it}\left\langle e^{2m\pi it}P_m^{\alpha}(x),y\right\rangle dt \\
&=\int_0^1 e^{2(m-n)\pi it}\left\langle P_m^{\alpha}(x),y\right\rangle dt \\
&=\left\langle P_m^{\alpha}(x),y\right\rangle \int_0^1 e^{2(m-n)\pi it}dt \\
&=\begin{cases}\left\langle P_n^{\alpha}(x),y\right\rangle, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases} \\
&=\begin{cases}\left\langle P_n^{\alpha}(x),y\right\rangle, & n=m,\\ \left\langle \theta,y\right\rangle, & n\neq m.\end{cases} \\
&=\begin{cases}\left\langle P_n^{\alpha}(x),y\right\rangle, & n=m,\\ \left\langle O(x),y\right\rangle, & n\neq m.\end{cases}
\end{aligned}$$

olduğundan; $n \neq m$ için $P_n^{\alpha} P_m^{\alpha} = O$ ve $P_n^{\alpha} P_n^{\alpha} = P_n^{\alpha}$ olduğu görülür.

Sonuç olarak; Sonuç 2.2.10 göz önüne alındığında $\{P_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset B(H)$, teoremin şartlarını sağlayan bir ortogonal dik izdüşüm operatörleri ailesidir.

iv. $\{P_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset B(H)$ dik izdüşüm operatörleri ailesi $n \neq m$ olan $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha} P_m^{\alpha} = O$ koşulunu sağladığından Teorem 2.2.14'ye göre; $P_n^{\alpha}(H) \perp P_m^{\alpha}(H)$ dir.

v. $\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big) = e^{2n\pi it} P_n^{\alpha}(H)$ dır. Gerçekten; $t \in \mathbb{R}$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta ve $u \in \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big)$ olsun. O halde;
$\exists y \in P_n^{\alpha}(H) \therefore u = \alpha(t)(y)$ dir. Öte yandan; $y \in P_n^{\alpha}(H)$ olduğundan $\exists x \in H \therefore y = P_n^{\alpha}(x)$ dir. O halde; $u = \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(x)\big) = \big(\alpha(t)P_n^{\alpha}\big)(x)$ dir. O halde; teoremin ii şıkkı ile $u = \big(\alpha(t)P_n^{\alpha}\big)(x) = \big(e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}\big)(x) = e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(x) \in e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H)$ dir. Dolayısı ile; $\alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big) \subset e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H)$ dir. Tersine olarak; $v \in e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H)$ keyfi olsun. O halde; $\exists x \in P_n^{\alpha}(H) \therefore v = e^{2n\pi it}x$ dir. Öte yandan; $x \in P_n^{\alpha}(H)$ olduğundan $\exists y \in H \therefore x = P_n^{\alpha}(y)$ dir. O halde; $v = e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(y) = \big(e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}\big)(y) = \big(\alpha(t)P_n^{\alpha}\big)(y) = \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(y)\big) \in \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big)$ dir. Dolayısı ile; $e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H) \subset \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big)$ dir. O halde; $\alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big) \subset e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H)$ ve $e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H) \subset \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big)$ olduğundan

$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ ve } \forall t \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(H)\big) = e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H) \text{ dir.}$$

vi. $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in P_n^{\alpha}(H)$ için $\alpha(t)(x) = e^{2n\pi it}x$ dir.

Gerçekten; $x \in P_n^{\alpha}(H)$ keyfi olsun. O halde; $\exists y \in H \therefore x = P_n^{\alpha}(y)$ dir. $x = P_n^{\alpha}(y)$ olduğundan ii şıkkı göz önüne alındığında $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$\alpha(t)(x) = \alpha(t)\big(P_n^{\alpha}(y)\big) = \big(e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}\big)(y) = e^{2n\pi it}x$ olduğu görülür.

vii. $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $\varnothing \neq L \subset H$, $\forall x \in L$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha(t)(x) = e^{2n\pi it}x$ koşulunu sağlayan bir alt küme ise; $L \subset P_n^{\alpha}(H)$ dir. Gerçekten; $\forall x \in L$ için $\alpha(t)(x) = e^{2n\pi it}x$

olduğundan (3)'den dolayı $\forall y \in H$ ve $\forall x \in L$ için

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{\alpha}(x), y\rangle &= \int_0^1 e^{-2n\pi it}\langle \alpha(t)(x), y\rangle dt \\
&= \int_0^1 e^{-2n\pi it}\langle e^{2n\pi it}x, y\rangle dt \\
&= \int_0^1 e^{-2n\pi it}e^{2n\pi it}\langle x, y\rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle x, y\rangle dt \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

dir. O halde; $\forall y \in H$ ve $\forall x \in L$ için $\langle P_n^{\alpha}(x) - x, y\rangle = 0$ dır. Dolayısı ile $x \in L$ için

$y := P_n^{\alpha}(x) - x \in H$ alınırsa; $P_n^{\alpha}(x) - x = \theta$ olduğundan $x = P_n^{\alpha}(x)$ dır.

O halde; $x \in P_n^{\alpha}(H)$ olduğundan $L \subset P_n^{\alpha}(H)$ dir.

Teorem 2.3.10: $x \in H$ olsun. $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $x \perp P_n^{\alpha}(H)$ ise; $x = \theta$ dır.

İspat: $P_n^{\alpha}(H) := \left\{ P_n^{\alpha}(y) \middle| y \in H \right\}$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $x \perp P_n^{\alpha}(H)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$\langle P_n^{\alpha}(x), x\rangle = 0$ dır. O halde; $\langle P_n^{\alpha}(x), x\rangle = \int_0^1 e^{-2n\pi it}\langle \alpha(t)(x), x\rangle dt$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\int_0^1 e^{-2n\pi it}\langle \alpha(t)(x), x\rangle dt = 0 \qquad (*)$$

dır. $\langle \alpha(t)(x), x\rangle$ fonksiyonu sürekli ve 1 periyodlu olduğundan

$[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde $\langle \alpha(t)(x), x\rangle$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olan bir $\{Q_m(t)\}$,

$Q_m(t) := \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{2k\pi i t}$, polinom dizisi vardır [10: Sayfa190].

$Q_m(t) \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} \langle \alpha(t)(x), x \rangle$ olduğundan $\overline{Q_m(t)} \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} \overline{\langle \alpha(t)(x), x \rangle}$, dolayısı ile;

$$\overline{Q_m(t)} \langle \alpha(t)(x), x \rangle \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} \overline{\langle \alpha(t)(x), x \rangle} \langle \alpha(t)(x), x \rangle = \left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2$$

olduğu düzgün yakınsaklık tanımı ve kapalı aralıklar üzerinde sürekli olan fonksiyonların sınırlı olduğu kullanılarak kolayca görülür. $\overline{Q_m(t)} \langle \alpha(t)(x), x \rangle \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} \left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2$, $\overline{Q_m(t)} \langle \alpha(t)(x), x \rangle$ fonksiyonu sürekli dolayısı ile integrallenebilir olduğundan

$$\int_0^1 \left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2 dt = \lim_{m \to +\infty} \int_0^1 \overline{Q_m(t)} \langle \alpha(t)(x), x \rangle dt \qquad (**)$$

dir[10:Sayfa151]. Öte yandan; $(*)$ koşuluna göre $\forall m \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \in \{-m, ..., 0, 1, ..., m\}$ için $\int_0^1 \overline{a_k} e^{-2k\pi i t} \langle \alpha(t)(x), x \rangle dt = 0$ olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\int_0^1 \overline{Q_m(t)} \langle \alpha(t)(x), x \rangle dt = 0$ dır. O halde; $(**)$ 'dan $\int_0^1 \left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2 dt = 0$ olduğu görülür. $\left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2$ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli, $\forall t \in [0,1]$ için $\left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2 \geq 0$ ve $\int_0^1 \left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2 dt = 0$ olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için $\left| \langle \alpha(t)(x), x \rangle \right|^2 = 0$, dolayısıyla $\langle \alpha(t)(x), x \rangle = 0$ dır [10:Sayfa138]. O halde; $\langle \alpha(0)(x), x \rangle = 0$ ve $\alpha(0) = I$ olduğundan $\langle x, x \rangle = 0$ dır. Son eşitlikten $x = \theta$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.3.11: $\overline{\left\langle \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n^{\alpha}(H) \right\rangle} = H$ dır.

İspat: $\left(\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} P_n^{\alpha}(H)\right\rangle\right)^{\perp} = \{\theta\}$ olduğu gösterilirse; Teorem 1.8.10'a göre ispat tamamlanır.

$x \in \left(\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} P_n^{\alpha}(H)\right\rangle\right)^{\perp}$ keyfi olsun. O halde; $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $x \perp P_n^{\alpha}(H)$ dir. Dolayısıyla;

yukarıdaki teorem ile $x=\theta$ olup; ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.12: $x\in H$ olsun. $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(x)=\theta$ ise; $x=\theta$ dır.

İspat: $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(x)=\theta$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\langle P_n^{\alpha}(x),x\rangle=\langle\theta,x\rangle=0$ dır. O halde; $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\int_0^1 e^{-2n\pi it}\langle\alpha(t)(x),x\rangle dt=\langle P_n^{\alpha}(x),x\rangle=0$ dır. Teorem 2.3.11'nin ispatında yapılan işlemler tekrarlanırsa; $\int_0^1 \left|\langle\alpha(t)(x),x\rangle\right|^2 dt=0$, dolayısı ile; $\forall t\in[0,1]$ için $\langle\alpha(t)(x),x\rangle=0$ dır. O halde; $\langle\alpha(0)(x),x\rangle=0$ ve $\alpha(0)=I$ olduğundan $x=\theta$ dır.

Sonuç 2.3.13: $x,y\in H$ olsun. $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(x)=P_n^{\alpha}(y)$ ise; $x=y$ dir.

İspat: $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(x)=P_n^{\alpha}(y)$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(x-y)=\theta$ dır. O halde; Yukarıdaki teoreme göre; $x-y=\theta$ olduğundan $x=y$ dir.

Teorem 2.3.14: $\forall x\in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^{\alpha}(x)$ serisi yakınsak ve $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^{\alpha}(x)=x$ dir.

İspat: $N\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit alınan bir doğal sayı, $S_N:=\sum_{k=1}^{N} P_{-k}^{\alpha}$ ve $T_N:=\sum_{k=0}^{N} P_k^{\alpha}$ olsun. O halde; $\forall k\in\mathbb{N}$ için $P_k^{\alpha}\in B(H)$ birer dik izdüşüm operatörleri olduğundan Teorem 2.2.16'ya göre; $S_N,T_N\in B(H)$ birer dik izdüşüm operatörü olup $\forall N\in\mathbb{N}$ için

$0\le S_N\le S_{N+1}\le I$ ve $0\le T_N\le T_{N+1}\le I$ koşullarını sağlar. O halde; Teorem 2.2.19'a göre

$\forall x \in H$ için $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)$, $\lim\limits_{N\to+\infty} T_N(x)$ limitleri vardır. Dolayısı ile; $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} P_k^\alpha(x)$ ve $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k^\alpha(x)$

serileri yakınsaktır.

$u,v \in H$ için $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} P_k^\alpha(x) := u$ ve $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k^\alpha(x) := v$ olsun. O halde; Teorem 1.5.6'ya

göre $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} P_k^\alpha(x)$ serisi yakınsak ve $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} P_k^\alpha(x) = u+v$ dir. O halde; $\forall N \in \mathbb{N}$ için

$R_N(x) := \sum\limits_{k=-N}^{N} P_k^\alpha(x)$ ise; Teorem 1.5.7'e göre $\{R_N(x)\} \subset H$ dizisi yakınsak ve

$\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(x) = u+v$ dir.

$l \in \mathbb{Z}$ keyfi fakat sabit alınan bir tamsayı olsun. $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $l \in [-N, N]$ olacak şekilde seçilirse; $\{P_k^\alpha\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset B(H)$ dik izdüşüm operatörü ailesinin farklı elemanları birbirine dik olduğundan $R_N(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} P_k^\alpha(x)$ eşitliğinden $P_l^\alpha(R_N(x)) = P_l^\alpha(x)$ olduğu görülür. O halde; $P_l^\alpha : H \to H$ sürekli olduğundan son eşitliğinin her iki tarafının $N \to +\infty$ için limiti alınırsa;

$$\lim_{N\to+\infty} P_l^\alpha(R_N(x)) = P_l^\alpha(x)$$

$$P_l^\alpha\left(\lim_{N\to+\infty} R_N(x)\right) = P_l^\alpha(x)$$
$$P_l^\alpha(u+v) = P_l^\alpha(x)$$

elde edilir. O halde; $\forall l \in \mathbb{Z}$ için $P_l^\alpha(u+v) = P_l^\alpha(x)$ olduğundan Sonuç 2.3.13'e göre; $u+v = x$ dir. O halde; $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} P_k^\alpha(x) = x$ olup; ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.15: $\forall x \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}(x)$ serisi yakınsak ve

$\alpha(t)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}(x)$ dir.

İspat: Teorem 2.3.14'e göre $\forall x \in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^{\alpha}(x)$ serisi yakınsak ve $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^{\alpha}(x) = x$

olduğundan $\forall \mathcal{E} > 0$ için sonlu bir $J_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{Z}$ alt kümesi vardır öyleki $J_{\mathcal{E}} \subset J \subset \mathbb{Z}$ olan her sonlu $J \subset \mathbb{Z}$ için $\left\| x - \sum_{k\in J} P_k^{\alpha}(x) \right\| < \mathcal{E}$ dir. $J_{\mathcal{E}} \subset J \subset \mathbb{Z}$ olan her sonlu $J \subset \mathbb{Z}$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$\alpha(t)\left(\sum_{k\in J} P_k^{\alpha}(x) \right) = \sum_{k\in J} \alpha(t)\left(P_k^{\alpha}(x)\right) = \sum_{k\in J} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}(x)$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\alpha(t): H \to H$

dönüşümleri üniter olduğundan $J_{\mathcal{E}} \subset J \subset \mathbb{Z}$ olan her sonlu $J \subset \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned}
\left\| \alpha(t)(x) - \sum_{k\in J} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}(x) \right\| &= \left\| \alpha(t)(x) - \sum_{k\in J} \left(\alpha(t) P_k^{\alpha} \right)(x) \right\| \\
&= \left\| \alpha(t)(x) - \alpha(t)\left(\sum_{k\in J} P_k^{\alpha}(x) \right) \right\| \\
&= \left\| \alpha(t)\left(x - \sum_{k\in J} P_k^{\alpha}(x) \right) \right\| \\
&= \left\| x - \sum_{k\in J} P_k^{\alpha}(x) \right\| < \mathcal{E}
\end{aligned}$$

olur. O halde; $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $J_{\mathcal{E}} \subset J \subset \mathbb{Z}$ olan her sonlu $J \subset \mathbb{Z}$ için

$\left\| \alpha(t)(x) - \sum_{k\in J} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}(x) \right\| < \mathcal{E}$ olduğundan $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}(x)$ serisi yakınsak ve

$\alpha(t)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}(x)$ dir.

Teorem 2.3.16: $\forall x, y \in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle P_k^{\alpha}(x), P_k^{\alpha}(y) \right\rangle$ serisi yakınsak ve

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle P_k^{\alpha}(x), P_k^{\alpha}(y) \right\rangle = \left\langle x, y \right\rangle \qquad \text{dir.}$$

İspat: Teorem 2.3.14'e göre $\forall x \in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^\alpha(x) = x$ dir. O halde; $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$\sum_{k=-\infty}^{-1} P_k^\alpha(x)$ ve $\sum_{k=0}^{+\infty} P_k^\alpha(x)$ serileri yakınsaktır. $u, v \in H$ için $\sum_{k=0}^{+\infty} P_k^\alpha(x) := u$, $\sum_{k=-\infty}^{-1} P_k^\alpha(x) := v$

ve $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $S_N(x) := \sum_{k=0}^{N} P_k^\alpha(x)$ ve $T_N(x) := \sum_{k=-1}^{N} P_k^\alpha(x)$ olsun. O halde;

$\lim_{N\to+\infty} S_N := u$ ve $\lim_{N\to+\infty} T_N := v$ dir. Öte yandan; $N \in \mathbb{N}$ için $S_N^*(x) := \sum_{k=0}^{N} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle$ ve

$T_N^*(x) := \sum_{k=-1}^{N} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle$ olsun. O halde; $N \in \mathbb{N}$ için

$$S_N^*(x) = \sum_{k=0}^{N} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N} P_k^\alpha(x), y \right\rangle = \left\langle S_N(x), y \right\rangle$$

ve
$$T_N^*(x) = \sum_{k=-1}^{N} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle = \left\langle \sum_{k=-1}^{N} P_k^\alpha(x), y \right\rangle = \left\langle T_N(x), y \right\rangle$$

dir. O halde; iç çarpım fonksiyonu sürekli ve dolayısı ile dizisel sürekli olduğundan $\lim_{N\to+\infty} \left\langle S_N(x), y \right\rangle = \left\langle \lim_{N\to+\infty} S_N(x), y \right\rangle = \left\langle u, y \right\rangle$ ve $\lim_{N\to+\infty} \left\langle T_N(x), y \right\rangle = \left\langle \lim_{N\to+\infty} T_N(x), y \right\rangle = \left\langle v, y \right\rangle$ dir.

O halde; $\lim_{N\to+\infty} S_N^*(x)$ ve $\lim_{N\to+\infty} T_N^*(x)$ mevcut olup

$$\lim_{N\to+\infty} S_N^*(x) = \lim_{N\to+\infty} \left\langle S_N(x), y \right\rangle = \left\langle \lim_{N\to+\infty} S_N(x), y \right\rangle = \left\langle u, y \right\rangle$$

ve
$$\lim_{N\to+\infty} T_N^*(x) = \lim_{N\to+\infty} \left\langle T_N(x), y \right\rangle = \left\langle \lim_{N\to+\infty} T_N(x), y \right\rangle = \left\langle v, y \right\rangle$$

dir. O halde; $\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle$, $\sum_{k=-\infty}^{-1} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle$ serileri yakınsak ve $\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle = \left\langle u, y \right\rangle$,

$\sum_{k=-\infty}^{-1} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle = \left\langle v, y \right\rangle$ dır. O halde; Teorem 1.5.6'ya göre $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle P_k^\alpha(x), y \right\rangle$ serisi yakınsak ve

$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle P_k^{\alpha}(x),y\right\rangle=\langle u,y\rangle+\langle v,y\rangle=\langle u+v,y\rangle$ dir. Diğer taraftan; $N\in\mathbb{N}$ için

$R_N(x):=\sum_{k=-N}^{N}P_k^{\alpha}(x)$ ve $R_N^*(x)=\sum_{k=-N}^{N}\left\langle P_k^{\alpha}(x),y\right\rangle$ olsun. O halde; $R_N^*(x)=\langle R_N,y\rangle$ dir.

$\forall x\in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}}P_k^{\alpha}(x)=x$ olduğundan $\lim_{N\to+\infty}R_N(x)=x$, $\lim_{N\to+\infty}R_N^*(x)=\langle u+v,y\rangle$ ve iç çarpım fonksiyonunun dizisel sürekli olduğu göz önüne alındığında; $R_N^*(x)=\langle R_N,y\rangle$ eşitliğinden $N\to+\infty$ limit alınırsa; $\langle u+v,y\rangle=\langle x,y\rangle$ olduğu görülür. $\forall y\in H$ için $\langle u+v,y\rangle=\langle x,y\rangle$ eşitliği doğru olduğundan $x=u+v$ dir. O halde; $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle P_k^{\alpha}(x),y\right\rangle=\langle x,y\rangle$ dır. $\forall k\in\mathbb{Z}$ için $P_k^{\alpha}\in B(H)$ dik izdüşüm operatörleri olduğundan $\forall x,y\in H$ için

$\left\langle P_k^{\alpha}(x),y\right\rangle=\left\langle\left(P_k^{\alpha}\right)^2(x),y\right\rangle=\left\langle P_k^{\alpha}(x),P_k^{\alpha}(y)\right\rangle$ dir. Dolayısı ile;

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle P_k^{\alpha}(x),y\right\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle P_k^{\alpha}(x),P_k^{\alpha}(y)\right\rangle=\langle x,y\rangle$$

dir.

Sonuç 2.3.17: $\forall x\in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|P_k^{\alpha}(x)\right\|^2$ serisi yakınsak ve $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|P_k^{\alpha}(x)\right\|^2=\|x\|^2$ dir.

İspat: Teorem 2.3.16'da $y:=x$ alınırsa; $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle P_k^{\alpha}(x),P_k^{\alpha}(x)\right\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|P_k^{\alpha}(x)\right\|^2$ serisi yakınsak ve $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|P_k^{\alpha}(x)\right\|^2=\|x\|^2$ olup ispat tamamlanır.

3. İRDELEME

1. Teorem 2.3.9, [13: sayfa 77]’ de ifade ve ispat edilen aşağıdaki teoremin $\left\{P_n^{\alpha}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset B(H)$ ailesine bir benzer genelleştirilmesidir.

Teorem 3.47: $\left(H,\langle,\rangle\right)$ bir Hilbert uzayı ve $\left\{e_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ ortonormal bir dizi olsun. Bu takdirde; aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. $\left\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}^{\perp} = \left\{\theta\right\}$

ii. $\overline{\left\langle\left\{e_n \mid n\in\mathbb{N}\right\}\right\rangle} = H$

iii. $\forall x\in H$ için $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\left\langle x, e_n\right\rangle\right|^2$

iv. $\forall x\in H$ için $x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left\langle x, e_n\right\rangle e_n$.

2. Teorem 2.3.16, [13: sayfa 81] de ifade edilen Parseval eşitsizliğinin $\left\{P_n^{\alpha}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset B(H)$ ailesine bir genelleştirilmesidir.

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen en önemli sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bölüm 2.1. de:

1. $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı, $\{T_n\} \subset B(H)$ bir pozitif Hermit operatörleri dizisi ve $B \in B(H)$ bir pozitif Hermit operatörü olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \le T_1 \le T_2 \le \ldots \le T_n \le T_{n+1} \le B$$

ise; $\forall x \in H$ için $\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = T(x)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n \le T \le B$ olan bir tek $T \in B(H)$ pozitif Hermit operatörü olduğu gösterildi. (Teorem 2.1.14)

2. $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{T_n\} \subset B(H)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_{n+1} \le T_n \le \ldots \le T_2 \le T_1$ koşulunu sağlayan bir Hermit operatörleri dizisi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \le T_n$ koşulunu sağlayan bir $B \in B(H)$ bir Hermit operatörü varsa; $\forall x \in H$ için $\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = T(x)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \le T \le T_n$ olan bir tek $T \in B(H)$ Hermit operatörü olduğu gösterildi. (Teorem 2.1.15)

Bölüm 2.2. de:

1. $n \in \mathbb{N}$ ve $P_1, P_2, \ldots, P_n \in B(H)$ birer dik izdüşüm operatörleri ve $P = P_1 + P_2 + \ldots + P_n \in B(H)$ olsun. P 'nin bir dik izdüşüm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $k \ne l$ olan $\forall k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $P_k P_l = O$ olması ve bu halde; $P = P_{P_1(H)\oplus\ldots\oplus P_n(H)}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.16)

2. $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $P, Q : H \to H$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $PQ = QP$ olması için gerek ve yeter şart $PQ : H \to H$ operatörünün bir dik izdüşüm operatörü olması ve bu halde; $PQ = P_{P(H)\cap Q(H)}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.17)

3. $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{P_n\} \subset B(H)$ bir dik izdüşüm operatörleri dizisi olsun. $\forall x \in H$ için $\{P_n(x)\} \subset H$ dizileri yakınsak ve $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ ise; $P : H \to H$ dönüşümünün bir dik izdüşüm operatörü olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.18)

4. $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{P_n\} \subset B(H)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_1 \le ... \le P_n \le P_{n+1} \le I$ olan bir dik izdüşüm operatör dizisi ise; $\forall x \in H$ için $\{P_n(x)\} \subset H$ dizileri yakınsak ve $P : H \to H$, $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$, H 'nin $\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle} \subset H$ kapalı alt uzayı üzerine dik izdüşüm operatörü; yani; $P = P_{\overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \right\rangle}}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.19)

5. $(H,\langle,\rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı ve $\{P_n\} \subset B(H)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le P_{n+1} \le P_n \le I$ olan bir dik izdüşüm operatör dizisi ise; $\forall x \in H$ için $\{P_n(x)\} \subset H$ dizisi yakınsak ve $\forall x \in H$ için $P(x) := \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ ise; $P : H \to H$ dik izdüşüm operatörü, H 'nın $\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H) \subset H$ kapalı alt uzayı üzerine dik izdüşümü, yani; $P = P_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} P_n(H)}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.20)

6. $P, Q \in B(H)$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $PQ = QP$ ise; $P + Q - PQ \in B(H)$ bir dik izdüşüm operatörü ve $P + Q - PQ = P_{P(H)+Q(H)}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.21)

7. $P, Q \in B(H)$ iki dik izdüşüm operatörü olsun. $P - Q \in B(H)$ operatörünün bir dik izdüşüm operatörü olması için gerek ve yeter koşul $Q \le P$ olması ve bu halde; $P - Q = P_{P(H)\cap(I-Q)(H)}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.22)

8. $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(H)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \ne n$ için $P_m P_n = O$ olan bir dik izdüşüm operatörleri olsun. Bu takdirde; $\forall x \in H$ için $\sum_{k=1}^{+\infty} P_k(x)$ serisi yakınsak ve $\forall x \in H$ için $P(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} P_k(x)$

ise; $P:H\rightarrow H$ bir dik izdüşüm operatörü ve $P=P_{\overline{\left\langle \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k(x)\right\rangle}}$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.2.23)

Bölüm 2.3. de:

1. $\alpha:(\mathbb{R},+)\rightarrow(B(H),\circ)$, $(\mathbb{R},+)$ grubunun H'da sürekli, üniter ve periyodik bir gösterimi olsun. Bu takdirde; aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{P_n^{\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset B(H)$ dik izdüşüm operatörleri ailesi vardır:

i. $\forall s\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(s)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(s)$,

ii. $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $\alpha(t)P_n^{\alpha}=P_n^{\alpha}\alpha(t)=e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}$,

iii. $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}P_m^{\alpha}=\begin{cases}P_n^{\alpha}, & n=m\\ O, & n\neq m\end{cases}$,

iv. $n\neq m$ olan $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(H)\perp P_m^{\alpha}(H)$,

v. $\forall n\in\mathbb{Z}$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t)\left(P_n^{\alpha}(H)\right)=e^{2n\pi it}P_n^{\alpha}(H)$,

vi. $\forall t\in\mathbb{R}$ ve $\forall x\in P_n^{\alpha}(H)$ için $\alpha(t)(x)=e^{2n\pi it}x$,

vii. $n\in\mathbb{Z}$ olsun. $\varnothing\neq L\subset H$, $\forall x\in L$ ve $\forall t\in\mathbb{R}$ için $\alpha(t)(x)=e^{2n\pi it}x$ koşulunu sağlayan bir alt küme ise; $L\subset P_n^{\alpha}(H)$,

olduğu gösterildi. (Teorem 2.3.9)

2. $x\in H$ olsun. $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $x\perp P_n^{\alpha}(H)$ ise; $x=\theta$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.3.10)

3. $\overline{\left\langle \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} P_n^{\alpha}(H)\right\rangle}=H$ olduğu gösterildi. (Sonuç 2.3.11)

4. $x\in H$ olsun. $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(x)=\theta$ ise; $x=\theta$ olduğu gösterildi. (Teorem 2.3.12)

5. $x,y\in H$ olsun. $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $P_n^{\alpha}(x)=P_n^{\alpha}(y)$ ise; $x=y$ olduğu gösterildi. (Sonuç 2.3.13)

6. $\forall x \in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^{\alpha}\left(x\right)$ serisi yakınsak ve $\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k^{\alpha}\left(x\right) = x$ olduğu görüldü. (Teorem 2.3.14)

7. $\forall x \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}\left(x\right)$ serisi yakınsak ve $\alpha\left(t\right)\left(x\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2k\pi it} P_k^{\alpha}\left(x\right)$ olduğu görüldü. (Teorem 2.3.15)

8. $\forall x, y \in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle P_k^{\alpha}(x), P_k^{\alpha}(y)\right\rangle$ serisi yakınsak ve

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle P_k^{\alpha}(x), P_k^{\alpha}(y)\right\rangle = \left\langle x, y\right\rangle$ olduğu görüldü. (Teorem 2.3.16)

9. $\forall x \in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| P_k^{\alpha}(x)\right\|^2$ serisi yakınsak ve $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| P_k^{\alpha}(x)\right\|^2 = \left\| x\right\|^2$ olduğu görüldü. (Sonuç 2.3.17)

5. ÖNERİLER

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ bir dizi olmak üzere; $x \in H$ için $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k P_k^{\alpha}(x)$ şeklindeki serilerinin yakınsaklığı araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., Principles of Real Analysis, 3rd Edition, Academic Press, New York, 1998, 300.

2. Bartle, R.G.,Wiles, J. ve Sons, Inc., The Elements of Real Analysis, New York-London-Sydney, 1967, 307.

3. Barut, A.O. and Rarzka, R., Theory of Group Representations and Applications, 2rd Edition, Pwn-Polish Scientific Publishers,Warszawa,1980, 134-135.

4. Brown, A.L. and Page, A., Elements of Functional Analysis, Von Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

5. Friedman,A., Foundations of Modern Analysis, Dover Publications, Inc., New york,1982, 211.

6. Hansen, V. L., Functional Analysis,World Scientific, 2006.

7. Helmberg, G., Introduction to Spectral Theory in Hilbert Spaces, North-Holland Publishing Company, Amsterdam,Oxford,1975, 222.

8. Hunter ,J. K. and Nachtergaele, B., Applied Analysis,World Scientific Publishing Co. ,2007, 136.

9. Maddox, I.J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press,1970.

10. Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis,1970, 138,151,190.

11. Simmons, G.F., Introduction to Topology and Modern Analysis, Mc Graw-Hill Book Company,Inc., New York, USA, 1963.

12. Young, N., An Introduction to Hilbert Spaces, Cambridge University Press, 1989.

13. Rynne, B.P. and Youngson, M.A., Linear Functional Analysis, Springer,2006.

ÖZGEÇMİŞ

Seda Öztürk, 30.04.1989 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlkokulunu Trabzon 24 Şubat İlkokul'unda, ortaokulunu ise; Trabzon Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda tamamladıktan sonra İngilizce Programlı Trabzon Tevfik Serdar Anadolu Lisesi'ni kazanarak okulunu dereceyle bitirdi.

2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2011 yılında lisans eğitimini birincilikle tamamladı.

2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Tezli Yüksek Lisans programını kazandı ve İngilizce hazırlık sınıfından muaf tutularak 2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı.

Yabancı dili İngilizcedir.