KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

ARTİNİAN CEBİRLERİN GÖSTERİMLERİ

Osman KAZANCI

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12.01.1990

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 05.02.1990

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Ali PANCAR

Jüri Üyesi : Prof.Dr. Ergün BAYAR

Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.M.Sabri TERZİ

Enstitü Müdürü : Doç.Dr. Temel SAVAŞKAN

OCAK 1990
TRABZON

Ö N S Ö Z

Bu çalışmanın amacı; birim elemanlı bir F-cebir A nın F-gösterimlerinin $\prod(A,F)$ kategorisi ile A-sol modüllerin ${}_A\mathfrak{M}$ kategorisi arasındaki kategorik denkliğin özelliklerini A nın Artinian cebir olması durumunda derlemektir.

Bu çalışmayı bana öneren ve çalışma süresince hiç bir yardımdan kaçınmayan saygıdeğer hocalarım Sayın Yrd.Doç.Dr. Ali PANCAR'a ve Yrd.Doç.Dr. M.Sabri TERZİ'ye teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Çalışma süresince beraber tartıştığımız meslektaşım Sayın Arş.Gör. Sultan YAMAK'a ve bu çalışmayı daktilo eden Sayın Temel TOSUN'a teşekkür ederim.

OCAK 1990 Osman KAZANCI

İÇİNDEKİLER

Ö Z E T

Bu çalışmanın amacı, birim elemanlı bir F-cebir A nın F-gösterimlerinin $\Pi(A,F)$ kategorisi ile A-sol modüllerin ${}_A\mathfrak{M}$ kategorisi arasındaki kategorik denkliğin özelliklerini A nın Artinian cebir olması durumunda derlemektir. Bu amacımızı iki adımda gerçekleyeceğiz.

(I) . F-cebir A yarıbasittir.

(II). F-cebir A yarıbasit değildir.

0. Bölümde çalışma için gerekli olan bazı kavramlar minimal hacimde verilmeye çalışılmıştır. Ancak kardinal sayıların okuyucu için bilindiği kabul edilmiştir.

1. Bölümde A-sol modül M in A-sol altmodüllerinin $\Lambda(M)$ kafesini tanıtarak başladık. M in yarıbasitliği tanımı olarak $\Lambda(M)$ in komplimentlenebilir bir kafes olmasını aldık. Basit modüllerin Schur karakterizasyonundan sonra Artinian ve Notherian modüller tanıtıldı. Artinian ve Notherian özellikler genelde birbirinden bağımsız olduğundan yarıbasit modüller için Artinian, Notherian ve sonlu üretenli olma koşullarının denkliği verildi.

R-cebir A nın yarıbasitliğini regüler A-sol modül ${}_AA$ nın yarıbasit olmasıyla tanımladık. D bir bölme cebiri, $n\geq 1$ olan bir doğal sayı olmak üzere, $M_n(D)$ n satır n sütünlu kare matrislerin D-cebiri Artinian basit cebirlerin izomorfi sınıflarının temsilcisi olarak karşımıza çıkar. Wedderburn Yapı Teoremi yarıbasit cebirlerin izomorfi sınıflarının, $s\geq 1$. D_i bölme cebirleri $n_i\geq 1$, $1\leq i\leq s$ olmak üzere $\dotplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(D_i)$ cebirleri olduğunu söyler.

1. bölümü sonlu bir grubun FG grup cebirinin yarıbasitliği için bir kriter olan Maschke Teoromini vererek kapattık. Böylece ilk amacımıza ulaşmış olduk.

I. adım II. adımın ön hazırlığı niteliğindedir. II adıma ikinci bölümde başladık. İlk olarak bir R-cebir A nın tüm maksimal sol ideallerinin arakesitinin tanımlandığı kümeyi J(A) ile gösterelim. J(A) A nın bir ikiyanlı ideali olup ona A nın Jacobson radikali denir. A Artinian ve J(A)=0 olması A nın yarıbasitliği için gerek ve yeter olan bir kriter olduğundan $\bar{A}=A/_{J(A)}$ faktör cebirinin yapısı A nın yapısını tanımakta büyük bir öneme sahiptir. $J(\bar{A})=\bar{0}$ olduğundan A nın Artinian olması halinde $\bar{A}$ yarıbasittir.

Bir R-cebir A nın Artinian olması durumunda; bir k>0 doğal sayısı için $J(A)^k=0$ gerçeklenir. Buradan G sonlu bir grup olmak üzere; FG grup cebiri için $\mathfrak{K}(F)\nmid |G|$ olması durumunda J(FG)=0 ve $\mathfrak{K}(F)=p\,||G|$, H G nin normal

olan p-sylow altgrubu olmak üzere $J(FG)=\sum_{x\in H-\{1\}} FG(x-1)$ olduğu verildi. Yarıbasit cebirler dilinde söylenenler Artinian cebirlere adapte edilerek, basit modüllerin ayrışamaz modül olduklarını ve Schur Lemması ayrışamaz modüllere taşındığında, bir ayrışamaz modülü, endomorfiler cebirin bir lokal cebir olması durumunda karakterize ettik.

Krull-Remark-Schmidt (2.36) teoremini vererek Artinian cebirler üzerindeki sonlu üretenli modüllerin ayrışamaz modüllerden oluşan Remark ayrışımlarını inceledik. İkinci bölümün sonunda birim elemanlı Artinian F-cebir A nın F gösterimlerinin $\Pi(A,F)$ kategorisi ile A-sol modüllerin ${}_A\mathfrak{M}$ kategorisi arasındaki kategorik denkliğin özelliklerini inceledik. Bundan yararlanarak sonlu bir G grubunun F gösterimlerini FG grup cebirinin F-gösterimleri yardımıyla elde ettik.

Artinian cebirler üzerindeki ayrışamaz modüller cebirin yapısını tanımada önemli rol oynar. Özellikle bu modüller projektiftir. Bu nedenle son bölümde; Artinian cebirler üzerindeki projektif modüllerin yapısını inceledik. $\mathrm{Hom}_A(P/_{J(A)P}, Q/_{J(A)Q})=\mathrm{Hom}_{A/J(A)}(P/_{J(A)P}, Q/_{J(A)Q})$ olmasını kullanarak; A-sol modüllerin ${}_A\mathfrak{M}$ kategorisi ile $A/_{J(A)}$-sol modüllerin ${}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ kategorisi arasındaki kategorik denklik verildi. A Artinian R-cebir $P,Q\in{}_A\mathfrak{M}$ projektif ise kategorik ilişki daha da bir önem kazanır. Dolayısıyla Artinian cebirler üzerindeki projektif modüllerin yapıtaşlarını oluşturan esas ayrışamaz A-modüllerin tanımı verilerek projektif modüller için yapı teoremi verildi.

İdempotent ve primitif idempotent tanımlarından sonra her Artinian R-cebir için $e_1,e_2,\ldots,e_n$ primitif idempotentlerin (*) $1=e_1+e_2+\ldots+e_n$, $e_ie_j=0$, $i\neq j$ olacak biçimde mevcut olduğunu verdik.

Wedderburn Yapı Teoreminin Artinian cebirlere bilinen şekli ile genelleştirme; $P,Q\in{}_A\mathfrak{M}$ esas ayrışamaz öyleki $\mathrm{Hom}_A(P,Q)\neq 0$ ve $P\cong Q$ olacak biçimde mevcut olduğundan ortadan kalkmıştır. Bu noktada yeni bir kavrama ihtiyaç vardır. O da bir Artinian cebirinin quiver'idir. $V=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ (*), gerçeklemek üzere $E=\{(e_i,e_j)\mid e_iJ(A)e_j\neq 0\}$ olsun. $\Gamma(A)=(V,E)$ direkt graphi A nın quiver'i olarak tanımlandı. $\Gamma(A)$ nın yapısı ile A nın yapısı karakterize edildi. $\Gamma(A)$ nın bağlantılı olması durumunda A cebirine bir bloktur denir. Her Artinian A-cebir için $A_1,A_2,\ldots,A_s$ blok cebir olmak üzere $A=A_1\dot{+}A_2\dot{+}\ldots\dot{+}A_s$ olsun. Bu taktirde $\Gamma_i:=\Gamma(A_i)$ $1\leq i\leq s$ olmak üzere $\Gamma(A)=\dot{\bigcup}_{i=1}^{s}\Gamma_i$ olduğu verildikten sonra indirgenmiş cebir tanımı verilerek bir Artinian cebirle indirgenmiş cebiri arasındaki ilişkiyi ele aldık. Bir Artinian cebirin sonlu ve sonsuz gösterim tipi kavramları tanımlanarak derleme sonuçlandırılmıştır.

SUMMARY

The aim of this study is to investigate the properties of categorical equivalence between the categrary $\Pi(A,F)$ of F-representations of an F-algebra A with and the category ${}_A\mathfrak{M}$ of left A-modules whenever A is an Artinian algebra. We'll do this in two steps.

(I) . F-Algebra A is semisimple.

(II). F-Algebra A is not semisimple.

In Chapter 0, some notions required in the study were given in a way which comprise minimum volume, but it has been assumed that the Cardinal Numbers are known by the reader. We started to Chapter I by introducing lattice $\Lambda(M)$ of left A-submodules of left. A-module M. As the definition of semisimplicitiy of M we took the $\Lambda(M)$'s complimentability as a lattice. After the Schur characterization of simple modules, the Artinian ond Notherian modules were introduced. The equivalence of conditions for semisimple modules for being Artinian, Notherian and finitely generated were given since Artinian and Notherian properties are independent from each other in general.

We defined the semisimplicity of R-algebra A as regular left A-module ${}_AA$'s semisimplicity. Whenever D is a division algebra and n is a natural number with $n \geq 1$, the D-algebra $M_n(D)$ of matrices with n column and n row is the representative of isomprphy closses of simple Artinian algebras. The Wedderburn Structure Theorem states that the isomorphy classes of semisimple algebras are $\overset{s}{\underset{i=1}{\dotplus}} M_{n_i}(D_i)$ algebras where $s \geq 1$, D_i are division algebras and $n_i \geq 1$, $1 \leq i \leq s$. We completed the 1st Chapter by giving Maschke Theorem which is a criteria for semisimplicity for a group algebra FG of a finite group. So we completed the first step.

The first step is a preliminary for the second one. We started to the second stage with Chapters II. First of all let us denote the set determined by intersection of all maximal left ideals of an R-algebra A by J(A). J(A) is a two-sided ideal of A and it is called as Jacobson radical of A. The structure of factor algebra $\bar{A}=A/_{J(A)}$ of A has a great importance in detecting the structure of A since being A Artinian and being $J(A)=0$ is a necessary and sufficient criteria for A to be semisimple. Since $J(\bar{A})=\bar{0}$, $\bar{A}$ is semisimple if A is Artinian. Whenever A is Artinian for a natural

number $k>0$, $J(A)^k=0$. From here it has been given that; whenever G is a finite grup, for a group algebra FG, $J(FG)=0$ if $k(F)\nmid |G|$ and, whenever H is a normal p-sylow subgroup of G and $k(F)=p\,||G|$, $J(FG)=\sum_{x\in H-\{1\}} FG(x-1)$.
By adapting the notions used in semisimple algebras to Artinian algebras we showed that the simple modules indecomposable modules and, we characterized an indecomposable module, in case endomorphy algebra is a local algebra, whenever Schur's Lemma is appiled to indecomposable modules.

We investigated the Remark decompositions which consist of indecomposable modules of finetely generated modules over Artinian algebras by giving Krull-Remark-Schmidt Theorem (2.36). At the end of Chapter II we investigated the properties of categorical equivalence between the category $\Gamma(A,F)$ of F-representations of an Artinian F-algebra A with unity and the category ${}_A\mathfrak{M}$ of left A-modules. Using this we obtained the F-representations of a finite group G by using the F-representations of group algebra FG. Indecomposable modules over Artinian algebras play an important role in studying the structure of algebra. For this reason we investigated the structure of projective modules over Artinian algabras in the last chapter. Using the property

$$\mathrm{Hom}_A(P/_{J(A)P},\ Q/_{J(A)Q}) = \mathrm{Hom}_{A/J(A)}(P/_{J(A)Q},\ Q/_{J(A)Q})$$

we gave the categorical equivalence between the category ${}_A\mathfrak{M}$ of left A-modules and the category ${}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ of left $A/_{J(A)}$ -modules. The categorical relation gain more importance when A is an Artinian R-algebra and $P,Q\in{}_A$ are projective. Therefore structure theorem for projective modules has been given by giving the definition of principally indecomposable A-modules which constitute the base of projective modules over Artinian algebras.

After giving the definition of idempotent and primitive idempotent notions we showed that every Artinian R-Algebra, the primitive idempotents $e_1,e_2,\dots,e_n$ exit with the properties $1=e_1+e_2+\dots+e_n$, $e_i.e_j=0$, $i\neq j$ (*)
The program of generalizing the Wedderburn Structure Theorem to Artinian algebras breaks down Chiefly because of the existence of principal indecomposable modules P and Q that are not isomorphic, but $\mathrm{Hom}_A(P,Q)\neq 0$

At this stage a new concept is required, and it is the quives of on Artinian algebra. $V=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ having satisfied (*), let $E=\{(e_i,e_j)|e_iJ(A)e_j\neq 0\}$. The direct grāph $\Gamma(A)=(V,E)$ was degined as the quiven of A. The structure of A was characterized by the structure $\Gamma(A)$. An A-algebra is called as block whenever $\Gamma(A)$ is connected. For every Artinian A-algebra, $A_1,A_2,...,A_s$ being the block algebras, let $A=A_1\dot{+}A_2\dot{+}...\dot{+}A_s$. Then we handled the relation between an Artinian algebra and its reduced algebra by giving the definition of induced algebra after giving $\Gamma(A)=\dot{\bigcup}_{i=1}^{s}\Gamma_i$, $\Gamma_i:=\Gamma(A_i)$, $1\leqq i\leqq s$. We finished the study by defining finite and infinite representation type nations for an Artinian algebra.

BÖLÜM 0

ÖN BİLGİLER

I. BÖLÜMSEL SIRALANMIŞ KÜMELER VE KAFESLER

P bir küme ve "$\leq$"$\subset P\times P$ olsun. "$\leq$" P üzerinde bir bölümsel sıralamadır denir:$\Longleftrightarrow$ Her $a,b,c\in P$ için

i) $a\leq a$ (yansımalı)

ii) $a\leq b$, $b\leq a$ ise $a=b$ (ters simetri)

iii) $a\leq b$, $b\leq c$ ise $a\leq c$ (geçişli)

koşulları gerçekleniyorsa.

$(P,\leq)$ ikilisine bölümsel sıralanmış küme veya kısaca poset denir. Bir posette keyfi iki eleman karşılaştırılabiliyorsa posede doğrusal sıralanmıştır (zincirdir) denir. $P'\subset P$ olsun. $\leq' := \leq\downarrow P$ olmak üzere $(P',\leq')$ posetine $(P,\leq)$ posetinin bir altposeti denir.

$A\subset P$ olsun. $e\in A$ en büyük eleman (en küçük eleman) denir :$\Longleftrightarrow$ Her $a\in A$ için $a\leq e$ $(e\leq a)$ dır. Bu durum kısaca e:=EBE(A)(:=EKE(A)) ile gösterilir. $b\in P$ elemanına A için bir üstsınır (bir altsınır) denir:$\Longleftrightarrow$ Her $a\in A$ için $a\leq b$ (Her $a\in A$ için $b\leq a$) gerçekleniyorsa.

$A^*:=\{b\in P\,|\,b$ A nın bir üstsınırıdır$\}$, $A_*:=\{c\in P\,|\,c$, A nın bir altsınırıdır $\}$ yazalım. EKE(A^*) mevcutsa ona A nın supremumu, EBE(A_*) mevcutsa ona A nın infimumu denir ve sırasıyla supA, infA ile gösterilir.

$(P,\leq)$ posetine bir kafes (tam kafes)'tir denir:$\Longleftrightarrow$ Her $a,b\in P$ $(A\subset P)$ için $\sup\{a,b\}:=a\vee b$, $\inf\{a,b\}:=a\wedge b$ $(\sup A, \inf A)$ mevcutsa.

P bir kafes ve $a,b\in P$ olsun. $a\vee b$, $a\wedge b$ ile a,b nin P deki bileşimini ve arakasitini gösterelim. $\vee,\wedge : P\times P \to P$ $\vee(a,b):=a\vee b$, $\wedge(a,b):= a\wedge b$ tanımlansın. $\vee,\wedge$ P üzerinde bir ikili işlemdir. Ayrıca her $a\in P$ için $a\vee a=a\wedge a = a$ dır.

Bir P köşesine modulardır denir:$\Longleftrightarrow$ Her $a,b,c\in P$ için $a\geq b$ ise $a\wedge(b\vee c)=b\vee(a\wedge c)$ dir. P kafesine distrübitiftir denir: $\Longleftrightarrow$ Her $a,b,c\in P$ için $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ dir.

$(P,\leq)$, $(P'\ \leq')$ iki poset ve $f:P\to P'$ bir dönüşüm olsun. f sırayı koruyor denir:$\Longleftrightarrow$ $a\leq b$ olan her $a,b\in P$ için $f(a)\leq' f(b)$ dir. f sırayı tersten koruyor denir:$\Longleftrightarrow$ $a\leq b$ olan her $a,b\in P$ için $f(b)\leq' f(a)$ dır. f P ve P' kafeslerinin bir homomorfisidir (kafes antihomomorfisidir) denir:$\Longleftrightarrow$ her $a,b\in P$ için

$$f(a\vee b)=f(a)\vee f(b),\ f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b)\quad (f(a\vee b)=f(a)\wedge f(b)$$
$$f(a\wedge b) = f(a)\vee f(b))$$

dir. Bire-bir örten bir kafes (anti) homomorfisine kafes (anti) izomorfisi denir.

P bir poset olsun. $m\in P$ ye bir maksimal (minimal) elemandır denir:$\Longleftrightarrow$ $x\geq m (x\leq m)$ olan her $x\in P$ için $x=m$ dir. Bir P posetine indulativdir denir:$\Longleftrightarrow$ P deki her zincir P de bir üstsınıra sahiptir.

ZORN LEMMASI

İndüktiv sıralanmış bir posetin enaz bir maksimal elemanı vardır.

II. KATEGORİLER VE FUNKTORLAR

$\mathcal{C}$ bir sınıf olsun. Her bir $A,B\in\mathcal{C}$ için $Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ elemanları A dan B ye $(:=f:A\to B)$ satırlar olan ve başka elemanı olmayan küme olsun. A ya bölge, B ye karşı bölge denir. Her $A,B,C\in\mathcal{C}$ için

$$0:Mor_{\mathbf{C}}(B,C)\times Mor_{\mathbf{C}}(A,B)\to Mor_{\mathbf{C}}(A,C)$$

fonksiyonu vardır. Öyleki bu fonksiyon $g:B\longrightarrow C$, $f:A\longrightarrow B$ satırların bir ikilisine $gof:A\to C$ satırını atar.

$\mathbf{C}=(\mathcal{C}, Mor_{\mathbf{C}},0)$ üçlüsüne bir kategori denir:$\Longleftrightarrow$

i) Her $h:C\to D$, $g:B\to C$, $f:A\to B$ üçlüsü için

$ho(gof)=(hog)of$ dir.

ii) Her bir $A\in\mathcal{C}$ için $\exists!\ 1_A\in Mor_{\mathbf{C}}(A,A)$ öyleki $f:A\to B$

$g:C\to A$ ise $fo1_A=f$ ve $1_Aog=g$ dir.

$\mathbf{C}$ bir kategori ise $\mathcal{C}$ sınıfının elemanlarına kategorinin objeleri, $f:A\to B$ satırlarına morfizimler, "0" dönüşümüne bileşke ve 1_A morfizimlerine kategorinin birimleri denir. $\mathbf{C}$ kategorisindeki her bir $f:A\to B$ morfizimine bir izomorfizm denir:$\Longleftrightarrow$ $\exists!\ g:B\to A$ öyleki $gof=1_A$, $fog=1_B$ dir.

$\mathbf{C}=(\mathcal{C}, Mor_{\mathbf{C}},0)$ bir kategori olsun. $\mathbf{C}$ kategorisine düzenli kategori denir:$\Longleftrightarrow$ $\exists U:\mathcal{C}\to S_t$ (:= Kümelerin sınıfı) öyleki her bir $A,B\in\mathcal{C}$ için

$Mor_{\mathbf{C}}(A,B)\subseteq Map(U(A),U(B))$, $1_A=1_{U(A)}$ ve " 0 "

fonksiyonların bileşkesi olarak kullanılır. Burada bir $f:A\to B$ izomorfizimi bir $f:U(A)\to U(B)$ tam eşlemesidir.

$\mathbf{D}=(\mathcal{D}, Mor_{\mathbf{D}}, \circ)$ kategorisi $\mathbf{C}=(\mathcal{C}, Mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ kategorisinin bir altkategorisidir:$\Longleftrightarrow \mathcal{D}\subseteq\mathcal{C}$, her bir $A,B\in\mathcal{D}$ için $Mor_{\mathbf{D}}(A,B)\subseteq Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ dir. $\mathbf{D}$ deki bileşke $\mathbf{C}$ deki bileşkenin $\mathbf{D}$ ye kısıtlanışıdır. Eğer her bir $A,B\in\mathcal{D}$ için $Mor_{\mathbf{D}}(A,B)=Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$ ise $\mathbf{D}$ ye $\mathbf{C}$ nin full altkategorisi denir.

$\mathbf{C}=(\mathcal{C}, Mor_{\mathbf{C}}, \circ)$ ve $\mathbf{D}=(\mathcal{D}, Mor_{\mathbf{D}}, \circ')$ iki kategori olsun. $F=(F_1,F_2)$ ikilisine $\mathbf{C}$ den $\mathbf{D}$ ye bir kovaryant funktordur denir $:\Longleftrightarrow$ $F_1:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $F_2: Mor_{\mathbf{C}}\to Mor_{\mathbf{D}}$ fonksiyonlar öyleki her $A,B,C\in\mathcal{C}$, $f\in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$, $g\in Mor_{\mathbf{C}}(B,C)$ için aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $F_2(f)\in Mor_{\mathbf{D}}(F_1(A), F_1(B))$

ii) $F_2(g\circ f)=F_2(g)\circ' F_2(f)$

iii) $F_2(1_A)=1_{F_1(A)}$

$F=(F_1,F_2)$ ikilisine $\mathbf{C}$ den $\mathbf{D}$ ye bir kontravaryant funktordur denir:$\Longleftrightarrow$ her $A,B,C\in\mathcal{C}$, $f\in Mor_{\mathbf{C}}(A,B)$, $g\in Mor_{\mathbf{C}}(B,C)$ için aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $F_2(f)\in Mor_{\mathbf{D}}(F_1(B), F_1(A))$

ii) $F_2(g\circ f) = F_2(f)\circ' F_2(g)$

iii) $F_2(1_A) = 1_{F_1(A)}$

Kovaryant funktorlara kategorilerin homomorfileri, kontravaryant funktorlara antikategori homomorfileri gözü ile bakabiliriz.

III. GRUPLAR HALKALAR VE CEBİRLER

$G \neq \emptyset$ olan bir küme ve "o" G üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Aşağıdaki koşulların gerçeklenmesi halinde G kümesine bir grup denir.

i) Her $a,b,c \in G$ için $(aob)oc=ao(boc)$,

ii) Her $a \in G$ için $\exists e \in G$ öyleki $aoe=eoa=a$,

iii) Her $a \in G$ için $\exists x \in G$ öyleki $aox=xoa=e$

dir.

Her $a,b \in G$ için $aob=boa$ ise G grubuna Abel grubu denir. (G,o) bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Eğer H G deki işleme göre bir grup ise H altkümesine G nin altgrubu denir ve $H < G$ ile gösterilir.

(G,o) Abel grubu ve $H < G$ olsun. Her $g_1, g_2 \in G$ için

$$(g_1 oH)o(g_2 oH) = (g_1 o g_2)oH$$

ile tanımlanan işleme göre

$$(G/H,o):=\{goH \mid g \in G\}$$

bir grup olup, bu gruba G nin H a göre bölüm grubu denir. $(G,o),(H,o)$ iki grup ve $\theta : G \to H$ bir dönüşüm olsun. θ ya bir grup homomorfisi denir:$\Longleftrightarrow$ Her $a,b \in G$ için

$$\theta(aob) = \theta(a)o\theta(b)$$

dir. Bundan böyle G den H a olan tüm grup homomorfilerini

$$Hom(G,H):=\{f \mid f:G \to H \text{ grup homomorfisidir}\}$$

ile gösterelim. $\theta \in Hom(G,H)$ olsun.

$$Ker\theta:=\{g \in G \mid \theta(g)= 0_H\} \subset G, \quad İm\theta:=\{\theta(g) \mid g \in G\} \subset H$$

altkümelerine θ nın çekirdeği ve resmi denir. Açık olarak $\mathrm{Ker}\theta < G$ ve $\mathrm{İm}\theta < H$ dır. $\theta \in \mathrm{Hom}(G,H)$ olsun.

θ monomorfidir:$\Longleftrightarrow$ θ bire-bir (1-1),

θ epimorfidir :$\Longleftrightarrow$ θ örten ($\mathrm{İm}\theta = H$),

θ izomorfidir :$\Longleftrightarrow$ θ monomorfi, epimorfi

dir. $\theta \in \mathrm{Hom}(G,H)$ bir izomorfi ise $G \cong H$ yazılır. Her $\theta \in \mathrm{Hom}(G,H)$ için $G/_{\mathrm{Ker}\theta} \cong \mathrm{İm}\theta$ (Hom. Teoremi) dir.

Bu çalışmada ele alacağımız gruplar toplamlı Abel grupları olacaktır.

$R \neq \emptyset$ olan bir küme ve "+, •" R üzerinde tanımlı ikili işlemler olsun. Aşağıdaki koşulların gerçeklenmesi halinde R kümesine bir halka denir.

i) $(R, +)$ Abel grubu,

ii) Her $a,b,c \in R$ için $a.(b.c)=(a.b).c$,

iii) Her $a,b,c \in R$ için $(a+b)c=ac+bc$, $a(b+c)=ab+ac$

dir. Her $a \in R$ için $1.a=a.1=a$ olacak biçimde bir $1 \in R$ varsa R'e 1 birim elemanlı bir halka denir. Her $a,b \in R$ için $ab=ba$ ise R halkasına komutatif halka, $ab=0$ ifadesinden daima $a=0$ veya $b=0$ elde ediliyorsa R halkasına sıfır bölensiz aksi taktirde sıfır bölenlidir denir. Komutatif sıfır bölensiz bir R halkasına tamlık bölgesi denir.

R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun. I ya R in bir althalkası (sol, sağ, ikiyanlı ideali) denir:$\Longleftrightarrow$ Her $a,b \in I$, $r \in R$ için

$a-b, ab \in I$ ($ra \in I$, $ar \in I$, $ra, ar \in I$)

dır. Kısalık için

$\Lambda^{\ell}(R):=\{\, J\subset R \mid J \;\; R$ in sol idealidir$\}$

$\Lambda^{r}(R):=\{I\subset R \mid I \;\; R$ in sağ idealidir$\}$

$\Lambda\,(R):=\Lambda^{\ell}(R)\cap\Lambda^{r}(R):=\{L\subset R \mid L \;\; R$ nin ikiyanlı idealidir$\}$

notasyonlarını kullanacağız

R bir halka ve $I\in\Lambda(R)$ olsun. Her $r_1,r_2\in R$ için

$(r_1+I).(r_2+I) = r_1.r_2 + I$

ile tanımlanan işleme göre

$(R/_I, +):= (R,+)/_{(I,+)}:= \{r+I \mid r\in R\}$

Abel grubu bir halka olup bu halkaya R in I ya göre bölüm halkası denir.

R, S halkalar ve $\theta:R\rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. θ ya bir halka homomorfisidir denir:$\Longleftrightarrow$ θ grup homomorfisi ve her $a,b\in R$ için

$\theta(ab)=\theta(a)\theta(b)$

dir. Bundan böyle R den S ye olan tüm halka homomorfilerini

$Hom(R,S):=\{f \mid f:R\rightarrow S$ halka homomorfisidir$\}$

ile gösterelim.

$\theta\in Hom(R,S)$ olsun.

$Ker\theta:=\{r\in R \mid \theta(r)=0\}\subset R,\;\; Im\theta:=\{\theta(r)\mid r\in R\}\subset S$

altkümelerine sırasıyla θ nın çekirdeği ve resmi denir.

Açık olarak $Ker\theta\in\Lambda(R)$ dir.

θ bir R-halka izomorfisidir$:\Longleftrightarrow$ θ monomorfi ve epimorfidir.

$\theta\in Hom(R.S)$ bir izomorfi ise $R\cong S$ yazılır. Her $\theta\in Hom(R,S)$ için $R/Ker\theta\cong Im\theta$ (Hom. Teoremi) dir.

R bir halka ve (M,+) toplamlı bir Abel grubu olsun Bir $.:RxM\rightarrow M$ $((r,m)\rightarrow rm, r\in R, m\in M)$ dış işlemi aşağıdaki koşulları gerçeklemesi halinde (M,+) Abel grubuna bir R-sol modüldür denir. Her $r,r_1,r_2 \in R$, $m,m_1,m_2 \in M$ için

i) $r(m_1+m_2) = rm_1+rm_2$

ii) $(r_1+r_2)m = r_1m+r_2m$

iii) $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$

dir. R 1 birim elemanlı ve her $m \in M$ için $1.m=m$ ise M e üniter R-sol modüldür denir.

Benzer şekilde R-sağ modüller tanımlanabilir. R-sol modüller için verilen tüm tanım, teorem ve ifadeler R-sağ modüller dilinde verilir.

M bir R-modül olsun. $\emptyset \neq N \subset M$ M in bir altmodülüdür.
$:\Longleftrightarrow$ $(N,+) < (M,+)$ ve her $r \in R$, $n \in N$ için $rn \in N$ gerçekleniyorsa.

M e devirlidir denir:$\Longleftrightarrow$ $\exists m_o \in M$ öyleki $M=Rm_o$ dır.

M in R-sol altmodüllerinin kümesini

$\Lambda^{\ell}(M):=\{N \subset M \mid N$ M in R-sol altmodülüdür$\}$

ile gösterelim,

$N \in \Lambda^{\ell}(M)$ olsun. Bu taktirde $M/_N:=\{m+N \mid m \in M\}$ bölüm grubu

$.:Rx(M/N) \to M/_N$ $((r,(m+N)) \to rm+N,\ m \in M,\ r \in R)$ dış işlemine göre bir R-sol modüldür. M/N e M in N e göre bölüm modülü denir. Notasyonun kısalığı için A sol (sağ) modüllerin ailesini $_A\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}_A$) ve A-sol, B-sağ bi-modüllerin ailesini $_A\mathfrak{M}_B$ ile gösterelim.

A üniter R-sol modül olmak üzere açık olarak
$_A\mathfrak{M}_B = {}_A\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_B$ dir. Bir R-halkasını bir R-sol modül ($_RR$) olarak gözönüne alabileceğimiz gibi bir R-sağ modül (R_R) olarakta gözönüne alabiliriz. Dolayısıyla her R halkası bir bi-modül ($_RR_R$) olarak gözönüne alınabilir.

M bir R-sol modül, $X \subseteq M$ olsun. X kümesini içeren M in bütün altmodüllerinin arakasitine X ile üretilen altmodül denir.

X sonlu ve X ile üretilen altmodül B ise B' e sonlu üretenli altmodül denir. $\{B_i | i \in I\}$ M in altmodüllerinin bir ailesi ise

$$X = \bigcup_{i \in I} B_i$$

kümesinin ürettiği altmodüle $\{B_i | i \in I\}$ ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i \in I} B_i$ ile gösterilir. Eğer X sonlu ise $B_1, B_2, \ldots, B_n$ modüllerinin toplamını $B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$ ile gösterilir.

X ile üretilen altmodülü $<X>$ ile göstereceğiz. Açık olarak

$$<X> := \{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \,|\, n \in \mathbb{N}^*, \ r_i \in R, \ x_i \in X\}$$

dır.

M bir R-sol modül ve $\{B_i | i \in I\}$ M in altmodüllerinin bir ailesi olsun. M e $\{B_i | i \in I\}$ ailesinin iç direkt toplamı denir ve

$$M = \bigoplus_{i \in I} B_i \quad \text{yazılır:} \Longleftrightarrow$$

i) $M = \sum_{i \in I} B_i$,

ii) Her $j \in I$ için $B_j \bigcap \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} B_i = 0$

dır. $M = \bigoplus_{i \in I} B_i$ ifadesine aynı zamanda M in $\{B_i | i \in I\}$ altmodüllerinin toplamına göre bir direkt parçalanışı denir. $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ olması halinde

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} B_i = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$$

yazılır.

M bir R-sol modül olmak üzere $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ elemanlarına R-serbesttir (R-lineer bağımsızdır) denir:$\Longleftrightarrow$ $r_i \in R$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere $r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_nx_n=0$ gerçekleniyorsa $r_i=0$ $(1 \leq i \leq n)$ dir. Aksi halde R-serbest değildir (R-lineer bağımlıdır) denir. $X \subset M$ R-serbesttir (R-lineer bağımsızdır) denir:$\Longleftrightarrow$ X in tüm sonlu altkümeleri R-serbesttir (R-lineer bağımsızdır)

X 'e M in R-bazıdır denir :$\Longleftrightarrow$

i) $M = \langle X \rangle$

ii) X R-serbesttir.

R birim elemanlı bir halka, V üniter R-sol modül olsun. Eğer R bir cisim ise V R üzerinde bir vektör uzayıdır.

Zorn Lemması ile her R-vektör uzayının bir R-baza sahip olacağı kolaylıkla elde edilir.

A, B R-sol modül, $\theta: A \to B$ bir dönüşüm olsun. θ bir R-modül homomorfisidir:$\Longleftrightarrow$ Her $a_1, a_2 \in A$ ve $r \in R$ için

$\theta(a_1+a_2)=\theta(a_1)+\theta(a_2)$, $\theta(ra_1)=r\theta(a_1)$

dir. A dan B ye olan tüm R-modül homomorfilerinin kümesini

$Hom_R(A,B) := \{ f \mid f: A \to B \text{ R-modül homomorfisidir} \}$

ile gösterelim.

M_1, M_2 R-sol modül, obje$\mathfrak{M} = {}_R\mathfrak{M}$ ve $Mor_{\mathfrak{M}}(M_1,M_2) = Hom_R(M_1,M_2)$, "0" fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlanırsa

$\mathfrak{M} = ({}_R\mathfrak{M}, Mor_{\mathfrak{M}}, 0)$

bir kategoridir.

$\theta \in Hom_R(A,B)$ olsun.

$Ker\theta := \{a \in A \mid \theta(a)=0\} \subset A$, $\dot{I}m\theta := \{\theta(a) \mid a \in A\} \subset B$

altkümelerine sırasıile θ nın çekirdeği ve resmi denir. Kolaylıkla $Ker\theta \in \Lambda(A)$ olacağı gösterilebilir.

θ ya bir R-modül izomorfisi denir:$\Longleftrightarrow$ θ monomorfi ve epimorfidir.

$\theta \in Hom_R(A,B)$ bir izomorfi ise $A \underset{R}{\cong} B$ yazılır.Her $\theta \in Hom_R(A,B)$ için $A/_{Ker\theta} \underset{R}{\cong} \dot{I}m\theta$ (Mod. Hom. Teo.)

$N, M_1, M_2 \in \Lambda^{\ell}(M)$ ve $N \in \Lambda^{\ell}(M_2)$ olsun. Bu taktirde

$(M_1+M_2)/_{M_1} \cong M_2/_{(M_1 \cap M_2)}$ (Mod. I. İzo. Teo.)

$M/_{M_2} \cong (M/_N)/_{(M_2/_N)}$ (Mod. II. İzo. Teo.)

verilir.

Teorem.

M üniter R-sol modül olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar denktir.

i) M boştan farklı bir baza sahiptir.

ii) M her biri ${}_RR$ e izomorf olan devirli R-modüllerin bir iç direkt toplamıdır.

iii) M ${}_RR$ in kopyelerinin bir direkt toplamına R-izomorf tur. (Hungerford T.W. 1987 s.181).

R birim elemanlı komutatif bir halka ve A bir halka olsun. A ya R-cebirdir denir:$\Longleftrightarrow$ A üniter R-sol modül ve her $a,b \in A$ ve $r \in R$ için

$r(ab) = (ra)b = (ar)b = a(rb)$

dir.

A bir R-cebir $\emptyset \neq B \subset A$ olsun. B A nın bir altcebiridir.

$:\Longleftrightarrow$ B A nın bir R-althalkası ve B A nın bir R-altmodülüdür.

$I \subset A$ bir idealdir$:\Longleftrightarrow$ I A halkasının bir ideali ve I R-modül A nın bir R-altmodülüdür.

A, B R-cebirler olmak üzere $\theta : A \to B$ dönüşümü bir R-cebir homomorfisi (izomorfisi) dir$:\Longleftrightarrow$ θ halka homomorfisi (izomorfisi) ve θ R-modül homomorfisi (izomorfisi) dir.

A dan B ye olan tüm R-cebir homomorfilerini

$Hom_R(A,B) := \{ f \mid f : A \to B$ R-cebir homomorfisidir$\}$

ile gösterelim.

$\theta \in Hom_R(A,B)$ olsun.

$Ker\theta := \{ a \in A \mid \theta(a) = 0 \} \subset A$, $\text{İm}\,\theta := \{ \theta(a) \mid a \in A \} \subset B$

altkümelerine sırasıyla θ nın çekirdeği ve resmi denir. Açık olarak $Ker\theta \Lambda (A)$ dir.

Her $\theta \in Hom_R(A,B)$ için $A/_{Ker\theta} \underset{R}{\cong} \text{İm}\theta$ (Ceb. Hom. Teo.) dir.

Aksi söylenmedikçe bu çalışmada baştan sona kadar A, $1 = 1_A$ birim elemanlı trivialden farklı bir R-cebiri gösterecektir.

III. 1. Örnek:

A,B R-cebirler, $\theta \in Hom_R(A,B)$ olsun. ${}_A\mathfrak{M}$; ${}_B\mathfrak{M}$ sırasıyla A-sol, B-sol modüllerin kategorisini göstersin. Her bir $M \in {}_B\mathfrak{M}$ için M^+ M in küme olarak toplamlı grubu olmak üzere

$. : A \times M^+ \to M^+$ $((a,m) \quad \theta(a)m \quad a \in A,\ m \in M)$ tanımlanırsa açık olarak $M^+ \in {}_A\mathfrak{M}$ dir. Bunu M_θ ile gösterelim.

$M, N \in {}_B\mathfrak{M}$ ve $\Psi \in Hom_B(M,N)$ için

$$F_\theta : {}_B\mathfrak{M} \to {}_A\mathfrak{M} \;,\; F_\theta(M) = M_\theta ,\; F_\theta(\Psi) = \Psi$$

olsun. $a \in A$ ve $m \in M$ keyfi olsun. Bu taktirde

$$\Psi(a.m) = \Psi(\theta(a).m) = \theta(a).\Psi(m) = a.\Psi(m)$$

dir ve $\Psi \in Hom_A(M,N)$ olup

$$F_\theta(Hom_B(M,N)) \subseteq Hom_A(M,N)$$

dir. Buradan F_θ bir kovaryant funktordur.

Özellikle $I \in \Lambda(A) := \{J \mid J$ A nın bir idealidir$\}$ ve $B = A/_I$ olmak üzere $\pi : A \to B$ projeksiyon ise

$$a.m = (a+I)m$$

ile tanımlanan $. : A x M \to M$ dış işlemi ile M in bir A-sol modül olduğu elde edilmiş olur.

BÖLÜM I

YARIBASİT MODÜLER VE CEBİRLER

1.1. Lemma

A, B R-cebirler, $\theta \in Hom_R(A,B)$ ve $M,N \in {}_B\mathfrak{M}$ olsun. Bu taktirde

i) $(M \oplus N)_\theta = M_\theta \oplus N_\theta$

ii) $Hom_B(M,N) \subseteq Hom_A(M_\theta, N_\theta)$. Eşitlik $Im\theta = B$ olması durumunda vardır.

iii) N,M in B-altmodülü ise N_θ, M_θ nın A-altmodülüdür. θ örten ise $\Lambda(M) = \Lambda(M_\theta)$ dır.

1.2. Tanım

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ ve $X \in \mathcal{P}(M)$ olsun.

$Ann(X) := \{a \in A \mid x \in X$ için $a.x = 0\} \subset A$

kümesine X in annilatörü (sıfırlayanı) denir. Bu tanımın açık bir sonucu olarak aşağıdaki lemma verilir.

1.3. Lemma

M, M' ve $\{M_i \mid i \in J\} \in {}_A\mathfrak{M}$, $X \subseteq M$, $Y \subseteq M$ olsun.

Bu takdirde aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $Ann(X) \in \Lambda^{\ell}(A)$, $X \in \Lambda(M)$ ise $Ann(X) \in \Lambda(A)$ dır.

ii) $X \in \mathcal{P}(Y)$ ise $Ann(Y) \subseteq Ann(X)$

iii) $M \cong M'$ ise $Ann(M) = Ann(M')$

iv) $Ann(\sum_{i \in j} M_i) = \bigcap_{i \in j} Ann(M_i)$

v) $M \in \Lambda^{\ell}(A)$ ise $Ann(A/M)$ A nın M de içerilen en büyük idealidir. Diğer bir ifade ile $\Lambda^*(A) := \{I \in \Lambda(A) \mid I \subset M\}$ olmak üzere $Ann(A/M) \in Maks\,\Lambda^*(A)$ dır.

1.4. Önerme

A, B R-cebirler $\theta \in Hom_R(A,B)$ epimorfi, $N \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. Bu taktirde $\exists M \in {}_B\mathfrak{M}$ öyleki $N = M_\theta \Leftrightarrow Ker\theta \subseteq Ann(N)$ dır.

İspat: "$\Longrightarrow$" $a \in A$ ve $a \in Ker\theta$ ise $\theta(a)=0$ dır. $n \in N$ keyfi verilsin. $a.n=\theta(a).n=0.n=0$ dır. Her $n \in N$ için $a.n=0 \Rightarrow a \in Ann_A(N)$

$\Rightarrow Ker\theta \subseteq Ann_A(N)$ dir.

"$\Longleftarrow$" $Ker\theta \subseteq Ann_A(N)$ olsun. $\exists? M \in {}_B\mathfrak{M}$ öyleki $N=M_\theta$ dir.

$.: BxN=\theta(A)xN \to N((b,n) \to a.n,\ a \in A, b \in B)$ olarak tanımlanan dönüşüm iyi tanımlıdır. $b \in B$ ve $n \in N$ keyfi verilsin. θ örten olduğundan $\exists a \in A$ öyleki $\theta(a)=b$ dir. $b.n=a.n$ ile tanımlansın. $b=b'$ olsun. $\exists a,a' \in A$ öyleki $b=\theta(a)$, $b'=\theta(a')$ dır.

$b=b' \Rightarrow a-a' \in Ker\theta \subseteq Ann_A(N) \Rightarrow a-a' \in Ann_A(N)$ dir. Buradan her $n \in N$ için $(a-a').n=0 \Rightarrow a.n=a'.n \Rightarrow b.n=b'.n$ dir. O halde tanımlanan dönüşüm iyi tanımlıdır. $M:=N \in {}_A\mathfrak{M}, M^+=N^+$ olup $b.n=a.n$ ile $M \in {}_B\mathfrak{M}$ olduğu açıktır. Açık olarak $M_\theta=N$ dir.

Bu önermenin açık bir sonucu olarak, $I \in \Lambda^{\ell}(A)$ olmak üzere $B=A/_I$ alınırsa $N \in {}_A\mathfrak{M}$ için $N \in {}_{A/_I}\mathfrak{M} \Leftrightarrow I \subseteq AnnN$ elde edilir.

1.5. Tanım

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. M sadıktır $:\Leftrightarrow Ann(M)=0$ dır.

1.6. Sonuç

$I \in \Lambda(A)$ ve $N \in {}_{A/_I}\mathfrak{M}$ olsun. N sadık $A/_I$-modüldür. $\Leftrightarrow AnnN_\pi=I$ dır.

İspat: $a \in A$ için $\pi(a)=a+I$ ile tanımlanan $\pi: A \to A/_I$ ile $N \in {}_A\mathfrak{M}$ yapılabilir (III.1 örnek).

$$\mathrm{Ann}_{A/I}N := \{a+I \mid n\in N \text{ için } (a+I).n=0\}$$
$$= \{a+I \mid n\in N \text{ için } a.n=0\}$$
$$= \{a+I \mid a\in \mathrm{Ann}N_{\pi}\} = \mathrm{Ann}N_{\pi/I} \quad \ldots(*)$$

"$\Rightarrow$" N sadık A/I modül olsun. Bu taktirde $\mathrm{Ann}_{A/I}N = 0 \overset{*}{=} \mathrm{Ann}N_{\pi/I}$

$\Rightarrow \mathrm{Ann}N_{\pi} = I$ dır.

Tersine $\mathrm{Ann}N_{\pi} = I$ olsun. Bu taktirde $\mathrm{Ann}N_{\pi/I} = 0 \overset{*}{=} \mathrm{Ann}_{A/I}N$

$\Rightarrow$ N sadık $A/_I$ modüldür.

1.7 ALTMODÜLLERİN KAFESİ

$M \in {}_A\mathfrak{M}$, $N_1, N_2 \in \Lambda(M)$ olmak üzere $N_1 \leq N_2 :\Longleftrightarrow N_1 \subseteq N_2$ yazalım. Bu taktirde $(\Lambda(M), \subseteq)$ bir posettir. Üstelik $\{N_i \mid i\in J\} \subset \Lambda(M)$ ise $\bigcap_{i\in J} N_i$ ve $\sum_{i\in J} N_i \in \Lambda(M)$ olacağı açıktır. Üstelik $\bigcap_{i\in J} N_i$ her bir N_i nin içerdiği $\Lambda(M)$ in enbüyük elemanıdır. Bu durumdan dolayı $\inf_{i\in J} N_i = \bigwedge_{i\in J} N_i = \bigcap_{i\in J} N_i$ dir. $\sum_{i\in J} N_i$ her bir N_i yi içeren $\Lambda(M)$ in enküçük elemanıdır. Bu durumda $\sup_{i\in J} N_i = \bigvee_{i\in J} N_i = \sum_{i\in J} N_i$ dir. Buradan $(\Lambda(M), \subseteq)$ bir tamkafestir. Üstelik $(\Lambda(M), \subseteq)$ modulardır. Ancak distrübütif değildir.

1.8. Tanım

$N \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. N basittir: $\Longleftrightarrow \Lambda(N) = \{0, N\}$ dir. N yarıbasittir. $:\Longleftrightarrow$ N basit modüllerin direkt toplamıdır.

$I \in \Lambda^{\ell}(A)$ basittir:$\Longleftrightarrow I \in \mathrm{Min}(\Lambda^{\ell}(A) \setminus \{0\}, \subseteq)$ dır. Öyle A-cebirler vardırki $\mathrm{Min}(\Lambda^{\ell}(A) \setminus \{0\}, \subseteq) = \emptyset$ dır. Örneğin $\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-cebir olup $\mathrm{Min}(\Lambda(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}, \subseteq) = \emptyset$ dır. Diğer yandan A birim elemanlı ise $\mathrm{Maks}(\Lambda^{\ell}(A) \setminus \{A\}, \subseteq) \neq \emptyset$ olduğu Zorn Lemması ile hemen elde edilir.

$I \in \Lambda^{\ell}(A)$ maksimaldir: $\Longleftrightarrow$ ${}^{A}A/I$ basit A-sol modüldür.

$\mathrm{Maks}(\Lambda^{\ell}(A)) := \{I \in \Lambda^{\ell}(A) \mid {}^{A}A/I$ basit A-sol modüldür$\}$

1.9.

$I \in \Lambda^{\ell}(A)$ keyfi olsun. $\Lambda_I^{\ell}(A) := \{J \in \Lambda^{\ell}(A) \mid I \subseteq J\}$ ve $\Lambda^{\ell}(A/I)$ A/I nın sol altmodüllerinin kümesi olsun. Bu taktirde her $J \in \Lambda_I^{\ell}(A)$ için $\varphi(J) = J/I$ ile tanımlanan $\varphi : \Lambda_I^{\ell}(A) \to \Lambda^{\ell}({}^{A}A/I)$ dönüşümü bir kafes izomorfisidir. Buna göre $(\Lambda_I^{\ell}(A), \subseteq) \cong (\Lambda^{\ell}({}^{A}A/I), \subseteq)$ dir.

Zorn Lemmasının açık bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

1.10 Teorem

A birim elemanlı ise A enazından bir maksimal (sol) ideal içerir. Gerçekte A daki her (sol) ideal bir maksimal (sol) idealde içerilir.

1.11. Önerme

$N \in {}_{A}\mathfrak{M}$ ve $N \neq 0$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) N basittir

ii) Her $n \in N \setminus \{0\}$ için $N = A.n$ dir.

iii) $\exists I \in \mathrm{Maks}(\Lambda^{\ell}(A))$ öyleki $N \underset{A}{\cong} {}^{A}A/I$ dır.

İspat : i)$\Rightarrow$ ii) N basit ve $n \in N \setminus \{0\}$ keyfi olsun. Bu taktirde $0 \neq n \in A.n < N$ dir. N basit ve $N \neq 0$ olduğundan $N = A.n$ elde edilir. ii)$\Rightarrow$i) Her $n \in N \setminus \{0\}$ için $N = An$ olsun. $0 \subsetneq L \subset N$ ve $0 \neq l \in L$ olsun. Bu taktirde $N = Al \Rightarrow N = Al \subseteq L \subseteq N \Rightarrow N = L$ dir. N basittir.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Her $n \in N\setminus\{0\}$ için $N=A.n$ olsun. Her $a\in_A A$ için $\theta(a)=a.n$ ile tanımlanan $\theta: {}_A A \to N$ dönüşümü A-modül epimorfisidir.
Ker $\theta = \mathrm{Ann}(N) = I$ olup homomorfi teoremine göre $N \underset{A}{\cong} A^A/\mathrm{Ann}(N)$ dir.
ii) $\Longleftrightarrow$ i) olduğundan N basit ve $N \underset{A}{\cong} A^A/\mathrm{Ann}(N)$ olduğundan $\mathrm{Ann}(N) \in$ Maks $(\Lambda^{\ell}(A))$ dır.
iii) $\Longrightarrow$ i) $N \underset{A}{\cong} A^A/I$ olsun. $I \in$ Maks$(\Lambda^{\ell}(A))$ olduğundan A^A/I basit dolayısıyla N basittir.

1.12. SCHUR LEMMASI

$M,N \in {}_A\mathfrak{M}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)\setminus\{0\}$ olsun. Bu taktirde
i) M basitse φ bire-bir
ii) N basitse φ örtendir.

İspat : $\varphi \neq 0$ olduğundan Ker$\varphi \neq M$, İm$\varphi \neq 0$ dır.

i) M basitse $M \neq \mathrm{Ker}\varphi \in \Lambda(M)=\{0,M\}$ olduğundan Ker$\varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ bire-bir.

ii) N basitse $0 \neq \mathrm{Im}\varphi \in \Lambda(N)=\{0,N\}$ olduğundan İm$\varphi = N \Rightarrow \varphi$ örtendir.

1.13. Sonuç

$M, N \in {}_A\mathfrak{M}$ basitse $N \cong M$ veya $\mathrm{Hom}_A(M,N)=0$ dır.

İspat : Her $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,N)\setminus\{0\}$ için 1.12 den φ tameşlemedir. Buradan $\mathrm{Hom}_A(M,N) \neq 0$ ise $M \cong N$ dir. Aksi taktirde $\mathrm{Hom}_A(M,N)=0$ dır.

1.14. Tanım

$N \in {}_A\mathfrak{M}$ ayrışamazdır : $\Leftrightarrow N \neq 0$ ve N sıfırdan farklı altmodüllerin bir direkt toplamı olarak yazılamıyorsa yani $N=P \oplus Q$ ise $P=0$ veya $Q=0$ dır.

1.15. Sonuç

$N \in {}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar denktir.

i) N basittir

ü) $\mathrm{End}_A(N)$ bölme cebiridir

iü) N ayrışamazdır.

İspat : i)$\Rightarrow$ ii) N basit ve $0 \neq \theta \in \mathrm{End}_A(N)$ olsun. 1.12 den θ tameşleme olup $\mathrm{End}_A(N)$ bölme cebiridir.

ii)$\Rightarrow$ iii) $\mathrm{End}_A(N)$ bir bölme cebiri olsun. $\mathrm{End}_A(N)$ $0 \neq 1_N$ birim elemanlıdır. Buradan $N \neq 0$ dır. $N = P \oplus Q$ keyfi bir direkt toplam ayrışımı olsun. $\pi : N \to P \subset N$ projeksiyonunu gözönüne alalım.

$\pi \in \mathrm{End}_A(N)$ dir. $\pi(N) = P$ ve $(1_N - \pi)N = Q$ ve $\pi^2 = \pi$ dir.

$\pi(1_N - \pi) = \pi - \pi^2 = 0$ dır. $\mathrm{End}_A(N)$ bir bölme cebiri olduğundan

$\pi = 0$ veya $1_N - \pi = 0$ dır. $\pi = 0$ ise $P = 0$ ve $Q = N$ dir.

$1_N - \pi = 0 \Rightarrow 1_N = \pi \Rightarrow P = N$ ve $Q = 0$ olup bu ise N in ayrışamaz olduğunu söyler.

iii)$\Rightarrow$ i) N yarıbasit ve ayrışamaz olduğundan N basittir.

1.16 Tanım

$M \in {}_A\mathfrak{M}$, N, $P \in \Lambda(M)$ olsun. Bu taktirde P N in $\Lambda(M)$ deki bir komplimentidir: $\Leftrightarrow$ $M = N + P$, $N \cap P = 0$ dır. Yani $M = N \oplus P$ dir. Genelde komplimentler tek değildir ve $\Lambda(M)$ deki her eleman bir komplimente sahip değildir.

1.17. Lemma

$M \in {}_A\mathfrak{M}$, J bir küme ve her $i \in J$ için $N_i \in \Lambda(M)$ basit olmak üzere $M = \sum_{i \in J} N_i$ olsun. Bu taktirde $P \in \Lambda(M)$ ise $\exists I \subset J$ öyleki $M = (\bigoplus_{i \in I} N_i) \oplus P$ dir.

İspat : $\mathcal{A}:=\{I\subset J \mid (\bigoplus_{i\in I} N_i)\oplus P=(\sum_{i\in I} N_i)+P\}$ osun. $P=M$ ise $I=\emptyset$ dır. $P\neq M$ ise $M=\sum_{i\in J} N_i$ olduğundan $P=M\cap P\supseteq \sum_{i\in J}(N_i\cap P)$, N_i ler basit ve $N_i\cap P\subset N_i$ olduğundan $N_i\cap P=0$ veya $N_i\cap P=N_i$ dir. $P\subsetneqq M$ olduğundan $\exists i_o\in J$ öyleki $N_{i_o}\cap P=0$ dır. Buradan $N_{i_o}+P=N_{i_o}\oplus P$ dir. Dolayısıyla $\{i_o\}\in\mathcal{A}$ olup $\mathcal{A}\neq\emptyset$ dır. Her $I_1,I_2\in\mathcal{A}$ için $I_1\leq I_2 :\Longleftrightarrow I_1\subseteq I_2$ tanımlansın. Bu taktirde $(\mathcal{A},\leq)$ bir posettir. Zorn Lemması ile elde edilen maksimal eleman I olsun. Bu taktirde $(\sum_{i\in I} N_i)+P=(\bigoplus_{i\in I} N_i)\oplus P$ dir. $M_1=(\bigoplus_{i\in I} N_i)\oplus P$ olsun.

İddia: $M=M_1$ dir. Aksi taktirde $\exists j_o\in J\setminus I$ öyleki $M_1\cap N_{j_o}=0$ olup $N_{j_o}+M_1=N_{j_o}\oplus M_1=N_{j_o}\oplus(\bigoplus_{i\in I} N_i)\oplus P=\bigoplus_{i\in I\cup\{j_o\}} N_i\oplus P$ elde edilirki bu $I\in\mathrm{Maks}(\mathcal{A})$ olması ile çelişir. O halde $M=(\bigoplus_{i\in I} N_i)\oplus P$ dir.

1.18. Önerme

Her bir $M\in {}_A\mathfrak{M}$ için aşağıdaki koşullar denktir.

i) M yarıbasittir.

ii) $M=\sum\{N\in\Lambda(M)\mid N \text{ basit}\}$.

iii) $\Lambda(M)$ komplimentlenebilir bir kafestir. Yani M in her altmodülü $\Lambda(M)$ de bir komplimente sahiptir.

İspat : i) $\Rightarrow$ ii) Açık

ii) $\Rightarrow$ i) 1.17 den $P=0$ alınarak elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ iii) 1.17 nin açık bir sonucudur.

iii) $\Rightarrow$ i) Her $P\in\Lambda(M)$ için $\Lambda(P)$ komplementlenebir bir kafestir. Gerçektende $M_1\in\Lambda(P)$ keyfi olsun. $M_1\in\Lambda(M)$ ve $\Lambda(M)$ komplimentlenebilir olduğundan $\exists M_2\in\Lambda(M)$ öyleki $M=M_1\oplus M_2$ dir. $P=M\cap P=(M_1\oplus M_2)\cap P=M_1\cap P\oplus M_2\cap P=M_1\oplus M_2\cap P$ ve $M_2\cap P\in\Lambda(P)$ olduğundan $\Lambda(P)$ kafesi komplimentlenebilirdir. $Q\in\Lambda(M)\setminus\{0,M\}$ keyfi olsun. Bu taktirde $\exists N\in\Lambda(M)$ basit modül öyleki $N\cap Q=0$ dır. $0\neq m\in M\setminus Q$ olsun.

$$\mathcal{A}:=\{P\in\Lambda(M)\,|\,m\notin P\}$$

olsun. $Q\in\mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A}\neq\emptyset$ dır. $(\mathcal{A},\subseteq)$ bölümsel sıralanmıştır. Zorn lemması ile elde edilen maksimal eleman K olsun. $\Lambda(M)$ komplimentlenebilir kafes olduğundan $\exists N_1\in\Lambda(M)$ öyleki $M=K\oplus N_1$ dir. $0\neq m\in M=K\oplus N_1$, $m=w+v$, $w\in K$, $v\in N_1$. $m\notin K$ olduğundan $v\neq 0$ dır. Özellikle $N_1\neq 0$ dır. $N_2\in\Lambda(N_1)\setminus\{0\}$ olsun. Bu taktirde K nın maksimalliğinden $w+v=m\in K+N_2=K\oplus N_2$ dir. Böylece $v\in N_2$ özellikle N_1 in sıfırdan farklı iki altmodülü sıfırdan farklı arakesite sahiptir. $\Lambda(N_1)$ komplimentlenebilir olduğundan bu durum ancak $\Lambda(N_1)=\{0,N_1\}$ olmasıyla mümkündür. Buradan N_1 basittir. $M=N_1\oplus K$, N_1 basit ve iddianın her $K\in\Lambda(M)\setminus\{0,M\}$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani M in her K özaltmodülü basit modüllerin toplamı olarak yazılsın. $K=\sum\limits_{L\in\Lambda(K),L \text{ basit}} L$ buradan $M=N_1+\sum\limits_{L\in\Lambda(K),L \text{ basit}} L$, N_1 basit olduğundan $M=\sum\limits_{N\in\Lambda(M),N \text{ basit}} N$ elde edilmiş olur.

1.18 ve yarıbasit modül tanımının açık bir sonucu olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

1.19. Sonuç

$M\in{}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit ise her $N\in\Lambda(M)\setminus\{0,M\}$ için N, M/N yarıbasittir

1.20. Sonuç

Yarıbasit modüllerin kategorisi direkt toplama kapalıdır.

1.21. Lemma

Her bir $i\in J$ için $N_i\in{}_A\mathfrak{M}$ basit olmak üzere $M=\bigoplus\limits_{i\in J} N_i$, $N\in{}_A\mathfrak{M}$

basit ve $\varphi \in Hom_A(N,M)\setminus\{0\}$ olsun. Bu taktirde $\exists j \in J$ öyleki $M = \varphi(N) \oplus (\bigoplus_{i\neq j} N_i)$ ve $N \cong N_j$ dir.

İspat : 1.17 Lemmadan $\exists J' \subseteq J$ öyleki $M = \varphi(N) \oplus (\bigoplus_{i\neq j} N_i)$ dir. Sonuç olarak $\bigoplus_{i\in J\setminus J'} N_i \cong M/_{(\bigoplus_{i\in J'} N_i)} \cong \varphi(N) \cong N$ (1.12 lemma)
N basit olduğundan $|J\setminus J'| = 1$ dir. Buradan $N \cong N_j$ elde edilir.

$$\mathcal{B} := \{N \in {}_A\mathfrak{M} \mid N \text{ basit}\}$$

olsun. $N_1, N_2 \in \mathcal{B}$ olmak üzere $N_1 \sim N_2 :\Longleftrightarrow N_1 \cong N_2 :\Leftrightarrow Hom_A(N_1,N_2)$ bir bölme cebiridir. Bu taktirde $\sim$ $\mathcal{B}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Her bir $N \in \mathcal{B}$ için

$$[N]_\sim := \{M \in \mathcal{B} \mid N \cong M :\Leftrightarrow Hom_A(N,M) \text{ bir bölme cebiridir}\}$$

$$\bar{\mathcal{B}} := \{[N]_\sim \mid N \in \mathcal{B}\}$$

yazalım. $\{N_i \mid i \in J\}$ $\bar{\mathcal{B}}$ deki sınıfların sınıf temsilcilerinin kümesi olsun. (J seçme oksiyonu ile belirlidir) Böylece $J \neq \emptyset$ olan indeks kümesidir. Her bir N_i basittir ve her bir $N \in {}_A\mathfrak{M}$ basit modül için $\exists! i \in J$ öyleki $N \cong N_i$ dir.

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. $M(i) := \sum_{N\in\Lambda(M),\, N\cong N_i} N$ yazalım.

1.22. Lemma

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit ise $M = \bigoplus_{i\in J} M(i)$ dir.

İspat : M yarıbasit olduğundan $M = \bigoplus_{i\in J} M_i$, $M_i = \bigoplus_{j\in K_i} N_{ij}$, $N_{ij} \cong N_i$ ayrışımı mevcuttur. Açık olarak $M_i \subseteq M(i)$ dir. İspatı tamamlamak için $M(i) \subseteq M_i$ olduğunu göstermek yeterlidir. $N_i \cong N \in \Lambda(M)$ olsun. $M := M_i \oplus M_i'$, $M_i' = \bigoplus_{j\neq i} M_j$ ve $\pi : M \to M_i'$ ayrışımla ilgili projeksiyon olsun. 1.21 den $\pi(N)=0$ dır. Yani $N \subseteq M_i$ dir. N M in N_i e izomorf olan keyfi bir altmodülü olduğundan $M(i) \subseteq M_i$ olup $M_i=M(i)$ dir ve $M=\bigoplus_{i\in J} M(i)$ elde edilir.

1.22 ve 1.12 nin açık bir sonucu olarak aşağıdaki lemma verilir.

1.23 Lemma

$M, M' \in {}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit olsunlar. $\varphi \in Hom_A(M,M')$ ise bu taktirde her $i \in J$ için $\varphi(M(i)) \subseteq M'(i)$ dir.

1.24 Önerme

$M, M' \in {}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit olsunlar. $M=\bigoplus_{i\in J} M(i)$, $M(i)\cong \bigoplus \alpha_i N_i$ ve $M'=\bigoplus_{i\in J} M'(i)$, $M'(i)\cong \bigoplus \beta_i N_i$ olduklarını kabul edelim. Bu taktirde

$M\cong M' \iff$ Her $i\in J$ için $\alpha_i = \beta_i$

dir.

İspat : $\psi: M \to M'$ izomorfi olsun. Bu taktirde 1.23 den her $i \in J$ için $\psi(M(i))=M'(i)$ dir.

(1). $\alpha_i (i\in I)$ sonlu olsun. $\alpha_i=0$ ise $M(i)=0$ dır. Buradan

$\psi(M(i))= \psi(0)=0=M'(i)$

olup $\beta_i=0$ dır.

$\alpha_i = m \geq 1$ olduğunu kabul edelim.

$M(i) = N_{i_1} \oplus N_{i_2} \oplus \dots \oplus N_{i_m}$

olmak üzere her j, k için

$N'_{ik} \cong N'_{ij} = N_i$, $M'(i) = \bigoplus_{k\in I} N'_{ik}$

yazalım. $\beta_i=|I|= \{i_1,i_2,\dots, i_m\}$ olsun. 1.21 den $\exists l \in I$ öyleki

$$\psi(N_{im}) \oplus (\bigoplus_{k\neq 1} N'_{ik}) = M'(i) = \psi(N_{im}) \oplus \psi(N_{i_1}) \oplus \psi(N_{i_2}) \oplus ,\ldots, \oplus \psi(N_{im-1})$$

dır. Buradan dolayı

$$N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \ldots \oplus N_{im-1} \cong \psi(N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \ldots \oplus N_{im-1}) \cong M'(i)/\psi(N_{im})$$

$$\cong \bigoplus_{k\neq 1} N'_{ik}$$

dır. Tümevarım hipotezinden $m-1=|I|\backslash\{1\}$ dir.

Buradan $\alpha_i = m = \beta_i$ elde edilir. Eğer β_i sonlu ise ψ^{-1} ile ispat aynen yapılır.

(2). İspatı tamamlamak için α_i, β_i nin her ikisininde sonsuz olduğunu kabul edelim. 1.11 den

$$M(i) = \bigoplus_{k\in K} Au_k,\ M'(i) = \bigoplus_{l\in L} Au'_l,\ |K| = \alpha_i,\ |L| = \beta_i$$

ayrışımı vardır. Her bir $k\in K$ için

$$\psi(u_k) \in \bigoplus_{l\in L} Au'_l$$

olduğundan $\exists\{l_1(k), l_2(k),\ldots, l_s(k)\} \subset L$ öyleki

$$\psi(u_k) \in \bigoplus_{i=1}^{s_k} Au'_{l_i(k)}$$

dır. Buradan $k\in K$ için

$$\chi(k) = \{l_1(k), l_2(k),\ldots, l_s(k)\}$$

yardımıyla $\chi : K \to \wp(L) := \{L' \subset L \mid |L'| < \infty\}$ dönüşümü tanımlayabiliriz. ψ örten olduğundan $\bigcup_{k\in K} \chi(k) = L$ dir. Buradan dolayı L ve K sonsuz olduğundan

$$\beta_i = |L| \leq \sum_{k\in K} |\chi(k)| \leq |K| . \aleph_0 = |K| = \alpha_i$$

dir. Dolayısıyla $\beta_i \leq \alpha_i$ dir. Simetriden $\alpha_i \leq \beta_i$ olduğu ψ^{-1} yardımıyla hemen elde edilir. Sonuç olarak her $j\in J$ için $\alpha_i=\beta_i$ elde edilir. Her $i\in I$ için $\alpha_i=\beta_i$ ise $M\cong M'$ olduğu açıktır.

1.25. Tanım

$M, N, K\in {}_A\mathfrak{M}$, $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$ modül homomorfilerinin bir ikilisine N de tamdır denir: $\Leftrightarrow$ Kerg=İmf,

$M_o, M_1, \ldots, M_n \in {}_A\mathfrak{M}$, $M_o \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow, \ldots \xrightarrow{f_{i-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$

modül homomorfilerin dizisine tamdır denir:$\Leftrightarrow$ $\text{İmf}_i=\text{Kerf}_{i+1}$ $i=1,..,n-1$

Modül homomorfilerinin $\ldots \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$

sonsuz dizisi tamdır denir:$\Leftrightarrow$ Her $i\in\mathbb{Z}$ için $\text{Kerf}_{i+1}=\text{Imf}_i$ dir.

(*) $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$ ${}_A\mathfrak{M}$ biçimindeki bir tam diziye bir kısa tam dizi denir. (*) dizisi tam ise f bire-bir g örtendir. Bu durumda $M/_{\text{Kerf}} \cong \text{İmf}$ ve Kerf=0 olduğundan $M\cong\text{İmf}=\text{Kerg}$ dir.

1.26. Tanım

$M\in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian (Notherian) dır:$\Leftrightarrow$ $\Lambda(M)$ deki her azalan zincir (her artan zincir) sonludur. Diğer bir ifade ile her,

$M_o \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_k \supseteq \cdots$ $(N_o \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_k \subseteq \cdots)$

zincirlerine sırasıyla azalan zincir (artan zincir) koşulunu gerçekliyor denir: $\Leftrightarrow$ $\exists m\in\mathbb{N}$ öyleki her $i\in\mathbb{N}$ için

$M_m = M_{m+i}$ $i\geq 0$ $(N_m=N_{m+i}$ $i\geq 0)$

dır.

$\Lambda(M)$ azalan zincir koşulunu gerçekliyor (D.C.C) sa Artinian, artan zincir koşulunu gerçekliyor (A.C.C) sa Notheriandır.

M Artinian (Notherian) dır:$\Longleftrightarrow$ $\Lambda(M)$ in boştan farklı her altkümesinin minimal (maksimal) elemanı vardır. Genelde Artinian ve Notherian özelliklerin her biri diğerinden bağımsızdır.

Örneğin ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \in {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ Notheriandır. Ancak Artinian değildir. $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere

$$\mathbb{Z} \supsetneqq p\,\mathbb{Z} \supsetneqq p^2\mathbb{Z} \supsetneqq \ldots \supsetneqq p^n\mathbb{Z} \supsetneqq \ldots$$

azalan zinciri sonlu değildir.

$$\mathbb{Z}(p^{\infty}) := \{\frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z}\ \ n \in \mathbb{N}\}/_{\mathbb{Z}} < Q/_{\mathbb{Z}}$$

Artiniandır, ancak Notherian değildir. Çünkü

$$<\frac{1}{p}> \subsetneqq <\frac{1}{p^2}> \subsetneqq \ldots \subsetneqq <\frac{1}{p^n}> \subsetneqq \ \ldots$$

artan zinciri sonlu değildir.

1.27. Lemma

$M \in {}_{A}\mathfrak{M}$ olmak üzere N, M_1, $M_2 \in \Lambda(M)$, $M_1 \subseteq M_2$ olsun. Bu takdirde

$$0 \longrightarrow M_2 \cap N/_{M_1 \cap N} \longrightarrow M_2/_{M_1} \longrightarrow M_2+N/_{M_1+N} \longrightarrow 0$$

dizisi tamdır.

İspat : Modülarlık ve I. ve II. modül izomorfizim teoremlerinden

$$M_2+N/_{M_1+N} = M_2+(M_1+N)/_{M_1+N} \cong M_2/_{(M_2+(M_1+N))\cap(M_1+N)}$$

$$= M_2/_{M_1+(M_2\cap N)} \cong (M_2/M_1)/_{(M_1+M_2\cap N)/M_1} \quad \text{ve}$$

$$M_1+(M_2\cap N)/_{M_1} \cong (M_2\cap N)/_{M_1\cap(M_2\cap N)} = M_2\cap N/_{M_1\cap N}$$

dir.

Dolayısıyla $f: M_2\cap N/_{M_1\cap N} \longrightarrow M_2/M_1$ ve $g: M_2/M_1 \longrightarrow M_2+N/_{M_1+N}$ dönüşümleri için f bire-bir, g örten olup İmf=Kerg dir.

1.28 Lemma

$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ $_{A}\mathfrak{M}$ bir tam dizi olsun ...... (1)

M Artinian (Notherian) dır $:\Longleftrightarrow$ N ve P nin her ikiside Artinian (Notherian) dır.

İspat : "$\Longrightarrow$" (1) Dizisi tam olduğundan $N\in\Lambda(M)$ ve $P=M/N$ olduğunu varsaymak herhangi bir kısıtlama değildir. $\Lambda(N)$ $\Lambda(M)$ in bir altkafesi olduğundan M Artinian (Notherian) ise N Artinian (Notherian) olacağı açıktır. $\Lambda_N(M)$ $\Lambda(P)$ e kafes izomorf (1.9) ve $\Lambda_N(M)$ $\Lambda(M)$ in bir altkafesi olduğundan M Artinian (Notherian) ise P Artinian (Notherian) dır.

"$\Longleftarrow$" $M_o\supset M_1\supset \ldots\supset M_n\supset \ldots$ $\Lambda(M)$ de azalan bir zincir olsun.

$$M_o+N/_N \supset M_1+N/_N\supset\ldots\supset M_n+N/_N\supset \ldots$$

M/N in altmodüllerinin azalan bir zinciridir. $M/_N$ Artinian olduğundan $\exists t\in\mathbb{N}$ öyleki her $n\geq t$ için $M_n+N/_N=M_t+N/_N$ dir. Buradan her $n\geq t$ için $M_n+N = M_t+N$ dir.

$$M_o\cap N\supset M_1\cap N\supset\ldots\supset M_n\cap N\supset\ldots$$

N in altmodüllerinin azalan bir zinciridir. N Artinian olduğundan $\exists r \in \mathbb{N}$ öyleki her $m \geq r$ için $M_m \cap N = M_r \cap N$ dir.
$k := \text{maks}\,\{t, r\}$ olsun. Her $n \geq k$ için

(1). $M_n + N = M_k + N$, (2) $M_n \cap N = M_k \cap N$

dir. Özellikle

(1)'. $M_{k+1} + N = M_k + N$, (2)' $M_{k+1} \cap N = M_k \cap N$

dir. Buradan

$$M_k = M_k \cap (M_k + N) = M_k \cap (M_{k+1} + N) \overset{(*)}{=} M_{k+1} + (M_k \cap N) \quad (*, M_k \subset M_{k+1})$$

$$= M_{k+1} + (M_{k+1} \cap N) = M_{k+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla M Artiniandır.

N ve P nin her ikiside Notherian olması durumunda ispat benzer şekilde verilir.

1.29. Lemma

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian ve Notherian olsun. Bu taktirde

$$0 = M_o \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

altmodül zinciri M_{i+1}/M_i $i < n$ basit olacak biçimde vardır.

İspat : $M=0$ halinde durum açıktır. $M \neq 0$ olsun. M in Artinian olması gerçeğini kullanarak M in

$$0 = M_o \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M, \quad M_{i+1}/M_i \quad i < n$$

basit olacak biçimde bulacağız. M basit ise $0 \subset M$ aranan zincirdir

$N \in \Lambda(M) \setminus \{0\}$ keyfi ve $\Lambda^*(N) = \Lambda(N) \setminus \{N\}$ olsun.

$0 \in \Lambda^*(N)$ olduğundan $\Lambda^*(N) \neq \emptyset$ dir. $N' \in \Lambda^*(N)$ maksimal olsun. $N'/N \neq 0$ ve basittir. $f:\Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$, $f(N)=N'$ (seçme aksiyomuna göre böyle bir N' seçebiliriz). $\varphi:\mathbb{N} \longrightarrow \Lambda(M)$, $\varphi(0)=M$ $\varphi(n+1) = f(\varphi(n)) = \varphi(n)'$ $n \geq 1$ tanımlansın. $M_i := \varphi(i)$ olarak tanımlanırsa bu taktirde $M \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n \supset \ldots$ inşadan dolayı azalan zincirdir. M Artinian olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $M_i = M_n$ $i \geq n$, $M_{n+1} = M_n' = f(M_n)$ olduğundan $M_{n+1} = M_n$, f in tanımı ile bu ancak $M_n = 0 = M_{n+1}$ olmasıyla mümkündür. ℓ bu koşulu gerçekleyen minimal pozitif tamsayı olsun. (Yani $M_\ell = 0$, $M_{\ell-1} \neq 0$)

$$M \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{k-1} \supset \ldots \supset M_{\ell-1} \supset M_\ell = 0$$

dır. M_i $\Lambda(M_{i-1})$ in bir maksimal elemanı olduğundan M_{i-1}/M_i $(i \geq 1)$ basittir. Bundan dolayı

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_{\ell-1} \supset M_\ell = 0, \quad M_{i-1}/M_i \quad 1 \leq i \leq \ell$$

basit olan dizidir.

1.30. Tanım

$0=M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ zincirine M in bir esas serisi denir: $\Longleftrightarrow$ M_{i+1}/M_i $0 \leq i < n$ basittir. M_{i+1}/M_i bölüm modüllerine serinin esas faktörleri denir.

1.31 JORDAN HÖLDER TEOREMİ

$0=M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$ ve $0=M_0' \subset M_1' \subset \ldots \subset M_{k-1}' \subset M_k = M$ $M \in {}_A\mathfrak{M}$ modülünün iki esas serisi olsun. Bu taktirde $n=k$ ve $\exists \pi \in S_{n-1}$ öyleki

$$M'_{j+1}/M'_j \quad M_{\pi(j)+1}/M_{\pi(j)} \qquad j<n$$

dir.

İspat: n üzerinden tümevarım kullanalım. n=0 ise M=0 olup buradan k=0 dır. n>0 olsun ve aşağıdaki zinciri gözönüne alalım.

$$0=M'_o\cap M_{n-1}\subseteq M'_1\cap M_{n-1}\subseteq\cdots\subseteq M'_k\cap M_{n-1}=M_{n-1}=M'_o+M_{n-1}\subseteq M'_1+M_{n-1}\subseteq\cdots\subseteq M'_k+M_{n-1}=M_n$$

1.27 den $j<k$ için

$$0\longrightarrow M'_{j+1}\cap M_{n-1}/M'_j\cap M_{n-1}\longrightarrow M'_{j+1}/M'_j\longrightarrow M_{j+1}+M_{n-1}/M'_j+M_{n-1}\longrightarrow 0$$

dizisi tamdır. M'_{j+1}/M'_j basit olduğundan M'_{j+1}/M'_j

$$M'_{j+1}\cap M_{n-1}/M'_j\cap M_{n-1}\quad,\quad M'_{j+1}+M_{n-1}/M'_j+M_{n-1}$$

den tam birine izomorftur ve diğer faktörler sıfırdır. Aynı zamanda M_n/M_{n-1} basit olduğundan $\exists$tam bir $i<k$ öyleki

$$M_{n-1}=M'_i+M_{n-1}\subset M'_{i+1}+M_{n-1}=M_n$$

dir. Böylece

$$M_n/M_{n-1}\cong M'_{i+1}/M'_i$$

dir ve buradan

$$0=M'_o\cap M_{n-1}\subset M'_1\cap M_{n-1}\subset\cdots\subset M'_{i-1}\cap M_{n-1}\subset M'_i\cap M_{n-1}$$

$$=M'_{i+1}\cap M_{n-1}\subset\cdots\subset M'_k\cap M_{n-1}=M_{n-1}\ ,$$

M_{n-1} in bir esas serisidir. Tümevarım hipotezinden dolayı $n-1=k-1$ olup buradan $n=k$ ve $\exists\pi:\{0,1,\ldots,i-1,\ i+1,\ldots,k-1\}\to\{0,1,\ldots,\ n-2\}$ tam eşlemesi öyleki her $j\neq i$ için

$$M'_{j+1}/M'_j\cong M_{\pi(j)+1}/M_{\pi(j)}$$

dir. $\bar{\Pi}:\{0,1,\ldots, i-1,i,i+1,\ldots,k-1\} \to \{0,1,2,\ldots,k-2, k-1\}$

$$\bar{\Pi}(j) := \begin{cases} \pi(j), & j\neq i \\ n-1 & j=i \end{cases}$$

tanımlanırsa $\bar{\Pi}$ tam eşleme olup istenilen iddia gerçekleşmiş olur.

$M \in {}_A\mathfrak{M}$, N_i, $N_j' \in {}_A\mathfrak{M}$ basit $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq k$ öyleki $M = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i = \bigoplus_{j=1}^{k} N_j'$ olsun. Jorden-Hölder Teoreminden

$$0 \subset N_1 \subset N_1 \oplus N_2 \subset \ldots \subset \bigoplus_{i=1}^{n} N_i = M \text{ ve } 0 \subset N_1' \subset N_1' \oplus N_2' \subset \ldots \subset \bigoplus_{j=1}^{k} N_j' = M$$

esas seriler olup $N_j' \cong N_{\pi(j)}$ $j=1,\ldots,n$ dir.

Notasyon: $M \in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian ve Notherian olsun. 1.29 dan M bir esas seriye sahiptir ve bu serinin uzunluğu Jordan-Hölder Teoremi ile bir tek olarak belirlidir. M in bir esas serisindeki esas faktörlerin sayısına M in esas uzunluğu denir ve $\ell(M)$ ile gösterilir. Bu tanımın çok açık iki sonucu $\ell(M)=0 \Longleftrightarrow M=0$, $\ell(M)=1 \Longleftrightarrow M$ basittir.

1.28 in açık bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

1.32. Sonuç

$M, N, P \in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian ve Notherian modüller olsun. $0 \to N \to M \to P \to 0$ modül homomorfilerinin bir tam dizisi ise $\ell(M) = \ell(N) + \ell(P)$ dir.

1.33. Önerme

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit olsun. Bu taktirde aşağıdakiler birbirine denktir.

i) M sonlu üretenli A-modüldür.

ii) Her bir N_i basit olmak üzere $(0 \leq m < \infty)$

$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$

dir.

iii) M Artiniandır

iv) M Notheriandır.

v) $\exists m < \infty$ öyleki $M_o \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k$ $\Lambda(M)$ de sonlu kesin azalan bir zincir ise $k \leq m$ dir.

İspat : M yarıbalit olduğundan $\exists J$ indis kümesi öyleki her bir $j \in J$ için N_j basit olmak üzere $M = \bigoplus_{j \in J} N_j$ ayrışımı mevcuttur.

i) $\Longrightarrow$ ii) Her bir $j \in J$ için N_j basit olduğundan bir $u_j \in N_j$ için $N_j = Au_j$ olup $M = \bigoplus_{j \in J} Au_j$ dir.

$X := \{u_j \mid j \in J\}$

kümesi M i üretir. M sonlu üretenli olduğundan $|X| = |J| < \infty$ dır.
$m := |J| < \infty$ alınırsa $M = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$ elde edilir.

ii) $\Longrightarrow$ i) 1.11 den açıktır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) ve iii) $\Longrightarrow$ İv) 1.28 ve tümevarımla elde edilir.

v) gerçekleniyorsa M in Artinian ve Notherian olacağı açıktır.

M Artinian ve Notherian ise M in altmodüllerinin azalan bir dizisi en çok $\ell(M)+1$ uzunluktadır. (1.32 ve Tüme varımla).Önermedeki ifadelerin bazıları keyfi modüller için doğrudur. iii) ve iv) ün eşdeğeri v) dir. Aksine $M \in {}_A\mathfrak{M}$ Notherian ve sonsuz üretenli olsaydı $|J| > \infty$ olmak üzere $\{m_j \mid j \in J\}$ üretenlere sahiptir. Bu durumda $Au_1 \subset Au_2 \subset \ldots$ kesin artan zinciri elde edilirki bu M in Notherianlığına aykırıdır.

Şimdi sonlu üretenli yarıbasit modüllerin bir karakterizasyonunu verelim.

1.34. Tanım

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun

$$\bigcap_{N \in Maks(\Lambda(M), \subseteq)} N \in \Lambda(M)$$

e M in radikali denir ve radM ile gösterilir. Eğer M in $N \in Maks(\Lambda(M), \subseteq)$ olacak biçimde hiç bir altmodülü yoksa $radM = \bigcap_{\emptyset} N = M$ dir.

1.35. Lemma

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun

i) $radM \in \Lambda(M)$,

ii) $N \in \Lambda(M)$, $rad(M/N)=0$ ise $radM \subseteq N$,

iii) $rad(M/radM)=0$ dır.

İspat: i) $radM = \bigcap_{N \in Maks(\Lambda(M), \subseteq)} N$ ve $(\Lambda(M), \subseteq)$ kafes olduğundan $radM \in \Lambda(M)$ dir.

ii) $(\Lambda_N(M), \subseteq) \cong (\Lambda(M/N), \subseteq)$ in bir açık sonucudur.

iii) (ii) nin bir açık sonucudur.

1.36 Lemma

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit ise $radM=0$ dır.

İspat: M yarıbasit olduğundan $\exists \{N_i \mid i \in J,\ N_i \text{ basit}\} \subset \Lambda(M)$ öyleki

$M=\bigoplus_{i\in J} N_i$ dir. $M_j := \bigoplus_{i\neq j} N_i$ tanımlanırsa $N_j \cong M/M_j$ basit olup $\operatorname{rad}M \subseteq \bigcap_{j\in J} M_j = 0$ elde edilir. Buradan $\operatorname{rad}M=0$ dır.

1.37. Önerme

$M\in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. M sonlu üretenli yarıbasittir $\Longleftrightarrow$ M Artinian ve $\operatorname{rad}M=0$ dır.

İspat: "$\Longrightarrow$" M sonlu üretenli yarıbasit ise 1.33 den M Artiniandır. 1.36. dan $\operatorname{rad}M=0$ dır.

"$\Longleftarrow$" M Artinian ve $\operatorname{rad}M=0$ olsun. $M\neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $\operatorname{rad}M=0$ olduğundan $\exists\{N_i \mid i\in J\}\in \operatorname{Maks}(\Lambda(M),\subseteq)\neq \emptyset$ öyleki her $i\in J$ için $\bigcap_{i\in J} N_i = 0$ dır. Artinianlık özelliği

$$\{N_{i_1}\cap N_{i_2}\cap \dots \cap N_{i_k} \mid 1_1, i_2, \dots, i_k \in J\}$$

ailesinin $N_1\cap N_2\cap \dots \cap N_m$ minimal elemanının varlığını garanti eder. Buradan

$$N_1\cap N_2\cap \dots \cap N_m = 0$$

olmak zorundadır. Aksine ($\operatorname{rad}M=0$) en az bir $i\in J$ için

$$\bigcap_{j=1}^{m} N_j \not\subset N_i$$

dir. Buradan

$$N_1\cap N_2\cap \dots \cap N_m \cap N_i \subsetneqq N_1\cap N_2\cap \dots \cap N_m$$

olurki bu $N_1\cap N_2\cap \dots \cap N_m$ in minimalliğine aykırıdır, O halde

$$N_1\cap N_2\cap \dots \cap N_m = 0$$

dır. Her $u\in M$ için

$$\psi(u) = (u+N_1,\ u+N_2, \dots,\ u+N_m)$$

yardımı ile tanımlanan $\psi : M \longrightarrow M/_{N_1} \oplus M/_{N_2} \oplus \ldots \oplus M/_{N_m}$ dönüşümünün bir A-modül homomorfisi olduğu açıktır. Ker $\psi = \bigcap_{i=1}^{m} N_i = 0$ olup M yarıbasit olan $\bigoplus_{i=1}^{m} M/N_i$ modülünün bir altmodülüne izomorftur. 1.19 dan M yarıbasittir. 1.33 den M sonlu üretenlidir.

YARIBASİT CEBİRLERİN YAPISI

1.38. Tanım

A bir R-cebir olsun. A yarıbasittir:$\Longleftrightarrow$ ${}_A A$ yarıbasittir. A yarıbasit ise her bir $N_i \in \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A) = \Lambda(A^A)$ olmak üzere $A = \bigoplus_{i \in J} N_i$ dir. ${}_A A$ 1_A ile üretildiğinden A-sonlu üretenli A-modüldür. 1.33 den $|J| < \infty$ dır.

A sol Artinian (Notherian)dır: $\Longleftrightarrow$ ${}_A A$ Artinian (Notherian) dır. Diğer bir ifade ile $\Lambda^{\ell}(A)$ kafesi azalan (artan) zincir koşulunu gerçekler.

1.37 nin açık bir sonucu olarak aşağıdaki önerme verilebilir.

1.39. Önerme

A yarıbasittir $\Longleftrightarrow$ A Artinian ve $\mathrm{rad}_A A = 0$ dır.

F bir cisim A bir F-cebir öyleki $|A:F| < \infty$ olsun. $\Lambda^{\ell}(A) \subset \Lambda({}_F A)$, $|{}_F A:F| < \infty$ olduğundan A Artinian ve Notheriandır. Bu durumda A yarıbasittir: $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rad}_A A = 0$ dır.

1.40. Önerme

A yarıbasit R-cebir olsun. Bu taktirde her $M \in {}_A\mathfrak{M}$ için M yarıbasittir. Üstelik $N \in {}_A\mathfrak{M}$ keyfi basit bir modül ise $\exists L \in \Lambda^{\ell}(A)$ minimal öyleki $N \cong L$ ve $\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ kümesi basit A-modüllerin bir kümesidir.

İspat : Her serbest A-modül ${}_{A}A$ nın kopyelerinin bir direkt toplamına izomorfiktir. Buradan serbest A-modüller 1.20 ile yarıbasittir. Her A-modül bir serbest A-modülün homomorfik resmi olduğundan önermenin ilk kısmı 1.19 ile açıktır.

1.11 ile her basit $N\in{}_{A}\mathfrak{M}$ için $\exists I\in \mathrm{Maks}\Lambda^{\ell}(A)$ öyleki $N\cong{}_{A}A/I$ dır. ${}_{A}A$ yarıbasit olduğundan I $\Lambda^{\ell}(A)$ da bir L komplimentine sahiptir. $I\in\mathrm{Maks}\Lambda^{\ell}(A)$ olduğundan $L\in\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ ve $N\cong{}_{A}A/I= I\oplus L/_{I}\cong L$ dir. Böylece $\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ kümesi tüm basit A-modüllerin izomorfi sınıflarının sınıf temsilcilerini oluşturur.

1.1, 1.4 ve 1.19 dan aşağıdaki sonuç açıktır.

1.41 Sonuç

A yarıbasit R-cebir olsun. Bu taktirde A nın her homomorfik resmide yarıbasittir.

1.42 Lemma

A_1, A_2 R-cebirler ve $A=A_1 \dot{+} A_2$ onların iç çarpımı $M\in\Lambda^{\ell}(A_1)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler verilir.

i) $M\in\Lambda^{\ell}(A)$

ii) $\mathrm{End}_{A}(M) = \mathrm{End}_{A_1}(M)$

iii) $\mathrm{Hom}_{A}(M,A)=\mathrm{Hom}_{A}(M,A_1)=\mathrm{Hom}_{A_1}(M,A_1)$

iv) $\Lambda({}_{A_1}M) = \Lambda({}_{A}M)$

v) $M\in\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A) \Longleftrightarrow M\in\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A_1)$

vi) $\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A) = \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A_1)\cup\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A_2)$

İspat : (Pierce Richard S. 1982, s.43)

1.43. Sonuç

A_1, A_2 yarıbasit R-cebirler ise $A_1 \dotplus A_2$ yarıbasit R-cebirdir.

İspat : $\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A_1 \dotplus A_2) = \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A_1) \cup \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A_2)$ olduğundan durum açıktır

1.44. Lemma

A bir R-cebir $N \in \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ ve $x \in A$ olsun. Bu taktirde $Nx=0$ veya $Nx \in \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$, $Nx \underset{A}{\cong} N$ dir.

İspat : Her $y \in N$ için

$$\alpha_x(y) = yx$$

ile tanımlanan $\alpha_x : N \longrightarrow Nx$ dönüşümü bir A-modül epimorfisidir. 1.12 den ispat açıktır.

1.45 Lemma

A bir R-cebir ve $N \in \Lambda^{\ell}(A)$ öyleki $N^k=0$ olsun. Eğer P basit A-modül ise, bu taktirde $NP=0$ ve üstelik $N \subseteq \mathrm{rad}_A A$ dır.

İspat : P basit ve $NP<P$ olduğundan $NP=0$ veya $NP=P$ dir. $NP=P$ olamaz çünkü,

$$P = NP = N^2P = \ldots = N^kP = 0$$

olurki bu P nin basitliğine aykırıdır. O halde $NP=0$ dır. Özellikle $I \in \mathrm{Maks}\,\Lambda^{\ell}(A)$ ve ${}_A A/_I$ basit olup $({}_A A/I)\cdot N=0$ dır. Buradan $N \subseteq I$ dır. Dolayısıyla

$$N \subseteq \bigcap_{I \in \mathrm{Maks}\,\Lambda^{\ell}(A)} I = \mathrm{rad}_A A$$

dır.

1.46. Önerme

A yarıbasit R-cebir N_1, $N_2 \in Min\Lambda^{\ell}(A)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar denktir.

i) $N_1 \cong N_2$;

ii) $N_1 \cdot N_2 \neq 0$;

iii) $\exists x \in A$ öyleki $N_2 = N_1 x$

dir.

İspat : i) $\Longrightarrow$ ii) $\psi : N_2 \rightarrow N_1$ verilen A-modül izomorfisi olsun. $\psi(N_1 N_2) = N_1 \psi(N_2) = N_1^2 \neq 0$ (1.45 ve $rad_A A = 0$) olduğundan $N_1 N_2 \neq 0$ dır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $N_1 N_2 \neq 0$ olsun. Bu taktirde $\exists x \in N_2$ öyleki $N_1 x \neq 0$ dır. N_2 basit ve $N_1 x \in \Lambda(N_2) \setminus \{0\}$ olduğundan $N_2 = N_1 x$ elde edilir.

iii) $\Longrightarrow$ i) 1.44 den açıktır.

1.47. Lemma

A yarıbasit R-cebir $N_i \in Min\Lambda^{\ell}(A)$ olmak üzere ${}_A A = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$ olsun. Eğer $N \in Min\Lambda^{\ell}(A)$ ise $\exists i \in \{1,2,\ldots,m\}$ öyleki $N \cong N_i$ dir.

İspat : ${}_A A$ yarıbasit olduğundan 1.18 den $\Lambda^{\ell}(A)$ komplimentlenebilirdir. $\exists M \in \Lambda^{\ell}(A)$ öyleki ${}_A A = N \oplus M$ dir. 1.40 dan M yarıbasittir. 1.31 den bir $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ için $N \cong N_i$ dir.

Aşağıdaki sonuç 1.40 ve 1.47 den açıktır.

1.48. Sonuç

A yarıbasit R-cebir ise basit A-modüllerin izomorfi sınıflarının sayısı sonludur.

Yarıbasit cebirler basit cebirlerin bir genelleştirmesidir.

Ançak basit cebirler genelde yarıbasit değildir. Şimdi yarıbasit olan basit cebirleri, basit olan yarıbasit cebirleri karakterize edeceğiz.

A bir R-cebir olsun. Bu taktirde A basittir:$\Leftrightarrow \Lambda(A)=\{0,A\}$ dır.

1.49. Önerme

A basit bir R-cebir olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) A yarıbasittir.

ii) A sol Artiniandır.

iii) A bir minimal sol ideale sahiptir.

İspat : i) $\Longrightarrow$ ii) 1.37 den açıktır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $A\neq 0$ ve $A\in\Lambda^{\ell}(A)\neq\emptyset$ dır. A sol Artinian olduğundan minimum koşulunu gerçekler. Buradan $Min(\Lambda^{\ell}(A)\setminus\{0\}\subseteq)\neq\emptyset$ dır.

iii)$\Longrightarrow$ i) $N\in Min(\Lambda^{\ell}(A)\setminus\{0\},\subseteq)$ keyfi olsun. A basit $0\neq N\subset NA\in\Lambda(A)$ olduğundan $NA=A$ dır. $A=\sum_{x\in A} Nx$ yazabiliriz. $Nx\neq 0$ ise $Nx\in Min(\Lambda^{\ell}(A)\setminus\{0\},\subseteq)$ olduğundan 1.18 ile A yarıbasittir.

$M,N\in Min\Lambda^{\ell}(A)$ olsun. $M\sim N :\Longleftrightarrow M\cong N$ dir. $\sim Min\Lambda^{\ell}(A)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\overline{Min\Lambda^{\ell}(A)}$ ile denklik sınıflarının kümesini gösterelim.

1.50 Önerme

A yarıbasit R-cebir olsun. Bu taktirde aşağıdakiler birbirine denktir.

i) A basittir,

ii) $|\overline{\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)}|=1$,

iii) Tüm basit A-modüller izomorftur.

İspat : i)$\Longrightarrow$ ii) A basit ve N_1, $N_2 \in \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ olsun. Bu taktirde $N_1A=N_2A=A$ dır. 1.49 ile $(N_1.N_2)A=N_1(N_2A)=N_1A=A\neq 0$ olduğundan $N_1N_2\neq 0$ olup 1.46 ile $N_1\cong N_2$ dir. Buradan $|\overline{\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)}|=1$ dir.

iii)$\Longrightarrow$ i) $|\overline{\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)}|=1$, $J\in\Lambda(A)$ ve $J\neq 0$ olsun. A yarıbasit olduğundan J yarıbasittir. $\exists N\in\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ öyleki $N\subseteq J$ dir. A nın tüm minimal idealleri izomorf olduğundan ve 1.46 ile bunlar $0\neq Nx$, $x\in A$ biçimindedir. Buradan $Nx\subset Jx\subseteq J$ dir. $A=\sum\limits_{x\in A} Nx\subseteq J$, $A=J$ ve 1.18 den A basittir.

ii)$\Longrightarrow$ iii) $|\overline{\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)}|=1$ olsun. 1.40 ile her basit A-modül M A nın bir minimal sol idealine izomorftur. Buradan tüm basit A-moduller izomorftur.

iii)$\Longrightarrow$ ii) Tüm basit A-moduller izomorf olsun. A yarıbasit olduğundan basit A-modüllerin izomorfi sınıflarının temsilcileri olarak A nın minimal sol idealleri karşımıza çıktığından A nın tüm minimal sol idealleri izomorftur. Buradan $|\overline{\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)}|=1$ dir.

1.51. Sonuç

A basit bir cebir ve $N\in\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ olsun. Eğer $M\in{}_A\mathfrak{M}$ ise $\exists!\,\alpha$ kardinal sayısı öyleki $M\cong\bigoplus\alpha N$ dir.

İspat : $\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)\neq\emptyset$ olduğundan 1.49 ile A yarıbasittir. 1.50 ile $|\overline{\mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)}|=1$ dir. 1.24 ile $M\cong\bigoplus\alpha N$ olacak biçimde bir α kardinali vardır.

1.52. Sonuç

A sonlu boyutlu basit F-cebir ve M_1, $M_2 \in {}_A\mathcal{M}$ olsun. Bu taktirde $M_1 \cong M_2 \Longleftrightarrow |M_1:F| = |M_2:F|$ dir.

İspat: $|A:F| < \infty$ olduğundan A Artiniandır. Buradan $\exists N \in \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$ öyleki $|N:F| < |A:F| < \infty$ dır. 1.51 den $\exists \alpha, \beta$ kardinal sayıları öyleki $M_1 \cong \bigoplus \alpha N$ ve $M_2 \cong \bigoplus \beta N$ olacak biçimde bir tek olarak belirlidir. 1.24 den $M_1 \cong M_2 \Longleftrightarrow \alpha = \beta$ dır. $|N:F| < \infty$ olduğundan

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow |M_1:F| = \alpha |N:F| = \beta |N:F| = |M_2:F|$$

elde edilir.

1.53 Örnek

D bir bölme cebiri olmak üzere $A = M_n(D)$ olsun. A nın bir D-cebir olacağı açıktır. $1 \leq i \leq n$ için $N_i = A\varepsilon_{ii}$ yazalım

i) $N_i \in \mathrm{Min}\Lambda^{\ell}(A)$

ii) ${}_A A = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$

iii) $1 \leq i, j \leq n$ için $N_i \cong N_j$

iv) ${}_A A$ basit ve yarıbasittir.

v) $\mathrm{End}_A(N_i) \cong D$ $1 \leq i \leq n$ dir.

İspat: ε_{ij} (i,j) hücresi 1_D her $(r,s) \neq (i,j)$ için (r,s) hücresi sıfır olan nxn li matris olmak üzere

$$\{\varepsilon_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

Mn(D) nin bir D-tabanı olduğunu biliyoruz. $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{rs} = \delta_{js}$ dir.

$N_i \in \Lambda^{\ell}(A)$ olduğu açıktır. $\alpha = (z_{jk}) \in M_n(D)$ keyfi olsun. Bu taktirde

$$\alpha = \sum_{j,k} z_{jk}\varepsilon_{jk}$$

dır. Bundan dolayı

$$\alpha\varepsilon_{ii} = (\sum_{j,k} z_{jk}\varepsilon_{jk})\varepsilon_{ii} = \sum_{j} z_{ji}\varepsilon_{ji}$$

dır. Buradan

$$N_i = \sum_j D\varepsilon_{ji} = \bigoplus_j D\varepsilon_{ji} \quad \text{ve} \quad M_n(D)=A= \bigoplus_{i,j} D\varepsilon_{ji} = \bigoplus_i N_i$$

dir. (D-modül ayrışımı). Bir $z_j \neq 0$ olmak üzere $\beta = \sum_j z_j\varepsilon_{ji}$ ise keyfi bir $w_t \in D$ için

$$(\sum_t w_t z_j^{-1}\varepsilon_{tj})\beta = \sum_{t,j} w_t z_j^{-1}\varepsilon_{tj} z_j \varepsilon_{ji} = \sum_{t,j} w_t \varepsilon_{tj}\varepsilon_{ji} = \sum_t w_t\varepsilon_{ti} \in N_i$$

yani $0 \neq \beta \in N_i$ ise $A\beta = N_i$ dir. 1.11 ile N_i basittir. Daha fazla olarak

$$N_j = A\varepsilon_{jj} = A(\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ij}) = (A\varepsilon_{ji})\varepsilon_{ij} = N_i\varepsilon_{ij}$$

dir. 1.46 dan $N_i \cong N_j$ dir. Buradan i-iv elde edilir. 1.50 den A basittir. Her $z \in D$ için

$$\lambda_z(\alpha) = \alpha . z$$

yardımıyla tanımlanırsa $\lambda_z \in End_A(N_i)$ dir. Her bir $z \in D$ için

$$\lambda(z) = \lambda_z$$

ile $\lambda : D \to End_A(N_i)$ dönüşümü monomorfidir. $\varphi \in End_A(N_i)$ için $\varphi(\varepsilon_{ii}) := \beta\varepsilon_{ii}$ diyelim. Bu taktirde bazı $z \in D$ için

$$\varphi(\varepsilon_{ii}) = \varphi(\varepsilon_{ii}^2) = \varepsilon_{ii}\,\varphi(\varepsilon_{ii}) = \varepsilon_{ii}\beta\varepsilon_{ii} = z\varepsilon_{ii}$$

dir. Sonuç olarak $\alpha \in N_i$ ise

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha\varepsilon_{ii}) = \alpha\varphi(\varepsilon_{ii}) = \alpha . z\varepsilon_{ii} = \alpha . z = \alpha\lambda_z$$

dir. $\varphi = \lambda_z$ elde edilir. Buradan $D \cong End_A(N_i)$ dir.

Şimdi Wedderburn teoremine hazırlık amacı ile genelleştirilmiş matris notasyonunu verelim.

A bir R-cebir ve $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ A-sol modüllerin bir dizisi olmak üzere

$$[\mathrm{Hom}_A(M_j, M_i)] := \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_A(M_1,M_1), & \mathrm{Hom}_A(M_2,M_1), \ldots, \mathrm{Hom}_A(M_n,M_1) \\ \mathrm{Hom}_A(M_1,M_2), & \mathrm{Hom}_A(M_2,M_2), \ldots, \mathrm{Hom}_A(M_n,M_2) \\ & \cdots \\ \mathrm{Hom}_A(M_1,M_n), & \mathrm{Hom}_A(M_2,M_n), \ldots, \mathrm{Hom}_A(M_n,M_n) \end{bmatrix}$$

$$:= \{(\varphi_{ij}) \mid \varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}_A(M_j, M_i) \quad 1 \leq i, j \leq n\}$$

yazalım. Her $(\varphi_{ij}), (\psi_{jk}) \in [\mathrm{Hom}_A(M_j, M_i)]$ $1 \leq i, j \leq n$, $\lambda \in R$ ve

$$\chi_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}\psi_{jk} \in \mathrm{Hom}_A(M_k, M_i) \quad \text{olmak üzere}$$

$$(\varphi_{ij}) + (\psi_{jk}) = (\varphi_{rs} + \psi_{rs}), \quad (\varphi_{ij})(\psi_{jk}) = (\chi_{ik}) \quad \text{ve}$$

$$\lambda(\varphi_{ij}) = (\lambda \varphi_{ij})$$

yardımıyla $[\mathrm{Hom}_A(M_j, M_i)]$ de toplama, çarpma ve skalerle çarpma tanımlansın.

1.54. Önerme

$$[\mathrm{Hom}_A(M_j, M_i)] \underset{R}{\cong} \mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right)$$

dir.

İspat : $M := M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ olmak üzere her bir $1 \leq j \leq n$ için $\Pi_j : M \to M_j$, $K_j : M_j \to M$ sırası ile bu direkt toplamla ilgili projeksiyonlar ve injeksiyonlar olsunlar. Bu taktirde

$$\sum_{j=1}^{n} K_j \Pi_j = id_M, \quad i \neq j \text{ için } \Pi_i K_j = 0, \quad \Pi_j K_j = id_{M_j}$$

koşulları gerçekleneceği açıktır. Her bir $\varphi \in End_A(M)$ için

$$\alpha(\varphi) = [\Pi_i \varphi K_j]$$

yardımıyla tanımlanan $\alpha : End_A(M) \to [Hom_A(M_j, M_i)]$ dönüşümü bir R-cebir izomorfisidir. Gerçekten φ, φ_1, $\varphi_2 \in End_A(M)$ ve $z \in R$ keyfi olmak üzere

$$\text{i)}\ \alpha(\varphi_1 + \varphi_2) = [\Pi_i(\varphi_1 + \varphi_2) K_j] = [\Pi_i \varphi_1 K_j + \Pi_i \varphi_2 K_j]$$

$$= [\Pi_i \varphi_1 K_j] + [\Pi_i \varphi_2 K_j] = \alpha(\varphi_1) + \alpha(\varphi_2)$$

$$\text{ii)}\ \alpha(\varphi_1 \varphi_2) = [\Pi_i \varphi_1 \varphi_2 K_k] = [\Pi_i \varphi_1 (\sum_{j=1}^{n} K_j \Pi_j) \varphi_2 K_k]$$

$$= [\sum_{j=1}^{n} (\Pi_i \varphi_1 K_j)(\Pi_j \varphi_2 K_k)] = [\Pi_i \varphi_1 K_j][\Pi_j \varphi_2 K_k]$$

$$= \alpha(\varphi_1)\alpha(\varphi_2)$$

$$\text{iii)}\ \alpha(z\varphi) = [\Pi_i \lambda_z \varphi K_j] \overset{(*)}{=} [\lambda_z \Pi_i \varphi K_j]$$

$$= \lambda_z [\Pi_i \varphi K_j] = z\,\alpha(\varphi). \qquad (*, \lambda_z \in Z(R))$$

$$\alpha = [\Pi_i \varphi K_j], \quad \beta(\varphi_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} K_i \varphi_{ij} \Pi_j$$

$\beta : [Hom_A(M_j, M_i)] \to End_A(M)$ olmak üzere

$$\beta\alpha = id_{End_A(M)}, \quad \alpha\beta = id_{[Hom_A(M_j, M_i)]}$$

dir. Dolayısıyla α bir R-cebir izomorfisidir.

1.55 Sonuç

A bir R-cebir ve $M \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. Bu taktirde

$$End_A(\oplus nM) \cong M_n(End_A(M))$$

dir.

İspat : 1.54 de $M=M_1=M_2= \dots =M_n$ alınırsa

$$[Hom_A(M,M)] \cong End_A(\oplus nM)$$

dir. $Hom_A(M,M)=End_A(M)$ olduğundan

$$M_n(End_A(M)) = [End_A(M)] \cong End_A(\oplus nM)$$

dir.

1.56. Sonuç

A bir R-cebir ve M serbest n- üretenli A-sol modül olsun. Bu taktirde

$$End_A(M) \cong M_n(A)$$

dır.

İspat : M serbest n- üretenli A- sol modül olduğundan $M\cong \oplus n_A A$ olduğu açıktır. 1.55 den $End_A(M) \cong M_n(End_A({}_A A))$ dır. Diğer yandan

$$\psi(\varphi) = \varphi(1)$$

yardımıyla tanımlanan $\psi: End_A({}_A A) \to A$ dönüşümü bir R-cebir izomorfisidir. Buradan

$$End_A(M) \cong M_n(A)$$

elde edilir.

1.57. Sonuç

A bir R-cebir, $M_1, M_2, \dots, M_n \in {}_A\mathfrak{M}$ öyleki $i\neq j$ için $Hom_A(M_i,M_j)=0$ olsun. Bu taktirde

$$End_A(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i) \cong End_A(M_1) \dotplus End_A(M_2) \dotplus \dots \dotplus End_A(M_n)$$

dir.

İspat : 1.54 den

$$\mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right) \cong \left[\mathrm{Hom}_A(M_j,M_i)\right] \overset{hip}{=} \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_A(M_1,M_1)\ 0\ldots 0 \\ 0\ .\ \mathrm{Hom}_A(M_2,M_2).0..0 \\ 0\ldots 0\ldots \mathrm{Hom}_A(M_n,M_n) \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right) \cong \mathrm{End}_A(M_1) \dot{+} \mathrm{End}_A(M_2) \dot{+} \ldots \dot{+} \mathrm{End}_A(M_n)$$

dir.

1.58 Wedderburn Yapı Teoremi

A sol (veya sağ) yarıbasit R-cebir olsun.

i) $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}^*$ ve $D_1, D_2, \ldots, D_r$ R- bölme cebirleri öyleki

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \dot{+} M_{n_2}(D_2) \dot{+} \ldots \dot{+} M_{n_r}(D_r) \quad \ldots\ldots\ (1)$$

dir.

ii) (1) koşulunu gerçekleyen (n_i, D_i) $(1 \leq i \leq r)$ ikilileri A ile izomorfi hariç tektürlü olarak tanımlanmıştır. ($(n_i, D_i) \cong (n_j, D_j)$: $\Longleftrightarrow$ $n_i = n_j$, $D_i \cong D_j$)

iii) Tersine $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}^*$ ve $D_1, D_2, \ldots, D_r$ R-bölme cebirleri ise $M_{n_1}(D_1) \dot{+} M_{n_2}(D_2) \dot{+} \ldots \dot{+} M_{n_r}(D_r)$ sol (sağ) yarıbasit R-cebiridir.

İspat: i) A sol yarıbasit ve $_A A = \langle 1_A \rangle$ olduğundan A Artiniandır ve izomorf olmayan minimal sol ideallerin sayısı sonludur. Bunlar $N_1, N_2, \ldots, N_r$ olsunlar. Bu taktirde 1.22 den

$${}_AA \cong \bigoplus_{i=1}^{n} n_iN_i$$

dir. 1.23 den $i \neq j$ için $\mathrm{Hom}_A(M_i, M_j)=0$ $(N_i \ncong N_j)$ dir. 1.57 ve 1.55 ile devamla

$$A \cong \mathrm{End}_A({}_AA) \cong \mathrm{End}_A(\bigoplus_{i=1}^{r} n_iN_i) \cong \mathrm{End}_A(n_1N_1) \dotplus \mathrm{End}_A(n_2N_2) \dotplus \ldots \dotplus \mathrm{End}_A(n_rN_r)$$

$$\cong M_{n_1}(\mathrm{End}_A(N_1)) \dotplus M_{n_2}(\mathrm{End}_A(N_2)) \dotplus \ldots \dotplus M_{n_r}(\mathrm{End}_A(N_r))$$

$$\cong M_{n_1}(D_1) \dotplus M_{n_2}(D_2) \dotplus \ldots \dotplus M_{n_r}(D_r),\ D_i := \mathrm{End}_A(N_i) \quad 1 \leqq i \leqq r$$

dir. 1.12 ile $D_i (1 \leqq i \leqq r)$ R-bölme cebiridir. Aynı sonuç sağ yarıbasit cebirler için kolaylıkla elde edilir.

ii) C_i R-bölme cebiri, $A_i \cong M_{k_i}(C_i)$ $1 \leqq i \leqq s$ $A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_s$ olduğunu kabul edelim. 1.53 ve 1.42 ile A_i A-modül olarak A nın bir minimal $P_i \in \Lambda^{\ell}(A)$, $P_i \subseteq A_i$ idealinin k_i kopyesinin direkt toplamına izomorf ve $C_i \cong \mathrm{End}_{A_i}(P_i) = \mathrm{End}_A(P_i)$ dir. Her bir A_i A nın P_i yi içeren bir ideali olduğundan 1.46 dan açık olarak $i \neq j$ için $P_i \ncong P_j$ dir. Basit modüllerin direkt toplamlarının ayrışımlarının tekliğinden ve 1.24 den $s=r$ ve uygun bir sıralama ile

$$k_i = n_i,\ P_i \cong N_i \text{ ve } C_i \cong \mathrm{End}_A(P_i) \cong \mathrm{End}_A(N_i) = D_i$$

dir.

iii) 1.53 ve onun sağ benzeri ile R-cebir $M_{n_i}(D_i)$ lerin herbiri sol ve sağ yarıbasittir. 1.43 ile

$$M_{n_1}(D_1) \dotplus M_{n_2}(D_2) \dotplus \ldots \dotplus M_{n_r}(D_r)$$

sol ve sağ yarıbasittir.

Wedderburn yapı teoremi sol yarıbasit, sağ yarıbasit cebirlerin izomorfi sınıflarının aynı olduğunu ve $\dotplus_{i=1}^{s} M_{n_i}(D_i)$ lerin bu sınıfların temsilcilerini oluşturduğunu söyler. Üstelik basit cebirler için sol, sağ zincir koşullarının denk olduğunu ifade eder.

1.59 Sonuç

A sol (veya sağ) Artinian R-cebiri basittir $\Longleftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}^*$ ve D R-bölme cebiri öyleki $A \cong M_n(D)$ dir. Bu durumda n tek ve D izomorfi hariç olmak üzere bir tek olarak belirlidir.

Öyle F cisimleri vardırki F üzerinde sonlu boyutlu bölme cebirleri komutatif olmak zorundadır. Bu durumda yapı teoremi sonlu boyutlu basit cebirler hakkında D_i lerin cisim olması gerektiği sonucunu verir. Bu sonuç F cebirsel kapalı olduğunda aşağıdaki lemma ile verilir.

1.60 Lemma

F cebirsel kapalı bir cisim olsun. Eğer D F üzerinde sonlu boyutlu D bölme cebiri ise D=F dir.

İspat : $|D:F|=m$ olsun. Eğer $t \in D$ ise $1, t, t^2, \ldots, t^m$ lineer bağlıdır. Buradan $\exists \mathrm{ind}(t,F)=f(x) \in F[x]$ minimal polinom öyleki $f(t)=0$ dır. D bir bölme cebiri ve f(x) in derecesinin minimalliğinden f(x) F üzerinde indirgenemezdir. F cebirsel kapalı olduğundan $\exists a \in F$ öyleki $f(x)=x-a$ dır. Buradan

$f(t) = t-a=0$, $t=a$ dır. $t \in F$, D=F dir.

1.60 ve 1.50 in açık bir sonucu olarak, aşağıdaki sonucu verebiliriz.

1.61. Sonuç

F cebirsel kapalı bir cisim olsun. Sonlu boyutlu F-cebir A yarıbasittir $\iff$ $1\leq n_1\leq\ldots\leq n_r$ A nın izomorfi tipi ile bir tek olarak belirli olmak üzere

$$A\cong M_{n_1}(F)\dotplus M_{n_2}(F)\dotplus\ldots\dotplus M_{n_r}(F)$$

dir. Üstelik A basittir $\iff$ $|A:F|=n^2$ olmak üzere

$$A\cong M_n(F)$$

dir.

1.62. Maschke Teoremi

G sonlu bir grup, F bir cisim olsun. Bu taktirde FG grup cebiri yarıbasittir $\iff k(F)\nmid G$ dir.

İspat: "$\Longleftarrow$" $k(F)\nmid |G|=n$ olsun. $(n.1_F)^{-1}\in F$ dir. FG nin yarıbasit olduğunu gösterebilmek için $\Lambda^{\ell}(FG)$ nin komplimentlenebilir olduğunu göstermek yeterlidir. $M\in\Lambda^{\ell}(FG)$ keyfi olsun.

$$\exists ?\ N\in\Lambda^{\ell}(FG) \quad \text{öyleki} \quad FG=M\oplus N$$

dir. Bunu göstermek için, bir $\rho\in Hom_{FG}(FG,FG)$, $\rho\downarrow M=id_M$ olacak biçimde mevcut olduğunu göstermeye denktir. Böyle bir ρ mevcutsa

$$N = Ker\rho = (id_M-\rho)FG,\ M\cap N = 0 \quad \text{ve } FG=M\oplus N$$

dir. M F-vektör uzayı FG nin bir altuzayı olduğu açıktır. $m_1,m_2,\ldots,m_s$ M in F-tabanı ve B FG nin $\{m_1,m_2,\ldots,m_s\}$ i içeren tabanı olsun. Bu taktirde

$$FG = \langle m_1,m_2,\ldots,m_s\rangle + \langle x\,|\,x\in B\setminus\{m_1,m_2,\ldots,m_s\}\rangle = M+N$$

dir. Π FG nin M üzerine F-projeksiyonu olsun.

$\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\lambda_x^{-1}\pi\lambda_x : FG \to FG$ tanımlansın. Bu taktirde $\rho\in Hom_F(FG,FG)$ olduğu açıktır. $m\in M\in \Lambda^{\ell}(FG)$ olmak üzere

$$\rho(m) = \left(\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\lambda_x^{-1}\pi\lambda_x\right)(m) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\lambda_x^{-1}(\pi(\lambda_x(m)))$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}x^{-1}(\pi(xm)) \overset{(*)}{=} |G|^{-1}\sum_{x\in G}x^{-1}(xm) \quad (*, \pi(xm)=xm)$$

$$= |G|^{-1}\sum_{x\in G} = |G|^{-1}|G|m = 1_F.m = m$$

dir. Buradan $\rho{\downarrow}M=id_M$ dir. $m\in M$ ve $g\in G$ için

$$\rho(gm)=|G|^{-1}\sum_{x\in G}(\lambda_x^{-1}\pi\lambda_x)(gm) = |G|^{-1}\sum_{x\in G}(\lambda_x^{-1}\pi\lambda_x\lambda_g)(m)$$

$$=|G|^{-1}\sum_{x\in G}(\lambda_x^{-1}\pi\lambda_{xg})(m) = |G|^{-1}\sum_{x\in G}(\lambda_g\lambda_g^{-1}\lambda_x^{-1}\pi\lambda_{xg})(m)$$

$$=|G|^{-1}\sum_{x\in G}(\lambda_g\lambda_{(xg)^{-1}}\pi\lambda_{(xg)})(m) = |G|^{-1}\sum_{t=xg\in Gg=G}\lambda_g(\lambda_t^{-1}\pi\lambda_t)(m)$$

$$=(\lambda_g)|G|^{-1}\sum_{t\in G}\lambda_t^{-1}\pi\lambda_t)(m) = \lambda_g(\rho(m)) = g\rho(m)$$

dir. Buradan $\rho\in Hom_{FG}(FG,FG)$ elde edilir.

"$\Longleftarrow$" $k(F)\,||G|=n$ olduğunu kabul edelim. Her $x\in FG$ için $nx=\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n\text{ defa}}=0$ dır. $e:=\sum_{x\in G}x\in FG\setminus\{0\}$ olsun. Bu taktirde her $y\in G$ için

$$ey = \sum_{x\in G}xy = \sum_{xy\in Gy}xy = e$$

olup buradan

$$e^2 = \sum_{y\in G}ey = \sum_{y\in G}e = |G|e = ne = 0$$

dır. $0 \neq N := \hat{F}G$ diyelim. Bu taktirde $N^2=0$ dır. 1.45 den $0 \neq N \subseteq \mathrm{rad}_{FG} FG$ dir. 1.41 den FG yarıbasit değildir. Dolayısıyla FG yarıbasit ise $k(F) \nmid |G|$ dir.

Sonlu bir G grubunun klasik grup gösterimlerinde $\mathbb{C}G$ grup cebiri kullanılır. Üstelik bu teoremin pek çok sonucu F, $k(F) \nmid G$ olan cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere FG grup cebirine genelleştirilebilir. Bu hipotez Maschke Teoremi ve 1.61 den uygun $n_1, n_2, \ldots, n_r$ doğal sayıları için

$$FG \cong M_{n_1}(F) \dot{+} M_{n_2}(F) \dot{+} \ldots \dot{+} M_{n_r}(F)$$

dir. Buradaki $n_i (1 \leq i \leq r)$ doğal sayılarına G nin indirgenemez gösterimlerinin dereceleri denir.

Diğer bir ifade ile $n_i (1 \leq i \leq r)$ ler basit FG-modüllerin F-boyutlarıdır. Bu dereceler G nin yapısı ile belirlidir. Ancak onları veren basit formül yoktur. Diğer yandan FG nin basit faktörlerinin r sayısı G nin standart bir özelliği ile çakışır.

1.63 Sonuç.

G sonlu bir grup, F $k(F) \nmid |G|$ olan cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere FG grup cebiri F üzerine $n_1, n_2, \ldots, n_r$ li full matris cebirlerinin $M_{n_1}(F) \dot{+} M_{n_2}(F) \dot{+} \ldots \dot{+} M_{n_r}(F)$ toplamına izomorftur. Burada r G deki eşlenik sınıflarının sayısıdır.

İspat : 1.62 den ve 1.61 ile devamla bir r için $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}^*$ doğal sayılarının

$$FG \cong M_{n_1}(F) \dot{+} M_{n_2}(F) \dot{+} \ldots \dot{+} M_{n_r}(F)$$

olacak biçimde mevcut olduğunu biliyoruz.

$$Z(FG) \cong Z(M_{n_1}(F)) \dotplus Z(M_{n_2}(F)) \dotplus \ldots \dotplus Z(M_{n_r}(F)) \cong \underbrace{F+F+\ldots+F}_{r}$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. Dolayısıyla $|Z(FG):F|=r$ dir.

$K_1, K_1, \ldots, K_m$ G nin farklı eşlenik sınıfları olmak üzere

$$x_i \in K_i = \{y^{-1}x_i y \mid y \in G\}$$

olduğundan $\emptyset \neq K_i \subset G$ dir. $z_i = \sum_{x \in K_i} x \in FG$ olsun.

$$g^{-1} z_i g = \sum_{x \in K_i} g^{-1}xg = \sum_{g^{-1}xg \in g^{-1}K_i g = K} g^{-1}xg = z_i$$

olduğundan $z_i \in Z(FG)$ $1 \leq i \leq m$ dir.

$$\omega = \sum_{x \in G} a_x x \in Z(FG) \iff y^{-1}\omega y = \omega \iff a_{yxy^{-1}} = a_x \text{ dir.}$$

$$\omega = \sum_{x \in G} a_x x = \sum_{i=1}^{m} a_{x_i}\Big(\sum_{t \in K_i} t\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_{x_i} z_i$$ dir. Bundan dolayı

$$Z(FG) = \bigoplus_{i=1}^{m} Fz_i, \quad |Z(FG):F| = m$$

dir. Buradan $m=r$ dir.

Problem:

Her $|G|<\infty$ için $\mathbb{Z}G$ yarıbasit değildir.

Çözüm : $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$ ($a_i > 0$ $1 \leq i \leq s$) olsun. Bu taktirde her bir $1 \leq i \leq s$ için

$$\bar{k}_{p_i}\Big(\sum_{g \in G} n_g g\Big) = \sum_{g \in G} \bar{n}_g g$$

yardımıyla tanımlanan $\bar{k}_{p_i} : \mathbb{Z}G \to (\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})G$ dönüşümü halkaların bir homomorfisidir.

$$x = \sum_{g \in G} n_g g \in \operatorname{Ker} \bar{k}_{p_i} \iff \sum_{g \in G} \bar{n}_g g = 0 \iff \bar{n}_g = 0,\ g \in G \ (G.(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})G$$

nin $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ – tabanı olduğundan)

$$\Longleftrightarrow \quad p_i \mid n_g \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{g\in G} n_g g = x \in p_i\mathbb{Z}\, G \Rightarrow \operatorname{Ker} \bar{k}_{p_i} = p_i\mathbb{Z}G$$

Buradan

$$\mathbb{Z}G/_{p_i\mathbb{Z}G} \cong (\mathbb{Z}/_{p_i\mathbb{Z}})\, G \cong \mathbb{Z}_{p_i} G \qquad (\mathbb{Z}/_{p_i\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_{p_i})$$

dir. Maschke Teoreminden ($k(\mathbb{Z}_{p_i}) = p_i \mid |G|$) $\mathbb{Z}_{p_i}G$ yarıbasit değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}G/p_i\mathbb{Z}G$ yarıbasit değildir. (Aksi taktirde $\mathbb{Z}G$ yarıbasit olsaydı $\mathbb{Z}G/_{p_i\mathbb{Z}G}$, $p_i\mathbb{Z}G$ yarıbasit olacaktı).

BÖLÜM II

ARTİNİAN CEBİRLER VE AYRIŞAMAZ MODÜLLER

2.1. Lemma

M_1, $M_2 \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. $\psi \in Hom_A(M_1, M_2)$ ise $\psi(radM_1) \subseteq radM_2$ ve ψ $M_1/_{radM_1}$ den $M_2/_{radM_2}$ e bir $\bar{\psi}$ homomorfisi tanımlar.

İspat : $N \in \Lambda(M_2)$ keyfi olsun. Bu taktirde $\psi^{-1}(N) \in \Lambda(M_1)$ dir. Her $x+\psi^{-1}(N) \in M_1/_{\psi^{-1}(N)}$ için

$$\bar{\psi}(x+\psi^{-1}(N)) = \psi(x)+N$$

yardımıyla tanımlanan $\bar{\psi}: M_1/_{\psi^{-1}(N)} \longrightarrow M_2/_N$ dönüşümü A-modül homomorfisidir.

$$\bar{\psi}(x+\psi^{-1}(N)) = \psi(x)+N = N \iff \psi(x) \in N \iff x \in \psi^{-1}(N)$$

dir. $Ker\bar{\psi} = \psi^{-1}(N)$ olup $\bar{\psi}$ bir monomorfidir. $N \in Maks\Lambda(M_2)$ ise $\psi^{-1}(N) = M_1$ veya $M_1/_{\psi^{-1}(N)} \cong M_2/_N$ basittir. Bu iki durumda da $radM_1 \subseteq \psi^{-1}(N)$ olup $\psi(radM_1) \subseteq N$ dir. Buradan

$$\psi(radM_1) \subseteq \bigcap_{N \in Maks\Lambda(M_2)} N = radM_2$$ elde edilir.

Zorn Lemması ve 2.1. den aşağıdaki önerme kolaylıkla elde edilir.

2.2. Önerme

A trivialden farklı bir R-cebir ise $rad_A A$ A nın ikiyanlı özidealidir.

2.3. Sonuç

A sol Artinian R-cebir olsun. Bu taktirde $A/\mathrm{rad}_A A$ yarıbasit R-cebirdir.

İspat : A sol Artinian olduğundan $A/_{\mathrm{rad}_A A}$ sol Artiniandır. 1.35 den $\mathrm{rad}_A(A/_{\mathrm{rad}_A A}) = 0$ olduğundan $A/_{\mathrm{rad}_A A}$ yarıbasittir. 1.4 den $A/_{\mathrm{rad}_A A} \in {}_{A/_{\mathrm{rad}_A A}}\mathfrak{M}$ modüldür. 1.35 den $\mathrm{rad}_{A/\mathrm{rad}_A A}(A/_{\mathrm{rad}_A A})=0$ dır. Sonuç olarak 1.39 dan $A/_{\mathrm{rad}_A A}$ yarıbasit R-cebirdir.

$\mathrm{rad}A \in \Lambda(A)$ olduğundan $A/_{\mathrm{rad}A}$ nın R-cebir olacağı açıktır.

Aşağıdaki sonuç 2.1 den açıktır.

2.4. Sonuç

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ ise $(\mathrm{rad}_A A)M \subseteq \mathrm{rad}M$ dir.

2.5. Lemma

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ olsun. $\forall u \in M$ için aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) $u \in \mathrm{rad}M$

ii) $N \in \Lambda(M)$ öyleki $Au+N=M$ ise $N=M$ dir.

İspat : i) $\Longrightarrow$ ii) $u \notin \mathrm{rad}\, M$ olsun. Bu taktirde $\exists N \in \mathrm{Maks}\Lambda(M)$ öyleki $u \notin N$ dir. Bu durumda

$$N \subsetneqq Au+N = M \neq N$$

dir. O halde $u \in \mathrm{rad}M$, $N \in \Lambda(M)$ öyleki $Au+N=M$ ise $N=M$ dir.

ii) $\Longrightarrow$ i) Bir $N \in \Lambda(M)$ için $Au+N=M \neq N$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $u \notin N$ dir.

$S:=\{L\in\Lambda(M) \mid N \subseteq L,\ u\notin L\}$

olsun. $N\in S$ olduğundan $S\neq\emptyset$ dir. Zorn Lemması ile elde edilen maksimal eleman P olsun. Bu taktirde $u\notin P$ ve $N\subseteq P$ dir. $P\subsetneq Q\subsetneq M$ ise $u\notin Q$, $Q\in S$ olup $P=Q$ dır. $u\in Q$ ise $M=Au+N\subset Q$, $M=Q$ elde edilir. Buradan $M/_P$ basit $u\notin P$ ve $\mathrm{rad}M\subseteq P$, $u\notin \mathrm{rad}M$ dır.

2.6. Modüller İçin Nakayama Lemması

$M\in {}_A\mathcal{M}$, $P\in\Lambda(M)$ öyleki M in $P+N=M$ olan tüm altmodülleri için $N=M$ gerçeklensin ... (1)

Bu taktirde $P\subseteq \mathrm{rad}M$ dir.

Tersine olarak $P\in\Lambda(\mathrm{rad}M)$, P veya M sonlu üretenli ise bu taktirde (1) gerçeklenir.

İspat : Kabul edelimki $P\not\subset \mathrm{rad}M$ olsun. Bu taktirde $\exists u\in P$ öyleki $u\notin \mathrm{rad}M$ dir. 2.5 den $\exists N\in\Lambda(M)$, M/N basit öyleki $u\notin N$ dir. Buradan

$$N\neq M = Au+N \subseteq P+N$$

olurki bu hipotezle çelişir. O halde $P\subseteq \mathrm{rad}M$ dir.

Tersine olarak $P\in\Lambda(\mathrm{rad}M)$ öyleki $P+N=M$ olsun. M sonlu üretenli ise P nin sonlu üretenli bir Q-altmodülü $Q+N=M$ olacak biçimde mevcuttur. Böylece P yi sonlu üretenli kabul edebiliriz.

$$P = Au_1+Au_2+\ldots+Au_n$$

olsun. Bu taktirde

$$M=Au_1+Au_2+\ldots+Au_n+N=Au_2+\ldots+Au_n+N=\ldots=Au_n+N = N$$

dir. Dolayısıyla her $N\in\Lambda(M)$ için $N+P=M$ ise $M=N$ dir.

Bir modülün radikali bir grubun Frattini altgrubuna benzerdir ve Nakayama Lemması Frattini altgrubunun standart karakterizasyonunun bir başka şeklidir.

2.7. Cebirler İçin Nakayama Lemması

A R-cebir $P \in \Lambda^{\ell}(A)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) $P \subseteq \mathrm{rad}_A A$;

ii) $M \in {}_A\mathfrak{M}$ sonlu üretenli ve $N \in \Lambda(M)$, $N+PM=M$ ise $N=M$;

iii) $G = \{1+x \mid x \in P\} \subset A^{o}$

dır.

İspat : i) $\Longrightarrow$ ii) 2.6 ve 2.5 den açıktır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $x \in P$, $y=1+x$ olsun. Bu taktirde

$$1 = y-x \in Ay+P = A$$

dır. ${}_A A$ sonlu üretenli olduğundan ii) den $Ay=A$ ve özellikle bir $z \in A$ için

$$1 = zy = z(1+x) = z+zx$$

dir. Buradan $z = 1-zx \in G = \{1+x \mid x \in P\}$ dir. ($P \in \Lambda^{\ell}(A)$, $x \in P$). Buradan G nin her elemanı bir sol inverse sahiptir. Benzer şekilde G nin her elemanı bir sağ inverse sahiptir. Buradan G bir grup olup $G \subseteq A^{o}$ dır.

iii) $\Longrightarrow$ i) $x \in P$ ve $x \notin \mathrm{rad}_A A$ olsun. Bu taktirde $\exists N \in \Lambda^{\ell}(A)$, ${}^{A}A/N$ basit öyleki $x \notin N$ dir. Buradan $Ax+N \supsetneqq N$, $Ax+N=A$ dır. $z \in A$ ve $y \in N$ için $1=zx+y$ dir. $1-zx=y \in N$ $(zx \in P)$,

$y \in A^{o}$ olurki bu $A^{A}/_{N}$ in basitliğine aykırıdır. Bundan dolayı $x \in P$ ise $x \in rad_{A}A$ dır.

$N=0$ ve $P=rad_{A}A$ alınması ile elde edilen aşağıdaki sonuç Nakayama Lemması olarak bilinir.

2.8. Sonuç

$M \in {}_{A}\mathfrak{M}$ sonlu üretenli öyleki $(rad_{A}A)M=M$ ise $M=0$ dır. Diğer bir ifade ile birim elemanlı bir R-cebir A nın radikali basit A-modüllerin sol Annilatörünün arakesitidir.

2.9. Lemma

A bir R-cebir ise $rad_{A}A = radA_{A}$ dır.

İspat : $rad_{A}A \in \Lambda(A)$ ve $\{1+x \; x \in radA_{A}\} \subset A^{o}$ olduğu 2.2 ve 2.7 den açıktır. 2.7 iii)-i) nin sonucu olarak $radA_{A} \subseteq rad_{A}A$ dır..(1)
Benzer şekilde $rad_{A}A \subseteq radA_{A}$ dır... (2)

(1), (2) den $rad_{A}A = radA_{A}$ dır.

2.10. Tanım

A bir R-cebir olsun. A nın J(A) Jacabson radikali $J(A) := rad_{A}A$ idealidir. 2.9 ve 2.7 den aşağıdaki önerme kolaylıkla elde edilir.

2.11. Önerme

A bir R-cebir olsun. A nın J(A) Jacabson radikali aşağıdaki koşulları gerçekleyen ikiyanlı idealidir.

i) $J(A):=\bigcap_{M\in \text{Maks}\,\Lambda^r(A)} M$

ii) $J(A):=\bigcap_{N\in \text{Maks}\,\Lambda^\ell(A)} N$

iii) $J(A):=\{x\in A \mid \forall\ y\in A$ için $1+xy\in A^o\}$

iv) $J(A):=\{x\in A \mid \forall\ y\in A$ için $1+yx\in A^o\}$

Bundan sonra R-cebir A nın radikali sözcüğünden Jacabson radikali anlaşılacaktır.

2.12. Sonuç

$M\in\Lambda^\ell(A)\cup\Lambda^r(A)$ öyleki her $x\in M$ için $1+x\in A^o$ ise

$M\subseteq J(A)$, Eğer $rad(A/_M)=0$ ise $M=J(A)$

dır.

İspat : $B:=\{1+x \mid x\in M\}\subset A^o$ dır. 2.7 den $M\subseteq rad_A A=J(A)$ dır. 1.35 den $rad(A/M)=0$ olduğundan $J(A)\subseteq M$ dir. Buradan $M=J(A)$ dır.

2.13. Tanım

A bir R-cebir ve $x\in A$ olsun. x nilpotenttir $\iff$ $\exists n\in\mathbb{N}^*$ öyleki $x^n=0$ dır.

2.14. Sonuç

$M\in\Lambda^\ell(A)\cup\Lambda^r(A)$ öyleki her $x\in M$ nipolent olsun. Bu taktirde

$M\subseteq J(A)$

dır.

İspat : Her $x\in M$ nilpotent ise $\exists n\in\mathbb{N}$ öyleki $x^n=0$ dır.

$$(1+x)\left(\sum_{i=0}^{n}(-x)^i\right) = \sum_{i=0}^{n}(-x)^i(1+x)) = 1$$

dir. Buradan her $x \in M$ için $1+x \in A^o$ dır. 2.12 den $M \subseteq J(A)$ dır.

2.15 Lemma

A, B R-cebirler olsun.

i) $\theta : A \to B$ örten cebir homomorfisi ise

$\theta(J(A)) \subseteq J(B)$,

ii) $J(A \dot{+} B) = J(A) \dot{+} J(B)$

dir.

İspat : i) 2.1 ve 1.1 den

$$\theta(J(A)) = \theta(\mathrm{rad}_A A) \subseteq \mathrm{rad}_A B = \mathrm{rad}_B B = J(B)$$

dir.

ii) Her $(a,b) \in A \dot{+} B$ için

$$\Pi_A((a,b)) = a \text{ ve } \Pi_B(a,b)) = b$$

yardımıyla tanımlanan $\Pi_A : A \dot{+} B \to A$, $\Pi_B : A \dot{+} B \to B$ dönüşümleri R-cebir epimorfisidir. i) den

$$\Pi_A(J(A \dot{+} B)) \subseteq J(A), \quad \Pi_B(J(A \dot{+} B)) \subseteq J(B)$$

olup buradan

$$J(A \dot{+} B) \subseteq J(A) \dot{+} J(B) \quad \ldots (1)$$

dir.

Diğer yandan $x \in J(A)$, $y \in J(B)$ keyfi olsun. 2.11 den $1_A + x \in A^o$ ve $1_B + y \in A^o$, $(1_A + x, 1_B + y) = (1_A, 1_B) + (x,y) \in (A \dot{+} B)^o$ dır. Buradan $(x,y) \in J(A \dot{+} B)$ dir. Dolayısıyla

$J(A) \dot{+} J(B) \subseteq J(A \dot{+} B) \quad \ldots \quad (2)$

dir. (1), (2) den eşitlik açıktır.

2.16. Örnek

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ yarıbasit olsun. Bu taktirde $J(End_A(M))=0$ dır.

A yarıbasit ve M in sonlu üretenli olması halinde $End_A(M)$ yarıbasittir. Bu durumda kesinlikle radikal sıfırdır.

$\theta \in End_A(M) \setminus \{0\}$ olsun. 1.18 den $\exists N \in \Lambda(M)$, N basit öyleki $\theta(N) \neq 0$ dır. 1.12 den $N \cong \theta(N)$ dir. $\theta(N)$ basit M komplimentlenebilir olduğundan $\exists M' \in \Lambda(M)$ öyleki

$M = \theta(N) \oplus M'$

dir.

$\Pi : M \to M$, $\Pi(a+b) := a$, $\Pi^2 = \Pi$, $\Pi(M) = \theta(N) \cong N$ olacak biçimde mevcuttur. $\psi := (\theta \downarrow N)^{-1} \Pi$ olsun.

$\psi \in End_A(M)$, $\theta\psi = \Pi$, $\Pi \neq 0$, $\Pi(1-\theta\psi) = 0$

olduğundan $1-\theta\psi$ sıfır bölendir. Buradan $1-\theta\psi \notin (End_A(M))^{o}$

Dolayısıyla $\theta \notin J(End_A(M))$, 2.11 den $J(End_A(M))=0$ dır.

2.17. Önerme

A sol (veya sağ) Artinian cebir ise $\exists k \in \mathbb{N}$ öyleki

$J(A)^k = 0$

dır.

İspat : $J(A) \supseteq J(A)^2 \supseteq \ldots$ $\Lambda(A)$ da bir zincirdir. Sol (veya sağ) Artinianlık özellikten $\exists k \in \mathbb{N}$ öyleki

$J(A)^k = J(A)^{k+1}$

dir. Eğer $J(A)^k$ A-modül olarak sonlu üretenli ise 2.8 den $J(A)^k=0$ dır. Böylece A Artinian olduğu gibi Notherian ise önerme Nakayama Lemmasının kolay bir uygulamasıdır. Bir $k\in\mathbb{N}$ için $J(A)^k=0$ olduğunu göstermek için sol ideallerin azalan zincir koşulunu gerçeklediği varsayımı bazımız olacaktır.

$J(A)^k \neq 0$ olsun.

$$\mathcal{A} := \{M\in\Lambda^{\ell}(A) \mid M\neq 0,\quad J(A)M = M\}$$

olsun. $J(A)^k\in\mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A}\neq\emptyset$ dır. A Artinian olduğundan minimum koşulludur. Buradan $\min(\mathcal{A},\subseteq)\neq 0$ dır. $L\in\operatorname{Min}\mathcal{A}$ olsun. $L=J(A)L=J(A)^2L=\ldots=J(A)^kL$ dir. $\exists x\in L$ öyleki $J(A)^kx\neq\emptyset$ dır. $J(A)^kx\in\Lambda(L)$, $J(A)^kx\subset L$ dir.

$$J(A)(J(A)^kx) = J(A)^{k+1}x = J(A)^kx$$

dir. L nin minimalliğinden $L=J(A)^kx\subseteq A.x = L$ elde edilir. Dolayısıyla L sonlu üretenlidir. Bu sonuç Nakayama Lemması ile çelişir. Çünkü $0=N$ alınırsa $N+J(A)L=L$, $N=L$ elde edilir.

Aşağıdaki sonuç 2.17 ve 2.14 den açıktır.

2.18. Sonuç

A sol (veya sağ) Artinian cebir olsun. A nın keyfi bir sol (veya sağ) ideali için aşağıdaki koşullar denktir.

i) $M\subseteq J(A)$;

ii) Bir $k\in\mathbb{N}$ için $M^k = 0$;

iii) M in her elemanı nilpotenttir.

Bu sonuçla devamla sol veya sağ Artinian olan bir cebirin radikalindeki her elemanın nilpotent olacağı açıktır. Tersi doğru değildir. Yani nilpotent elemanlar radikalde olmayabilir.

Örneğin $n>1$ ve D bir bölme cebiri ve $M_n(D)$ $n\times n$ li matrislerin D-cebiri olsun. ε_{ij} (i,j) hücresi 1_D diğer tüm hücreler sıfır olmak üzere $i\neq j$ için ε_{ij} matrisleri nilpotenttir. Ancak $J(M_n(D))=0$ dır. Gerçekten $M_n(D)$ basit ve birim elemanlı olduğundan $J(M_n(D))\neq M_n(D)$ dir. Buradan $J(M_n(D))=0$ dır.

2.19 Önerme

A sol (veya sağ) Artinian cebir olsun. Eğer $M\in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian ise M Notheriandır.

İspat : $J:=J(A)$ olsun. A Artinian olduğundan 2.17 den $\exists k\in\mathbb{N}$ öyleki $J^k=0$ dır.

$S:=\{t\in N \mid J^t M=0\}$

olsun. $k\in S$ olduğundan $S\neq\emptyset$ dır. $\mathbb{N}$ iyi sıralanmış bir küme olduğundan $\min S$ vardır. $n:=\min S$ olsun. Bu taktirde $J^n M=0$ dır. İspatı n üzerinden tümevarımla tamamlayacağız. $n=0$ ise

$0 = J^o.M=A.M = M$

0 Notherian olduğundan ispat tamamlanır. $n=1$ olsun. $JM=0$ olup $Ann(M)\supseteq J$ dir. Buradan $M\in {}_{A/J}\mathfrak{M}$ dir. 2.3 den A/J yarıbasit olduğundan 1.40 dan $M\in {}_{A/J}\mathfrak{M}$ yarıbasittir. 1.33 den $M\in {}_{A/J}\mathfrak{M}$ Notheriandır. $(\Lambda({}_A M) = \Lambda({}_{A/J}M))$ $n>1$ ve $n-1$ için iddia doğru olsun. Tümevarım adımında 1.28 baz teşkil edecektir. $N:=J^{n-1}M\subsetneq M$ olsun. Bu taktirde N Artiniandır ve

$JN = J(J^{n-1}M) = J^n M = 0$

olup N Notheriandır. M/N Artinian ve $J^{n-1}(M/_N)=0$ olduğundan tümevarım kabulünden M/N Notheriandır. N ve M/N Notherian olduğundan M Notheriandır.

2.19 da $M=A\in{}_A\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}_A$ alınarak aşağıdaki sonuç hemen görülür.

2.20. Sonuç

A bir R-cebir öyleki A sol (sağ) Artinian olsun. Bu taktirde A sol (sağ) Notheriandır.

2.21. Sonuç

A sol Artinian R-cebir ve $M\in{}_A\mathfrak{M}$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar denktir.

i) M Artiniandır.

ii) M Notheriandır.

iii) M sonlu üretenlidir.

İspat: i) $\Longrightarrow$ ii) 2.19 dan ii) $\Longrightarrow$ iii) 1.33 den elde edilir.

iii) $\Longrightarrow$ i) $M=Au_1+Au_2+\ldots+Au_n$ olsun. Her $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\oplus n_A A$ için

$$\psi((x_1,x_2,\ldots,x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

ile tanımlanan $\psi:\oplus n_A A \longrightarrow M$ dönüşümü bir A-modül epimorfisidir. ${}_A A$ Artinian olduğundan 1.28 den $\oplus n_A A$ Artiniandır. Buradan $\oplus n_A A/_{Ker\psi}\cong M$ Artiniandır.

2.17 nin diğer bir uygulaması sonlu boyutlu cebirlerin nilpotentliğinin bir karakterizasyonudur. Wedderburn Teoreminin ispatı 2.17 üzerine bazdır. Yapı teoremi ve elemanter Lemma matrisler için iz dönüşümü kullanılarak elde edilir.

$\alpha=(\alpha_{ij})\in M_n(F)$ olmak üzere α nın izi diye $tr = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}\in F$ elemanına denir. $\alpha\in M_n(F)$ olmak üzere

$$tr(\alpha) = tr\alpha$$

yardımıyla tanımlanan $tr:M_n(F) \to F$ dönüşümünün F-lineer olduğu kolaylıkla elde edilir. α nilpotentse $tr\alpha=0$ dır. Bu adımların ilki tanımın kolay bir sonucudur. $\alpha^m=0$ ise α nın minimal polinomu $1\leq k\leq m$ olmak üzere x^k dır. Çünkü bu polinom x^m i böler ve karakteristik polinom $x^n-(tr\alpha)x^{n-1}+\ldots=x^n$ dir (minimal polinom ve karakteristik polinom aynı indirgenemez faktörlere sahiptir). Buradan $tr\alpha= 0$ dır.

2.22. Lemma

$M_n(F)$ i F-uzay olarak üreten nilpotent matrislerin hiç bir kümesi yoktur.

İspat : Aksine $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\in M_n(F)$ nilpotent matrisler ve $b_1,b_2,\ldots,b_r\in F$ $\varepsilon_{11}=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\ldots+b_r\alpha_r$ olacak biçimde mevcuttur. iz fonksiyonu F-lineer olduğundan

$$tr\varepsilon_{11} = tr(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\ldots+b_r\alpha_r)$$

dır. Buradan

$$1 = \sum_{i=1}^{r} b_i(tr\alpha_i) = \sum_{i=1}^{r} b_i.0 = 0$$

olurki bu bir çelişkidir. O halde $M_n(F)$ nin nilpotent olan bir F-üretici takımı olamaz.

2.23 Önerme

A sonlu boyutlu F-cebir ve B A nın nilpotent elemanlar tarafından üretilen çarpıma kapalı bir F-altuzayı olsun. Bu taktirde bir $k\in\mathbb{N}$ için $B^k=0$ dır.

İspat : İspatı iki adımda ele alabiriz.

1. Adım: F in cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz. Bunu görmek için $x_1, x_2, \ldots, x_m$ A nın $x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_k$, $c_{ijk} \in F$ olan bir bazı ve K F in cebirsel kapanışı olsun. K-cebir olan $A' := Kx_1 \oplus Kx_2 \oplus \ldots \oplus Kx_m$ $\{c_{ijk} \mid 1 \leq i,j,k \leq n\}$ yapı sabitleri ile tanımlıdır. Açık olarak A, ${}_F(A')$ in bir altcebiridir. Buradan dolayı B, ${}_F(B') := {}_F(KB)$ in bir altcebiridir. B nilpotent elemanlar tarafından F-uzay olarak üretildiğinden ${}_F(B')$ nilpotent elemanlar tarafından K-uzay olarak üretilir. Buradan ${}_F(B')$ F-uzay olarak nilpotent elemanlar tarafından üretilir. Böylece $(B')^k = 0$ gerçekleniyorsa $B^k = 0$ dır. Dolayısıyla F in cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz.

2. Adım : $B \in \Lambda(A)$ dır. Bu koşulu A için elde etmek, A yerine $B + F1_A$ almakla aynıdır. B çarpıma kapalı olduğundan $B \in \Lambda(B + F1_A)$ dir. İspatı tamamlamak için

3. Adım: A yarıbasit ise B=0 olduğunu göstermek yeterlidir. A yarıbasit değilse $A/J(A)$ yarıbasittir ve $B+J(A)/_{J(A)} \in \Lambda(A/_{J(A)})$ dır. $B+J(A)/_{J(A)}$ B nin bir homomorfik resmi olduğundan nilpotent elemanlar tarafından üretilir. Şu halde 3. Adım

$$B + J(A) = J(A)$$

haline dönüşür, yani $B \subseteq J(A)$ dır. 2.17 den bir $k \in \mathbb{N}$ için $B^k \subseteq J(A) = 0$ dır. Dolayısıyla A yı yarıbasit kabul edebiliriz. 1.61 (F-cebirsel kapalı) ile $A_i \cong M_{n_i}(F)$ $1 \leq i \leq t$ olmak üzere $A_i = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_t$ (A_i basit) yazabiliriz.
$\Pi_i : A \to A_i$ projeksiyon olsun. Her bir i için $\Pi_i(B) \in \Lambda(A_i) = \{0, A_i\}$ olduğundan $\Pi_i(B) = 0$ veya $\Pi_i(B) = A_i$ dir. $\Pi_i(B) = A_i$ ise

$A_i \cong M_{n_i}(F)$ nilpotent elemanlar tarafından üretilir. Bu ise 2.22 ile çelişir. Dolayısıyla $\Pi_i(B)=0$ dır. $B \subset Ker\Pi_i$ $1 \leq i \leq t$ dir. Buradan $B \subset \bigcap_{i=1}^{t} Ker\Pi_i = 0$, $B=0$ elde edilir.

F bir cisim ve G sonlu bir grup olduğu zaman FG grup cebirinin radikali hakkında ne söyleyebiliriz. Maschke Teoremi $k(F) \nmid |G|$ ise $J(FG)=0$ ifadesine denktir. Buradan dolayı $k(F)=p \neq 0$ ve $p \mid |G|$ olduğunu kabul edebiliriz.

2.22. Önerme

F bir cisim $k(F)=p \in \mathbb{P}$ olsun. Kabul edelimki G sonlu ve H G nin normal p-sylow altgrubu olsun. Bu taktirde

$$J(FG) = \sum_{x \in H-\{1\}} FG(x-1)$$

dir.

İspat : A:=FG yazalım Her $g \in G$ için

$$\Pi(g) = gH$$

ile tanımlanan $\Pi : G \to G/H$ dönüşümü grupların bir epimorfisidir.

$$\bar{\Pi}\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = \sum_{gH \in G/H} \lambda_g (gH)$$

ile tanımlanan $\bar{\Pi} : A=FG \to F(G/H)$ dönüşümünün bir F-cebir epimorfisi olacağı açıktır.

$$\{y_1H, y_2H, \ldots, y_mH\}$$

H nın G deki solyansınıflarının bir tam sistemi ise

$G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{m} y_iH$ ve $y \in G$ ise $\Pi(y) = \Pi(y_i) \iff y \in y_iH \iff y = y_i x$, $x \in H$

dır. Buradan dolayı $z = \sum_{y \in G} a_y y \in A$ için

$$\bar{\Pi}(z) = \sum_{y\in G} a_y \Pi(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{x\in H} a_{y_i x} \right) \Pi(y_i)$$

dir. Özellikle $\bar{\Pi}(z)=0$ ise $\sum_{x\in H} a_{y_i x}=0 \quad 1\leq i\leq m$ dir.

Bu gerçekleniyorsa $a_{y_i} = -\sum_{x\neq 1} a_{y_i x}$ dir. Buradan

$$z = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{x\in H} a_{y_i x} \right) \Pi(y_i) = \sum_{i=1}^{m} \left(a_{y_i} y_i + \sum_{x\neq 1} a_{y_i x} y_i x \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(-\sum_{x\neq 1} a_{y_i x} y_i + \sum_{x\neq 1} a_{y_i x} y_i x \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{x\neq 1} a_{y_i x} y_i (x-1)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{y_i x} y_i \left(\sum_{x\neq 1} (x-1) \right) \in \sum_{x\neq 1} A(x-1)$$

dir.

Tersine $z \in \sum_{x\in H-\{1\}} A(x-1)$ ise

$$\bar{\Pi}(z) \in \sum_{x\in H-\{1\}} \bar{\Pi}(A)(\Pi(x)-\Pi(1)) = 0$$

dır. Buradan dolayı $\operatorname{Ker}\bar{\Pi} = \sum_{x\in H-\{1\}} A(x-1) =: J$ dir. Buradan J A nın $A/J \cong F(G/H)$ olacak biçimde bir idealidir.

H G nin bir p-sylow altgrubu olduğundan $p \nmid |G:H|$ olup 1.62 den $F(G/H)$ yarıbasittir. Buradan $J(A) \subseteq J$ dir. $J \subseteq J(A)$ olduğunu göstermek bir $k\in\mathbb{N}$ için $J^k=0$ olduğunu göstermekle aynıdır.

$B=\sum_{x\in H-\{1\}} F(x-1)$ olsun. $B \subset A$ nın bir F-altuzayıdır. Aynı zamanda B çarpma işlemine kapalıdır. Çünkü $(x-1)(y-1)=(xy-1)-(x-1)-(y-1)$ dir.

$|H| = p^t$ ise $\kappa(F)=p$ olduğundan her $x\in H$ için

$$(x-1)^{p^t} = (x^{p^t}-1) = (1-1) = 0$$

dır. Buradan dolayı B nilpotent elemanlar tarafından üretilir.

2.23 den bir $k\in\mathbb{N}$ için $B^k=0$ dır. $J=AB$ olduğundan

$$J^k = (AB)^k = (AB)\cdot(AB)\ldots(AB) \subset B^k = 0$$

dır. Çünkü AB=BA dır. ($y(x-1)=(yxy^{-1}-1)y$ ve $yxy^{-1}\in H$, $x\in H$ $y\in G$ olduğundan).

$$(AB)^k = (AB)\cdot(AB).,...,(AB) = A^k B^k = A^k.0 = 0.$$

dır. Buradan $J^k = 0$ dır. Sonuç olarak

$$J = J(A) = \sum_{x\in H-\{1\}} FG(x-1)$$

dir.

2.25. Sonuç

H sonlu bir p-grup ve F $k(F)=p\in P$ olan bir cisim ise

$$J(FH) = \sum_{x\in H-\{1\}} F(x-1)$$

dir.

İspat : $x,y\in H$ ise $y(x-1)=yx-y-1+1=(yx-1)-(y-1)$ dir. Dolayısıyla $\sum_{x\in H-\{1\}} FH(x-1) = \sum_{x\in H-\{1\}} F(x-1)$ olduğundan 2.24 den $J(FH)= \sum_{x\in H-\{1\}} F(x-1)$ dir.

AYRIŞAMAZ MODÜLLER

Buradaki amacımız yarıbasit cebirlerden daha genel olan cebirleri incelemektir. Wedderburn Yapı Teoreminin bir genelleştirmesi ile birlikte ayrışamaz modüllerin endomorfiler cebiri dilinde Schur Lemması karakterize edilecektir. Kısaca yarıbasit cebirler için söylenenler Artinian cebirlere adapte edilecektir. Bundan sonra A bir R-cebiri gösterecektir. R in komutatifliği teoride küçük bir öneme sahiptir.

$N \in {}_A\mathfrak{M}$ ayrışamazdır: $\Longleftrightarrow$ $\Lambda(N)$ in komplimentlenebilir en büyük altkafesi $\{0,N\}$ dir: $\Longleftrightarrow$ $N=P \oplus Q$ ise $P=0$ veya $Q=0$ dır.

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ ayrışabilirdir: $\Longleftrightarrow$ M_1, $M_2 \in \Lambda(M) \setminus \{0\}$ olmak üzere $M=M_1 \oplus M_2$ dir. Böylece $0 \in {}_A\mathfrak{M}$ ne ayrışabilir nede ayrışamazdır.

2.26. Önerme

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian veya Notherian olsun. Bu taktirde M ayrışamaz A-modüllerin bir sonlu direkt toplamı olarak yazılabilir.

İspat : $M=0$ ise $M=\bigoplus_{i \in \emptyset} M_i=0$ olduğundan önerme doğrudur. $M \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

(1). M in ayrışamaz olan bir direkt toplam faktörü vardır. Gerçekten de $N \in \Lambda(M)$, $N \neq 0$, $M=N \oplus N'$ bir $N' \in \Lambda(M)$ olmak üzere N minimal ise N in ayrışamaz olacağı açıktır. Böyle bir minimal elemanın mevcudiyeti ise M in Artinian olması durumundan açıktır.

M Notherian ise bir maksimal direkt toplam faktörünün keyfi bir komplimenti minimaldir. Bu durumda

$$\mathcal{A} = \{ N \in \Lambda(M) \mid \exists N' \in \Lambda(M) : M=N \oplus N' \}$$

olsun. $\mathrm{Min}\,\mathcal{A} \neq \emptyset$ dır. $N_1 \in \mathrm{Min}\,\mathcal{A}$ ise $\exists M_1 \in \Lambda(M)$ öyleki $M=N_1 \oplus M_1$ dir. (1). i M_1 e ard arda uygularsak her bir N_i ayrışamaz olmak üzere

$$M = N_1 \oplus M_1 = N_1 \oplus N_2 \oplus M_1 = N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus M_1 = \ldots$$

elde edilir. M Artinian ise azalan zincir koşulunu gerçekler. Dolayısıyla

$M_1 \supset M_2 \supset \ldots$

zinciri sonludur. Buradan $\exists k\in\mathbb{N}$ öyleki $M_{k+i}=0$ $i\geq 1$ dir.

M Notherian ise

$0\subset N_1\subset N_1\oplus N_2$ ...

zinciri sonludur. Buradan $\exists k\in\mathbb{N}$ öyleki $\bigoplus_{i=1}^{k} N_i = \bigoplus_{i=1}^{k+j} N_i$ $j\geq 1$ dir. Buradan $N_{k+i}=0$ $i\geq 1$ dır. Dolayısıyla $M = \bigoplus_{i=1}^{k} N_i$ dir.

Basit modüllerin ayrışamaz oldukları açıktır. Tersi yarıbasit cebirler üzerindeki modüller için doğrudur. Ancak genelde doğru değildir. Basit modüllerin Schur Lemması ile yapılan karakterizasyonuna benzer bir karakterizasyonla onların endomorfiler cebiri ile karakterize edeceğiz.

2.27. Tanım

Bir R-cebir A lokaldir: $\Longleftrightarrow$ $A/_{J(A)}$ bir bölme cebiridir: $\Longleftrightarrow$ $J(A)\in\Lambda(A)$ maksimaldir. A lokal cebir ise $1_A\neq 0_A$ olacağı açıktır. Yani A trivialden farklıdır.

2.28. Önerme

Trivialden farklı bir R-cebir A için aşağıdaki koşullar denktir.

i) A lokal cebirdir.

ii) $A-A^o\subseteq J(A)$ dır.

iii) $A-A^o$ toplama kapalıdır.

İspat: i) $\Longrightarrow$ ii) $x\notin J(A)$ ise $x+J(A)\neq J(A)$ dır. Buradan $x+J(A)\in A/_{J(A)}$ dır. i) den $A/_{J(A)}$ bölme cebiri olduğundan $\exists y\in A$ öyleki

$$(x+J(A))(y+J(A)) = 1+J(A)$$

dır. Buradan $1-xy \in J(A)$ ve bz.ş. $1-yx \in J(A)$ dır.

$$xy = 1+(xy-1), \quad yx=1+(yx-1)$$

olduğundan xy tersinir, x tersinirdir. Dolayısıyla $x \notin A-A^o$ olup $A-A^o \subseteq J(A)$ dır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $x,y \in A-A^o$ olsun. Bu taktirde $x+y \in A-A^o$ olduğunu gösterelim. Aksi halde $x+y \in A^o$ ise $x,y \in J(A)$ nın sonucu olarak $x+y \in J(A)$ olurki bu $J(A) \cap A^o = \emptyset$ gerçeği ile çelişir. O halde $x+y \in A-A^o$ dır.

iii) $\Longrightarrow$ i) $x+J(A) \neq J(A)$ olsun. Bu taktirde x in tersinir olduğunu göstereceğiz. $x \notin J(A)$ ise 2.11 den $\exists y,z \in A$ öyleki $1+xy \notin A^o$, $1+zx \notin A^o$ dır. Buradan $xy \in A^o$, $zx \in A^o$ dır. Aksi halde

$$1 = (1+xy)-(xy) \notin A^o$$

olurki bu bir çelişkidir. O halde $xy \in A^o$, $zx \in A^o$ olduğundan x tersinirdir. Dolayısıyla $A/J(A)$ bölme cebiri olup A lokaldir.

2.29. Sonuç

A bir cebir öyleki her $x \in A-A^o$ için x nilpotent ise A bir lokal cebirdir.

İspat : $0 \neq x \in A-A^o$ keyfi ve $k>1$, $x^k=0$ koşulunu gerçekleyen en küçük doğal sayı olsun. Bu taktirde her $y \in A$ için $yx \in A-A^o$ dır. Aksi halde

$$(yx).x^{k-1} = y.x^k = 0$$

dır. Buradan $x^{k-1}=0$ olurki bu k nın minimalliğine aykırıdır.

O halde Ax in her elemanı nilpotenttir. 2.14 den $x \in Ax \subseteq J(A)$ elde edilir. Buradan $A-A^{o} \subseteq J(A)$ dır. 2.28 den A lokaldir.

2.30. Sonuç

$N \in {}_{A}\mathcal{M}$, $End_{A}(N)$ bir lokal cebir olsun. Bu taktirde N ayrışamazdır.

İspat : $End_{A}(N)$ lokal olduğundan $1_{N} \neq 0$ olup buradan $N \neq 0$ dır. Varsayım. $N=P \oplus Q$ olsun. $\Pi : N \to P$, $\rho : N \to Q$ ilgili projeksiyonlar olsun. Bu taktirde $\Pi + \rho = id_{N}$ ve $End_{A}(N)$ lokal olduğundan 2.28 den Π veya ρ birimdir. $\Pi^{2} = \Pi$ ve $\rho^{2} = \rho$ olduğundan $\Pi = id_{N}$ veya $\rho = id_{N}$ yani $Q=0$ veya $P=0$ elde edilirki bu N in ayrışamaz olduğunu gösterir.

2.31. Lemma

$M \in {}_{A}\mathcal{M}$ ve $\varphi \in End_{A}(M)$ olsun. Aşağıdaki hipotezlerin herbirinin gerçeklenmesi halinde $\varphi \in (End_{A}(M))^{o}$ dır.

i) M Notherian ve φ örtendir.

ii) M Artinian ve φ bire-birdir.

İspat : i) M Notherian ve φ örten olsun.

$$0 \subseteq Ker\varphi \subseteq Ker\varphi^{2} \subseteq \ldots \subseteq Ker\varphi^{m} \subseteq \ldots$$

M in altmodüllerinden oluşan artan bir zincir olup M Notherian olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $Ker\varphi^{n} = Ker\varphi^{n+1}$ dir. Yani

$$(\varphi^{n})^{-1}(Ker\varphi) = (\varphi^{n+1})^{-1}(0) = Ker\varphi^{n+1} = Ker\varphi^{n} = (\varphi^{n})^{-1}(0) \ldots \quad (*)$$

dır. φ örten olduğundan her $n>1$ için φ^{n} örtendir. Buradan dolayı

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^n(\varphi^n)^{-1}(\mathrm{Ker}\,\varphi) \overset{(*)}{=} \varphi^n(\varphi^n)^{-1}(0) = 0$$

dır. Buradan $\mathrm{Ker}\varphi = 0$ olup $\varphi \in (\mathrm{End}_A(M))^o$ dır.

ii) M Artinian ve φ bire-bir olsun.

$$M \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \dots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^n \supseteq \dots$$

M in altmodüllerinden oluşan azalan bir zincir olup M Artinian olduğundan bir $k \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{Im}\varphi^k = \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ dir. $a \in M$ keyfi olsun. $\varphi^k(a) \in \mathrm{Im}\varphi^{k+1}$ olduğundan $\exists b \in M$ öyleki $\varphi^k(a) = \varphi^{k+1}(b)$ dir. φ bire-bir olduğundan $\mathrm{Ker}\varphi = 0$ dır.

$$\mathrm{Ker}\,\varphi^k = (\varphi^k)^{-1}(0) = (\varphi^{k-1})^{-1}\varphi^{-1}(0) = (\varphi^{k-1})^{-1}(0)$$

olup φ^k bire-birdir. Buradan

$$(\varphi^k)^{-1}(\varphi^k)(a) = (\varphi^k)^{-1}(\varphi^{k+1}(b))$$

dir. φ bire-bir olduğundan $a = \varphi(b)$ dir ve φ örtendir. Buradan $\varphi \in (\mathrm{End}_A(M))^o$ dır.

2.32. Fitting Lemması

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian ve Notherian olsun. Eğer $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$ ise $\exists M = P \oplus Q$ ayrışımı öyleki

i) $\varphi(P) \subseteq P$ ve $\varphi(Q) \subseteq Q$,

ii) $\varphi{\downarrow}P \in (\mathrm{End}_A(P))^o$,

iii) $\varphi{\downarrow}Q \in J(\mathrm{End}_A(Q))$ nilpotenttir.

İspat: M Artinian, Notherian ve $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$ olsun. Bu taktirde

$$M \supseteq \mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \dots$$

azalan zinciri ve

$$0 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^{2} \subseteq \dots$$

artan zinciri için $\exists n,m \in \mathbb{N}$ öyleki

$$\operatorname{Im}\varphi^{n} = \operatorname{Im}\varphi^{n+1}, \quad \operatorname{Ker}\varphi^{m} = \operatorname{Ker}\varphi^{m+1}$$

dir. $t := \text{maks}\{m,n\}$ olmak üzere $\operatorname{Im}\varphi^{k} = \operatorname{Im}\varphi^{t}$, $\operatorname{Ker}\varphi^{k} = \operatorname{Ker}\varphi^{t}$, $k \geq t$ dir.

$$P := \operatorname{Im}\varphi^{t}, \quad Q := \operatorname{Ker}\varphi^{t}$$

olsun. Bu taktirde

$\varphi(P) = \operatorname{Im}\varphi^{t+1} = \operatorname{Im}\varphi^{t} = P$, buradan $\varphi(P) \subseteq P$ ve
$\varphi(Q) = \varphi(\operatorname{Ker}\varphi^{t}) = \varphi(\operatorname{Ker}\varphi^{t+1}) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^{t} = Q$, buradan $\varphi(Q) \subseteq Q$
elde edilir.

$\varphi{\downarrow}P : P \longrightarrow P$, P Notherian ve φ örten olduğundan 2.31 den $\varphi{\downarrow}P \in (\operatorname{End}_A(P))^{o}$ dır. Diğer yandan

$$\varphi^{t}(Q) = \varphi^{t}(\operatorname{Ker}\varphi^{t}) = \varphi^{t}(\varphi^{t})^{-1}(0) = 0 \cap \operatorname{Im}\varphi^{t} = 0$$

dır. Dolayısıyla $\varphi{\downarrow}Q \in J(\operatorname{End}_A(Q))$ nilpotenttir. $\varphi{\downarrow}P \cap Q$ nilpotent ve bire-bir olduğundan $P \cap Q = 0$ dır.

$$M = (\varphi^{t})^{-1}(\varphi^{t}(M)) = (\varphi^{t})^{-1}(\varphi^{2t}(M)) = (\varphi^{t})^{-1}(\varphi^{t}(\varphi^{t}(M)))$$

$$= \varphi^{t}(M) + \operatorname{Ker}\varphi^{t} = P + Q$$

elde edilir.

2.33. Sonuç

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian ve Notherian olsun. M ayrışamazdır $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{End}_A(M)$ lokal cebirdir.

İspat : "$\Longleftarrow$" $\operatorname{End}_A(M)$ lokal olsun. 2.30 dan M ayrışamazdır.
"$\Longrightarrow$" M ayrışamaz olsun, $\varphi \in \operatorname{End}_A(M)$ ise $\exists P, Q \in \Lambda(M)$ öyleki

$M=P \oplus Q$, $\varphi{\downarrow}P \in (End_A(P))^{o}$ ve $\varphi{\downarrow}Q \in J(End_A(Q))$ nilpotenttir. (2.31) M ayrışamaz olduğundan P=0 veya Q=0 dır. Q=0 ise $\varphi{\downarrow}Q$ otomorfizimdir ve $\varphi \in (End_A(M))^{o}$ dır. P=0 ise $\varphi{\downarrow}Q$ nilpotent 2.29 dan $End_A(M)$ lokal cebirdir.

2.34. Lemma

$0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P \to 0$ $\ _A\mathfrak{M}$ bir tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir.

i) $\exists\, \chi \in Hom_A(P,M)$ öyleki $\psi\chi = id_P$;

ii) $\exists \theta \in Hom_A(M,N)$ öyleki $\theta\varphi = id_N$.

Bu durumda $M = \text{İm}\chi \oplus Ker\psi = \text{İm}\varphi \oplus Ker\theta$ dır.

İspat : Dizinin tamlığından φ nin bire-bir, ψ ın örten olduğu açıktır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\theta"] & P \arrow[r] & 0 \\
 & \theta\varphi = id_N & N & P \arrow[ul, dashed, "\chi"] \arrow[u, dashed] & \psi\chi = id_P
\end{tikzcd}$$

i) $\Longrightarrow$ ii) Bir $\chi : P \to M$ A-modül homomorfisi $\psi\chi = id_P$ olacak biçimde mevcut olsun. Her $m \in M$ için

$$m = (\chi\psi)(m) + (m - (\chi\psi)(m))$$

olup

$$\psi(m-(\chi\psi)(m)) = \psi(m) - \psi((\chi\psi)(m)) = \psi(m) - \psi(m) = 0$$

olduğundan $Ker\psi \cap \text{İm}\chi = Ker\,\psi\,(\psi{\downarrow}\text{İm}\,\chi) = 0$ dir. Buradan $M = \text{İm}\chi \oplus Ker\psi$ dır.

$\text{İm}\varphi = Ker\psi$ ve φ bire-bir olduğundan her $m \in M$ için

$$\theta(m):=\begin{cases}0, & m\in \text{İm}\chi\\ \varphi^{-1}(m-(\chi\psi)(m)), & m\notin \text{İm}\chi\end{cases}$$

ile $\theta:M\to N$ tanımlansın. Her $m\in M$ için

$m-(\chi\psi)(m)\in \text{Ker}\,\psi=\text{İm}\varphi$ olduğundan $\varphi^{-1}(m-(\chi\psi)(m))$

iyi tanımlı olup $\theta\in \text{Hom}_A(M,N)$ olduğu açıktır. Her $n\in N$ için

$(\theta\varphi)(n) = \varphi^{-1}(\varphi(n)) = n = id_N(n)$

olduğundan $\theta\varphi = id_N$ dir.

ii)$\Longrightarrow$ i) $\theta\in \text{Hom}_A(M,N)$ öyleki $\theta\varphi = id_N$ olacak biçimde mevcut olsun. Her $m\in M$ için

$m = (\varphi\theta)(m) + (m-(\varphi\theta)(m))$

olup

$\theta(m-(\varphi\theta)(m)) = \theta(m)-\theta((\varphi\theta))(m)) = \theta(m)-\theta(m) = 0$

olduğundan $m-(\varphi\theta)(m)\in \text{Ker}\theta$ dır. Buradan $M=\text{İm}\varphi \oplus \text{Ker}\theta$ elde edilir. Her $p\in P$ için

$\chi(p) = \psi^{-1}(p)-(\varphi\theta)(\psi^{-1}(p))$

yardımıyla tanımlanan $\chi:P\to M$ dönüşümünün bir A-modül homomorfisi olduğu açıktır. Her $p\in P$ için

$$\begin{aligned}\psi(\chi(p)) &= \psi(\psi^{-1}(p)-(\varphi\theta)(\psi^{-1}(p)))\\ &= p-\psi((\varphi\theta)(\psi^{-1}(p))) \overset{(*)}{=} p = id_P(p) \quad (*,\ \text{İm}\varphi=\text{Ker}\psi)\end{aligned}$$

olduğundan $\psi\chi = id_P$ dir.

2.35. Lemma

$M = M_1 \oplus M_2 = N_1 \oplus N_2$ A-modül M in iki direkt ayrışımı olsun. M in bir φ otomorfisi

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_A(M_1,N_1) & \mathrm{Hom}_A(M_2,N_1) \\ \mathrm{Hom}_A(M_1,N_2) & \mathrm{Hom}_A(M_2,N_2) \end{bmatrix},$$

öyleki φ_{11} izomorfizim olacak biçimde var olsun. Bu taktirde $M_2 \cong N_2$ dir.

İspat : Açık olarak

$$\begin{bmatrix} id_{N_1} & 0 \\ -\varphi_{21}\varphi_{11}^{-1} & id_{N_2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} id_{M_1} & -\varphi_{11}^{-1}\varphi_{12} \\ 0 & id_{M_2} \end{bmatrix}$$

M in otomorfileridir. φ otomorfi olduğundan

$$\begin{bmatrix} id_{N_1} & 0 \\ -\varphi_{21}\varphi_{11}^{-1} & id_{N_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} id_{M_1} & -\varphi_{11}^{-1}\varphi_{12} \\ 0 & id_{M_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & 0 \\ 0 & \varphi_{22}-\varphi_{21}\varphi_{11}^{-1}\varphi_{12} \end{bmatrix}$$

dir.

$$\psi := \varphi_{22}-\varphi_{21}\varphi_{11}^{-1}\varphi_{12} \in \mathrm{Hom}_A(M_2,N_2)$$

olup ψ otomorfidir. Buradan $M_2 \underset{A}{\cong} N_2$ dir.

2.36. Önerme

A bir R-cebir $M,N \in \mathfrak{M}_A$ öyleki

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r \;, \quad N = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_s$$

her i,j için $\mathrm{End}_A(M_i)$, $\mathrm{End}_A(N_j)$ lokal cebirler olsun. Eğer $M \cong N$ ise r=s dir ve $\exists \sigma \in S_n$ permürtasyonu öyleki her $1 \leq i \leq r$ için $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ dir.

İspat : r üzerinden tümevarım kullanalım. $r=0$ ise $M=0$ dır ve tümevarım adımından $N\cong M=0$ olduğundan $s=0$ dır. ($End_A(N_j)$ lokal cebir olduğundan açık olarak $N_j\neq 0$ dır.)

$r>0$ ve önerme her biri lokal endomorfi cebiri olan ve r den az sayıda faktörün direkt toplamı olarak yazılan modüller için iddianın doğru olduğunu tümevarım hipotezi olarak kabul edelim. $N=M$ olduğunu varsaymak genelliği bozmaz. Varlığı kabul edilen izomorfi kullanılarak N in her bir ayrışımı M in içine taşınabilir. Böylece

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_r = N_1 \oplus \ldots \oplus N_s \quad \ldots \ (*)$$

dir. $\Pi_i : M \to M_i$, $K_i : M_i \to M$, $\rho_j : M \to N_j$, $\lambda_j : N_j \to M$. M in (*) ayrışımları ile ilgili kanonik projeksiyonlar ve injeksiyonlar olsunlar. Bu taktirde

$$id_M=\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2+\ldots+\lambda_s\rho_s \ , \ id_{M_1}=\Pi_1K_1=\Pi_1 id_M K_1=\Pi_1\Big(\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\rho_i\Big)K_1$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\Pi_1\lambda_j\rho_jK_1$$

dir. $End_A(M_1)$ lokal cebir olduğundan 2.28 den bazı j için $\Psi=\Pi_1\lambda_j\rho_jK_1\in(End_A(M))^{o}$ dir. (Aksi halde her bir $\Pi_1\lambda_j\rho_jK_1$ nilpotent olup $End_A(M_1)-(End_A(M_1))^{o}$ toplama kapalı olduğundan id_{M_1} nilpotent olurki bu imkansızdır.) Notasyonun uygunluğu için $N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_s$ ayrışımı $j=1$ olacak biçimde sınırlanırsa

$$\psi := \Psi^{-1}\Pi_1\lambda_1\in Hom_A(N_1,M_1), \ \chi:=\rho_1K_1\in Hom_A(M_1,N_1)$$

öyleki $\psi\chi = id_{M_1}$ dir. 2.34 den $N=Ker\psi \oplus Im\,\chi$ dır. $End_A(N_1)$ lokal olduğundan 2.30 dan N_1 ayrışamazdır. Buradan $N_1=Im\chi$, $\chi=\rho_1K_1$ izomorfidir.

$$M' := M_2 \oplus M_3 \oplus \ldots \oplus M_r \quad \text{ve} \quad N' := N_2 \oplus N_3 \oplus \ldots \oplus N_s$$

olsun. $M = M_1 \oplus M' = N_1 \oplus N'$ e karşılık gelen projeksiyonlar ve injeksiyonlar

$$\pi_1 : M \to M_1,\ \pi' : M \to M',\ K_1 : M_1 \to M,\ K' : M' \to M,$$

$$\rho_1 : M \to N_1,\ \rho' : M \to N',\ \lambda_1 : N_1 \to M,\ \lambda' : N' \to M$$

dir. Her $(m_1, m') \in M_1 \oplus M'$ ve $v \in M$ için

$$\theta_1((m_1, m')) = m_1 + m' \ , \quad \theta_2(v) = (\rho_1(v),\ \rho_2(v))$$

ile $\theta_1 : M_1 \oplus M' \to M$, $\theta_2 : M \to N_1 \oplus N'$

dönüşümleri tanımlansın.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \oplus M' = M \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\theta_1"] & M_1 \arrow[d, "K_1"] \arrow[dr, "\rho_1 K_1"] & \\
M' \arrow[r, "K'"] \arrow[dr, "\rho' K'"'] & M \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\rho'"] \arrow[dr, "\theta_2"] & N_1 \arrow[d, "\lambda_1"] \\
& N' \arrow[r, "\lambda'"] & M = N_1 \oplus N'
\end{tikzcd}$$

$\theta_2 \theta_1$ in bir A-modül izomorfisi olduğu açıktır.

$$\theta_2 \theta_1 = \begin{bmatrix} \rho_1 K_1 & \rho_1' K' \\ \rho' K_1 & \rho' K' \end{bmatrix}$$

bir izorfidir. $\rho_1 K_1$ izomorfi olduğundan 2.35 den $\rho' K'$ izomorfidir. Yani

$$M' = M_2 \oplus M_3 \oplus \ldots \oplus M_r \cong N' = N_2 \oplus N_3 \oplus \ldots \oplus N_s$$

elde edilir. $r-1 \lneq r$ ve $End_A(M_i)$ $2 \leq i \leq r$, $End_A(N_j)$ $2 \leq j \leq s$ lokal cebirler olup tümevarım kabulünden $r-1=s-1$ ve bir $\sigma \in Sym\ (\{2,3,\ldots,r\})$ için $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ $2 \leq i \leq r$ dir.

2.37. Sonuç

$M \in {}_A\mathfrak{M}$ Artinian ve Notherian olsun. Bu taktirde

$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_r$

dir ve M_i ayrışamaz A-modül olmak üzere bu ayrışım izomorfi hariç tektürlüdür.

İspat : 2.26 dan M_i $1 \leq i \leq r$ ayrışamaz olmak üzere

$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_r$

dir. 2.33 den M_i hem Artinian hemde Notherian olduğundan $End_A(M_i)$ lokal cebirdir. 2.36 ile her bir M_i izomorfi hariç tektürlü olarak belirlidir.

2.37 ve 2.21 den aşağıdaki sonuç hemen görülür.

2.38. Sonuç

A sol Artinian R-cebir ise bütün sonlu üretenli A-modüller izomorfi hariç olmak üzere ayrışamaz A-modüllerin sonlu bir direkt toplamıdır.

Şimdi verilen F-cebir A nın F-gösterimi ile ${}_A\mathfrak{M}$ arasındaki ilişkiyi (kategorik denkliği) açıklayacağız.

2.39. Tanım

$n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere $M_n(F)$ nxn li matrislerin F-cebiri ve A bir F-cebir olsun. A dan $M_n(F)$ e her θ $(\theta \neq 0)$ F-cebir homomorfisine A nın bir F-cebir gösterimi denir. n sayısına gösterimin derecesi denir ve $d^o\theta = n$ ile gösterilir.

θ gösterimine sadıktır denir:$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\theta = 0$ dır. Bu durumda

$$|A:F| \leq |M_n(F):F| = n^2$$

dir. $|A:F| = \infty$ ise A sadık gösterime sahip olmayabilir. Elemanları F-cebir A nın gösterimleri olan ve başka elemanları olmayan kümeyi $\Pi(A,F)$ ile gösterelim. Diğer bir ifade ile

$$\Pi(A,F) := \{\theta \mid \theta \text{ A nın bir F-cebir gösterimidir}\}$$

dir. $\psi \in \Pi(A,F)$ keyfi ise $\exists n \in \mathbb{N}^*$ öyleki $\psi : A \rightarrow M_n(F)$ F-cebir homomorfisidir.

$\theta, \psi \in \Pi(A,F)$, $d^o\theta = n$, $d^o\psi = m$ olsun. Bir $\alpha \in M_{mxn}(F)$ matrisi her $x \in A$ için

$$\alpha\theta(x) = \psi(x)\alpha$$

olacak biçimde mevcutsa α matrisine θ, ψ gösterimlerini kenetliyor denir.

$$\mathrm{Mor}(\theta,\psi) := \{\alpha \in M_{mxn}(F) \mid \forall x \in A \text{ için } \alpha\theta(x) = \psi(x)\alpha\}$$

$$:= \{\alpha \mid \alpha, \theta, \psi \text{ gösterimlerini kenetler}\}$$

olsun. θ, ψ, $\chi \in \Pi(A,F)$ öyleki $d^o\theta = n$, $d^o\psi = m$, $d^o\chi = k$ ve $\alpha \in \mathrm{Mor}(\theta,\psi)$, $\beta \in \mathrm{Mor}(\psi,\chi)$ olsun. Bu taktirde $\alpha \in M_{mxn}(F)$, $\alpha \in M_{kxm}(F)$ olmak üzere $\beta\alpha$ anlamlıdır ve her $x \in A$ için

$$\alpha\,\theta(x) = \psi(x)\alpha \quad \text{ve} \quad \beta\psi(x) = \chi(x)\beta$$

dır. Böylece $x \in A$ için

$$(\beta\alpha)\theta(x) = \beta(\alpha\theta(x)) = \beta(\psi(x)\alpha) = (\beta\psi(x)\alpha = (\chi(x)\beta)\alpha = \chi(x)\beta\alpha$$

elde edilir. Buradan $\beta\alpha \in Mor(\theta,\chi)$ dır.

$$o: Mor(\psi,\chi) \times Mor(\theta,\psi) \to Mor(\theta,\chi), ((\beta,\alpha) \longrightarrow o(\beta,\alpha) = \beta o \alpha := \beta\alpha)$$

tanımlansın.

$$\alpha \in Mor(\theta,\psi), \quad \beta \in Mor(\psi,\chi) \text{ ve } \gamma \in Mor(\chi,\delta)$$

olsun.

$$\gamma o(\beta o \alpha) = \gamma o(\beta\alpha) = \gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta) o \alpha = (\gamma o \beta) o \alpha$$

dır. Buradan "o" asosyetiftir.

$\theta \in \prod(A,F)$ öyleki $d^o\theta = n$ olsun. Bu taktirde $i_\theta = I = (\delta_{ij})_{nxn}$ alınırsa her $\alpha \in Mor(\psi,\theta)$, $\beta \in Mor(\theta,\chi)$ için

$$i_\theta o \alpha = I\alpha = \alpha \text{ ve } \beta o i_\theta = \beta I = \beta \, (\alpha \in M_{nxm}(F), \ \beta \in M_{kxn}(F))$$

dır. O halde

$$\prod := (\prod(A,F), Mor_{\prod}, o)$$

bir kategoridir.

$\theta,\psi \in \prod$ denktir denir ve $\theta \cong \psi$ yazılır $\Longleftrightarrow$ θ,ψ $\prod$ kategorisinde izomorftur:$\Longleftrightarrow$ $\exists \alpha \in Mor(\theta,\psi)$, $\beta \in Mor(\psi,\theta)$ öyleki

$$\beta o \alpha = \beta\alpha = i_\theta, \quad \alpha o \beta = \alpha\beta = i_\psi$$

dır. θ,ψ denktir:$\Longleftrightarrow$ $d^o\theta = d^o\psi = n$ ve $\exists \alpha \in GL(n,F)$ öyleki $\alpha \in Mor(\theta,\psi)$ dır.

Diğer bir ifade ile her $x \in A$ için

$$\alpha\theta(x) = \psi(x)\alpha \Longrightarrow \alpha^{-1}\alpha\theta(x) = \alpha^{-1}\psi(x)\alpha \Longrightarrow \theta(x) = \alpha^{-1}\psi(x)\alpha$$

dır. Açık olarak $\cong$ $\prod$ kategorisinde bir denklik bağıntısıdır.

$\theta\in\Gamma$, $d^o\theta = n$ olsun

$$M_\theta := \{[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t \mid \lambda_i\in F \quad 1\leq i\leq n\}$$

olarak tanımlanırsa M_θ bir F-vektör uzayıdır. $x\in A$ ve $[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t\in M_\theta$ keyfi olsun.

$$x[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t := \theta(x)[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t \tag{1}$$

ile tanımlansın. Bu taktirde $M_\theta\in{}_A\mathfrak{M}$ dir ve açık olarak

$$|M_\theta : F| = d^o\theta = n \quad \text{ve} \quad \mathrm{Ann}(M_\theta) = \mathrm{Ker}\theta \tag{2}$$

dır. Her $\theta\in\Gamma$ için $M(\theta) = M_\theta$ ile $M:\Gamma\to {}_A\mathfrak{M}$ tanımlansın. Bu taktirde M gösterimlerin Γ kategorisinden A-sol modüllerin ${}_A\mathfrak{M}$ kategorisine bir funktordur. Gerçekten $\alpha\in\mathrm{Mor}(\theta,\psi)$, $\theta,\psi\in\Gamma$ keyfi olsun. Bu taktirde her $[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t\in M_\theta$ için

$$\mu_\alpha([\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t) = \alpha[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t$$

yardımıyla tanımlanan $\mu_\alpha : M_\theta \to M_\psi$ dönüşümünün F-lineer olduğu açıktır. (1) bağıntısı kullanılarak $\mu_\alpha \in\mathrm{Hom}_A(M_\theta, M_\psi)$ dır. Buradan

$$M(\mathrm{Mor}(\theta,\psi)) = \mathrm{Hom}_A(M_\theta, M_\psi)$$

dır. Yine (1) bağıntısı kullanılarak $\mu_{\beta o\alpha} = \mu_\beta o \mu_\alpha$ dır. Dolayısıyla $M=(M_\theta, M_\alpha):\Gamma \longrightarrow {}_A\mathfrak{M}$ bir funktordur.

2.40. Önerme

A bir F-cebir, $\psi,\theta\in\Gamma(A,F)$ olsun.

i) $\alpha,\beta\in\mathrm{Mor}(\theta,\psi)$ öyleki $\mu_\alpha=\mu_\beta$ ise $\alpha=\beta$ dır.

ii) $\varphi\in\mathrm{Hom}_A(M_\theta, M_\psi)$ olsun. Bu taktirde $\exists\alpha\in\mathrm{Mor}(\theta,\psi)$ öyleki $\varphi=\mu_\alpha$ dır.

iii) $N \in {}_A\mathfrak{M}$ öyleki $|N:F| = n>0$, $n\in\mathbb{N}^*$ olsun. Bu taktirde $\exists\chi\in\Gamma(A,F)$ öyleki $N\cong M_\chi = M(\chi)$ dır.

İspat : $d^o\theta = n$, $d^o\psi=m$ olsun. Her $x\in A$ için $\alpha\theta(x)=\psi(x)\alpha$, $\alpha=(\alpha_{ij})_{mxn}$ ve $\beta\theta(x)=\psi(x)\beta$, $\beta=(\beta_{ij})_{mxn}$, $|M_\theta:F| = d^o\theta=n$ dir.

i) $\mu_\alpha=\mu_\beta$ olsun. Her $[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t\in M_\theta$ için

$$\mu_\alpha([\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t) = \mu_\beta([\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t)$$

dır. $e_i:=[0,0,\ldots,i,0,\ldots,0]^t\in M_\theta$ $1\leq i\leq n$ olduğundan

$$M_\theta := \langle e_i \mid 1\leq i\leq n \rangle$$

dir. $\mu_\alpha(e_i)=\mu_\beta(e_i)$ ise $\alpha.e_i = \beta e_i$ dir. Buradan

$$[\alpha_{1i},\alpha_{2i},\ldots,\alpha_{ni}]^t = [\beta_{1i},\beta_{2i},\ldots,\beta_{ni}]^t \Longleftrightarrow \alpha_{ji}=\beta_{ji} \quad 1\leq i,j\leq n$$

dir. Buradan $\alpha=\beta$ dır.

ii) $\varphi\in Hom_A(M_\theta, M_\psi)$ ise $\varphi\in Hom_F(M_\theta,M_\psi)$ dır. Buradan $Hom_F(M_\theta, M_\psi)\cong M_{mxn}(F)$ dir. (F-vektör uzayı izomorfisi)
Bu taktirde $\exists\alpha\in M_{mxn}(F)$ öyleki $T(\varphi)=\alpha$ dır. Her $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in F$ için $\varphi([\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t) = \alpha.[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t$ ve $x\in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi(x[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t) &= \varphi(\theta(x)[\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n]^t)=\alpha\theta(x)[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t\\ &=\alpha(x[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t = x\alpha[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t\\ &=\psi(x)\alpha[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t\end{aligned}$$

dır. Buradan $\alpha\theta(x)[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t=\psi(x)\alpha[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t$ dır. Dolayısıyla her $[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t\in M_\theta$ ve her $x\in A$ için $\alpha\theta(x)=\psi(x)\alpha$ elde edilir. Buradan $\alpha\in Mor(\theta,\psi)$ olup tanımdan $\varphi=\mu_\alpha$ dır.

iii) $N \in {}_A\mathfrak{M}$ ve $|N:F| = n > 0$ olsun. $\exists \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset N$ öyleki $N = \langle u_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle_F$ ve u_i F-lineer bağımsızdır. $x \in A$ keyfi olsun. $xu_i \in N$ $1 \leq i \leq n$ için $\exists! \lambda_{ij}(x) \in F$ öyleki $x.u_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) u_i$ dır.

$$\chi(x) = (\lambda_{ij}(x))_{nxn}$$

yardımıyla $\chi : A \to M_n(F)$ tanımlansın. Bu taktirde her $x,y \in A$ ve $a \in F$ için

$$\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y), \quad \chi(a.x) = a\chi(x), \quad \chi(x.y) = \chi(x).\chi(y)$$

dir. Böylece χ A nın bir F-cebir gösterimidir. Her $v \in N$ için $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ öyleki

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$$

yazılımı bir tektir. Her $v \in N$ için

$$f(v) = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t$$

yardımıyla tanımlanan $f : N \to M_\chi$ dönüşümü bir A-modül izomorfisi olup $N \cong M_\chi = M(\chi)$ dır.

2.41. Sonuç

$\theta, \psi \in \Pi(A,F)$ olsun. $\theta \cong \psi \iff M_\theta \underset{A}{\cong} M_\psi$ dır.

İspat : i) $\Longrightarrow$ ii) $\theta \cong \psi$ ise $d^o\theta = d^o\psi = n$ ve $\exists \alpha \in GL(n,F)$ öyleki her $x \in A$ için $\theta(x) = \alpha^{-1}\psi(x)$ dır. Her $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t \in M_\theta$ için

$$\mu_\alpha([\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t) = \alpha.[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t$$

yardımıyla tanımlanan $\mu_\alpha : M_\theta \to M_\psi$ dönüşümü bir A-modül izomorfisidir. Buradan $M_\theta \underset{A}{\cong} M_\psi$ dır.

"$\Longleftarrow$" $\varphi : M_\theta \underset{A}{\cong} M_\psi$ olsun. $d^o\theta = |M_\theta : F| = |M_\psi : F| = d^o\psi$ dır.

2.40 dan $\exists \alpha \in Mor(\theta,\psi)$ öyleki $\varphi = \mu_\alpha$ dır. φ tersinir olduğundan $\alpha \in GL(n,F)$ dir. $d^o\theta = d^o\psi$ ve $x \in A$ için

$$\alpha\theta(x) = \psi(x)\alpha \Longrightarrow \theta(x) = \alpha^{-1}\psi(x)\alpha$$

elde edilir. Buradan $\theta \cong \psi$ dır.

2.42 Sonuç

A bir F-cebir ve $|A:F| = n < \infty$ olsun. Bu taktirde $\exists \theta \in \Pi(A,F)$ öyleki $d^o\theta = n$ ve $Ker\theta = 0$ dır.

İspat : ${}_AA \in {}_A\mathfrak{M}$ ve 2.40 (ii) den $\exists \theta \in \Pi(A,F)$ öyleki ${}_AA \underset{A}{\cong} M_\theta$ dır. Buradan

$$d^o\theta = |M_\theta : F| = |{}_AA : F| = n$$

dir. $Ker\theta = Ann(M_\theta) = Ann({}_AA) = 0$ dır.

G sonlu bir grup ve F bir cisim olsun. $GL(n,F) := (M_n(F))^o$ olmak üzere G den GL(n,F) e her grup homomorfisine G nin bir F-gösterimi ve n sayısınada gösterimin derecesi denir.

$$\Pi_1(G,F) := \{\theta \mid \theta : G \to GL(n,F),\ \theta \text{ grup homomorfisidir}\}$$

olsun. $\theta, \psi \in \Pi_1(G,F)$ ise α θ,ψ gösterimlerini kenetliyor denir:$\Longleftrightarrow$ her $g \in G$ için

$$\alpha\theta(g) = \psi(g)\alpha$$

dır. Cebirlerde olduğu gibi

$$\Pi_1 := (\Pi_1(G,F), Mor_{\Pi_1}, 0)$$

bir kategoridir.

$\Gamma := (\Gamma(FG,F),\ Mor_{\Gamma},0)$ olsun. Şimdi bu iki kategori arasında bir ilişki kuralım. G FG nin bir F-tabanı olduğundan her $x \in FG$ için

$$x = \sum_{g\in G} \lambda_g g$$

olacak şekilde tektürlü yazılabilir.

$\theta \in \Gamma_1(G,F)$ olmak üzere

$$\bar{\theta}(x) := \sum_{g\in G} \lambda_g \theta(g)$$

olarak tanımlanırsa $\bar{\theta} \in \Gamma(FG,F)$ dir.

Tersine $\psi \in \Gamma(FG,F)$ ise

$$\psi_1 := \psi{\downarrow}G : G \to GL(n,F)$$

olup $\psi_1 \in \Gamma_1(G,F)$ dir. Buradan

$$\psi \in \Gamma(FG,F) \Longleftrightarrow \psi_1 \in \Gamma_1(G,F)$$

dir. $\theta,\ \psi \in \Gamma(FG,F)$ ve $\alpha \in Mor_{\Gamma}(\theta,\psi)$ olsun. Bu taktirde her $x \in FG$ için $\alpha\theta(x) = \psi(x)\alpha$ dır. Özellikle her $g \in G$ için $\alpha\theta(g) = \psi(g)\alpha$ dır. Buradan

$$\alpha \in Mor_{\Gamma_1}(\theta{\downarrow}G,\ \psi{\downarrow}G)$$

dir. Tersine $\beta \in Mor_{\Gamma_1}(\theta,\psi)$ olsun. Bu taktirde her $g \in G$ için $\beta\theta(g) = \psi(g)\beta$ dır. Buradan

$$\lambda_g \beta\theta(g) = \lambda_g \psi(g)\beta \Rightarrow \sum_{g\in G} \lambda_g \beta\theta(g) = \sum_{g\in G} \lambda_g \psi(g)\beta$$

$$\Rightarrow \beta\left(\sum_{g\in G} \lambda_g \theta(g)\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g \psi(g)\beta$$ dır. Buradan

$$\beta\bar{\theta}\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) = \bar{\psi}\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\beta$$

olup $\beta \in Mor_{\Gamma}(\bar{\theta},\ \bar{\psi})$ dır.

$R_1 : \prod_1 (G,F) \to (FG,F)$, $R(\theta) = \bar{\theta}$,

$R_2 : \mathrm{Mor}_{\prod_1} \to \mathrm{Mor}_{\prod}$, $R(\alpha) = \alpha$,

$R := (R_1, R_2) : \prod_1 \to \prod$ bir kategori izomorfidir. Kısaca söylemek istediğimiz G nin F gösterimi ile FG nin cebir gösterimleri tam olarak karakterize edilebilir.

2.43. Tanım

A bir F-cebir ve $\theta, \psi \in \prod(A,F)$ öyleki $d^o\theta = n$, $d^o\psi = m$ olsun. Her $x \in A$ için

$$(\theta + \psi)(x) := \begin{bmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & \psi(x) \end{bmatrix}$$

yardımıyla $\theta \oplus \psi : A \to M_{n+m}(F)$ tanımlansın. Bu taktirde $\theta \oplus \psi \in \prod(A,F)$ olduğu açıktır. $\theta \oplus \psi$ a θ, ψ ın direkt toplamı denir ve $d^o(\theta \oplus \psi) = n+m$ dir.

2.44. Lemma

$\theta, \psi \in \prod(A,F)$ olsun. Bu taktirde

$$M_{\theta \oplus \psi} \underset{A}{\cong} M_\theta \oplus M_\psi$$

dır.

İspat : Her $m = \begin{bmatrix} [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t \\ [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^t \end{bmatrix} \in M_\theta \oplus M_\psi$ $(d^o\theta = n, d^o\psi = m)$ için

$$\varphi(m) = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^t$$

yardımıyla tanımlanan $\varphi : M_\theta \oplus M_\psi \to M_{\theta \oplus \psi}$ dönüşümü A-modül izomorfisidir.

2.45 Önerme

i) $\theta\in\Gamma(A,F)$ ayrışamazdır $\Longleftrightarrow$ $M_\theta\in{}_A\mathfrak{M}$ ayrışamazdır.

ii) Her $\theta\in\Gamma(A,F)$ için $\exists\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_r\in\Gamma(A,F)$ ayrışamaz öyleki $\theta\cong\psi_1\oplus\psi_2\oplus\ldots\oplus\psi_r$ dir.

iii) ψ_i, $\chi_j\in\Gamma(A,F)$ $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq s$ ayrışamaz olmak üzere

$$\psi_1\oplus\psi_2\oplus\ldots\oplus\psi_r\cong\chi_1\oplus\chi_2\oplus\ldots\oplus\chi_s$$

ise $r=s$ ve bir $\sigma\in S_r$ için

$$\psi_i\cong\chi_{\sigma(i)}\quad 1\leq i\leq r$$

dir.

İspat : i)"$\Longleftarrow$" $M_\theta\in{}_A\mathfrak{M}$ ayrışamaz fakat $\theta=\psi\oplus\chi$ olsun. 2.44 den $M_\theta\cong M_\psi\oplus M_\chi$ dın. M_θ ayrışamaz olduğundan $M_\psi=0$ veya $M_\chi=0$ dır. Bu ise $\psi,\chi\in\Gamma(A,F)$ olmasına aykırıdır. O halde M_θ ayrışamaz olup θ ayrışamazdır.

"$\Longrightarrow$" θ ayrışamaz fakat $M_\theta=N_1\oplus N_2$, $N_1,N_2\neq 0$ olsun. 2.40 dan $\exists\psi,\chi\in\Gamma(A,F)$ öyleki $M_\psi\cong N_1, M_\chi\cong N_2$ dir. 2.44 den $M_\theta\cong M_\psi\oplus M_\chi\cong M_{\psi\oplus\chi}$ dır. 2.41 den $\theta\cong\psi\oplus\chi$ dır. Bu ise θ nın ayrışamaz olması ile çelişir. O halde θ ayrışamaz olup M_θ ayrışamazdır.

ii) $\theta\in\Gamma(A,F)$, $d^o\theta=n\in\mathbb{N}^*$, $|M_\theta:F|=d^o\theta=n<\infty$ olduğundan M_θ Artinian ve Notheriandır. 2.26 dan $N_i\in\Lambda(M_\theta)$ $1\leq i\leq r$ ayrışamaz olmak üzere

$$M_\theta=N_1\oplus N_2\oplus\ldots\oplus N_r$$

dir. 2.40 dan $\exists\psi_i\in\Gamma(A,F)$ öyleki $M_{\psi_i}\cong N_i$ $1\leq i\leq r$ dir.

Buradan

$$M_\theta \cong M_{\psi_1} \oplus M_{\psi_2} \oplus \dots \oplus M_{\psi_r} \cong M_{\psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \dots \oplus \psi_r}$$

dir. 2.41 den $\theta \cong \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \dots \oplus \psi_r$ ve i) den her $1 \leqq i \leqq r$ için ψ_i ayrışamazdır.

iii) $\psi_i, \chi_j \in \Gamma(A,F)$ $1 \leqq i \leqq r$, $1 \leqq j \leqq s$ ayrışamaz ve

$$\psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \dots \oplus \psi_r \cong \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \dots \oplus \chi_s$$

olsun. 2.44 den $M_{\psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \dots \oplus \psi_r} \overset{\cong}{A} M_{\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \dots \oplus \chi_s}$ dir

$$M_{\psi_1} \oplus M_{\psi_2} \oplus \dots \oplus M_{\psi_r} \cong M_{\chi_1} \oplus M_{\chi_2} \oplus \dots \oplus M_{\chi_s} \qquad M_{\psi_i}, M_{\chi_s} \in \mathfrak{M}_A$$

$1 \leqq i \leqq r$, $1 \leqq j \leqq s$ ayrışamazdır. 2.36 dan $r=s$ ve $\exists \sigma \in S_r$ öyleki $M_{\psi_i} \cong M_{\chi_{\sigma(i)}} \Longleftrightarrow \psi_i \cong \chi_{\sigma(i)}$ $1 \leqq i \leqq r$ dir.

2.46. Önerme

$\theta \in \Gamma(A,F)$ için aşağıdaki koşullar denktir.

i) $\exists \psi, \psi_1, \psi_2 \in \Gamma(A,F)$ öyleki $\theta \cong \psi$ ve $x \in A$ için

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & 0 \\ * & \psi_2(x) \end{bmatrix}$$

ii) $\exists \chi \in (A,F)$, $d^o\chi \lneq d^o\theta$ ve $\alpha \neq 0$ öyleki $\alpha \in Mor(\theta,\chi)$ dır.

iii) M_θ basit değildir.

İspat : i) $\Longrightarrow$ ii) $\chi := \psi_1 \in \Gamma(A,F)$, $r = d^o\psi_1$, $d^o\theta = n$ ve 0, $r\times(n-r)$ sıfır matrisi ve 1_r ilede $r\times r$ li birim matris olmak üzere $\alpha = [1_r \cdot 0] \in M_n(F)$ olsun.

$$\alpha\psi\ (x) = [\,1_r \quad 0\,]\begin{bmatrix}\psi_1(x) & 0\\ * & \psi_2(x)\end{bmatrix} = [\,1_r\ \psi_1(x) \quad 0\,] = [\psi_1(x)\,1_r \quad 0]$$

$$= \psi_1(x)\ [1_r \quad 0] = \psi_1(x)\alpha$$

dır. Buradan $\alpha \in Mor(\psi,\psi_1) = Mor(\psi, \chi)$ dır.

$\theta \cong \psi$ olduğundan $\exists \mu \in GL(n,F)$ öyleki her $x \in A$ için

$$\theta(x) = \mu^{-1}\psi(x)\mu$$

dır. $\alpha^{\mu} := \mu^{-1}\alpha\mu$ olduğundan

$$\alpha^{\mu}\theta(x) = \mu^{-1}\alpha\mu\theta(x) = \mu^{-1}\alpha\mu(\mu^{-1}\psi(x)\mu) = \mu^{-1}\alpha\psi(x)\mu$$

$$= \mu^{-1}\psi_1(x)\alpha\mu = \mu^{-1}\chi(x)\alpha\mu$$

dır. Buradan $\alpha\mu\theta(x) = \chi(x)\alpha\mu$ dır. $\alpha \neq 0, \mu \in GL(n,F)$ olduğundan $\alpha_{\mu} \neq 0$ dır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $\alpha \in Mor(\theta,\chi)$, $d^o\chi \lneq d^o\theta$ olsun. Her $[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t \in M_\theta$ için

$$\mu_\alpha([\lambda_1\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t) = \alpha.[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^t$$

yardımıyla tanımlanan $\mu_\alpha: M_\theta \to M_\chi$ dönüşümü A-modül homomorfisidir. M_θ basit olamaz. Aksi taktirde M_θ basit ise 1.12 den μ_α bir-birdir. Buradan $M_\theta \cong \text{İm}\ \mu_\alpha \in \Lambda(M_\chi)$ dır.

$$|M_\theta:F| = d^o\theta = |\text{İm}\mu_\alpha:F| \leq |M_\chi : F| = d^o\chi$$

olurki bu $d^o\chi \lneq d^o\theta$ olması ile çelişir. O halde M_θ basit olamaz.

iii) $\Longrightarrow$ i) M_θ basit olmasın. $N \in \Lambda(M_\theta)\backslash\{0, M_\theta\}$ öyleki $1 \leq |N:F| \lneq |M_\theta:F| = d^o\theta$ dır. $u_1,u_2,\ldots,u_r$ N in bir F-tabanı olsun. Bu taktirde $u_1,u_2,\ldots,u_r \in M_\theta$ F-lineer bağımsız elemanlardır. $u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n$ $1 \leq r \leq n-1$ M_θ nın F-tabanı olsun. Her $x \in A$ için

$$\psi(x) = (\lambda_{ij}(x))_{n \times n}$$

yardımıyla $\psi : A \to M_n(F)$ dönüşümü tanımlansın.

2.40 dan $M_\psi \cong M_\theta$ dır. $xu_i \in M_\theta$ olsun. Bu taktirde $\exists \lambda_{ij}(x) \in F$ öyleki

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) u_j$$

dir. $xu_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(x) u_j$ $1 \leq i \leq n$, $\psi(x) = (\lambda_{ij}(x))$, $N \in \Lambda(M_\theta)$ olsun. $1 \leq i \leq r$ ise $xu_i \in N$, $\lambda_{ij}(x) = 0$ $j > r$, $1 \leq i \leq r$ dir. Diğer bir ifade ile $\psi_1 : A \to M_n(F)$, $\psi_2 : A \to M_{n-r}(F)$ olmak üzere

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & 0 \\ * & \psi_2(x) \end{bmatrix}$$

formundadır.

$\theta \in \prod(A,F)$ indirgenemezdir denir $:\Longleftrightarrow$ θ 2.46 daki (i),(ii), (iii) koşullarını gerçeklemiyorsa. Özellikle θ indirgenemezdir. $:\Longleftrightarrow$ M_θ basittir.

2.47. Lemma

$N \in \Lambda^{\ell}(A)$ olsun. N basit ise $J(A) \subseteq Ann(N)$ ve N ayrışamazdır. Tersine A sol (sağ) Artinian cebir öyleki $J(A) \subseteq Ann(N)$ ve N ayrışamaz ise N basittir.

İspat : $N \in {}_A\mathfrak{M}$ basit olsun. Bu taktirde $\Lambda(N) = \{0, N\}$ dir. 2.4 den $NJ(A) \subseteq radN = 0$ dır. Buradan $J(A) \subseteq Ann(N)$ ve N ayrışamazdır. Aksi taktirde $\exists N_1, N_2 \in \Lambda(N)$ öyleki $N=N_1 \oplus N_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \Pi(A,F)$ öyleki $M_\psi \cong N$, $M_{\psi_i} \cong N_i$ $i=1,2$ dir.

$M_\psi \cong M_{\psi_1} \oplus M_{\psi_2} \cong M_{\psi_1 \oplus \psi_2}$ dır. Buradan $\psi \cong \psi_1 \oplus \psi_2$ olurki 2.45 ile çelişir. Dolayısıyla N ayrışamazdır.

Tersine olarak $N \in {}_A\mathfrak{M}$, $J(A) \subseteq Ann(N)$ ve 1.4 ile $N \in {}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ dır. A Artinian olduğundan $A/J(A)$ yarıbasittir. 1.40 dan $N \in {}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ yarıbasittir. N ayrışamaz olduğundan 1.15 ile N basittir.

2.48. Sonuç

A yarıbasit F-cebir olsun. Bu taktirde $\theta \in \Pi(A,F)$ ayrışamazdır $\Longleftrightarrow$ θ indirgenemezdir.

İspat : A yarıbasit olduğundan $J(A)=0$ dır. $\theta \in \Pi(A,F)$ $\Longleftrightarrow$ $\exists M \in {}_A\mathfrak{M}$ öyleki $M_\theta \underset{A}{\cong} M$ dir. A yarıbasit olduğundan $M_\theta \cong M$ yarıbasittir. 1.15 ile M_θ ayrışamazdır $\Longleftrightarrow$ M_θ basittir $\Longleftrightarrow$ θ ayrışamazdır $\Longleftrightarrow$ θ indirgenemezdir.

2.49. Sonuç

A sol Artinian F-cebir olsun. A nın indirgenemez gösterimlerinin denklik sınıflarının sayısı $A/_{J(A)}$ basit bileşenlerin sayısı ile aynıdır.

İspat : 2.47 ile basit A-modüllerin denklik sınıfları ile basit $A/_{J(A)}$-modüllerin denklik sınıfları arasında birebir bir karşılaştırma vardır. $A/_{J(A)}$ Artinian ve yarıbasit olduğundan A_i $(1 \leq i \leq r)$ F-cebir olarak basit olmak üzere

$$A/_{J(A)} \cong A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_r$$

dir. 1.40 ve 1.42 den her basit $A/_{J(A)}$ modül A_i nin minimal sol idealine izomorftur. A_i de içerilen tüm minimal sol idealler 1.50 ile izomorftur. $i \neq j$ ise A_i nin minimal sol idealleri A_j nin minimal sol ideallerine izomorf değildir. 2.46 ile devamla sonuç açıktır.

2.50. Sonuç

F cebirsel kapalı bir cisim ve $|A:F| = n \in \mathbb{N}^*$ ve A bir F-cebir olsun. A nın denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı $|Z(A/_{J(A)}):F|$ dır.

İspat : 1.61 ile $A/_{J(A)} \cong M_{n_1}(F) \dotplus M_{n_2}(F) \dotplus \ldots \dotplus M_{n_r}(F)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} Z(A/_{J(A)}) &\cong Z(M_{n_1}(F)) \dotplus Z(M_{n_2}(F)) \dotplus \ldots \dotplus Z(M_{n_r}(F)) \\ &\cong i_{n_1}F \dotplus i_{n_2}F \dotplus \ldots \dotplus i_{n_r}F \\ &\cong \underbrace{F \dotplus F \dotplus \ldots \dotplus F}_{r} \end{aligned}$$

dır. Buradan $r = |Z(A/_{J(A)}):F|$ elde edilir.

BÖLÜM III

ARTİNİAN CEBİRLER ÜZERİNDEKİ PROJEKTİF MODÜLLER

Artinian cebirler üzerindeki ayrışamaz modüller cebirin yapısını tanımada önemli rol oynar. Onlar Regüler sol modülün direkt terimidir. Özellikle onlar projektiftir. Bunun için Artinian cebirler üzerindeki projektif modüllerin yapısını incelemek zorunludur.

Bölüm Artinian cebirlerin yapı teoremi verilerek kapatılacaktır. Bu yapı teoreminden elde edilen sonuçlar Wedderburn Yapı Teoreminden daha az tatminkardır.

3.1. Tanım

Bir $P \in {}_A\mathfrak{M}$ modülüne projektif modül denir: $\Longleftrightarrow$ $\exists M \in {}_A\mathfrak{M}$ A-serbest öyleki $M = N \oplus N_1$, $N \cong P$ dir.

3.2. Önerme

A bir R-cebir olsun.

i) $M \in {}_A\mathfrak{M}$ A-serbest ise M projektiftir.

ii) Projektif modüllerin direkt toplamı projektiftir.

iii) Bir projektif modülün direkt terimide projektiftir.

İspat : i) M A-serbest ve $M = M \oplus 0$ olduğundan M projektiftir.

ii) M_i $(i\in I)$ projektif ve $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ olsun. Her $i\in I$ için $\exists N_i$ A-serbest öyleki N_i^* N_i nin bir direkt terimi olmak üzere $M_i \cong N_i^*$ dir. Serbest modüllerin direkt toplamı serbest olduğundan $N := \bigoplus_{i\in I} N_i$ modülü serbesttir. M N in $N^* := \bigoplus_{i\in I} N_i^*$ bir direkt terimine izomorf olduğundan M projektiftir.

iii) P projektif ve P_1 P nin direkt terimi olsun. Bu taktirde $\exists P_2 < P$ öyleki

$$P = P_1 \oplus P_2$$

dir. Buradan $\exists M\in {}_A\mathfrak{M}$ A-serbest öyleki $\Psi : P_1 \oplus P_2 \cong M$ dir. $M_1 := \Psi(P_1)$, $M_2 := \Psi(P_2)$ ise $M = M_1 \oplus M_2$ dir ve iddia elde edilir.

3.3. Önerme

A bir R-cebir M, N, $P\in {}_A\mathfrak{M}$ öyleki P projektif olsun. $\theta\in Hom_A(N,M)$ epimorfi ise, her $\varphi\in Hom_A(P,M)$ için $\exists\Psi\in Hom_A(P,N)$ öyleki $\varphi = \theta\Psi$ dır. Diğer bir ifade ile

$$\bar{\theta}(\Psi) = \theta\Psi$$

ile tanımlanan $\bar{\theta} : Hom_A(P,N) \to Hom_A(P,M)$ dönüşümü epimorfidir.

İspat : P projektif modül olduğundan $\exists$A-serbest modül Q öyleki P yi bir A-modül olarak içerir, (P, Q nun bir direkt terimine izomorf olduğundan izomorf resmini gözönüne alıyoruz). $\pi : Q \to P$ öyleki $\pi\downarrow P = id_P$ dir.

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, "\bar{\chi}"'] & \\
 & P \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "\Psi"'] & \\
N \arrow[r, "\theta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
\pi{\downarrow}P = id_P \\
\bar{\chi}{\downarrow}X = \chi
\end{array}$$

X Q nun A-bazı olsun. θ örten olduğundan her $x \in X$ için $\theta^{-1}\varphi\,\pi(x) \neq \emptyset$ dır. Seçme aksiyomuyla $\exists\chi : X \to N$ öyleki $x \in X$ için

$$\theta\,\chi(x) = \varphi\pi(x)$$

dir. Q X ile serbest üretildiğinden χ Q dan N e bir homomorfiye genişletilebilir. $(\bar{\chi}(\sum_{x\in X} a_x x) := \sum_{x\in X} a_x \chi(x))$

$$\theta\bar{\chi}(\sum_{x\in X} a_x x) = \theta(\sum_{x\in X} a_x \chi(x)) = \sum_{x\in X} a_x \theta\chi(x)$$
$$= \sum_{x\in X} a_x \varphi\pi(x) = \varphi\pi(\sum_{x\in X} a_x x)$$

dir. Buradan $\theta\bar{\chi} = \varphi\pi$ dir. $\Psi := \bar{\chi}{\downarrow}P$ diyelim. Bu taktirde

$$\theta\bar{\chi}{\downarrow}P = \varphi\pi{\downarrow}P$$

olduğundan $\theta\Psi = \varphi\, id_P = \varphi$ elde edilir. Açık olarak

$$\bar{\theta}(\Psi) = \theta\Psi$$

ile tanımlanan $\bar{\theta} : Hom_A(P,N) \to Hom_A(P,M)$ dönüşümü epimorfidir.

3.4. Sonuç

N, $P \in {}_A\mathfrak{M}$, P projektif ve $\theta : N \to P$ bir A-modül epimorfisi ise $\exists Q \in {}_A\mathfrak{M}$ öyleki $Q \cong P$ ve $N = Ker\theta \oplus Q$ dır.

İspat : 3.3 den $\exists \Psi \in Hom_A(P,N)$ homomorfi öyleki $\theta\Psi = id_P$ dir $(\varphi := id_P)$ 2.34 den $N = Ker\theta \oplus Im\Psi$ dır.

$$Q := \dot{I}m\Psi \cong N/_{Ker\theta} \cong \dot{I}m\theta = P$$

dir. Buradan $P \cong Q$ ve $N = Ker\theta \oplus Q$ dır.

Bu sonucun terside doğrudur. Yani $N, P \in {}_A\mathfrak{M}$ ve her $\theta \in Hom_A(N,P)$ epimorfisi için $\exists Q \in {}_A\mathfrak{M}$ öyleki $Q \cong P$ ve $N = Ker\theta \oplus Q$ ise P projektif modüldür.

3.3 deki koşulu gerçekleyen her $P \in {}_A\mathfrak{M}$ projektif olacağı açıktır. $N \in {}_A\mathfrak{M}$ A-serbest olmak üzere $\theta : N \longrightarrow P$ epimorfisi mevcutsa P N in bir direkt terimine izomorftur. 3.3 ün homomorfilerinin indüklenebilirlik özelliği projektif modülleri karakterize eder ve bu özellik projektif modülün tanımı olarakta alınabilir.

3.5. Sonuç

A bir R-cebir olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar denktir.

i) A yarıbasittir

ii) Her $M \in {}_A\mathfrak{M}$ projektiftir.

İspat : i)$\Longrightarrow$ ii) A yarıbasit olsun. 1.40 dan $N_i \in Min\Lambda^{\ell}(A)$ olmak üzere her $M \in {}_A\mathfrak{M}$ için $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ dir. A ${}_AA$ modül olarak A-serbest olduğundan 3.2 den A projektif modüldür. $N_i \in \Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim (A yarıbasit) olduğundan her $i \in I$ için N_i projektif modüldür. 3.2 den $\bigoplus_{i \in I} N_i$ projektif modüldür. Buradan M projektif modüldür.

ii)$\Longrightarrow$ i) Her $M \in {}_A\mathfrak{M}$ projektif olduğundan özellikle ${}_AA \in {}_A\mathfrak{M}$

projektiftir. $N \in \Lambda^{\ell}(A)$ keyfi olsun. $A/_N \in {}_A\mathfrak{M}$ olduğundan projektiftir. $\pi : A \to A/_N$ A-modül epimorfisi alınırsa 3.4 den $\exists Q \in {}_A\mathfrak{M}$ öyleki

$$A = Ker\pi \oplus Q = N \oplus Q$$

dir. N direkt terim olduğundan 1.18 den A yarıbasittir.

Sol veya sağ yarıbasitlik denk koşullar olduğundan aynı tartışma ile A yarıbasittir $\Longleftrightarrow$ her sağ A-modül projektiftir.

Şimdi $P, Q \in {}_A\mathfrak{M}$ olmak üzere P den Q ya olan A-modül homomorfileri ile $P/_{J(A)P}$ den $Q/_{J(A)Q}$ ya olan $A/_{J(A)}$-modül homomorfileri arasındaki ilişkiyi araştıralım.
A Artinian R-cebir ve $P, Q \in {}_A\mathfrak{M}$ projektif olduğu zaman aralarındaki ilişki çok yakındır.

Bölüm 1 de (1.4) $P/_{J(A)P}$ ve $Q/_{J(A)Q}$ A-modüller veya $A/_{J(A)}$-modüller olarak gözönüne alabileceğimizi biliyoruz.

$$Hom_A(P/_{J(A)P}, Q/_{J(A)Q}) = Hom_{A/J(A)}(P/_{J(A)P}, Q/_{J(A)Q})$$

olduğundan bunu seçme özgürlüğümüz vardır.

A bir R-cebir ve $J \in \Lambda(A)$ olsun. Her $P \in {}_A\mathfrak{M}$ için

$$F_1(P) = P/JP$$

yardımıyla tanımlanan $F_1 : {}_A\mathfrak{M} \to {}_{A/J}\mathfrak{M}$ bir funktorun obje dönüşümüdür.

Gerçekten $\varphi : P \to Q$ A-modül homomorfisi olsun. ($\varphi \in Mor_A(P,Q) = Hom_A(P,Q)$). Bu taktirde

$$\varphi(JP) = J\,\varphi(P) \subseteq JQ$$

olduğundan $\pi_P : P \to P/_{JP}$, $\pi_Q : Q \to Q/_{JQ}$ projeksiyonlar olmak üzere

$\bar{\varphi}(x+JP) = \varphi(x)+JQ$

ile $\bar{\varphi} : Q \longrightarrow Q/_{JQ}$ tanımlansın. $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{A/J}(P/_{JP}, Q/_{JQ})$ olup $\pi_Q\varphi = \bar{\varphi}\pi_P$ dir.

$F_2 := \theta : \mathrm{Mor}(P,Q) = \mathrm{Hom}_A(P,Q) \to \mathrm{Hom}_{A/J}(P/_{JP}, Q/_{JQ}) = \mathrm{Mor}(P/_{JP}, Q/_{JQ})$

olmak üzere $\theta(\varphi) = \bar{\varphi}$ dönüşümü yalnız funktorial değil bir R-modül homomorfisidir. ($P \in {}_A\mathfrak{M}$, $\lambda \in R$, $p \in P$ için $\lambda_p := (\lambda 1_A).P$ ile $P \in {}_R\mathfrak{M}$ yapısına kavuşur. Dolayısıyla $\mathrm{Hom}_A(P,Q) \in {}_R\mathfrak{M}$ ve $\mathrm{Hom}_{A/J}(P/_{JP}, Q/_{JQ}) \in {}_R\mathfrak{M}$ dir)

$F = (F_1, F_2) : {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow {}_{A/J}\mathfrak{M}$ bir funktordur.

3.6. Lemma

$P, Q \in {}_A\mathfrak{M}$ için $\exists \theta = \theta(P,Q) : \mathrm{Hom}_A(P,Q) \to \mathrm{Hom}_{A/J(A)}(P/_{JP}, Q/_{JQ})$ öyleki $\pi_Q\varphi = \theta(\varphi)\pi_P$ dir. Eğer $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(P,Q)$, $\Psi \in \mathrm{Hom}_A(N,P)$ ise

$\theta(N,Q)(\varphi \circ \Psi) = \theta(P,Q)(\varphi) \circ \theta(N,P)(\Psi)$

dır. Özel olarak $\theta(P,P) : \mathrm{End}_A(P) \to \mathrm{End}_A(P/_{JP})$ bir R-cebir homomorfisidir.

İspat : $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(P,Q)$ ve $\theta : \mathrm{Hom}_A(P,Q) \to \mathrm{Hom}_{A/J}(P/_{JP}, Q/_{JQ})$ dönüşümleri için $\theta(\varphi)\pi_P = \pi_Q\varphi$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_P"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\pi_Q\varphi"'] \arrow[dr, dashed, bend left=10, "\theta(\varphi)\pi_P"] & P/_{JP} \arrow[d, "\theta(\varphi)=\bar{\varphi}"] \\
Q \arrow[r, "\pi_Q"'] & Q/_{JQ}
\end{tikzcd}$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_A(P,Q)$ için

$(\varphi_1 + \varphi_2)(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$

ile tanımlanırsa $\varphi_1+\varphi_2 \in Hom_A(P,Q)$ dır.

$$\theta(\varphi_1+\varphi_2).\pi_p = \pi_Q.(\varphi_1+\varphi_2) = \pi_Q.\varphi_1+\pi_Q.\varphi_2$$

$$= \theta(\varphi_1).\pi_p+\theta(\varphi_2).\pi_p = (\theta(\varphi_1)+\theta(\varphi_2)).\pi_p$$

dir. Buradan $\theta(\varphi_1+\varphi_2) = \theta(\varphi_1)+\theta(\varphi_2)$ dir.

Her $x\in R$ ve $u\in P$ için

$$\theta(x\varphi)\pi_p(u) = \theta(x\varphi)(u+JP) = x\varphi(u)+JQ = x(\varphi(u)+JQ)$$

$$= x(\theta(\varphi))(u+JP) = x\theta(\varphi)\pi_p(u)$$

dır. Buradan $\theta(x\varphi)\pi_p = x\theta(\varphi)\pi_p$ dir.

$\theta(\varphi o \Psi)\pi_N = \pi_Q(\varphi o \Psi)$ olmak üzere

$$\theta(\varphi o\Psi)\pi_N(n) = \theta(\varphi o\Psi)(n+JN) = \pi_Q(\varphi o\Psi)(n+JN) = (\varphi o\Psi)(n)+JQ$$

$$= \varphi(\Psi(n))+JQ = \theta(\varphi)(\Psi(n)+JP)$$

$$= \theta(\varphi)\theta(\Psi)(n+JN) = \theta(\varphi)\theta(\Psi)\pi_N(n)$$

dır. Buradan $\theta(\varphi o\Psi)\pi_N = \theta(\varphi)\theta(\Psi)\pi_N$ ve $\theta(\varphi o\Psi) = \theta(\varphi)\theta(\Psi)$ elde edilir. Her $\alpha\in End_A(P)$ için

$$\bar{\alpha}\ (u+JP) = \alpha(u)+JP$$

ile $\bar{\alpha}:P/_{JP} \to P/_{JP}$ ile tanımlansın. $\bar{\alpha}\in End_A(P/_{JP})$ olduğu açıktır. $End_A(P)$, $End_A(P/_{JP})$ (dönüşümlerin toplamı, bileşkesi ve $r=(r.1_A)\alpha$ skalerle çarpıma göre) R-cebir olduklarından

$$\theta(\varphi o\Psi)\pi_p = \theta(\varphi)o\ \theta(\Psi)\pi_p$$

dir. Dolayısıyla θ çarpmayı korur ve $\overline{\varphi o\Psi} = \bar{\varphi}\ o\ \bar{\Psi}$ dır.

3.7. Lemma

3.6 daki hipotezler ve notasyonlar geçerli olmak üzere

$P\in {}_A\mathfrak{M}$ projektif ise $\theta(P,Q):\mathrm{Hom}_A(P,Q) \to \mathrm{Hom}_{A/J}(P/_{JP},\ Q/_{JQ})$ dönüşümü örtendir.

İspat : $\bar{\varphi}\in \mathrm{Hom}_{A/J}(P/_{JP},\ Q/_{JQ})=\mathrm{Hom}_A(P/_{JP},\ Q/_{JQ})$ keyfi verilsin. P projektif modül ise $\pi_Q:Q \to Q/_{JQ}$ örten olduğundan 3.3 den $\exists\varphi\in \mathrm{Hom}_A(P,Q)$ öyleki

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\varphi"'] & P/_{JP} \arrow[d, "\bar{\varphi}"] \\ Q \arrow[r, "Q"'] & Q/_{JQ} \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif olup $\bar{\varphi}=\theta(\varphi)$ dir ve θ örtendir.

$$(\bar{\varphi}\pi_P = \pi_Q\varphi = \theta(\varphi)\pi_P \quad \text{ve } \bar{\varphi} = \theta(\varphi))$$

3.8. Önerme

A sol Artinian R-cebir, $P\in {}_A\mathfrak{M}$ projektif olsun. Bu taktirde θ funktoru bir izomorfi tanımlar ve

$$\mathrm{End}_A(P)/_{J(\mathrm{End}_A(P))} \cong \mathrm{End}_{A/J(A)}\ (P/_{J(A)P})$$

dir. Üstelik $J(A)^k=0$ ise her $\varphi\in J(\mathrm{End}_A(P))$ için $\varphi^k=0$ dır.

İspat : Notasyonun basitliği için $J:=J(A)$, $\bar{A}:=A/_{J(A)}$ ve $\bar{P}:=P/J(A)P$ yazalım. 3.6 ve 3.7 den $\theta:\mathrm{End}_A(P)\to\mathrm{End}_{\bar{A}}(\bar{P})$ dönüşümü örten R-cebir homomorfisidir. $\varphi\in\mathrm{Ker}\theta$ olsun.

$$\pi_P\varphi = \theta(\varphi)\pi_Q = 0 \Longleftrightarrow \varphi(P) \subseteq \mathrm{Ker}\,\pi_P = JP$$

dir. Dolayısıyla her $k\in\mathbb{N}$ için $\varphi^k(P) \subseteq J^kP = 0.P=0$ dır.

Buradan $\varphi^k(P) = 0$ olduğundan $\varphi^k=0$ dır. Dolayısıyla $\varphi \in J(End_A(P))$ dir. Buradan $Ker\theta$ nın her elemanı nilpotenttir. 2.14 den $Ker\theta \subseteq J(End_A(P))$ dir.

$\bar{A}$ yarıbasit olduğundan 1.40 dan $\bar{P}$ yarıbasittir. 2.16 dan $J(End_{\bar{A}}(\bar{P}))=0$ dır. Yani $J(End_A(P)/_{Ker\theta}) = 0$ dır. 1.35 den $J(End_A(P)) \subseteq Ker\theta$ elde edilir.

θ örten olduğundan

$$End_A(P)/_{J(End_A(P))} \cong End_{\bar{A}}(\bar{P})$$

dır.

3.9. Sonuç

A sol Artinian R-cebir, $P,Q \in {}_A\mathcal{M}$ projektif olsunlar. Bu taktirde

$$P \underset{A}{\cong} Q \iff P/_{J(A)} \underset{\bar{A}/J(A)}{\cong} Q/_{J(A)Q}$$

dır.

İspat : $\varphi : P \cong Q$ olsun. θ nın funktorial özelliğinden $\theta(\varphi^{-1}) = \theta(\varphi)^{-1}$ olup $\chi : P/_{J(A)P} \cong Q/_{J(A)Q}$ dır.
Tersine $\chi : P/_{J(A)P} \cong Q/_{J(A)Q}$ olsun. $P, Q \in {}_A\mathcal{M}$ projektif olduğundan 3.7 den $\exists \varphi : P \to Q$, $\psi : Q \longrightarrow P$ öyleki

$$\theta(\varphi) = \chi, \quad \theta(\psi) = \chi^{-1}$$

dir. $\theta(\psi\varphi) = \theta(\psi)\theta(\varphi) = \chi^{-1}\chi = id_{P/J(A)P}$ dir. Buradan $\psi\varphi + Ker\theta = id_P + Ker\theta$ ve

$$\theta(\varphi\psi) = \theta(\varphi)\theta(\psi) = \chi\chi^{-1} = id_{Q/J(A)Q}$$

olduğundan $\varphi\psi + Ker\theta = id_Q + Ker\theta$ dır. Buradan

$$id_P - \Psi\varphi \in J(End_A(P)),\quad id_Q - \varphi\Psi \in J(End_A(Q))$$

dır. 2.11 den

$$\Psi\varphi = id_P - (id_P - \Psi\varphi) \in (End_A(P))^o$$

$$\varphi\Psi = id_Q - (id_Q - \varphi\Psi) \in (End_A(Q))^o$$

dır. Buradan $\Psi\varphi \in (End_A(P))^o$, $\varphi\Psi \in (End_A(Q))^o$ dır. Bu ise φ nin sol ve sağ inverse sahip olduğunu gösterir. Buradan φ bir izomorfi olup $P \underset{A}{\cong} Q$ dır.

Buraya kadar olan veriler, bizi Artinian cebirler üzerindeki projektif modüllerin klasifikasyonuna ve yapı teoremlerine yol gösterir. Bundan sonra aksi söylenmedikçe A sol Artinian R-cebiri ve $P \in {}_A\mathfrak{M}$ projektif olarak kabul edilecektir.

${}_AA$ nın ayrışamaz direkt terimlerine esas ayrışamaz A-sol modüller denir. Esas ayrışamaz A-sol modüller A nın sol ideal-leridir ve projektiftirler.

3.10. Lemma

P ${}_AA$ nın bir direkt terimi olsun. P ayrışamazdır.
$\Longleftrightarrow$ $P/_{J(A)P} \in {}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ basittir.

İspat : A Artinian ve $P \in \Lambda^{\ell}(A)$ olduğundan P Artinian ve Notheriandır. 2.33 den P ayrışamazdır. $\Longleftrightarrow$ $End_A(P)$ bir lokal cebirdir. Yani $End_A(P)/_{J(End_A(P))}$ bir bölme cebiridir.

3.8 den $\mathrm{End}_A(P)/J(\mathrm{End}_A(P)) \cong \mathrm{End}_{A/J(A)}(P/J(A)P)$ bir bölme cebiridir $\Longleftrightarrow$ 1.12 ile $P/J(A)P$ basittir. ($P/J(A)P \in {}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ yarıbasittir).

3.11. Önerme

A Artinian R-cebir olsun. $\bar{\Lambda}({}_AA)$ ile ${}_AA$ nın esas ayrışamaz A-sol modüllerin izomorfi sınıflarını ve $\bar{\Lambda}({}_{A/J(A)}A/J(A))$ ilede basit $A/J(A)$-sol modüllerin izomorfi sınıflarını göstersin. Bu taktirde her $P \in \bar{\Lambda}({}_AA)$ için

$$\bar{F}(P) = P/J(A)P$$

ile tanımlanan $\bar{F}: \bar{\Lambda}({}_AA) \to \bar{\Lambda}({}_{A/J(A)}A/J(A))$ dönüşümü tam eşlemedir.

İspat : $P \in {}_A\mathfrak{M}$ esas ayrışamaz ise 3.10 ile $P/J(A)P$ basit $A/J(A)$ modüldür. 3.9 dan devamla

$$P \underset{A}{\cong} Q \Longleftrightarrow P/J(A)P \underset{\bar{A}/J(A)}{\cong} Q/J(A)Q$$

dır. Buradan $\bar{F}$ birebirdir.

Dönüşümün örten olduğunu gösterelim. ${}_AA$ Artinian olduğundan 2.19 dan ${}_AA$ Notheriandır. 2.26 dan P_i $(1 \leq i \leq n)$ ayrışamaz olmak üzere

$${}_AA = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$$

esas ayrışamaz modüllerden oluşan direkt toplam ayrışımı mevcuttur. 3.10 ile

$$A/J(A) \cong P_1/J(A)P_1 \oplus P_2/J(A)P_2 \oplus \dots \oplus P_n/J(A)P_n$$

$A/_{J(A)}$ nın basit A-modüllerden oluşan direkt toplam ayrışımıdır. Şimdi $N\in{}_{A/_{J(A)}}\mathfrak{M}$ basit modüllü keyfi verilsin. 1.40 ile $\exists L\in Min\Lambda^{\ell}(A/_{J(A)})$ öyleki $N \cong_{A/_{J(A)}} L$ dır. 1.47 ile $\exists 1\leq i\leq n$ öyleki $L\cong P_i/_{J(A)P_i}$ dir. Açık olarak $[N]_{\sim}= [P_i/_{J(A)}P_i]_{\sim}$ ve $\bar{F}(P_i) = N$ dir.

3.12. Teorem (Yapı Teoremi)

A sol Artinian R-cebir olsun. Bu taktirde her projektif A-sol modül, esas ayrışamaz A-sol modüllerin bir direkt toplamına izomorftur. Bu ayrışım faktörlerin sırası ve izomorfi hariç tektürlüdür.

İspat : $P\in{}_A\mathfrak{M}$ projektif olsun. A sol Artinian olduğundan $A/_{J(A)}$ yarıbasittir. Buradan $P/_{J(A)P}$ yarıbasittir. Yani $i\in I$ için $N_i\in{}_{A/_{J(A)}}\mathfrak{M}$ basit modül olmak üzere

$$P/_{J(A)P} \cong \bigoplus_{i\in I} N_i$$

dir. 3.11 den $\exists P_i(i\in I)$ esas ayrışamaz A-modül öyleki

$$N_i \cong P_i/_{J(A)P_i}$$

dir. Böylece

$$P/_{J(A)P} \cong \bigoplus_{i\in I} (P_i/_{J(A)P_i}) \cong (\bigoplus_{i\in I} P_i)/_{J(A)(\bigoplus_{i\in I} P_i)}$$

dir. P_i P nin direkt terimi olduğundan her $i\in I$ için P_i ler projektiftir. 3.2 den $\bigoplus_{i\in I} P_i$ projektiftir. 3.9 dan $P\cong\bigoplus_{i\in I} P_i$ dir. Tekliği göstermek için Q_j $j\in J$ esas ayrışamaz A-sol modüller olmak üzere $\bigoplus_{i\in I} P_i \cong \bigoplus_{j\in J} Q_j$ olsun. Q_j, $j\in J$ esas ayrışamaz olduğundan

$Q_j/_{J(A)Q_j}$ $(j\in J)$ basittir. Buradan

$$\bigoplus_{i\in I}(P_i/_{J(A)P_i}) \cong \bigoplus_{i\in J}(Q_j/_{J(A)Q_j})$$

dir. 1.24 den $\exists\sigma : J \to I$ tameşlemesi öyleki

$$Q_j/_{J(A)Q_j} \cong P_{\sigma(j)}/_{J(A)P_{\sigma(j)}} \quad (j\in J)$$

dir. 3.9 dan $Q_j \cong P_{\sigma(j)}$ $j\in J$ elde edilir.

3.13 Sonuç

A sol Artinian R-cebir olsun. Bu taktirde her ayrışamaz A-sol modül bir esas ayrışamaz A-sol modüle izomorftur. Özellikle ayrışamaz projektif A-modüller devirlidir.

İspat : A sol Artinian, $P\in{}_A\mathfrak{M}$ projektif ve ayrışamaz A-modül olsun. 3.12 den $\exists P_i\in{}_A\mathfrak{M}$ $(i\in I)$ esas ayrışamaz öyleki $P\cong P_i$ dir. $P_i/_{J(A)P_i}\in{}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ basit olduğundan 1.11 den $P_i/_{J(A)P_i}$ devirlidir. O halde $P_i/_{J(A)P_i} = \langle x + J(A)P_i\rangle$ dir. Buradan $P_i = \langle x\rangle + J(A)P_i$ dir. 2.7 ile $P_i = \langle x\rangle$ devirlidir. $P_i \cong P$ olduğundan P devirlidir.

3.14. Sonuç

A sol Artinian R-cebir, $P\in{}_A\mathfrak{M}$ ayrışamaz ve projektif olsun. Eğer N P nin özaltmodülü ise $N\subseteq J(A)P$ dir.

İspat : $N \not\subset J(A)P$ ise $N+J(A)P/_{J(A)P}\in\Lambda(P/_{J(A)P})\setminus\{0\}$ dır. P ayrışamaz olduğundan 3.13 den P bir esas ayrışamaz A-modüle izomorfidir. 3.10 dan $P/_{J(A)P}\in{}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ basittir. Buradan

$$N + J(A)P/_{J(A)P} = 0 \quad \text{veya} \quad N+J(A)P/_{J(A)P} = P/_{J(A)P}$$

dir. $N \not\subset J(A)P$ olduğundan $N+J(A)P = P$ dir. A Artinian ve P ayrışamaz olduğundan $P<_A A$ dır. Buradan P Artinian ve Notheriandır ($P\in {}_A\mathfrak{M}$) 2.21 den P sonlu üretenlidir. $P+J(A)P = P$ ve P sonlu üretenli olduğundan 2.7 den $N=P$ dir. Bu ise N in P nin öz altmodülü olmasına aykırıdır. O halde $N\subset J(A)P$ dir.

A bir R-cebir olsun. Bir $e\in A$ elemanına idempotenttir. denir:$\Longleftrightarrow$ $e^2=e$ dir.

Standart tartışmalarda homomorfileri baz teşkil eden ispatlarda idempotentleri kullanabiliriz. Amacımız bu iddiamızı Artinian cebirler üzerindeki projektif modüllerde tartışmaktır.

3.15. Önerme

A bir R-cebir ve $P\in\Lambda^{\ell}(A)$ olsun.

i) P direkt terimdir.$\Longleftrightarrow$ $\exists e\in A$ idempotent öyleki $P=Ae$ dir.

ii) $e\in A$ idempotent $P=Ae$ ve $P=Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_m$ ise $\exists e_i\in A$ $1\leq i\leq m$ idempotentler öyleki

$$e = e_1+e_2+\dots+e_m, \quad e_ie_j=0 \quad (i\neq j) \quad e_ie=ee_i \quad \text{ve} \quad Q_i=Ae_i \quad 1\leq i\leq m$$

dir.

iii) $P=Ae$ ayrışabilirdir.$\Longleftrightarrow$ $\exists f\in A$ idempotent öyleki

$$0\neq f\neq e \quad \text{ve} \quad ef=fe=f$$

dir.

İspat : i) "$\Longrightarrow$" P direkt terim olsun. Bu taktirde

$$A = P \oplus P'$$

olacak şekilde bir $P' \in \Lambda^{\ell}(A)$ vardır. Buradan $1_A = e+e'$ olacak şekilde tektürlü $e \in P$, $e' \in P'$ elemanları mevcuttur. O halde

$$e = e^2 + ee' \quad \text{ve} \quad -e^2 + e = ee' \in P \cap P' = 0$$

olduğundan $e^2 = e$ dir ve e idempotenttir. Benzer şekilde e' idempotenttir.

$x \in P$ keyfi verilsin.

$$x = x.1_A = x(e+e') = xe+xe' \text{ ve } x-xe=xe' \in P \cap P' = 0$$

dır. Buradan $x=xe$ ve $P \subset Ae$, $e \in P$ olduğundan $Ae \subset P$ dir. Dolayısıyla $P=Ae$ dir.

"$\Longleftarrow$" $P=Ae$ (e idempotent) olsun. $A=Ae \oplus A(1-e)$ olduğu açıktır. Buradan $P=Ae \in \Lambda^{\ell}(A)$ direkt terimdir.

ii)"$\Longrightarrow$" $e \in A$ idempotent $P=Ae$ ve $P= Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_m$ olsun. Bu taktirde $\exists e_i \in Q_i$ $1 \leq i \leq m$ öyleki

$$e = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$$

dir. Her $1 \leq i \leq m$ için $e_i \in Q_i$ olduğundan

$$Ae_i \subset Q_i \quad (*)$$

dir.

$x \in Q_i \subset Ae$ ise $\exists x' \in A$ öyleki $x = x'e$ dir. Buradan

$$xe = x'e^2 = x'e = x$$

dir.

$$x = xe = x(e_1+e_2+\ldots+e_m) = xe_1+xe_2+\ldots+xe_m$$

olduğundan

$$x - xe_i = \sum_{j \neq i} xe_j \in Q_i \cap \sum_{j \neq i} Q_j = 0 \qquad (1)$$

olduğundan $x-xe_i=0$ dır. Dolayısıyla $x=xe_i$ dir. Buradan

$$Q_i \subset Ae_i \qquad (**)$$

dir. (*) ve (**) $Q_i=Ae_i$ $1 \leq i \leq m$ elde edilir.

(1) de $x=e_i$ seçilirse $e_i=e_ie_i = e_i^2$ olduğundan $e_i \in Q$ $(1 \leq i \leq m)$ idempotenttir. $i \neq j$ için

$$e_ie = \sum_{j=1}^{m} e_ie_j = e_i$$

olup $e_ie_j \in Q_j \bigcap_{i \neq j} Q_i = 0$ dır. Buradan her $1 \leq i,j \leq m$ ve $i \neq j$ için $e_ie_j=0$ dır. Daha fazla olarak $e_ie=ee_i=e_i$ dir.

iii) "$\Longleftarrow$" Bir $f \in A$ idempotenti $f \neq 0$, $f \neq e$, $fe=ef=f$ olacak biçimde mevcut olduğunu kabul edelim.

Açık olarak $Ae = Af + A(e-f)$ dir.

$$0 = xf+y(e-f) \text{ ve } 0f=xf^2+y(ef-f^2) = xf+y(f-f)$$

dir. Buradan $0=xf$ olup $xf=y(e-f)=0$ olduğundan

$Ae=Af \oplus A(e-f)$, $Af \neq 0$, $A(e-f) \neq 0$ olduğundan P ayrışabilirdir.

"$\Longrightarrow$" P ayrışabilir olsun. Bu taktirde $\exists P_1,P_2 \in \Lambda(P) \setminus \{0,P\}$ öyleki $P=P_1 \oplus P_2$ dir. Buradan $\exists e_i \in P_i$ $1 \leq i \leq 2$ idempotent öyleki $e=e_1+e_2$ dir. $e_1,e_2 \neq 0$ olduğundan $P=Ae_1$, $P=Ae_2$ dir.

$f:=e_2$ olsun. $e_2 \neq 0$ olduğundan $f \neq 0$ dır, $e_1 \neq 0$ olduğundan $f \neq e$ dir. $f^2=e_2^2=e_2=f$ olduğundan f idempotenttir.

$$fe = e_2(e_1+e_2) = e_2e_1+e_2^2 = e_2=f \text{ ve}$$

$$ef = (e_1+e_2)e_2 = e_1e_2+e_2^2 = e_2^2 = e_2 = f$$

dir. Buradan $f \neq 0$, $f \neq e$, $ef=fe=f$ ve f idempotent olduğu elde edilmiş olur.

A bir R-cebir olsun. $e\in A$ idempotentine pirimitiftir denir $:\Leftrightarrow$ Ae ayrışamaz A-modüldür. A-sol Artinian R-cebir olsun. $e\in A$ idempotentine pirimitiftir denir $:\Leftrightarrow Ae\in {}_A\mathfrak{M}$ esas ayrışamazdır.

Aşağıdaki sonuç 3.15 den hemen elde edilir.

3.16 Sonuç

A bir R-cebir $e\in A$ idempotent olsun. e primitiftir. $\Longleftrightarrow \nexists f\in A$ idempotent öyleki $0\neq f\neq e$ ve $ef=fe=e$ dir. Diğer bir ifade ile $e\in A$ idempotenti primitiftir. $\Longleftrightarrow$ $e=f_1+f_2$ $f_1f_2=f_2f_1=0$ ve $f_i^2=f_i$ $(i=1,2)$ ise $f_1=0$ veya $f_2=0$ dır.

3.17. Lemma

$P\in\Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim olmak üzere her $M\in {}_A\mathfrak{M}$ için

$$Hom_A(P,M):=\{\lambda_u{\downarrow}P \mid u\in M \text{ ve } \lambda_u(a)=a.u,\ a\in A\}$$

dır.

İspat : Her bir $u\in M$ için

$$\lambda_u(a) = a.u$$

ile tanımlanan $\lambda_u:A\to M$ dönüşümü bir A-modül homomorfisidir. Her $u\in M$ için $\lambda_u{\downarrow}P:P\to M$ A-modül homomorfisi olduğundan

$$\{\lambda_u{\downarrow}P \mid u\in M\}\subseteq Hom_A(P,M) \qquad (*)$$

dir.

$P\in\Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim olduğundan 3.15 den $\exists e\in A$ idempotent elemanı öyleki $P=Ae$ dir.

$\theta\in Hom_A(P,M)$ keyfi verilsin. Her $x\in P$ için $x=xe$ olduğundan

$$\theta(x)=\theta(xe)=x.\theta(e)=\lambda_{\theta(e)}(x)$$

dir. Böylece $\theta=\lambda_{\theta(e)}{\downarrow}P$ dir ve buradan

$$Hom_A(P,M)\subseteq\{\lambda_u{\downarrow}P \mid u\in M\} \qquad (**)$$

dir. (*) ve (**) den

$$\mathrm{Hom}_A(P,M) := \{\lambda_u{\downarrow}P \mid u \in M\}$$

elde edilir.

3.18. Sonuç

A bir R-cebir $e, f \in A$ idempotent elemanlar olsun. Bu taktirde $\mathrm{Hom}_A(Ae,\ Af) \underset{R}{\cong} eAf$, ve $\mathrm{End}_A(Ae) \underset{R}{\cong} eAe$

dir. A sol Artinian R-cebir ise eAe de sol Artiniandır.

İspat : 3.17 den $\mathrm{Hom}_A(Ae,Af) = \{\lambda_{xf}{\downarrow}Ae \mid x \in A\}$ dır.

$$\lambda_{xf}(ae) = (ae)xf = \lambda_{exf}(a)$$

olduğundan $\lambda_{xf}{\downarrow}Ae = \lambda_{exf}{\downarrow}Ae$ dır. Buradan

$$\mathrm{Hom}_A(Ae,Af) = \{\lambda_{exf}{\downarrow}Ae \mid x \in A\}$$

elde edilir.

$\lambda_{exf}{\downarrow}Ae = \lambda_{eyf}{\downarrow}Ae$ ise $exf = \lambda_{exf}(e) = \lambda_{eyf}(e) = eyf$

dir. Böylece her $z \in eAf$ için

$$\Psi(z) = \lambda_z{\downarrow}Ae$$

yardımıyla tanımlanan $\Psi : eAf \to \mathrm{Hom}_A(Ae,Af)$ dönüşümü bir R-modül izomorfisidir. Gerçekten $z,\ z_1,\ z_2 \in eAf$ ve $r \in R$ için

$$\Psi(z_1+z_2) = \lambda_{z_1+z_2}{\downarrow}Ae,$$

$$\lambda_{z_1+z_2}(ae) = ae(z_1+z_2) = (ae)z_1 + (ae)z_2$$

$$= \lambda_{z_1}(ae) + \lambda_{z_2}(ae) = (\lambda_{z_1}+\lambda_{z_2})(ae)$$

dir. Buradan $\Psi(z_1+z_2) = \Psi(z_1) + \Psi(z_2)$ dir.

$\Psi(rz) = \lambda_{rz}$,

$\lambda_{rz}(ae) = (ae)rz \overset{(*)}{=} r(ae)z = r\lambda_z(ae)$ $\quad (* \ , \ R \subset Z(A))$

olduğundan $\lambda_{rz} = r\lambda_z$ olup $\Psi(rz) = r\Psi(z)$ dir.

Dolayısıyla Ψ R-modül izomorfisidir. Buradan

$Hom_A(Ae, Af) \underset{R}{\cong} eAf$

elde edilir.

$e = f$ ise $\Psi(z_1 z_2) = \lambda_{z_1 z_2}$ ve

$\lambda_{z_1 . z_2}(ae) = ae(z_1 z_2) = (aez_1)z_2 = (\lambda_{z_1}(ae))z_2 = (\lambda_{z_2} \circ \lambda_{z_1})(ae)$

olduğundan $\lambda_{z_1 z_2} = \lambda_{z_2} \circ \lambda_{z_1}$ olup $\Psi(z_1 z_2) = \Psi(z_1)\Psi(z_2)$ dir.

Buradan Ψ R-cebir izomorfisi olup

$eAe \cong Hom_A(Ae, Ae) = End_A(Ae)$

dir.

$N \in \Lambda^{\ell}(eAe)$ olsun. Bu taktirde $AN \in \Lambda^{\ell}(A)$ dır. $e \in eAe$ birim eleman olduğundan $eN = N$ dir.

$eAN = eA(eN) = eAeN \subset N$ ve $N = eN \subset eAN$

olduğundan $eAN = N$ dir. Buradan her $N \in \Lambda^{\ell}(eAe)$ için

$\Psi(N) = AN$

ile $\Psi : \Lambda^{\ell}(eAe) \to \Lambda^{\ell}(A)$ tanımlansın. Bu taktirde Ψ bir kafes monomorfisidir. A sol Artinian ise eAe de sol Artiniandır.

3.19. Sonuç

$e \in A$ idempotent ve $P = Ae$ olsun. Bir $M \in {}_A\mathfrak{M}$ için aşağıdaki koşullar denktir.

i) $Hom_A(P,M) \neq 0$;

ii) $PM \neq 0$;

iii) $eM \neq 0$

dır. Bu sonuç A sol Artinian, $P,M \in_A \mathfrak{M}$ esas ayrışamaz olması halinde büyük öneme sahiptir.

İspat : Açık olarak $P \in \Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim ve 3.17 den

$$Hom_A(P,M) := \{\lambda_u \downarrow P \mid u \in M\}$$

dir.

i) $\Longrightarrow$ ii) $Hom_A(P,M) \neq 0$ ise $\exists u \in M$ öyleki

$$\lambda_u \downarrow P \neq 0$$

dır. $\lambda_u \downarrow P : P \to M$, $(\lambda_u \downarrow P)(ae) = a(\lambda_u \downarrow P)e$, $(\lambda_u \downarrow P) \neq 0$ olduğundan $(\lambda_u \downarrow P)e = eu \neq 0$ dır. Buradan $PM \neq 0$ dır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $PM \neq 0$ olsun. Özellikle $eM \neq 0$ dır $(AeM=PM)$

iii) $\Longrightarrow$ i) $eM \neq 0$ olsun. Bu taktirde $\exists u \in M$ öyleki $eu \neq 0$ ve $(\lambda_u \downarrow P)e \neq 0$ dır. Buradan $\lambda_u \downarrow P \neq 0$ olup $Hom_A(P,M) \neq 0$ dır.

3.20. Sonuç

A sol Artinian R-cebir, $e,f \in A$ primitif idempotentler $P=Ae$, $Q=Af$ öyleki $P \underset{A}{\not\cong} Q$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) $Hom_A(P,Q) \neq 0$;

ii) $PJ(A)Q \neq 0$;

iii) $eJ(A)f \neq 0$

dır.

İspat : i $\Longrightarrow$ ii) $\Longleftrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ i olduğunu gösterelim. Açık olarak $J(A)=J(A)A$ dır. Buna göre

$$PJ(A)Q = AeJ(A)Af = AeJ(A)f$$

olduğundan iii) $\Longleftrightarrow$ ii) açıktır.

i) $\Longrightarrow$ ii) $P \underset{A}{\ncong} Q$ ise 3.11 den $P/_{J(A)P} \ncong Q/_{J(A)Q}$ dır. 3.10 ile $P,Q \in \Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim ve ayrışamaz olduğundan

$$P/_{J(A)P},\ Q/_{J(A)Q} \in {}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$$ basittir. 1.12 den

$$\mathrm{Hom}_{A/_{J(A)}}(P/_{J(A)P},\ Q/_{J(A)Q}) = 0$$

dır. özellikle $0 \neq \Psi \in \mathrm{Hom}_A(P,Q)$ ise $\bar{\Psi} \in \mathrm{Hom}_{A/J(A)}(P/_{J(A)P},\ Q/_{J(A)Q})$ dır. Buradan $\bar{\Psi}=0$ ve $\bar{\Psi}(P/_{J(A)P})=0$ dır. O halde

$$\Psi(P) \subset J(A)Q$$ elde edilir.

$$0 \neq \mathrm{Im}\ \Psi = \Psi(Ae) = P\,\Psi(e) \subset PJ(A)Q$$

olduğundan $0 \subsetneqq PJ(A)Q$ dır.

iii) $\Longrightarrow$ i) $0 \neq eJ(A)f \subset eAf$ olup 3.18 ile $\mathrm{Hom}_A(Ae,\ Af) \cong eAf$ olduğundan $\mathrm{Hom}_A(P,Q) \neq 0$ dır.

Wedderburn Yapı Teoremi Artinian cebirlere bilinen şekli ile genelleştirme programı bu sonuçla ortadan kalkıyor. Çünkü izomorf olmayan P,Q esas ayrışamaz modüller $\mathrm{Hom}_A(P,Q) \neq 0$ olacak biçimde mevcuttur. Bu noktada yeni bakışa ihtiyacımız vardır. O da her bir Artinian cebiri ilgili graph'i ile karakterize etmek olacaktır.

3.21. Tanım

A sol Artinian R-cebir olsun. $\{e_1,e_2,\ldots,e_r\}$ A daki primitif idempotentlerin kümesi öyleki $\{P_i=Ae_i \mid 1\leq i\leq r\}$ esas ayrışamaz A-sol modüllerin izomorfi sınıflarının sınıf temsilcilerinin tam sistemi olsun. A nın quiveri diye

$V=\{e_1,e_2,\ldots,e_r\}$ köşelerin kümesi $E=\{(e_i,e_j) \mid e_iJ(A)e_j\neq 0\}$ kenarların kümesi olmak üzere

$\Gamma(A) = (V,E)$

direkt graphdır.

(V_i,E_i) $i=1,2$ quiverleri verilmiş olsun. $(V_1,E_1)\cong(V_2,E_2)$ $:\Longleftrightarrow$ $\Psi:V_1\to V_2$ tameşlemesi öyleki her $(e_i,e_j)\in E_1$ için $(\Psi(e_i),\Psi(e_j))\in E_2$ ile tanımlanan $(\Psi,\Psi):E_1\to E_2$ dönüşümü tam eşlemedir. Buradan dolayı $\Gamma(A)$ nın köşelerinin obje olarak hiç bir önemi yoktur. Köşeler için primitif idempotentleri kullanmak akla uygun gelir. Ancak bu idempotentlerin seçimi için bir kural yoktur ve onların özel bir seçimini kullanma zorunluluğu yoktur. Zira her bir seçim bir quiver verecektir.

3.22. Önerme

$\Gamma(A)$ köşelerin kümesi için primitif idempotentlerin seçiminden bağımsızdır. Üstelik $A\cong B$ ise $\Gamma(A)\cong\Gamma(B)$ dir.

İspat : e,e', $f,f'\in A$ primitif idempotentler öyleki $Ae\cong Ae'$, $Af\cong Af'$ olsun. Bu taktirde

$eJ(A)f\neq 0 \Longleftrightarrow e'J(A)f'\neq 0$

dır. $Ae\cong Ae'$ olduğundan $J(A)e\cong J(A)e'$ olduğu açıktır. Buradan

$\mathrm{Hom}_A(Af, J(A)e) \cong \mathrm{Hom}_A(Af', J(A)e')$

dır. 3.19 dan $Af'J(A)e' \neq 0$ dır. Buradan $f'J(A)e' \neq 0$ elde edilir.

$\Psi: A \cong B$ olsun. A sol Artinian olduğundan onun izomorf resmi olan B de sol Artiniandır ve $A/_{J(A)} \cong B/_{J(B)}$ dir.

$V_A := \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ primitif idempotentlerin bir tam sistemi ise $V_B := \{\Psi(e_1), \Psi(e_2), \ldots, \Psi(e_m)\}$ B nin primitif idempotentlerinin bir tam sistemidir. $E_A \cong E_B$ olduğundan tanımdan $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$ dir.

$\Gamma(A)$ quiveri A için bir ölçü olacaktır. A yarıbasit ise $J(A)=0$ olduğundan $E=\phi$ olup $\Gamma(A)=(V,\phi)$ dır. Bunun tersi aynı zamanda doğrudur. $\Gamma(A)$ köşelerin kümesi tek elemanlı ise $A/_{J(A)}$ basittir (1.50).

Böyle cebirlere Asılımsı (İlkel) cebirler denir. Komutatif Artinian bir cebirin kenarlarının kümesi basit biçime sahiptir: biricik kenarlar (e_i, e_i), $J(A)e_i \neq 0$ olan komutatif Artinian cebirlerin yapısı basittir.

Örnek:

A Artinian R-cebir $\Gamma(A)=(V,\phi)$ olsun. Bu taktirde A yarıbasittir.

Gerçekten $V=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ olsun. Bu taktirde

$1_A = e_1 + e_2 + \ldots + e_m$

dir. $J(A) = 1_A J(A) 1_A = (e_1+e_2+\ldots+e_m) J(A)\ (e_1+e_2+\ldots+e_m) \subseteq \sum_{ij} (e_i J(A)) e_j$

$E=\phi$ olduğundan $e_i J(A) e_j = 0 \quad 1 \leq i,j \leq n$ dir. Buradan $J(A)=0$ dır. A Artinian, $J(A)=0$ olduğundan 1.39 dan A yarıbasittir.

3.23. Tanım

Bir R-cebir A ya Asılımsı (İlkel) dir denir: $\Longleftrightarrow$ $A/_{J(A)}$ basittir.

3.24. Önerme

A sol Artinian Asılımsı R-cebir olsun. Bu taktirde tüm esas ayrışamaz A-sol modüller izomorftur. Üstelik izomorfi hariç bir tek olarak tanımlı sol Artinian lokal B cebiri ve bir tek olarak tanımlı $n \in \mathbb{N}^*$ sayısı $A \cong M_n(B)$ olacak biçimde vardır.

İspat: A sol Artinian olduğundan $A/_{J(A)}$ yarıbasit, A Asılımsı olduğundan $A/_{J(A)}$ basittir. 1.50 ile tüm basit $A/_{J(A)}$-sol modüller izomorftur. 3.11 den tüm esas ayrışamaz A-sol modüller izomorftur. Bu taktirde izomorfi ve n tektürlü olarak belirli olan $P \in {}_A\mathfrak{M}$ için ${}_AA = \oplus_n P$ dir. $B = End_A(P)$ olmak üzere 1.55 ile

$$A \cong End_A({}_AA) \cong End_A(\oplus_n P) \cong M_n(B)$$

dir. P ayrışamaz olduğundan 2.21 den P Artinian ve Notheriandır. 2.33 den B lokal cebirdir. 3.15 den $\exists e \in A$ idempotent öyleki $P = Ae$ dir. A sol Artinian olduğundan 3.18 den $End_A(Ae)$ sol Artiniandır. Dolayısıyla B sol Artinian cebir olup $A \cong M_n(B)$ dir.

C bir lokal cebir olmak üzere $A \cong A' = M_m(C)$ olsun. Bu taktirde $A' = \bigoplus_{i=1}^{m} A'\varepsilon_{ii}$ ve 3.18 ile $C \cong \varepsilon_{11}A'\varepsilon_{11} \cong End_{A'}(A'\varepsilon_{11})$ olup buradan $A'\varepsilon_{11}$ esas ayrışamaz A'-sol modüldür. Dolayısıyla $A'\varepsilon_{11}$ esas ayrışamaz A-sol modüldür. Buradan $P \cong A'\varepsilon_{11}$ ve $m=n$ olup $B \cong C$ dir.

Bu önermenin terside doğrudur. Yani B sol Artinian lokal cebir ise her $n\in\mathbb{N}^*$ için $M_n(B)$ sol Artinian Asılımsı cebirdir. Bu $(\Lambda(B),\leq)\cong(\Lambda(M_n(B))\leq)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ olmasının açık bir sonucudur. Şimdi bu kafes izomorfiyi görelim. Her $I\in\Lambda(B)$ için

$$\Psi(I) = M_n(I)$$

ile tanımlanan $\Psi:\Lambda(B)\to\Lambda(M_n(B))$ dönüşümü sırayı koruyan bir tam eşlemedir. $I\in\Lambda(B)$ maksimaldir $\Longleftrightarrow$ $M_n(I)\in\Lambda(M_n(B))$ maksimaldir. Buradan

$$J(B) = \bigcap_{I\in \mathrm{Maks}\,\Lambda(B)} I$$

dır.

2.11 ile

$$J(M_n(B))\cong \bigcap_{I\in \mathrm{Maks}\,\Lambda(B)} \Psi(I) = \Psi\Big(\bigcap_{I\in \mathrm{Maks}\,\Lambda(B)} I\Big) = \Psi(J(B))$$

$$= M_n(J(B)) \quad (\Psi \text{ kafes izo. old.})$$

$$J(B)\in \mathrm{Maks}\,\Lambda(B) \Longleftrightarrow J(M_n(B))=M_n(J(B))\in \mathrm{Maks}\,\Lambda(M_n(B))$$

dir. Buradan B sol Artinian lokal cebir ise her $n\in\mathbb{N}^*$ için $M_n(B)$ sol Artinian Asılımsı cebirdir. Çünkü

$$M_n(B/_{J(B)}) \cong M_n(B)/_{M_n(J(B))} = M_n(B)/_{J(M_n(B))}$$

dir.

Asılımsı olmayan Artinian cebirler esas ayrışamaz P,Q modüllerine $P \not\cong_A Q$ ve $\mathrm{Hom}_A(P,Q)\neq 0$ olacak biçimde sahip olabilir. Böyle modüller mevcut olduğu zaman Wedderburn Yapı Teoreminin ispatı geçersizdir.

Bir Artinian A-cebirin $\Gamma(A)$ quiveri izomorf olarak farklı olan esas ayrışamaz P, Q modüllerin $\mathrm{Hom}_A(P,Q)\neq 0$ olacak biçimde birleştirilerek tanımlanır. $\Gamma(A)$ nın geometrik özelliklerinden A nın yapısını tahmin etme ümidini verir. Şimdi burada A ile $\Gamma(A)$ arasındaki basit ilişkiyi ele alalım.

$\Gamma_1=(V_1,E_1)$, $\Gamma_2=(V_2,E_2)$, $V_1\cap V_2 = \emptyset$ quiverler olsun. Bu taktirde Γ_1,Γ_2 nin ayrık bileşimi

$$\Gamma_1 \uplus \Gamma_2 = (V_1\cup V_2,\ E_1\cup E_2)$$

dir. $\Gamma=(V,E)$ bir quiver ve $V=V_1 \uplus V_2$ olsun. Bu taktirde Γ nın ayrık bileşimi

$$(V_1,\ E\cap(V_1xV_1)) \uplus (V_2,\ E\cap(V_2xV_2))$$

dir. Bu durumda tam olarak E de V_1 in köşelerini V_2 nin köşelerine birleştiren hiç bir kenar yoktur.

Bir Γ quiveri boştan farklı iki quiverin ayrık bileşimi olarak yazılamıyorsa Γ quiverine bağlantılıdır denir. Γ bağlantılı bir quiver ise her u,v köşesi için kenarların bir dizisini içeren bir yol ile birleştirilebilir. (yönlendirilmeye bakılmaksızın). Geometrik olarak her quiverin bağlantılı quiverlerin ayrık bir bileşimi olarak yazılabileceği olanaklıdır.

3.25 Lemma

$A \doteq B\dot{+}C$ Artinian cebir olsun. Bu taktirde

$$\Gamma(A) = \Gamma(B) \uplus \Gamma(C)$$

dir.

İspat: $V_1=\{e_1,e_2,\ldots,e_r\}$, $V_2=\{f_1,f_2,\ldots,f_s\}$ olmak üzere $\Gamma(B)=(V_1,E_1)$, $\Gamma(C)=(V_2,E_2)$ olsun. Tanımdan dolayı e_i $1\leq i\leq r$ ve

f_j $1 \leq j \leq s$ sırasıyla B ve C nin primitif idempotentleridir. Aynı zamanda A da primitif idempotentlerdir öyleki $Ae_i = Be_i$, $Af_j = Cf_j$ ayrışamazdır.

Uygun m_i ve n_j doğal sayıları için

$$ {}_B B \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \oplus\, m_i Be_i \ , \quad {}_C C \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \oplus\, n_j\, Cf_j $$

izomorfileri vardır. Buradan dolayı

$$ {}_A A = {}_A B \oplus {}_A C \cong \Big(\bigoplus_{i=1}^{r} \oplus\, m_i Ae_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{s} \oplus\, n_j Af_j\Big). $$

dir. Krull-Schmid Teoremi ile her esas ayrışamaz A-sol modül Ae_i veya Af_j lerin birine izomorftur. 2.15 den $J(A) = J(B) \dot{+} J(C)$ olduğundan her i,j için $e_i J(A) f_j = 0 = f_j J(A) e_i$ dir. Daha fazla olarak $e_i J(A) e_k \neq 0 \iff e_i J(B) e_k \neq 0$ ve $f_j J(A) f_t \neq 0 \iff f_j J(C) f_t \neq 0$ dır. Buradan

$$ \Gamma(A) = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2) = \Gamma(B) \,\dot{\cup}\, \Gamma(C) $$

elde edilir.

3.26. Lemma

A $\Gamma(A) = \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2$ olan sol Artinian R-cebir olsun. Bu taktirde $\exists$ sol Artinian R-cebirler B, C öyleki $A = B \dot{+} C$ ve $\Gamma(B) = \Gamma_1$ $\Gamma(C) = \Gamma_2$ dir.

İspat : $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ ve $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ öyleki $\Gamma(A) = (V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2)$ olsun. $m = |V_1|$, $n = |V_2|$, $V_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $V_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ve $P_i \cong Ae_i$ $1 \leq i \leq m$, $Q_j :\cong Af_j$ $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$B := \bigoplus_{i=1}^{m} P_i, \quad C := \bigoplus_{j=1}^{n} Q_j \quad \text{ve} \quad {}_A A = B \oplus C$$

olan bir ayrışımı olsun. $E_1 \subseteq V_1 x V_1$ ve $E_2 \subseteq V_2 x V_2$ olduğundan 3.20 den $Hom_A(P_i, Q_j) = Hom_A(Q_j, P_i) = 0$ $1 \leq i \leq m$, $i \leq j \leq n$ dir. Buradan 3.19 ile $Hom_A(B,C) = Hom_A(C,B) = 0$ ve $BC = CB = 0$ dır. Böylece $B, C \in \Lambda(A)$ ve $A = B \dotplus C$ dir.

$e \in V_1$ ise $Be = Ae$ ayrışamaz B-modüldür. $e' \in V_1$ $e' \neq e$ $Be \not\cong Be'$ dır. Benzer şekilde V_2 nin elemanları primitif idempotentler olup izomorfik olarak farklı olan C-modülleri üretir. 3.25 ile $\Gamma(B) = \Gamma_1$, $\Gamma(C) = \Gamma_2$ dir.

Trivialden farklı Artinian B-cebirine bir bloktur denir. $:\Longleftrightarrow$ $\Gamma(B)$ bağlantılı bir quiverdir.

3.27. Önerme

A sol Artinian R-cebir olsun.

i) A tektürlü olarak belirli blokların çarpımıdır.

ii) Her bir blok, cebir olarak ayrışamazdır.

İspat : $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ bağlantılı quiverler öyleki $\Gamma(A) = \Gamma_1 \uplus \Gamma_2 \uplus \ldots \uplus \Gamma_t$ olsun. 3.26 ile $B_1, B_2, \ldots, B_t$ R-cebirler öyleki $\Gamma(B_i) = \Gamma_i$ $1 \leq i \leq t$ olup

$$A = B_1 \dotplus B_2 \dotplus \ldots \dotplus B_t$$

dir. Γ_i bağlantılı quiver olduğundan $\Gamma(B_i)$ bağlantılı quiverdir. Buradan B_i $1 \leq i \leq t$ blok cebirdir. Bu ayrışımın tekliği 2.36 nın bir sonucudur. 3.25 ile devamla blokların ayrışamazlığı direkt olarak elde edilir.

3.28. Tanım

B bir R-cebir olsun. B ye indirgenmiştir denir: $\Longleftrightarrow$ $B/_{J(B)}$ bölme cebirlerinin bir sonlu direkt çarpımıdır. Bundan sonra her sol Artinian R-cebir için bir ilgili indirgenmiş R-cebir B nin A ile pek çok özelliği paylaşacak biçimde mevcut olduğunu göstereceğiz.

A ile bir tek olarak tanımlı olan indirgenmiş B cebirine A nın temel cebiri denir. Bundan sonra A sol Artinian R-cebiri gösterecektir.

3.29. Lemma

$P_1, P_2, \ldots, P_r$ esas ayrışamaz A-sol modüller ve $P=P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_r$ olsun. Bu taktirde $End_A(P)$ indirgenmiş cebirdir $\Longleftrightarrow$ Her $1 \leq i,j \leq r$, $i \neq j$ için $P_i \not\cong P_j$ dir.

İspat : 3.8 den

$$End_A(P)/_{J(End_A(P))} \cong End_{A/_{J(A)}}(P/_{J(A)P})$$

$$\cong End_{A/_{J(A)}}(P_1/_{J(A)P_1} \oplus P_2/_{J(A)P_2} \oplus \ldots \oplus P_r/_{J(A)P_r})$$

$$\overset{1.57}{\cong} \dot{\sum_{i=1}^{r}} End_{A/_{J(A)}}(P_i/_{J(A)P_i})$$

dir. 3.11 den $P_i/_{J(A)P_i} \in A/_{J(A)}\mathfrak{M}$ olduğundan $End_{A/_{J(A)}}(P_i/_{J(A)P_i})$ bölme cebiridir. Dolayısıyla $End_A(P)$ indirgenmiş cebirdir.

$$P_1/_{J(A)P_1} \oplus P_2/_{J(A)P_2} \oplus \ldots \oplus P_r/_{J(A)P_r} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} n_i \; P_i/_{J(A)P_i}$$

olsun.

1.55 ile $\mathrm{End}_{A/J(A)}(\oplus\, n_i\, P_i/J(A)P_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} Mn_i(\mathrm{End}_{A/J(A)}(P_i/J(A)P_i))$

dir. Buradan $Mn_i(\mathrm{End}_{A/J(A)}(P_i/J(A)P_i))$ bölme cebiridir.

$\Longleftrightarrow$ $n_i=1$ $1\leq i\leq r$ ise $r=s$ dir.

3.11 den her $i\neq j$ için $P_i/J(A)P_i \not\cong P_j/J(A)P_j \Longleftrightarrow$ her $i\neq j$ için $P_i \not\cong P_j$ dir.

3.30. Lemma

$P\in\Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim ve her bir P_i $1\leq i\leq r$ esas ayrışamaz A-sol modüller olmak üzere

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_r$$

olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

i) $P/J(A)P \in {}_{A/J(A)}\mathfrak{M}$ sadıktır.

ii) $PA = A$,

iii) Her esas ayrışamaz A-sol modül bir veya birden fazla P_j modülüne izomorftur.

İspat: A yarıbasit olsun.

i $\Longrightarrow$ ii) ${}_AA=PA \oplus Q$ olsun. $Q\neq 0$ ise $N\in\Lambda(Q)\setminus\{0\}$ öyleki $NP=0$ ve N minimaldir. (A sol Artinian R-cebir) Buradan her $x\in N$ için $xP=0$ dır. P sadık olduğundan $x=0$ olmak zorundadır. O halde $N=0$ dır. Bu ise N in minimal olması ile çelişir. O halde $Q=0$ olup ${}_AA=PA$ dır.

ii $\Longrightarrow$ iii) $PA=A$ ve $M\in{}_A\mathfrak{M}$ basit olsun. Bu taktirde 1.40 ile $N\in\Lambda^{\ell}(A)$ minimal öyleki $M\cong N$ dir. Buradan $N\in\Lambda^{\ell}(PA)$ minimaldir.

$P=Ae$, $P_i=Ae_i$, $e=e_1+e_2+\ldots+e_n$, $e_ie_j=0$, $i\neq j$, $e_ie=ee_i=e_i$ $1\leq i\leq n$ olacak biçimde vardır.

$(PA)N\neq 0$ olduğundan özellikle $eN\neq 0$ dır. Buradan $\exists 1\leq i\leq n$ öyleki $e_iN\neq 0$ olup $P_iN\neq 0$ dır. P_i ve N minimal ve $P_iN\neq 0$ olduğundan 1.46 dan $P_i\cong N$ dir. Buradan $M\cong P_i (1\leq i\leq n)$ dir.

iii) $\Longrightarrow$ ii) ${}_AA=PA\oplus Q$ olsun. $Q\neq 0$ ise $\exists N\in\Lambda(Q)\setminus\{0\}$ öyleki $N\in\Lambda(A)$ minimaldir. iii) den $\exists 1\leq i\leq n$ öyleki $N\cong P_i$ dir. Buradan $P_iN\neq 0$ olup $PN\neq 0$ elde edilirki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Q=0$ olup $A=PA$ dır.

ii) $\Longrightarrow$ i) $PA=A$ olsun. Buradan açık olarak P A-sadık modüldür. Böylece i) $\Longleftrightarrow$ ii) $\Longleftrightarrow$ iii) elde edilir.

Eğer $J(A)\neq 0$ ise A yerine $A/_{J(A)}$ alınarak ispat tamamlanır.

3.31. Önerme

A sol Artinian R-cebir olsun. $\exists P\in\Lambda^{\ell}(A)$ öyleki

i) P ${}_AA$ nın direkt terimidir.

ii) $PA=A$ dır.

iii) $End_A(P)$ indirgenmiş R-cebirdir.

i) ii) iii) koşullarını gerçekleyen $P\in\Lambda^{\ell}(A)$ izomorfi hariç tektürlüdür.

İspat :A sol- Artinian R-cebir olduğundan $A/_{J(A)}$ Artinian yarıbasit R-cebirdir.

$\{\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots,\bar{P}_r\}$, Min $(\Lambda^{\ell}(A/_{J(A)})\setminus\{0\},\subseteq\}$ nin izomorfi sınıflarının sınıf temsilcileri olsun. 3.11 ile $P_1,P_2,\ldots, P_r\in\Lambda^{\ell}(A)$ esas ayrışamaz öyleki $\bar{P}_i\cong P_i/_{J(A)P_i}$ $(1\leq i\leq r)$ dir.

$P=P_1\oplus P_2\oplus\ldots\oplus P_r$ olsun. Bu taktirde 3.29 ile $End_A(P)$ indirgenmiş R-cebirdir (Zira 3.9 ile $i\neq j$ için $\bar{P}_i\ncong\bar{P}_j$ olduğundan $i\neq j$ için $P_i\ncong P_j$ dır). 3.30 iii) $\Longrightarrow$ ii) den $PA=A$ ve P A nın bir direkt terimidir. Açık olarak böyle bir P, izomorfi hariç tektürlüdür.

Önermedeki i) ii) iii) koşullarını gerçekleyen $P\in\Lambda^{\ell}(A)$ olsun. Bu taktirde $B:=End_A(P)$'e A nın Temel cebiri denir. P izomorfi hariç tektürlü olarak belirli olduğundan B izomorfi hariç tektürlüdür.

Örnek :

A yarıbasit R-cebir olsun. 1.58 den D_i $1\leq i\leq r$ bölme cebirleri olmak üzere

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \dots \dotplus A_r, \quad A_i \cong Mn_i(D_i)$$

dir. Gerçekten her bir A_i basit ve $|\overline{Min(\Lambda^{\ell}(A_i)\setminus\{0\},\trianglelefteq)}| = 1$ olduğundan P_i onun temsilcileri olsun. Bu taktirde $A_i \cong n_i P_i$ olup

$$A_i \cong End_A(A_i) \cong Mn_i(End_A(P_i))$$

dir. 1.12 ile $End_A(P_i):=D_i$ bir bölme cebiridir. Buradan

$$A_i \cong Mn_i(D_i),\ D_i:=End_A(P_i),\ P_i\in Min(\Lambda^{\ell}(A_i),\subseteq) \quad 1\leq i\leq r \quad \text{dir.}$$

$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_r$ olsun. Bu taktirde P A nın direkt terimi, AP=A ve

$$End_A(P) \cong End_A(P_1)\dotplus End_A(P_2)\dotplus\dots\dotplus End_A(P_r)$$

$$= D_1\dotplus D_2\dotplus\dots\dotplus D_r$$

dir. Buradan $End_A(P)$ indirgenmiştir. Dolayısıyla $End_A(P)$ A nın temel cebiridir.

3.32. Önerme

A sol Artinian R-cebir olsun. B A nın temel cebiri olmak üzere aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

i) B Artiniandır.

ii) $\Psi : \Lambda(A) \to \Lambda(B)$ kafes izomorfisi öyleki

$$\Psi(J(A)) = J(B),$$

$I_1, I_2 \in \Lambda^{\ell}(A)$ olmak üzere

$$\Psi(I_1 I_2) = \Psi(I_1)\Psi(I_2)$$

dir.

iii) $\Gamma(A) = \Gamma(B)$ dir.

İspat : $P_1, P_2, \ldots, P_r$ esas ayrışamaz A sol modüllerin izomorfi sınıflarının sınıf temsilcilerinin bir tam kümesi olmak üzere

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_r$$

olsun. Bu taktirde 3.31 ile $P \in \Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim PA=A ve $End_A(P) = B$ A nın indirgenmiş R-cebiridir.

3.15 den $\exists e, e_1, e_2, \ldots, e_r \in A$ idempotentler öyleki

$$P = Ae \;,\; P_i = Ae_i,\; e = e_1 + e_2 + \ldots + e_r,\; e_i e_j = 0,\; i\; j\; e_i e = e e_i = e_i$$

$1 \leq i \leq m$ dir. 3.18 ile

$$B = End_A(P) = End_A(Pe) \cong eAe$$

R-modül izomorfisi vardır. $N \in \Lambda^{\ell}(eAe)$ ise $AN \in \Lambda^{\ell}(A)$ dır. 3.18 ile $N \to AN$ dönüşümü $\Lambda^{\ell}(eAe)$ ile $\Lambda^{\ell}({}_A A)$ arasında sırayı koruyan bir dönüşümdür.

Özellikle A sol Artinian ise $B \cong eAe$ de sol Artiniandır. Benzer şekilde $J \in \Lambda(eAe)$ ise $AJA \in \Lambda(A)$ ve $I \in \Lambda(A)$ ise $eIe \in \Lambda(eAe)$ dir.

Daha fazla olarak $J \subset eAe$ olduğundan

$eAJAe=eAeJeAe=BJB=J$ ve $AeIeAe=AeAIAeA = AIA=I$ dır.

Böylece her $J\in\Lambda(eAe)$ için

$$\varphi(J) = AJA$$

ile $\varphi:\Lambda(eAe)\to\Lambda(A)$ ve her $I\in\Lambda(A)$ için

$$\Psi(I) = eIe$$

ile $\Psi: \Lambda(A)\to\Lambda(eAe)$ tanımlanırsa

$$\varphi\Psi = id_{\Lambda(A)} \quad \text{ve} \quad \Psi\varphi = id_{\Lambda(eAe)}$$

olduğundan dönüşümü bir kafes izomorfidir. Böylece her $I\in\Lambda(A)$ için $\Psi(I)=eIe$ yardımıyla tanımlanan $\Psi:\Lambda(A)\to\Lambda(eAe)$ dönüşümü bir kafes izomorfidir. Üstelik

$$\Psi(I_1I_2)=eI_1I_2e = eI_1AeAI_2e=eI_1eI_2e= \Psi(I_1)\Psi(I_2)$$

dir. $J(A):=\bigcap\limits_{M\in Maks\Lambda(A)} M$ ve $J(B):=\bigcap\limits_{N\in Maks\Lambda(B)} N$

olmak üzere Ψ kafes izomorfi olduğundan M maksimaldir $\Longleftrightarrow \Psi(M)$ maksimaldir. Buradan $\Psi(J(A))=J(B)$ dir.

Şimdi $\Gamma(B)=\Gamma(A)$ olduğunu gösterelim. $B=eP$ gözüyle bakabiliriz. Çünkü $B\cong eP$ ise $\Gamma(B)\cong\Gamma(eP)$ dir.

$$B=eP=eP_1\oplus eP_2\oplus\ldots\oplus eP_r,\quad eP_i=eAe_i=Be_i$$

ayrışamazdır. Çünkü

$$End_B(Be_i)\cong e_iBe_i=e_iAe_i\cong End_A(Ae_i)$$

lokal cebirdir. Eğer $Be_i\cong Be_j$ ise 3.18 den $\exists x,y\in B$ öyleki $e_ixe_jye_i=e_i$ dir. Bu durumda 3.18 ile $i=j$ için $Ae_i\cong Ae_j$ dir. Bundan dolayı $Be_1, Be_2,\ldots,Be_r$ esas ayrışamaz B-sol modüllerin izomorfi sınıflarının temsilciler sistemidir. Böylece $\Gamma(B)$ ve

$\Gamma(A)$ aynı $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ köşe kümelerine sahiptir.

$e_i J(B) e_j = e_i eJ(A) ee_j = e_i J(A) e_j$ olduğundan $\Gamma(B)$ ve $\Gamma(A)$ aynı kenar kümesine sahiptir. Dolayısıyla $\Gamma(B) = \Gamma(A)$ dır.

3.33. Tanım

A sol Artinian R-cebir olsun. A sonlu gösterim tipine sahiptir:$\Longleftrightarrow$ Eğer sonlu üretenli ayrışamaz A-sol modüllerin izomorfi sınıflarının sayısı sonlu ise.

Sonlu gösterim tipine sahip olmayan bir R-cebire sonsuz gösterim tipine sahiptir denir.

KAYNAKLAR

Anderson, F.W., Fuller, K.R. (1973) Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin.

Gray, M. (1970) A Radical Approach to Algebra. Addison-Wesley.

Herstein, I.N. (1968) Noncommutative Rings. The Mathematical Association of America.

Hungerford, T.W. (1987) Algebra. Springer-Verlag, New York.

Jacobson, N. (1964) Structure Rings. American Mathematical Society, Volume 37.

Pierce, R.S. (1982) Associative Algebras. Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında Vakfıkebir'de doğan Osman KAZANCI 1975 yılında Vakfıkebir Bozalan Köyü İlkokulunu, 1978 yılında Vakfıkebir Ortaokulunu ve 1981 yılında Vakfıkebir Ticaret Lisesini bitirdi. 1982 yılında Karadeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı. 1986 yılında Karadeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programına başladı. Yabancı dilinin Fransızca oluşu nedeniyle bir yıl İngilizce hazırlık okudu. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Araştırma görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.