KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUP VE BİR ÖZEL KONGRÜANS ALT GRUBUN GRAFLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuba TUNÇ

HAZİRAN 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUP VE BİR ÖZEL KONGRÜANS ALT GRUBUN GRAFLARI

Tuba TUNÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17.05.2013
Tezin Savunma Tarihi : 12.06.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Tuba TUNÇ tarafından hazırlanan

MODÜLER GRUP VE BİR ÖZEL KONGRÜANS ALT GRUBUN GRAFLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 21/05/2013 gün ve 1506 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ**	....
Üye	**: Prof.Dr. Abdullah ÇAVUŞ**	....
Üye	**: Prof.Dr. Hilmi ZENGİN**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Γ Modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki alt yörüngesel grafları ve bu graflarda orman, bağlantılılık şartlarını ve bir özel kongrüans alt grubu olan $\Gamma_0^0(n)$ grubunun alt yörüngesel graflarını sunmak amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak yapılmıştır.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca manevi desteğini esirgemeyen, her zaman yanımda olan ve tez aşaması süresince her türlü konuda yardımcı olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ a en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Lisans ve yüksek lisansta birlikte olduğum, tez süresince birlikte çalışmaktan zevk aldığım, dostluğunu desteğini esirgemeyen canım arkadaşım Hatice ÜNAL'a çok teşekkür ediyorum.Üniversite hayatım boyunca bana güvenen ve bu yolda ilerlememi destekleyen dostlarıma çok teşekkür ediyorum. Yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli öğretim üyelerine ve üniversite arkadaşlarıma teşekkür ederim.Yüksek lisansın son bir yılında maddi yönden destekleri için TUBİTAK a teşekkür ediyorum. Bu çalışmayı yürüttüğüm sürece sosyal açıdan katkı sağlayan, mutlu eden TEMA ailesine teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

Tuba TUNÇ

Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "MODÜLER GRUP VE BİR ÖZEL KONGRÜANS ALTGRUBUN GRAFLARI" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 12/06/2013

Tuba TUNÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

MODÜLER GRUP VE BİR ÖZEL KONGRÜANS ALT GRUBUN GRAFLARI

Tuba TUNÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2013, 61 Sayfa

Bu tezde esas amacımız Γ modüler grubun $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketi göz önüne alınarak, $\Gamma_0(n)$ yardımı ile oluşturulan bloklar vasıtası ile Γ için elde edilen alt yörüngesel graflarda kenar, bağlantılık, üçgen olma ve grafların orman olma özellikleri ile özel bir kongrüans alt grubu olan $\Gamma_0^0(n)$ nin alt yörüngesel grafları hakkında detaylı bilgi vermektir.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde, daha sonraki bölüm için kullanılacak temel bilgiler verildi.

İkinci bölümde Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde hareketi ile oluşan alt yörüngesel graflar etraflıca ele alınıp ve $F_{u,n}$ nin üçgen içerme şartı ve orman olma şartları verildi. Ek olarak Γ modüler grubunun kongrüans alt gruplarından olan $\Gamma_0^0(n)$ grubunun alt yörüngesel grafındaki devreler, bağlantılılık şartları ortaya konuldu.

Anahtar Kelimeler: Modüler grup, Alt yörüngesel graflar, İmprimitif hareket, Kongrüans alt grup.

Master Thesis

SUMMARY

THE GRAPHS OF MODULAR GROUP AND ONE SPECIAL CONGRUENCE SUBGROUP

Tuba TUNÇ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Programme
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2013, 61 Pages

The purpose of the thesis is to give enough information on suborbital graphs for the modular group Γ by means of the congruence subgroup $\Gamma_0(n)$ and the action of Γ on the extented rational numbers $\widehat{\mathbb{Q}}$ for getting blocks and furthermore, it is to reveal the properties of connectedness, disconnectedness, being triangles and forests of the suborbital graphs and to establish detailed information for the suborbital graphs for the congruence subgroup $\Gamma_0^0(n)$.

In the first chapter, we give some basic definitions and theorems for the subsequent work.

In the second chapter, the suborbital graphs obtained by the action of modular group Γ on the extended rational numbers $\widehat{\mathbb{Q}}$ are given in detail. And the conditions of the suborbital graphs to be forests are given. And finally the suborbital graphs for the congruence subgroup $\Gamma(n)$ are examined and their connectedness, disconnectedness are given.

Key Words: Modular group, Suborbital graphs, Imprimitif action, Congruence subgroup.

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

Gx	: x in G yörüngesi
G_x	: x noktasının sabitleyeni
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(n)$	: Modüler grubun $c \equiv 0\ (mod\ n)$ olan alt grubu
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	: Üst yarı düzlemi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
∞	: Sonsuz
$PSL(2,\mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$[\alpha]$	: Alfa bloğu
$O(\alpha,\beta)$	: (α,β) nın yörüngesi
$\mathcal{G}(\alpha,\beta)$	: (α,β) nın alt yörüngesel grafı
$O_{u,n}$	: $(\infty, u/n\ )$ nin yörüngesi
$\mathcal{G}_{u,n}$	: $(\infty, u/n)$ nin alt yörüngesel grafı
$F_{u,n}$	: Köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan graf
$\gamma \rightarrow \delta$	: γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar
$\approx$	: G-invaryant denklik bağıntısı
(G,X)	: Topolojik dönüşüm grubu
F_m	: Farey dizisi
F	: Farey grafı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Ayrık gruplar teorisinin temellerinin atılmasında Henry Poincare çok önemli paya sahiptir. Bu gruplar özellikle eliptik fonksiyonlar teorisini genelleştirmede kullanılmışlardır. 1980 yıllarında $PSL(2,\mathbb{R})$ de $\Gamma_0(n)$ kongrüans alt grubunun normalliyeni ile Monster Basit Grubunun ilişkilendirilmesi $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun önemini artırmıştır. Bu Monster Basit Grubu şu ana kadar bilinen en büyük sonlu mertebeli basit gruptur. $\Gamma_0(n)$ grubuna benzer şekilde $\Gamma(n)$ ve $\Gamma_0^0(n)$ kongrüans alt grupları da hemen hemen aynı öneme sahiptir.

Charles C. Sims 1967 de bir küme üzerinde hareket eden bir G permütasyon grubunun alt yörüngesel graf fikrini ortaya atması ve daha sonra 1991 yılında Gareth A.Jones, David Singerman ve K.Wicks Γ modular grubunun alt yörüngesel grafını daha farklı boyutta incelemesi 2001 yılında M. Akbaş "On Suborbital Graph for The Modular Group" adlı çalışmada devre uzunlukları ile modüler grupta eliptik elemanlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmıştır.

Bu tezin esas özünü yukarıdaki çalışmalar oluşturmakta ve ek olarak $\Gamma_0^0(n)$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel grafları incelenmiş, üçgen içermeyeceği gösterilmiş ve ilgili grafların bağlantılı olup olmadıkları problemi tamamı ile çözülmüştür.

1.2. Grup

Tanım 1.2.1.

$G \neq \emptyset$ ve "*" G üzerinde bir ikili işlem olsun.

i) $\forall a,b,c \ \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$

ii) $\exists e \in G :\ \forall a \in G$ için $a*e=e*a=a$ dır.(e=e_G)

iii) $\forall a \in G$ için $\exists\ a^{-1} \in G : a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$

şartlarını sağlıyorsa $(G,*)$ ikilisine bir grup denir.

Eğer $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise $(G,*)$ ikilisine değişmeli veya abel grubu denir.

Gösterim: $a * b$ kısaca ab ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.2.

$A \neq \emptyset$ bir küme olsun. $S(A) := \{f | f: A \to A \; birebir \; ve \; örten\}$ olmak üzere $(S(A),\circ)$ bir gruptur. Bu grubun elemanlarına permütasyonlar denir. Eğer $|A| = n$ ise $S(A) =: S_n$ yazılır ve bu gruba n. dereceden simetrik grup denir. $(S(A),\circ)$ grubunun alt gruplarına da A kümesi üzerinde permütasyon grupları adı verilir.

Tanım 1.2.3.

$(G,*)$ bir grup ve G sonlu ise $(G,*)$ grubuna sonlu grup denir.G nin eleman sayısı $|G|$ ile gösterilir ve grubun mertebesi olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.4.

$(G,*)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun.Bu durumda

i) $\forall a, b \in H$ için $a * b \in H$

ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$

şartları sağlanıyorsa H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.5.[12]

$(G,*)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. $H \leq G \Leftrightarrow \forall a, b \in H$ için $a * b^{-1} \in H$ dır.■

Tanım 1.2.6.

$(G,*)$ bir grup olmak üzere, $Z(G) = \{a \in G | \forall g \in G \; için \; a * g = g * a\} \subset G$ kümesine $(G,*)$ grubunun merkezi denir.

Önerme 1.2.7.[12]

$Z(G) \leq G$ dir.■

Tanım 1.2.8.

G bir grup ve $M \subset G$ olsun. M yi içeren G nin alt gruplarının H arakesiti bir gruptur. Bu gruba M ile üretilen grup adı verilir ve $H = < M >$ ile gösterilir.

i) $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ ise H ye sonlu üretenli grup denir.

ii) $M = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise H ye a ile üretilen devirli grup denir ve $H = < a >$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.9.[12]

G bir grup ve $H \leq G$ ve $a \in G$ olsun. $Ha := \{ha | h \in H\}$ kümesine a nın bir sağ yan sınıfı ; $aH := \{ah | h \in H\}$ kümesine de a nın bir sol yan sınıfı denir.

Tanım 1.2.10.

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu alt gruba göre sağ ve sol yan sınıfların sayısı eşittir. Bu sayıya H nın G içindeki indeksi denir ve $|G: H|$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.11.

G bir grup ve $H \lneqq G$ olsun. G de $H \subset M$ olan her M alt grubu için $M = G$ ise H ya G de bir maksimal alt grup adı verilir.

Tanım 1.2.12.

G bir grup ve $N \leq G$ olsun. G nin bir N alt grubuna G nin bir normal alt grubu adı verilir :⇔ $\forall g \in G$ için $Ng = gN$ ve bu durum $N \lhd G$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.13.

$(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup ve $f: G \to H$ bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in G$ için $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ ise f ye G den H ye bir grup homomorfizması denir. G den H ye olan tüm homomorfizmaların kümesi $Hom(G, H) = \{f | f: G \to H \; grup \; homorfizma\}$ ile gösterilir.

$f: G \to H$

$g \to f(g) = e_H$

bir homomorfizma olduğundan $Hom(G, H) \neq \emptyset$ dır.

$\mu \epsilon Hom(G, H)$ keyfi olmak üzere;

i) μ birebir ise μ ye monomorfizma,

ii) μ örten ise μ ye epimorfizma,

iii) μ birebir ve örten ise μ ye izomorfizma denir.

Ayrıca $f: G \to G$ izomorfizmasına bir otomorfizma adı verilir.

1.3. Topolojik Gruplar

Tanım 1.3.1.

$(G ,*)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde her $g, h \in G$ için;

i) $m \; : \; G \times G \to G$

$(g, h) \to g * h$

ii) $s: \; G \to G$

$g \to g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup adı verilir.

Tanım 1.3.2.

G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde

$$\wedge : G \times X \rightarrow X$$
$$(g,x) \rightarrow \wedge (g,x) = g \wedge x =: gx$$

ile tanımlanan $\wedge$ dönüşümü sürekli bir dönüşüm ve her $g_1, g_2 \in G$ ve her $x \in X$ için;

i) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$

ii) $ex = x$ (e G nin $birim$ $elemanı$)

şartları sağlanıyorsa $[G, X, \wedge]$ üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir. Kısaca bu (G, X) biçiminde gösterilir.

Yukarıdaki i) ve ii) şartları sağlandığında G ye X kümesi üzerinde hareket eder veya G ye X üzerinde bir hareket grubu denir.

Önerme 1.3.3.

(G, X) topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olsun. Bu taktirde;

$$x \approx y := \exists g \in G : gx = y$$

şeklinde tanımlanan"$\approx$ " bağıntısı, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.3.4.

" $\approx$ " bağıntısı yukarıda verilen Önerme 1.3.2 deki denklik bağıntısı olsun. $x \in X$ noktasını içeren denklik sınıfına x in yörüngesi adı verilir ve $[x]$ ile gösterilir. Böylece

$[x] = \{y \in X : x \approx y\}$=$\{y \in X : \exists g \in G , y = gx\}$=$Gx$ dir.

Bütün yörüngelerden oluşan kümeyi X / G ile gösterelim. Yani $X/G := \{Gx : x \in X\}$ bir yörüngeler uzayı olup X / G üzerindeki topoloji; $x \in X$ olmak üzere,

$$\mathrm{p} : X \rightarrow X/G$$
$$x \rightarrow p(x) := Gx$$

şeklinde tanımlı p fonksiyonunu sürekli yapan en ince topolojidir. Bu topoloji,

$$\tau_{\mathrm{p}} := \{U \subset X/G : \mathrm{p}^{-1}(U) kümesi\ X\ de\ açık\}$$

ile verilir.

Böylece, X/G :={ $[x]$: $x \in X$ } ile gösterilen yörüngeler uzayı, topolojik özdeşlik altında, elemanları yörüngeler olan, bir topolojik uzaydır.

Tanım 1.3.5.

(G, X) topolojik dönüşüm grubu verilsin. $\forall x, y \in X$ için $gx = y$ olacak biçimde bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde transitif olarak hareket eder denir.

Bu tanıma göre, hareket transitif ise, $\forall x \in X$ için $Gx = X$ dir. Yani bir tek yörünge vardır. Bu yörünge grubun transitif olarak hareket ettiği X kümesidir.

Tanım 1.3.6.

(G, X) bir topolojik dönüşüm grubu ve $x \in X$ keyfi olsun.

$S_x := \{g \in G | gx = x\}$ kümesine x noktasının sabitleyeni denir.

Tanım 1.3.7.

G bir grup ve H, L G nin iki alt grubu olsun. $H = gLg^{-1}$ olan bir $g \in G$ varsa H ile L ye G de eşleniktir denir.

Lemma 1.3.8.

(G, X) bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$, $g \in G$ olmak üzere $y = gx$ olsun. Bu taktirde, $S_y = gS_xg^{-1}$ dir. Yani bir yörüngedeki farklı iki elemanın sabitleyenleri eşlenik alt gruplardır.

İspat:

$g_0 \in S_y$ keyfi olsun. Bu durumda $g_0y = y$ dir. $y = gx$ olduğundan $g_0gx = gx \Rightarrow g^{-1}g_0gx = x \Rightarrow g^{-1}g_0g \in S_x$. $g_0 = g(g^{-1}g_0g)g^{-1}$olduğundan $g_0 \in gS_xg^{-1}$ dir. $S_y \subset gS_xg^{-1}$ dir.

Şimdi $gg_0g^{-1} \in gS_xg^{-1}$keyfi olsun. $gg_0g^{-1}(y) = gg_0x = gx = y \Rightarrow gg_0g^{-1} \in S_y$ dir. Yani $gS_xg^{-1} \subset S_y$ dir. Sonuç olarak, $S_y = gS_xg^{-1}$ elde edilir.■

Tanım 1.3.9.

Hiperbolik geometride iki noktayı birleştiren minimal uzunluklu eğrilere geodezikler adı verilir.

Tanım 1.3.10.

$n \in \mathbb{N}$ için $1 \leq a \leq n$ ve $(a, n) = 1$ olan a tamsayılarının sayısı $\varphi(n)$ ile gösterilir ve bu φ fonksiyonuna Euler fonksiyonu adı verilir.

Sonuç 1.3.11.[5]

$\mathbb{U}_n := \{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq n, (a, n) = 1\}$ $mod\, n$ ye göre çarpma işlemine göre bir gruptur ve $m = p_1^{r_1}.p_2^{r_2} \ldots p_s^{r_s}$ m nin asal çarpanlara ayrılışı ise bu taktirde;

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = m \prod_{\substack{p|m \\ p\ asal}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

dir.■

1.4. Hiperbolik Geometri

Bu bölümde hiperbolik geometri ile ilgili bazı temel bilgiler ve hiperbolik düzlemin $\mathbb{U}$ üst yarı düzlem modelini alarak bu modelde hiperbolik doğruları verip; hiperbolik geometride önemli sonuçları olan Möbiüs dönüşümlerini göz önüne alacağız. Şimdi kısaca hiperbolik doğrular hakkında bilgi verelim.

Matematik alanı içerisinde geometri Euclidean ve non-Eucledian olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Bu iki tip geometri arasındaki temel farklar doğrularının paralellik özelliklerinden kaynaklanır. Eucledian geometrinin dayandığı beş aksiyom vardır.

1. İki noktadan bir doğru geçer.
2. Doğru parçaları iki ucundan sonsuza doğru bir doğru boyunca uzatılabilir.
3. Merkezi ve yarıçapı verilen çember çizilebilir.
4. Tüm dik açılar denktir.
5. Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir (Euclid'in Paralellik Aksiyomu). Bu aksiyom Euclid'in "The Elements" adlı kitabındaki ifadesiyle bire-bir örtüşmese de daha anlaşılır olması sebebiyle böyle de ifade edilebilir.[8]

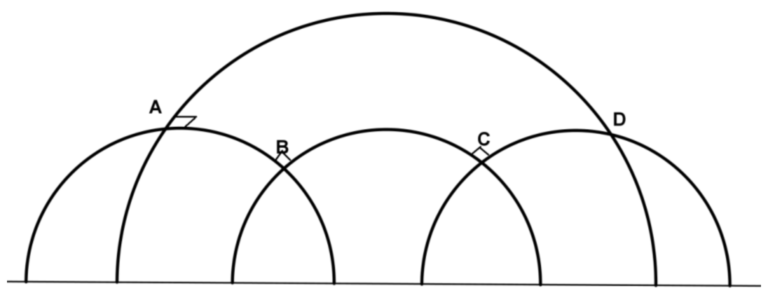
Hiperbolik geometri alanındaki ilk araştırmacılar Euclid'in paralellik aksiyomu çevresinde bir tutarsızlık bulmaya çalışanlardan oluşuyordu. Matematikçiler tarih boyunca Euclid'in ilk dört aksiyomunu kullanarak yukarıda paralellik aksiyomu denilen Euclid'in beşinci aksiyomunu ispatlamaya çalışmışlardı. Euclid'in paralellik aksiyomuna göre, "bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilebilirdi" ve bu aksiyom pek çok matematikçiye göre çok karmaşıktı ve ilk dört aksiyomdan elde edilebilmeydi. Bu ihtimal üzerine matematikçiler, Euclid'in beşinci aksiyomunun doğru olmadığı varsayımlar üzerine çalıştılar. 1700 lerin ortalarında Girolamo Saccheri'nin öncülük ettiği gibi, Hiperbolik Paralel Aksiyomu olarak bildiğimiz, bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebileceği varsayımından yola çıkanlar Hiperbolik Geometrinin ortaya çıkmasını sağladılar. Diğer taraftan, bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel doğru çizilemeyeceği varsayımı ile yola çıkanlar da Eliptik Geometrinin geliştirilmesine öncülük ettiler.[9]

Euclid'in beşinci aksiyomunun doğru olmadığı geometrilerin de bulunabileceği düşüncesiyle Proclus, Ömer Hayyam, Nasir al-Din al-Tusi, ve sonradan Giovanni Gerolamo Saccheri, John Wallis, Lambert, ve Legendre çalışmışlardır. On dokuzuncu yüzyılda Janos Bolyai ve Nikolai Ivanovich Lobachevsky'nin çalışmaları bu alanda çok etkili oldu. Öyle ki Hiperbolik Geometrinin bazı kümeleri onların isimleriyle anılır. Sonrasında Eugenio Beltrami Hiperbolik Geometri için modeller sağladı ve bu modelleri kullanarak, "Eğer Euclid Geometrisi tutarlıysa, hiperbolik geometri de tutarlıdır" önermesini kanıtladı.

Hiperbolik düzlemin dikkate değer bir özelliği de bu geometride verilen her paralel doğru çifti için, her iki doğruya da dik olan yalnızca bir doğru çizilebiliyor olmasıdır. Bunun bir sonucu olarak hiperbolik düzlemde dikdörtgenlerin olamayacağı Lambert ve Saccheri'nin çalışmalarında yer almıştır.

Girolamo Saccheri ve Lambert, Euclid'in beşinci aksiyomunun yanlış olduğu varsayımı altında bir çelişki aramak amacıyla Hiperbolik Paralel Aksiyomu olarak bilinen çoklu paraleller hipotezini kabul ederek dikdörtgeni tanımlamaya çalıştı.

Lambert Saccheri'nin ardından çoklu paraleller hipotezi altında aşağıdaki şekildeki gibi 3 açısı dik olan bir dikdörtgenin dördüncü açısının dik olup olamayacağını merak etti. Lambert dördüncü açı için üç olasılığı (dar, dik, geniş) inceledi. Hiperbolik üçgenin iç açıları toplamı π radyandan küçük olduğundan hiperbolik dörtgenin tüm açılarının toplamının 2π radyandan küçük olacağını dolayısıyla hiperbolik düzlemde dikdörtgenlerin olamayacağını ilk olarak ortaya koydu. Yani, çoklu paraleller hipotezi altında paralel iki doğruya aynı anda dik olan en fazla bir tane doğru çizilebilirdi.

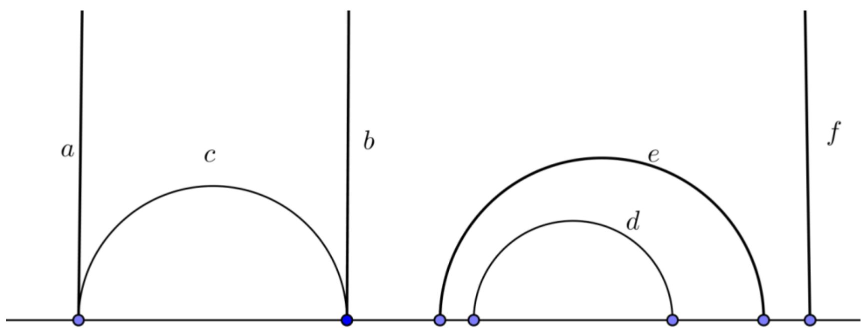


Şekil 1. Üç açısı dik olan hiperbolik dörtgen

Paralellik aksiyomunun aksi üzerine çalışan Karl Friedrich Gauss, Janos Bolyai ve Nikolai Ivanovich Lobachevsky yaklaşık olarak aynı zamanlarda şekil 1 deki dördüncü açının dar olduğunu gösterdiler ve şimdilerde Hiperbolik Geometri olarak bilinen konular üzerinde çalıştılar.[10]

Hiperbolik Geometride (hiperboloid geometrisi -saddle geometry- ya da Lobachevskian geometri olarak da adlandırılır) paralellik terimi yalnızca hiperbolik düzlemde kesişmeyen ancak sonsuzda kesişecek olan bir doğru çiftini anlatmak için kullanılır. Eğer bu doğru çifti ne hiperbolik düzlemde ne de sonsuzda kesişirse (yani her iki durumda da kesişmezse) aşırı paralel (ultra paralel) olarak adlandırılırlar. İki doğru sadece sonsuzda kesişirse bu iki doğruya paralel (hyper paralel) doğrular denir. Hiperbolik geometride; bir ℓ doğrusu ve doğrunun dışında bir P noktası verildiğinde P'den geçen ve ℓ'ye paralel olan yalnız ve yalnız iki tane ultra olmayan paralel doğru geçerken sonsuz sayıda ultra paralel doğru geçer.[8]

Kısa bir süre sonra Fransız matematikçi Poincare ve İtalyan matematikçi Beltrami hiperbolik geometriyi görsel hale getirmeye yardımcı çeşitli modeller geliştirdiler. Her ikisine atfedilen bir model Beltrami-Poincare üst yarı düzlem modelidir. Bu model hiperbolik paraleller postülatını destekler ve diğerleri tarafından geliştirilen sonuçları resimlemek için değerlidir. Bu üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğrular reel eksene dik yarı doğrular ve yarı çemberlerdir. Aşağıdaki şekilde bu modele ait doğru örnekleri verildi.



Şekil 2. Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğrular

Öklid düzlemi ve hiperbolik düzlem; uzaklık, açı ve süreklilik gibi pek çok aynı kavrama sahiptirler. Her iki geometride de aynı olan temel özellikleri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.[14]

- İki farklı P ve Q noktası verildiğinde, her ikisinden geçen sadece bir doğru vardır.
- İki farklı P ve Q noktası verildiğinde P ve Q nun her ikisinden aynı uzaklıkta olan bütün noktalar kümesi bir doğrudur.

• Her ℓ doğrusu düzlemi iki bağlantılı bileşene böler. P ve Q, ℓ doğrusu üzerinde olmayan iki nokta olsun. PQ doğru parçası ℓ ile kesişmesi veya kesişmemesine göre, P ve Q nun ℓ nin zıt tarafları üzerinde veya aynı taraf üzerinde olduğunu söyleyebiliriz. ℓ nin aynı tarafı üzerinde olan iki noktanın bağıntısı, iki denklik sınıfı ile birlikte bir denklik bağıntısıdır.

• Benzer şekilde, ℓ doğrusu üzerindeki her P noktası ℓ nin diğer noktalarını iki sınıfa ayırır: P nin bir tarafı üzerinde olanlar ve P nin diğer tarafı üzerinde olanlar.

• Bir ℓ doğrusu üzerinde bir P noktası ve $d > 0$ pozitif gerçel sayısı verildiğinde, ℓ üzerinde P den d uzaklığında tam iki nokta vardır, bunlardan her biri P noktasının farklı taraflarındadır.

• İki üçgenin aynı uzunlukta olan karşılıklı kenarları varsa, iki üçgen benzerdir ve bir üçgeni diğerine resmeden (ve karşılıklı kenarları koruyan) bir düzlem izometrisi mevcuttur.

1.5. Hiperbolik Düzlemin Üst Yarı Düzlem Modeli

Burada $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} | \, Imz > 0\}$ üst yarı düzlemini göz önüne alacağız. Buradaki açı kavramı $\mathbb{C}$ deki açı kavramı gibi tanımlanır. Tanımlayacağımız hiperbolik doğruları, Öklid çemberleri ve Öklid doğruları cinsinden vereceğiz.

Tanım 1.5.1.

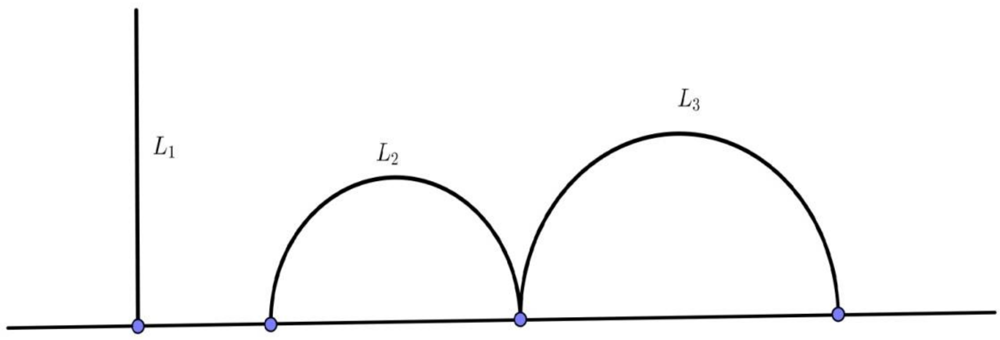
$\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ye dik Öklid doğrularının $\mathbb{U}$ ile arakesiti olan yarı Öklid doğrularına ve $\mathbb{R}$ ye dik bilinen Öklid çemberlerinin $\mathbb{U}$ ile arakesitlerine hiperbolik doğrular adı verilir. Kısaca, hiperbolik doğru reel eksene dik $\mathbb{U}$ da kalan yarı çemberlerdir. Tabiki burada reel eksene dik $\mathbb{U}$ da kalan yarı doğruları sonsuz yarıçaplı çemberler veya merkezi sonsuzda olan çemberler olarak alıyoruz.

Önerme 1.5.2.[8]

$p, q \in \mathbb{U}$ farklı noktalar olmak üzere p ve q yu birleştiren bir tek hiperbolik doğru vardır. ■

Tanım 1.5.3.

$\mathbb{U}$ da k, l hiperbolik doğruları olmak üzere $k \cap l = \emptyset$ ise bu iki doğru paraleldir denir.



Şekil 3. Üst yarı düzlem modeline göre paralel doğrular

Teorem 1.5.4.[8]

l bir hiperbolik doğru ve $a \notin l$, $a \epsilon \mathbb{U}$ olsun. Bu takdirde; a dan geçen l ye paralel sonsuz tane hiperbolik doğru vardır.■

Önerme 1.5.5.[8]

$p \in \mathbb{U}$ ve $q \in \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere p ve q yu birleştiren $\mathbb{U}$ da bir tek hiperbolik doğru vardır.■

Tanım 1.5.6.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de bir çember ya $\mathbb{C}$ de bilinen Öklid çemberi veya $\mathbb{C}$ de bir doğruya "∞" ilave etmekle elde edilir.

$\mathbb{C}$ de (a, b) merkezli r yarıçaplı çember denklemi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dir. Buradan kompleks notasyona geçilirse $\alpha, \gamma \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta \epsilon \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ denklemi elde edilir. Burada dikkat edilmelidir ki böyle bir denklemin çember belirtmesi gerekmez; ama çember bu biçimdedir. l, $\mathbb{C}$ de bir doğru olduğunda $l \cup \{\infty\}$ $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çemberdir. l doğrusunu $\gamma \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta \epsilon \mathbb{C}$ olmak üzere $\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ ile verebiliriz.

Sonuç olarak $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çember $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ ile verilir.

Önerme 1.5.7.

$\alpha \neq 0$; $\alpha, \gamma \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta \epsilon \mathbb{C}$ olmak üzere; $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ denklemi bir Öklid çemberi belirtir $\Leftrightarrow |\beta|^2 > \alpha\gamma$.

İspat:

"$\Rightarrow$"

$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ denklemi bir Öklid çemberi olsun. $z = x + iy$; $x, y \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta = \beta_1 + i\beta_2$; $\beta_1, \beta_2 \epsilon \mathbb{R}$ olmak üzere denklemde yerine yazdığımızda

$\alpha(x+iy)(x-iy)+(\beta_1+i\beta_2)(x+iy)+(\beta_1-i\beta_2)(x-iy)+\gamma=0$ olur. Buradan,

$\alpha(x^2+y^2)+\beta_1x+i\beta_1y+i\beta_2x-\beta_2y+\beta_1x-i\beta_1y-i\beta_2x-\beta_2y+\gamma=0$ dır. Yani $\alpha(x^2+y^2)+2\beta_1x-2\beta_2y+\gamma=0$ dır. $\alpha\neq 0$ olduğundan

$x^2+y^2+2\frac{\beta_1}{\alpha}x-2\frac{\beta_2}{\alpha}y+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Rightarrow -\frac{{\beta_1}^2}{\alpha^2}+\left(y-\frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2-\frac{{\beta_2}^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}=0$. Böylece

$$\left(x+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2+\left(y-\frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2=\frac{{\beta_1}^2+{\beta_2}^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2} \tag{1.1}$$

elde edilir.

(1.1) denklemi $M=(\frac{-\beta_1}{\alpha},\frac{\beta_2}{\alpha})$ merkezli r yarıçaplı bir çember belirtmesi için $\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}=r^2$ olacağından $\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}>0$ olmalıdır. Bu taktirde $|\beta|^2>\alpha\gamma$ olmalıdır.

"$\Leftarrow$"

$|\beta|^2>\alpha\gamma$ olsun. $\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ denkleminin bir Öklid çemberi belirttiğini gösterelim.

$z=x+iy$; $x,y\epsilon\mathbb{R}$ ve $\beta=\beta_1+i\beta_2$; $\beta_1,\beta_2\epsilon\mathbb{R}$ olsun. $\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ denkleminde β ve z yerine yazılır ve aynı işlemler yapılırsa;

$\left(x+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2+\left(y-\frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2=\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}$ elde edilir. $|\beta|^2>\alpha\gamma$ olduğundan $|\beta|^2-\alpha\gamma>0$ dır ve buradan $\alpha\neq 0$ olduğundan $\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}>0$ sonucu elde edilir. Böylece $\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ denklemi $(\frac{-\beta_1}{\alpha},\frac{\beta_2}{\alpha})$ merkezli $\sqrt{\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}}$ yarıçaplı bir Öklid çemberi belirtir.■

1.6. Möbiüs Dönüşümler Grubu

Tanım 1.6.1.

$m:\bar{\mathbb{C}}\rightarrow\bar{\mathbb{C}}$, $m(z):=\frac{az+b}{cz+d}$; $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ ve $ad-bc\neq 0$ dönüşümlerine Möbiüs dönüşümleri adı verilir ve bu dönüşümlerin kümesi $PGL(2,\mathbb{C})$ ile gösterilir.

$PGL(2,\mathbb{C})$ bileşke işlemine göre bir gruptur ve grubun birim elemanı $m(z)=z$ dir. Ayrıca , $m(z):=\frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümleri 1-1 ve örten dönüşümlerdir.

Teorem 1.6.2.[8]

Her $m \in PGL(2,\mathbb{C})$, $m(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü $f(z)=Az+B$ ve $J(z)=\frac{1}{z}$ fonksiyon tiplerinin bir bileşkesi olarak yazılabilir.■

Teorem 1.6.3.

$PGL(2,\mathbb{C})$ çemberleri çemberlere resmeder.■

Teorem 1.6.4.[8] ($PGL(2,\mathbb{C})$ nin Transitiflik Özelliği)

$\overline{\mathbb{C}}$ de alınan (z_1, z_2, z_3) ve (w_1, w_2, w_3) gibi farklı noktaların üçlüleri için $m(z_i)=w_i$, i=1, 2, 3 olacak şeklide bir tek $m \in PGL(2,\mathbb{C})$ vardır.■

Teorem 1.6.5. [8]

$PGL(2,\mathbb{C})$ dönüşümü $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberlerin C kümesi üzerinde transitiftir.■

Not: (Möbiüs Dönüşümlerinin Matris Gösterimleri)

Burada iki möbiüs dönüşümünün bileşkesini göz önüne alacağız ve her bir möbiüs dönüşümünün 2×2 tipinde bir matrisle ilişkisi vardır.

$m(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, $n(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ iki möbiüs dönüşümü ise;

$(m \circ n)(z)=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_2d_1)}$ dir.

m ye karşılık $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisini,

n ye karşılık $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisini,

göz önüne aldığımızda $m \circ n$ ye karşılık gelen matrisin katsayılar matrisinin $\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_2d_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ olduğu görülür.

$m(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü verildiğinde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisine m ye karşılık gelen matris diyeceğiz, $detm=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$ m nin determinantı olarak göz önüne alınacaktır.

$k \neq 0$ olmak üzere; $\frac{az+b}{cz+d}=\frac{kaz+kb}{kcz+kd}=m(z)$ olduğundan farklı matrislere aynı dönüşümler karşılık gelebilir. Buradan açıkça görülüyor ki sonsuz sayıda matris bir tek

möbiüs dönüşümünü verir. Ancak; $detm=ad-bc=1$ alırsak bu durumda; sadece $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ matrislerine karşılık $m(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü karşılık gelir.

Önerme 1.6.6.

$PSL(2,\mathbb{R}) := \left\{T: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}},\ T(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1\right\}$, $PGL(2,\mathbb{C})$ nin bir alt grubudur.■

Şimdi sabit noktalara göre $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ dönüşümünü sınıflandıralım. $T \in PSL(2,\mathbb{R}) \backslash \{I\}$ olmak üzere; $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$ den $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ elde edilir. Ayrıca $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ olduğundan $ad - bc = 1$ olup bu denklemin çözümünden T dönüşümünün sabit noktaları,

$$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \tag{1.2}$$

şeklinde olduğu görülür.

(1.2) eşitliğine göre T dönüşümünü sabit noktalarının özelliklerine göre üç sınıfa ayırabiliriz.

i) $|a+d| > 2$ ise (1.2) den iki farklı sabit nokta vardır ve bu sabit noktalar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesindedirler. Bu durumda T ye bir hiperbolik dönüşüm adı verilir.

ii) $|a+d| = 2$ ise (1.2) den birbirine eşit iki sabit nokta vardır ve bunlar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesindedirler. Bu durumda T ye bir parabolik dönüşüm adı verilir.

iii) $|a+d| < 2$ ise (1.2) den birbirinin eşleniği olan iki kompleks sabit nokta vardır. Bu sabit noktalardan biri açıkça üst yarı düzlemde kalır. Bu durumda T ye bir eliptik dönüşüm adı verilir.

Tanım 1.6.7.

Bir T dönüşümünün periyodu (veya mertebesi) $T^m = I$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır. Böyle bir m sayısı yoksa T ye sonsuz periyotludur denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Modüler Grup

Tanım 2.1.1.

$PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun $\Gamma := PSL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ z \to \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\ ve\ ad - bc = 1 \right\}$ alt grubuna Modüler grup adı verilir. Bu grup aşağıdaki gibi 2× 2 lik tam sayılar matrisiyle de temsil edilir.Yani;

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, detA = 1$ dır. A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden bu çalışmada her bir matrisi negatifi ile eş alacağız.

Teorem 2.1.2.[1]

Γ modüler grubu $X^2 = Y^3 = I$ olan $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleriyle üretilir.■

Tanım 2.1.3.

n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\Gamma(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| a \equiv d \equiv 1\ mod\ n,\ b \equiv\ c \equiv 0\ mod\ n \right\}$$

ile tanımlanan gruba Γ nın bir temel kongrüans alt grubu adı verilir. Γ grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt gruplarını içeren herhangi bir alt grubuna, Γ nın kongrüans alt grupları adı verilir.

Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları;

$$\Gamma_1(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : a \equiv d \equiv 1\ mod\ n,\ \ c \equiv 0\ mod\ n \right\}$$

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0\ mod\ n \right\}$$

$$\Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : b \equiv 0\ mod\ n \right\}$$

gruplarıdır ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bu gruplar arasında $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ilişkisi vardır.

Ayrıca $\Gamma(n)$, Γ grubunun normal bir alt grubudur, dolayısıyla $\Gamma(n)$ grubu $\Gamma_0(n)$ ve $\Gamma_1(n)$ gruplarının da normal alt grubudur. Diğer taraftan $\Gamma_1(n) \lhd \Gamma_0(n)$ dir. Buna göre indeksler $n > 2$ için,

$$|\Gamma: \Gamma_0(n)| = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

$$|\Gamma: \Gamma_1(n)| = \frac{n^2}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$$|\Gamma: \Gamma(n)| = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

dir.

$n = 2$ durumunda $|\Gamma: \Gamma_0(2)| = 3$, $|\Gamma: \Gamma_1(2)| = 3$, $|\Gamma: \Gamma(2)| = 6$ dir. $n > 2$ için yukarıda verilen indekslerden

$$|\Gamma_0(n): \Gamma_1(n)| = \frac{|\Gamma:\Gamma_1(n)|}{|\Gamma:\Gamma_0(n)|} = \frac{n}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$|\Gamma_1(n): \Gamma(n)| = \frac{|\Gamma:\Gamma(n)|}{|\Gamma:\Gamma_1(n)|} = n$$

sonuçları elde edilir.

Teorem 2.1.4.

$n > 1$ olmak üzere $\Gamma_0(n)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif değildir.

İspat:

Aksini varsayalım ve $0, \infty \in \widehat{\mathbb{Q}}$ seçelim. Bu taktirde, $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ vardır. Bu eşitlikten $b = 1$ ve $d = 0$ dir. Diğer taraftan $\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ olduğundan $ad - bcn = 1$ olmalıdır. Bu ise ancak $c = -1$ ve $n = 1$ olmasıyla mümkündür. Bu $n > 1$ olması ile çelişir. Bu çelişki bize $\Gamma_0(n)$ grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olmadığını söyler. ■

2.2. Γ Modüler Grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ nın her bir elemanı, $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere $\frac{x}{y}$ indirgenmiş formunda gösterilebilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek türlü değildir. Bu yüzden ∞ u $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ alacağız.

Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $r = \frac{x}{y}$, $s = \frac{ax+by}{cx+dy} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere,

$$\Gamma \times \widehat{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathbb{Q}}\,,\ (T, r) \to Tr = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ile tanımlanır.

Burada $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiştir. Yani $(ax + by, cx + dy) = 1$ dir. Gerçekten, $(ax + by, cx + dy) = n,\ n > 1$ olsun. Bu durumda $n|(ax + by)$ ve $n|(cx + dy)$ dir. $n|(ax + by)$ olduğundan $\exists k \in \mathbb{Z}$:

$$(ax + by) = kn \tag{1.4}$$

$n|(cx + dy)$ olduğundan $\exists l \in \mathbb{Z}$:

$$(cx + dy) = ln \tag{1.5}$$

dır.

(1.4) $-c$ ile (1.5) a ile çarpılırsa ;

$-cax - cby = -cnk$

$acx + ady = anl$

elde edilir. Bu durumda $ady - cby = anl - cnk$. Yani, $(ad - bc)y = n(al - ck)$ $\xRightarrow{T\in\Gamma, ad-bc=1} y = n(al - ck) \Rightarrow n|y$ dir.

(1.4) d ile (1.5) $-b$ ile çarpılırsa ;

$adx + bdy = dn$

$-bcx - bdy = -bnl$

elde edilir. Buradan $adx-bcx=dnk-bnl \Rightarrow (ad-bc)x=n(dk-bl) \xRightarrow{T\in\Gamma, ad-bc=1}$ $x=n(dk-bl) \Rightarrow n|x$ dir

Böylece $n|(x,y)=1$ olur ki bu $n>1$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki bize $(ax+by,cx+dy)=1$ olduğunu yani $\frac{ax+by}{cx+dy}$ nin indirgenmiş formda olduğunu söyler.

Açık olarak bir $r=\frac{x}{y}\in\widehat{\mathbb{Q}}$ indirgenmiş oranı verildiğinde (1.3) deki hareketin görüntüsü $\frac{ax+by}{cx+dy}\in\widehat{\mathbb{Q}}$ de indirgenmiş oranda olacaktır.

Lemma 2.2.1.

i) Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat:

i) Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin transitif olduğunu gösterelim.Yani $\forall\ \frac{x}{y},\frac{r}{s}\in\widehat{\mathbb{Q}}$ için $g(\frac{x}{y})=\frac{r}{s}$ olacak şekilde $g\in\Gamma$ bulacağız.

$\frac{x}{y},\frac{r}{s}\in\widehat{\mathbb{Q}}$, $\frac{x}{y}\neq\frac{r}{s}$ olsun. $\frac{x}{y},\frac{r}{s}\in\widehat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $(x,y)=1$ ve $(r,s)=1$ dir. Bu durumda $xu-yv=1$ ve $rk-sl=1$ olacak şekilde $u,v,k,l\in\mathbb{Z}$ vardır. Dolayısıyla $T:=\begin{pmatrix}x & v\\ y & u\end{pmatrix}$ ve $S:=\begin{pmatrix}r & l\\ s & k\end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanırsa $T,S\in\Gamma$olur.

$T(\infty)=\begin{pmatrix}x & v\\ y & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow T(\infty)=\frac{x}{y}$

$S(\infty)=\begin{pmatrix}r & l\\ s & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix} \Rightarrow S(\infty)=\frac{r}{s}$

$\Rightarrow (ST^{-1})\left(\frac{x}{y}\right)=S\left(T^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right)=S(\infty)=\frac{r}{s}$ olduğundan $g:=ST^{-1}\in\ \Gamma$ şeklinde tanımlanılırsa istenilen dönüşüm elde edilir. Sonuç olarak Γ , $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

ii) Lemma 1.3.8 den $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi iki noktasının sabitleyenleri Γ da eşlenik olduğundan ∞ un sabitleyeni olan Γ_∞ u göz önüne almak yeterlidir.

$\Gamma_\infty=\left\{T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma : T(\infty)=\infty\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow a=1$ ve $c=0$ dır. Ayrıca $T\in\ \Gamma$ olduğundan $ad-bc=1 \xRightarrow{a=1,c=0} d=1$ olur. O halde $\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid b\in\mathbb{Z}\right\}$ dır. Böylece Γ_∞, $z=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ elemanı ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur.■

2.3. İmprimitif Hareket

Tanım 2.3.1.

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu, yani G bir grup ve Ω üzerinde hareket etsin, ve "$\approx$ " Ω üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda $\forall g \in G$ için $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa $\approx$ " denklik bağıntısına Ω üzerinde bir G invaryant denklik bağıntısı denir. Bu bağıntının denklik sınıflarına "bloklar" adı verilir. Böyle bağıntılara örnek olarak;

i) Özdeşlik bağıntı; $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

ii) Evrensel bağıntı; $\forall \alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha \approx \beta$ verilebilir.

Eğer Ω üzerinde i) ve ii) den farklı bir G invaryant denklik bağıntısı varsa (G, Ω) ya imprimitif; aksi halde primitif denir.

Önerme 2.3.2.[11]

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu taktirde (G, Ω) primitiftir $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in \Omega$ için G_α sabitleyeni, G nın bir maksimal alt grubudur.■

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu ve $G_\alpha < H < G$ olsun. G transitif olarak hareket ettiğinden Ω kümesinin her elemanı bir $g \in G$ için $g(\alpha)$ biçimindedir. Yani $\Omega := \{g(\alpha) | \alpha \in G\} = G\alpha$ dır..

Ω üzerinde $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH$ ile verilen "$\approx$ " denklik bağıntısı iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısıdır. Gerçekten, ilk önce denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

i) $\forall g \in G$ için $g = ge_G$ dir. $H < G$ olduğundan $e_G \in H$dır. $g = ge_G \in gH \Leftrightarrow$ $g(\alpha) \approx g(\alpha)$ dır.

ii) $g(\alpha) \approx g'(\alpha)$ olsun. $g'(\alpha) \approx g(\alpha)$ olduğunu göstermeliyiz.

$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH \Rightarrow g' = gh$ olan $h \in H$ vardır. $\xRightarrow{H<G, h^{-1} \in H} g = g'h^{-1}$ $\Rightarrow g \in g'H \Leftrightarrow g'(\alpha) \approx g(\alpha)$

iii) $g(\alpha) \approx g'(\alpha)$ ve $g'(\alpha) \approx g''(\alpha)$ olsun. $g(\alpha) \approx g''(\alpha)$ olduğunu göstermeliyiz.

$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Rightarrow g' \in gH \Rightarrow g' = gh$ olan $h \in H$ vardır.

$g'(\alpha) \approx g''(\alpha) \Rightarrow g'' \in g'H \Rightarrow g'' = g'h'$ olan $h' \in H$ vardır.

$g'' = g'h' \xRightarrow{g'=gh} g'' = ghh' \xRightarrow{H<G, hh' \in H} g'' \in gH \Leftrightarrow g(\alpha) \approx g''(\alpha)$ dır.

$g(\alpha) \approx g'(\alpha)$ olsun. $h \in G$ olmak üzere $hg' \in hgH$ olduğundan $hg(\alpha) \approx hg'(\alpha)$ dır. Yani " $\approx$ " bağıntısı G invaryanttır.

Önerme 2.3.3.

(G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu taktirde (G,Ω) imprimitiftir $\Leftrightarrow \exists\alpha \in \Omega$ ve $H < G$: $G_\alpha \subsetneqq H \subsetneqq G$ dir.

İspat:

"$\Rightarrow$"

Önerme 2.3.2. den olduğu açıktır.

"$\Leftarrow$"

(G,Ω) bir transitif permütasyon grubu ve $G_\alpha \subsetneqq H \subsetneqq G$ olsun. Ω üzerinde tanımlı G invaryant denklik bağıntısının özdeşlik ve evrensel bağıntı olmadığını göstermeliyiz.

Farzedelim ki $\approx$ özdeşlik bağıntı olsun. O halde $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) = g'(\alpha) \Rightarrow$ $\alpha = g^{-1}g'(\alpha) \Rightarrow g^{-1}g' \in G_\alpha \Rightarrow g' \in gG_\alpha$ dır.

$G_\alpha \subsetneqq H$ olduğundan $\exists h \in H: h \notin G_\alpha \Rightarrow h(\alpha) \neq \alpha = e(\alpha)$dır. Diğer yandan $h = eh \in eH = H$ olduğundan $e(\alpha) \approx h(\alpha)$ dan $e(\alpha) = h(\alpha)$ dır. Bu bir çelişkidir. Bu çelişki bize " $\approx$ " nın özdeşlik bağıntısı olmadığını söyler.

Farzedelim ki " $\approx$ " evrensel bağıntı olsun. $H \subsetneqq G$ olduğundan $\exists g \in G: g \notin H$ dır. " $\approx$ " evrensel olduğundan $e(\alpha) \approx g(\alpha) \Rightarrow g \in eH = H$ dır. Bu bir çelişkidir. Bu çelişki bize " $\approx$ " nın evrensel bağıntı olmadığını söyler.

Böylece Ω üzerinde yukarıda tanımlı bağıntı G invaryant denklik bağıntısı ne özdeşlik ne de evrensel bağıntıdır. Buradan (G,Ω) imprimitiftir.■

Not: Eğer $\beta \in \Omega$ ise, $\Omega = \{g(\alpha): \alpha \in G\} = G\alpha$ olduğundan, $\beta = g(\alpha)$ olan $g \in G$ vardır. Böylece β yı içeren $[\beta]$ bloğu $S := \{gh(\alpha) | h \in H\}$ kümesidir. Gerçekten; β yı içeren $[\beta]$ bloğu, β yı içeren denklik sınıfı olduğundan, $[\beta] = \{\gamma \in \Omega | \gamma \approx \beta\}$ dır. $\gamma \in \Omega$ olduğundan $\exists k \in G: \gamma = k(\alpha)$dır. $\gamma \approx \beta \Leftrightarrow k(\alpha) \approx g(\alpha) \xRightarrow{\approx denklik\ bağıntısı} g(\alpha) \approx k(\alpha) \Leftrightarrow k \in gH \Rightarrow k = gh$ olan $h \in H$ vardır. Buradan $k(\alpha) = gh(\alpha) \Rightarrow \gamma = gh(\alpha) \Rightarrow$ $\gamma \in S \Rightarrow [\beta] \subset S$

Tersine $m \in S$ olsun. Bu durumda $m = gh(\alpha)$ olan $h \in H$ vardır. $m \in \beta$ olduğunu yani $m \approx \beta$ olduğunu gösterelim. $H < G$ olduğundan $e_G \in H$ dır. $g = ge_G \in gH \Rightarrow$ $g \in gH = ghH \Leftrightarrow gh(\alpha) \approx g(\alpha) \Leftrightarrow m \approx \beta \Rightarrow m \in [\beta] \Rightarrow S \subset [\beta]$

Sonuç olarak $S = [\beta]$ dır. Yani $[g(\alpha)] = [\beta] = \{gh(\alpha) | h \in H\}$ dır.

Özellikle $[\alpha]$ bloğu $H(\alpha) = \{h(\alpha) | h \in H\}$ H yörüngesidir. Gerçekten $\alpha = e(\alpha)$ alınırsa , $[\alpha] = [e(\alpha)] = \{eh(\alpha) | h \in H\} = \{h(\alpha) | h \in H\} = H(\alpha)$.

Eğer $L = \{l_i | i \in I\}$, H nın G deki sol yan sınıflarının temsilcileri ise bloklar $l_i H(\alpha)$ şeklindedir. Gerçekten; $m \in \Omega, [m]$ bloğunu göz önüne alalım. G, Ω üzerinde transitif hareket ettiğinden $m = k(\alpha)$ olan $k \in G$ vardır. Dolayısıyla $[m] = \{kh(\alpha) : h \in H\} = kH(\alpha)$ dır. $k \in G$ olduğundan $k = l_t h_t$ olan $l_t \in L, h_t \in H$ vardır. Buradan $kH(\alpha) = l_t h_t H(\alpha) = l_t H(\alpha) \Rightarrow [m] = l_t H(\alpha)$ olur. Böylece her bir blok, bir sol yan sınıf olur.

Ayrıca $H < G$ ve $L = \{l_i | i \in I\}$ sol yan temsilcileri ise $G = \uplus l_i H$ olduğunu biliyoruz.

Bu durumda bloklarımızın sayısı sol yan sınıfların sayısına eşittir. Yani blokların sayısı H nın G içindeki $|I| = |G : H|$ indeksine eşittir.

Şimdi G nin $\Omega/_{\approx} = \{[\beta] : \beta \in \Omega\}$ bloklar kümesine indirgenmiş bir hareketin olduğunu gösterelim.

$\Lambda : G \times \Omega/_{\approx} \to \Omega/_{\approx}$

$(g, [\beta]) \ \to g\Lambda[\beta] := [g\beta]$

i) $g\Lambda(h\Lambda[\beta]\ )$=$g\Lambda([h\beta])$=$[gh\beta]$=$gh\Lambda[\beta]$

ii) $e\Lambda[\beta]$ =$[e\beta] = [\beta]$.

$[\alpha]$ bloğunun sabitleyeni $H < G$ olmak üzere $G_{[\alpha]} = H$ dır.Gerçekten;

$g \in G_{[\alpha]} \Leftrightarrow g\Lambda[\alpha] = [\alpha] \Leftrightarrow [g\alpha] = [\alpha] \Leftrightarrow gH(\alpha) = H(\alpha) \Leftrightarrow g \in H$

Yukarıdaki genel durumu özel duruma indirgeyelim.

$G = \Gamma$, $\Omega = \widehat{\mathbb{Q}}$ olması durumunu inceleyelim. Γ_∞ sabitleyeni, $Z := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretilen Γ nın bir alt grubudur. Böylece Γ_∞ u içeren Γ nın H alt gruplarını bularak, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde Γ invaryant denklik bağıntılarını üretebiliriz.

$\Gamma_0(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma | c \equiv 0 \ mod \ n\right\}$ kongrüans alt grubunu göz önüne alalım. Açıkça $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $n > 1$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < \Gamma$ dır. $\approx_n$(veya basitçe $\approx$) ile $\Gamma_o(n)$ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde indirgenmiş Γ invaryant denklik bağıntısını gösterelim. $v = \frac{r}{s}$, $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ ise $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ şeklindeki $g, g' \in \Gamma$ elemanları için $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ dır.

$v \approx w \Leftrightarrow g(\infty) \approx g'(\infty) \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H = \Gamma_0(n)$. Buradan,

$g^{-1}g' = \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$. Yani, $ry - sx \equiv 0 \ mod \ n$.

Böylece,

$v \approx w \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \ mod \ n$

elde edilir. $\approx_n$ altında denklik sınıfları sayısı $\psi(n) = |\Gamma : \Gamma_0(n)|$ dir.

Lemma 2.3.4.[1]

Çarpım, n yi bölen farklı p asalları üzerinden verildiğinde,

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$$

dir.■

2.4. Γ Modüler grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

Tanım 2.4.1.

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu taktirde $G, \Omega \times \Omega$ üzerinde $g \in G$ ve $\alpha, \beta \in \Omega$ olmak üzere ,

$$g: (\alpha, \beta) \to (g(\alpha), g(\beta))$$

ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir. Burada (α, β) yı içeren alt yörüngeyi $O(\alpha, \beta)$ ile göstereceğiz. Dolayısı ile

$O(\alpha, \beta) := \{g(\alpha, \beta) | g \in G\} = \{(g(\alpha), g(\beta) | g \in G\}$ dir. Yani $(x, y) \in O(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \exists g \in G : (x, y) = g(\alpha, \beta)$ dır.

$O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden bir $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafını şöyle oluşturabiliriz. Bu $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafın köşeleri Ω nın elemanlarıdır ve eğer $\gamma, \delta \in \Omega$ noktaları için $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya bir yönlendirilmiş bir kenar vardır denir. Bu kenar (γ, δ) veya $\gamma \to \delta$ ile gösterilir.

Böyle bir kenarı $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ üst yarı düzleminde bir hiperbolik geodezik olarak göstereceğiz.

Açık olarak $O(\beta, \alpha)$ da bir alt yörüngedir. O halde iki durum söz konusudur. Ya $O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ ya da $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ dır.

$O(\alpha, \beta) \neq O(\beta, \alpha)$ ise $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ nın oklarının ters yönlendirilmişidir. Bu durumda $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ ile $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir.

$O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ ise $\mathcal{G}(\alpha, \beta) = \mathcal{G}(\beta, \alpha)$ dır. Buradan bu graf, karşılıklı yönlendirilmiş kenar çiftlerinden oluşur. Böylece yönlendirilmemiş kenarlar elde ederiz. Yani eğer $O(\alpha, \beta) = O(\beta, \alpha)$ ve $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise bu takdirde γ dan δ ya olan kenar $\gamma - \delta$ veya $\gamma \leftrightarrow \delta$ ile gösterilecektir. Ve $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ grafına kendisiyle eşleşmiş graf denir.

Önerme 2.4.2.

$\mathcal{G}$, bir (G,Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu taktirde;

i) G, $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

ii) G, $\mathcal{G}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

iii) Eğer $\mathcal{G}$ kendisiyle eşleşmiş ise bu taktirde G, $\mathcal{G}$ nin ardışık köşelerinin çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

iv) G, $\mathcal{G}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat:

i) Bu hareket;

$\Lambda: G \times (\Omega \times \Omega) \to (\Omega \times \Omega)$

$$(g,(\alpha,\beta)) \;\; \to \Lambda\big(g,(\alpha,\beta)\big) := g\Lambda(\alpha,\beta) = (g(\alpha),g(\beta))$$

dönüşümü için G nin $\Omega \times \Omega$ üzerindeki hareketi ile eş olarak, $\forall g \in G$ için

$$g: \mathcal{G}(\alpha,\beta) \to \mathcal{G}(\alpha,\beta)$$
$$(a,b) \to g(a,b) := (g(a),g(b))$$

dönüşümü ile verilir. Bu dönüşümün bir otomorfizma olduğunu gösterelim.

a) $(x,y) \in O(\alpha,\beta)$ olsun. Buradan $\exists t \in G: (x,y) = t(\alpha,\beta)$ dır. Böylece $g(x,y) = gt(\alpha,\beta)$ dır. G bir grup olduğundan $gt \in G$ dir. O halde $g(x,y) = gt(\alpha,\beta) \in O(\alpha,\beta)$ dır. Buradan $x \to y$ için $g(x) \to g(y)$ dır. Dolayısıyla yapı koruyandır.

b) g nin birebirliğini gösterelim.Yani $\forall (x,y),(c,d) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$ için $g(x,y) = g(c,d)$ iken $(x,y) = (c,d)$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall (x,y),(c,d) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$ için;

$\big(g(x),g(y)\big) = g(x,y) = g(c,d) = \big(g(c),g(d)\big)$. Yani $\big(g(x),g(y)\big) = \big(g(c),g(d)\big)$ ve buradan $g(x) = g(y)$, $g(y) = g(d)$ dir.

G grup olduğundan $g^{-1} \in G$ dir. $g^{-1}g(x) = g^{-1}g(c)$ ve $g^{-1}g(y) = g^{-1}g(d)$ den $x = c$ ve $y = d$ ve dolayısıyla $(x,y) = (c,d)$ elde edilir.

c) g nin örtenliğini gösterelim. Bu durumda göstermemiz gereken;

$\forall (c,d) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$ için $\exists (a,b) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$:$g(a,b) = (c,d)$ dir.

$(c,d) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$ keyfi olsun.

$$\big(g(a),g(b)\big) = g(a,b) = (c,d) \Rightarrow \big(g(a),g(b)\big) = (c,d)$$
$$\Rightarrow g(a) = c \text{ ve } g(b) = d$$

G grup olduğundan $g^{-1} \in G$. Böylece $g^{-1}g(a) = g^{-1}(c)$ ve $g^{-1}g(b) = g^{-1}(d)$ ve buradan $a = g^{-1}(c)$ ve $b = g^{-1}(d)$ dir. Yani, $(a,b) = (g^{-1}(c),g^{-1}(d))$ dir.

$(g^{-1}(c),\ g^{-1}(d)) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$dır. Gerçekten;

$(c,d) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$ olduğundan $(c,d) \in O(\alpha,\beta)$. Yani, $\exists h \in G: (c,d) = h(\alpha,\beta)$ $\xRightarrow{g^{-1}\in G} g^{-1}(c,d) = g^{-1}h(\alpha,\beta)$. Böylece $\left(g^{-1}(c), g^{-1}(d)\right) = g^{-1}h(\alpha,\beta)$ dır. $g^{-1}, h \in G$ ve G grup olduğundan $g^{-1}h \in G \Rightarrow \left(g^{-1}(c), g^{-1}(d)\right) = g^{-1}h(\alpha,\beta) \in O(\alpha,\beta)$. Yani, $\left(g^{-1}(c), g^{-1}(d)\right) \in \mathcal{G}(\alpha,\beta)$ dır.

a), b), c) den G, $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

ii) (G,Ω) transitif permütasyon grubu olduğundan; Gnin $\mathcal{G}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket ettiği açıktır.

iii) $\mathcal{G}$ kendisiyle eşleşmiş ; yani $O(\alpha,\beta) = O(\beta,\alpha)$olsun. $\{t,s\},\{m,n\}$ $\mathcal{G}$ de ardışık köşelerin ikili çifti olsun. $t \to s, n \to m$ alabiliriz. $g(t) = m,\ g(s) = n$ olacak şekilde $g \in G$ ve $l(t)$=n, $l(s) = m$ olacak şekilde $l \in G$ olduğunu göstermeliyiz.

$(t,s) \in O(\alpha,\beta)$ olduğundan $\exists h \in G: h(t,s) = (\alpha,\beta)$dir.

$(n,m) \in O(\alpha,\beta)$ olduğundan $\exists k \in G: k(n,m) = (\alpha,\beta)$ dır.

Dolayısıyla $h(t,s) = k(n,m)$ ve böylece $k^{-1}h(t,s) = (n,m)$ elde edilir. $l := k^{-1}h$ şeklinde tanımlanan dönüşüm istenilen dönüşümdür.

$(n,m) \in O(\alpha,\beta)$ olduğundan $(m,n) \in O(\beta,\alpha) = O(\alpha,\beta)$ dır. Böylece $(m,n) \in O(\alpha,\beta)$.

$(t,s),(m,n) \in O(\alpha,\beta)$ olduğundan $\exists g_1, g_2 \in G: g_1(t,s) = (\alpha,\beta)$ ve $g_2(m,n) = (\alpha,\beta)$dır. Buradan $g_1(t,s) = g_2(m,n)$ yani ${g_2}^{-1}g_1(t,s) = (m,n)$ elde edilir. $g := {g_2}^{-1}g_1$ alınırsa istenilen dönüşüm elde edilir.

iv) $(a,b),(c,d) \in O(\alpha,\beta)$ keyfi olsun. $g(a,b) = (c,d)$ olacak şekilde $g \in G$ olduğunu göstermeliyiz.

$(a,b),(c,d) \in O(\alpha,\beta)$ olduğundan $\exists h,k \in G: h(a,b) = (\alpha,\beta)$ ve $k(c,d) = (\alpha,\beta)$ dır. Buradan $h(a,b) = k(c,d)$ olur ki böylece k^{-1}h(a,b)=(c,d) elde edilir. Ayrıca G grup olduğundan k^{-1}h$\in G$ ve buradan $g := k^{-1}$h alınırsa istenilen sonuç elde edilir.■

Örnek: $O(\alpha,\alpha) = \{(\gamma,\gamma) | \gamma \in \Omega\}$ $\Omega \times \Omega$ nın köşegenidir. $\mathcal{G}(\alpha,\alpha)$ alt yörüngesel grafı, her bir köşesi $\alpha \in \Omega$ olan bir düğüm noktasından oluşur. Bu graf kendisiyle eşleşmiştir. Buna aşikar alt yörüngesel graf denir. Biz genel olarak aşikar olmayan alt yörüngesel graflarla ilgileneceğiz.

Bundan böyle G yerine Γ modüler grubu ve Ω yerine $\widehat{\mathbb{Q}}$ yı alacağız. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi için alt yörüngesel graflara bakalım.Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden her bir alt yörünge, bir $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ için (∞, v) çiftini içerir. $n \geq 0$ ve

$(u,n)=1$ olmak üzere $v=\frac{u}{n}$ ise bu alt yörüngeyi $O_{u,n}$ ile buna karşılık gelen $G(\infty,v)$ alt yörüngesel grafını da $\mathcal{G}_{u,n}$ ile göstereceğiz.

Eğer $v=\infty$ ise, bu $\mathcal{G}_{1,0}=\mathcal{G}_{-1,0}$ aşikar alt yörüngesel grafıdır. Böylece $v\in\mathbb{Q}$ olduğunu farz edebiliriz.

Lemma 2.4.3.

$O(\infty,v)=O(\infty,v')\Leftrightarrow v$ ve v', Γ_∞ un aynı yörüngesindedir. Yani $g(v)=v'$ olan $g\in\Gamma_\infty$ mevcuttur.

İspat:

Yani, $O(\infty,v)=O(\infty,v')\Leftrightarrow\ \exists g\in\Gamma: g(\infty)=\infty, g(v)=v'$ dır. Şimdi bunu gösterelim.

$O(\infty,v)=O(\infty,v')$ olsun. Bu taktirde $(\infty,v)\in O(\infty,v')$ dır. Buradan $\exists g\in\Gamma$: $g(\infty,v)=(\infty,v')$ dır. $\big(g(\infty),g(v)\big)=g(\infty,v)=(\infty,v')\Rightarrow\big(g(\infty),g(v)\big)=(\infty,v')\Rightarrow$ $g(\infty)=\infty, g(v)=v'$ dır. Böylece $g\in\Gamma_\infty$dır.

Tersine v ve v', Γ_∞un aynı yörüngesinde olsun. O halde $g(\infty)=\infty, g(v)=v'$ olacak şekilde $g\in\Gamma_\infty$ vardır. Buradan $g(\infty,v)=(g(\infty),g(v))=(\infty,v')\in O(\infty,v')$ dır. Böylece $(\infty,v)\in O(\infty,v')$ ve $O(\infty,v)\cap O(\infty,v')\neq\emptyset$ olup $O(\infty,v)=O(\infty,v')$ elde edilir.■

Sonuç 2.4.4.

$\mathcal{G}_{u,n}=\mathcal{G}_{u',n'}\Leftrightarrow n=n'$ ve $u\equiv u' \ mod\ n$.

İspat:

$O(\infty,v)=O(\infty,v')$ olsun. Bu taktirde $(\infty,v)\in O(\infty,v')$ dır. $v=\frac{u}{n}$, $v'=\frac{u'}{m}$ olsun.

$g\left(\frac{u'}{m}\right)=\frac{u}{n}$ olur. Γ_∞ grubu $z: v\to v+1$ ile üretildiğinden $\frac{u}{n}=g\left(\frac{u'}{m}\right)=\frac{u'}{m}+k$ olacak şekilde $k\in\mathbb{Z}$ vardır. $v=\frac{u}{n}=g\left(\frac{u'}{m}\right)=\frac{u'}{m}+k=\frac{u'+km}{m}\Rightarrow m=n$ ve $u'+km=u$

$\Rightarrow m=n$ ve $u\equiv u'\ mod\ n$ dır.■

Dolayısıyla $\forall n\geq 1$ tamsayısı için $\varphi(n)$, Euler Fonksiyonu, tane farklı $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı vardır. Böylece her bir $u\in\mathbb{U}_n:=\{u|(u,n)=1, u\leq n\}$ için farklı bir alt yörüngesel graf elde edilir. Örneğin; $n=8$ için alt yörüngesel graflar $\mathcal{G}_{1,8}$, $\mathcal{G}_{3,8}$, $\mathcal{G}_{5,8}$, $\mathcal{G}_{7,8}$ dır.

Eğer $(\frac{r}{s},\frac{x}{y})\in O_{u,n}$ yani $\mathcal{G}_{u,n}$ de $\frac{r}{s}$ den $\frac{x}{y}$ ye bir yönlendirilmiş kenar varsa bunu $\mathcal{G}_{u,n}$ de $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in\mathcal{G}_{u,n}$ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 2.4.5.

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n} \Leftrightarrow$ i) $x \equiv ur \; mod \; n, y \equiv us \; mod \; n \,, ry - sx = n$ veya

ii) $x \equiv us \; mod \; n \,, y \equiv -us \; mod \; n \,, ry - sx = -n$

(Eğer $sy > 0$ ise i) ve ii) sırası ile $\frac{r}{s} > \frac{x}{y}$ ve $\frac{r}{s} < \frac{x}{y}$ ye karşılık gelir.)

İspat:

"$\Rightarrow$"

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n}$ olsun. Buradan $(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}) \in O(\infty, \frac{u}{n})$ dır. O halde ;

$g(\infty) = \frac{r}{s} = \frac{-r}{-s}, g\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olacak şekilde $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ vardır. Bu bize

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -x \\ -s & -y \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

eşitliklerinden birini verir.

(2.1) i ele alalım. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$. Yani, $\begin{pmatrix} a & au + bn \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ dır. Böylece $a = r, x = au + bn$ ve $c = s, y = cu + dn$ dir. Buradan $x = ru + bn$ ve $y = su + dn$; yani

$$x \equiv ur \; mod \; n \text{ ve } y \equiv us \; mod \; n \tag{2.5}$$

elde edilir.

(2.1) eşitliğinin determinantını alırsak;

$$(ad - bc)n = (ry - sx) \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, ad - bc = 1} n = (ry - sx) \tag{2.6}$$

olur. Böylece (2.5) ve (2.6) dan i) şıkkını elde ederiz. Benzer şekilde (2.2) eşitliğinden aynı sonucu elde ederiz.

(2.3) ı ele alalım. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$. Yani, $\begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix}$ dır. Böylece, $a = -r, x = au + bn$ ve $c = -s, y = cu + dn$ dir. Buradan $x = -ru + bn$ ve $y = -su + dn$; yani

$$x \equiv -ur \bmod n \text{ ve } y \equiv -us \bmod n \tag{2.7}$$

elde edilir.

(2.3) eşitliğinin determinantını alırsak ;

$$(ad - bc)n = (-ry + sx) \xRightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, ad-bc=1} -n = (ry - sx) \tag{2.8}$$

(2.7) ve (2.8) den ii) şıkkını elde ederiz. Benzer şekilde (2.4) eşitliğinden aynı sonucu elde ederiz.

"$\Leftarrow$"

i) şıkkı yani $x \equiv ur \bmod n,\ y \equiv us \bmod n, ry - sx = n$ sağlansın. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n}$ olduğunu yani $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{u,n} = O(\infty, \frac{u}{n})$ olduğunu gösterelim.

$x \equiv ur \bmod n \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z}: x = ur + bn$

$y \equiv us \bmod n \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}: y = us + cn$

$g := \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım.

$g(\infty) = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ ve $g\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ur+bn \\ us+cn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bu durumda $g\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = \left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right)$ dır.

$ry - sx = n$ eşitliğinde x ve y yi yerine yazarsak $r\,(us + cn) - s(ur + bn) = n$ elde edilir. Böylece $rus + rcn - sur - sbn = n$; yani $rc - sb = 1$ dir. O halde $g \in \Gamma$ dır.

Sonuç olarak $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \in O_{u,n} = O(\infty, \frac{u}{n})$ elde edilir. Benzer şekilde ii) şıkkı kabul edilerek aynı sonuç elde edilir.■

Sonuç 2.4.6.

$u^2 \not\equiv -1 \; mod \; n$ ve $uv \equiv -1 \; mod \; n$ olsun. Bu taktirde $\mathcal{G}_{u,n}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

İspat :

$\frac{x}{y} \to \frac{r}{s} \; \mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olsun. Teorem 2.4.5 den

i) $r \equiv ux \; mod \; n$, $s \equiv uy \; mod \; n$ ve $xs - ry = n$ veya

ii) $r \equiv -ux \; mod \; n$, $s \equiv -uy \; mod \; n$ ve $xs - ry = -n$ dir.

i) şıkkının sağlandığını farzedelim. Buradan ;

$$vr \equiv vux \; mod \; n \xRightarrow{uv \equiv -1 \; mod \; n} x \equiv -vr \; mod \; n$$

$$vs \equiv vuy \; mod \; n \xRightarrow{uv \equiv -1 \; mod \; n} y \equiv -vs \; mod \; n \text{ ve}$$

$$xs - ry = n \Rightarrow ry - sx = -n$$

elde edilir. Teorem 2.4.5 ii) şıkkından $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \; \mathcal{G}_{v,n}$ de bir kenar olur. Benzer şekilde ii) şıkkı kabul edilerek aynı sonuç elde edilir.

Şimdi, $O(\infty, \frac{u}{n}) \cap O(\frac{u}{n}, \infty) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $O(\infty, \frac{u}{n}) \cap O(\frac{u}{n}, \infty) \neq \emptyset$ olsun. Buradan $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\infty, \frac{u}{n}\right)$ dır. O halde $\exists T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \; : \; T(\infty, \frac{u}{n}) = (\frac{u}{n}, \infty)$ dır. Dolayısıyla, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ dır. Yani, $\begin{pmatrix} a & au + bn \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ dir. Buradan, $a = u$, $c = n$, $au + bn = 1$,$cu + dn = 0$ olur. $cu + dn = 0$ ve $c = n$ olduğundan $nu + dn = 0 \Rightarrow u + d = 0 \Rightarrow d = -u$ dır. Böylece $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix}$ biçimindedir ve , $T \in \Gamma$ olduğundan, $detT = 1$ dir. Buradan, $-u^2 - bn = 1 \Rightarrow \; u^2 \equiv -1 \; mod \; n$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $O(\infty, \frac{u}{n}) \cap O(\frac{u}{n}, \infty) \neq \emptyset$ varsaymaktan gelmiştir. O halde $O(\infty, \frac{u}{n}) \cap O(\frac{u}{n}, \infty) = \emptyset$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{G}_{u,n}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ grafları eşleşmiştir. ■

Tanım 2.4.7.

$L \subset \mathcal{G}_{u,n}$ alt grafında herhangi iki köşe L de kalan bir yolla birleştirilebiliniyor ise L ye bir bağlantılı graf adı verilir.

Tanım 2.4.8.

$L \subset \mathcal{G}_{u,n}$, $\mathcal{G}_{u,n}$ nin bir bağlantılı alt grafı olsun. L nin hiçbir köşesi L nin köşeleri dışında $\mathcal{G}_{u,n}$ nin hiçbir köşesi ile birleştirilemiyorsa L ye $\mathcal{G}_{u,n}$ nin bir bileşeni adı verilir.

Sonuç 2.4.9.

$\mathcal{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1 \; mod \; n$

İspat :

"⇒"

$\mathcal{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olsun. Bu taktirde $O(\infty,\frac{u}{n}) = O(\frac{u}{n},\infty)$ dır. Buradan $\exists T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : T\left(\infty,\frac{u}{n}\right) = (\frac{u}{n},\infty)$ dır. Böylece ; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ dir. Buradan, $\begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = u$, $c = n$, $au + bn = 1$, $cu + dn = 0$ olur.

$cu + dn = 0 \overset{c=n}{\Longrightarrow} nu + dn = 0 \Rightarrow n\,(u + d) = 0 \overset{n\geq 1}{\Longrightarrow} u + d = 0 \Rightarrow d = -u$ bulunur. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix}$ biçimindedir ve , $T \in \Gamma$ olduğundan , $detT = 1$ dir. Yani, $-u^2 - bn = 1$. Böylece $u^2 \equiv -1\; mod\; n$ elde edilir.

"⇐"

$u^2 \equiv -1\; mod\; n$ olsun. Bu taktirde $\exists b \in \mathbb{Z} : u^2 = -1 - bn$ dir. Buradan $-u^2 - bn = 1$ olup $T := \begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix} \in \Gamma$ dır.

Böylece, $\begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + bn \\ un - nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Buradan $T(\infty) = \frac{u}{n}$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right) = \infty$ olur. O halde $O(\infty,\frac{u}{n}) = O(\frac{u}{n},\infty)$ olup $\mathcal{G}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir.■

$\forall n \geq 1$ tamsayısı için $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde "$\frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0\; modn$ " ile tanımlı $\approx_n$ nin Γ invaryant denklik bağıntısı olduğunu biliyoruz. Eğer $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n}$ ise Teorem 2.4.5. den $ry - sx = \pm n$ olur ve buradan $\frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ elde edilir. Bu yüzden $\mathcal{G}_{u,n}$ nin her bir bileşeni bir tek blokta bulunur.

Sonuç 2.4.10.

$\mathcal{G}_{u,n}$ en az $\psi(n)$ tane bağlantılı bileşene sahiptir; Özellikle eğer $n \geq 1$ ise $\mathcal{G}_{u.n}$ bağlantılı değildir.■

2.5. Farey Grafı

Tanım 2.5.1.

Her $m \geq 1$ tamsayısı için, $|y| \leq m$ olmak üzere bütün $\frac{x}{y}$ rasyonel sayılarından oluşan kesin monoton artan diziye m. mertebeden Farey dizisi denir ve F_m ile gösterilir. Örneğin F_4 dizisi ;

$$\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \dots$$

şeklindedir.

Açıkça $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ ve $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dır.Gerçekten ;

• $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ olduğunu gösterelim.

F_i, F_j Farey dizileri ve $i < j$ olsun.$\frac{a}{b} \in F_i$ olduğundan $|b| \leq i < j$ den $\frac{a}{b} \in F_j$ dir.

• $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ olduğunu gösterelim.

$\bigcup_{m\geq 1} F_m \subset \mathbb{Q}$ olduğunu açıktır. $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ olsun. $m := |y|$ alınırsa $\frac{x}{y} \in F_m$ dir. Buradan $\frac{x}{y} \in \bigcup_{m\geq 1} F_m$ olur. Bu taktirde, $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m$ dir.

$\mathcal{G}_{1,1}$ grafı da Farey dizileri ile olan ilişkisinden dolayı Farey grafı olarak adlandırılır ve F ile gösterilir.

$\mathcal{G}_{1,1}$ grafı ;

- Köşelerinin kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ dır.
- Kendisiyle eşleşmiştir.(Sonuç 2.4.7 $1^2 \equiv -1\ mod 1$ olduğundan)
- Teorem 2.4.5 den $\frac{r}{s}$ ile $\frac{x}{y}$ köşeleri komşudur $\Leftrightarrow ry - sx = \pm 1$ dir. Örneğin; ∞ a komşu olan köşeler tam sayılardır.

Ayrıca Önerme 2.4.2 den Γ, köşeler ve kenarlar üzerinde transitif olarak hareket eden $\mathcal{G}_{1,1}$ in otomorfizmalarının bir grubudur.

Lemma 2.5.2.

$\frac{r}{s}, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F de komşu köşelerdir.

ii) $ry - sx = \pm 1$

iii) Bir $m \in \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$, F_m de komşu terimlerdir.■

İspat:

" i) ⇒ ii)"

Aşikar. Çünkü F nin tanımından $ry - sx = \pm 1$ dir.

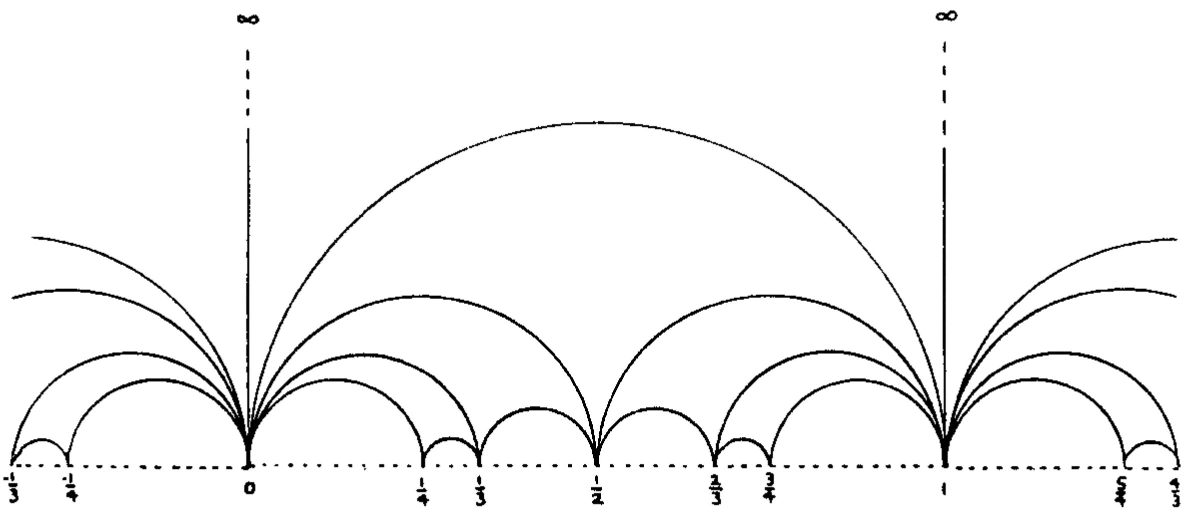
" ii) ⇒ iii)"

$ry - sx = \pm 1$ olsun. Farz edelim ki s ve $y \in \mathbb{N}$ dir. $m = mak\,\{s, y\}$ alalım. Gösterelim ki $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F_m de komşu terimlerdir. $\frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ farz edelim. Böylece $ry - sx = 1$ dir. $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{x}{y} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ eşitsizliğini göz önüne alalım.

$\frac{r}{s} - \frac{x}{y} = \left(\frac{r}{s} - \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} - \frac{x}{y}\right) = \frac{br-as}{bs} + \frac{ay-bx}{by} \geq \frac{1}{bs} + \frac{1}{by} = \frac{y+s}{bsy}$ dir. Böylece $\frac{y+s}{bsy} \leq \frac{ry-sx}{sy} = \frac{1}{sy}$ den $\frac{y+s}{b} \leq 1$ dir. Buradan $y + s \leq b$ elde edilir ki $m = mak\,\{y, s\} < y + s$ olduğundan $\frac{a}{b} \notin F_m$ dir. Böylece $\frac{r}{s}$ ile $\frac{x}{y}$ F_m de komşu terimlerdir.

"iii) ⇒ i)"

[13] da Teorem 6.5, Sonuç 6.6 ve Teorem 6.1 den istenilen elde edilir.■



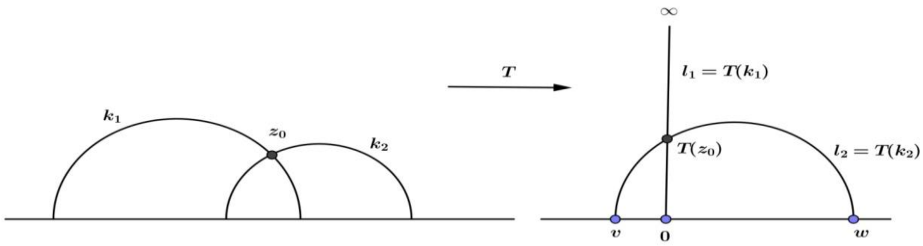
Şekil 4. Farey grafı

Şekil, ∞ köşesinin bağlı olduğu köşeleri ve F_4 ün elemanlarını ve de bu elemanların birbirleriyle oluşan kenarlarını göstermektedir. Görsel uygunluk açısından F nin kenarlarını $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}|\ Im(z) > 0\}$ üst yarı düzlemindeki Öklid yarı çemberleri veya $\mathbb{R}$ ye dik Öklid yarı doğruları şeklindeki hiperbolik geodezikler olarak gösterebiliriz. Yarı doğruları "∞" dan geçen geodezikler olarak kabul edeceğiz. $\mathbb{U}$ nun $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ hareketini göz önüne alarak Γ yı $\mathbb{U}$ nun hiperbolik izometrilerinin bir grubu olarak göz önüne alabiliriz. Yani, bu hareket altında geodezikler geodeziklere resmedilir. Böylece $\mathbb{U}$ daki F gösterimimiz Γ altında invaryanttır.

Sonuç 2.5.3.

F grafının kenarları $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ üst yarı düzleminde kesişmezler.

İspat:



Şekil 5. $\mathbb{U}$ da kesişen iki kenarın $T \in \Gamma$ altındaki görüntüsü

F nin iki kenarının $\mathbb{U}$ da kesiştiğini varsayalım. $F = \mathcal{G}_{1,1}$ kendi eşleşmiş bir alt yörüngesel graf olduğundan Önerme 2.4.2. iii) şıkkı gereği Γ, F nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder. Dolayısı ile; $\infty \to 0$ kenarını l_1 ile gösterirsek, transitiflikten $T(k_1) = l_1$ olan $T\epsilon\Gamma$ vardır. $T(k_2) = l_2$ şekildeki gibidir. Bu yüzden üst yarı düzlemde kesiştiğini varsaydığımız bu kenarlardan birinin 0 ve ∞ u birleştiren $Rez = 0$ kenarı olduğunu varsayabiliriz. Ve böylece diğeri $v := \frac{x}{y} < 0 < w := \frac{r}{s}$ olacak şekilde v ve w rasyonellerini birleştiren kenar olur. $\frac{x}{y} < 0 < \frac{r}{s}$ den $ry - sx = 1$ dir. $x < 0$ ve $r, s, y > 0$ alabiliriz. Buradan,

$r > 0$ ve $y > 0 \Rightarrow ry \geq 1$

$s > 0$ ve $x < 0 \Rightarrow sx \leq -1 \Rightarrow -sx \geq 1$ olur. Taraf tarafa toplarsak ;$ry - sx \geq 2$ olur ki; bu $ry - sx = 1$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki bize F grafının kenarlarının $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde kesişmeyeceğini söyler. ■

2.6. $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $F_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $F = \mathcal{G}_{1,1}$ in özelliklerinin diğer $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletilebileceğini göreceğiz. Her bir $\mathcal{G}_{u,n}$ grafının $\psi(n)$ tane alt grafın ayrık birleşimi olduğunu ve her bir alt grafın köşeleri $\frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ $ry - sx \equiv 0\ modn$ ile tanımlanan $\approx_n \Gamma$ invaryant denklik bağıntısına göre tek blok oluşturduğunu biliyoruz. Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olduğundan, bu blokları transitif olarak permüte eder. Yani; $\{B_1, B_2, \dots, B_{\psi(n)}\}$ blokların kümesi olmak üzere $1 \leq i,j \leq \psi(n)$ ve $B_i, B_j \in \{B_1, B_2, \dots, B_{\psi(n)}\}$ için $\exists T \in \Gamma$: $T(B_i) = B_j$ dir. Ve her bir $T \in \Gamma$, blokların kümesi üzerinde bir permütasyondur. Blokları transitif olarak permüte edildiğinden, bloklara karşılık gelen alt graflar izomorftur.

$F_{u,n}$, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} | y \equiv 0\ modn\right\}$ bloğundan oluşan $\mathcal{G}_{u,n}$ nin alt grafını gösterir. Böylece $\mathcal{G}_{u,n}$, $F_{u,n}$ nin $\psi(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur.Şimdi $F_{u,n}$ de kenar olma şartını verelim.

Teorem 2.6.1.

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{u,n} \Leftrightarrow$ i) $x \equiv ur\ modn$ ve $ry - sx = n$ veya

ii) $x \equiv -ur\ modn$ ve $ry - sx = -n$ dir.

İspat:

Teorem 2.4.5. den aşikardır.■

Teorem 2.6.2.

$\Gamma_0(n)$, $F_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat:

Şimdi $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğini gösterelim. $v, w \in [\infty]$, $F_{u,n}$ nin köşeleri olsun. $\Gamma, \widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif hareket ettiğinden $\exists g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$: $g(v) = w$ dır. $v, w \in [\infty]$ olduğundan $v = \frac{k}{ln}$ ve $w = \frac{t}{sn}$ şeklindedir. Bu durumda ;

$$g(v) = w \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ ln \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ sn \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ak + bln \\ ck + dln \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ sn \end{pmatrix}$$

olup ; $n|ck$ ve $(k,n) = 1$ olduğundan $n|c$ dir. Dolayısıyla $c \equiv 0\ mod\ n$ olduğundan $g \in \Gamma_0(n)$ dir. Yani $\Gamma_0(n)$, $[\infty]$ bloğu üzerinde transitif olarak hareket eder. Ayrıca

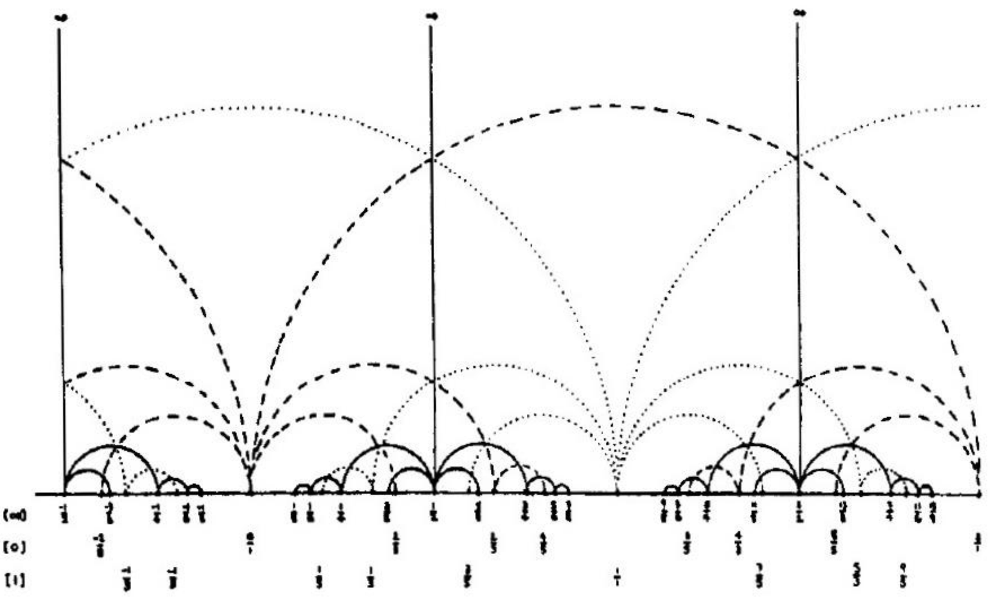
$g: [\infty] \to [\infty]$, $g \in \Gamma_O(n)$ dönüşümü birebir ve örtendir.

Şimdi $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiğini gösterelim. $\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} \in F_{u,n}$ ve $\frac{a}{bn} \to \frac{c}{dn} \in F_{u,n}$ iki kenar olsun. Buradan $\left(\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn}\right), \left(\frac{a}{bn}, \frac{c}{dn}\right) \in O(\infty, \frac{u}{n})$ dır. O halde $\exists h = \begin{pmatrix} k & l \\ m & t \end{pmatrix} \in \Gamma$: $g\left(\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn}\right) = \left(\frac{a}{bn}, \frac{c}{dn}\right)$ dır. Yani,

$$\begin{pmatrix} k & l \\ m & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & x \\ sn & yn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ bn & dn \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} kr + lyn & kx + lyn \\ mr + tsn & mx + tyn \end{pmatrix} \Rightarrow mr + tsn = bn$$

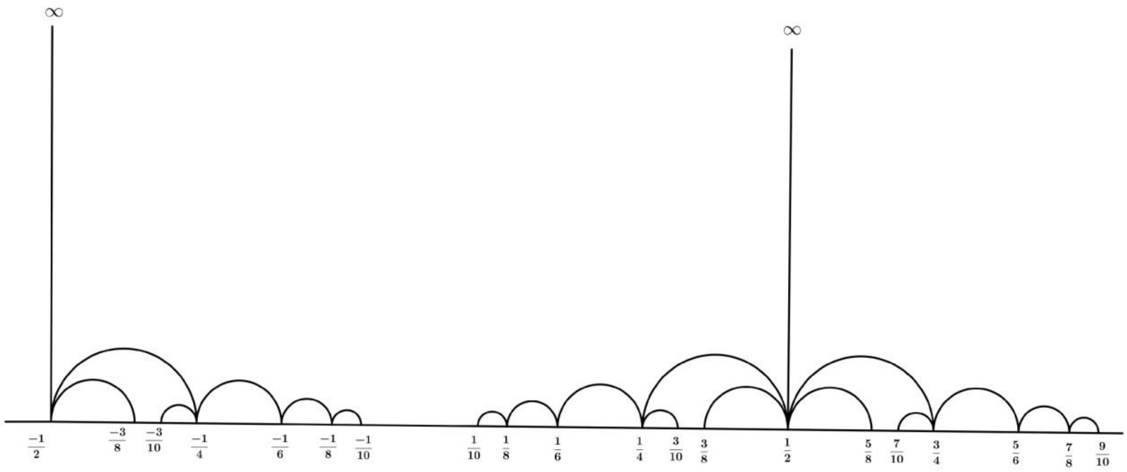
$\Rightarrow n|m \xRightarrow{(n,r)=1} n|m$ olur.

Dolayısıyla $m \equiv 0 \, mod \, n$ olduğundan $h \in \Gamma_O(n)$ dir. Sonuç olarak $\Gamma_O(n)$, $F_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder. Yukarıdan $h \in \Gamma_O(n)$ nin birebir ve örtenliği açıktır. Çünkü $\Gamma_O(n), F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden her bir köşeye farklı köşeler karşılık gelir. Böylece farklı her kenara farklı kenarlar karşılık gelir. Dolayısıyla $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiği gösterilmiştir.■



Şekil 6. $\mathcal{G}_{1,2}$ alt yörüngesel grafı

n=1 olduğunda en basit durum $F_{1,1} = \mathcal{G}_{1,1} = F$ dir. Bir sonraki en basit graf Şekil 6. $\mathcal{G}_{1,2}$ grafıdır. Bu graf; s çift, r çift veya her ikisi tek olmak üzere, $\frac{r}{s} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanlarını içeren $[\infty], [0], [1]$ bloklarını gösteren kesik, kesik olmayan ve noktalı ($\mathbb{U}$ daki hiperbolik geodezikler ile gösterilen) biçimindeki kenarlar ile $F_{1,2}$ nin $\psi(2)$=3 tane izomorfik kopyasından oluşur. $\mathcal{G}_{1,2}$, $1^2 \equiv -1\ mod\ 2$ olduğundan kendisiyle eşleşmiş ve bu yüzden yönlendirilmemiştir. Böylece $F_{1,2}$ de yönlendirilmemiştir.



Şekil 7. $F_{1,2}$ grafı

Şekil 7. $F_{1,2}$ grafının köşeleri, s çift olmak üzere $\frac{r}{s}$ şeklindedir. $F_{1,2}$ grafının kenar olma şartı Teorem 2.6.1. den

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $F_{1,2}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$ $ry - sx = \pm 2$ dir.

Lemma 2.6.3.

i) v ,$F_{u,n}$ de bir köşe olmak üzere $v \mapsto -v$ ile verilen, $F_{u,n} \mapsto F_{-u,n}$ bir izomorfizmadır.

ii) Eğer $m|n$ ise v $F_{u,n}$ nin bir köşesi olmak üzere $v \mapsto \frac{nv}{m}$ ile verilen , $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ nin bir alt grafına izomorftur.

İspat:

i) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ modn\}$ ve $F_{-u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_{-n} = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod(-n)\right\} = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ modn\}$ olduğundan $[\infty]_n = [\infty]_{-n} \coloneqq [\infty]$ dur. $S(v) = -v$ fonksiyonunun $[\infty]$ uzerinde birebir örten olduğu açıktır. Şimdi S dönüşümünün yapı koruyan olduğunu gösterelim:

$\frac{a}{bn} \to \frac{c}{dn} \epsilon F_{u,n}$ olsun. Teorem 2.6.1. den i) veya ii) sağlanır. Farz edelim ki teoremin i) şıkkı sağlansın. Yani $c \equiv ua\ mod\ n$ ve $ad - bc = 1$ dir. Burada $(-c) \equiv u(-a) mod\ n \equiv -(-u)(-a) mod\ n$ ve $(-a)d - (-b)c = -1$ olur. Böylece

Teorem 2.6.1. den $\frac{-a}{bn} \rightarrow \frac{-c}{dn} \epsilon F_{-u,n}$ elde edilir. Benzer şekilde ii) şıkkı da kabul edilerek aynı sonuç elde edilir. Sonuç olarak S dönüşümü bir izomorfizmadır.

ii) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0 \ mod\ n\}$ ve $F_{u,m}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_m = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0 \ mod\ m\}$ dir. $S: [\infty]_n \rightarrow [\infty]_m$, $T(v) = {}^{nv}/_{m}$ dönüşümünün birebir olduğu açıktır (Bu dönüşümün örten olması gerekmez çünkü; $m = 5$ ve $5 \mid 20$ olduğundan $n = 20$ için $\frac{2}{5} \epsilon [\infty]_m$ için $\frac{nv}{m} = \frac{20v}{5} = \frac{2}{5}$ olur ve buradan $v = \frac{1}{10}$ olur ki bu $[\infty]_n$ nin elemanı değildir.). Şimdi gösterelim ki S dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür.

$v = \frac{r}{sn} \rightarrow \frac{x}{yn} = w \in F_{u,n}$ olsun. $S(v) = \frac{r}{sm} \rightarrow \frac{x}{ym} = S(w) \in F_{u,n}$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki Teorem 2.6.1 i) sağlansın. Yani $x \equiv ur \ mod\ n$ ve $ry - sx = 1$ olsun. $m \mid n$ olduğundan $x \equiv ur \ mod\ m$ dir. Böylece $x \equiv ur \ mod\ m$ ve $ry - sx = 1$ elde edilir ki bu bize Teorem 2.6.1 ii) gereği $\frac{r}{sm} \rightarrow \frac{x}{ym}$ $F_{u,m}$ de bir kenar olduğunu söyler. Benzer şekilde teoremin ii) şıkkının sağlandığı varsayılıp aynı sonuç elde edilir. Bu bize S nin bir $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ ye bir monomorfizma olduğunu söyler. Ancak $F_{u,m}$ nin bir alt grafına izomorftur.■

ii) de $m = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir. ■

Sonuç 2.6.4.

$F_{u,n}$ nin bütün köşeleri için $f: v \mapsto nv$ ile verilen, $F_{u,n}$ den F nin bir alt grafına bir izomorfizmadır.■

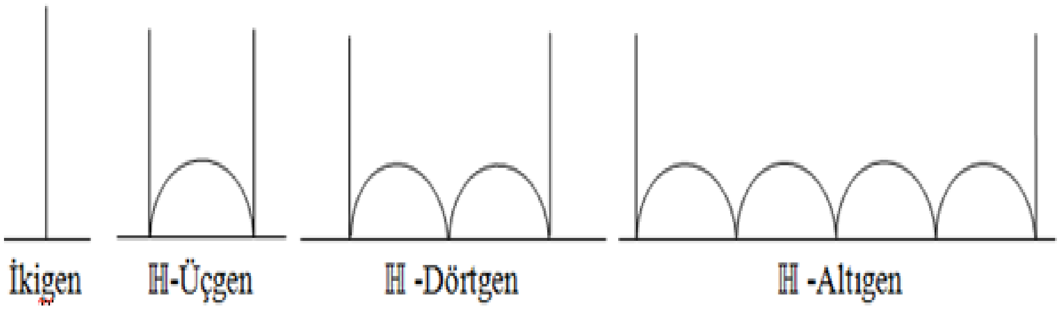
Tanım 2.6.5.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ ler $F_{u,n}$ de köşeler olmak üzere, her bir $i = 0, 1, \ldots, n$ için, $a_i \rightarrow a_{i+1}$ veya $a_{i+1} \rightarrow a_i$ ise a_0 dan a_n ye n uzunluklu bir yol vardır denir. $a_0 = a_n$ ise yola bir devre adı verilir.

a_1 ve a_2 $F_{u,n}$ de keyfi iki köşe olsun. a_1 den başlayıp a_2 ye en az sayıda kenar içeren bir geodezik yolla ulaşılabiliyorsa bu yola minimal uzunluklu yol adı verilir.

Ayrıca a_i, a_{i+1} ikilileri için $a_i \longrightarrow a_{i+1}$ ise bu devreye yönlenmiş bir devre denir. Yani, $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow a_0$ devresine bir yönlenmiş devre adı verilir. Bu okların biri (hepsi değil) ters ise devreye ters yönlenmiş devre denir.

Üç kenarlı bir devreye bir üçgen; dört kenarlı bir devreye bir dörtgen ve altı kenarlı bir devreye bir altıgen denir.



Şekil 8. Devreler

$v_1, v_{2,} v_3$ farklı köşeler olmak üzere $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$ ise bu yola yönlendirilmiş üçgen ; $v_1 \to v_2 \leftarrow v_3 \to v_1$ gibi farklı yönde kenar varsa buna da ters yönlendirilmiş üçgen denir.

Kendisiyle eşleşmiş alt yörüngesel grafta bu iki kavram birbirine denktir.

Teorem 2.6.6.

$F_{1,2}$ bağlantılıdır.

İspat:

$F_{1,2}$ nin herbir v köşesinin $F_{1,2}$ deki bir yol ile ∞ a birleştiğini göstermek yeterlidir. $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$ ve $(a, 2b) = 1$ olmak üzere $v = \frac{a}{2b}$ alarak, b üzerinde indüksiyon uygulayalım. $b = 1$ için

i) $a.0 - 2.1 = -2$

ii) $(a, 2) = 1$ olduğundan $1 \equiv a \, mod \, 2.$ $1 \equiv -a \, mod \, 2$ olduğundan v= $\frac{a}{2} \to \frac{1}{0} \in$ $F_{1,2}$ dir.

Şimdi farz edelim ki $b \geq 2$ olsun. $2b$ den küçük bütün paydalar için iddia doğru olsun.

Buradan v nin daha küçük paydalı bir w köşesi ile birleştirilebileceğini göstereceğiz.$(a, b) = 1$ olduğundan $\exists c, d \in \mathbb{Z}$: $ad - bc = 1$ dir. Burada uygun bir $k \in \mathbb{Z}$ için c ve d yerine sırası ile $c + ka$ ve $d + kb$ alabiliriz. Gerçekten;

$$a(d + kb) - b(c + ka) = ad + akb - bc - bka = ad - bc = 1$$

olur.

$0 < d < b$ farzedebiliriz. Gerçekten;

a) $d \neq b$ dir. $d = b$ olsa $ad - bc = 1$ olduğundan $ab - bc = 1 \Rightarrow (a - c)b = 1$ olur ki bu $b \geq 2$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki bize $d \neq b$ olduğunu söyler.

b) $d < 0$ olsun. Bu durumda $d + kb$ yi pozitif yapan en küçük $k := k_1 \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için d yerine $d + k_1 b$ yazarsak $0 < d + k_1 b < b$ olur . d yerine $d + k_1 b$ ve c yerine de $c + k_1 b$ yazarsak

$a(d + k_1 b) - b(c + k_1 a) = ad + ak_1 b - bc - ak_1 b = ad - bc = 1$ elde edilir. Bu da bize $0 < d < b$ farz etmemizin genelliği bozmayacağını verir.

c tek ise $w = \frac{c}{2d}$, $F_{1,2}$ de v nin komşu köşesidir, yani $\frac{a}{2b} = v \to w = \frac{c}{2d} \in F_{1,2}$ dir. Gerçekten;

i) c tek ve a tek olduğundan $c \equiv a \; mod \; 2$

ii) $a.2d - 2b.c = 2(ad - bc) \xRightarrow{ad-bc=1} a2d - 2bc = 2$ dir.

$2d < 2b$ olduğundan hipotezden $w = \frac{c}{2d}$, ∞ a bir yol ile birleşir ve böylece v de ∞ ile birleşir.

Şayet c çift ise $w = \frac{a-c}{2(b-d)}$, $F_{1,2}$ de v nin komşu köşesidir, yani $\frac{a}{2b} = v \to w = \frac{a-c}{2(b-d)} \in F_{1,2}$ dir. Gerçekten;

i) c çift olduğundan $c \equiv 0 \; mod \; 2$. Yani $-c \equiv o \; mod \; 2$. Böylece $a - c \equiv a \; mod \; 2$. Yani, $a - c \equiv -a \; mod \; 2$ dir.

ii) $a2(b - d) - 2b(a - c) = 2ab - 2ad - 2ab + 2bc$

$= 2bc - 2ad$

$= 2(bc - ad)$= -2 dir.

$0 < b - d < b \Rightarrow 0 < 2(b - d) < 2b$ olur. Hipotezden $w = \frac{a-c}{2(b-d)}$ ∞ a bir yol ile birleşir. Ve böylece v de ∞ ile birleşir.■

Sonuç 2.6.7.

$\mathcal{G}_{1,2}$ grafı $\psi(2) = 3$ tane bağlantılı bileşene sahiptir.

İspat:

$\mathcal{G}_{1,2}$ grafı $F_{1.2}$ nin üç izomorf kopyalarından oluştuğundan $\psi(2) = 3$ bileşeni vardır.■

Sonuç 2.6.8.

$F_{1,3}$, $F_{1,4}$ alt grafları bağlantılıdır.■

Lemma 2.6.3 i) den $F_{1,3} \to F_{-1,3} = F_{2,3}$ ve $F_{1,4} \to F_{-1,4} = F_{3,4}$ olur ki buradan $F_{2,3}$ ve $F_{3,4}$ de bağlantılı olur.

Teorem 2.6.9.[11]

$\forall n \leq 4$ için $F_{u,n}$ bağlantılıdır.■

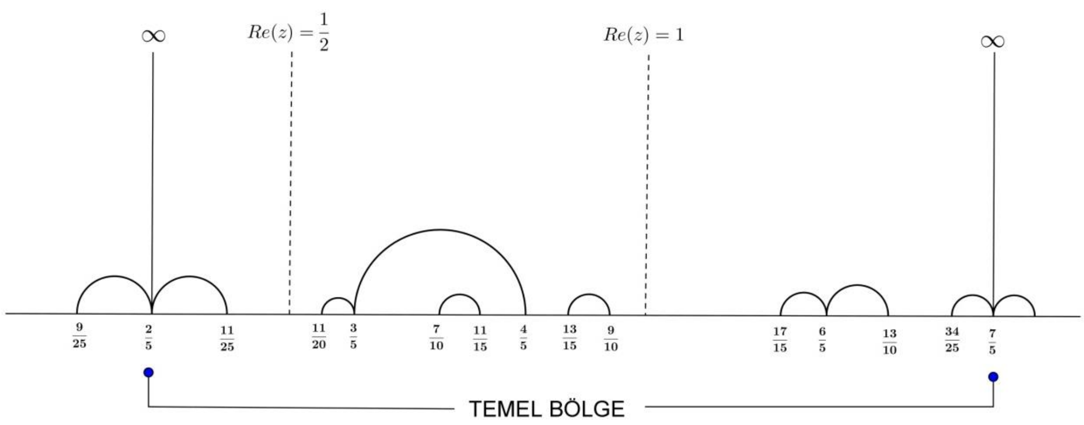
Tersine aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.6.10.

$n = 5$ ise $F_{u,n}$ bağlantılı değildir.

İspat:

Şimdi Sonuç 2.4.9 a göre yönlendirilmiş olan $F_{1,5}$ grafını inceleyelim. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F_{1,5}$ $\Leftrightarrow$ $x \equiv r \; mod \; 5$, $ry - sx = 5$ veya $x \equiv -r \; mod \; 5$, $ry - sx = -5$ dir. Buradan $r \equiv \pm 1 \; mod \; 5$ olmak üzere $\frac{r}{s}$ köşeleri ile $x \equiv \pm 2 \; mod \; 5$ olmak üzere $\frac{x}{y}$ köşeleri hiçbir zaman birleşemez. Böylece bu köşeler farklı bağlantılı köşelerde kalırlar. Böylece $F_{1,5}$ bağlantısızdır.



Şekil 9. $F_{2,5}$ grafı

Şimdi $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ arasında kalan $F_{2,5}$ in hiçbir köşesi, bu aralık dışında $F_{2,5}$ in hiçbir köşesi ile birleştirilemeyeceğini gösterelim. $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığında $F_{2,5}$ in köşeleri vardır. Mesela $\frac{7}{10}$ gibi.

Farzedelim ki $\frac{r}{5s} \to \frac{x}{5y} \in F_{2,5}$ ve $\frac{r}{5s} < 1 < \frac{x}{5y}$ olsun. Bu durumda $\frac{r}{s} < 5 < \frac{x}{y}$ ve $ry - sx = -1$ dir. Yani, $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F$ dir. Ancak $\infty \to 5 \in F$ olduğundan bu iki kenar kesişir. Bu çelişki böyle bir kenarın $F_{2,5}$ de olmadığını gösterir.

Şimdi farzedelim $\frac{r}{5s} \to \frac{x}{5y} \in F_{2,5}$ ve $\frac{r}{5s} < \frac{1}{2} < \frac{x}{5y}$ olsun. Buradan $\frac{r}{s} < \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} < \frac{x}{y}$ ve $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y} \in F$ dir. Bu bize $\frac{r}{s} = 2$ ve $\frac{x}{y} = 3$ olduğunu söyler. Yani, $r = 2$, $s = 1$ ve $x = 3, y = 1$ dir. Böylece $\frac{2}{5} \to \frac{3}{5} \in F_{2,5}$ dir. Oysa bu $3 \equiv -4 \, mod \, 5$ olması gerektiğini söyler. Oysa bu olamaz. Böylece $F_{2,5}$ bağlantılı değildir.■

$F_{4,5}$ ve $F_{-4,5}$ Lemma 2.6.3 i) den izomorf ve $F_{1,5} = F_{-4,5}$ olduğundan $F_{4,5}$ de bağlantısızdır. Benzer şekilde $F_{3,5}$ ve $F_{-3,5}$ izomorf ve $F_{2,5} = F_{-3,5}$ olduğundan $F_{3,5}$ de bağlantısızdır.

Teorem 2.6.11.

i) $F_{u,n}$ yönlendirilmiş üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \, mod \, n$

ii) Eğer $n > 1$ ise bu taktirde $F_{u,n}$ ters yönlendirilmiş üçgen içermez.

İspat:

i) Farz edelim ki $F_{u,n}$ yönlendirilmiş bir üçgen içersin. Teorem 2.6.2 den bu üçgenin $\infty \to \frac{u}{n} \to v \to \infty$ şeklinde olduğunu varsayabiliriz.

$(\frac{r}{kn} =) v \to \infty (= \frac{1}{0}) \in F_{u,n}$ ve $v < \infty$ olduğundan Teorem 2.6.1 $0r - kn = -n$ olur. Buradan $-kn = -n \Rightarrow k = 1$ dir. Yani $v = \frac{r}{kn} = \frac{r}{n}$ şeklindedir.

İlk önce $\frac{u}{n} < v (= \frac{r}{n})$ olsun. $\frac{u}{n} \to v \, (= \frac{r}{n}) \in F_{u,n}$ den $r \equiv -u^2 \, mod \, n$ ve $un - rn = -n$ dir.

$$un - rn = -n \Rightarrow u - r = -1 \Rightarrow r = u + 1$$

$$r \equiv -u^2 mod \, n \xRightarrow{r=u+1} u + 1 \equiv -u^2 \, mod \, n \Rightarrow u^2 + u + 1 \equiv 0 \, mod \, n$$

elde edilir.

Şimdi $\frac{u}{n} > v \, (= \frac{r}{n})$ olsun. $\frac{u}{n} \to v (= \frac{r}{n}) \in F_{u,n}$ den $r \equiv u^2 \, mod \, n$ ve $un - rn = n$ dir.

$r \equiv u^2 \, mod \, n \xRightarrow{r=u-1} u - 1 \equiv u^2 \, mod \, n \Rightarrow u^2 - u + 1 \equiv 0 \, mod \, n$ elde edilir.

Sonuç olarak her iki durumdan $u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \, mod \, n$ olur.

Tersine $u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \, mod \, n$ olsun. Bu durumda Teorem 2.6.1 den $\infty \to \frac{u}{n} \to \frac{u \pm 1}{n} \to \infty$ şeklinde yönlendirilmiş bir üçgendir.

ii) Bir $r \in \mathbb{Z}$ için $\infty \to \frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n} \to \infty$ şeklinde bir ters yönlendirilmiş üçgen olduğunu farzedelim.

Şayet $\frac{u}{n} < \frac{r}{n}$ ise $\frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n} \in F_{u,n}$ den $u \equiv ur \; mod \; n$ ve $rn - un = n$ dir. Böylece,

$rn - un = n \Rightarrow r - u = 1 \Rightarrow r = u + 1$

$u \equiv ur \; mod \; n \;\; \Rightarrow \;\; r \equiv 1 \; mod \; n \; \xRightarrow{r=u+1} \; u + 1 \equiv 1 \; mod \; n \;\; \Rightarrow \;\; u \equiv 0 \; mod \; n$ elde edilir.

$\frac{u}{n} > \frac{r}{n}$ ise $\frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n} \in F_{u,n}$ den $u \equiv -ur \; mod \; n$ ve $rn - un = -n$ dir.

$rn - un = -n \Rightarrow r - u = -1$

$u \equiv -ur \; mod \; n \Rightarrow r \equiv -1 \; mod \; n \xRightarrow{r=u-1} u - 1 \equiv -1 \; mod \; n \Rightarrow u \equiv 0 \; mod \; n$ elde edilir.

Sonuç olarak her iki durumdan $u \equiv 0 \; mod \; n$ elde edilir. Bu $n > 1$ için u nun mod n nin birimi olmasıyla çelişir. Bu çelişki $n > 1$ ise bu taktirde $F_{u,n}$ nin ters yönlendirilmiş üçgen içermediğini gösterir.■

Örneğin; $F_{1,3}$, $\infty \to \frac{1}{3} \to \frac{2}{3} \to \infty$ üçgenini içerir.

Kendisiyle eşleşmiş bir $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı $u^2 + 1 \equiv 0 \; mod \; n$ yi sağladığından Teorem 2.6.11 e göre $n > 1$ için üçgen içermez.

Tanım 2.6.12.

$n \geq 3$ olmak üzere n kenarlı bir devre içermeyen grafa orman denir.

Teorem 2.6.13.

$n > 1$ ise kendisiyle eşleşmiş $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı ormandır.

İspat:

$\mathcal{G}_{u,n}$, $F_{u,n}$ nin izomorfik kopyalarının ayrık bir birleşimi olduğundan, $F_{u,n}$ nin hiçbir devre içermediğini göstermek yeterlidir.

Eğer bir devre varsa Teorem 2.6.2 den $\infty, v_1, v_2, \ldots, v_k$ $F_{u,n}$ de birbirinden farklı köşeler olmak üzere $\infty \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to \infty$ şeklinde farz edebiliriz. $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $v_i = \frac{a_i}{b_i n}$ şeklindedir. $F_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olduğundan Teorem 2.6.1 ve Sonuç 2.4.9 yi göz önüne alırsak

$(\frac{1}{0} =)\infty \to v_1 (= \frac{a_1}{b_1 n})$ den $b_1 n = n$ ve $a_1 \equiv u \; mod \; n$ olur. Buradan $b_1 = 1$ ve $a_1 \equiv u \; mod \; n$ dir. Böylece

$$v_1 = \frac{a_1}{n}, a_1 \equiv u \; mod \; n \tag{2.9}$$

dir.

$(\frac{a_k}{b_k n}=)v_k \to \infty(=\frac{1}{0})$ den $-b_k n = -n$ ve $1 \equiv -ua_k \; mod\, n$ olur. Buradan $b_k = 1$ ve $u \equiv -u^2 a_k \; modn$ dır. $u^2 \equiv -1 \; mod\, n$ olduğundan $b_k = 1$ ve $a_k \equiv u \; modn$ elde edilir. Böylece

$$v_k = \frac{a_k}{n}, \; a_k \equiv u \; mod\, n \tag{2.10}$$

dir.

(2.9) ve (2.10) u elde ederiz. Buradan $v_1 - v_k = \frac{a_1 - a_k}{n} \xRightarrow{a_1 - a_k \equiv 0 \; modn} v_1 - v_k \in \mathbb{Z}$ olur. $n > 1$ olduğundan $v_1 = \frac{a_1}{n}$, $v_k = \frac{a_k}{n}$ tamsayı değildir. Böylece v_1 ve v_k arasında bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $F_{u,n}$ nin $v_j \to v_{j+1}$ kenarı $\mathbb{U}$ da $Re(z) = m$ doğrusu ile kesişir. Böylece Sonuç 2.6.4 e göre F nin $nv_j \to nv_{j+1}$ kenarı $Re(z) = nm$ ile kesişir. $Re(z) = nm$ F nin kenarıdır. Bu F nin kenarlarının $\mathbb{U}$ üst yarı düzlemde kesişmemesiyle çelişir. O halde $F_{u,n}$ hiçbir devre içermez. Sonuç olarak $n > 1$ ise eşleşmiş $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı bir ormandır.■

Sonuç 2.6.14.

$\mathcal{G}_{1,2}$ bir ormandır.■

Sonuç 2.6.15.

Eğer n çift ise $\mathcal{G}_{u,n}$ bir ormandır.

İspat:

Sonuç 2.6.14 ve Lemma 2.6.3 ii) den ($m = 2$ *olmak* *üzere*) ispat kolayca yapılır.■

Teorem 2.6.16.

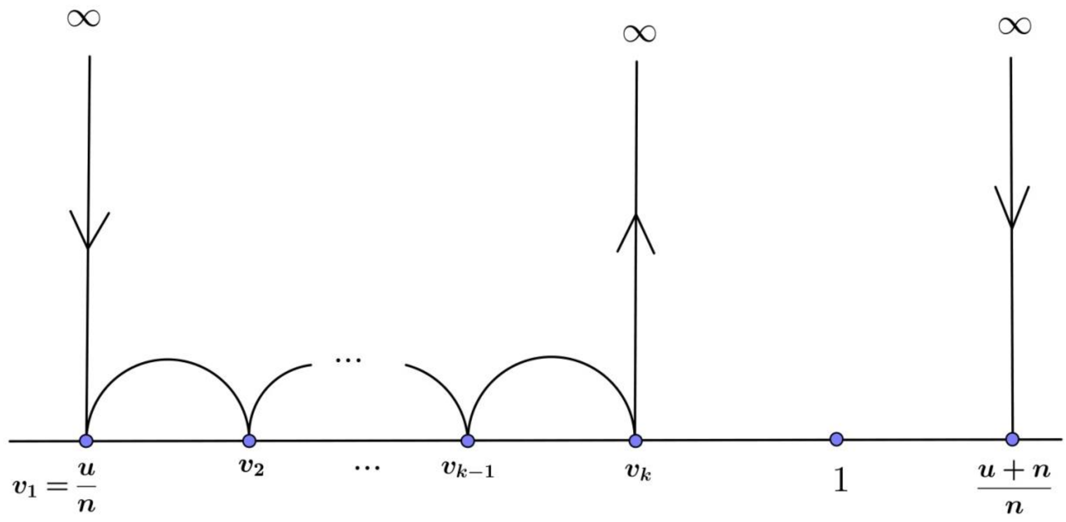
$n > 1$ bir tamsayı olsun. Bu taktirde, $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı bir ormandır $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}_{u,n}$ üçgen içermez; yani $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \; mod\, n$ dir.

İspat:

$\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı $F_{u,n}$ nin izomorf kopyalarının ayrık bir birleşimi olduğundan hesaplamaları sadece $F_{u,n}$ için yapmak yeterlidir. İlk önce farz edelim ki $F_{u,n}$ bir ormandır. Böylece, tanımdan bir üçgen içermez.

Tersine, farz edelim ki $F_{u,n}$ üçgen içermesin. Yani, $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \; mod\, n$ olsun. $F_{u,n}$ nin bir orman olduğunu gösterelim. Orman değil ise $F_{u,n}$ de minimal uzunlukta bir D devresi vardır. D nin yönlendirilmiş olduğunu farz edelim. Teorem 2.6.2 den D yi

$\infty \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to \infty$ biçiminde alabiliriz. Periyot 1 olduğundan D nin ∞ dan farklı köşelerini $\left[\frac{u}{n}, \frac{u+n}{n}\right]$ aralığında alabiliriz.



Şekil 10. $F_{u,n}$ grafı

Teorem 2.6.1 den $v_1 = \frac{u}{n}$ veya $\frac{u+n}{n}$ dir. $v_1 = \frac{u+n}{n}$ ise v_k $\left(\frac{u}{n}, \frac{u+n}{n}\right)$ aralığında $v_k \to \infty$ olan bir tek köşe olduğundan, $v_k < 1$ dir. Ayrıca, 1 $F_{u,n}$ de köşe olmadığından, Sonuç 2.6.4 den böyle bir devre yoktur. Dolayısıyla $v_1 = \frac{u}{n}$ dir. Yani, D devresi $\infty \to \frac{u}{n} \to v_2 \to \cdots \to v_k \to \infty$ biçimindedir. $u^2 \pm u + 1 \not\equiv 0 \; mod \; n$ ve $v_k \to \infty$ olduğundan $v_k > \frac{u+1}{n}$ dir. Şimdi v, v_1 den büyük ve $v_1 \to v \in F_{u,n}$ olan $F_{u,n}$ nin en büyük köşesi kabul edelim. Gösterelim ki $v_2 = v$ dir.

Aksine $v_2 < v$ olsun. v D de bir köşe, $v = v_3$ diyelim, ise $\infty \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to \infty$ daha kısa uzunluklu bir devredir ki bu D nin minimal uzunluklu devre olması ile çelişir. v D de bir köşe değilse; bu taktirde $v_i < v < v_{i+1}$ olan D de v_i, v_{i+1} köşeleri vardır. Bu bize $v_2 \to v$ ve $v_i \to v_{i+1}$ köşelerinin $F_{u,n}$ de kesiştiğini verir. Bu Sonuç 2.5.3 ile çelişir. Böylece, $v_2 = v$ dir. $v_1 < v_2$ olduğundan $v_2 = \frac{u+\frac{k}{m}}{n}$ olan k ve m pozitif tam sayıları vardır. $v_1 \to v_2 \in F_{u,n}$ olduğundan Sonuç 2.6.4 den $nv_1 \to nv_2 \in F$ dir. Bunun olması bize k nın 1 olduğunu verir. Böylece Teorem 2.6.1 den $\frac{u}{n} \to \frac{u+\frac{1}{m}}{n} \in F_{u,n}$ ancak ve ancak $u^2 + mu + 1 \equiv 0 \; mod \; n$ dir. Böylece k_0, $u^2 + k_0 u + 1 \equiv 0 \; mod \; n$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $v_2 = \frac{u+\frac{1}{k_0}}{n}$ dir. Bu durumda $1 < k_0 < n$ olduğu aşikardır.

Şimdi $T := \begin{pmatrix} -u & (u^2+k_0u+1)/n \\ -n & u+k_0 \end{pmatrix}$ dönüşümünü tanımlayalım. Açıkça $T \in \Gamma_0(n)$ dir ve $T(\infty) = v_1,\ T(v_1) = v_2$ ve $T((u+x/y)/n)$=$(u+(y/k_0\,y-x))/n$. Üstelik, T fonksiyonu $(-\infty,(u+k_0)/n)$ aralığı üzerinde artan olduğundan $\frac{x}{y} < \frac{z}{w} < k_0$ için $T((u+x/y)/n) < T((u+z/w)/n)$ dir.

Dikkat edilirse x ve y pozitif tam sayı ve $\frac{x}{y} < 1$ ise $\frac{y}{k_0y-x} < 1$ dir. Gerçekten, $k_0 \geq 2$ ve $y > x$ olduğundan $k_0y - x > y$ dir. Böylece, $\frac{y}{k_0y-x} < 1$ dir. Dolayısıyla $\frac{1}{k_0} < 1$ olduğundan pozitif i tam sayıları için $T^i(v_1) < \frac{u+1}{n}$ dir. Şimdi gösterelim ki $0 \leq i \leq k-1$ için $v_{i+1} = T^i(v_1) = T^{i+1}(\infty)$ dur. $T(v_1)$=v_2 idi. Farz edelim ki $1 \leq i \leq s$ için $v_i = T^{i-1}(v_1)$ dir. Bu durumda $v_{s+1} = T^s(v_1)$ olduğunu gösterelim. Değilse, ilk önce $v_{s+1} < T^s(v_1)$ olsun. Teorem 2.6.2 den $v_{s+1} = T^s(v_1) \to T^{s-1}(v_2) = T^s(v_1)$ $F_{u,n}$ de bir kenardır. $T^s(v_1)$ D de bir köşe değilse, $T^s(v_1) < v_k$ olduğundan $v_t < T^s(v_1)$< v_{t+1} olan v_t ve v_{t+1} köşeleri vardır ve böylece $v_t \to v_{t+1}$ ve $v_s \to T^s(v_1)$ kesişir. Bu bir çelişkidir. $T^s(v_1)$ D de bir köşe ise $v_{s+1} < T^s(v_1)$ olduğundan bir $l \geq s+2$ için $T^s(v_1) = v_l$ dir. Buna rağmen, bu durumda $\infty \to v_1 \to \cdots \to v_s \to v_t \to v_k \to \infty$ devresi elde edilir ki bu devre daha kısa uzunluklu bir devredir. Bu bir çelişki doğurur. Bu bize $v_{s+1} \geq T^s(v_1)$ olduğunu verir.

Son olarak farz edelim ki $v_{s+1} > T^s(v_1)$ olsun. Bu durumda, yukarısı göz önüne alınarak $v_{s+1} > T^s(v_1) > T^{s-2}(v_1)$ ve $T^{-(s-1)}(T^{s-2}(v_1))$= ∞ olduğundan $T^{-(s-1)}(v_{s+1}) > T^{-(s-1)}\big(T^s(v_1)\big) = T(v_1) = v_2$ elde edilir. Böylece Teorem 2.6.2 den $v_1 = T^{-(s-1)}(v_s) \to T^{-(s-1)}(v_{s+1})$ kenarı $F_{u,n}$ dedir. Bu ise v_2 nin seçimi ile çelişir. Sonuç olarak $1 \leq i \leq k-1$ için $v_{i+1} = T^i(v_1)$ dir. Böylece $v_k < \frac{u+1}{n}$ çelişkisi elde edilir.

Son olarak D ters yönlendirilmiş minimal uzunluklu ve $t \geq 1$ için

$\infty \to v_1 = \frac{u}{n} \ldots\!\to v_t \leftarrow v_{t+1} \to \cdots v_k \to \infty$ olsun. $i \leq t$ için $v_i = T^i(\infty)$ dır. v $F_{u,n}$ de $v_1 \leftarrow v$ ve $\frac{u}{n} < v$ şartını sağlayan en büyük rasyonel sayı olsun. Bu taktirde $v = (u+1/m)/n$ olan bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Teorem 2.6.1 den $n|m$ dir. v en büyük olduğundan $m = n$ dir. O halde $v = (u+1/n)/n$ dir. Açıkça, $v < (u+1/k_0)/n$ dir. Eğer $t = 1$ ise yukarıdaki devrede v v_1 den sonra gelen köşedir. Ancak $\frac{u}{n} \to \frac{u+\frac{1}{k_0}}{n}$ olduğunu biliyoruz. Böylece bir $s \geq 3$ için $v_s = (u + 1/k_0)/n$ dir. Bu durumda $\infty \to v_1 \to v_s \to \cdots \to v_k \to \infty$ daha kısa uzunluklu devreyi elde ederiz. Bu çelişki $t > 1$ olduğunu söyler. Buradan $v_1 \to v_2 = (u + 1/k_0)/n$ dir.

w:$= T^{t+1}(\infty)$ olsun. Teorem 2.6.2 den $v_t = T^{t-1}(v_1) \to T^{t-1}(v_2) = w$ $F_{u,n}$ de bir kenar olduğundan $v_{t+1} \neq w$ dır. Aksi halde, Teorem 2.6.1 den $v_t \leftarrow v_{t+1}$ ve $v_t \to v_{t+1}$ olması $u^2 \equiv -1 \, mod \, n$ bağıntısını verir. Ki bu bağıntı, $u^2 \pm k_0 u + 1 \equiv 0 \, mod \, n$ olduğundan, $k_0 u \equiv 0 \, mod \, n$ bağıntısını verir. Buradan $k_0 \equiv 0 \, mod \, n$ çelişkisi elde edilir. Böylece $v_{t+1} < w$ olmalıdır. Gerçekten, $v_{t+1} > w$ ise $T^{-(t-1)}\left(T^{t-2}(v_1)\right) = \infty$ ve $T^{t-2}(v_1) < T^t(v_1) = w < v_{t+1}$ olduğundan $T^{-(t-1)}(v_{t+1}) > T^{-(t-1)}(w) = v_2$ ve $v_1 = T^{-(t-1)}(v_t) \leftarrow T^{-(t-1)}(v_{t+1}) > v_2$ $F_{u,n}$ de bir kenardır. Bu v_2 nin seçimi ile çelişir. Eğer $v_{t+1} < w$ ise $s \geq t + 2$ için $w = v_s$ ve böylece çelişki veren daha kısa uzunluklu $\infty \to v_1 \to \cdots \to v_t \to v_s \to \cdots \to v_k \to \infty$ devresi elde edilir. Bu ters yönlendirilmiş bir D devresinin olamayacağını söyler. Bununla birlikte teoremin ispatı tamamlanır.■

Teorem 2.6.17.

$\Gamma_0(n)$ 3. mertebeden bir eliptik eleman içerir $\Leftrightarrow$ $F_{u,n}$ nin bir üçgen içerecek şekilde bir $u \in \mathbb{U}_n$ vardır.

İspat:

Farz edelim ki $T = \begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix}$ $\Gamma_0(n)$ de 3. mertebeden bir eliptik eleman olsun. $a + d = \mp 1$ ve $ad \equiv 1 \, mod \, n$ olduğundan $a(\mp 1 - a) \equiv 1 mod \, n$ dir. Yani, $a^2 \mp a + 1 \equiv 0 \, mod \, n$ dir. $(a, n) = 1$ olduğundan $u \equiv a \, mod \, n$ olan $u \in \mathbb{U}_n$ vardır. Böylece $u^2 \mp u + 1 \equiv 0 \, mod \, n$ dir. Teorem 2.6.2 den $F_{u,n}$ bir üçgen içerir.

Tersine $F_{u,n}$ bir üçgen içersin. Teorem 2.6.2 den $\infty \to \frac{u}{n} \to \frac{u \mp 1}{n} \to \infty$ üçgeni elde edilir. Buradan $\phi = \begin{pmatrix} -u & (u^2 \mp u + 1)/n \\ -n & u \mp 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ 3.mertebeden eliptik elemanı elde edilir.■

Teorem 2.6.18.

$\Gamma_0(n)$ 2.mertebeden bir eliptik eleman içerir $\Leftrightarrow$ $F_{u,n}$ bir kendi eşleşmiş kenar içerecek şekilde $u \in \mathbb{U}_n$ vardır.

İspat:

$T=\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix}$ $\Gamma_0(n)$ de 2. mertebeden bir eliptik eleman olsun. Bu taktirde $a+d=0$ ve $detT$ den $ad\equiv 1\, mod\, n$ dir. Yani, $a^2\equiv -1\, mod\, n$ dir. $(a,n)=1$ olduğundan $u\equiv a\, mod\, n$ olan $u\in \mathbb{U}_n$ vardır. Yani, $u^2\equiv -1\, mod\, n$ dir. Böylece $F_{u,n}$ bir kendi eşleşmiş kenar içerir.

Şimdi $u^2\equiv -1\, mod\, n$ olsun. Bu durumda $u^2=-1+bn$ olacak şekilde b tam sayısı vardır. Bu durumda $\begin{pmatrix} u & -b \\ n & -u \end{pmatrix}\in \Gamma_0(n)$ ve bu eleman 2. mertebeden bir eliptik elemandır.■

Teorem 2.6.19.

$\frac{a}{b}\to\frac{c}{d}\to\frac{k}{l}\to\frac{a}{b}$ $F_{u,n}$ de bir üçgen olsun. Bu taktirde $T\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{d}$, $T\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{k}{l}$, $T(\frac{k}{l})=\frac{a}{b}$ olan 3. dereceden bir tek $T\in\Gamma_0(n)$ eliptik elemanı vardır.

İspat:

$\frac{a}{b}\to\frac{c}{d}\in F_{u,n}$ olduğundan Teorem 2.6.1 den $ad-bc=\mp n$ ve $\forall\phi\in\Gamma_0(n)$ için $\frac{a_1}{b_1}=\phi\left(\frac{a}{b}\right)\to\phi\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{c_1}{d_1}\in F_{u,n}$ ve $a_1d_1-b_1c_1=\mp n$ dir. Teorem 2.6.2 den $K\left(\frac{a}{b}\right)=\infty$ ve $K\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{u}{n}$ olan $K\in\Gamma_0(n)$ mevcuttur.

$\frac{c_1}{d_1}\to K\left(\frac{k}{l}\right)=\frac{k_1}{l_1}$ ve $c_1l_1-k_1d_1=\mp n$ olduğundan $\frac{k_1}{l_1}=\frac{u\mp 1}{n}$, yani K elemanı $\frac{a}{b}\to\frac{c}{d}\to\frac{k}{l}\to\frac{a}{b}$ üçgenini $\infty\to\frac{u}{n}\to\frac{u\mp 1}{n}\to\infty$ üçgenine götürür. Bu ise $u^2\mp u+1\equiv 0\, mod\, n$ demektir. Yukarıdan, $S:=\begin{pmatrix} -u & (u^2\mp u+1)/n \\ -n & u\mp 1 \end{pmatrix}$ $\Gamma_0(n)$ nin 3.mertebeden bir eliptik elemanıdır. $T:=K^{-1}SK$ tanımlarsak T $\Gamma_0(n)$ nin 3.mertebeden eliptik bir elemanıdır. Bu dönüşüm istenilen şartları sağlar. Teklik aşikardır.■

Teorem 2.6.20.

$T=\begin{pmatrix} a & b \\ cn & d \end{pmatrix}$ $\Gamma_0(n)$ nin 3. mertebeden bir eliptik elemanı olsun. Bu taktirde $T(k)=l, T(l)=m\ ve\ T(m)=k$ olacak şekilde $k\to l\to m\to k\in F_{a,cn}$ üçgeni mevcuttur.

İspat:

T 3. mertebeden olduğundan $a+d=\pm 1$ dir. $a+d=1$ farz edelim. Bu taktirde $T=\begin{pmatrix} a & b \\ cn & 1-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & (a^2-a+1)/cn \\ -cn & a-1 \end{pmatrix}$ dir.

Böylece, $\infty \to \frac{a}{cn} \to \frac{a-1}{cn} \to \infty$ $F_{a,cn}$ de bir üçgen ve $T(\infty) = \frac{a}{cn}$,$T\left(\frac{a}{cn}\right) = \frac{a-1}{cn}$ ve $T((a-1)/cn) = \infty$ dur.■

2.7. $\Gamma_0^0(n)$ in $\widehat{\mathbb{Q}}_n$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

Bu kısımda bir önceki kısımdan farklı olarak G grubu yerine Γ modüler grubunun yine en çok çalışılan kongrüans alt gruplarından $\Gamma_0^0(n)$ ve Ω yerine $\widehat{\mathbb{Q}}_n := \left\{\frac{a}{cn} : (a, cn) = 1; a, c \in \mathbb{Z}\right\}$ alıp ilgili alt yörüngesel grafları inceleyeceğiz.

$$\Gamma_0^0(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : b \equiv c \equiv 0 \; mod \; n\right\}$$

$$\Gamma(n) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : a \equiv d \equiv 1 \; mod \; n, b \equiv c \equiv 0 \; mod \; n\right\}$$

$$\Gamma_0^0(n)_\infty := \left\{\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma : \begin{pmatrix} a \\ cn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 1 & bn \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right\}$$

$\begin{pmatrix} 1 & bn \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olduğundan $d.1 - bn.0 = 1$ dır. Buradan $d = 1$ olur. O halde $\Gamma_0^0(n)_\infty := \left\{\begin{pmatrix} 1 & bn \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \langle\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle$ dir.

Yukarıdaki gruplar göz önüne alınarak $\Gamma_0^0(n)_\infty < \Gamma(n) < \Gamma_0^0(n)$ eşitsizliği elde edilir. Γ modüler grup olmak üzere $\Gamma(\infty) = \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğunu biliyoruz. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde çalışıldı. Burada $\Gamma_0^0(n)(\infty)$ kümesini bulup $\Gamma_0^0(n)$ nin bu küme üzerinde transitif hareketinin verdiği imprimitif hareketle $\Gamma_0^0(n)$ için alt yörüngesel graflara ulaşacağız..

$$\Gamma_0^0(n)(\infty) = \left\{\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} a \\ cn \end{pmatrix} : ad - bcn^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\frac{a}{cn} : (a, cn) = 1; a, c \in \mathbb{Z}\right\}$$

$\Gamma_0^0(n)(\infty) = \left\{\frac{a}{cn} : (a, cn) = 1; a, c \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesini $\widehat{\mathbb{Q}}_n$ ile göstereceğiz.

$v = \frac{r}{sn}$, $w = \frac{x}{yn} \in \widehat{\mathbb{Q}}_n$ olmak üzere $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olan $g, g' \in \Gamma_0^0(n)$ vardır. Burada $g = \begin{pmatrix} r & r_0 n \\ sn & s_0 \end{pmatrix}$ ve $g' = \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ yn & y_0 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Tekrar hatırlatalım ki (G, Ω) bir transitif permütasyon grubu ve $G_\alpha < H < G$ olmak üzere Ω üzerinde $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g' \in gH$ ile verilen "$\approx$ " bir G invaryant imprimitif denklik bağıntısı idi. Bu taktirde, mevcut durumda $v \approx w \Leftrightarrow x \equiv r \bmod n$ dir. Gerçekten, $v \approx w$ olsun. Buradan $g(\infty) \approx g'(\infty)$ dır. O halde $g^{-1}g' \in \Gamma(n)$ dir.

$$g^{-1}g' = \begin{pmatrix} r & r_0 n \\ sn & s_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ yn & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xs_0 - yr_0 n^2 & s_0 x_0 n - r_0 y_0 n \\ -snx + ryn & -sx_0 n^2 + ry_0 \end{pmatrix} \in \Gamma(n) \text{ den}$$

$xs_0 - yr_0 n^2 \equiv -sx_0 n^2 + ry_0 \equiv 1 \bmod n$ ve $-snx + ryn \equiv s_0 x_0 n - r_0 y_0 n \equiv 0 \bmod n$ dır. Buradan $xs_0 \equiv ry_0 \equiv 1 \bmod n$ elde edilir. Ayrıca $g, g' \in \Gamma_0^0(n) \subset \Gamma$ olduğundan $rs_0 - sr_0 n^2 = 1$ ve $xy_0 - yx_0 n^2 = 1$ dir. Buradan $rs_0 \equiv 1 \bmod n$ ve $xy_0 \equiv 1 \bmod n$ dir. $xs_0 \equiv 1 \bmod n$ kongrüansını r ile çarparsak, $xrs_0 \equiv r \bmod n \xRightarrow{rs_0 \equiv 1 \bmod n}$ $x \equiv r \bmod n$ elde edilir.

Şimdi $x \equiv r \bmod n$ olsun. $\frac{r}{sn} \in \widehat{\mathbb{Q}}_n$ olduğundan $(r, sn) = 1$ dir. Buradan $(r, sn^2) = 1$ olur. O halde $rs_0 - (sn^2)r_0 = 1$ olan $r_0, s_0 \in \mathbb{Z}$ vardır.

Benzer şekilde $\frac{x}{yn} \in \widehat{\mathbb{Q}}_n$ olduğundan $(x, sn) = 1$ dir. Buradan $(x, sn^2) = 1$ olur. O halde $xy_0 - (yn^2)x_0 = 1$ olan $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu taktirde $g := \begin{pmatrix} r & r_0 n \\ sn & s_0 \end{pmatrix}$ $g' := \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ yn & y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n)$ dir. Böylece $rs_0 - (sn^2)r_0 = 1$ den $rs_0 \equiv 1 \bmod n$ ve $xy_0 - (yn^2)x_0 = 1$ den $xy_0 \equiv 1 \bmod n$ elde edilir.

$$xy_0 \equiv 1 \bmod n \xRightarrow{x \equiv r \bmod n} ry_0 \equiv 1 \bmod n \Rightarrow ry_0 - sx_0 n^2 \equiv 1 \bmod n \qquad (2.11)$$

$$rs_0 \equiv 1 \bmod n \xRightarrow{x \equiv r \bmod n} xs_0 \equiv 1 \bmod n \Rightarrow xs_0 - yr_0 n^2 \equiv 1 \bmod n \qquad (2.12)$$

(2.11) ve (2.12) gösterir ki

$$\begin{pmatrix} r & r_0 n \\ sn & s_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ yn & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & -r_0 n \\ -sn & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ yn & y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xs_0 - yr_0 n^2 & s_0 x_0 n - r_0 y_0 n \\ -snx + ryn & -sx_0 n^2 + ry_0 \end{pmatrix} \in \Gamma(n)$$

dir. Buradan $g(\infty) \approx g'(\infty)$ dır ve böylece $v \approx w$ olur.

$v \approx w \Leftrightarrow x \equiv r \ mod \ n$ olduğundan bu $\approx$ bağıntısının $\varphi(n)$ tane denklik sınıfı yani , $\varphi(n)$ tane bloğu vardır. Dolayısıyla $\left|\Gamma_0^0(n):\Gamma(n)\right| = \varphi(n)$ dir.

$\Gamma_0^0(n)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{n}}$ üzerindeki hareketi için alt yörüngesel graflara bakalım. $\Gamma_0^0(n)$ $\widehat{\mathbb{Q}}_{\boldsymbol{n}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden her bir alt yörünge bir $v \in \widehat{\mathbb{Q}}_n$ için (∞, v) çiftini içerir. $v \in \widehat{\mathbb{Q}}_n$ olduğundan $v = \frac{u}{mn}$,$(u, mn) = 1$ formundadır. $(\infty, v) = (\infty, \frac{u}{mn})$ çifitini içeren bu alt yörüngeyi $O_{u,mn}$ ve bu yörüngeye karşılık gelen grafı da $\mathcal{G}_{u,mn}$ ile göstereceğiz.

Lemma 2.7.1.

$v, v' \in \widehat{\mathbb{Q}}_n$ olmak üzere $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow v$ ve v' $\Gamma_0^0(n)_\infty$ un aynı yörüngesindedir. Yani $g(v) = v'$ olacak şekilde $g \in \Gamma_0^0(n)$ vardır.

İspat:

Yani, $O(\infty, v) = O(\infty, v') \Leftrightarrow \ \exists g \in \Gamma_0^0(n): g(\infty) = \infty, g(v) = v'$ dır. Şimdi bunu gösterelim.

$O(\infty, v) = O(\infty, v')$ olsun. Bu taktirde $(\infty, v) \in O(\infty, v')$ dır. Buradan $\exists g \in \Gamma_0^0(n)$: $g(\infty, v) = (\infty, v')$ dır. $\big(g(\infty), g(v)\big) = g(\infty, v) = (\infty, v') \Rightarrow \big(g(\infty), g(v)\big) = (\infty, v') \Rightarrow g(\infty) = \infty, g(v) = v'$ dır. Böylece $g \in \Gamma_0^0(n)_\infty$ dır.

Tersine v ve v', $\Gamma_0^0(n)_\infty$ un aynı yörüngesinde olsun. O halde $g(\infty) = \infty, g(v) = v'$ olacak şekilde $g \in \Gamma_0^0(n)_\infty$vardır. Buradan $g(\infty, v) = (g(\infty), g(v)) = (\infty, v') \in O(\infty, v')$ dır. Böylece $(\infty, v) \in O(\infty, v')$ ve $O(\infty, v) \cap O(\infty, v') \neq \emptyset$ olup $O(\infty, v) = O(\infty, v')$ elde edilir.■

Sonuç 2.7.2.

$\mathcal{G}_{u,mn} = \mathcal{G}_{u',m'n} \Leftrightarrow m = m'$ ve $u' \equiv u \ mod \ mn^2$ dir.

İspat:

$O(\infty, v) = O(\infty, v')$ olsun. Bu taktirde $(\infty, v) \in O(\infty, v')$ dır. $v = \frac{u}{mn}$, $v' = \frac{u'}{m'n}$ olsun. O halde $g\left(\frac{u'}{m'n}\right) = \frac{u}{mn}$ ve $g(\infty) = \infty$ olan $g \in \Gamma_0^0(n)_\infty$ vardır. $\Gamma_0^0(n)_\infty$ grubu $z: v \to v + n$ ile üretildiğinden $\frac{u}{mn} = g\left(\frac{u'}{m'n}\right) = \frac{u'}{m'n} + kn$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. $v = \frac{u}{mn} = g\left(\frac{u'}{m'n}\right) = \frac{u'}{m'n} + kn = \frac{u'+kmn^2}{m'n} \Leftrightarrow m = m'$ ve $u' + kmn^2 = u \Leftrightarrow m = m'$ ve $u' \equiv u \ mod \ mn^2$ ■

Sonuç 2.7.3.

$u \epsilon U_{mn^2}$ olmak üzere, toplam $\varphi(mn^2)$ tane farklı $\mathcal{G}_{u,mn}$ grafı vardır.■

Teorem 2.7.4.

$\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} \in \mathcal{G}_{u,mn} \Leftrightarrow$ i) $x \equiv ur \; mod \; mn^2$, $y \equiv us \; mod \; m$ ve $ry - sx = m$ veya

ii) $x \equiv -ur \; mod \; mn^2$, $y \equiv -us \; mod \; m$ ve $ry - sx = -m$ dir.

İspat:

"⇒"

$\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn}$ $\mathcal{G}_{u,mn}$ de bir kenar olsun. Buradan $(\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn}) \in O(\infty, \frac{u}{mn})$ dir. O halde $g(\infty) = \frac{r}{sn} = \frac{-r}{-sn}$, $g\left(\frac{u}{mn}\right) = \frac{x}{yn} = \frac{-x}{-yn}$ olacak şekilde $g = \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n)$ vardır. Bu bize,

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ sn & yn \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -x \\ -sn & -yn \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -sn & yn \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -x \\ sn & -yn \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

eşitliklerinden birini verir.

(2.13) i ele alalım. $\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ sn & yn \end{pmatrix}$. Yani, $\begin{pmatrix} a & au + bmn^2 \\ cn & cnu + dmn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ sn & yn \end{pmatrix}$ dır. Böylece $a = r, x = au + bmn^2$ ve $c = s, cnu + dmn = yn$ $\Rightarrow$ $x = ru + bmn^2$ ve $y = su + dm \Rightarrow x \equiv ur \; mod \; mn^2$ ve $y \equiv us \; mod \; mn^2$ dir.

(2.13) eşitliğinin determinantını alırsak;

$$(ad - bcn^2).mn = ryn - sxn \xRightarrow{\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n) \subset \Gamma, (ad - bcn^2) = 1} mn = ryn - sxn \Rightarrow$$

$m = ry - sx$ dır.

Böylece i) şıkkını elde ederiz. Benzer şekilde (2.14) eşitliğinden aynı sonucu elde ederiz.

(2.15) i ele alalım.

$\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -sn & yn \end{pmatrix}.$

Yani, $\begin{pmatrix} a & au+bmn^2 \\ cn & cun+dmn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -sn & yn \end{pmatrix}$ dir. Böylece $a=-r, x=au+bmn^2$ ve $c=-s, yn=cun+dmn \Rightarrow x=-r+bmn^2$ ve $y=-su+dm$ olur.

(2.15) eşitliğinin determinantını alırsak ;

$(ad-bcn^2).mn = -ryn + xsn \xRightarrow{\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n) \subset \Gamma, (ad-bcn^2)=1} mn = -ryn + xsn$

$\Rightarrow ry - sx = -m$

Böylece ii) şıkkını elde ederiz. Benzer şekilde (2.16) eşitliğinden aynı sonucu elde ederiz.

"$\Leftarrow$"

i) şıkkı yani $x \equiv ur \bmod mn^2$, $y \equiv us \bmod m$ ve $ry - sx = m$ sağlansın. $\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} \in \mathcal{G}_{u,mn}$ olduğunu yani $(\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn}) \in O_{u,mn} = O(\infty, \frac{u}{mn})$ olduğunu gösterelim.

$x \equiv ur \bmod mn^2 \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z} : x = ur + bmn^2$

$y \equiv us \bmod m \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z} : y = us + dm$

$g := \begin{pmatrix} r & bn \\ sn & d \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. $g(\infty) = \begin{pmatrix} r & bn \\ sn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ sn \end{pmatrix}$ ve $g\begin{pmatrix} u \\ mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & bn \\ sn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru+bmn^2 \\ sun+dmn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ yn \end{pmatrix} \Rightarrow g\left(\infty, \frac{u}{mn}\right) = (\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn})$ dir.

$ry - sx = m$ eşitliğinde x ve y yi yerine yazarsak $r(us+dm) - s(ur+bmn^2) = m$ elde edilir. Buradan $rus + rdm - sur - sbmn^2 = m$. Yani, $rdm - sbmn^2 = m.$ Dolayısıyla $rd - sbn^2 = 1.$ Böylece $g \in \Gamma_0^0(n)$ dır.

Bu taktirde $(\frac{r}{sn}, \frac{x}{yn}) \in O_{u,mn} = O(\infty, \frac{u}{mn})$ olur. Benzer şekilde ii) şıkkının sağlandığı kabul edilerek aynı sonuç elde edilir. ■

Sonuç 2.7.5.

$u^2 \not\equiv -1 \bmod mn^2$ ve $uv \equiv -1 \bmod mn^2$ olsun. Bu taktirde $\mathcal{G}_{u,mn}$ ile $\mathcal{G}_{v,mn}$ eşleşmiştir.

İspat:

$\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} \in \mathcal{G}_{u,mn}$ de bir kenar olsun. Teorem 2.7.4 den

i)$x \equiv ur \bmod mn^2, y \equiv us \bmod m$ ve $ry - sx = m$ veya

ii) $x \equiv -ur \bmod mn^2$, $y \equiv -us \bmod m$ ve $ry - sx = -m$ dir.

i) şıkkının sağlandığını farz edelim. Buradan;

$$vx \equiv uvr \ mod \ mn^2 \xRightarrow{uv\equiv -1 \ mod \ mn^2} r \equiv -vx \ mod \ mn^2$$

$$vy \equiv uvs \ mod \ m \xRightarrow{uv\equiv -1 \ mod \ mn^2} s \equiv -vy \ mod \ m$$

$$ry - sx = m \ \Rightarrow sx - ry = -m$$

elde edilir. Teorem 2.7.4 ii) şıkkından $\frac{x}{yn} \to \frac{r}{sn}$ $\mathcal{G}_{v,mn}$ de bir kenardır. Benzer şekilde ii) şıkkı kabul edilerek aynı sonuç elde edilir.

Şimdi, $O(\infty,\frac{u}{mn}) \cap O(\frac{u}{mn},\infty) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki $O(\infty,\frac{u}{mn}) \cap O(\frac{u}{mn},\infty) \neq \emptyset$ olsun. Buradan $O\left(\infty,\frac{u}{mn}\right) = O(\frac{u}{mn},\infty)$ dır. O halde $\exists T$=$\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n)$: $T(\infty,\frac{u}{mn}) = (\frac{u}{mn},\infty)$ dır. Dolayısıyla, $\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ mn & 0 \end{pmatrix}$ dır. Yani, $\begin{pmatrix} a & au+bmn^2 \\ cn & cnu+dmn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ mn & 0 \end{pmatrix}$ dir. Buradan $a = u,$ $c = m,$ $au + bmn^2 = 1$ ve $cnu + dmn = 0$ olur.

$cnu + dmn = 0$ ve $c = m$ olduğundan $mnu + dmn = 0$. Buradan $u + d = 0$ $\Rightarrow d = -u$ dır. Böylece, $T = \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & bn \\ mn & -u \end{pmatrix}$ biçimindedir, $T \in \Gamma$ olduğundan, $detT = 1$ dir. Buradan, $-u^2 - bmn^2 = 1 \Rightarrow u^2 \equiv -1 \ modmn^2$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $O(\infty,\frac{u}{mn}) \cap O(\frac{u}{mn},\infty) \neq \emptyset$ varsaymaktan gelmiştir. O halde $O(\infty,\frac{u}{mn}) \cap O(\frac{u}{mn},\infty) = \emptyset$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{G}_{u,mn}$ ile $\mathcal{G}_{v,mn}$ grafları eşleşmiştir.■

Sonuç 2.7.6.

$\mathcal{G}_{u,mn}$ kendisiyle eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1 \ mod \ mn^2$

İspat:

"$\Rightarrow$"

$\mathcal{G}_{u,mn}$ kendisiyle eşleşmiş olsun. Bu taktirde $O\left(\infty,\frac{u}{mn}\right) = O\left(\frac{u}{mn},\infty\right)$ dır. Buradan $\exists T \in \Gamma_0^0(n) = \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} : T\left(\infty,\frac{u}{mn}\right) = \left(\frac{u}{mn},\infty\right)$ dır. Böylece, $\begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ mn & 0 \end{pmatrix}$ dir.Buradan, $\begin{pmatrix} a & au+bmn^2 \\ cn & cnu+dmn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ mn & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = uc = m, au + bmn^2 = 1,$ $cnu + dmn = 0$ olur.

$cnu + dmn = 0 \xRightarrow{c=m} mnu + dmn = 0 \ \Rightarrow mn\,(u + d) = 0.$ $mn > 0$ olduğundan $u + d = 0$ yani $d = -u$ bulunur. $T = \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & bn \\ mn & -u \end{pmatrix}$ biçimindedir ve $T \in \Gamma_0^0(n) \subset \Gamma$ olduğundan , $detT = 1$ dir. Yani, $-u^2 - bmn^2 = 1.$ Böylece $u^2 \equiv -1 \ mod \ mn^2$ elde edilir.

"$\Leftarrow$"

$u^2 \equiv -1\, mod\, mn^2$ olsun. Bu taktirde $\exists b \in \mathbb{Z}: u^2 = -1 - bmn^2$ dir. Buradan $-u^2 - bmn^2 = 1$ olup $T := \begin{pmatrix} u & bn \\ mn & -u \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n)$ dır. Böylece, $\begin{pmatrix} u & bn \\ mn & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ mn \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} u & bn \\ mn & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ mn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + bmn^2 \\ mun - mnu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Buradan $T(\infty) = \frac{u}{mn}$ ve $T\left(\frac{u}{mn}\right) = \infty$ olur. O halde $O(\infty, \frac{u}{mn}) = O(\frac{u}{mn}, \infty)$ olup $\mathcal{G}_{u,mn}$ kendisiyle eşleşmiştir.■

2.8. $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $\mathcal{N}_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $\mathcal{G}_{u,mn}$ grafında $m = 1$ alarak $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı üzerinde çalışacağız. Ayrıca $\mathcal{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{\frac{x}{yn} \in \widehat{\mathbb{Q}}_n : x \equiv 1\, mod\, n\right\}$ bloğundan oluşan alt grafını da $\mathcal{N}_{u,n}$ ile göstereceğiz. Burada $\mathcal{N}_{u,n}$ nin elemanları $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{an+1}{bn} \in \widehat{\mathbb{Q}}_n$ şeklindedir. Ayrıca Farey grafı ile $\mathcal{N}_{1,1}$ grafları aynıdır. Şimdi $\mathcal{N}_{u,n}$ de kenar olma şartını verelim.

Teorem 2.8.1.

$\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} \in \mathcal{N}_{u,n} \Leftrightarrow$ i) $x \equiv ur\, mod\, n^2$ ve $ry - sx = 1$ veya

ii) $x \equiv -ur\, mod\, n^2$ ve $ry - sx = -1$ dir.

İspat:

Teorem 2.7.4 den aşikardır.■

Teorem 2.8.2.

$\Gamma(n)$, $\mathcal{N}_{u,n}$ 'nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat:

Şimdi $\Gamma(n)$ nin $\mathcal{N}_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğini gösterelim. $v, w \in [\infty]$, $\mathcal{N}_{u,n}$ nin köşeleri olsun. $\Gamma_0^0(n)$, $\widehat{\mathbb{Q}}_n$ üzerinde transitif hareket ettiğinden $\exists g = \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n): g(v) = w$ dır. $v, w \in [\infty]$ olduğundan $v = \frac{a_1 n+1}{b_1 n}$ ve $w = \frac{a_2 n+1}{b_2 n}$ şeklindedir. Bu durumda ;

$$g(v) = w \Rightarrow \begin{pmatrix} a & bn \\ cn & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 n + 1 \\ b_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 n + 1 \\ b_2 n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} aa_1 n + a + bb_1 n^2 \\ ca_1 n^2 + cn + db_1 n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 n + 1 \\ b_2 n \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Buradan $a_1n + a + bb_1n^2 = a_2n + 1$ olup $a \equiv 1 \, mod \, n$ ve $ad - bcn^2 = 1$ olduğundan $d \equiv 1$ mod n elde edilir. Böylece $g \in \Gamma(n)$ dir. Yani, $\Gamma(n)$ $[\infty]$ bloğu üzerinde transitif olarak hareket eder. Ayrıca g: $[\infty] \to [\infty]$, $g \in \Gamma(n)$ dönüşümü birebir ve örtendir.

Şimdi $\Gamma(n)$ nin $\mathcal{N}_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiğini gösterelim. $\frac{rn+1}{sn} \to \frac{xn+1}{yn} \in \mathcal{N}_{u,n}$ve $\frac{an+1}{bn} \to \frac{cn+1}{dn} \in \mathcal{N}_{u,n}$ iki kenar olsun. Buradan,

$\left(\frac{rn+1}{sn}, \frac{xn+1}{yn}\right), \left(\frac{an+1}{bn}, \frac{cn+1}{dn}\right) \in O(\infty, \frac{u}{n})$ dır. O halde $\exists h = \begin{pmatrix} k & ln \\ mn & t \end{pmatrix} \in \Gamma_0^0(n)$: $h\left(\frac{rn+1}{sn}, \frac{xn+1}{yn}\right) = \left(\frac{an+1}{bn}, \frac{cn+1}{dn}\right)$ dır. Bu durumda, $\begin{pmatrix} k & ln \\ mn & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rn+1 & xn+1 \\ sn & yn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an+1 & cn+1 \\ bn & dn \end{pmatrix}$. Yani $\begin{pmatrix} krn + k + lsn^2 & kxn + k + lyn^2 \\ mrn^2 + mn + tsn & mxn^2 + mn + tyn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an+1 & cn+1 \\ bn & dn \end{pmatrix}$.

Buradan $krn + k + lsn^2 = an + 1$ olup $k \equiv 1 \, mod \, n$ ve $kt - lmn^2 = 1$ olduğundan $t \equiv 1 \, mod \, n$ elde edilir. Böylece $h \in \Gamma(n)$ dir. $\Gamma(n)$ nin $\mathcal{N}_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak hareket ettiğini gösterdik. Yukarıdan $h \in \Gamma(n)$ nin birebir ve örtenliği açıktır. Çünkü $\Gamma(n)$, $\mathcal{N}_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğinden her bir köşeye farklı köşeler karşılık gelir. Böylece farklı her kenara farklı kenarlar karşılık gelir. Dolayısıyla $\Gamma(n)$ nin $\mathcal{N}_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiği gösterilmiştir.■

Lemma 2.8.3.

i) v ,$\mathcal{N}_{u,n}$ de bir köşe olmak üzere $v \mapsto -v$ ile verilen, $\mathcal{N}_{u,n} \mapsto \mathcal{N}_{-u,n}$ bir izomorfizmadır.

ii) Eğer $k|n$ ise v $\mathcal{N}_{u,n}$ nin bir köşesi olmak üzere $v \mapsto \frac{nv}{k}$ ile verilen , $\mathcal{N}_{u,n}$ den $\mathcal{N}_{u,k}$ nın bir alt grafına izomorftur.

İspat:

Teorem 2.6.3 e benzer şekilde ispat yapılır.■

ii) de $k = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

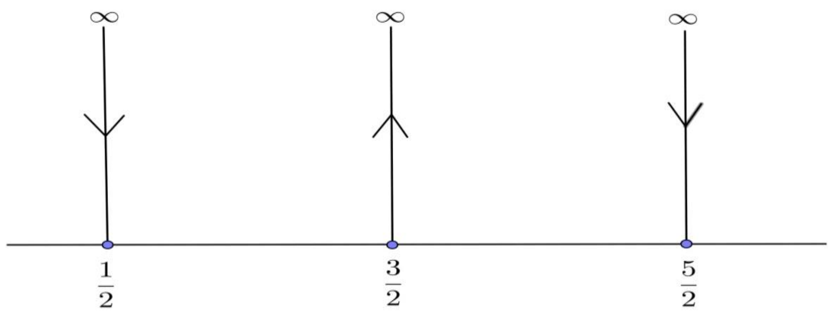
Sonuç 2.8.4.

$\mathcal{N}_{u,n}$ nin bütün köşeleri için $f\colon v \mapsto nv$ ile verilen, $\mathcal{N}_{u,n}$ den $\mathcal{N}_{1,1}$ nin bir alt grafına bir izomorfizmadır.■

Teorem 2.8.5.

$\mathcal{N}_{1,2}$ grafı bağlantılıdır.

İspat:



Şekil 11. $\mathcal{N}_{1,2}$ grafı

$\mathcal{N}_{1,2}$ nin herbir v köşesinin $\mathcal{N}_{1,2}$ deki bir yol ile ∞ a birleştiğini göstermek yeterlidir. $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$ ve $(a, 2b) = 1$ olmak üzere $v = \frac{a}{2b}$ alarak, b üzerinde indüksiyon uygulayalım.

$\frac{a}{2b}$ pozitif olsun. $b = 1$ için $\frac{a}{2}$ yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi ∞ ile birleştirilebilir. b üzerinde indüksiyonla hareket edelim.

$b \geq 2$ olsun. Farz edelim ki $2b$ den küçük paydalar için elde edilen köşe bir yolla ∞ ile birleştirilebilsin. Amacımız $\frac{a}{2b}$ köşesinin paydası $2b$ den küçük bir köşe ile bir kenar oluşturmasıdır. $(a, b) = 1$ olduğundan $ad - bc = 1$ olan c ve d tam sayıları vardır..Genellikten(bir şey) kaybetmeden $0 < d < b$ alabiliriz. Gerçekten ;

a) $d \neq b$ dir. $d = b$ olsun. $ad - bc = 1$ olduğundan $ab - bc = 1 \Rightarrow (a - c)b = 1$ olur ki bu $b \geq 2$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki bize $d \neq b$ olduğunu söyler.

b) $d < 0$ olsun.Bu durumda $d + kb$ yi pozitif yapan en küçük $k := k_1 \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için d yerine $d + k_1 b$ yazarsak $0 < d + k_1 b < b$ olur . d yerine $d + k_1 b$ ve c yerine de $c + k_1 b$ yazarsak

$a(d + k_1 b) - b(c + k_1 a) = ad + ak_1 b - bc - ak_1 b = ad - bc = 1$ elde edilir.Bu da bize $0 < d < b$ olduğunu varsaymamızın uygun olduğunu söyler.

Şayet c tek ise $w = \frac{c}{2d} \in \mathcal{N}_{1,2}$ aranan köşedir. Bu durumda $\frac{c}{2d} \rightarrow \frac{a}{2b}$ veya $\frac{a}{2b} \rightarrow \frac{c}{2d}$ $\mathcal{N}_{1,2}$ de bir kenardır. Gerçekten, $2ad - 2bc = 2$, $c \equiv a \bmod 4$ ise $\frac{a}{2b} \rightarrow \frac{c}{2d} \in \mathcal{N}_{1,2}$ dir. $c \equiv a \bmod 4$ değilse $c \equiv a \bmod 2$ olduğundan $a - c = 2k$ olacak şekilde bir k tek tamsayısı vardır. $a + c = 2c + 2k = 2(c + k) \equiv 0 \bmod 4$ tür. Böylece $a \equiv -c \bmod 4$ olur. $\frac{c}{2d} \rightarrow \frac{a}{2b}$ $\in \mathcal{N}_{1,2}$ dir ; çünkü bu durumda $c \equiv -a \bmod 4$, 2bc-2ad= -2 dir.

$2d < 2b$ olduğundan hipotezden $w = \frac{c}{2d}$, ∞ a bir yol ile birleşir ve böylece v de ∞ ile birleşir.

c çift ise $w = \frac{a-c}{2(b-d)} \in \mathrm{N}_{1,2}$ istenilen köşedir. $\frac{a}{2b} \to \frac{a-c}{2(b-d)}$ veya $\frac{a-c}{2(b-d)} \to \frac{a}{2b} \in \mathrm{N}_{1,2}$ dir.

$0 < b-d < b \Rightarrow 0 < 2(b-d) < 2b$ olur. Hipotezden $w = \frac{a-c}{2(b-d)}$ ∞ a bir yol ile birleşir. Ve böylece v de ∞ ile birleşir.

Bu bize $\mathrm{N}_{1,2}$ nin bağlantılı olduğunu verir.

Sonuç 2.8.6.

$\mathrm{N}_{3,2}$ bağlantılıdır.

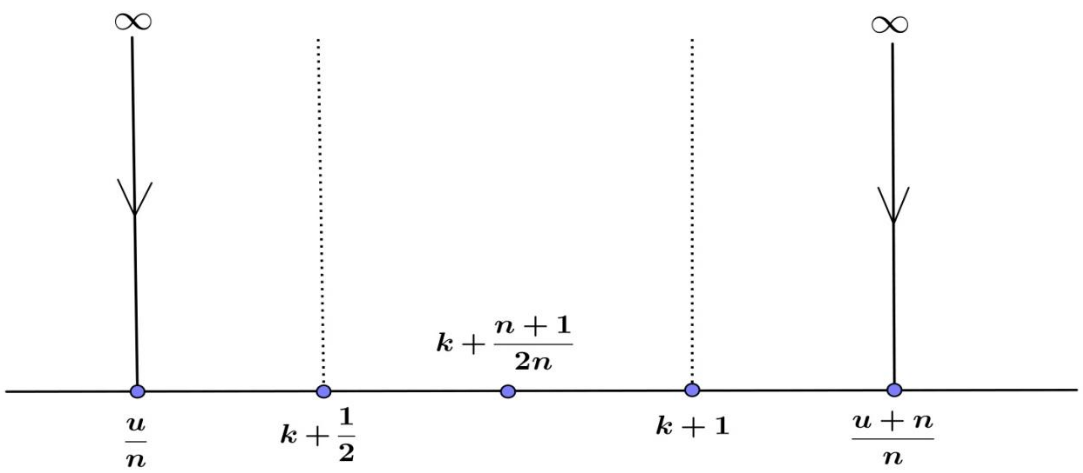
İspat:

Lemma 2.8.3 i) şıkkından $\mathrm{N}_{3,2} \to \mathrm{N}_{-3,2} = \mathrm{N}_{1,2}$ olduğundan $\mathrm{N}_{3,2}$ de bağlantılıdır.■

Teorem 2.8.7.

$n \geq 3$ için için $\mathrm{N}_{u,n}$ bağlantısızdır.

İspat:



Şekil 12. $\mathrm{N}_{u,n}$ grafı

$n \geq 3$ ve $u \equiv 1 \, mod \, n$ olduğundan $u = kn + 1$ biçimindedir. Ayrıca $\frac{2k+1}{2}$ ile $k+1$ $[\infty]$ bloğunda değildir. Göstereceğiz ki $Rez = k + \frac{1}{2}$ ve $Rez = k + 1$ doğruları arasında $\mathrm{N}_{u,n}$ nin köşeleri bu şerit dışında $\mathrm{N}_{u,n}$ nin bir köşesi ile kesişmez. Bu şeritte $\mathrm{N}_{u,n}$

nin bir köşesi olmalıdır ki zaten vardır. Mesela $k+\frac{n+1}{2n}$ bu şeritte olup $\mathcal{N}_{u,n}$ nin bir köşesidir.

Farz edelim ki $\frac{mn+1}{sn}<\frac{2k+1}{2}<\frac{ln+1}{yn}$ olan $\frac{mn+1}{sn}\to\frac{ln+1}{yn}$ (veya ters yönlendirilmişi) bir kenar vardır. n ile çarparsak $\frac{mn+1}{s}<\frac{n(2k+1)}{2}<\frac{ln+1}{y}$ dir.

- n çift ise $\frac{n(2k+1)}{2}\in\mathbb{Z}$ dir. Böylece $\mathcal{N}_{1,1}$ de $\frac{mn+1}{s}\to\frac{ln+1}{y}$ kenarı ile $\infty\to\frac{n(2k+1)}{2}$ kenarı kesişir. Oysa kenarlar kesişmez. Böylece n çift olamaz.
- n tek yani $n=2t+1$ biçiminde ise $n(2k+1)=(2t+1)(2k+1)=4tk+2(t+k)+1$ den $\frac{n(2k+1)}{2}=2tk+t+k+\frac{1}{2}$ elde edilir. Buradan $s=y=1$

$$mn+1=2tk+t+k \tag{2.17}$$

$$2tk+t+k+1=ln+1 \text{ elde edilir.} \tag{2.18}$$

(2.18) den $n|2tk+t+k$ dır. Böylece (2.17) den $n|1$ çelişkisi elde edilir. Bu bize $Re(z)=k+\frac{1}{2}$ ve $Re(z)=k+1$ şeritinde $F_{u,n}$ nin hiçbir köşesi dışarı ile bağlanamaz. Bu bize $n\geq 3$ için $F_{u,n}$ nin bağlantısız olduğunu söyler. ■

Teorem 2.8.8.

$n\in\mathbb{N}$ ve $n>1$ olsun. $u\in\mathbb{U}_{n^2}$ ise $\mathcal{N}_{u,n}$ de üçgen yoktur.

İspat:

Aksine farzedelim ki $a\to b\to c\to a$ $\mathcal{N}_{u,n}$ de yönlü bir üçgen olsun. $\Gamma_0^0(n)$ grubu $\widehat{\mathbb{Q}}_n$ kümesi üzerinde transitif ve $a,b,c\in[\infty]$ olduğundan üçgen $\infty\to\frac{u}{n}\to\frac{x}{n}\to\infty$ üçgenine dönüşür. $\frac{u}{n}\to\frac{x}{n}\in\mathcal{N}_{u,n}$ olduğundan $u-x=\mp1$ dir. Böylece $x=u+1$ veya $x=u-1$ dir. Böylece $\infty\to\frac{u}{n}\to\frac{u\mp1}{n}\to\infty$ elde edilir. $\infty\to\frac{u}{n}\to\frac{u+1}{n}\to\infty$ ise $\frac{u+1}{n}\to\infty$ olduğundan $1\equiv -u\,(u+1)\,mod\,n^2$ dir. Yani $u^2-u+1\equiv 0\,mod\,n^2$ dir. $\frac{u}{n}\in[\infty]$ olduğundan $u\equiv 1\,mod\,n$ dir. Böylece $1\equiv 0\,mod\,n$ elde edilir. Ki bu $n=1$ çelişkisini verir. $\infty\to\frac{u}{n}\to\frac{u-1}{n}\to\infty$ ise $\frac{u-1}{n}\to\infty$ ve $u\equiv 1\,mod\,n$ olduğundan $n>1$ ise $(u-1,n)>1$ olacağından yine $n=1$ olmak zorundadır. Ki bu yine bir çelişki verir. Dolayısı ile $\mathcal{N}_{u,n}$ de yönlü bir üçgen olamaz.

$\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+1}{n} \leftarrow \infty$ veya $\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u-1}{n} \leftarrow \infty$ da olamaz. Gerçekten $\frac{u+1}{n} \leftarrow \infty$ ise $u + 1 \equiv u \; mod \; n^2$ den $1 \equiv 0 \; mod \; n^2$ çelişkisi; $\frac{u-1}{n} \leftarrow \infty$ ise $u - 1 \equiv u \; mod \; n^2$ den yine $1 \equiv 0 \; mod \; n^2$ çelişkisi elde edilir. Diğer ihtimallerde de yine üçgen olmadığı kolayca görülür.

Sonuç olarak $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ olsun. $u \in \mathbb{U}_{n^2}$ ise $\mathrm{N}_{u,n}$ de üçgen yoktur. ■

3. İRDELEME

1967 yılında yayınlanan "Graphs and Finite Permutation Groups" adlı çalışmada Charles C.Sims bir G permütasyon grubunun bir küme üzerindeki hareketinden alt yörüngesel graflar fikrini ortaya atmıştır. 1991 yılında "The Modular Group and Generalized Farey Graphs" adlı çalışmada Gareth A. Jones, David Singerman ve Keith Wicks Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketini kullanarak alt yörüngesel grafları incelemiş ve üçgen olma şartını elde etmişlerdir. M.Akbaş ın "Suborbital Graphs For The Group" adlı çalışmada devre uzunlukları ve grubun elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki ortaya konmuştur. Bu çalışmalar ilgili alt yörüngesel grafların önemini artırmış ve özel gruplar alınarak alt yörüngesel grafların incelenmesi gerektiği fikri ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen son iki makale ağırlıklı olarak çalışılmış ve ek olarak $\Gamma_0^0(n)$ kongrüans alt grubunun alt grafları elde edilerek, bu graflarda üçgenlerin olup olmaması araştırılmış, bağlantılılık durumları tam olarak ortaya konmuştur.

4. SONUÇLAR

Bu yüksek lisans tezinde,

1. Γ grubunun genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketinden elde edilen alt yörüngesel grafların temel özellikleri, bağlantılı olup olmadıkları, üçgen ve orman olma durumları ortaya konmuştur.

2. $\Gamma_0^0(n)$ nin genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin özel bir alt kümesi üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel grafların temel özellikleri incelenerek, bağlantılı olup olmama şartları tam olarak verildi.

5. ÖNERİLER

1. Γ modüler grubunun daha birçok alt grubunun alt yörüngesel grafları incelenebilir. Örneğin $\Gamma_0(n^2) := \left\{ \begin{pmatrix} an+1 & b \\ cn^2 & dn+1 \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$ grubu alınarak $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın özel bir alt kümesi üzerindeki hareketinden oluşan alt yörüngesel graflar incelenebilir.

2. Γ modüler grubunun imprimitif hareketi dışında başka bir hareketle oluşan graflar incelenebilir.

3. Γ ve $\Gamma_0^0(n)$ için elde edilen alt grafların Sayılar Teorisindeki yeri göz önüne alınıp incelenebilir.

4. $PSL(2,\mathbb{R})$ nin Γ modüler grubundan başka $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olan alt gruplarından hareketle tamamı ile farklı, belki irrasyonel köşeli, graflar üzerinde çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Schoneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.

2. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

3. Rankin, R.A., Modular Forms and Functions, Cambridge University Press, 1978.

4. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001) 647-652.

5. Leveque, W.J., Fundamentals of Number Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

6. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Mathematische. Zeitschrift., 95 (1967) 76-86.

7. Kör, T., Bir Tip Modüler Graf ve Fibonacci Sayıları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.

8. Anderson James W., Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag, 2000.

9. Sheets Christina L., Hyperbolic Geometry, July 2007.

10. Christi Donald, Hyperbolic Geometry in the High School Geometry Classroom, Iowa State University, 2011.

11. Jones, G.A., Singerman, D. ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160 (1991) 316-338.

12. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1989.

13. Niven I., S.Zuckerman H.,L. Montromery H., An Introductıon to The Theory of Numbers,John Wiley,1991.

14. Değer, A. H., $\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki $\widehat{\mathbb{Q}}$ Köşeli Minimal Uzunluklu Eğriler, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Tuba TUNÇ 1988 yılında Kayseri'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir de tamamladı. 2011 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu ve aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programına başladı. Yabancı dili İngilizcedir.