KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLAR VE FİBONACCİ SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice ÜNAL

HAZİRAN 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLAR VE FİBONACCİ SAYILARI

Hatice ÜNAL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17.05.2013
Tezin Savunma Tarihi : 12.06.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Hatice ÜNAL tarafından hazırlanan

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLAR VE FIBONACCI SAYILARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 21/05/2013 gün ve 1506 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ ....

Üye : Prof.Dr. Abdullah ÇAVUŞ ....

Üye : Prof.Dr. Hilmi ZENGİN ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketi göz önüne alınarak alt yörüngesel graflar, Γ nın elemanlarının küpleri alınarak elde edilen Γ^3 grubunun oluşturmuş olduğu grafların bağlantısızlığının yanı sıra elde edilen Fibonacci sayıları ve $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel graflarından elde edilen sonuçları sunmak amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak hazırlanmıştır.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca çalışmalarımdaki desteğini, yardımlarını ve yönlendirmelerini hiçbir zaman esirgemeyen, bunların yanı sıra manevi desteğini de her zaman hissettiren, kendisinin öğrencisi olmaktan son derece mutluluk duyduğum, yalnızca danışman Hocam dersem kendisine haksızlık edeceğim, danışman Hocam olmanın ötesinde bir yere sahip olan Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ Hocam'a çok teşekkür ediyorum, kendisine saygılarımı ve sevgilerimi sunuyorum. Ayrıca lisans ve yüksek lisans boyunca her anımda yanımda olan çalışmalarımızı beraber yürüttüğümüz bu çalışmamın da her aşamasında desteğini hissettiren çok kıymetli arkadaşım Tuba TUNÇ'a, yüksek lisansa girme sürecimden tez yazım aşamama kadar olan süreç boyunca tecrübelerinden faydalandığım, moral motivasyon ve bilgi desteğini ve ilgisini üzerimden hiçbir zaman esirgemeyen manevi abim araştırma görevlisi Ümit ERTUĞRUL'a ve ayrıca tezimin hazırlanması ve yazımı süresince tecrübelerini ve fikirlerini paylaşan, yardımlarını eksik etmeyen öğretim görevlisi Dr. Tuncay KÖR ve Yrd. Doç. Dr. Bahadır Özgür GÜLER'e çok teşekkür ederim. Yine öğrenim sürecimin başlangıcından bugüne kadar üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerim ve arkadaşlarıma, Matematik Bölümündeki tüm değerli öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen hep yanımda olduklarını hissettiğim kıymetli annem, babam, kardeşlerim ve özellikle lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca aynı evi paylaştığım, ilgisini ve desteğini her zaman hissettiğim abim Ahmet ÜNAL'a çok teşekkür ederim.

Hatice ÜNAL
Trabzon, 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Alt Yörüngesel Graflar ve Fibonaccı Sayıları" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 12.06.2013

Hatice ÜNAL

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

ALT YÖRÜNGESEL GRAFLAR VE FİBONACCİ SAYILARI

Hatice ÜNAL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2013, 70 Sayfa

Bu tezde amaç Γ modüler grubunun ve Γ^3 grubunun alt yörüngesel graflarından başlayarak Fibonacci ve genişletilmiş Fibonacci sayılarını ve $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel graflarını incelemek ve bu konu hakkında detaylı bilgi vermektir.

Birinci bölümde esas problemlerde kullanacağımız temel tanımlar, teoremler verilmiştir.

İkinci bölümü yapılan çalışmalar bölümü oluşturmaktadır. Burada ilk önce Γ modüler grubunun alt yörüngesel grafları ve bu grafların temel özellikleri, Γ^3 grubunun en temel alt yörüngesel graflarından olan F^3 ün bağlantısızlığı incelenerek Fibonacci sayılarına ve genişletilmiş Fibonacci sayılarına ulaşıldı. Ayrıca modüler grubun kongrüans alt gruplarından olan $\Gamma^0(n)$ grubunun alt yörüngesel grafları ve bağlantılı olup olmadıkları ile ilgili bazı önemli sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Modüler grup, Fibonacci sayıları, İmprimitif hareket, Alt yörüngesel graflar, Bağlantılılık, Bağlantısızlık

Master Thesis

SUMMARY

SUBORBITAL GRAPHS AND FIBONACCI NUMBERS

Hatice ÜNAL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Programme
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2013, 70 Pages

In this thesis the main aim is to construct the Fibonacci numbers and generalized Fibonacci numbers by means of the suborbital graphs for the modular group Γ and the group Γ^3, consisting of the cubes of the elements in Γ, and furthermore to give detailed information on the suborbital graphs for the congruence subgroup $\Gamma^0(n)$, $n\epsilon\mathbb{N}$.

In the first chapter we give necessary definitions and theorems for the subsequent work.

In the second chapter we studied some basic proberties of the suborbital graphs for the modular group Γ and then by using the disconnectedness of the graph F^3 we arrive at Fibonacci numbers and the generalized Fibonacci numbers. And finally we work out the suborbital graphs for the congruence subgroup $\Gamma^0(n)$, for n natural number. And then we show when the subgraph $F^0_{u,n}$ is connected and disconnected.

Key Words: Modular group, Fibonacci numbers, Imprimitive action, Suborbital graphs, Connectedness, Disconnectedness

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\boldsymbol{Gx}$	:	x in G yörüngesi
$\boldsymbol{S_x}$	:	x noktasının sabitleyeni
$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Modüler grup
$\boldsymbol{\Gamma^3}$	:	Modüler grubun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen alt grup
$\boldsymbol{\Gamma_0(n)}$	:	Modüler grubun $c \equiv 0 \; mod \; n$ olan alt grubu
$\boldsymbol{\Gamma^0(n)}$	:	Modüler grubun $b \equiv 0 \; modn$ olan alt grubu
$\boldsymbol{\Gamma(n)}$	:	Modüler grubun temel kongruans alt grubu
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	:	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	:	Üst yarı düzlemi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
∞	:	Sonsuz
$\boldsymbol{\Gamma_\infty}$	:	∞ un Γ Modüler grubundaki sabitleyeni
$\boldsymbol{\Gamma^3_\infty}$	:	∞ un Γ^3 Modüler grubundaki sabitleyeni
$\boldsymbol{PSL(2,\mathbb{R})}$	:	Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$[\boldsymbol{\alpha}]$	:	Alfa bloğu
$\boldsymbol{F_m}$	:	Farey dizisi
$\boldsymbol{O(\alpha,\beta)}$	:	(α,β) nın yörüngesi
$\boldsymbol{\gamma \rightarrow \delta}$	:	γ dan δ ya (yönlendirilmiş) bir kenar
$\boldsymbol{f_n}$	:	$n.$ Fibonacci sayısı
$\approx$	:	G-invaryant denklik bağıntısı
$\boldsymbol{(G,X)}$	:	Topolojik dönüşüm grubu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarına doğru ayrık gruplar teorisine temel teşkil edecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından verilmiş ve özellikle eliptik fonksiyonlar teorisinde kullanılmıştır. Fuchsian gruplar adı verilen ve sistematik çalışılmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayrık grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde detaylı çalışmalar yapılmıştır. Lineer kesirli dönüşümler Öklid olmayan geometriler ve invaryant teorinin keşfi ile birlikte büyük önem kazanmıştır. Eliptik modüler fonksiyonlar teorisindeki önemi nedeni ile $\varGamma$ modüler grubun kongrüans alt grupları olan $\varGamma(n)$, $\varGamma_0(n)$, $\varGamma^0(n)$ grupları üzerinde çalışılmıştır.

Charles C. Sims tarafından 1967 yılında yayımlanan "Graphs and Finite Permütation Groups" adlı çalışmada graf teorisi ve permütasyon grupları incelenmiş ve Gareth A. Jones, David Singerman ve K. Wicks' in 1991 yılında yayımlanan "The Modular Group and Generalized Farey Graphs" adlı çalışmada bizim de takip ettiğimiz alt yörüngesel graflar, devre uzunlukları ve orman olma durumları araştırılmış ve orman olma konjektürü 2001 yılında M. Akbaş tarafından "On Suborbital Graphs for The Modular Group" adlı çalışmada çözüme kavuşturulmuştur.

1202 yılında Fibonacci, Liber Abaci adlı kitabında şua anda bilinen Fibonacci sayılarının ortaya çıktığı bir problem ortaya attı. Edouard Lucas, Fibonacci'den sonra sayılara Fibonacci sayıları adını vermiştir. Bu sayılar, 1,1,2,3,5,8,13,21,… dir. 2012 de T. KÖR [8] tezinde alt yörüngesel grafların özelliklerinden faydalanarak Fibonacci sayılarına ulaşmıştır.

Tezin ana kısmını oluşturan ikinci bölümde $\varGamma$ için alt yörüngesel graflar ve Fibonacci sayıları etraflıca incelenmiştir. Ayrıca, ilk defa $\varGamma^0(n)$ kongrüans alt grupları incelenerek; kenar şartları, üçgen içermeme durumu, bağlantılılık ve bağlantısızlık problemleri tamamıyla çözüldü.

1.2. Gruplar ve Topolojik Gruplar

Tanım 1.1. $G \neq \emptyset$ bir küme olsun. $G \times G$ den G ye her $*: G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \to g_1 * g_2$ fonksiyonuna G üzerinde bir ikili işlem adı verilir. Üzerinde en az bir ikili işlem tanımlanmış ve boş olmayan bir kümeye cebirsel yapı denir ve $(G,*)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2. $G \neq \emptyset$ ve " $*$ " G üzerinde bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ ikilisine,

$\boldsymbol{G_1}$: $\forall a, b, c \epsilon G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (birleşme özelliği)

$\boldsymbol{G_2}$: $\exists e_G \epsilon G$ öyleki $\forall a \epsilon G$ için $a * e_G = e_G * a = a$ (birim eleman özelliği)

(Ancak kolaylık olması açısından e_G yerine e yazacağız.)

$\boldsymbol{G_3}$: $\forall a \epsilon G$ için $\exists a' \epsilon G$ öyleki $a * a' = a' * a = e$ (ters eleman özelliği)

şartları sağlanıyor ise,bir grup adı verilir.

Tanım 1.3. G bir grup, $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Eğer H G üzerinde tanımlanan ikili işleme göre bir grup ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. $H \leq G$ ise $e_G \epsilon H$ dir. Dolayısıyla $\{e\}$ ve G, G nin alt gruplarıdır. Bu alt gruplara trivial (aşikar) alt gruplar denir. Bir grubun trivialden farklı alt gruplarına öz alt grup adı verilir.

Önerme 1.4.[10] G bir grup $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Bu takdirde;

$H \leq G \Leftrightarrow \forall a, b \epsilon H$ için;

(i) $ab \epsilon H$

(ii) $a^{-1} \epsilon H$ dir.■

Önerme 1.5.[10] G bir grup, $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Bu takdirde;

$H \leq G \Leftrightarrow \forall a, b \epsilon H$ için $ab^{-1} \epsilon H$ dir.■

Tanım 1.6. G bir grup, H ve M, G nin iki alt grubu olsun. $M = gHg^{-1}$ olan bir $g \epsilon G$ varsa H ve M alt gruplarına G de eşlenik alt gruplar adı verilir.

Tanım 1.7. G bir grup olmak üzere; $Z(G) \coloneqq \{a \epsilon G : \forall g \epsilon \text{ G} \text{ için } ag = ga \} \subset G$ kümesine G grubunun merkezi denir.

Teorem 1.8. [10] $Z(G) \leq G$ dir.■

Tanım 1.9. G bir grup, $\emptyset \neq M \subset G$ olsun. G nin M yi içeren alt gruplarının arakesiti bir gruptur. Bu gruba M ile üretilen grup adı verilir ve $\langle M \rangle$ ile gösterilir. Eğer $G = \langle M \rangle$ olacak şekilde G nin boş olmayan bir alt kümesi mevcut ise G ye M ile üretilen bir grup denir.

(i) $M = \{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ ise, $\langle M \rangle$ ye sonlu üretenli grup denir.

(ii) $M = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise $\langle M \rangle$ ye a ile üretilen devirli grup denir ve $G = \langle a \rangle$ ile gösterilir.

Uyarı: $G = \langle a \rangle$ devirli bir grup olsun.

(i) Eğer $(G,\bullet)$ çarpımlı bir grup ise, $\langle a \rangle = \{a^n : n\epsilon\mathbb{Z}\}$

(ii) Eğer $(G,+)$ toplamlı bir grup ise, $\langle a \rangle = \{na : n\epsilon\mathbb{Z}\}$ ile verilir.

Uyarı: $G = \langle a \rangle$ devirli grubunu göz önüne aldığımızda iki durum söz konusudur:

(i) $\forall n, m\epsilon\mathbb{Z}^+, n \neq m$ için $a^n \neq a^m$ dir. Bu durumda G ye sonsuz devirli grup denir.

(ii) $\exists n, m\epsilon\mathbb{Z}, n \neq m$ ve $a^n = a^m$ dir. Bu durumda G ye sonlu devirli grup denir.

Önerme 1.10.[10] G bir grup $H \leq G$ olsun. G üzerinde " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) :\Leftrightarrow a^{-1}b\epsilon H$ olarak tanımlansın. Bu bağıntı G üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ah : h\epsilon H\} \coloneqq aH$ alt kümesidir. aH kümesine $a\epsilon G$ nin sol yan sınıfı denir.■

Önerme 1.11.[10] G bir grup $H \leq G$ olsun. G üzerinde " $\equiv$ " bağıntısı $a \equiv b(H) \Leftrightarrow ab^{-1}\epsilon H$ olarak tanımlansın. Bu bağıntı G üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve bir a elemanının denklik sınıfı $\bar{a} = \{ha : h\epsilon H\} \coloneqq Ha$ alt kümesidir. Ha alt kümesine $a\epsilon G$ nin sağ yan sınıfı denir.■

Teorem 1.12.[10] G bir grup $H \leq G$ olsun. $H \leq G$ alt grubuna göre sağ ve sol yan sınıfların sayısı aynıdır. Bu sayıya H nın G içindeki indeksi denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.■

Tanım 1.13. $(G,\bullet)$ ve $(H,*)$ iki grup ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b\epsilon G$ için $f(a.b) = f(a) * f(b)$ ise f ye G den H ye bir grup homomorfizması denir. G den H ye tüm grup homomorfizmalarının kümesi $Hom(G,H)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre;

$f: G \to H, f(e_G) := e_H$ ile tanımlı fonksiyon bir grup homomorfizması olup $Hom(G,H) \neq \emptyset$ tur.

$f\epsilon Hom(G,H)$ keyfi olsun.

- f birebir ise f ye monomorfizma,
- f örten ise f ye epimorfizma,
- f birebir ve örten ise f ye izomorfizma denir.

Ayrıca; $f: G \to G$ izomorfizmasına bir otomorfizma adı verilir.

Tanım 1.14. $A \neq \emptyset$ bir küme, $S(A) = \{f \mid f: A \to A$ birebir ve örten$\}$ olsun. $(S(A),\circ)$ bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu grubun elemanlarına permütasyonlar denir. $(S(A),\circ)$ grubunun alt gruplarına permütasyon grupları adı verilir. $|A| = n$ ise $S(A) \coloneqq S_n$ ile gösterilir ve $|S_n| = n!$ dir.

Tanım 1.15. $X \neq \emptyset$ verilen bir küme, $\tau \subset \wp(X)$ olsun. τ ailesine;

(i) $\emptyset \epsilon \tau$ ve $X \epsilon \tau$,

(ii) $\forall U, V \epsilon \tau$ için $U \cap V \epsilon \tau$,

(iii) $\forall \{O_i\}_{i \epsilon I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \epsilon I} O_i \epsilon \tau$ şartları sağlanıyor ise X üzerinde bir topoloji adı verilir. X e de bir topolojik uzay denir ve (X, τ) ile gösterilir.

Tanım 1.16.[2] $(G,\bullet)$ bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde;

(i) $m: G \times G \to G,\ m(g,h) = g.h$

(ii) $n: G \to G,\ n(g) = g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.17.[2] G bir topolojik grup, X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$\wedge: G \times X \to X$, $\wedge(g,x) = g \wedge x \coloneqq gx$ ile tanımlanan $\wedge$ dönüşümü sürekli ve $\forall g_1, g_2 \epsilon G,\ \forall x \epsilon X$ için;

(i) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$

(ii) $e \wedge x = x$

şartları sağlanıyor ise $(G, X, \wedge)$ üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir.
Yukarıdaki (i) ve (ii) şartları sağlanıyorsa G ye X üzerinde hareket ediyor veya G X üzerinde bir hareket grubudur denir. Çoğunlukla bu yapıyı $(G, X, \wedge)$ yerine kısaca (G, X) ile göstereceğiz.

Tanım 1.18. (G, X) bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \epsilon X$ olsun.

$x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \epsilon G : y = gx$ olarak tanımlanırsa "$\sim$" bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının X üzerinde ayırdığı denklik sınıflarına hareketin yörüngeleri adı verilir ve $x \epsilon X$ noktasını içeren yörünge $Gx \coloneqq \{gx : g \epsilon G\}$ kümesidir. Eğer bir tek yörünge mevcut ise yani $\exists x_0 \epsilon X$ öyleki $X = Gx_0$ ise (G, X) e transitiftir denir.

Tanım 1.19. (G, X) bir topolojik dönüşüm grubu olsun. $S(x) = \{g \epsilon G : gx = x\}$ alt kümesine $x \epsilon X$ noktasının G grubuna göre sabitleyeni denir.

Lemma 1.20. (G, X) bir topolojik dönüşüm grubu ve $y = gx$, $g \epsilon G$ (veya $y \epsilon Gx$) olsun. Bu takdirde; $S_y = gS_xg^{-1}$ dir yani bir yörüngedeki farklı iki elemanın sabitleyenleri G nin eşlenik alt gruplardır.

İspat:

"⊂"

$g_0 \epsilon S_y$ keyfi olsun. $\Rightarrow g_0 y = y$ dir. $y = gx$ olduğundan $g_0 gx = gx \Rightarrow g^{-1} g_0 gx = x \Rightarrow$ $g^{-1} g_0 g \epsilon S_x$ ve $g_0 = g(g^{-1} g_0 g) g^{-1}$ olduğundan $S_y \subset g S_x g^{-1}$ dir.

"⊃"

$g g_0 g^{-1} \epsilon g S_x g^{-1}$ keyfi olsun. $g g_0 g^{-1} y = g g_0 x = gx = y$ olduğundan $g g_0 g^{-1} \epsilon S_y$ olduğundan $g S_x g^{-1} \subset S_y$ dir.

"⊂" ve "⊃" dan $S_y = g S_x g^{-1}$ olduğu görülür.

1.3. Hiperbolik Geometri

Geometri Euclidean ve non-Euclidean olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Bu iki tip geometri arasındaki temel farklar doğrularının paralellik özelliklerinden kaynaklanır. Eucledian geometrinin dayandığı beş aksiyom vardır.

(1) İki noktadan bir doğru geçer.

(2) Doğru parçaları iki ucundan sonsuza doğru bir doğru boyunca uzatılabilir.

(3) Merkezi ve yarıçapı verilen çember çizilebilir.

(4) Tüm dik açılar denktir.

(5) Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir (Euclid'in Paralellik Aksiyomu). Bu aksiyom Euclid'in "The Elements" adlı kitabındaki ifadesiyle bire-bir örtüşmese de daha anlaşılır olması sebebiyle böyle de ifade edilebilir [7].

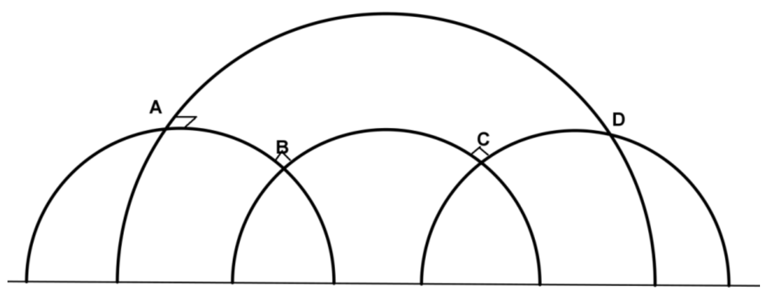
Hiperbolik geometri alanındaki ilk araştırmacılar Euclid'in paralellik aksiyomu çevresinde bir tutarsızlık bulmaya çalışanlardan oluşuyordu. Matematikçiler tarih boyunca Euclid'in ilk dört aksiyomunu kullanarak yukarıda paralellik aksiyomu denilen Euclid'in beşinci aksiyomunu ispatlamaya çalışmışlardı. Euclid'in paralellik aksiyomuna göre, "bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir paralel doğru çizilebilirdi" ve bu aksiyom pek çok matematikçiye göre çok karmaşıktı ve ilk dört aksiyomdan elde edilebilmeydi. Bu ihtimal üzerine matematikçiler, Euclid'in beşinci aksiyomunun doğru olmadığı varsayımlar üzerine çalıştılar. 1700 ün ortalarında Girolamo Saccheri'nin öncülük ettiği gibi, Hiperbolik Paralel Aksiyomu olarak bildiğimiz, bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebileceği varsayımından yola çıkanlar Hiperbolik Geometrinin ortaya çıkmasını sağladılar. Diğer taraftan, bir doğruya dışındaki bir noktadan hiç bir paralel doğru çizilemeyeceği varsayımı ile yola çıkanlar da Eliptik Geometrinin geliştirilmesine öncülük ettiler [11].

Euclid'in beşinci aksiyomunun doğru olmadığı geometrilerin de bulunabileceği düşüncesiyle Proclus, Ömer Hayyam, Nasir al-Din al-Tusi, ve sonradan Giovanni Gerolamo Saccheri, John Wallis, Lambert, ve Legendre çalışmışlardır. On dokuzuncu yüzyılda Janos Bolyai ve Nikolai Ivanovich Lobachevsky'nin çalışmaları bu alanda çok etkili oldu. Öyle ki Hiperbolik Geometrinin bazı parçaları onların isimleriyle anılır. Sonrasında Eugenio Beltrami Hiperbolik Geometri için modeller sağladı ve bu modelleri kullanarak, "Eğer Euclid Geometrisi tutarlıysa, hiperbolik geometri de tutarlıdır" önermesini kanıtladı.

Hiperbolik düzlemin dikkate değer bir özelliği de bu geometride verilen her paralel doğru çifti için, her iki doğruya da dik olan yalnızca bir doğru çizilebiliyor olmasıdır. Bunun bir sonucu olarak hiperbolik düzlemde dikdörtgenlerin olamayacağı Lambert ve Saccheri'nin çalışmalarında yer almıştır.

Girolamo Saccheri ve Lambert, Euclid'in beşinci aksiyomunun yanlış olduğu varsayımı altında bir çelişki aramak amacıyla Hiperbolik Paralel Aksiyomu olarak bilinen çoklu paraleller hipotezini kabul ederek dikdörtgeni tanımlamaya çalıştı.

Lambert Saccheri'nin ardından çoklu paraleller hipotezi altında aşağıdaki şekildeki gibi 3 açısı dik olan bir dikdörtgenin dördüncü açısının dik olup olamayacağını merak etti. Lambert dördüncü açı için üç olasılığı (dar, dik, geniş) inceledi. Hiperbolik üçgenin iç açıları toplamı π radyandan küçük olduğundan hiperbolik dörtgenin tüm açılarının toplamının 2π radyandan küçük olacağını, dolayısıyla hiperbolik düzlemde dikdörtgenlerin olamayacağını ilk olarak ortaya koydu. Yani, çoklu paraleller hipotezi altında paralel iki doğruya aynı anda dik olan en fazla bir tane doğru çizilebilirdi.

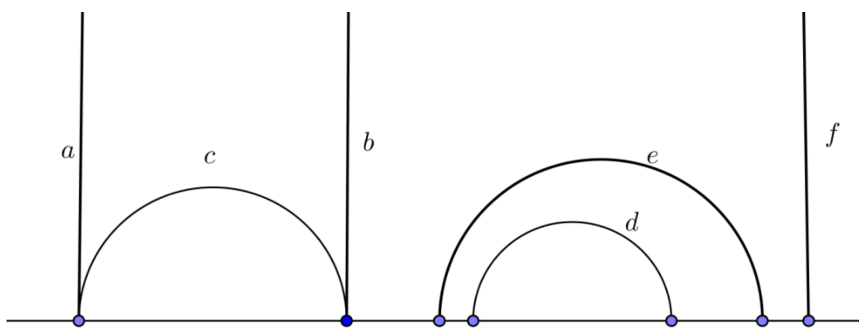


Şekil 1. Üç açısı dik olan hiperbolik dörtgen

Paralellik aksiyomunun aksi üzerine çalışan Karl Friedrich Gauss, Janos Bolyai ve Nikolai Ivanovich Lobachevsky yaklaşık olarak aynı zamanlarda Şekil 1 deki dördüncü açının dar olduğunu gösterdiler ve şimdilerde Hiperbolik Geometri olarak bilinen konular üzerinde çalıştılar [12].

Hiperbolik Geometride (hiperboloid geometrisi -saddle geometry- ya da Lobachevskian geometri olarak da adlandırılır) paralellik terimi yalnızca hiperbolik düzlemde kesişmeyen ancak sonsuzda kesişecek olan bir doğru çiftini anlatmak için kullanılır. Eğer bu doğru çifti ne hiperbolik düzlemde ne de sonsuzda kesişirse (yani her iki durumda da kesişmezse) aşırı paralel (ultra paralel) olarak adlandırılırlar. İki doğru sadece sonsuzda kesişirse bu iki doğruya paralel (hyper paralel) doğrular denir. Hiperbolik geometride; bir ℓ doğrusu ve doğrunun dışında bir P noktası verildiğinde P'den geçen ve ℓ'ye paralel olan yalnız ve yalnız iki tane ultra olmayan paralel doğru geçerken sonsuz sayıda ultra paralel doğru geçer [7].

Kısa bir süre sonra Fransız matematikçi Poincare ve İtalyan matematikçi Beltrami hiperbolik geometriyi görsel hale getirmeye yardımcı çeşitli modeller geliştirdiler. Her ikisine atfedilen bir model Beltrami-Poincare üst yarı düzlem modelidir. Bu model hiperbolik paraleller postülatını destekler ve diğerleri tarafından geliştirilen sonuçları resimlemek için değerlidir. Bu üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğrular reel eksene dik yarı doğrular ve yarı çemberlerdir. Aşağıdaki şekilde bu modele ait doğru örnekleri verildi.



Şekil 2. Üst yarı düzlem modeline göre hiperbolik doğrular

Yukarıdaki şekilde a ve b doğruları c'ye paralel, d, e, f doğruları ise c'ye ultra paraleldir.

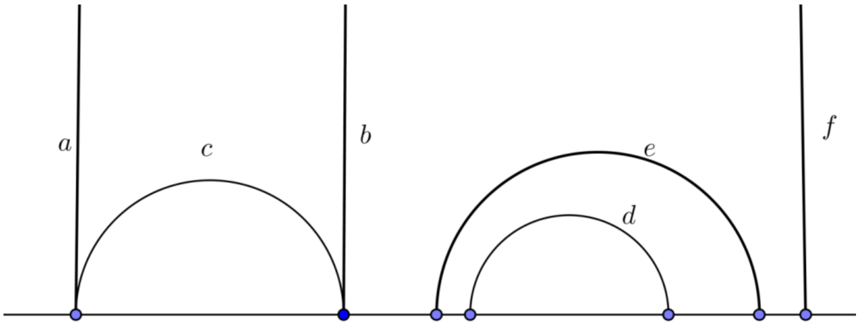
Öklid düzlemi ve hiperbolik düzlemde uzaklık ve açı kavramlarını benzer şekilde tanımlanır. Her iki geometride de aynı olan temel özellikleri aşağıda ki gibi sıralayabiliriz [13].

- İki farklı P ve Q noktası verildiğinde, her ikisinden geçen sadece bir doğru vardır.
- İki farklı P ve Q noktası verildiğinde P ve Q nun her ikisinden aynı uzaklıkta olan bütün noktalar kümesi bir doğrudur.
- Her ℓ doğrusu düzlemi iki bağlantılı bileşene böler. P ve Q, ℓ doğrusu üzerinde olmayan iki nokta olsun. PQ doğru parçası ℓ ile kesişmesi veya kesişmemesine göre, P ve Q nun ℓ nin zıt tarafları üzerinde veya aynı taraf üzerinde olduğunu söyleyebiliriz. ℓ nin aynı tarafı üzerinde olan iki noktanın bağıntısı, iki denklik sınıfı ile birlikte bir denklik bağıntısıdır.
- Benzer şekilde, ℓ doğrusu üzerindeki her P noktası ℓ nin diğer noktalarını iki sınıfa ayırır: P nin bir tarafı üzerinde olanlar ve P nin diğer tarafı üzerinde olanlar.
- Bir ℓ doğrusu üzerinde bir P noktası ve $d > 0$ pozitif gerçel sayısı verildiğinde, ℓ üzerinde P den d uzaklığında tam iki nokta vardır, bunlardan her biri P noktasının farklı taraflarındadır.
- İki üçgenin aynı uzunlukta olan karşılıklı kenarları varsa, iki üçgen benzerdir ve bir üçgeni diğerine resmeden (ve karşılıklı kenarları koruyan) bir düzlem izometrisi mevcuttur.

1.3.1. Hiperbolik Geometrinin Üst Yarı Düzlem Modeli

Burada $\mathbb{U} \coloneqq \{z\epsilon\mathbb{C}: Imz > 0\}$ üst yarı düzlemini göz önüne alalım. Buradaki açı kavramı $\mathbb{C}$ deki açı kavramı gibi tanımlanır ve tanımlayacağımız hiperbolik doğruları Öklid çemberleri veya Öklid doğruları cinsinden vereceğiz.

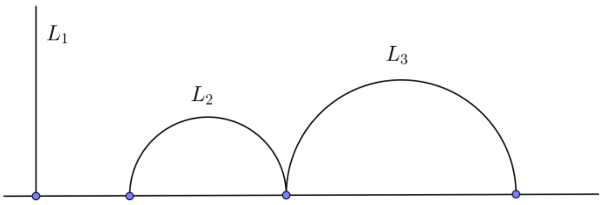
Tanım 1.21. $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ye dik Öklid doğrularının $\mathbb{U}$ ile arakesiti olan yarı Öklid doğrularına ve $\mathbb{R}$ ye dik bilinen Öklid çemberlerinin $\mathbb{U}$ ile arakesitlerine hiperbolik doğrular adı verilir. Kısaca hiperbolik doğru reel eksene dik $\mathbb{U}$ da kalan yarı çemberlerdir. Tabiki burada reel eksene dik $\mathbb{U}$ da kalan yarı doğruları sonsuz yarıçaplı çemberler veya merkezi sonsuzda olan çemberler olarak alıyoruz.



Şekil 3. Üst yarı düzlemde hiperbolik doğrular

Önerme 1.22. $p, q \epsilon \mathbb{U}$ farklı noktalar olsun. Bu takdirde; p ve q yu birleştiren bir tek hiperbolik doğru vardır.■

Tanım 1.23. $\mathbb{U}$ da L_1 ve L_2 doğruları paraleldir denir:⟺ $\mathbb{U}$ da $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ tur.



Şekil 4. Paralel hiperbolik doğrular

Teorem 1.24.[7] l bir hiperbolik doğru ve $a \notin l$, $a \epsilon \mathbb{U}$ olsun. Bu takdirde; a dan geçen l ye paralel sonsuz tane hiperbolik doğru vardır.■

Tanım 1.25. $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çember ya bilinen Öklid çemberi ya da $\mathbb{C}$ de bir doğruya ∞ u ekleyerek elde edilir.

Biliyoruzki $\mathbb{C}$ de (a, b) merkezli r yarıçaplı çember denklemi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dir. Buradan kompleks notasyona geçilirse $\alpha, \gamma \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta \epsilon \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ denklemi elde edilir. Burada dikkat edilmelidirki böyle bir denklemin her zaman çember vermesi gerekmez ama çember bu biçimdedir. l, $\mathbb{C}$ de bir doğru olduğunda $l \cup \{\infty\}$ $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çemberdir. l doğrusunu, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta \epsilon \mathbb{C}$ olmak üzere, $\beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ ile verebiliriz.

Önerme 1.26. $\alpha \neq 0$; $\alpha, \gamma \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta \epsilon \mathbb{C}$ olmak üzere; $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$ denklemi bir Öklid çemberi belirler ⟺ $|\beta|^2 > \alpha\gamma$ dır.

İspat:

"$\Rightarrow$"

$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ denklemi bir Öklid çemberi belirtsin. $z=x+iy$; $x,y\epsilon\mathbb{R}$ ve $\beta=\beta_1+i\beta_2$; $\beta_1,\beta_2\epsilon\mathbb{R}$ olsun. Bu değerler denklemde yerine konulduğunda; $\alpha(x+iy)(x-iy)+(\beta_1+i\beta_2)(x+iy)+(\beta_1-i\beta_2)(x-iy)+\gamma=0$

$$\Rightarrow \alpha(x^2+y^2)+\beta_1x+i\beta_1y+i\beta_2x-\beta_2y+\beta_1x-i\beta_1y-i\beta_2x-\beta_2y+\gamma=0$$

$$\Rightarrow \alpha(x^2+y^2)+2\beta_1x-2\beta_2y+\gamma=0$$

$$\overset{\alpha\neq 0}{\Longrightarrow} x^2+y^2+2\frac{\beta_1}{\alpha}x-2\frac{\beta_2}{\alpha}y+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

$$\Rightarrow -\frac{{\beta_1}^2}{\alpha^2}+\left(y-\frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2-\frac{{\beta_2}^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2+\left(y-\frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2=\frac{{\beta_1}^2+{\beta_2}^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2} \tag{1.1}$$

(1.1) denklemi $M=(\frac{-\beta_1}{\alpha},\frac{\beta_2}{\alpha})$ merkezli r yarıçaplı bir çember belirtmesi için $\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}=r^2$ olacağondan $\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}>0$ olmalıdır. $\Rightarrow |\beta|^2>\alpha\gamma$ olmalıdır.

"$\Leftarrow$"

$|\beta|^2>\alpha\gamma$ olsun. $\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ denkleminin bir Öklid çemberi belirttiğini gösterelim.

$z=x+iy$; $x,y\epsilon\mathbb{R}$ ve $\beta=\beta_1+i\beta_2$; $\beta_1,\beta_2\epsilon\mathbb{R}$ olsun. $\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ denkleminde β ve z yerine konulur ve aynı işlemler yapılırsa;

$\left(x+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2+\left(y-\frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2=\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}$ elde edilir. Hipotezden $|\beta|^2>\alpha\gamma$ olduğundan $|\beta|^2-\alpha\gamma>0 \overset{\alpha\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}>0$ dır. Böylece $\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0$ denklemi $(\frac{-\beta_1}{\alpha},\frac{\beta_2}{\alpha})$ merkezli $\sqrt{\frac{|\beta|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}}$ yarıçaplı bir Öklid çemberi belirtir.■

Önerme 1.27.[7] $p\epsilon\mathbb{U}, q\epsilon\overline{\mathbb{R}}$ olsun. p ve q yu birleştiren $\mathbb{U}$ da bir tek hiperbolik doğru vardır.■

Tanım 1.28. $z\neq\infty$, $U_\varepsilon(z):=\{w\epsilon\mathbb{C}: |z-w|<\varepsilon\}$ kümesine z nin ε komşuluğu ve $U_\varepsilon(\infty):=\{z\epsilon\mathbb{C}: |z|>\varepsilon\}\cup\{\infty\}$ ∞ un ε komşuluğu adı verilir.

Tanım 1.29. $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonu $z\epsilon\overline{\mathbb{C}}$ noktasında süreklidir denir:$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ için $f(U_\delta(z))\subset U_\varepsilon(f(z))$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı vardır.

Önerme 1.30.[7]

$J(z) := \begin{cases} 1/z\,, z\epsilon\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \infty, \quad z=0 \\ 0, \quad z=\infty \end{cases}$ ile tanımlı $J: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ fonksiyonu $\bar{\mathbb{C}}$ de süreklidir.■

Önerme 1.31. $g(z)$ derecesi en az 1 olan bir polinom olsun. Bu takdirde;

$f(z) := \begin{cases} g(z), z \neq \infty \\ 0, z = \infty \end{cases}$ ile tanımlı $f: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.■

Tanım 1.32. $f: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ fonksiyonu bir homeomorfizmadır :⟺ f birebir örten, f ve f^{-1} sürekli.

Önerme 1.33.

$J(z) := \begin{cases} 1/z\,, z\epsilon\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \infty, \quad z=0 \\ 0, \quad z=\infty \end{cases}$ ile tanımlı $J: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ fonksiyonu bir homeomorfizmadır.■

Önerme 1.34.

$f(z) = \begin{cases} az+b, z\epsilon\mathbb{C} \\ \infty \quad\quad, z=\infty \end{cases}$ ile tanımlı $f: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ homeomorfizması çemberleri çemberlere resmeder.■

Önerme 1.35.

$J(z) := \begin{cases} 1/z\,, z\epsilon\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \infty, \quad z=0 \\ 0, \quad z=\infty \end{cases}$ ile tanımlı $J: \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ homeomorfizması çemberleri çemberlere resmeden bir homeomorfizmadır.■

1.3.2. Genel Möbiüs Grubu

Tanım 1.36. $PGL(2,\mathbb{C}) := \{m: : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}\,;\ m(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\epsilon\mathbb{C}; ad-bc \neq 0\}$ kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur bu gruba genel möbiüs grubu adı verilir.

Teorem 1.37.[7] Her $m\epsilon\ PGL(2,\mathbb{C}),\ m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü $f(z) = Az + B$ ve $J(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyon tiplerinin bir bileşkesi olarak yazılabilir.

İspat:

$c = 0$ ise; $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B$ dir.

$c \neq 0$ ise;

$g(z) = c^2z + dc(= A_0z + B_0)$ ve $h(z) = -(ad-bc)z + \frac{a}{c}(= A_1z + B_1)$ olmak üzere; $m(z) = (h \circ J \circ)(z)$ dir.

Gerçekten;

$m(z) = f\left(\frac{1}{c^2z+dc}\right) = -(ad-bc).\frac{1}{c^2z+dc} + \frac{a}{c} = \frac{-ad+bc+acz+ad}{c^2z+dc} = \frac{az+b}{cz+d}$ dir.■

Sonuç 1.38. PSL(2,ℝ)$:= \left\{ m: : \ \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}\,;\ m(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d\epsilon\mathbb{R}\,; ad-bc=1 \right\}$ kümesi $PGL(2,\mathbb{C})$ nin bir alt grubudur.■

Tanım 1.39. $m\epsilon PSL(2,\mathbb{R})$, $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olsun. Bu takdirde,

(i) $|a+d| < 2$ ise m ye bir eliptik eleman,

(ii) $|a+d| = 2$ ise m ye bir parabolik eleman,

(iii) $|a+d| > 2$ ise m ye bir hiperbolik eleman adı verlir.

Sonuç 1.40.[7] PSL(2,ℝ) grubu

(i) $\mathbb{U}$ üstyarı düzlemi $\mathbb{U}$ üstyarı düzleme,

(ii) Geodezikleri geodeziklere;

(iii) Çemberleri çemberlere resmeder.■

1.3.2.1. Möbiüs Dönüşümlerinin Matris Gösterimleri

Burada iki möbiüs dönüşümün bileşkesini göz önüne alacağız ve her bir möbiüs dönüşümünün 2×2 tipinde bir matrise karşılık geldiğini göreceğiz.

$m(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, $n(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ iki möbiüs dönüşümü ise;

$(m \circ n)(z) = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_2d_1)}$ dir.

m ye karşılık $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisini,

n ye karşılık $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisini,

göz önüne aldığımızda $m \circ n$ ye karşılık gelen matrisin katsayılar matrisinin $\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_2d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ olduğu görülür.

$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü verildiğinde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisine m ye karşılık gelen matris diyeceğiz, $detm = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$, m nin determinantı olarak göz önüne alınacaktır.

$k \neq 0$ olmak üzere; $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{kaz+kb}{kcz+kd} = m(z)$ olduğundan farklı matrislere aynı dönüşümler karşılık gelir. Buradan açıkça görülüyorki sonsuz sayıda matris bir tek möbiüs dönüşümünü verir. Ancak; $detm = ad - bc = 1$ alırsak bu durumda; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ matrislerine $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü karşılık gelir.

Tanım 1.41. Herhangi bir $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü verildiğinde determinant 1 den farklı ise pay ve payda $\sqrt{ad-bc}$ ye bölünür: $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{ad-bc}}z+\frac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\frac{c}{\sqrt{ad-bc}}z+\frac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$ ve böylece $detm = 1$ olması sağlanır. Bu şekle gelen möbiüs dönüşümüne normalize olmuştur denir.

Lemma 1.42. $\{\, T{:}\, z \to \frac{az+b}{cz+d} \;|\, a, b, c, d \epsilon \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1\}$ kümesi $PSL(2, \mathbb{R})$ nin bir alt grubudur.■

Tanım 1.43. $\Gamma \coloneqq \{\, T{:}\, z \to \frac{az+b}{cz+d} \;|\, a, b, c, d \epsilon \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1\}$ alt grubuna modüler grup adı verilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Modüler Grup

$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{T: z \to \frac{az+b}{cz+d} \;|a,b,c,d\epsilon\mathbb{R}\; ve\; ad-bc=1\right\}$ grubunun $\Gamma = \{T: z \to \frac{az+b}{cz+d} \;|a,b,c,d\epsilon\mathbb{Z}$ ve $ad-bc=1\}$ alt grubunu göz önüne alalım.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $detA = 1$, A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş olarak alınacak, böylece matrisle dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır.

Teorem 2.1.[1] Γ modüler grubu $X^2 = Y^3 = I$ bağıntısı ile verilen $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilir. Yani; $\Gamma = \langle X, Y\rangle$ dir.■

2.1.1. *Γ* nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanı, $x, y\epsilon\mathbb{Z}$ ve $(x,y) = 1$ olmak üzere, $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ ile temsil edeceğiz.

Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: \frac{x}{y} \to \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir. $T\epsilon\Gamma$ olmak üzere;

$T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a.\frac{x}{y}+b}{c.\frac{x}{y}+d} = \frac{\frac{ax+by}{y}}{\frac{cx+dy}{y}} = \frac{ax+by}{cx+dy}$ ve

$T\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{a.\frac{-x}{-y}+b}{c.\frac{-x}{-y}+d} = \frac{\frac{-ax-by}{y}}{\frac{-cx-dy}{y}} = \frac{-ax-by}{-cx-dy} = \frac{ax+by}{cx+dy}$

olduğundan $T\left(\frac{x}{y}\right) = T\left(\frac{-x}{-y}\right)$ dir. Bu da Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin iyi tanımlı olduğunu ifade eder.

$\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri verildiğinde ve $ad-bc=1$ olduğunda $\frac{ax+by}{cx+dy}$ kesri de indirgenmiş formdadır. Gerçekten;

$\frac{x}{y}$ indirgenmiş formda verilen bir kesir olduğundan $x, y \epsilon \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ dir. Varsayalımki $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş formda olmasın yani $(ax + by, cx + dy) = n > 1$, $n \epsilon \mathbb{Z}$ olsun.

$\Rightarrow n \mid ax + by$ ve $n \mid cx + dy$

$$\Rightarrow \exists k \epsilon \mathbb{Z} \text{ öyleki } ax + by = kn \tag{2.1}$$

$$\exists l \epsilon \mathbb{Z} \text{ öyleki } cx + dy = ln \tag{2.2}$$

(i) (2.1) eşitliğinin her iki tarafı $-c$ ile, (2.2) eşitliğinin de her iki tarafı a ile çarpılırsa;

$-cax - cby = -ckn$ ve $acx + ady = aln$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri toplarsak;

$(ad - bc)y = (al - ck)n \xRightarrow{ad-bc=1} y = (al - ck)n \Rightarrow n \mid y$ olur.

(ii) (2.1) eşitliğinin her iki tarafı $-d$ ile, (2.2) eşitliğinin de her iki tarafı b ile çarpılırsa;

$-dax - dby = -dkn$ ve $bcx + bdy = bln$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri toplarsak;

$(bc - ad)x = (bl - dk)n \xRightarrow{ad-bc=1} x = (dk - bl)n \Rightarrow n \mid x$ olur.

(i) ve (ii) den görülüyorki $n \mid x$ ve $n \mid y \Rightarrow n \mid (x, y) = 1$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $(ax + by, cx + dy) = n > 1$ olduğunu varsaymamızdan kaynaklandı. O halde varsayımımız yanlıştır, yani $(ax + by, cx + dy) = 1$ dir.

Teorem 2.2.

(i) Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

(ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

İspat:

(i) $\forall v = \frac{a}{b}$, $w = \frac{c}{d} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanları için $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ olan $T \epsilon \Gamma$ dönüşümünün varlığını gösterelim. Bunun için $\forall v = \frac{a}{b} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}$ elemanının $\Gamma(\infty) = \{g(\infty) : g \epsilon \Gamma\}$ da, ∞ un yörüngesinde, olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Çünkü; $s(\infty) = \frac{a}{b}$ ve $m(\infty) = \frac{c}{d}$ olan $s, m \epsilon \Gamma$ mevcut ise $T \coloneqq ms^{-1}$ ile $T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$ dir.

$v = \frac{a}{b} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}$ (İndirgenmiş formda) olsun. $(a,b) = 1$ olduğundan $\exists x, y \epsilon \mathbb{Z}$ öyleki $ax - by = 1$ dir. Böylece, $g := \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \epsilon \Gamma$ dır ve $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olduğundan $g(\infty) = \frac{a}{b}$ dir. Dolayısı ile, $\frac{a}{b}$, ∞ un yörüngesindedir. Yani; Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

(ii) Lemma 1.20 den $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi iki elemanının sabitleyenleri Γ da eşlenik olduklarından ∞ un sabitleyeni olan Γ_∞ u göz önüne almak yeterlidir.

$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \epsilon \mathbb{Z} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ dır. Gerçekten;

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \Gamma_\infty$ olsun.$\Rightarrow T(\infty) = \infty$ dur. $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$ ve $c = 0$ dır ve ayrıca $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \Gamma_\infty \subset \Gamma$ olduğundan $ad - bc = 1$ dir. $\Rightarrow 1.d - b.0 = 1 \Rightarrow d = 1$ dir. $\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \epsilon \mathbb{Z}$ formundadır. Yani; $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \epsilon \mathbb{Z} \right\}$ dir. Böylece Γ_∞ $z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı ile üretilen sonsuz devirli bir gruptur. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ da herhangi bir noktanın sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.■

2.1.2. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Tanım 2.3. n pozitif bir tamsayı olmak üzere, Γ nın $\Gamma(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| a \equiv d \equiv 1\, modn,\ b \equiv\ c \equiv 0\, mod\, n \right\}$ alt grubuna temel kongrüans alt grubu adı verilir. Γ grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt grubunu içeren herhangi bir alt grubuna kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları

$\Gamma_1(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| a \equiv d \equiv 1\, modn, c \equiv 0\, mod\, n \right\}$

$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle|\ c \equiv 0\, mod\, n \right\}$

$\Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle|\ b \equiv 0\, mod\, n \right\}$

$\Gamma_0^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle|\ b \equiv c \equiv 0\, mod\, n \right\}$ gruplarıdır. Buradan kolaylıkla;

$\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0^0(n) \leq \Gamma^0(n) \leq \Gamma$ olduğu görülür [1].

Teorem 2.4.[1] $|\Gamma : \Gamma_0(n)| = \psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$.■

2.1.3. İmpirimitif Hareket

Tanım 2.5. G , X in bir transitif hareket grubu ise, (G,X) ikilisine bir transitif permütasyon grubu adı verilir.

Tanım 2.6. (G,X) bir transitif permütasyon grubu ve "≈" X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $\alpha,\ \beta \in X$ için $\alpha \approx \beta$ olduğunda, $\forall g \in G$ için, $g(\alpha) \approx g(\beta)$ oluyorsa ≈ denklik bağıntısına X üzerinde G invaryant denklik bağıntısı adı verilir. Bu bağıntının denklik sınıflarına da bloklar denir.

Burada, X üzerinde her durumda tanımlı olan iki tane G invaryant denklik bağıntısı vardır. Bunlar;

(i) Özdeşlik Bağıntısı : " $\forall \alpha,\beta \in X$ için $\alpha \approx \beta \ \Leftrightarrow\ \alpha = \beta$"

(ii) Evrensel Bağıntı : " $\forall \alpha,\beta \in X$ için $\alpha \approx \beta$"

bağıntılarıdır.

Eğer X üzerinde özdeşlik bağıntısından ve evrensel bağıntıdan farklı bir G invaryant denklik bağıntısı daha varsa G nin X üzerindeki hareketine imprimitif hareket, aksi halde primitif hareket denir.

Önerme 2.7.[14] (G,Ω) transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde; (G,Ω) primitiftir ⟺ Her $\alpha\epsilon\Omega$ için, $\alpha\epsilon\Omega$ noktasının sabitleyeni olan G_α G nin bir maksimal alt grubudur.■

Önerme 2.8. (G,Ω) transitif olsun. Bu takdirde; (G,Ω) imprimitiftir ⟺ $\exists\alpha\epsilon\Omega$ ve $H < G$ öyleki $G_\alpha \lneqq H \lneqq G$ dir.

İspat:

"⇒" Önerme 2.8.den aşikardır.

"⇐" $G_\alpha \lneqq H \lneqq G$ olsun. G, Ω üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden Ω kümesinin her elemanı bir $g\epsilon G$ için $g(\alpha)$ biçimindedir. Yani Ω:={$g(\alpha)$: $g\epsilon G$}=[α] biçimindedir (yani tek bir yörünge vardır.).Gerçekten; G, Ω üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden ∀ α,β ϵ Ω

için $\exists g\epsilon G$ öyleki $g(\alpha) = \beta$ dır. Yani, β ϵ [α] dır. Böylece Ω⊂[α] dır. (2.3)

[α]⊂Ω olduğu açıktır. Çünkü; s: $Gx\Omega \to \Omega$, $s(g,\alpha) \coloneqq g\alpha \coloneqq g(\alpha)$ dır. ⇒ $\forall g\epsilon G$ için

$g(\alpha)\epsilon\Omega$ dır. ⇒ [α]⊂Ω dır. (2.4)

(2.3) ve (2.4) ten Ω=[α]=$\{g(\alpha): g\epsilon G\}$ dir.

Ω üzerinde $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g'\epsilon gH$ ile tanımlanan "≈" bağıntısı iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısıdır. Gerçekten,

(i) $H < G$ olduğundan $e_G \epsilon H$ dır. $\forall g\epsilon G$ için $g = ge_G$ olduğundan $g\epsilon gH$ dır. $\Leftrightarrow$ $g(\alpha) \approx g(\alpha)$ dır.

(ii) $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g'\epsilon gH \Leftrightarrow g' = gh$ olan $h\epsilon H \exists$. $\xLongleftrightarrow{H<G\ ,h^{-1}\epsilon H}$ $g = g'h^{-1} \Leftrightarrow$ $g\epsilon g'H \Leftrightarrow g'(\alpha) \approx g(\alpha)$.

(iii) $g(\alpha) \approx g'(\alpha)$ ve $g'(\alpha) \approx g''(\alpha)$ olsun. $g(\alpha) \approx g''(\alpha)$ olduğunu göstermeliyiz. $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g'\epsilon gH \Leftrightarrow g' = gh$ olan $h\epsilon H \exists$.

$g'(\alpha) \approx g''(\alpha) \Leftrightarrow g''\epsilon g'H \Leftrightarrow g'' = g'h'$ olan $h'\epsilon H \exists$. $\xLongleftrightarrow{g'=gH}$ $g'' = ghh'$ $\xLongleftrightarrow{H<G.hh'\epsilon H}$ $g''\epsilon gH \Leftrightarrow g(\alpha) \approx g''(\alpha)$ dır.

(i),(ii),(iii) den "≈" bir denklik bağıntısıdır. Şimdi gösterelimki; "≈" G invaryanttır.

$g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g'\epsilon gH \xLongleftrightarrow{\forall m\epsilon G} mg'\epsilon mgH \Leftrightarrow mg(\alpha) \approx mg'(\alpha) \Leftrightarrow m\big(g(\alpha)\big) \approx m\big(g'(\alpha)\big)$ elde edilir.

Böylece "≈" nın iyi tanımlı bir G invaryant denklik bağıntısı olduğu gösterilmiş oldu.

"≈" nın ne özdeşlik bağıntısı ne de evrensel bağıntı olmadığını gösterelim.

Farzedelimki "≈" evrensel bağıntı olsun.

$H \lneqq G$ olduğundan $\exists g_0 \epsilon G$: $g_0 \notin H$ dır. "≈" evrensel bağıntı olduğundan $e(\alpha) \approx g_0(\alpha)$ dır. $\Rightarrow g_0 \epsilon eH = H$ dır. Bu çelişki bize "≈" nın bir evrensel bağıntı olamayacağını söyler.

Farzedelimki "≈" özdeşlik bağıntısı olsun.

Bu durumda; $g(\alpha) \approx g'(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) = g'(\alpha)$ dır. $\Leftrightarrow g^{-1}g(\alpha) = g^{-1}g'(\alpha) \Leftrightarrow g^{-1}g'\epsilon G_\alpha$ $\Leftrightarrow g'\epsilon gG_\alpha$ dır. $G_\alpha \lneqq H$ olduğundan $\exists h_0 \epsilon H$ öyleki $h_0 \notin G_\alpha$ dır. $\Rightarrow h_0(\alpha) \neq \alpha = e(\alpha)$ dır. Öte yandan $h_0 \epsilon eH = H$ olduğundan $e(\alpha) \approx h_0(\alpha)$ dır. Bu çelişki bize "≈" nın özdeşlik bağıntısı olamayacağını söyler.

Böylece G nin Ω üzerindeki hareketi imprimitiftir.

Not: $\beta\epsilon\Omega$ ise transitiflikten $\Omega = \{g(\alpha): g\epsilon G\}$ olduğundan $\beta = g(\alpha)$ olan bir $g\epsilon G$ vardır. Böylece β yı içeren [β] bloğu $[\beta] = \{gh(\alpha): h\epsilon H\}$ biçimindedir. Gerçekten; β yı içeren [β] bloğu, β nın denklik sınıfı olduğundan, $[\beta] = \{\gamma\epsilon\Omega: \gamma \approx \beta\}$ dır. γϵΩ ve $\Omega = \{g(\alpha): g\epsilon G\}$ olduğundan $\exists m\epsilon G$ öyleki $\gamma = m(\alpha)$ dır. γ≈β $\xLongleftrightarrow{simetri\text{ öz.}}$ β≈γ $\Leftrightarrow g(\alpha) \approx m(\alpha)$ $\Leftrightarrow m\epsilon gH \Leftrightarrow m = gh$ olan $h\epsilon H \exists \Leftrightarrow m(\alpha) = gh(\alpha) \Leftrightarrow \gamma = gh(\alpha)$ dır. $\Leftrightarrow [\beta] = \{gh(\alpha): h\epsilon H\} = gH\alpha$ olduğu görülür. Özel olarak α yı içeren [α] bloğu; $[\alpha] =$

$\{h(\alpha): h\epsilon H\} = H\alpha \coloneqq H(\alpha)$ yörüngesidir. Gerçekten; $[\alpha] = \{\theta\epsilon\Omega: \theta \approx \alpha\}$, $\theta\epsilon\Omega$ ve $\Omega = \{g(\alpha): g\epsilon G\}$ olduğundan $\exists h\epsilon G$ öyleki $\theta = h(\alpha)$ dır. $\theta\approx\alpha \xLeftrightarrow{simetri\text{ öz.}} \alpha \approx \theta \Leftrightarrow \alpha\approx h(\alpha)$ $\Leftrightarrow e(\alpha) \approx h(\alpha) \Leftrightarrow h\epsilon eH = H \Leftrightarrow \theta = h(\alpha), h\epsilon H \Leftrightarrow [\alpha] = \{h(\alpha): h\epsilon H\} = H(\alpha)$ dır. H nın G içindeki sol yan sınıflarının temsilcilerinin kümesi $\{l_i : i\epsilon I\}$ ile gösterilsin. Böylece (G, Ω) hareketinin blokları (denklik sınıfları) $l_i H(\alpha)$ $(i\epsilon I)$ lardır. Gerçekten; $\omega\epsilon\Omega$, $[\omega]$ bloğunu göz önüne alalım. G nin Ω üzerindeki hareketi transitif olduğundan $\omega = k(\alpha)$ olan $k\epsilon G\exists$. Böylece, $[\omega] = [k(\alpha)] = \{kh(\alpha): h\epsilon H\} = kH(\alpha)$ dan $k = l_t h_t$ olan $h_t \epsilon H \exists$. Dolayısı ile, $kH(\alpha) = l_t H(\alpha)$ dır. Böylece bloklar sol yan sınıflarından yalnız birine karşılık gelir.

$H < G$ ise $G = \cup_{i\epsilon I} l_i H$ olduğundan blokların sayısı sol yan sınıfların sayısına, yani H nın G deki $|I|$=$|G: H|$ indeksine eşittir.

G nin $\Omega / \approx$ $=\{[\beta]: \beta\epsilon\Omega\}$ denklik sınıfları üzerinde de bir hareketi vardır. Bu hareket; $\wedge: Gx\Omega / \approx \rightarrow \Omega / \approx$, $\wedge(g, [\beta]) = g\wedge[\beta] \coloneqq [g\beta]$ dır. "$\wedge$" nın $\Omega / \approx$ üzerinde bir grup hareketi olduğunu gösterelim:

(i) $g\wedge(h\wedge[\beta]) = g\wedge([h\beta]) = [gh\beta] = gh\wedge[\beta]$

(ii) $e\wedge[\beta] = [e\beta] = [\beta]$

(i) ve (ii) ile "$\wedge$" bir harekettir. Bu harekete G nin denklik sınıfları üzerindeki hareketi denir. $[\alpha]$ bloğunun sabitleyeni olan $G_{[\alpha]} = H$ dır. Gerçekten; $g\epsilon G_{[\alpha]} \Leftrightarrow g\wedge[\alpha] = [\alpha] \Leftrightarrow$ $[g\alpha]$=$[\alpha] \Leftrightarrow gH(\alpha)$=$H(\alpha) \Leftrightarrow g\epsilon H \Leftrightarrow G_{[\alpha]} = H$ olduğu görülür.

Şimdi burada G yerine Γ modüler grubu, Ω yerine $\widehat{\mathbb{Q}}$ alarak işlem yapacağız. Burada ∞ un sabitleyeni olan Γ_∞ , Γ modüler grubunun bir alt grubudur ve $\Gamma_\infty = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b\epsilon\mathbb{Z}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\rangle$ dir. $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ invaryant denklik bağıntısını aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

Biliyoruzki, $\Gamma_0(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\Gamma : c \equiv 0 \; mod n\right\}$ kongruans alt grubu alındığında $\forall n\epsilon\mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $n > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < \Gamma$ dır. Böylece Γ , $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder. $v = \frac{r}{s}$, $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere, $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olan $g, g'\epsilon\Gamma$ vardır. Böylece, $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}$ ve $g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ formundadılar. $v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g'\epsilon \quad H = \Gamma_0(n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \epsilon\, H = \Gamma_0(n) \Leftrightarrow$ $ry - sx \equiv 0 \; mod n$ dir. Böylece, $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \; mod n$ dir.

- İmprimitifliğin genel tartışması ile, " $\approx_n$ " altındaki denklik sınıflarının sayısı $\psi(n) = |\Gamma : \Gamma_0(n)|$ dir.

Lemma 2.9.[1] $p \epsilon \mathbb{P}$, $\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ dir.■

2.1.4. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde, G $\Omega \times \Omega$ üzerinde $g: (\alpha, \beta) \to (g(\alpha), g(\beta))$ ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir ve (α, β) yı içeren alt yörünge $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. $O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden bir $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafını aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

- Köşeleri Ω nın elemanları ve
- $(\gamma, \delta) \epsilon\, O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya yönlendirilmiş bir kenar vardır denir ve $\gamma \to \delta$ ile gösterilir.

Açık olarak, $O(\beta, \alpha)$ da bir alt yörüngedir ve $O(\alpha, \beta)$ ile $O(\beta, \alpha)$ alt yörüngeleri ya eşittir ya da ayrıktırlar. Eğer bu alt yörüngeler ayrık iseler $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ alt yörüngesel grafı $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafının sadece ters yönlendirilmişidir ve bu durumda $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ ile $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Eğer $O(\alpha, \beta)$ ile $O(\beta, \alpha)$ alt yörüngeleri eşit iseler bu durumda $\mathcal{G}(\alpha, \beta) = \mathcal{G}(\beta, \alpha)$ alt yörüngesel grafı çift taraflı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Bu durumda bu alt yörüngesel grafa kendi eşleşmiştir denir.

Önerme 2.10. $\mathcal{G}$ bir (G, Ω) transitif permütasyon grubu için bir alt yörüngesel graf olsun. Bu takdirde;

(i) G, $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket eder.

(ii) G, $\mathcal{G}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

(iii) $\mathcal{G}$ kendi eşleşmiş bir graf ise; G, $\mathcal{G}$ nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder.

(iv) G, $\mathcal{G}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat: $g \epsilon G$ keyfi olmak üzere;

(i) $L_g : \mathcal{G}(\alpha, \beta) \to \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, $L_g(x \to y) := g(x) \to g(y)$, $g \epsilon G$ dönüşümünün bir otomorfizma (birebir, örten, yapı koruyan dönüşüm) olduğunu gösterirsek G grubunun $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket ettiğini göstermiş oluruz.

Yapı Koruma:

$x \to y$ $\mathcal{G}$ de bir kenar olsun. $(x,y)\epsilon O(\alpha,\beta)$ dır. $O(\alpha,\beta) = \{g(\alpha,\beta) : g\epsilon G\}$ olduğundan $\exists h\epsilon G$ öyleki $(x,y) = h(\alpha,\beta)$ dır. Böylece $g\epsilon G$ olmak üzere $g(x,y) = g\big(h(\alpha,\beta)\big) = gh(\alpha,\beta)$ ve böylece $gh(\alpha,\beta) = g(x,y) = (g(x), g(y))$; yani, $g(x) \to g(y)$ $\mathcal{G}$ de bir kenardır. Dolayısıyla L_g dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür. (Burada $x \to y$ $\mathcal{G}$ de bir kenar yerine kısaca $x \to y \in \mathcal{G}$ yazacağız.)

Birebirlik:

$x \to y,\ a \to b\ \epsilon\mathcal{G}$ kenarları için $L_g(x \to y) = L_g(a \to b)$ olsun. Buradan; $g(x) \to g(y) = g(a) \to g(b) \xRightarrow{G\ grup\ old. g^{-1}\epsilon G \exists} g^{-1}g(x) \to g^{-1}g(y) = g^{-1}g(a) \to g^{-1}g(b)$ elde edilir. Böylece; $x \to y = a \to b$ dir. Yani, L_g birebirdir.

Örtenlik:

$\forall x \to y\epsilon\mathcal{G}$ kenarı için $g^{-1}(x) \to g^{-1}(y)\epsilon\mathcal{G}$ kenarı vardır öyleki

$L_g\big(g^{-1}(x) \to g^{-1}(y)\big) = g\big(g^{-1}(x)\big) \to g\big(g^{-1}(y)\big) = x \to y$ dir. Dolayısı ile L_g örten bir dönüşümdür.

Böylece G grubunun $\mathcal{G}$ nin otomorfizmalarının bir grubu olarak hareket ettiği gösterilmiş oldu.

(ii) (G,Ω) bir transitif permütasyon grubu olduğundan aşikardır.

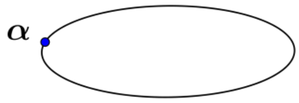
(iii) $\mathcal{G}$ kendi eşleşmiş olsun. Bu durumda $O(\alpha,\beta) = O(\beta,\alpha)$ dır.

x ile y ardışık köşeler ise (x,y) veya $(y,x)\epsilon O(\alpha,\beta)$ dır.

Dolayısı ile; x ile y ve a ile b ardışık köşeler ise $(x,y)\epsilon O(\alpha,\beta)$ ve $(a,b)\epsilon O(\alpha,\beta)$ olduğunu farzedebiliriz. $O(\alpha,\beta) = \{g(x,y) : g\epsilon G\}$ olduğundan $\exists g_1, g_2\epsilon G$ öyleki $(x,y) = g_1(\alpha,\beta)$ ve $(a,b) = g_2(\alpha,\beta)$ dır. Böylece; $g_1^{-1}(x,y) = (\alpha,\beta)$, yani $(a,b) = g_2 g_1^{-1}(x,y)$ ve G grup olduğundan $h := g_2 g_1^{-1}\epsilon G$ dir. Böylece G nin $\mathcal{G}$ grafının ardışık köşeleri üzerinde transitif olarak hareket ettiği gösterilmiş oldu.

(iv) $x \to y$ ve $a \to b$ $\mathcal{G}(\alpha,\beta)$ da iki kenar olsun. Bu takdirde, $(x,y)\epsilon O(\alpha,\beta)$ ve $(a,b)\epsilon O(\alpha,\beta)$ olduğundan $T_1(\alpha,\beta) = (x,y)$ ve $T_2(\alpha,\beta) = (a,b)$ olan $T_1, T_2\epsilon G$ vardır. Buradan $T_1^{-1}(x,y) = T_2^{-1}(a,b)$ dir. Böylece, $T_2 \circ T_1^{-1}(x,y) = (a,b)$ elde edilir. Bu da bize G nin $\mathcal{G}$ alt yörüngesel grafının kenarları üzerinde transitif olarak hareket ettiğini söyler.

Örnek 2.11. $O(\alpha,\alpha) = \{(\gamma,\gamma) : \gamma\epsilon\Omega\}$ $\Omega x\Omega$ nın köşegenidir. Buna karşılık gelenş, trivial graf diye adlandırılan, $\mathcal{G}(\alpha,\alpha)$ grafı kendi eşleşmiştir: Her bir $\gamma\epsilon\Omega$ köşesine bağlı olan bir düğümden oluşur. Biz genel olarak trivial olmayan altyörüngesel graflarla ilgileneceğiz.



Şekil 5. Düğüm

Şimdi Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi ile oluşan altyörüngesel grafları inceleyelim: Γ $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $v\widehat{\epsilon\mathbb{Q}}$ olmak üzere $g(\alpha,\beta)=(\infty,v)$ olan bir $g\epsilon G$ vardır. Dolayısıyla her bir $O(\alpha,\beta)$ alt yörüngesi bir (∞,v) çifti içerir. Yörüngeler ya eşit ya da ayrık olduklarından $O(\alpha,\beta)$ ile $O(\infty,v)$ aynı yörüngeyi temsil eder. Yani $O(\alpha,\beta)=O(\infty,v)$ dir. $v\epsilon\widehat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $v=\frac{u}{n}$, $n\geq 0$, $(u,n)=1$ biçimindedir. $O(\infty,v)=O(\infty,\frac{u}{n})$ alt yörüngesini $O(u,n)$ ile ve buna karşılık gelen altyörüngesel grafı da $\mathcal{G}(u,n)$ ile göstereceğiz. $v=\infty=\frac{1}{0}=\frac{-1}{0}$ olduğu durumda $\mathcal{G}_{1,0}=\mathcal{G}_{-1,0}$ trivial alt yörüngesel grafı elde edilir. Biz trivial olmayan alt yörüngesel grafları incelemek istediğimiz için $v\epsilon\mathbb{Q}$ varsayalım.

Teorem 2.12. $v,v'\epsilon\mathbb{Q}$ olmak üzere; $O(\infty,v)=o(\infty,v')\Leftrightarrow v$ ve v' Γ_∞ un aynı yörüngesindedir. (Yani; $\exists g\epsilon\Gamma_\infty$ öyleki $g(v)=v'$ dür.)

İspat: $O(\infty,v)=O(\infty,v')$ olsun. $(\infty,v')\epsilon O(\infty,v')=O(\infty,v)=\{g(\infty,v):g\epsilon\Gamma\}$ olduğundan $\exists g\epsilon\Gamma$ öyleki $g(\infty,v)=(\infty,v')$ dür. Böylece; $\big(g(\infty),g(v)\big)=(\infty,v')$. $g(\infty)=\infty$ ve $g(v)=v'$ olduğundan $g=\mp\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k\epsilon\mathbb{Z}$, şeklindedir. Dolayısı ile $g\epsilon\Gamma_\infty$ dur. Yani; v ve v' Γ_∞ un aynı yörüngesindedir.

Tersine;

$v,v'\epsilon\mathbb{Q}$ Γ_∞ un aynı yörüngesinde olsunlar. Dolayısı ile; $\exists g\epsilon\Gamma_\infty$ öyleki $g(v)=v'$ dür ve $g\epsilon\Gamma_\infty$ olduğundan $g(\infty)=\infty$ dur. Böylece; $g(\infty,v)=(\infty,v')$ olan $g\epsilon\Gamma_\infty\subset\Gamma$ bulunur. Yani; $O(\infty,v)=O(\infty,v')$ dür.■

Not: $v,v'\epsilon\mathbb{Q}$ olduğundan $v=\frac{u}{n}$, $n>0$, $(u,n)=1$ ve $v'=\frac{u'}{n'}$, $n'>0$, (u',n')=1 ve $g\epsilon\Gamma_\infty=\langle\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rangle=\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}:b\epsilon\mathbb{Z}\}$ olduğundan $g=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $k\epsilon\mathbb{Z}$ formundadır. $g(v)=v'\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}u+kn\\ n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u'\\ n'\end{pmatrix}\Rightarrow u+kn=u'$ ve $n=n'$. Yani; $u\equiv u'\,mod n$ ve $n=n'$ dür. Böylece kolaylıkla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.13. $O\left(\infty,\frac{u}{n}\right)=O\left(\infty,\frac{u'}{v'}\right)\Leftrightarrow n=n'$ ve $u\equiv u'\,mod n$ dir. ■

Dolayısı ile; $O(\infty,\frac{u}{n})$ ve $O(\infty,\frac{u'}{n'})$ alt yörüngelerine karşılık gelen $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $\mathcal{G}_{u',n'}$ alt yörüngesel grafları için de; $\mathcal{G}_{u,n}=\mathcal{G}_{u',n'} \iff n=n'$ ve $u\equiv u'\ mod n, \forall n>1$ dir.

Gösterim: $\varphi(n)$ n den küçük veya eşit n ile aralarında asal olan pozitif sayıların sayısını ve U_n de ilgili sayıların kümesini göstersin. [9] dan $\varphi(n)=n\prod_{\substack{p|n\\ p\in\mathbb{P}}}(1-\frac{1}{p})$ dir.

Sonuç 2.14. $\forall u\epsilon U_n$ için $\varphi(n)$ (φ Euler fonksiyonu) tane farklı $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafı vardır.■

Gösterim: $\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)\epsilon O_{u,n}$ olmasını $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}$ ile göstereceğiz. Bazen bu durumu $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}\in\mathcal{G}_{u,n}$ ile de gösterebileceğiz.

Teorem 2.15. $\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}\,\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenardır $\iff$

(a) $x\equiv ur\ modn, y\equiv us\ modn, ry-sx=n$ veya

(b) $x\equiv -ur\ modn, y\equiv -us\ modn$ ve $ry-sx=-n$.

İspat:

"$\Rightarrow$"

$\frac{r}{s}\to\frac{x}{y}\,\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olsun. Bu bize $\left(\frac{r}{s},\frac{x}{y}\right)\epsilon O_{u,n}$ dir. Dolayısı ile $\exists g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\epsilon\Gamma$: $g(\infty)=\frac{r}{s}$ ve $g\left(\frac{u}{n}\right)=\frac{x}{y}$ dir. Bu bize;

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & x\\ s & y\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r & -x\\ -s & -y\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r & x\\ -s & y\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & -x\\ s & -y\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

matris eşitliklerinden birini verir.

(2.5) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix}$ eşitliğinden $a = r$, $c = s$, $au + bn = x$, $cu + dn = y$ $\Rightarrow$ $ru + bn = x$ ve $su + dn = y$ $\Rightarrow$ $x \equiv ur\, modn$ ve $y \equiv us\, modn$ elde edilir ve (2.5) eşitliğinde iki tarafın determinantı alınırsa $(ad - bc).n = ry - sx \xRightarrow{ad-bc=1} ry - sx = n$ elde edilir. Benzer şekilde (2.6) eşitliğinden de $x \equiv ur\, modn$, $y \equiv us\, modn$ ve $ry - sx = n$ elde edilir. (2.7) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \Rightarrow a = -r, c = -s, au + bn = x, cu + dn = y \Rightarrow$

$-ru + bn = x$ ve $-su + dn = y$ $\Rightarrow$ $x \equiv -ur\, modn$ ve $y \equiv -us\, modn$ elde edilir ve (2.7) eşitliğinde iki tarafın determinantı alınırsa $(ad - bc).(-n) = ry - sx \xRightarrow{ad-bc=1}$ $ry - sx = -n$ elde edilir. Benzer şekilde (2.8) eşitliğinden de $x \equiv -ur\, modn$, $y \equiv -us\, modn$ ve $ry - sx = -n$ elde edilir. Böylece bu dört durumdan gördükki ya (a) ya da (b) sağlanır.

" $\Leftarrow$ "

Farzedelimki (a) sağlansın yani $x \equiv ur\, modn$, $y \equiv us\, modn$ ve $ry - sx = n$ olsun. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğunu yani $(\frac{r}{s}, \frac{x}{y})\ \epsilon\ O_{u,n}$ olduğunu gösterelim.

$x \equiv ur\, modn \Rightarrow \exists b\epsilon\mathbb{Z} : x = ur + bn$ ve

$y \equiv us\, modn \Rightarrow \exists c\epsilon\mathbb{Z} : y = us + cn$ dir.

Şimdi; $g = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}$ matrisinin Γ nın elemanı olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$g(\infty) = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, $g\left(\frac{u}{n}\right) = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru+bn \\ su+cn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ve $ry - sx = n$ olduğundan $ry - sx = r(us + cn) - s(ur + bn) = n \Rightarrow rus + rcn - sur - sbn = n \Rightarrow$ $rcn - sbn = n \Rightarrow rc - sb = 1 \Rightarrow det\begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow g = \begin{pmatrix} r & b \\ s & c \end{pmatrix} \epsilon\ \Gamma$ elde edilir.

Benzer şekilde (b) nin sağlandığı varsayılıp $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğu elde edilir.■

Sonuç 2.16. $u^2 \not\equiv -1\, modn$ ve $uv \equiv -1\, modn$ olsun. Bu takdirde; $\mathcal{G}_{u,n}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

İspat:

$\frac{x}{y} \rightarrow \frac{r}{s}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olsun. Teorem 2.19 dan

(a) $r \equiv ux\, modn, s \equiv uy\, modn, xs - ry = n$ veya

(b) $r \equiv -ux\ modn$, $s \equiv -uy\ modn$, $xs - ry = -n$ dir.

(a) nin sağlandığını varsayalım.

- $r \equiv ux\ modn$ olduğundan $vr \equiv vux\ modn \xRightarrow{uv\equiv -1\ modn} vr \equiv -x\ modn$. Yani; $x \equiv -vr\ modn$ elde edilir. (2.9)

- $s \equiv uy\ modn$ olduğundan $vs \equiv vuy\ modn$ dir. $\xRightarrow{uv\equiv -1\ modn}$ $vs \equiv -y\ modn$. Yani; $y \equiv -vs\ modn$ elde edilir. (2.10)

- $sx - ry = n \Rightarrow ry - sx = -n$ (2.11)

(2.9), (2.10) ve (2.11) den $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{v,n}$ de bir kenardır.

Benzer şekilde (b) nin sağlandığı varsayılarak $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{v,n}$ de bir kenar olduğu gösterilir.

Şimdi gösterelim ki $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) = \varnothing$ tur.

Varsayalım ki $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O(\frac{u}{n}, \infty)$ (alt yörüngeler ya eşit ya da ayrıktırlar.) dur. Dolayısı ile; $\exists g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \Gamma$ öyleki $g\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = (\frac{u}{n}, \infty)$ dur. Buradan; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ eşitliğinden $\begin{pmatrix} a & au+bn \\ c & cu+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece, $a = u$, $c = n$, $au + bn = -1$, $cu + dn = 0$ dır.

$cu + dn = 0 \xRightarrow{c=n} nu + dn = 0 \Rightarrow n(u + d) = 0 \xRightarrow{n\neq 0} u + d = 0 \Rightarrow d = -u$. Böylece, $g = \begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix}$ elde edilir ve $g\epsilon\Gamma$ olduğundan $det\begin{pmatrix} u & b \\ n & -u \end{pmatrix}$=1 dir. Buradan, $-u^2 - bn = 1 \Rightarrow u^2 = -1 - bn \Rightarrow u^2 \equiv -1\ modn$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) \neq \varnothing$ olduğunu varsaymaktan geldi. O halde $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) = \varnothing$ tur. Sonuç olarak $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $\mathcal{G}_{v,n}$ alt yörüngesel grafları eşleşmiştir.

Sonuç 2.17. $\mathcal{G}_{u,n}$ kendi eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1\ modn$ dir. ■

Tanım2.18. $\mathbb{U} \cup \overline{\mathbb{R}}$ de sonlu tane hiperbolik doğrunun birleşimine bir geodezik yol adı verilir.

Tanım2.19. $B \subset \widehat{\mathbb{Q}}$ kümesinin herhangi iki elemanı bir geodezik yolla bağlanabilir ise B ye (graf anlamında) bağlantılıdır denir.

Tanım 2.20. $B \subset \widehat{\mathbb{Q}}$ kümesine $\widehat{\mathbb{Q}}$ da bir bileşen (veya bağlantılı bileşen) adı verilir:⇔B nin herhangi iki elemanı bir geodezik yolla bağlanabilir ve B nin dışında hiçbir nokta B de bir noktaya bağlanamaz.

Daha önce; $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde $\forall n \geq 1$ için $\frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0\ modn$ ile verilen bir Γ invaryant denklik bağıntısı olduğunu göstermiştik. Teorem 2.15 e göre $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar ise $ry - sn = \mp n$ dir. Dolayısıyla $ry - sx \equiv 0\ modn$ dir. Bu da $\frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ olduğunu söyler. Böylece; $\mathcal{G}_{u,n}$ nin her bir bağlantılı bileşeni, $\approx_n$ denklik bağıntısı için, bir tek blokta bulunur.

Sonuç 2.21. $\mathcal{G}_{u,n}$ nin en az $\Psi(n)$ tane bağlantılı bileşeni vardır. Özellikle de $n > 1$ ise $\mathcal{G}_{u,n}$ bağlantılı değildir.

İspat: $\mathcal{G}_{u,n}$ nin her bir bağlantılı bileşeni, $\approx_n$ denklik bağıntısı için, bir tek blokta bulunur ve " $\approx_n$ " altındaki denklik sınıflarının sayısı $\psi(n)$ tanedir. $n > 1$ için $\psi(n) > 1$ olacağından $\mathcal{G}_{u,n}$ bağlantılı değildir.■

2.1.5. Farey Grafı

$\mathcal{G}_{1,1}$ köşeleri $\widehat{\mathbb{Q}}$ olan bir alt yörüngesel graftır. Burada $\mathcal{G}_{u,n} = \mathcal{G}_{1,1}$ olduğundan $u = n = 1$ dir ve Sonuç 2.17 gereği ($1^2 \equiv -1\ mod1$ olduğundan) $\mathcal{G}_{1,1}$ kendi eşleşmiştir. Bu yüzden $\mathcal{G}_{1,1}$ i yönlendirilmemiş bir graf olarak düşünebiliriz. Teorem 2.15 ile $\frac{r}{s}$ ile $\frac{x}{y}$ ardışık köşelerdir $\Leftrightarrow ry - sx = \mp 1\ \ (n = 1)$ dir. Örneğin ∞ ile ardışık olan köşeler tamsayılardır. Gerçekten;

$\frac{r}{s}, \infty = \frac{1}{0}$ ardışık köşeler olsun. $\Rightarrow r.0 - s.1 = \mp 1 \Rightarrow s = \pm 1 \Rightarrow \frac{r}{s} = \pm r \epsilon \mathbb{Z}$ dir.

$\mathcal{G}_{1,1}$ alt yörüngesel grafına Farey dizileriyle olan bağlantısından ötürü “Farey grafı” diyeceğiz ve F ile göstereceğiz. $\forall m \geq 1$ için F_m Farey dizisi, terimleri artan sırada düzenlendiğinde, $|y| \leq m$ olan $\frac{x}{y} \epsilon \mathbb{Q}$ elemanlarından oluşur. Örneğin F_4 ; $\dots, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \dots$ dır. Açıkça görülürki $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ ve $\bigcup_{m \geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dur. Gerçekten;

(i) $i, j \epsilon \mathbb{N}$, $i < j$ olmak üzere; $F_i \subset F_j$ olduğunu gösterelim:

$\frac{a}{b} \epsilon F_i$ olsun. $\Rightarrow |b| \leq i < j \Rightarrow \frac{a}{b} \epsilon F_j \Rightarrow F_i \subset F_j$ elde edilir.

(ii) $\bigcup_{m\geq 1} F_m \subset \mathbb{Q}$ olduğu aşikardır. (2.12)

Şimdi $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m$ olduğunu gösterelim:

$\frac{p}{q} \epsilon \mathbb{Q}$ olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üstten sınırlı olmadığından $\exists m \epsilon \mathbb{N}$ öyleki $|q| \leq m$ dir. Dolayısı ile; $\frac{p}{q} \epsilon F_m$ dir. Böylece; $\frac{p}{q} \epsilon \bigcup_{m\geq 1} F_m$ elde edilir. Yani;

$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m$ dir. (2.13)

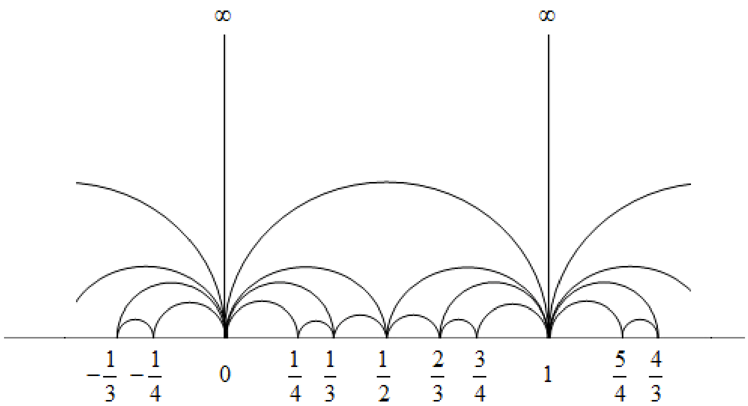
(2.12) ve (2.13) ten $\bigcup_{m\geq 1} F_m = \mathbb{Q}$ dur.

Lemma 2.22.[14] $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y} \epsilon \mathbb{Q}$ indirgenmiş rasyonel sayılar olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F de ardışık köşelerdir.

(ii) $ry - sx = \mp 1$ dir.

(iii) Bir $m \epsilon \mathbb{N}$ için $\frac{r}{s}$ ve $\frac{x}{y}$ F_m de ardışık köşelerdir.■



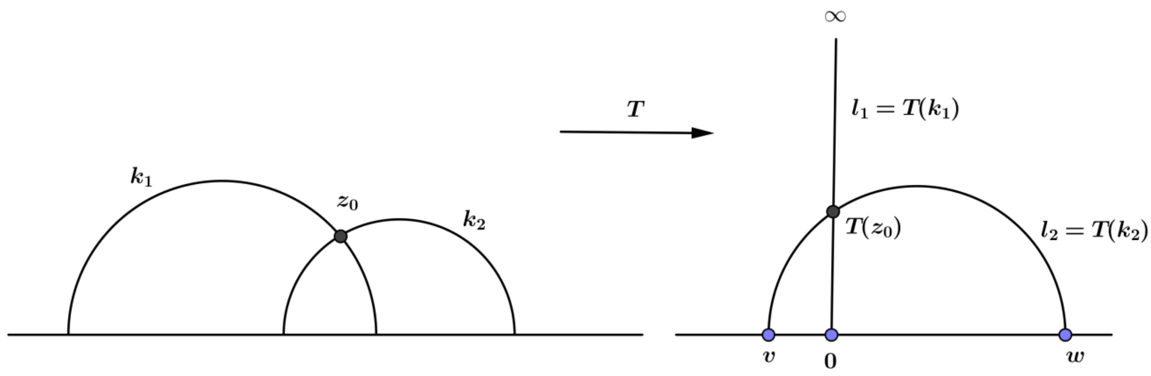
Şekil 6. Farey grafı

Şekil 6 daki rasyonel sayılar F_4 ün elemanlarıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki Şekil 6 periyodiktir ve periyodu 1 dir.

F nin kenarlarını $\mathbb{U} = \{z \epsilon \mathbb{C} : Imz > 0\}$ üst yarı düzleme dik hiperbolik geodezikler, yani yarı Öklid çemberleri veya $\mathbb{R}$ ye dik yarı doğrular olarak göz önüne alıyoruz.

Sonuç 2.23. F nin kenarları $\mathbb{U}$ da kesişmezler.

İspat:



Şekil 7. T dönüşümü

F nin iki kenarının $\mathbb{U}$ da kesiştiğini varsayalım. $F = \mathcal{G}_{1,1}$ kendi eşleşmiş bir alt yörüngesel graf olduğundan Önerme 2.10 (iii) gereği Γ, F nin ardışık köşelerinin sıralı çiftleri üzerinde transitif olarak hareket eder. Dolayısı ile; $\infty \to 0$ kenarını l_1 ile gösterirsek, transitiflikten $T(k_1) = l_1$ olan $T \epsilon \Gamma$ vardır. $T(k_2) = l_2$ şekildeki gibidir. Bu yüzden üst yarı düzlemde kesiştiğini varsaydığımız bu kenarlardan birinin 0 ve ∞ u birleştiren $Rez = 0$ kenarı olduğunu varsayabiliriz. Böylece bu kenarlardan diğeri $v < 0 < w$ olacak şekilde v ve w rasyonellerinin birleşmesiyle oluşan kenar olmalıdır.
$v = \frac{r}{s}$, $r < 0$, $s > 0$ ve $w = \frac{x}{y}$, $x > 0$, $y > 0$ indirgenmiş formunda yazılabilirler.

$$\left.\begin{matrix} r < 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ry < 0 \text{ ve } r, y \epsilon \mathbb{Z} \text{ olduğundan } ry \leq -1 \text{ dir.} \tag{2.14}$$

$$\left.\begin{matrix} s > 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow sx > 0 \text{ ve } s, x \epsilon \mathbb{Z} \text{ olduğundan } sx \geq 1 \Rightarrow -sx \leq -1 \text{ dir.} \tag{2.15}$$

(2.14) ve (2.15) eşitsizlikleri toplanırsa $ry - sx \leq -2$ elde ederiz. Oysaki Lemma 2.22 (ii) gereği $ry - sx = \mp 1$ olmalı idi. Bu çelişki F nin herhangi iki kenarının $\mathbb{U}$ üst yarı düzleminde kesiştiğini varsaymaktan geldi. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır, F nin kenarları $\mathbb{U}$ da kesişmezler.■

2.1.6. $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $F_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $F=\mathcal{G}_{1,1}$ Farey grafının özelliklerini diğer $\mathcal{G}_{u,n}$ altyörüngesel graflarına nasıl genişletebileceğimizi göreceğiz.

Sonuç 2.21 un öncesindeki açıklamamızda gördüğümüz gibi $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}\in\mathcal{G}_{u,n}\Leftrightarrow ry-sx=\mp n\Leftrightarrow ry-sx\equiv 0\ modn\Leftrightarrow\frac{r}{s}\approx_n\frac{x}{y}$ dir ve her bir $\mathcal{G}_{u,n}$ $\Psi(n)$ tane alt grafın ayrık birleşiminden oluşur. Bu, $\approx_n$ Γ invaryant denklik bağıntısına göre, her bir alt grafın köşeleri bir tek blok oluşturur. Blokların kümesini $B=\{B_1,B_2,\dots,B_{\Psi(n)}\}$ ile gösterirsek, $(\Gamma,\widehat{\mathbb{Q}})$ transitif permütasyon grubu ve $\widehat{\mathbb{Q}}=\bigcup_{i\epsilon\{1,2,\dots,\Psi(n)\}}B_i$ olduğundan, Γ bu blokları transitif olarak permüte eder. Bu da alt yörüngelerin her birinin birbirleriyle izomorf oldukları anlamına gelir. $\mathcal{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren $[\infty]=\left\{\frac{x}{y}:\frac{x}{y}\approx\frac{1}{0}\right\}=\{\frac{x}{y}:y\equiv 0\ modn\}$ bloğunda olan alt grafını $F_{u,n}$ ile gösterelim. Dolayısı ile; $\mathcal{G}_{u,n}$, $F_{u,n}$ nin $\Psi(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur. Teorem2.15 ten,

Teorem 2.24. $\frac{r}{s}\rightarrow\frac{x}{y}$ $F_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

(a) $x\equiv ur\ modn$ ve $ry-sx=n$ veya

(b) $x\equiv -ur\ modn$ ve $ry-sx=-n$.■

Teorem 2.25. $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin köşelerini ve kenarlarını transitif olarak permüte eder.

İspat: İlk önce $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin köşelerini transitif olarak permüte ettiğini gösterelim:

$F_{u,n}$ nin köşeleri ∞ u içeren $[\infty]=\left\{\frac{x}{y}\epsilon\widehat{\mathbb{Q}}:y\equiv 0\ modn\right\}$ bloğunun elemanları olduğundan $v,w\epsilon[\infty]$ $F_{u,n}$ grafının iki köşesi ve $v=\frac{a_1}{b_1 n}$ ve $w=\frac{a_2}{b_2 n}$ olsun. Γ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitif olduğundan $\exists T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\epsilon\Gamma$ öyleki $w=T(v)$ dir. Böylece; $\begin{pmatrix}a_2\\ b_2 n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ b_1 n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa_1+bb_1 n\\ ca_1+db_1 n\end{pmatrix}$. Buradan $a_2=aa_1+bb_1 n$ ve $b_2 n=ca_1+db_1 n$. Böylece; $ca_1=b_2 n-db_1 n=(b_2-db_1)n$. Dolayısı ile; $n\mid ca_1\xRightarrow{(a_1,n)=1} n\mid c$. Yani, $T\epsilon\Gamma_0(n)$ dir. Böylece $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket eder. $T:[\infty]\rightarrow[\infty]$ dönüşümü, $\Gamma_0(n)\subset\Gamma$ nın elemanı olduğundan, birebir örten bir dönüşümdür dolayısıyla T köşeler üzerinde bir permütasyondur.

Şimdi gösterelim ki $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte eder.

$x_1 \to y_1$ ve $x_2 \to y_2$ $F_{u,n}$ de iki kenar olsunlar. Önerme 2.10 (iv) den Γ $F_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $\exists S = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \epsilon \Gamma$ öyleki $S(x_1 \to y_1) = S(x_2 \to y_2)$ dir. Yani; $S(x_1) \to S(y_1) = S(x_2) \to S(y_2)$. böylece; $S(x_1) = S(x_2)$ ve $S(y_1) = S(y_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 n \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 n \end{pmatrix}$ buradan;

(i) $\begin{pmatrix} pp_1 + rq_1 n \\ qp_1 + sq_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pr_2 + rq_2 n \\ qp_2 + sq_2 n \end{pmatrix}$ ve

(ii) $\begin{pmatrix} pr_1 + rs_1 n \\ qr_1 + ss_1 n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pr_2 + rs_2 n \\ qr_2 + ss_2 n \end{pmatrix}$ dir.

(ii) den $qr_1 + ss_1 n = qr_2 + ss_2 n \Rightarrow qr_1 - qr_2 = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow q(r_1 - r_2) = (ss_2 - ss_1)n \Rightarrow n \mid q(r_1 - r_2) \xRightarrow{n \nmid (r_1 - r_2)} n \mid q$ elde edilir. Bu da bize $S \epsilon \Gamma_0(n)$ olduğunu söyler. Böylece $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket eder. $F_{u,n}$ nin kenarlarının kümesi K ile gösterilirse $S: K \to K$ dır ve $S \epsilon \Gamma_0(n) \subset \Gamma$ olduğundan birebir örten bir dönüşümdür yani S bir permütasyondur. Böylece; $\Gamma_0(n)$ nin $F_{u,n}$ nin kenarlarını transitif olarak permüte ettiği gösterilmiş oldu.

Graflar göz önüne alındığında $F_{1,1} = \mathcal{G}_{1,1} = F$ Farey grafı en basit graftır. Sonraki en basit graf $\mathcal{G}_{1,2}$ grafıdır. Bu graf köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan $F_{u,n}$ grafının $\Psi(2) = 3$ tane izomorfik kopyasından oluşur. Bunlar köşeleri;

$[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv 0 \; mod2\right\} = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: x \; tek, y \; çift\right\}$

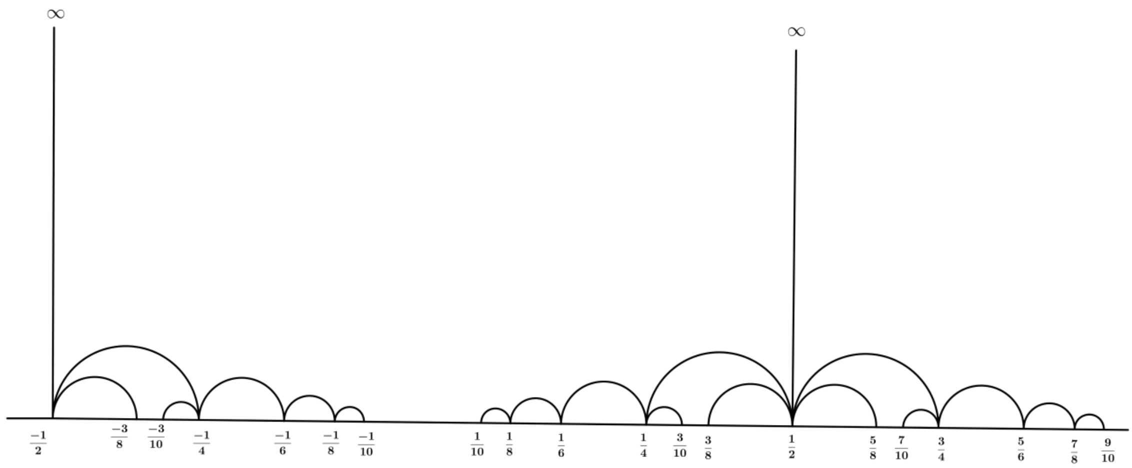
$[0] = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: \frac{0}{1} \approx \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: x \equiv 0 \; mod2\right\} = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: x \; çift, y \; tek\right\}$

$[1] = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: \frac{1}{1} \approx \frac{x}{y}\} = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y - x \equiv 0 \; mod2\right\}$

$= \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: y \equiv x \; mod2\} = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}: x \; ve \; y \; tek\right\}$

biçiminde olan graflardır.

$\mathcal{G}_{1,2}$ grafı için $n = 2$ olduğundan $u^2 \equiv \mp 1 \; mod2$ dir. Böylece Sonuç 2.17 den $\mathcal{G}_{1,2}$ kendi eşleşmiş bir graftır ve dolayısıyla bunun bir alt grafı olan $F_{1,2}$ de kendi eşleşmiştir. Bu da bize $\mathcal{G}_{1,2}$ ve $F_{1,2}$ graflarının yönlendirilmemiş alt yörüngesel graflar olduğunu söyler.



Şekil 8. $F_{1,2}$ Grafı

Şekil 8 de gösterilen bu grafın köşeleri, $[\infty]$ bloğunda oldukları için, s çift olmak üzere; $\frac{r}{s}$ indirgenmiş formdadırlar. Teorem 2.27 den $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}\ \epsilon F_{u,n} \Leftrightarrow ry - sx = \mp 2$ dir.

Lemma 2.26.

(i) $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $F_{u,n} \to F_{-u,n}$ ye $T(v) = -v$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

(ii) Eğer $m \mid n$ ise $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ nin bir alt grafına $T(v) = {nv}/{m}$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

İspat:

(i) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod n\}$ ve $F_{-u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_{-n} = \left\{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod(-n)\right\} = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod n\}$ olduğundan $[\infty]_n = [\infty]_{-n} \coloneqq [\infty]$ dur. $T(v) = -v$ fonksiyonunun $[\infty]$ uzerinde birebir örten olduğu açıktır. Şimdi T dönüşümünün yapı koruyan olduğunu gösterelim.

$\frac{a}{bn} \to \frac{c}{dn} \epsilon F_{u,n}$ olsun. Teorem 2.24 (i) veya (ii) sağlanır. Farzedelimki teoremin (i) şıkkı sağlansın. Bu durumda, $c \equiv ua\ mod n$ ve $ad - bc = 1$ dir. Böylece, $(-c) \equiv u(-a) mod n \equiv -(-u)(-a) mod n$ ve $(-a)d - (-b)c = -1$ dir. Dolayısı ile, Teorem 2.22 (ii) ye göre $\Rightarrow \frac{-a}{bn} \to \frac{-c}{dn} \epsilon F_{-u,n}$ dir. Benzer şekilde Teorem 2.24 ün (ii) şıkkının sağlandığı varsayılıp Teorem 2.24 (i) ye göre $\frac{-a}{bn} \to \frac{-c}{dn} \epsilon F_{-u,n}$ olduğu gösterilebilir. Böylece T birebir ve örten ve yapı koruyan bir dönüşümdür yani T bir izomorfizmadır.

(ii) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod n\}$ ve $F_{u,m}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_m = \{\frac{x}{y} \epsilon \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0\ mod m\}$ dir. T: $[\infty]_n \to [\infty]_m$, $T(v) = {}^{nv}/_{m}$ dönüşümünün birebir olduğu açıktır (Bu dönüşümün örten olması gerekmez çünkü; $m = 5$ ve $5 \mid 20$ olduğundan $n = 20$ için $\frac{2}{5} \epsilon [\infty]_m$ için $\frac{nv}{m} = \frac{20v}{5} = \frac{2}{5}$ olur ve buradan $v = \frac{1}{10}$ olurki bu $[\infty]_n$ nin elemanı değildir.). Şimdi gösterelimki T dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür: $v = \frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} = w\ \epsilon\ F_{u,n}$ olsun. $T(v) = \frac{r}{sm} \to \frac{x}{ym} = T(w)\ \epsilon\ F_{u,m}$ olduğunu gösterelim. Farzedelimki teorem 2.24 (i) sağlansın. Bu durumda, $x \equiv ur\ mod n$ ve $ry - sx = 1$ dir. $m \mid n$ olduğundan $x \equiv ur\ mod m$ dir. Dolayısıyla $x \equiv ur\ mod m$ ve $ry - sx = 1$ olduğundan Teorem 2.24 (ii) gereği $\frac{r}{sm} \to \frac{x}{ym}$ $F_{u,m}$ de bir kenardır. Benzer şekilde teoremin (ii) şıkkının sağlandığı varsayılıp $\frac{r}{sm} \to \frac{x}{ym}$ $F_{u,m}$ de bir kenar olduğu gösterilebilir. Bu bize T nin bir $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ ye bir monomorfizma olduğunu söyler. Ancak $F_{u,m}$ nin bir alt grafına izomorftur.■

Lemma 2.26 (ii) de $m = 1$ olduğu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.27. $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için $F_{u,n}$ den $F(= \mathcal{G}_{1,1} = F_{1,1})$ in bir alt grafına $f: v \to -v$ ile verilen bir izomorfizma vardır.■

Γ nın transtifliğinden, aynı durum $\mathcal{G}_{u,n}$ de içerilen $F_{u,n}$ nin geriye kalan $\Psi(n) - 1$ tane kopyası için de doğrudur.

Teorem 2.28. $F_{1,2}$ bağlantılıdır.

İspat: $F_{1,2}$ nin her bir v köşesinin $F_{1,2}$ de bir yol ile ∞ ile birleştiğini göstermek yeterlidir. $v\ \epsilon\ F_{1,2}$ ise $v = \frac{a}{2b}$; $a, b \epsilon \mathbb{Z}$; $b \geq 1$ ve $(a, 2b) = 1$ indirgenmiş formundadır. b üzerinden indüksiyon uygulayalım:

$b = 1$ ise $v = \frac{a}{2}$ dir ve $\frac{a}{2} \to \frac{1}{0}$ $F_{1,2}$ de bir kenardır (çünkü; $(a, 2b) = 1$ olduğundan a tektir buradan $1 \equiv 1.a\ mod n$ ve $a.0 - 2.1 = -2$ dir.)

$b \geq 2$ ve $F_{1,2}$ nin paydası $2b$ den küçük olan bütün köşelerinin ∞ ile birleştiğini varsayalım. $v = \frac{a}{2b}$ nin paydası $2b$ den küçük olan bir w köşesine birleştiğini gösterirsek $v \to w \to \infty$ olacağından ispat tamamlanır.$(a, 2b) = 1$ olduğundan $(a, b) = 1$ dir. Böylece; $\exists c, d \epsilon \mathbb{Z}$ öyleki $ad - bc = 1$ dir. $0 < d < b$ olduğunu varsayabiliriz. Aksi durumları inceleyelim:

(i) $d = b$ olsun. $ad - bc = 1$ olduğundan $ab - bc = 1$ den $(a - c)b = 1$ olurki bu $b \geq 2$ olması ile çelişir. Bu çelişki $d = b$ olduğunu varsaymaktan geldi. Varsayımımız yanlıştır yani $d \neq b$ dir.

(ii) $d < 0$ olsun. Bu durumda $d + kb$ yi pozitif yapan en küçük $k := k_1 \epsilon \mathbb{Z}$ tamsayısı için d yerine $d + k_1 b$ yazarak $0 < d + k_1 b < b$ olur ve bu durumda c yerine de $c + k_1 b$ yazarsak $a(d + k_1 b) - b(c + k_1 a) = ad + ak_1 b - bc - ak_1 b = ad - bc = 1$ elde edilir. Böylece, $0 < d < b$ olduğunu farzedebiliriz.

Şimdi c nin tek ve çift olma durumunu göz önüne alalım:

c çift ise; ($(a, 2b) = 1$ olduğundan a tek) $a - c$ tektir ve $0 < d < b \Rightarrow -b < -d < 0 \Rightarrow 0 < b - d < b$ olduğundan $w = \frac{a-c}{2(b-d)}$ köşesi istenen köşedir ($d(a - c) - c(b - d) = da - dc - cb + cd = da - cb = 1$ ve $(a - c, b - d) = 1$ olduğundan $w = \frac{a-c}{2(b-d)}$ indirgenmiş bir kesirdir.). Yani $\frac{a}{2b} \rightarrow \frac{a-c}{2(b-d)}$ $F_{1,2}$ de bir kenardır. Gerçekten; $a.2(b - d) - 2b.(a - c) = 2ab - 2ad - 2ab + 2bc = -2(ad - bc) = -2$ ve $a - c \equiv -1.a \; mod 2$ olduğundan $F_{1,2}$ de kenar şartları sağlanır.

c tek ise; $w = \frac{c}{2d}$ istenen köşedir ($ad - bc = 1$ olduğundan $(c, d) = 1 \overset{c\;tek}{\Longrightarrow} (c, 2d) = 1$ olduğundan $w = \frac{c}{2d}$ indirgenmiş bir kesirdir.). Yani $\frac{a}{2b} \rightarrow \frac{c}{2d}$ $F_{1,2}$ de bir kenardır. Gerçekten; $a.2d - 2b.c = 2(ad - bc) = 2$ ve c ve a ikisi birden tek olduğundan $c \equiv 1.a \; mod 2$ ve $F_{1,2}$ de kenar şartları sağlanır.

Böylece b üzerinden indüksiyon ile $F_{1,2}$ nin bağlantılı olduğu gösterilmiş oldu.■

Teorem 2.29. $n \leq 4$ ise $F_{u,n}$ bağlantılıdır.■

Teorem 2.30. $n = 5$ ise $F_{u,n}$ bağlantılı değildir.

İspat: $F_{1,5}$, $F_{2,5}$, $F_{3,5}$ ve $F_{4,5}$ alt yörüngesel graflarının bağlantılılıklarını inceleyelim. Lemma 2.26 (i) den $F_{1,5} \cong F_{-1,5}$ ve $-1 \equiv 4 \; mod 5$ olduğundan $F_{1,5} \cong F_{4,5}$ tir ve böylece $F_{1,5}$ bağlantısız olduğu gösterilirse $F_{4,5}$ de bağlantısız olur. Benzer şekilde $F_{2,5} \cong F_{3,5}$ olduğundan $F_{2,5}$ in bağlantısız olduğu gösterilirse $F_{3,5}$ de bağlantısız olur.

$F_{1,5}$ i göz önüne alalım:

Teorem 2.24 gereği

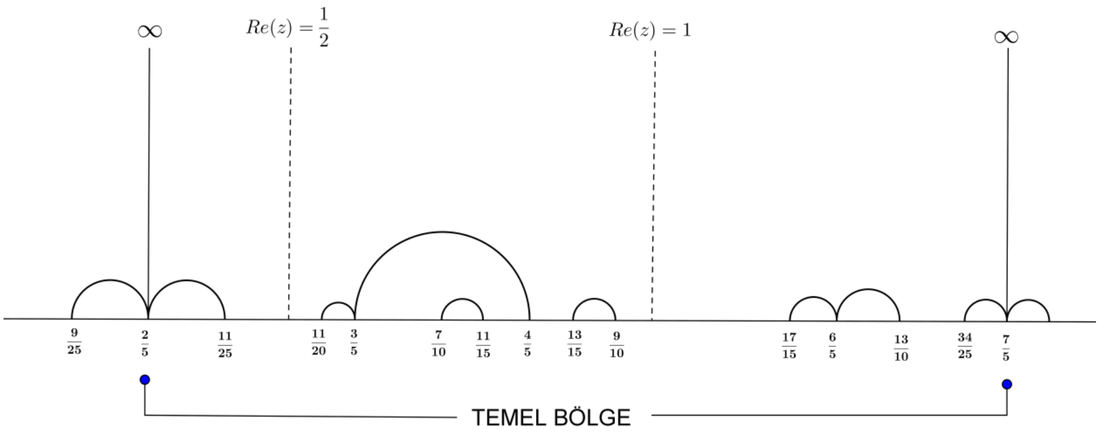
$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \epsilon F_{1,5} \Leftrightarrow$

(a) $x \equiv r \; mod 5$ ve $ry - sx = 5$ veya

(b) $x \equiv -r \ mod5$ ve $ry - sx = -5$ tir.

Böylece $r \equiv \mp 1 \ mod5$ olan $\frac{r}{s}$ köşeleri $x \equiv \mp 2 \ mod5$ olan $\frac{x}{y}$ köşeleri ile asla birleştirilemezler. Bu yüzden bu köşeler farklı bağlantılı bileşenlerde bulunurlar ve böylece $F_{1,5}$ bağlantılı değildir.

$F_{2,5}$ i göz önüne alalım:



Şekil 9. $F_{2,5}$ Grafı

$F_{2,5}$ in $\frac{1}{2}$ ile 1 aralığındaki hiçbir köşesi bu aralığın dışındaki hiçbir köşe ile ardışık değildir. Varsayalımki $F_{2,5}$ in $\frac{1}{2}$ ile 1 aralığındaki herhangi bir köşesi bu aralığın dışındaki bir köşe ile ardışık olsun. Bu durumda söz konusu ardışık köşelerin oluşturduğu bu kenar ya $Rez = \frac{1}{2}$ doğrusunu ya da $Rez = 1$ doğrusunu kesmek zorundadır.

- Bu kenar $Rez = \frac{1}{2}$ doğrusu ile kesişen bir kenar olsun:

Bu kenar $v < \frac{1}{2} < w, v = \frac{a}{5b}, \frac{c}{5d} \in F_{2,5}$ olmak üzere; $\frac{a}{5b} \to \frac{c}{5d}$ şeklindedir. Sonuç 2.25 ile $5v = \frac{a}{b}$ ve $5w = \frac{c}{d}$ köşeleri F de ardışık köşelerdir.

$\frac{a}{5b} < \frac{1}{2} < \frac{c}{5d}$ olduğundan $\frac{a}{b} < \frac{5}{2} < \frac{c}{d}$ dir. $2.2 - 1.5 = -1$ olduğundan Lemma 2.20 den $2 = \frac{2}{1}$ ve $\frac{5}{2}$ F de ardışık köşelerdir; bu yüzden $\frac{a}{b} = 2$ dir ve $5.1 - 2.3 = -1$ olduğundan $\frac{5}{2}$ ve $\frac{3}{1} = 3$ F de ardışık köşelerdir bu yüzden $\frac{c}{d} = 3$ tür. Buradan $v = \frac{2}{5}$ ve $w = \frac{3}{5}$ tir ama $3 \not\equiv -4 \ mod5$ olduğundan $\frac{2}{5} \to \frac{3}{5}$ nin $F_{2,5}$ te bir kenar olamayacağı çelişkisi elde edilir.

- Bu kenar $Rez = 1$ doğrusu ile kesişen bir kenar olsun:

Bu kenar $v < 1 < w, v = \frac{a}{5b}, \frac{c}{5d} \in F_{2,5}$ olmak üzere; $\frac{a}{5b} \to \frac{c}{5d}$ şeklindedir. Sonuç 2.28. ile $5v = \frac{a}{b}$ ve $5w = \frac{c}{d}$ köşeleri F de ardışık köşelerdir.

$\frac{a}{5b} < 1 < \frac{c}{5d}$ olduğundan $\frac{a}{b} < 5 < \frac{c}{d}$ dir. $\infty \to 5$ F de bir kenardır. Dolayısı ile F de $\frac{a}{b} \to \frac{c}{d}$ ile $\infty \to 5$ kenarları kesişir. Bu çelişki hipotezi doğrular. Yani; $F_{2,5}$ in $\frac{1}{2}$ ile 1 aralığındaki hiçbir köşesi bu aralığın dışındaki hiçbir köşe ile ardışık değildir. Böylece; $F_{2,5}$ grafı en azından iki bileşene sahiptir yani $F_{2,5}$ grafı bağlantılı değildir.

Böylece $n = 5$ olduğu durumda $F_{u,n}$ alt yörüngesel grafının bağlantısız olduğu gösterilmiş oldu.■

Teorem 2.31. $F_{u,n}$ bağlantılıdır $\Leftrightarrow n \leq 4$.■

Tanım 2.32. v_1, v_2, v_3 üç köşe olmak üzere $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$ şeklinde , yani kenarların hepsi aynı yönde ise buna yönlendirilmiş üçgen ; $v_1 \to v_2 \leftarrow v_3 \to v_1$ gibi farklı yönde kenar varsa buna da ters yönlendirilmiş üçgen denir. Kendi eşleşmiş bir alt yörüngesel grafta bu iki kavram birbirine denktir.

Teorem 2.33.

(i) $F_{u,n}$ yönlenmiş bir üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \mp u + 1 \equiv 0 \; modn.$

(ii) $n > 1$ ise, $F_{u,n}$ ters yönlü üçgen içermez.

İspat:

(i) $F_{u,n}$ nin yönlendirilmiş bir üçgen içerdiğini varsayalım. Teorem 2.25 ten $\Gamma_0(n)$ $F_{u,n}$ nin köşeleri üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden bu üçgenin $\infty \to \frac{u}{n} \to v \to \infty$ biçiminde olduğunu varsayabiliriz. $v = \frac{r}{sn}$ olmak üzere $\frac{r}{sn} = v \to \infty = \frac{1}{0}$ kenarına Teorem 2.24 ü uygularsak $v < \infty$ olduğundan $r.0 - sn.1 = -n$ dir. Buradan $s = 1$ elde edilir. Yani $v = \frac{r}{n}$ biçimindedir. $\frac{u}{n} \to \frac{r}{n}$ kenarına Teorem 2.24 ü uygularsak;

(a) $r \equiv u^2 \; modn, u - r = 1$ veya

(b) $r \equiv -u^2 \; modn, u - r = -1$ elde edilir.

(a) dan $r \equiv u^2 \; modn \xRightarrow{u-r=1 \; old.r=u-1} u - 1 \equiv u^2 \; modn \Rightarrow u^2 - u + 1 \equiv 0 \; modn$ ve

(b) den $r \equiv -u^2 \; modn \xRightarrow{u-r=-1 \; old.r=u+1} u + 1 \equiv -u^2 \; modn \Rightarrow u^2 + u + 1 \equiv 0 \; modn$ dir.

Tersine; $u^2 \mp u + 1 \equiv 0\ mod n.$ ise Teorem 2.27 gereği $\frac{u}{n} \to \frac{u\mp1}{n}$ $F_{u,n}$ de bir kenardır ve transitiflikten $F_{u,n}$ de $\infty \to \frac{u}{n}$ ve $\frac{u\mp1}{n} \to \infty$ kenarları vardır. Böylece; $F_{u,n}$ de $\infty \to \frac{u}{n} \to \frac{u\mp1}{n} \to \infty$ yönlenmiş üçgeni bulunur.

(ii) Aynen (i) de olduğu gibi bir $r \epsilon \mathbb{Z}$ için $v = \frac{r}{n}$ biçiminde olmak üzere; $\infty \to \frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n} \to \infty$ un $F_{u,n}$ de bir üçgen olduğunu varsayalım. $\frac{u}{n} \leftarrow \frac{r}{n}$ kenarına Teorem 2.24 ü uygularsak,

(a) $r \equiv 1\ mod n, r - u = 1$ veya

(b) $r \equiv -1\ mod n, r - u = -1$ elde ederiz.

Her iki durumda da $u \equiv 0\ mod n$ olurki bu $n > 1$ için u nun $mod n$ ye göre bir birim olması ile çelişir. O halde varsayımımız yanlıştır. Yani; $n > 1$ ise $F_{u,n}$ grafı ters yönlendirilmiş bir üçgen içermez.■

2.2. Γ^3 Modüler Alt Grubu

Γ^3 ile Γ modüler grubunun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen grubu göstereceğiz. [10] dan görülebileceği gibi, $\Gamma^3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0\ mod 3\right\}$ tür.

Γ^3 grubunun elemanları; a, b, c, d birer tam sayı olmak üzere, $\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris gösterimlerinden birine sahiptir (Kesicioğlu, 2011).

Teorem 2.34.[3]

$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere ;

$\Gamma = \Gamma^3 + y\,\Gamma^3 + y^2\,\Gamma^3$, $\Gamma^3 = \langle\, x,\ yxy^2, y^2xy \,\rangle$ ve ayrıca $|\Gamma : \Gamma^3| = 3$ tür.■

Lemma 2.35.

(i) Γ^3 grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

(ii) $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın elemanlarının sabitleyeni sonsuz mertebeli devirli bir gruptur.■

2.2.1. $\mathbf{F^3_{u,n}}$ Alt Grafı

$(\alpha,\beta) \in \widehat{\mathbb{Q}} \times \widehat{\mathbb{Q}}$ ve $g \in \Gamma^3$ olmak üzere Γ^3 grubu $g : (\alpha,\beta) \to \big(g(\alpha), g(\beta)\big)$ ile $\widehat{\mathbb{Q}} \times \widehat{\mathbb{Q}}$ kümesi üzerindeki hareketini ve bu hareketin yörüngeleri olan alt yörüngeleri göz önüne alalım. Γ^3, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiği için her alt yörünge, $\frac{u}{n}$ $(n \geq u, (u,n) = 1)$ noktaları için $\left(\infty, \frac{u}{n}\right)$ çiftini içerir. Bu durumda alt yörüngesel grafı kısaca $F^3_{u,n}$ ile göstereceğiz.

Γ^3, blokları geçişli olarak permüte ettiği için, [6] da olduğu gibi bloklara karşılık gelen tüm alt graflar izomorfiktirler.

Böylece, $G^3_{u,n}$ nin köşeleri, $[\infty] = \left\{\frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \ (mod\ n)\right\}$ bloğunu oluşturan $F^3_{u,n}$ alt grafını göz önüne alacağız.

Teorem 2.36. $F^3_{u,n} = F^3_{u',n'}$ $\Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u' mod\ 3n$ dir.

İspat: $F_{u,n} = F_{u',n'} \Leftrightarrow O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\infty, \frac{u'}{n'}\right) \Leftrightarrow \exists T \in \Gamma^3 : T(\infty) = \infty$ ve $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ tür. $T(\infty) = \infty$ olduğundan $T \in \langle\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle = \Gamma^3_\infty$ tür. Buradan $T = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir. Ayrıca $T\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ olduğundan $\begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{u+3kn}{n} = \frac{u'}{n'}$ olup $(u', n') = 1$ olduğundan $n = n'$ ve $u' = u + 3kn \Rightarrow u' \equiv u\ mod\ 3n$ dir. Böylece $F_{u,n} = F_{u',n'} \Leftrightarrow n = n'$ ve $u \equiv u'\ mod\ 3n$ dir.■

Sonuç 2.37 [4] . $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $F^3 (= F^3_{1,1})$ grafında bir kenardır $\Leftrightarrow$

(a) $r \equiv 0\ mod 3$ ise, $y \equiv \pm s\ mod\ 3,\ ry - sx = \pm 1,$

(b) $s \equiv 0\ mod 3$ ise, $x \equiv \pm r\ mod\ 3,\ ry - sx = \pm 1,$

(c) $r, s \not\equiv 0\ mod 3$ ise, $x \not\equiv \pm r\ mod\ 3,\ y \not\equiv \pm s\ mod 3,\ ry - sx = \pm 1.$■

Lemma 2.38. F^3 te $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ dir $\Leftrightarrow F^3$ te $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s}$ dir.

İspat: F^3 te $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ olsun. Sonuç 2.37 deki üç durum benzerlik gösterdiği için $r \equiv 0\ mod 3$, $ry - sx = 1$ (bu durumda $y \equiv s\ mod$ 3 tür.) olduğunu varsayıp $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s}$ olduğunu göstereceğiz. Diğer tüm durumlar tamamen benzerlik göstereceğinden burada ispat edilmeyecektir.

$r \equiv 0\ mod 3$ ve $ry - sx = 1$ olduğundan Sonuç 2.37 (a) gereği $x, y, s \not\equiv 0\ mod$ 3 tür. Bu durumda $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s}$ olduğunu gösterirken Sonuç 2.35 (c) yi göz önüne almalıyız.

$ry - sx = 1$ olduğundan $xs - ry = -1$ dir. O zaman göstermeliyiz ki; $y \not\equiv -s\, mod3$ ve $x \not\equiv -r\, mod3$ tür. $y, s \not\equiv 0\, mod3$ ve $y \equiv s\, mod3$ olduğundan $y \not\equiv -s\, mod3$ kolaylıkla elde edilir. Benzer şekilde; $r \equiv 0\, mod3$ ve $x \not\equiv 0\, mod3$ olduğundan $x \not\equiv -r\, mod3$ elde edilir. Böylece Sonuç 2.37 (c) gereği, $\frac{x}{y} \to \frac{r}{s}$ F^3 te kenardır.■

Önerme 2.39. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3$, $T\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{a+b}{c+d} > 1$, $(c+d) - (a+b) = -1$ olsun. Bu takdirde; $\frac{1}{1} \to \frac{a+b}{c+d}$ F^3 te bir kenardır $\Leftrightarrow$ $a \equiv b \equiv c \equiv 2\, mod3$, $d \equiv 1\, mod3$ tür.

İspat :

"$\Rightarrow$"

$\frac{1}{1} \to \frac{a+b}{c+d}$ F^3 te bir kenar olsun. Bu durumda, Sonuç 2.35 (c) den, $a + b \not\equiv 2\ mod3$ ve $c + d \not\equiv 2\ mod\, 3$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $(c + d) - (a + b) = -1$ olduğu da göz önüne alınırsa $a + b \equiv 1\ mod\, 3$ ve $c + d \equiv 0\ mod\, 3$ olduğu elde edilir. $a + b \equiv 1\ mod\, 3$ ve $c + d \equiv 0\ mod\, 3$ denkliklerinin yanı sıra $T \in \Gamma^3$ gereği $ab + cd \equiv 0\, mod\, 3$ olduğundan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 1\, mod\, 3$ olduğu kolaylıkla görülür. $c + d \equiv 0\ mod\, 3$ gerçeğinden yola çıkarak aşağıdaki üç farklı durum için $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 1\, mod\, 3$ denkliğini sağlayan a, b, c ve d çözümlerini elde edeceğiz.

1.Durum: $c \equiv d \equiv 0\ mod\, 3$ olsun. Buradan, $a^2 + b^2 \equiv 1\, mod\, 3$ elde edilir. $a + b \equiv 1\ mod\, 3$ olduğunuda göz önüne alırsak $ab \equiv 0\, mod3$ olduğu görülür. $ab \equiv 0\, mod3$ ise, $a \equiv 0\ mod\, 3$ veya $b \equiv 0\ mod\, 3$ dir. $a \equiv 0\ mod\, 3$ için, $c \equiv 0\ mod\, 3$ olduğundan $ad - bc \equiv 0\, mod\, 3$ elde edilir ki bu $ad - bc = 1$ ile çelişir. $b \equiv 0\ mod\, 3$ için de $d \equiv 0\ mod\, 3$ olduğundan $ad - bc \equiv 0\, mod\, 3$ elde edilir ki bu $ad - bc = 1$ ile çelişir. Böylece, $c \equiv d \equiv 0\ mod\, 3$ için çözüm yoktur.

2.Durum: $c \equiv 1\, mod\, 3$ ve $d \equiv 2\ mod\, 3$ olsun. Buradan, kolaylıkla $a^2 + b^2 \equiv 2\, mod\, 3$ elde edilir. $a + b \equiv 1\ mod\, 3$ olduğunuda göz önüne alırsak $ab \equiv 1\, mod3$ ve dolayısıyla $a \equiv b \equiv 2\ mod\, 3$ elde edilir. Ancak bu durumda $ad - bc \equiv 2\, mod\, 3$ çelişkisi elde edilir. Böylece, $c \equiv 1\ mod\, 3$ ve $d \equiv 2\ mod\, 3$ için de çözüm yoktur.

3.Durum: $c \equiv 2\ mod\, 3$ ve $d \equiv 1\ mod\, 3$ kongrüanslarını kabül edelim. Buradan, $a^2 + b^2 \equiv 2\, mod\, 3$ elde edilir. $a + b \equiv 1\ mod\, 3$ olduğunu da göz önüne alırsak $ab \equiv 1\, mod3$ ve dolayısıyla $a \equiv b \equiv 2\ mod\, 3$ elde edilir ki $ad - bc = 1$ eşitliği ile birlikte $a \equiv b \equiv c \equiv 2\, mod3$, $d \equiv 1\, mod\, 3$ istenilen çözümdür.

"$\Leftarrow$"

Tersine, $T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma^3$, $T\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{a+b}{c+d}>1$, $(c+d)-(a+b)=-1$ ve $a\equiv b\equiv c\equiv 2\, mod 3,\ d\equiv 1\, mod\ 3$ olsun. Bu durumda, $T\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{a+b}{c+d}$ olup $\frac{1}{1}\rightarrow\frac{a+b}{c+d}$ nin F^3 te bir kenar olduğunu görelim. Sonuç 2.37 (c) yi göz önüne aldığımızda, $r\equiv s\equiv 1$ ve $ry-sx=-1$ durumları söz konusudur. Burada, $x=a+b\equiv 1\, mod\ 3$ ve $y=c+d\equiv 0$ olup Sonuç 2.37 (c) ye göre $\frac{1}{1}\rightarrow\frac{a+b}{c+d}$ F^3 te bir kenardır.■

Yukarıda verdiğimiz Önerme 2.37 ile $\frac{1}{1}\rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right)$ i F^3 te kenar yapan T dönüşümlerinin bir sınıfını belirlemiş olduk. Bu önermenin bir sonucu olarak şimdi vereceğimiz önerme ile F^3 te $\frac{1}{1}$ in gideceği en uzak köşenin $\frac{4}{3}$ olacağını göreceğiz.

Önerme 2.40. $T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma^3$, $T\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{a+b}{c+d}>1$ olsun. Bu takdirde;

(i) $\frac{1}{1}\rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right)$ F^3 te bir kenar ise $T\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{a+b}{c+d}\leq\frac{4}{3}$ tür.

(ii) $\frac{1}{1}\rightarrow\frac{4}{3}$ F^3 te bir kenardır ancak ve ancak, $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ olmak üzere $T\in\Gamma^3$ dönüşümü $T=\begin{pmatrix} -1+12n & 5-12n \\ -1+9n & 4-9n \end{pmatrix}$ biçimindedir.

(iii) $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ olmak üzere $T=\begin{pmatrix} -1+12n & 5-12n \\ -1+9n & 4-9n \end{pmatrix}\in\Gamma^3$ biçimindeki dönüşümler hiperbolik dönüşümlerdir.

İspat:

(i) $T\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{a+b}{c+d}>1$ ve $\frac{1}{1}\rightarrow T\left(\frac{1}{1}\right)$ i F^3 te bir kenar ise Sonuç 2.35 ten $a+b=c+d+1$ dir. Böylece, $T\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{a+b}{c+d}=1+\frac{1}{c+d}$ olup $\frac{1}{1}\rightarrow 1+\frac{1}{c+d}$ F^3 te bir kenardır. $c+d\equiv 0\, mod\ 3$ olduğundan $c+d$ nin en küçük pozitif değeri 3 olur. Dolayısı ile $T\left(\frac{1}{1}\right)=1+\frac{1}{c+d}\leq\frac{4}{3}$ elde edilir.

(ii) $T\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{4}{3}=\frac{a+b}{c+d}$ olsun. $a+b=c+d+1$ olduğundan $T=\begin{pmatrix} a & 4-a \\ c & 3-c \end{pmatrix}$ biçimindedir. $T\in\Gamma$ olduğundan, $3a-4c=1$ ve dolayısıyla $a=-1+4k$ ve $c=-1+3k$, $k\in\mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla, $T=\begin{pmatrix} -1+4k & 5-4k \\ -1+3k & 4-3k \end{pmatrix}$ biçiminde olur. Öte yandan $T\in\Gamma^3$ olduğundan $(-1+4k)(5-4k)+(-1+3k)(4-3k)\equiv 0\, mod\ 3$ dir. Bu son denklikten $k\equiv 0\, mod\ 3$ elde edilir. Böylece, $k=3n,\ n\in\mathbb{Z}$ biçimindedir. Sonuç olarak; T dönüşümü $T=\begin{pmatrix} -1+12n & 5-12n \\ -1+9n & 4-9n \end{pmatrix}$ biçimindedir. Önermenin tersi açıktır.

(iii) $T=\begin{pmatrix}-1+12n & 5-12n\\ -1+9n & 4-9n\end{pmatrix}$ dönüşümünün izi $3n+3$ olup $\forall\, n\geq 0$ için $|3n+3|>3>2$ olduğundan bu tip dönüşümler hiperboliktirler. Bu şekildeki T dönüşümlerinin sabit noktaları;

$$z_{1/2}=\frac{(21n-5)\pm\sqrt{9n^2+18n+5}}{18n-2} \tag{2.16}$$

dir.

Öte yandan; $T'(z)=\frac{1}{[(9n-1)z+4-9n]^2}$ olup, $\forall n\geq 0$ tamsayısı için $|T'(z_1)|=\left(\frac{2}{3n+3+\sqrt{9n^2+18n+5}}\right)^2<1$ ve $|T'(z_2)|=\left(\frac{2}{3n+3-\sqrt{9n^2+18n+5}}\right)^2>1$ dir.■

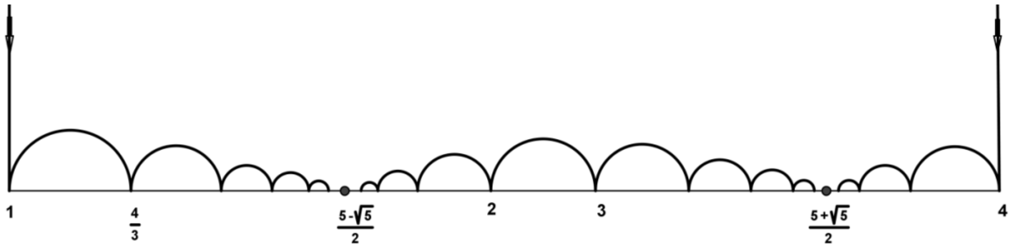
Önerme 2.39 (ii) ile belirlenen $T=\begin{pmatrix}-1+12n & 5-12n\\ -1+9n & 4-9n\end{pmatrix}$ dönüşümü için $T^2(1)=\frac{12n+11}{9n+8}$ olup, $T^2(1)-T(1)=\frac{1}{27n+24}$ dir. Böylece, $T(1)\rightarrow T^2(1)$ kenarı göz önüne alınırsa $T(1)$ ve $T^2(1)$ köşeleri arasındaki en uzak mesafe; $n=0$ için elde edilen $\frac{1}{24}$ olacaktır.

Örnek 2.41. Önerme 2.40 de $n=0$ için, $T=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}\in\Gamma^3$ dönüşümü ile $\frac{1}{1}\rightarrow\frac{4}{3}\rightarrow\frac{11}{8}$ şeklinde en uzak köşeler oluşur. Ayrıca, $T=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ ile elde edilen $T(z)=\frac{z-5}{z-4}$ dönüşümünün sabit noktaları $z_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ve $z_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dir.

Şimdi, bizim çalışmamızın ana problemi olan F^3 grafının bağlantılılık özelliklerini irdelediğimiz teoremi ifade ve ispat edeceğiz. Teoremi burada ifade ettikten sonra ispatı şekillendirmek için yeni bir dizi lemma, önerme ve teorem ispatla paralel bir şekilde verilecektir.

Teorem 2.42. F^3 grafı bağlantısız bir graftır.

İspat: Sonuç 2.37 den kolayca görülür ki F^3 periyodu 3 olan periyodik bir graftır. Yani, F^3 te $a\rightarrow b$ ise yine F^3 te $\forall\, m\in\mathbb{Z}$ için $a+3m\rightarrow b+3m$ dir. Böylece, bir $m\in\mathbb{Z}$ bulunabilir öyle ki $a+m$ ve $b+m$ den sadece biri ∞ dur veya $a+m$ ve $b+m$ nin her ikiside [1 , 4] kapalı aralığının içindedir. Bu yüzden aşağıda Şekil 10 da görüldüğü gibi hesaplamamızı yalnızca [1 , 4] aralığı için yapabiliriz.



Şekil 10. F^3 Grafı

$T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ hiperbolik dönüşümünü göz önüne alalım. Bu elemana karşılık gelen $T(z) = \frac{z-5}{z-4}$ dönüşümü açık olarak $[1\,,4] \cap \mathbb{Q}$ üzerinde kesin artandır ve şekilde gösterilen $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ve $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ noktaları dönüşümün sabit noktalarıdır (T dönüşümü hiperboliktir). Üstelik, $T^m(\infty) \to T^m\left(\frac{1}{1}\right)$ kenarının negatif olmayan tüm m tamsayıları için F^3 te bir kenar olduğu kolayca gösterilir.

Gerçekten; tümevarım yöntemiyle,

$m = 1$ için, $T(\infty) = T\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{1}{1} \to \frac{4}{3} = T\left(\frac{1}{1}\right)$ olup önerme doğru.

$m = k$ için, $T^k(\infty) \to T^k\left(\frac{1}{1}\right)$ olsun. Bu durumda göstermeliyiz ki, $m = k + 1$ için de $T^{k+1}(\infty) \to T^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$ dir. Gerçekten;

$T^{k+1}(\infty) = T(T^k(\infty)) \to T(T^k(\frac{1}{1})) = T^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$ elde edilir ki böylece, her $m \in \mathbb{N}$ için $T^m(\infty) \to T^m\left(\frac{1}{1}\right)$ olduğu görüldü.

Buradan, $\forall\, m$ için, $T^m(1) = T^m\big(T(\infty)\big) \to T^m\big(T(1)\big) = T^{m+1}(1)$ ve $T^m(\infty) \to T^m\left(\frac{1}{1}\right) = T^m\big(T(\infty)\big) = T^{m+1}(\infty)$ yani,

$$T^m(\infty) \to T^{m+1}(\infty) \tag{2.17}$$

olduğu görülür. Böylece eğer;

$\frac{a}{b} \coloneqq T^m\left(\frac{1}{0}\right) \to T^{m+1}\left(\frac{1}{0}\right) =: \frac{c}{d}$ ise $\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b}$ ve

$T^{m+1}\left(\frac{1}{0}\right) = T\left(T^m\left(\frac{1}{0}\right)\right) = T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a-5b}{a-4b} = 1 + \frac{b}{3b-(a-b)}$ olduğundan,

$$1+\frac{a-b}{b} \to 1+\frac{b}{3b-(a-b)} \tag{2.18}$$

F^3 te bir kenardır.

Örnek olarak; F^3 te " $\infty \to \frac{1}{1} \to \frac{4}{3} \to \frac{11}{8}$ " sonlu yolunu elde edebiliriz.

Bu teoremin ispatını tamamlayabilmek için aşağıda bir dizi teorem, önerme ve lemmayı verelim.

Lemma 2.43. $T=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -4\end{pmatrix} \in \Gamma^3$ olsun. Bu takdirde, $\{T^m(1)\}$ dizisi kesin monoton artandır ve

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to T^2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \cdots \to T^m\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \cdots \tag{2.19}$$

dizisi F^3 te artan sırada sonsuz bir yoldur.

İspat: Sonuç 2.37 ve $T(z)=\frac{z-5}{z-4}$ dönüşümünün $[1\,,\ 4)\cap\mathbb{Q}$ üzerinde kesin artan olması göz önüne alınırsa sonuç aşikardır.■

Lemma 2.44. $a,b\in\mathbb{N}$ ve $1\le\frac{a}{b}<\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ olsun. Bu takdirde, $\frac{a}{b}<T\left(\frac{a}{b}\right)<\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ dir.

İspat: $\frac{a}{b}<\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ olduğundan $2a-5b<-\sqrt{5}b$ elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının karesini alırsak, $-a^2+4ab<-ab+5b^2$ eşitsizliği elde edilir ve dolayısıyla buradan $\frac{a}{b}<\frac{-a+5b}{-a+4b}=T\left(\frac{a}{b}\right)$ elde edilir. Diğer taraftan, $a^2-5ab+5b^2>0$ olduğundan,

$$5(a-4b)^2<(3a-10b)^2 \tag{2.20}$$

dir. $\frac{a}{b}<2$ olduğundan (2.20) eşitsizliğinin her iki tarafın karekökünü alırsak,

$$\sqrt{5}(a-4b)>3a-10b \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.21) den $\sqrt{5}<\frac{3a-10b}{a-4b}=5+\frac{10b-2a}{a-4b}$ elde edilir ve buradan, $\sqrt{5}-5<(-2)\frac{-a+5b}{-a+4b}$ olur. Yani, $T\left(\frac{a}{b}\right)<\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ dir. ■

Lemma 2.45. T yukarıdaki gibi olmak üzere a ve b doğal sayıları için $1 \le \frac{a}{b} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ olsun. Bu takdirde $\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right)$ F^3 te bir kenardır $\Leftrightarrow$ $u^2 = 5b^2 + 4$ ve $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$ olacak şekilde u doğal sayısı vardır.

İspat: $\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right)$ F^3 te bir kenar olsun. Sonuç 2.37 ve Lemma 2.44 den $a^2 - 5ab + 5b^2 - 1 = 0$ elde edilir. Bu ikinci dereceden denklemi a ya göre çözdüğümüzde $\frac{a}{b} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ olduğunu da göz önüne alırsak $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}$ elde edilir. Buradan, a ve b tam sayı olduğundan $\sqrt{5b^2+4}$ sayısının bir u tamsayısı olduğu görülür. Böylece gerek şart gösterilmiş olur. Şimdi yeter şartı gösterelim.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} & 5b \\ -b & \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

elemanının Γ^3 te ve $M\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{a}{b}$, $M\left(\frac{1}{1}\right) = T\left(\frac{a}{b}\right)$ olduğu kolaylıkla görülür.

Gerçekten; (2.22) ile verilen matrisin determinantından $\frac{-5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} \cdot \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} - (5b)\cdot(-b) = 1$ olup $M \in \Gamma$ dır. Ayrıca,

$$\frac{-5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} \cdot 5b - b \cdot \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} = -15b^2 + 2b\sqrt{5b^2+4} \tag{2.23}$$

eşitliğinden ve her b için $b\sqrt{5b^2+4} \equiv 0 \ mod\ 3$ denkliğinin doğru oluşundan $M \in \Gamma^3$ elde edilir. Öte yandan,

$$M\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{-5b+\sqrt{5b^2+4}}{-2b} = \frac{\frac{5b-\sqrt{5b^2+4}}{2}}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{ve} \quad T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{5b-a}{4b-a} = \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{3b+\sqrt{5b^2+4}} = M\left(\frac{1}{1}\right) \text{ dir.}$$

Buradan, $M\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{a}{b}$ ve $M\left(\frac{1}{1}\right) = T\left(\frac{a}{b}\right)$ dir. Böylece, F^3 te kenar olma tanımından $\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right)$ F^3 te bir kenardır.■

Teorem 2.46. $\frac{x}{y}$ pozitif rasyonel sayısı $A := \left\{T^m\left(\frac{1}{0}\right) : m \in \mathbb{N}\right\}$ kümesindedir $\Leftrightarrow$ $5y^2 + 4 = u^2$ ve $x = \frac{5y-\sqrt{5y^2+4}}{2}$ olacak şekilde bir u doğal sayısı vardır.

İspat:

"⇒"

Lemma 2.45 ten gerek şart açıktır. Çünkü; $\frac{x}{y} \in A$ ise, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\frac{x}{y} = T^{m_0}\binom{1}{0}$ $\overset{(2.6)}{\longrightarrow}$ $T^{m_0+1}\binom{1}{0} = T\binom{x}{y}$ olup, Lemma 2.45 ten $5y^2+4=u^2$ ve $x=\frac{5y-\sqrt{5y^2+4}}{2}$ olacak şekilde bir u doğal sayısı vardır.

"⇐"

Tersine hipotez altında biz; $5y^2+4=u^2$ ve $x=\frac{5y-\sqrt{5y^2+4}}{2}$ olacak şekilde bir u doğal sayısı bulunabildiğinde $\frac{x}{y}$ sayısının $A := \left\{T^m\binom{1}{0} : m \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinde olacağını göstereceğiz. $\lim_{m\to\infty} T^m\binom{1}{0} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ($\left\{T^m\binom{1}{0}\right\}$ dizisi monoton artan) olduğundan, $y \geq 1$ için $1 \leq \frac{x}{y} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ olduğu açıktır. $1 \leq \frac{x}{y} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ için eğer, $\frac{x}{y}$ elemanı A da değilse, $T^k\binom{1}{0} < \frac{x}{y} < T^{k+1}\binom{1}{0}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan, $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$T^k\binom{1}{0} = \frac{\frac{5a-\sqrt{5a^2+4}}{2}}{a} \tag{2.24}$$

şeklinde yazılabileceğinden ve (2.18) i de göz önüne alırsak;

$$\begin{aligned} T^k\binom{1}{0} = \frac{\frac{5a-\sqrt{5a^2+4}}{2}}{a} &< \frac{\frac{5y-\sqrt{5y^2+4}}{2}}{y} \\ &< 1+\frac{a}{3a-\frac{3a-\sqrt{5a^2+4}}{2}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

elde edilir. Kolaylık açısından, $v := \sqrt{5a^2+4}$ ve $u := \sqrt{5y^2+4}$ yazılırsa,

$$\frac{\frac{5a-v}{2}}{a} < \frac{\frac{5y-u}{2}}{y} < 1+\frac{a}{\frac{3a+v}{2}} = \frac{\frac{5a+v}{2}}{\frac{3a+v}{2}} \tag{2.26}$$

elde edilir. Biliyoruz ki,

$$\frac{\frac{5y-u}{2}}{y} \to T\left(\frac{\frac{5y-u}{2}}{y}\right) = 1 + \frac{y}{3y - \frac{3y-u}{2}}$$

F^3 te bir kenardır.

$$T\left(\frac{\frac{5y-u}{2}}{y}\right) = \frac{\frac{5y+u}{2}}{\frac{3y+u}{2}} < \frac{\frac{5a+v}{2}}{\frac{3a+v}{2}} \tag{2.27}$$

dir ve $\frac{\frac{5a-v}{2}}{a} < \frac{\frac{5y-u}{2}}{y}$ olduğundan, $5ay - vy < 5ay - au$ eşitsizliği doğrudur. Dolayısıyla buradan $vy > au$ elde edilir. Diğer taraftan (2.16) eşitsizliğinden $\frac{5y+u}{3y+u} < \frac{5a+v}{3a+v}$ elde edilir. Bu son eşitsizlikten $vy < au$ elde edilir ki bu, daha önce doğruladığımız $vy > au$ ile çelişir. Böylece ispat biter.■

Sonuç 2.47.

$$\frac{1}{0} \to 0 + \frac{1}{1} \to 1 + \frac{1}{3} \to 1 + \frac{3}{8} \to \cdots \to 1 + \frac{a_n}{b_n} \to 1 + \frac{b_n}{3b_n - a_n} \to \tag{2.28}$$

F^3 te sonsuz bir yoldur ve bu yolun tüm köşeleri $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ den küçüktür. Ayrıca, $1 + \frac{x}{y}$ köşesindeki x ve y doğal sayıları için $5x^2 + 4$ ve $5y^2 + 4$ tam karedir. Üstelik, $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2+4}}{2}$ ve $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a_n}{b_n}) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ dir.

İspat: Lemma 2.45 ten (2.28) F^3 te sonsuz bir yoldur. Lemma 2.44 ve Teorem 2.46 dan bu yolun tüm köşeleri $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ sayısından küçüktür ve $1 + \frac{x}{y}$ köşesindeki x ve y doğal sayıları için $5x^2 + 4$ ve $5y^2 + 4$ tam karedir. Yine Teorem 2.46 ya göre, $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2+4}}{2}$ olup,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{b_n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{b_n\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2+4}}{2}}{b_n}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

elde edilir.■

Teorem 2.48. $T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ve $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 2$ olsun. Bu takdirde;

(i) $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a}{b}$ dir.

(ii) $\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right)$ F^3 te bir kenardır $\Leftrightarrow$ $5b^2 - 4$ tam karedir ve $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2-4}}{2}$ dir.

İspat:

(i) T dönüşümü göz önüne alınırsa $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 2$ için $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{a}{b}$ olduğu aşikardır.

(ii)

" $\Longrightarrow$ "

$\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a+5b}{-a+4b}$ F^3 te bir kenar olsun. Buradan, $a^2 - 5ab + 5b^2 + 1 = 0$ elde edilir ve $\frac{a}{b} \leq 2$ olduğunu da göz önüne alırsak, $a = \frac{5b-\sqrt{5b^2-4}}{2}$ elde edilir. Böylece, $\sqrt{5b^2 - 4}$ ifadesi tam sayı olacağından, $5b^2 - 4$ ifadesi bir tam karedir.

" $\Longleftarrow$ "

Sonuç 2.46 gereği, $\frac{a}{b} = \frac{\frac{5b-\sqrt{5b^2-4}}{2}}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}}{\frac{3b+\sqrt{5b^2-4}}{2}} = \frac{x}{y}$ F^3 te bir kenardır. Açıkça burada, $b \not\equiv 0 \; mod \; 3$ olmak durumundadır. Çünkü; $b = 3t,\ t \in \mathbb{Z}$ olduğunda $\sqrt{5b^2 - 4} = \sqrt{45t^2 - 4}$ olur ki bu durumda, $45t^2 - 4 \equiv 2 \; mod \; 3$ yani, $u^2 \equiv 2 \; mod \; 3$ elde edilir. $u^2 \equiv 2 \; mod \; 3$ kongrüansının çözümü olmadığından $b \equiv 0 \; mod \; 3$ olamaz. Bu yüzden, Sonuç 2.37 deki (a) veya (c) durumlarından biri söz konusu olabilir.

(a) Sonuç 2.37 (a) da ki gibi $a \equiv 0 \; mod \; 3$ durumunu ele alalım. Yukarıdan, $b \equiv 1 \; mod \; 3$ veya $b \equiv 2 \; mod \; 3$ elde edilir. $b \equiv 1 \; mod \; 3$ durumunda $a \equiv 2 \; mod \; 3$ olacağından $b \equiv 1 \; mod \; 3$ olamaz. $b \equiv 1 \; mod \; 3$ için ise, $u \equiv 1 \; mod \; 3$ ve $a \equiv 0 \; mod \; 3$ olur ve dolayısıyla $b \equiv y \equiv 2 \; mod \; 3$ elde edilir. Diğer taraftan T dönüşümünün tanımı gereği $ay - bx = 1$ olduğunu da göz önüne aldığımızda Sonuç 2.37 (a) gereği, $\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right)$ F^3 te bir kenardır.

(b) Sonuç 2.37 (c) de ki gibi $a, b \not\equiv 0 \; mod \; 3$ durumunu ele alalım. Yukarıda olduğu gibi $b \equiv 1 \; mod \; 3$ ise, $a \equiv 2 \; mod \; 3,\ u \equiv 1 \; mod \; 3,\ y \equiv 2 \; mod \; 3,\ x \equiv 0 \; mod \; 3$ elde edilir ve buradan $b \not\equiv y \; mod \; 3$ ve $x \not\equiv a \; mod \; 3$ olduğu görülür. Bu durumda da Sonuç 2.37 (c) gereği, $\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right)$ F^3 te bir kenardır. Böylece ispat tamamlanmış olur.■

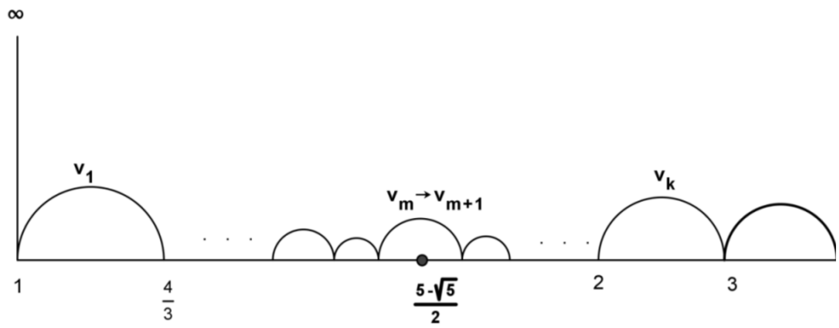
Sonuç 2.49.

$$3 \xrightarrow{T} 2 = 1 + \frac{1}{1} \xrightarrow{T} 1 + \frac{1}{2} \xrightarrow{T} 1 + \frac{2}{5} \xrightarrow{T} \cdots \xrightarrow{T} 1 + \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{T} 1 + \frac{b_n}{3b_n - a_n} \cdots \qquad (2.29)$$

yolu F^3 te azalan sırada sonsuz bir yoldur. Ayrıca bu yolun tüm köşeleri, $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ sayısından büyüktür ve $1 + \frac{x}{y}$ köşesindeki x ve y doğal sayıları için $5x^2 - 4$ ve $5y^2 - 4$ tam karedir. Üstelik, $a_n = \frac{3b_n - \sqrt{5(b_n)^2 - 4}}{2}$ ve $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a_n}{b_n}) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ dir. Burada T yukarıdaki gibidir.■

Teorem 2.50. k bir doğal sayı ve $v_1,\ v_2,\ \cdots\ ,\ v_k$ köşeleri F^3 grafının $[1\,,3]$ aralığındaki en azından biri $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ sayısından küçük ve en azından biri $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ sayısından büyük olan köşeleri olarak verilsin. Bu takdirde, F^3 te $\infty \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$ biçiminde bir yol yoktur.

İspat:



Eğer yukarıdaki şekilde de gösterildiği gibi F^3 te $\infty \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$ yolu mevcut ise $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, F^3 te köşe olmadığı için $v_m < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < v_{m+1}$ olacak şekilde $1 \le m < k$ vardır ve $v_m \to v_{m+1}$ F^3 ün bir kenarıdır. Sonuç 2.45 ve Sonuç 2.479 daki kenarların (2.28) ve (2.29) dizileri biri artarak biri de azalarak $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ sayısına yakınsadığı için,

$$T^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_m \to v_{m+1} = T^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.30)$$

olacak şekilde m ve n doğal sayıları mevcuttur.

Varsayalım ki, $n > m$ olsun. O halde; (2.30) ifadesi T^{-m} ile çarpılırsa ve Teorem 2.48 göz önüne alınırsa en azından bir $b \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{0} \to T^{n-m}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \frac{\frac{5b-\sqrt{5b^2-4}}{2}}{b} \tag{2.31}$$

elde edilir. Böylece Sonuç 2.37 den $b = 1$ elde edilir. Yani; $\frac{1}{0} \to \frac{2}{1}$ F^3 ün bir kenarıdır. Bu durum yine Sonuç 2.37 nin (b) şıkkı ile çelişir.

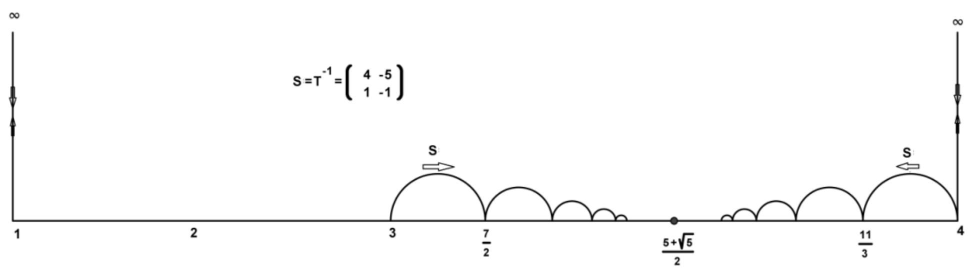
Varsayalım ki, $n < m$ olsun. Bu durumda yukarıdakine benzer şekilde (2.30) ifadesini T^{-n} ile çarparsak,

$$T^{m-n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \frac{3}{1} \tag{2.32}$$

elde edilir. Bu durumda, $T^{m-n} \geq 2$ olur. Fakat Sonuç 2.49 a göre her durumda $T^{m-n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ olup bu bir çelişkidir.

O halde, geriye sadece $m = n$ durumu kalıyor. Bu durumda açıkça $\frac{1}{0} \to \frac{3}{1}$ F^3 grafının bir kenarı olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir ve dolayısı ile ispat tamamlanır.■

Not: Buradan itibaren [3,4] aralığında grafın seyrini görmek için T dönüşümü yerine $S = T^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -5\\1 & -1\end{pmatrix}$ dönüşümünü göz önüne alacağız.



Şekil 11. [3,4] aralığındaki F^3 grafı

Lemma 2.51. $S = T^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -5\\1 & -1\end{pmatrix}$ ve $3 \leq \frac{a}{b} < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dir.

(ii) $\frac{a}{b} \to S\left(\frac{a}{b}\right)$ F^3 ün bir kenarıdır $\Leftrightarrow$ $\sqrt{5b^2-4}$ ifadesi bir doğal sayıdır ve

$a = \frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}$ dir.

İspat:

(i) $z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ aralığında ki her z için $z < S(z)$ eşitsizliği sağlanır. Öte yandan $[3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}) \subset \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ olduğundan $3 \le \frac{a}{b} < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ için $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right)$ dir. S dönüşümü $[3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}) \cap \mathbb{Q}$ kesin kümesinde monoton artan ve $S\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan $S\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dir. Böylece, $3 \le \frac{a}{b} < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ için $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ olduğu gösterilmiştir.

(ii) $\frac{a}{b} \to S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$ F^3 ün bir kenarı olsun. Bu durumda $\frac{a}{b} < S\left(\frac{a}{b}\right)$ ve Sonuç 2.2.4 ten,

$$a^2 - 5ab + 5b^2 + 1 = 0 \tag{2.33}$$

elde edilir. $3 \le \frac{a}{b}$ olduğunu da göz önüne alarak (2.33.) denklemini a için çözersek,

$$a = \frac{5b + \sqrt{5b^2 - 4}}{2} \tag{2.34}$$

dir. $a, b \in \mathbb{N}$ olduğundan (2.34) eşitliğindeki $5b^2 - 4$ ifadesinin tam kare olması gerekir.

Tersine, $5b^2 - 4$ bir tam kare ve $a = \frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}$ olsun. $5b^2 - 4$ bir tam kare ve $u^2 \equiv 2\ (mod\ 3)$ kongrüansının çözümü olmadığından $b \equiv 0\ mod\ 3$ olamaz. Böylece, Sonuç 2.37 (b) durumunu ele almaya gerek yoktur. Diğer iki durumu ele alalım:

$a \equiv 0\ mod\ 3$ olsun. Bu durumda, $b \not\equiv 0\ mod\ 3$ tür. Bu da $a - b \not\equiv 0\ mod\ 3$ anlamına gelir ve buradan $b \equiv \mp(a-b)\ mod\ 3$ elde edilir. Böylece, Sonuç 2.37 (b) durumu sağlanır.

Şimdi, $a, b \not\equiv 0\ mod\ 3$ durumunu ele alalım.

$b \equiv 1\ mod\ 3$ ise, (2.31) den $a \equiv 2\ mod\ 3$ elde edilir ve Sonuç 2.37 (c) den $\frac{a}{b} \to S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$ F^3 ün bir kenarıdır.

$b \equiv 1\ mod\ 3$ ise, (2.31) den $a \equiv 1\ mod\ 3$ elde edilir ve Sonuç 2.37 (c) den $\frac{a}{b} \to S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$ F^3 ün bir kenarıdır.■

Sonuç 2.52.

$$3 = 4 - \frac{1}{1} \xrightarrow{S} 4 - \frac{1}{2} \xrightarrow{S} 4 - \frac{2}{5} \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} 4 - \frac{\frac{3b-\sqrt{5b^2+4}}{2}}{b} \rightarrow \cdots \tag{2.35}$$

şeklinde $S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dönüşümü ile elde edilen (2.35) yolu F^3 grafının artan sırada sonsuz bir yoludur ve bu yolun köşe noktalarının dizisinin limiti $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dir.

İspat: S dönüşümü $\left[3, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$ kümesinde kesin monoton artan olduğundan (2.35) ile verilen yol artandır. Bu yolun köşe noktalarının dizisinin limitinin $\lim_{b\to\infty}\left(4 - \frac{\frac{3b-\sqrt{5b^2+4}}{2}}{b}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ olduğu kolaylıkla görülür.■

Lemma 2.53. $\frac{5+\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$ olsun. Bu durumda,

(i) $\frac{a}{b} > S\left(\frac{a}{b}\right) > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dir.

(ii) $\frac{a}{b} \rightarrow S\left(\frac{a}{b}\right)$, F^3 ün bir kenarıdır $\Leftrightarrow$ $5b^2 + 4$ tam karedir ve $a = \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2}$ dir.

İspat:

(i) $\mathbb{R} - \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$ kümesi üzerinde $z > S(z)$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $\frac{5+\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} \leq 4$ için $\frac{a}{b} > S\left(\frac{a}{b}\right)$ dir. Öte yandan, S dönüşümü $[\frac{5+\sqrt{5}}{2}, 4) \cap \mathbb{Q}$ kümesinde monoton artan ve $S\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ olduğundan $S\left(\frac{a}{b}\right) > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dir.

(ii) Önce önermenin gerek şartını gösterelim. Bunun için, $\frac{a}{b} \rightarrow S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$ F^3 ün bir kenarı olsun. $\frac{a}{b} > S\left(\frac{a}{b}\right)$ olduğundan ve Sonuç 2.37 den,

$$a^2 - 5ab + 5b^2 - 1 = 0 \tag{2.36}$$

elde edilir. $4 \geq \frac{a}{b}$ olduğunu da göz önüne alarak (2.36) denklemini a için çözersek,

$$a = \frac{5b + \sqrt{5b^2 + 4}}{2} \tag{2.37}$$

elde edilir. Diğer taraftan $a, b \in \mathbb{N}$ olduğundan (2.37) eşitliğinden $5b^2 + 4$ sayısının tam kare olduğu sonucuna varılır. Böylece gerek şartın ispatı biter. Şimdi, yeter şartın ispatını verelim.

Tersine, $5b^2 + 4$ bir tam kare ve $a = \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2}$ eşitlikleri göz önüne alınarak daha önce yaptığımız gibi Sonuç 2.37 de verilen kenar koşulları ile $\frac{a}{b} \to S\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{4a-5b}{a-b}$ nin F^3 ün bir kenarı olduğu kolaylıkla elde edilir.■

Sonuç 2.54.

$$4 - \frac{0}{1} \xrightarrow{S} 4 - \frac{1}{3} \xrightarrow{S} 4 - \frac{3}{8} \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} 4 - \frac{\frac{3b-\sqrt{5b^2+4}}{2}}{b} \to \cdots \tag{2.38}$$

F^3 ün azalan sırada sonsuz bir yoludur ve bu dizinin limiti $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dir.

İspat: S dönüşümü $[\frac{5+\sqrt{5}}{2}, 4) \cap \mathbb{Q}$ kümesinde kesin monoton artan olduğundan (2.38) ile verilen yol azalan sıradadır. Bu yolun köşe noktalarının dizisinin limiti

$$\lim_{b\to\infty}\left(4 - \frac{\frac{3b-\sqrt{5b^2+4}}{2}}{b}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

dir.■

Teorem 2.55. k bir doğal sayı ve $v_1, v_2, \cdots, v_k$ köşeleri F^3 ün $[3, 4]$ deki en azından biri $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ sayısından küçük ve en azından biri $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ sayısından büyük olan köşeler olsunlar. Bu durumda, F^3 grafında $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to \infty$ yolu yoktur.

İspat: Teorem 2.54 de $[1,3]$ aralığında yapılan ispatın bir benzerini $[3, 4]$ aralığı için yapacağız.

$v_1, v_2, \cdots, v_k$ köşeleri F^3 ün $[3, 4]$ deki en azından biri $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ sayısından küçük ve en azından biri $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ sayısından büyük olan köşeleri olsun. $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ noktası F^3 te köşe olmadığından $v_m < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < v_{m+1}$ olacak şekilde $1 \leq m < k$ vardır ve $v_m \to v_{m+1}$, F^3 ün bir kenarıdır. (2.38) ile verilen köşeler dizisi, $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısına yakınsadığı için,

$$S^m\left(\frac{3}{1}\right) = v_m \to v_{m+1} = S^n(4) \tag{2.39}$$

olacak şekilde m ve n doğal sayıları mevcuttur.

Varsayalım ki, $n > m$ olsun. O halde; (2.28) ifadesi S^{-m} ile çarpılırsa Lemma 2.57 gereği mevcuttur en az bir $b \in \mathbb{N}$ öyle ki $\frac{3}{1} \to S^{n-m}\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2}}{b}$ F^3 ün bir kenarıdır. Buradan Sonuç 2.37 ye göre, $3b - \frac{5b+\sqrt{5b^2+4}}{2} = -1$ ve dolayısıyla $b = 1$ olmak zorundadır. Yani; $\frac{3}{1} \to \frac{4}{1}$ F^3 ün bir kenarıdır. Bu ise yine Sonuç 2.37 nin (a) şıkkı ile çelişir.

Varsayalım ki, $n < m$ olsun. Bu durumda yukarıdakine benzer şekilde (2.39) ifadesini S^{-n} ile çarparsak Lemma 2.52 gereği, $S^{m-n}\left(\frac{3}{1}\right) \to \frac{4}{1}$ elde edilir ve dolayısıyla

$$\frac{\frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2}}{b} \to \frac{4}{1}$$ F^3 ün bir kenarıdır. Buradan Sonuç 2.37 e göre,

$$\frac{5b+\sqrt{5b^2-4}}{2} - 4b = -1 \tag{2.40}$$

elde edilir. (2.40) ın çözümünden $b = 1$ veya $b = 2$ bulunur. Sonuç 2.37 ye göre; $b = 1$ için, $\frac{3}{1} \to \frac{4}{1}$ çelişkisi, $b = 2$ için, $\frac{7}{2} \to \frac{4}{1}$ çelişkisi elde edilir.

Son olarak $m = n$ olduğunu varsayalım. Bu durumda da $\frac{3}{1} \to \frac{4}{1}$ F^3 ün bir kenarı olmak zorundadır. Bu ise bir çelişkidir ve ispat tamamlanır.■

Daha önce ifade etmiş olduğumuz gibi Teorem 2.42 nin ispatını aşağıda tamamlayalım.

Teorem 2.42 nin ispatının devamı:

Teorem 2.51 ve Teorem 2.56 gereği, $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ aralığında F^3 grafının köşeleri ∞'a bağlanmaz ve dolayısıyla F^3 grafı bağlantısızdır. Böylece Teorem 2.42 nin ispatı tamamlanmıştır. ■

Buraya kadar yaptıklarımızla çalışmanın ana problemi olan F^3 grafının bağlantısızlığını göstermiş olduk. Şimdi, sayılar teorisi açısından önem arz eden sonuçlarımızı verelim. İlk olarak aşağıdaki teoremle, her $m \in \mathbb{Z}$ için $(9m^2-4)b^2+4$ sayısını tam kare yapan b doğal sayılarını elde edeceğiz.

Teorem 2.56. Tüm m doğal sayıları için $(9m^2-4)b^2+4$ sayısını tam kare yapan b doğal sayıları

$$0,\ 1,\ 3m,\ 9m^2-1,\ 3m(9m^2-1)-3m,\ \cdots,\ a,\ b,\ 3mb-a,\ \cdots$$

şeklindedir.

İspat: İspat için yukarıda yapıldığı gibi yalnızca $[1,4]$ aralığını kullanmamız yeterlidir. $M=\begin{pmatrix}-1 & 3m+2\\ -1 & 3m+1\end{pmatrix}$ matrisine karşılık gelen dönüşümün Γ^3 te olduğu açıktır. Diğer taraftan Sonuç 2.35 ile,

$$\frac{1}{1} \to M\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{3m+1}{3m} \tag{2.41}$$

F^3 te bir kenardır.

$M(x)=\frac{-x+3m+2}{-x+3m+1}$ dönüşümü için $M'(x)=\frac{1}{(-x+3m+1)^2}$ olduğundan M dönüşümü $[1,4]$ aralığında artan bir dönüşümdür. Ayrıca (2.30) dan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $M^k\left(\frac{1}{1}\right) < M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$ olduğunu kolayca görebiliriz. Yani, $\{M^k(1)\}$ dizisi $[1,4]$ kümesinde artan bir dizidir. Üstelik, $M^k(1)=\left[1\,;\ \underbrace{3m,3m,\cdots,3m}_{k\ tane}\right]$ veya başka bir gösterimle;

$$M^k(1) = 1+\cfrac{1}{3m-\cfrac{1}{3m-\cfrac{1}{3m-\ddots\cfrac{}{\cfrac{1}{3m}}}}} \tag{2.42}$$

sürekli kesir gösterimine sahiptir. Ayrıca, $\lim_{k\to\infty} M^k(1) = \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$ dir. Böylece, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $M^k(1) < \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$ eşitsizliği geçerlidir. Eğer, $\frac{a}{b} < \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$ ise, $T\left(\frac{a}{b}\right) < \frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$ olduğu kolayca görülür. Üstelik, $\frac{a}{b} \to T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a+(3m+2)b}{-a+(3m+1)b}$ F^3 te bir kenar ise Sonuç 2.35 ten $\forall k \in \mathbb{N}$ için $M^k\left(\frac{1}{1}\right) \to M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$ F^3 te bir kenardır. Buradan,

$$\frac{1}{1} \xrightarrow{M} M\left(\frac{1}{1}\right) \xrightarrow{M} M^2\left(\frac{1}{1}\right) \xrightarrow{M} \cdots \xrightarrow{M} \frac{a}{b} \xrightarrow{M} M\left(\frac{a}{b}\right) \xrightarrow{M} \cdots \tag{2.43}$$

F^3 te sonsuz uzunluklu bir γ yoludur. (2.32) ile verilen bu γ yolunun $\frac{a}{b}$ köşelerinin paydalarındaki b tam sayıları $(9m^2-4)b^2+4$ sayısını tam kare yapar. O halde, (2.32) ile verilen γ yolunu yeniden;

$$1+\frac{0}{1} \to 1+\frac{1}{3m} \to 1+\frac{3m}{9m^2-1} \to 1+\frac{9m^2-1}{3m(9m^2-1)-3m} \to 1+\frac{a'}{b'} \to 1+\frac{b'}{3mb'-a'} \to \cdots \tag{2.44}$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca,

$$0,\ 1,\ 3m,\ 9m^2-1,\ 3m(9m^2-1)-3m,\ \cdots, a,\ b,\ 3mb-a,\ \cdots \tag{2.45}$$

tam sayıları, $(9m^2-4)b^2+4$ sayısını tam kare yapar.

Şimdi rahatlıkla söyleyebiliriz ki sadece yukarıda (2.34) ile verilen negatif olmayan b tam sayıları için $(9m^2-4)b^2+4$ tam sayısı bir tam kare olur.

Tersine, $(9m^2-4)b^2+4$ sayısını tam kare yapan t doğal sayıları var olsun. O halde; $\frac{a_1}{b_1} = \frac{\frac{(3m+2)t-\sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2}}{t}$ rasyonel sayısı $\frac{3m+2-\sqrt{9m^2-4}}{2}$ sayısından daha küçüktür ve Sonuç 2.37 gereği, $\frac{a_1}{b_1} \to T\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$ F^3 ün bir kenarıdır. Varsayalım ki bazı k doğal sayıları için $M^k\left(\frac{1}{1}\right) < \frac{a_1}{b_1} < M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$ olsun.

$$T^{m}\left(\frac{1}{1}\right) < \frac{a_1}{b_1} < T^{m+1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right) < M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right) \tag{2.46}$$

elde ederiz. Buradan bazı y ler için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$M^{k}\left(\frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{\frac{(3m+2)y-\sqrt{(9m^2-4)y^2+4}}{2}}{y} < \frac{a_1}{b_1} \tag{2.47}$$

Diğer taraftan aşağıdaki eşitlikler de doğrudur.

$$\frac{a_1}{b_1} = 1 + \frac{\frac{(3m+2)t-\sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2}}{t} \rightarrow T\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \tag{2.48}$$

$$T\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = 1 + \frac{t}{3mt - \frac{3mt-\sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2}} \tag{2.49}$$

$$M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right) = 1 + \frac{y}{3my - \frac{3my-\sqrt{(9m^2-4)y^2+4}}{2}} \tag{2.50}$$

(2.48) ve (2.49) dan $T\left(\frac{a_1}{b_1}\right) < M^{k+1}\left(\frac{1}{1}\right)$ eşitsizliği doğrudur. Yani,

$$1 + \frac{t}{3mt - \frac{3mt-\sqrt{(9m^2-4)t^2+4}}{2}} < 1 + \frac{y}{3my - \frac{3my-\sqrt{(9m^2-4)y^2+4}}{2}} \tag{2.51}$$

eşitsizliği doğrudur. (2.47) eşitsizliğinden $t\sqrt{(9m^2-4)y^2+4} > y\sqrt{(9m^2-4)y^2+4}$ elde edilir. (2.51) eşitsizliğinden de $t\sqrt{(9m^2-4)y^2+4} < y\sqrt{(9m^2-4)y^2+4}$ elde edilir. Bu ise açık bir çelişkidir. Böylece, $\frac{a_1}{b_1}$ sayısı $\left\{M^k\left(\frac{1}{1}\right) : k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinde olmak zorundadır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.■

Sonuç 2.47 ve Sonuç 2.49 u göz önüne alırsak aşağıdaki iki sonucu ispatsız olarak verebiliriz. Bu iki sonuç ile $5b^2 \mp 4$ formundaki tam sayıları tam kare yapan b pozitif tam sayıları elde edildi.

Sonuç 2.57. $5b^2 + 4$ sayısını tam kare yapan negatif olmayan b tam sayıları,

$$0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ \cdots\ ,\ a,\ b,\ 3b-a,\ \cdots \qquad (2.52)$$

şeklindedir.■

Sonuç 2.58. $5b^2-4$ sayısını tam kare yapan negatif olmayan b tamsayıları,

$$1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ 89,\ \cdots,\ a,\ b,\ 3b-a,\ \cdots \qquad (2.53)$$

şeklindedir.■

Tanım 2.59. Fibonacci dizisi,
$f_1=1, f_2=1$ ve $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, n\geq 3$ şeklinde tekrarlı olarak tanımlanır. Bu dizinin terimlerine Fibonacci sayıları denir.
Buna göre Fibonacci sayılarının ilk birkaç tanesi şöyle sıralanır:
1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946...

Teorem 2.60. n bir pozitif tamsayı, $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olsun bu takdirde; n. Fibonacci sayısı $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$ dir.

İspat: İspatı n üzerinden ikinci matematiksel indüksiyon prensibini kullanarak yapalım:
$f_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5}=1$ için $n=1$ için doğrudur.
n ye kadar olan tüm tamsayılar için doğru olsun.
$n+1$ için doğru olduğunu gösterelim:
$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$, $f_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})$ olduğundan;
$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n+\alpha^{n-1}-\beta^n-\beta^{n-1})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}(\alpha+1)-\beta^{n-1}(\beta+1))$
dir. $\alpha^2=\alpha+1$ ve $\beta^2=\beta+1$ olduğundan;
$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}\alpha^2-\beta^{n-1}\beta^2)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$ elde edilir.

Yukarıdaki iki sonuçtan, Fibonacci dizisiyle ilişkili olarak aşağıdaki önemli sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.61. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri sırasıyla; $(0,1,3,8,21,55,144,\cdots,a,\ b,\ 3b-a,\cdots)$ ve $(1,2,5,13,34,89,\ \cdots,a,\ b,\ 3b-a,\cdots)$ olsun. Bu iki dizinin elemanlarından elde edilen $(a_1,b_1,a_2,b_2,\ \cdots,a_n,b_n,\cdots)$ dizisi Fibonacci dizisidir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle her $n \in \mathbb{N}^{+}$ için $a_n + b_n = a_{n+1}$ ve $b_n + a_{n+1} = b_{n+1}$ olduğunu göstermeliyiz. $n = 1$ için $a_1 + b_1 = 0 + 1 = 1 = a_2$ ve $b_1 + a_2 = 1 + 1 = 2 = b_2$ olup iddia doğrudur. Varsayalım ki $k \in \mathbb{N}^{+}$ için iddia doğru olsun. Yani;

$$a_k + b_k = a_{k+1} \text{ ve } b_k + a_{k+1} = b_{k+1} \tag{2.54}$$

olsun. Bu durumda göstermeliyiz ki; $a_{k+1} + b_{k+1} = a_{k+2}$ ve $b_{k+1} + a_{k+2} = b_{k+2}$ dir. Öncelikle $a_{k+1} + b_{k+1} = a_{k+2}$ olduğunu gösterelim.

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizilerinin tanımından $a_{k+1} = 3a_k - a_{k-1}$ ve $b_{k+1} = 3b_k - b_{k-1}$ olduğunu elde ederiz. Buradan (2.54) eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$$a_{k+1} + b_{k+1} = 3(a_k + b_k) - (a_{k-1} + b_{k-1}) = 3a_{k+1} - a_k = a_{k+2} \tag{2.55}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$b_k + a_{k+1} = 3b_{k-1} - b_{k-2} + 3a_k - a_{k-1} = 3(b_{k-1} + a_k) - (a_{k-1} + b_{k-2})$
$= 3b_k - b_{k-1} = b_{k+2}$ dir. Böylece $b_{k+1} + a_{k+2} = b_{k+2}$ olduğu da gösterilmiş olur. Bu ispatı bitirir.■

2.3. $\boldsymbol{\Gamma^0(n)}$ nin Alt Yörüngesel Grafları

Bu son kısımda yine modüler grubun çok çalışılan $\Gamma^0(n) = \left\{\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d, n \epsilon \mathbb{Z} \; ve \; ad - bcn = 1\right\}$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel graflarında devreler ve grafların bağlantılılıkları göz önüne alınacaktır. Bunun için $\Gamma^0(n)$ nin transitif olduğu en büyük kümelerden birinin alınması gerekir.

$\infty \epsilon \widehat{\mathbb{Q}}$ alındığında $\Omega \coloneqq \Gamma^0(n)(\infty) \coloneqq \left\{\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \Gamma^0(n)\right\}$ kümesi $\widehat{\mathbb{Q}}$ da $\Gamma^0(n)$ nin transitif olarak hareket ettiği en büyük kümelerden biridir. $\Gamma^0(n)$ nin Ω üzerindeki hareketinin transitif olduğu aşikardır. Çünkü $\forall v, w \epsilon \Omega$ için $T(\infty) = v$, $M(\infty) = w$ olan $T, M \epsilon \Gamma^0(n)$ vardır. Bu durumda; $M \circ T^{-1}(v) = w$ dır. Yani, $\Gamma^0(n)$ nin Ω üzerindeki hareketi transitiftir. Böylece, $(\Gamma^0(n), \Omega)$ bir transitif permütasyon grubudur.

Önerme 2.62. $n \epsilon \mathbb{N}$ olmak üzere, $\Gamma^0_\infty(n) = \langle \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ dır.

İspat:

$$\Gamma_\infty^0(n)=\left\{\begin{pmatrix}a & bn\\ c & d\end{pmatrix}\epsilon\Gamma:\begin{pmatrix}a & bn\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}a & bn\\ c & d\end{pmatrix}\epsilon\Gamma:\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}1 & bn\\ 0 & d\end{pmatrix}:1.d-bn.0=1\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}1 & bn\\ 0 & d\end{pmatrix}:d=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1 & bn\\ 0 & d\end{pmatrix}:b\epsilon\mathbb{Z}\right\}$$
$$=\left\langle\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\rangle \text{ dir.}\blacksquare$$

$n>1$ için, $\Gamma_\infty^0(n)<\Gamma(n)<\Gamma^0(n)$ dir. Böylece, $v=\frac{r}{s},w=\frac{x}{y}\epsilon\Omega$ ve $g(\infty)=v$ ve $h(\infty)=w$ olan $g,h\epsilon\Gamma^0(n)$ mevcut olduğundan; $v\approx w :\Leftrightarrow h\epsilon g\Gamma^0(n)$ ile tanımlanan bağıntı önerme 2.8. gereği " $\approx$ " bağıntısı Ω üzerinde $\Gamma^0(n)$ invaryant imprimitif denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.63. $g,h\epsilon\Gamma^0(n)$ olmak üzere, $g(\infty)=\frac{r}{s}$ ve h$(\infty)=\frac{x}{y}$ olsun. Bu takdirde, $\frac{r}{s}\approx\frac{x}{y}\Leftrightarrow x\equiv r\, modn$ ve $y\equiv s\, modn$ dir.

İspat:

"$\Rightarrow$"

$$v\approx w \Rightarrow g(\infty)\approx h(\infty)$$
$$\Rightarrow g^{-1}g'\epsilon\Gamma(n)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}r & r_0n\\ s & s_0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x & x_0n\\ y & y_0\end{pmatrix}\epsilon\Gamma(n)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}s_0 & -r_0n\\ -s & r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & x_0n\\ y & y_0\end{pmatrix}\epsilon\Gamma(n)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}s_0x-r_0yn & s_0x_0n-r_0y_0n\\ ry-sx & ry_0-sx_0n\end{pmatrix}\epsilon\Gamma(n)$$
$$\Rightarrow s_0x_0n-r_0y_0n\equiv ry-sx\equiv 0\, modn \text{ ve}$$
$$s_0x-r_0yn\equiv ry_0-sx_0n\equiv 1\, modn$$
$$\Rightarrow ry-sx\equiv 0\, modn \text{ ve } s_0x\equiv r_0y\equiv 1\, modn \text{ dir.} \qquad (*)$$

$g=\begin{pmatrix}r & r_0n\\ s & s_0\end{pmatrix},g'=\begin{pmatrix}x & x_0n\\ y & y_0\end{pmatrix}\epsilon\Gamma^0(n)\subset\Gamma$ olduğundan $rs_0-sr_0n=1$ ve $xy_0-yx_0n=1$ dir. Buradan $rs_0\equiv 1\, modn$ ve $xy_0\equiv 1\, modn$ elde edilir. (**)

(*) daki $s_0x\equiv 1\, modn$ kongrüansını r ile çarparsak $rs_0x\equiv r\, modn$ olur. (**) dan $rs_0\equiv 1\, modn$ olduğundan $x\equiv r\, modn$ elde edilir ve (*) dan $ry-sx\equiv 0\, modn$ olduğundan $ry\equiv sx\, modn \xRightarrow{x\equiv r\ modn} ry\equiv sr\, modn \xRightarrow{(r,n)=1} y\equiv s\, modn$ elde edilir.

"$\Leftarrow$"

$x \equiv r\, mod n$ ve $y \equiv s\, mod n$ olsun. $\frac{r}{s} \epsilon\, \Omega$ olduğundan $(r, sn) = 1$ dir. Böylece, $rs_0 - snx_0 = 1$ olan $r_0, s_0 \epsilon \mathbb{Z}$ vardır. Benzer şekilde, $\frac{x}{y} \epsilon\, \Omega$ olduğundan $(x, yn) = 1$ dir. Böylece, $xy_0 - ynx_0 = 1$ olan $x_0, y_0 \epsilon \mathbb{Z}$ vardır. O halde, $\begin{pmatrix} r & r_0 n \\ s & s_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ y & y_0 \end{pmatrix} \epsilon \Gamma^0(n)$ dir. Şimdi gösterelimki $\begin{pmatrix} r & r_0 n \\ s & s_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ y & y_0 \end{pmatrix} \epsilon \Gamma(n)$ dir.

$$\begin{pmatrix} r & r_0 n \\ s & s_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ y & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & -r_0 n \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ y & y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 x - r_0 n y & s_0 x_0 n - r_0 n y_0 \\ -sx + ry & -s x_0 n + r y_0 \end{pmatrix}$$

- $s_0 x_0 n - r_0 n y_0 = n(s_0 x_0 - r_0 y_0)$ olduğundan $s_0 x_0 n - r_0 n y_0 \equiv 0\, mod n$ dir.
- $rs_0 - snx_0 = 1$ olduğundan $rs_0 \equiv 1\, mod n \xRightarrow{x \equiv r\, mod n} xs_0 \equiv 1\, mod n \Rightarrow xs_0 - r_0 n y \equiv 1\, mod n$ dir.
- $\left.\begin{matrix} x \equiv y\, mod n \Rightarrow sx \equiv sr\, mod n \\ y \equiv s\, mod n \Rightarrow ry \equiv rs\, mod n \end{matrix}\right\} ry - sx \equiv 0\, mod n$ dir.

Böylece, $\begin{pmatrix} r & r_0 n \\ s & s_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x & x_0 n \\ y & y_0 \end{pmatrix} \epsilon \Gamma(n)$ yani $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y}$ dir.■

Lemma 2.64. $(a, n) = 1$, $(a, b) = c > 1$ olsun. Bu takdirde, $\exists k \epsilon \mathbb{Z}$ öyleki $(a, kn + b) = 1$ dir.

İspat: a ve b nin asal çarpanlarına ayrılışı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} p_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \ldots p_r^{\alpha_r}$, $p_i \epsilon \mathbb{P}$, $\alpha_i \epsilon \mathbb{N}$, $i \epsilon \{1,2, \ldots, r\}$

$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_t^{\beta_t} q_{t+1}^{\beta_{t+1}} \ldots q_l^{\beta_l}$, $q_j \epsilon \mathbb{P}$, $\beta_j \epsilon \mathbb{N}$, $j \epsilon \{1,2, \ldots, l\}$

Bu durumda, $c = (a,b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_t^{\gamma_t}$ dir. İddia ediyoruzki; $k = p_{t+1} p_{t+2} \ldots p_r$ olmak üzere,

$(a, kn + b) = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} p_{t+1}^{\alpha_{t+1}} \ldots p_r^{\alpha_r}, (p_{t+1} p_{t+2} \ldots p_r) n + p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} q_{t+1}^{\beta_{t+1}} \ldots q_l^{\beta_l}) = 1$ dir. Gerçekten;

Varsayalımki: $(a, kn + b) = m > 1$ olsun. Böylece; $\exists 1 \leq i \leq r$ öyleki $p_i \mid m$ dir.

- $i \epsilon \{1,2, \ldots, t\}$ ise, $p_i \mid (p_{t+1} p_{t+2} \ldots p_r) n + p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} q_{t+1}^{\beta_{t+1}}$ ve $p_i \mid b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} q_{t+1}^{\beta_{t+1}} \ldots q_l^{\beta_l}$ olduğundan $p_i \mid (p_{t+1} p_{t+2} \ldots p_r) n \xRightarrow{(p_i, n) = 1} p_i \mid p_{t+1} p_{t+2} \ldots p_r$ dir. Oysa, $i \epsilon \{1,2, \ldots, t\}$ olduğundan $p_i \neq p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots, p_r$ dir. Bu bir çelişkidir.
- $i \epsilon \{t + 1, t + 2, \ldots, r\}$ ise, $p_i \mid (p_{t+1} p_{t+2} \ldots p_r) n + p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} q_{t+1}^{\beta_{t+1}}$ ve $p_i \mid p_{t+1} p_{t+2} \ldots p_r$ olduğundan $p_i \mid b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t} q_{t+1}^{\beta_{t+1}} \ldots q_l^{\beta_l}$ dir. Oysa, $(p_i, q_{t+1} q_{t+2} \ldots q_l) = 1$ dir. Bu bir çelişkidir.

Bu bize $m = 1$ olduğunu verir.■

Teorem 2.65. Yukarıda tanımlanan " $\approx$ " bağıntısına göre bağıntısına göre Ω üzerindeki blokların(denklik sınıflarının) sayısı, φ Euler fonksiyonu olmak üzere, $n\varphi(n)$ dir.

İspat: $U_n = \{a_i \epsilon \mathbb{N} : (a_i, n) = 1, a_i < n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(n)}\}$, $a_i \not\equiv a_j$, $i \neq j$

$b_1 = 1$, $b_2 = 2$, … , $b_n = n$ olmak üzere $a_i \epsilon U_n$ ye karşılık gelen bloklar; $\left[\frac{a_i}{b_1}\right]$, $\left[\frac{a_i}{b_2}\right]$, … , $\left[\frac{a_i}{b_n}\right]$ dir. Bu blokların her biri farklı bloklardır. Çünkü, $1 \le j \le n$ olmak üzere, $(a_i, b_j) > 1$ ise Lemma 2.64 gereği $\exists k_j \epsilon \mathbb{Z}$ öyleki $(a_i, k_j n + b_j) = 1$ dir. Yani b_j yerine b_j yi temsilen $k_j n + b_j$ yazılır. Bu bize gösterirki her bir $(i \epsilon \{1,2, \dots, \varphi(n)\})$ a_i ye karşılık birbirinden farklı n tane blok vardır. Böylece toplam $n\varphi(n)$ tane blok vardır.■

Sonuç 2.66. $|\Gamma^0(n) : \Gamma(n)| = n\varphi(n)$ dir.■

2.3.1. $\boldsymbol{\Gamma^0(n)}$ nin $\boldsymbol{\Omega}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

2.1.2 paragrafı altında verilmiş olan alt yörüngesel graflar doğrultusunda G yerine $\Gamma^0(n)$ alalım. Bu durumda, her bir $O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesi, $v \epsilon \Omega$ olmak üzere, (∞, v) çifti içerir. $v = \frac{u}{n} \epsilon\ \Omega$ alırsak $(\infty, \frac{u}{n})$ yi içeren alt yörüngeyi yine $O_{u,n}$ ile ve ilgili alt yörüngesel grafı $\mathcal{G}_{u,n}$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.67. $O_{u,n} = O_{u',n'} \Leftrightarrow g(\frac{u}{n}) = \frac{u'}{n'}$ olan $g \epsilon \Gamma^0_\infty(n)$ mevcuttur.

İspat: $O_{u,n} = O_{u',n'}$ olsun. Bu durumda, $g(\infty) = \infty$ ve $g\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ olan $g \epsilon \Gamma^0(n)$ mevcuttur. $g(\infty) = \infty$ olduğundan $g \epsilon \Gamma^0_\infty(n)$ dur.

Tersine $g\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u'}{n'}$ ve $g \epsilon \Gamma^0(n)$ olsun. Zaten $g(\infty) = \infty$ olduğundan $O_{u,n} = O_{u',n'}$ dür.■

Önerme 2.68. $\mathcal{G}_{u,n} = \mathcal{G}_{u',n'} \Leftrightarrow u \equiv u'\ mod n^2$ ve $n = n'$ dür.

İspat: $\mathcal{G}_{u,n} = \mathcal{G}_{u',n'}$ olsun. Önerme 2.66 dan $g(\frac{u}{n}) = \frac{u'}{n'}$ olan $g \epsilon \Gamma^0_\infty(n)$ vardır. Bu durumda, $g \epsilon \Gamma^0_\infty(n)$ Önerme 2.59 gereği $g = \begin{pmatrix} 1 & bn \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formundadır.

$g\left(\frac{u}{n}\right) = \begin{pmatrix} 1 & bn \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + bn^2 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ n' \end{pmatrix} \Rightarrow u \equiv u'\ mod n$ ve $n = n'$ dür.

Tersi aşikardır.■

Sonuç 2.69. $u\epsilon U_{n^2}$ olmak üzere, toplam $\varphi(n^2)$ tane farklı $\mathcal{G}_{u,n}$ vardır.■

Teorem 2.70. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}\, \mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

(a) $x \equiv ur\ modn^2,\ y \equiv us\ modn\ ,\ ry - sx = n$ veya

(b) $x \equiv -ur\ modn^2,\ y \equiv -us\ modn\ ,\ ry - sx = -n$.

İspat:

"⇒"

$\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olsun. Bu durumda, $(\frac{r}{s}, \frac{x}{y})\epsilon O_{u,n} = O(\infty, \frac{u}{n})$ dir. Dolayısı ile; $\exists g = \begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \Gamma^0(n)$: $g(\infty) = \frac{r}{s}$ ve $g\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{x}{y}$ dir. Bu bize;

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & -x \\ -s & -y \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

$$\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -x \\ s & -y \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

matris eşitliklerinden birini verir.

(2.56) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a & au + bn^2 \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & x \\ s & y \end{pmatrix} \Rightarrow a = r,\ c = s,\ au + bn^2 = x,\ cu + dn = y \Rightarrow ru + bn^2 = x$ ve $su + dn = y \Rightarrow x \equiv ur\ modn^2$ ve $y \equiv us\ modn$ elde edilir. (2.56) eşitliğinde iki tarafın determinantı alınırsa, $(ad - bc).n = ry - sx \xRightarrow{ad-bc=1} ry - sx = n$ elde edilir. Benzer şekilde (2.57) eşitliğinden de $x \equiv ur\ modn^2,\ y \equiv us\ modn\ ,\ ry - sx = n$ elde edilir.

(2.58) eşitliğini ele alalım:

$\begin{pmatrix} a & au + bn^2 \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & x \\ -s & y \end{pmatrix} \Rightarrow a = -r\ ,\ c = -s\ ,\ au + bn^2 = x\ ,\ cu + dn = y \Rightarrow -ru + bn^2 = x$ ve $-su + dn = y \Rightarrow x \equiv -ur\ modn^2$ ve $y \equiv -us\ modn$ elde edilir. (2.58) eşitliğinde iki tarafın determinantı alınırsa, $(ad - bc)(-n) = ry - sx \xRightarrow{ad-bc=1}$

$ry - sx = -n$ elde edilir. Benzer şekilde, (2.59) eşitliğinden de $x \equiv -ur\, mod n^2$, $y \equiv -us\, mod n$, $ry - sx = -n$ elde edilir. Böylece bu dört durumdan (a) ya da (b) sağlanır.

"⇐"

Farzedelimki; (a) sağlansın yani $x \equiv ur\, mod n^2$, $y \equiv us\, mod n$, $ry - sx = n$ olsun. $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğunu yani $\left(\frac{r}{s}, \frac{x}{y}\right) \epsilon\, O_{u,n}$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \equiv ur\, mod n^2 \Rightarrow \exists b \epsilon \mathbb{Z} : x = ur + bn^2$ ve

$y \equiv us\, mod n \Rightarrow \exists c \epsilon \mathbb{Z} : y = us + cn$ dir.

Şimdi $\begin{pmatrix} r & bn \\ s & c \end{pmatrix}$ matrisinin $\Gamma^0(n)$ nin elemanı olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$g(\infty) = \begin{pmatrix} r & bn \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, $g\left(\frac{u}{n}\right) = \begin{pmatrix} r & bn \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru + bn^2 \\ su + cn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ve $ry - sx = n$ olduğundan $r(us + cn) - s(ur + bn^2) = n \Rightarrow rus + rcn - sur - sbn^2 = n \Rightarrow rcn - sbn^2 = n \Rightarrow rc - sbn = 1 \Rightarrow det\begin{pmatrix} r & bn \\ s & c \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow g = \begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \Gamma^0(n)$ elde edilir. Benzer şekilde (b) nin sağlandığı varsayılıp $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olduğu elde edilir.■

Sonuç 2.71. $u^2 \not\equiv -1\, mod n^2$ ve $uv \equiv -1\, mod n^2$ olsun. Bu takdirde, $\mathcal{G}_{u,n}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

İspat:

$\frac{x}{y} \to \frac{r}{s}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenar olsun. Teorem 2.66 dan

(a) $r \equiv ux\, mod n^2$, $s \equiv uy\, mod n$, $xs - ry = n$ veya

(b) $r \equiv -ux\, mod n^2$, $s \equiv -uy\, mod n$, $xs - ry = -n$ dir.

(a) nın sağlandığını varsayalım:

• $r \equiv ux\, mod n^2$ olduğundan $vr \equiv vux\, mod n^2 \xRightarrow{uv \equiv -1\, mod n^2} vr \equiv -x\, mod n$ yani, $x - vr\, mod n^2$ elde edilir. (2.60)

• $s \equiv uy\, mod n$ den $vs \equiv vuy\, mod n$ dir. $\xRightarrow{uv \equiv -1\, mod n}$ $vs \equiv -y\, mod n$ yani, $y \equiv -vs\, mod n$ elde edilir. (2.61)

• $sx - ry = n$ olduğundan $ry - sx = -n$ dir. (2.62)

(2.60), (2.61) ve (2.62) den $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{v,n}$ de bir kenardır. Benzer şekilde (b) nin sağlandığı varsayılarak $\frac{r}{s} \to \frac{x}{y}$ nin $\mathcal{G}_{v,n}$ de bir kenar olduğu gösterilebilir. Şimdi gösterelimki, $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) = \emptyset$ tur. Varsayalımki $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = O\left(\frac{u}{n}, \infty\right)$ (Alt yörüngeler ya eşit ya ayrıktırlar.) dur. Dolayısı ile, $\exists g = \begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon \Gamma^0(n)$ öyleki $g\left(\infty, \frac{u}{n}\right) = (\frac{u}{n}, \infty)$ dur. Buradan;

$\begin{pmatrix} a & bn \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ dir. Yani, $\begin{pmatrix} a & au + bn^2 \\ c & cu + dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -1 \\ n & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece, $a = u$, $c = n$, $au + bn^2 = -1$, $cu + dn = 0$ dır.

$cu + dn = 0 \overset{c=n}{\Longrightarrow} nu + dn = 0 \Rightarrow n(u + d) = 0 \overset{n \neq 0}{\Longrightarrow} u + d = 0 \Rightarrow d = -u$. Böylece, $g = \begin{pmatrix} u & bn \\ n & -u \end{pmatrix}$ elde edilir ve $g \epsilon \Gamma^0(n) \subset \Gamma$ olduğundan $det\begin{pmatrix} u & bn \\ n & -u \end{pmatrix} = 1$ dir. Buradan $-u^2 - bn^2 = 1 \;\Rightarrow\; u^2 \equiv -1\, mod n^2$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) \neq \emptyset$ olduğunu varsaymaktan geldi. O halde, $O\left(\infty, \frac{u}{n}\right) \cap O\left(\frac{u}{n}, \infty\right) = \emptyset$ tur. Sonuç olarak $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $\mathcal{G}_{v,n}$ alt yörüngesel grafları eşleşmiştir.■

Sonuç 2.72. $\mathcal{G}_{u,n}$ kendi eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1\; mod n^2$ ■

Uyarı: Γ modüler grubunun $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi ile oluşan alt yörüngesel grafları olan $\mathcal{G}_{u,n}$ lerde herhangi bir bağlantılı bileşenin köşeleri " $\approx$ " bağıntısına göre bir tek blokta idi. Ancak burada bu durum söz konusu değildir. Gerçekten;

$u = 2,\, n = 5$ alınırsa , $\frac{3}{7} \to \frac{44}{101} \epsilon\, \mathcal{G}^0_{2,5}$ olmasına rağmen $\frac{3}{7}$ ile $\frac{44}{101}$ aynı blokta değildirler. Yani, $\frac{3}{7} \not\approx \frac{44}{101}$ dir. Çünkü, $44 \not\equiv 3\; mod 5$ tir.

$F^0_{u,n}$ ile $\mathcal{G}^0_{u,n}$ nin $[\infty] = \left\{\frac{a}{bn} \epsilon \Omega \,:\, a \equiv 1\; mod n\right\}$ bloğunu köşe kabul eden alt yörüngesel grafını gösterelim. Buna göre;

Teorem 2.73. $\frac{r}{sn} \to \frac{x}{yn} \epsilon\, F^0_{u,n} \Leftrightarrow$

(a) $x \equiv ur\; mod n^2$ ve $ry - sx = 1$ veya

(b) $x \equiv -ur\; mod n^2$ ve $ry - sx = -1$ dir.■

Teorem 2.74. $\Gamma(n)$ grubu $F^0_{u,n}$ nin kenarlarını ve köşelerini transitif olarak permüte eder.■

Lemma 2.75.

(i) $F^0_{u,n}$nin tüm v köşeleri için, $F^0_{u,n} \to F^0_{-u,n}$ ye $T(v) = -v$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

(ii) Eğer $m \mid n$ ise $F^0_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $F^0_{u,n}$ den $F^0_{u,m}$ nin bir alt grafına $T(v) = {nv}/{m}$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır. ■

Teorem 2.76. $F^0_{1,2}$ bağlantılıdır.

İspat: $\frac{a}{2b} > 0$ olsun ve b üzerinden indüksiyonla hareket edelim:

$b = 1$ için $\frac{a}{2}$ ∞ ile birleştirilebilir.

Farzedelimki $2b$ den küçük bütün paydalar için elde edilen kesir bir yolla ∞ ile birleştirilebilsin. Amacımız $\frac{a}{2b}$ kesrinin paydası $2b$ den küçük bir kesirle bir kenar oluşturmasıdır. $(a, b) = 1$ olduğundan $ad - bc = 1$ olan c ve d tamsayıları vardır. Genellikten bir şey kaybetmeden $0 < d < b$ alabiliriz çünkü $0 < d < b$ değil ise bir $k\epsilon\mathbb{Z}$ için c yerine $c + ka$ ve d yerine $d + kb$ alarak $0 < d < b$ yi oluşturabiliriz. Şimdi c nin tek ve çift olma durumunu göz önüne alalım:

c tek ise,

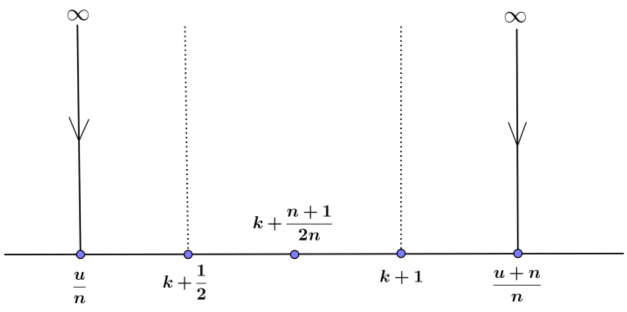
$\frac{c}{2d}$ ϵ $F^0_{1,2}$ aranan kesirlerden biridir. Çünkü, $a.2d - c.2b = 2$ dir ve bu durumda $\frac{a}{2b} \to \frac{c}{2d}$ veya $\frac{c}{2d} \to \frac{a}{2b}$ $F^0_{1,2}$ de bir kenardır. Gerçekten;

$\frac{a}{2b} \overset{>}{\to} \frac{c}{2d}$ ise $2ad - 2bc = 2$ dir. $c \equiv a\, mod 2$ ancak farzedelimki $c \not\equiv a\, mod 4$ olsun. Bu durumda, $c \equiv a\, mod 2$ olduğundan $a - c = 2k$, k tek, olan bir $k\epsilon\mathbb{Z}$ vardır. Buradan, $a + c = 2c + 2k = 2(c + k) \equiv 0 mod 4$ tür. Böylece, $\frac{c}{2d} \overset{<}{\to} \frac{a}{2b}$ elde edilir. Çünkü bu durumda, $a \equiv -c\, mod 4$ ve $2bc - 2ad = -2$ $F^0_{1,2}$ de kenar olma şartları sağlanır.

c çift ise,

Bu durumda, $a - c$ tek ve $0 < b - d < b$ dir. Dolayısı ile, yukarıdaki tartışma ile $\frac{a-c}{2(b-d)} \to \frac{a}{2b}$ veya $\frac{a}{2b} \to \frac{a-c}{2(b-d)}$ ϵ $F^0_{1,2}$ dir. Bu bize $F^0_{1,2}$ bağlantılı olduğunu söyler.■

Teorem 2.77. $n \geq 3$ için $F^0_{u,n}$ bağlantısızdır.



Şekil 12. $n \geq 3$ için $F_{u,n}^0$ bağlantısızdır

İspat:

$n \geq 3$ ve $u \equiv 1\ mod n$ ve $u \epsilon U_{n^2}$ olduğundan $u = kn + 1$ biçimindedir ve ayrıca $\frac{2k+1}{2}$ ve $k + 1$ $[\infty]$ bloğunda değildirler. Göstereceğizki $Rez = k + \frac{1}{2}$ ve $Rez = k + 1$ doğruları arasında $F_{u,n}^0$ nin köşeleri, $F_{u,n}^0$ nin bu şeridin dışında kalan bir köşesi ile kesişmezler. Tabiki bu şeritte $F_{u,n}^0$ nin bir köşesi olmalıdır ki vardır. Örneğin, $k + \frac{n+1}{2n}$ bu şeritte olup $F_{u,n}^0$ nin bir köşesidir.farzedelimki $\frac{mn+1}{sn} < \frac{2k+1}{2} < \frac{ln+1}{yn}$ olan bir $\frac{mn+1}{sn} \to \frac{ln+1}{yn}$ (veya $\frac{ln+1}{yn} \to \frac{mn+1}{sn}$) kenarı vardır. Eşitsizliği n ile çarparsak $\frac{mn+1}{s} < \frac{n(2k+1)}{2} < \frac{ln+1}{y}$ dir.

- n çift ise;

$\frac{n(2k+1)}{2} \epsilon\ \mathbb{Z}$ dir. Böylece, F^0 da $\frac{mn+1}{s} \to \frac{ln+1}{y}$ kenarı ile $\infty \to \frac{n(2k+1)}{2}$ kenarı kesişir. Oysa F^0 nin kenarları üst yarı düzlemde kesişmezler.

- n tek ise;

$n = 2t + 1$ biçimindedir. Buradan, $n(2k + 1) = (2t + 1)(2k + 1) = 4tk + 2(t + k) + 1$ dir. Böylece, $\frac{n(2k+1)}{2} = (2tk + t + k) + \frac{1}{2}$ elde edilir. Farey grafı göz önüne alınırsa, $s = y = 1$ ve dolayısı ile, $mn + 1 = 2tk + t + k$ ve $2tk + t + k + 1 = ln + 1$ elde edilir. İkinci eşitlikten $n \mid (2tk + t + k)$ dır. Böylece birinci eşitlikten $n \mid 1$ çelişkisi elde edilir. Bu bize $Rez = k + \frac{1}{2}$ ve $Rez = k + 1$ şeridinde $F_{u,n}^0$ nin hiçbir köşesi bu şeridin dışındaki hiçbir köşe ile bağlanamaz bu da bize $F_{u,n}^0$ nin bağlantısız olduğunu söyler.■

Teorem 2.78. $n\epsilon\mathbb{N}$, $n > 1$ ve $u\epsilon U_{n^2}$ olsun. Bu takdirde, $F_{u,n}^0$ de üçgen yoktur.

İspat: $\Gamma^0(n)$ nin $[\infty]$ bloğu üzerindeki hareketi transitif olduğundan $F_{u,n}^0$ de bir yönlü üçgen varsa $\infty \to \frac{a}{bn} \to \frac{c}{dn} \to \infty$ biçiminde alınabilir. Teorem 2.70 ten $b = d = 1$ dir. $\frac{a}{bn}, \frac{c}{dn} \epsilon[\infty]$ olduğundan $a \equiv c \equiv 1\ mod n$ dir. $\infty \to \frac{a}{n}$ olduğundan $a \equiv u\ mod n^2$ dir.

Böylece $a = u$ alınabilir. Dolayısıyla $\frac{u}{n} \to \frac{c}{n}$ kenarından $u - c \equiv \mp 1$ dir. Buradan, $c = u \mp 1$ dir. Sonuç olarak $\infty \to \frac{u}{n} \to \frac{u\mp 1}{n} \to \infty$ elde edilir. Ancak $u \equiv 1\, modn$ olduğundan $\frac{u+1}{n}$ ve $\frac{u-1}{n}$ $[\infty]$ bloğunda kenar olamaz. $u + 1 \equiv 2\, modn$ ve $u - 1 \equiv 0\, modn$ dir. Yani, $\frac{u+1}{n}$ ve $\frac{u-1}{n}$ $F_{u,n}^{0}$ de köşe olamazlar. Bu bize herhangi bir yönlü üçgenin olamayacağını söyler. Üçgen $\infty \to \frac{u}{n} \leftarrow \frac{u\mp 1}{n} \to \infty$ biçiminde ise, $\frac{u}{n} \leftarrow \frac{u\mp 1}{n}$ olduğundan $u \equiv u(u+1) modn^2$ elde edilir. Buradan, $u + 1 \equiv 0\, modn$, yani $u \equiv -1\, modn$ elde edilir. Oysa, $u \equiv 1\, modn$ idi. Bu çelişki $F_{u,n}^{0}$ de üçgen olamayacağını verir.■

3. İRDELEME

Üst yarı düzlemi üst yarı düzleme resmeden $PSL(2,\mathbb{R})$ lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 1980 yıllarında ortaya atılan en büyük sonlu mertebeli basit gruptan dolayı bazı özel alt grupların önemi artmıştır. Bu grupların en önemlilerinden biri $\Gamma_0(n)$ kongrüans alt grubu olmuştur. Bu grubun normalleyen grubunun yapısını belirlemede graf teoride yerini bulan alt yörüngesel graflara olan talep artmış; bu alt yörüngesel grafların devre uzunlukları ile $PSL(2,\mathbb{R})$ nin bazı alt gruplarının üretici elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki önem kazanmıştır.

Diğer taraftan graflarla, sayılar teorisi ile ilgili bazı temel sonuçların özellikle Fibonacci sayılarının elde edilmesi graf teorinin önemini daha da artırmıştır.

Bu tez çalışmasında bazı temel kavramların verilmesi Γ mödüler grubu için alt yörüngesel grafların incelenmesi ve bir önemli sonuç olarak Fibonacci sayıları elde edilmiştir. Ek olarak $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel grafları incelenmiş, bağlantılılık ve bağlantısızlık durumları ortaya konmuştur.

Esas itibarı ile [14] ve [8] referansımız olmuştur.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada Γ modüler grubun alt yörüngesel grafları ile ilgili tanım ve teoremler verildi ve aşağıdaki çıktılar elde edildi.

(1) Γ modüler grubu için verilen graflarda devre uzunlukları incelendi.

(2) Γ^3 ün hareketi ile oluşan graflardan hareketle Fibonacci sayılarına ulaşıldı.

(3) $\Gamma^0(n)$ kongrüans alt grubunun alt yörüngesel grafları oluşturuldu, ilgili blokların sayısı bulundu ve grafların bağlantılı olup olmadıkları verildi.

5. ÖNERİLER

(1) Γ nın mevcut olan $\Gamma_0(L,M)=\left\{\begin{pmatrix} a & bM \\ cL & d \end{pmatrix}\epsilon\Gamma\right\}$ alt grubunun alt yörüngesel grafları ve temel özellikleri incelenebilir.

(2) Genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının temel özellikleri incelenebilir.

(3) Graflarda bir köşeyi en yakın köşeye götüren grup elemanlarının özellikleri araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Schoneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.

2. Jones, G.A. ve Singerman, D., Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

3. Rankin, R.A., Modular Forms and Functions, Cambridge University Press, 1978.

4. Kesicioğlu, Y., Γ^3 ve G_5 Hecke Gruplarının Alt Yörüngesel Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

5. Akbaş, M., On Suborbital Graphs for The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001), 647-652.

6. Sims, C.C., Graphs and Finite Permutation Groups, Mathematische. Zeitschrift., 95(1967) 76-86.

7. Anderson James W., Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag, 2000.

8. Kör, T., Bir Tip Modüler Graf ve Fibonacci Sayıları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.

9. Leveque,W.J., Fundementals of Number Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

10. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1989.

11. Sheets Christina L., Hyperbolic Geometry, July 2007.

12. Christi Donald, Hyperbolic Geometry in the High School Geometry Classroom, Iowa State University, 2011.

13. Değer, A. H., $\Gamma_0(n)$ Grubunun Alt Yörüngesel Graflarındaki $\hat{\mathbb{Q}}$ Köşeli Minimal Uzunluklu Eğriler, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

14. Jones, G.A., Singerman, D. Ve Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, Cambridge, 160(1991) 316-338.

15. Rosen, Kenneth H., Elementary Number Theory and Its Applications, Sixth Edition Monmouth University, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice Ünal 28.11.1988 tarihinde Giresun'un Görele ilçesinde doğdu. 2002 yılında Görele Ziya Okay İlköğretim Okulunu bitirdikten sonra 2006 yılında Beşikdüzü İMKB Anadolu Öğretmen Lisesindeki öğrenimini tamamladı. 2011 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Öğretmenliğinden mezun oldu ve aynı yıl içerisinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde tezli yüksek lisansa başladı. Yabancı dili İngilizcedir.