KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUBUN NORMAL VE SERBEST ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep AKDEMİRCİ

ARALIK 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUBUN NORMAL VE SERBEST ALT GRUPLARI

Zeynep AKDEMİRCİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20.11.2012
Tezin Savunma Tarihi : 10.12.2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Zeynep AKDEMİRCİ Tarafından Hazırlanan

Modüler Grubun Normal ve Serbest Alt Grupları

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 20/11/2012 gün ve 1482 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : **Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ** ....

Üye : **Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ** ....

Üye : **Prof. Dr. Hilmi ZENGİN** ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Γ Modüler grubunun Γ^2, Γ^3 gibi bazı alt gruplarının yapısını, normal ve serbest alt gruplarını; serbest çarpımın tanımını ve buradan elde edilecek sonuçları sunmak amacı ile Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak yapılmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca tezin yazımında verdiği destekten dolayı arkadaşlarıma ve yine öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli öğretim üyelerine ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

Zeynep AKDEMİRCİ
Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Modüler Grubun Normal ve Serbest Alt Grupları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 10/12/2012

Zeynep AKDEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ III
TEZ BEYANNAMESİ IV
İÇİNDEKİLER V
ÖZET VI
SUMMARY VII
SEMBOLLER DİZİNİ VIII
1. GENEL BİLGİLER 1
1.1. Giriş 1
1.2. Yarı Gruplar, Monoidler ve Gruplar 1
1.3. Homomorfiler ve Altgruplar 4
1.4. Devirli Gruplar 5
1.5. Yan Sınıflar 7
1.6. Normallik, Bölüm Grupları ve Homomorfizmalar 9
1.7. Matris Grupları ve Kesirli Lineer Dönüşümler 11
1.8. Modüler Grup 12
1.9. $\Gamma 2$ Modüler Alt Grubu 17
1.10. $\Gamma 3$ Modüler Alt Grubu 17
1.11. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları 17
1.12. Serbest Gruplar 18
1.12.1. Serbest Monoidler 19
1.12.2. Serbest Grupların Yapısı 19
1.13. Serbest Çarpım 22
1.13.1. Kurosh Alt Grup Teoremi 23
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 24
2.1. Modüler Grupların Bazı Alt Gruplarının Yapısı 24
2.1.1. Γm Grupları 24
2.2. Modüler Grubun Serbest ve Normal Alt Grupları 40
3. İRDELEME 45
4. SONUÇLAR 46
5. ÖNERİLER 47
6. KAYNAKLAR 48
ÖZGEÇMİŞ

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

MODÜLER GRUBUN NORMAL VE SERBEST ALT GRUPLARI

Zeynep AKDEMİRCİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2012, 49 Sayfa

Bu tezde esas amaç Γ Modüler grubunun alt gruplarını incelemek ve bu konu hakkında detaylı bilgi vermektir.

Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgilerden bahsedilerek literatürdeki bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde Γ modüler grubunun normal ve serbest alt grup gibi bazı alt gruplarının yapısı ve serbest çarpımla ilgili bazı önemli teorem ve sonuçlar sunuldu.

Anahtar Kelimeler: Modüler Grup, Serbest Çarpım, Serbest Grup, Komütatör, İndeks, Kongrüans Alt Grup.

Master Thesis

SUMMARY

FREE AND NORMAL SUBGROUPS OF THE MODULAR GROUP

Zeynep AKDEMİRCİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2012,49 Pages

The major aim of the present thesis is devoted to investigation of the subgroups of modular group Γ and give detailed information on these groups.

In the first chapter, general informations about the subject are discussed and proofs of some important theorems and conclusions in the literature were given in detail.

In the second chapter, the structure of some subgroups of the modular group like normal subgroup, free subgroup and some important theorems and conclusions about free product are introduced.

Key Words: Modular Group, Free Product, Free Group, Commutator, İndex, Congruance Subgroup.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\boldsymbol{\Gamma}$	:	Modüler grup
$\boldsymbol{\Gamma^2}$	:	Modüler grubun elemanlarının kareleri alınarak elde edilen alt grup
$\boldsymbol{\Gamma^3}$	:	Modüler grubun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen alt grup
$\boldsymbol{\Gamma_0(n)}$	:	Modüler grubun $c \equiv 0\ (mod\ n)$ olan alt grubu
$\boldsymbol{\|A:B\|}$	:	B alt grubunun A grubundaki indeksi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{Q}}$	:	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
∞	:	sonsuz
$\boldsymbol{PSL(2,}\mathbb{R})$	:	Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$\boldsymbol{SL(2,}\mathbb{Z})$	:	Katsayıları tamsayı olan lineer matrislerin grubu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarında ayrık gruplar teorisine temel teşkil edebilecek bazı önemli sonuçlar ilk defa Henry Poincare tarafından göz önüne getirilmiş ve eliptik fonksiyonlar teorisinin genelleştirilmesi için kullanılmıştır. Fuchsian grupları adı verilen ve sistematik çalışmasını Henry Poincare'nin geliştirdiği bu ayrık grupların invaryant bıraktığı fonksiyonlar üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmıştır. Lineer kesirli dönüşümler grubu özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve invaryant teorinin keşfiyle birlikte büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle; gerek analiz gerekse cebirsel yöntemlerle derinlemesine incelenmiştir. Eliptik eğrilerin aritmetiği, integral, kuadratik formlar ve eliptik modüler fonksiyonlar teorilerindeki önemi nedeniyle en çok Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(N), \Gamma_0(N), \Gamma^0(N), \Gamma_1(N)$ grupları üzerinde çalışılmıştır. Son yıllarda sayılar teorisinde de Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları Pierre de Fermat'ın 1637 yılında ifade ettiği son teoreminin ispatında oldukça önemli bir yer teşkil ettiği görülmektedir.

Γ modüler gruplarıyla ilgili olarak Morris Newman tarafından 1960 da yayınlanan " Subgroups of the modular group and sum of squares" adlı makalede modüler grupların alt grupları, kongrüans alt grupları ve modüler formlar incelenmiştir.

M. Akbaş' ın 2001 yılındaki "On Suborbital Graphs For The Modular Group" adlı çalışmasında ayrık grupların üretici eliptik elemanlarının mertebeleri arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

1.2. Yarı Gruplar, Monoidler ve Gruplar

$G \neq \emptyset$ bir küme "." da G üzerinde bir ikili işlem olsun. "." işlemi $G \times G \to G$ ye bir fonksiyon olduğundan $.(a,b) = a.b$ yazacağız. Kolaylık açısından $a.b$ yi ab ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.1.

$G \neq \emptyset$ olsun.$(G,.)$ ikilisine bir yarı grup adı verilir $\Leftrightarrow$

Birleşme özelliği : $\forall\, a, b, c \in G$ için $a(bc) = (ab)c$ dir.

- $(G,.)$ yarı grubuna monoiddir denir $\Leftrightarrow$

$\forall\, a \in G$ için $\exists\, e \in G$ öyle ki $ae = ea = a$ dir.

- G monoidi bir gruptur $\Leftrightarrow$

$\forall\, a \in G$ için $ab = ba = e$ olacak şekilde $b \in G$ ters elemanı mevcuttur ve $b = a^{-1}$ ile gösterilir.

- Gyarı grubu komütatiftir (abel, değişmeli) denir $\Leftrightarrow$

$\forall\, a, b \in G$ için $ab = ba$ dır.

G bir grup olsun. G kümesinin eleman sayısına G grubunun mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. Eğer $|G|$ sonlu ise G ye sonlu grup, $|G|$ sonsuz ise G ye sonsuz gruptur denir.

Teorem 1.2.2. [6]

G bir monoid ise e birim elemanı tektir. Eğer G bir grup ise

i) $c \in G$ ve $cc = c \Longrightarrow c = e$

ii) $\forall\, a, b, c \in G$ için $ab = ac \Longrightarrow b = c$ (soldan kısaltma) ve
$ba = ca \Longrightarrow b = c$ (sağdan kısaltma)

iii) Her bir $a \in G$ için $a^{-1} \in G$ ters elemanı tektir.

iv) Her $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$

v) Her $a, b \in G$ için $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

vi) $\forall\, a, b \in G$ için $ax = b$ ve $ya = b$ denklemlerinin G de tek çözümü vardır.
$G: x = a^{-1}b$ ve $y = ba^{-1}$
dir.

Önerme 1.2.3. [6]

G bir yarı grup olsun. G bir gruptur $\Leftrightarrow$

i) $\forall\, a \in G$ için $ea = a$ olacak biçimde bir $e \in G$ vardır. (sol birim eleman)

ii) $\forall\, a \in G$ için $a^{-1}a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. (sol ters eleman)

şartları sağlanır.

Önerme 1.2.4. [6]

G bir yarı grup olsun. G bir gruptur $\Leftrightarrow$ $\forall\, a, b \in G$ için $ax = b$ ve $ya = b$ denklemlerinin çözümü olan x ve y noktaları G de mevcuttur.

İspat: ($\Longrightarrow$) Trivial. ($x = a^{-1}b$, $y = b^{-1}a$)

($\Longleftarrow$) $\forall\, a, b \in G$ için $ax = b$ ve $ya = b$ olacak şekilde $x, y \in G$ olsun. b, G nin herhangi bir elemanı olmak üzere hipotezden $yb = b$ olacak şekilde bir $y = e \in G$ vardır. Yine hipotezden $a \in G$ olmak üzere $bf = a$ olacak şekilde $f \in G$ vardır. $ea = e(bf) = (eb)f = bf = a$ ise e sol birimdir. $a \in G$ keyfi olmak üzere $ya = e$ olacak şekilde $y = a^{-1} \in G$ vardır. Böylece sol ters vardır. O halde G bir gruptur. ■

Teorem 1.2.5. [6]

R$(= \sim)$,$a_1 \sim a_2$ ve $b_1 \sim b_2$ iken $a_1b_1 \sim a_2b_2$ özelliğini sağlayan bir G monoidi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde R,$(\sim)$ altında G nin bütün denklik sınıflarının kümesi $(\bar{a})(\bar{b}) = \overline{ab}$ (öyle ki $\bar{x}$, $x \in G$ nin denklik sınıfı) ile tanımlanan ikili işleme göre bir monoiddir. Eğer G grubu abel ise G/R grubu abeldir.

(Bir G monoidi üzerinde teoremin hipotezini sağlayan bir denklik bağıntısına G üzerinde bir kongrüans bağıntısı da denir.)

İspat: $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ ve $\overline{b_1} = \overline{b_2}$ $(a_i, b_i \in G)$ ise $a_1 \sim a_2$ ve $b_1 \sim b_2$ ve böylece $a_1b_1 \sim a_2b_2 \Longrightarrow \overline{a_1b_1} = \overline{a_2b_2}$ dir. G/R deki ikili işlem iyi tanımlıdır. İşlem birleşmeli olduğundan $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = \bar{a}(\overline{bc}) = \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c} = \overline{(ab)}\bar{c} = (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$ dir. $\bar{e}$ birim eleman olduğundan $(\bar{a})(\bar{e}) = \overline{ae} = \bar{a} = \overline{ea} = (\bar{e})(\bar{a})$ olur. Böylece G/R monoiddir. Eğer G bir grup ise $\bar{a} \in G/R$ açıkça $(\bar{a})^{-1}$ tersine sahiptir. Buradan G/R bir gruptur. Benzer şekilde G abelyen ise G/R abelyendir. ■

Teorem 1.2.6. [6]

Eğer G bir grup (yarı grup, monoid) ve $a \in G$ ise, her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $(\mathbb{N}^*, \mathbb{N})$:

i) $a^m a^n = a^{m+n}$ (toplam notasyonu: $ma + na = (m+n)a$);

ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (toplam notasyonu: $n(ma) = mna$)

dir. ■

Tanım 1.2.7.

G bir grup olsun. $C \coloneqq \{g \in G \mid \forall x \in G \text{ için } gx = xg\}$ kümesine G nin merkezi denir.

1.3. Homomorfiler ve Altgruplar

Tanım 1.3.1.

G ve H iki yarı grup olsun. Her $a, b \in G$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ ise $f: G \to H$ fonksiyonuna bir homomorfizma denir.

- Eğer f fonksiyonu birebir ise f ye monomorfizm,
- Eğer f fonksiyonu örten ise f ye epimorfizm,
- Eğer f fonksiyonu birebir ve örten ise f ye izomorfizm

denir. Bu durumda G ve H izomorfiktir denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

- $f: G \to G$ homomorfizmasına G nin bir endomorfizması;
- $f: G \to G$ izomorfizmasına G nin otomorfizması

denir. Eğer G ve H , e_G ve e_H birim elemanlı gruplar ve $f: G \to H$ bir homomorfizma ise
$f(e_G) = e_H \quad (f(e_G)f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G) = e_H)$
olur, ayrıca her $a \in G$ için $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ dir.

Eğer $f: G \to H,\ g: H \to K$ homomorfizmalar ise $g \circ f: G \to K$ bir homomorfizmadır. Bu bileşke işlemi monomorfizma, epimorfizma, izomorfizma ve otomorfizmalar için de geçerlidir.

Tanım 1.3.2. [6]

G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H, G deki çarpma işlemi altında bir grup ise H ye G nin alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir. G ve $\{e\},\ G$ nin trivial alt gruplarıdır. Eğer H alt grubu $H \neq G,\ H \neq \{e\}$ ise H ye öz alt grup denir.

Teorem 1.3.3. [6]

$\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Bu takdirde $H < G \Leftrightarrow \forall a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ dir.

İspat: ($\Longrightarrow$) Açıktır.

($\Longleftarrow$) $a \in H$ için $e = aa^{-1} \in H$ vardır. Böylece herhangi bir $b \in H$ için $b^{-1} = eb^{-1} \in H$ dir. Eğer $a, b \in H$ ise $b^{-1} \in H$ buradan da $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$ dir. G bir grup olduğundan H deki çarpım birleşmelidir. O halde H bir alt gruptur. ■

Sonuç 1.3.4. [6]

G bir grup ve $\{ H_i | \, i \in I \}$ alt gruplarının bir ailesi boştan farklı ise $\bigcap_{i \in I} H_i < G$ dir. ■

1.4. Devirli Gruplar

Tanım 1.4.1. [6]

G bir grup ve X, G nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{X \subset H < G} H$ alt grubuna X tarafından üretilen alt grup denir ve $< X >$ ile gösterilir.

X in elemanlarına $< X >$ alt grubunun üreteçleri denir.

Eğer $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ ise $< X > = < a_1, \dots, a_n >$ yazılır. $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $(a_i \in G)$ ise G ye sonlu üretilmiş alt grup denir.$a \in G$ ve $G = \langle a \rangle$ ise G ye a ile üretilen devirli grup denir.

Tanım 1.4.2. [6]

G bir grup ve $a \in G$ olsun. $a^m = e$ olan en küçük m pozitif tamsayısına a nın periyodu (veya mertebesi) denir.

Tanım 1.4.3. [6]

G bir grup ve $a \in G$ olsun. a nın mertebesi $< a >$ devirli alt grubunun mertebesidir ve $|a|$ ile gösterilir.

Teorem 1.4.4. [6]

G bir grup ve $a \in G$ olsun. Eğer a sonsuz mertebeli ise

i) $a^k = e \Leftrightarrow k = 0$;

ii) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere a^k elemanları farklıdır.

Eğer $a,$ sonlu $m > 0$ mertebesine sahipse ,

iii) $m,$ en küçük pozitif tamsayıdır, öyle ki $a^m = e$;

iv) $a^k = e \Leftrightarrow m|k$;

v) $a^r = a^s \Leftrightarrow$ r$\equiv s\ (mod\ m)$;

vi) $< a >,\ a, a^2, \ldots, a^{m-1}, a^m = e$ farklı elemanlarından oluşur.

vii) $k|m$ yi sağlayan her k için $|a^k| = m/k$ dır. ■

Teorem 1.4.5. [6]

Bir G devirli grubunun her alt grubu ve her homomorfik resmi devirlidir. Eğer H, $G =< a >$ nın öz alt grubu ve m , $a^m \in H$ şeklindeki en küçük pozitif tamsayı ise $H =< a^m >$ dir. ■

Teorem 1.4.6. [6]

$G =< a >$ devirli grup olsun. Eğer G sonsuz elemanlı ise a ve a^{-1} , G nin üreteçleridir. Eğer G, m mertebeli ise a^k , G nin bir üretecidir ancak ve ancak $(k, m) = 1$ dir. ■

Tanım 1.4.7. [6]

a ve b, G grubunun herhangi iki elemanı olsun. $b = cac^{-1}$ olacak şekilde bir $c \in G$ elemanı varsa a ve b elemanlarına birbirinin eşleniğidir denir.

1.5. Yan Sınıflar

Tanım 1.5.1.

$H < G$ ve $a, b \in G$ olsun. Şayet $a \equiv b(mod\ H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ ise a ya H alt grubuna göre b nin bir sağ kongrüansıdır denir. Benzer şekilde şayet $a \equiv b\ (mod\ H) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ ise a ya H alt grubuna göre b nin bir sol kongrüansıdır denir.

G abelyen ise H alt grubuna göre sağ ve sol kongrüanslar çakışır.

Teorem 1.5.2. [6]

$H < G$ olsun.

i) H modülüne göre sağ ve sol kongrüanslar G de bir denklik bağıntısıdır.

ii) H modülüne göre sağ kongrüans altında $a \in G$ nin denklik sınıfı
$Ha = \{ha | h \in H\}$ dır. ($aH = \{ah | h \in H\}$)

iii) $\forall\ g \in G$ için $|Ha| = |H| = |aH|$ dir.

Ha kümesine H nin Gdeki sağ yan sınıfı ve aH kümesine H nin sol yan sınıfı denir. Genelde $H < G$ için $aH \neq Ha$ dir. ■

Sonuç 1.5.3. [6]

$H < G$ olsun.

G, H nin denklik sınıflarının birleşimidir.

i) İki denklik sınıfı ayrıktır veya eşittir.

ii) $\forall a, b \in G$ için $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ ve $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ dir.

iii) G nin H alt grubunun farklı yan sınıflarının kümesi R, farklı sol yan sınıflarının kümesi L ise $|R| = |L|$ dir. ■

Tanım 1.5.4. [6]

G bir grup olmak üzere H, G nin bir alt grubu olsun. H nin G deki yan sınıf sayısına H nin G deki indeksi adı verilir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

Teorem 1.5.5. [6]

K, H, G birer grup ve $K < H < G$ olmak üzere $[G:K] = [G:H][H:K]$ dir. Bu indislerin herhangi iki tanesi sonlu ise üçüncü de sonludur.

İspat: Sonuç 1.5.3. ten $a_i \in G$ için $G = \bigcup_{i\in I} Ha_i$, $|I| = [G:H]$ olmak üzere Ha_i yan sınıfları ayrıktır. Yani $Ha_i = Ha_j \Leftrightarrow i = j$ dir. Benzer şekilde $b_j \in H$ ve $|J| = [H:K]$ olmak üzere $H = \bigcup_{j\in J} Kb_j$ dir. Yine burada Kb_j yan sınıfları ayrıktır. Ayrıca

$$G = \bigcup_{i\in I} Ha_i = \bigcup_{i\in I}(\bigcup_{j\in J} Kb_j)a_i = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} Kb_ja_i$$

dir. Bu da Kb_ja_i yan sınıflarının ayrık olduğunu söyler. Yine Sonuç1.5.3. ten

$$[G:K] = |I \times J| = |I||J| = [G:H][H:K]$$

dır. Eğer $Kb_ja_i = Kb_ra_t$ ise $b_ja_i = kb_ra_t$ $(k \in K)$ dır. $b_j, b_r, k \in H$ ve $Ha_i = KHa_i = Hkb_ra_t = Ha_t$ olduğundan $i = t$ ve $b_j = kb_r$ dir. Böylece $Kb_j = Kkb_r = Kb_r$ ve $j = r$ dir. Teoremin son cümlesi açıktır. ■

Sonuç (Lagrange) 1.5.6. [6]

$H < G$ ise $|G| = [G:H]|H|$ dir. Özellikle G sonlu ise $a \in G$ nin mertebesi olan $|a|$, $|G|$ yi böler. ■

Teorem 1.5.7. [6]

H ve K, G nin sonlu alt grupları olsun. O halde $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$ dır. ■

Önerme 1.5.8. [6]

$H, K < G$ ise $[H: H \cap K] \leq [G: K]$ dır. Eğer $[G: K]$ sonlu ise $[H: H \cap K] = [G: K]$ sonludur $\Leftrightarrow$ $G = KH$ dır. ■

Önerme 1.5.9. [6]

H ve K, G nin sonlu indeksli alt grupları olsun. Bu takdirde $[G: H \cap K]$ sonludur ve $[G: H \cap K] \leq [G: H][G: K]$ dır. Üstelik $[G: H \cap K] = [G: H][G: K]$ dir $\Leftrightarrow$ $G = HK$ dır. ■

1.6. Normallik, Bölüm Grupları ve Homomorfizmalar

Teorem 1.6.1. [6]

G bir grup ve $N < G$ ise aşağıdaki durumlar denktir.

i) N modülüne göre sağ ve sol kongrüanslar çakışır. (Yani G üzerinde aynı denklik bağıntısını tanımlar.)

ii) N nin G deki her sol yan sınıfı aynı zamanda bir sağ yan sınıftır.

iii) $\forall\, a \in G$ için $aN = Na$ dır.

iv) $aNa^{-1} = \{ana^{-1} | n \in N\}$ olmak üzere $\forall\, a \in G$ için $aNa^{-1} \subset N$ dir.

v) $\forall\, a \in G$ için $aNa^{-1} = N$

dir.

İspat: (i)$\Longrightarrow$(iii) R ve S iki denklik bağıntısı özdeştir $\Leftrightarrow$ R altındaki her bir elemanın denklik sınıfı onun S altındaki denklik sınıfına eşittir. Bu durumda denklik sınıfları sırasıyla N nin sol ve sağ yan sınıflarıdır.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Bir $b \in G$ için $aN = Nb$ ise $a \in Nb \cap Na$ dır. Buradan $Nb = Na$ iki sağ yan sınıf olduğundan ya ayrıktır ya da çakışıktır. O halde $aN = Na$ dır.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) Açıktır.

(iv)$\Longrightarrow$(v) $aNa^{-1} \subset N$ olduğu verilmiş. O halde (iv) ten $a^{-1} \in G$ için $a^{-1}Na \subset N$ yazarız. (*) Hatta $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $n = a(a^{-1}na)a^{-1} \in aNa^{-1}$ ve $N \subset aNa^{-1}$ dir.(**)

(*) ve (**) dan $aNa^{-1} = N$ dir.

(v)$\Longrightarrow$(ii) Mevcuttur. ■

Tanım 1.6.2. [6]

N, G nin bir alt grubu olsun. Eğer N Teorem1.6.1. deki şartlardan birini sağlıyorsa N ye G nin bir normal alt grubu denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

Teorem 1.6.3. [6]

G bir grup $K < G$ ve $N \lhd G$ olsun. O halde;

i) $N \cap K \lhd K$;

ii) $N \lhd \langle N \cup K \rangle$;

iii) $NK = N \vee K = KN$;

iv) Eğer $K \lhd G$ ve $K \cap N =< e >$ ise $\forall\, k \in K$ ve $n \in N$ için $nk = kn$ dir. ■

Teorem 1.6.4. [6]

G bir grup $N \lhd G$ ve G/N, N nin G deki bütün (sol) yan sınıflarının kümesi ise G/N ; $(aN)(bN) = abN$ ikili işlemi altında mertebesi $[G\colon N]$ olan bir gruptur. ■

Eğer N, G grubunun bir alt grubu ise Teorem1.6.4 teki G/N ye G nin bölüm grubu veya faktör grubu denir.

Sonuç (I. İzomorfizm Teoremi) 1.6.5. [6]

$f\colon G \to H$ bir grup homomorfizması ise $G/Kerf$ ve Imf izomorftur.

Sonuç (II. İzomorfizm Teoremi) 1.6.6. [6]

G bir grup $K < G$ ve $N \lhd G$ ise $K/(N \cap K) \cong NK/N$ dir.

Sonuç (III. İzomorfizm Teoremi) 1.6.7. [6]

G bir grup, $K, N \lhd G$, $K < H$ ise $H/K \lhd G/K$ ve $(G/K)/(H/K) \cong G/H$ dir.

1.7. Matris Grupları ve Kesirli Lineer Dönüşümler

$\forall\ a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ için

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \ S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

ve $|T| = detT = ad - bc$ dir.

$$\vartheta = \{T: a, b, c, d \in \mathbb{C}, |T| = 1\} \tag{1.2}$$

ve

$$\Omega = \{T: a, b, c, d \ \in \mathbb{R}, |T| = 1\} \tag{1.3}$$

dir. O halde ϑ , matris çarpımı altında bir gruptur ve birim elemanı

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

dir. Bu durumda Ω, ϑ nin bir alt grubudur. Grup teorisinde ϑ ve Ω grupları sırasıyla

$SL(2, \mathbb{C})$

ve $SL(2, \mathbb{R})$ gruplarıdır. $\forall\ T \in \vartheta$ için

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

olduğunu göstermek kolaydır. I ve

$$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

matrislerinden oluşan grup Λ ile gösterilir ve bu hem ϑ nin hem de Ω nın merkezidir.

$\forall\ T \in \vartheta$ matrisi $\overline{\mathbb{C}}$ den $\overline{\mathbb{C}}$ ye giden bir $\overline{T}$ dönüşümüne karşılık gelir: Yani,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ise } \overline{T} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \quad w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ , \ (z \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$$

ile tanımlanır. Ters dönüşüm ise

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

şeklinde verilir. Uygunluk açısından T yi hem dönüşüm hem de matris olarak alacağız.

A, ϑ nın herhangi bir alt grubu ise T dönüşümü $T \in A$ matrisleriyle tanımlanır ve bileşke işlemi altında $S \in A, T \in A$ ise $(ST)(z) = S(T(z))$ dir. Gerçekten S, T nin tanımından

$$ST = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

iken,

$$S\big(T(z)\big) = \frac{\alpha\frac{az+b}{cz+d}+\beta}{\gamma\frac{az+b}{cz+d}+\delta} = \frac{(\alpha a+\beta c)z+(\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z+(\gamma b+\delta d)}$$

dir. Burada adı geçen A grubuna homojen grup, A grubunun elemanlarına karşılık gelen dönüşümlerin grubuna da homojen olmayan grup adı verilir.

$\bar{A}$ grubundaki birim dönüşüm $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $z \in D$ için $w = z$ dir ve $\forall\, z \in D$ için

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$$

dir ancak ve ancak $az + b = cz^2 + dz$ dir. D kümesinin ikiden fazla eleman içermesi $b = c = a - d = 0$ olduğunu gösterir yani $a = d = \pm 1$, $b = c = 0$ olur öyle ki $T = \pm I$ dır. Böylece $-I \in A$ ise φ nin çekirdeği Λ , $-I \notin A$ ise çekirdek I olur. Buradan

$$\bar{A} \cong {}^{A}/_{\Lambda} \quad (-I \in A)\ , \qquad \bar{A} \cong A \quad (-I \notin A) \tag{1.8}$$

dır. Özellikle $\bar{\vartheta} \cong {}^{\vartheta}/_{\Lambda}$ ve $\bar{\Omega} \cong {}^{\Omega}/_{\Lambda}$ dır. $\bar{\vartheta}$ ve $\bar{\Omega}$ grupları, grup teorisinde sırasıyla $LF(2,\mathbb{C})$ ve $LF(2,\mathbb{R})$ olarak bilinir.

$-I \notin A$ olduğunda A nın bir $\hat{A}(= A\Lambda = \Lambda A)$ üst grubu elde edilerek $-I\ , A$ ya dahil edilebilir. Burada A, 2 indeksli bir alt grup olur. O halde

$$\bar{A} \cong A \cong {}^{\hat{A}}/_{\Lambda} \tag{1.9}$$

dır.

1.8. Modüler Grup

Bu çalışma için en önemli yapılardan biri kısaca Γ ile gösterilen ve adına Modüler grup denilen gruptur. Yapılan tüm çalışmalar ve irdelemeler Modüler grubun bir takım alt grupları üzerinden yürütülmüştür. Modüler grup kavramı; sayılar teorisi, cebir ve geometri başta olmak üzere ileri matematiğin pek çok dalında karşımıza çıkar. Modüler grup, geometrik dönüşümlerin bir grubu veya matrisler grubu olarak gösterilebilir. Bu bölümde Modüler grubun burada gerekli olacak önemli özellikleri verilecektir.

Tanım 1.8.1.

$$\Gamma = \{T \in \Omega : a, b, c, d \in \mathbb{Z}\} \tag{1.10}$$

dir. (1.5,7) den bu matrislerin kümesi bir gruptur ve modüler grup olarak bilinir. Bu grubun dönüşümleri $\bar{\Gamma}$ ile gösterilir. (1.8) den $\bar{\Gamma} \cong {}^{\Gamma}/_{\Lambda}$ dır. Diğer yandan Γ ve $\bar{\Gamma}$ için sırasıyla

$SL(2, \mathbb{Z})$ ve $LF(2, \mathbb{Z})$ notasyonları da kullanılır. Aşağıda verilen matrisler Γ ya aittir.

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Bu matrislere uygun dönüşümler ise

$$Uz = z + 1, \quad Vz = -\frac{1}{z}, \quad Wz = \frac{z}{z+1}$$

dir. $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ için

$$U^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

dir. Ayrıca

$$V^2 = -I, \quad P^3 = -I \tag{1.13}$$

dır öyle ki

$$P := VU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

şeklindedir. Üstelik

$$P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = UVU \tag{1.15}$$

dur. V, P dönüşümleri sırasıyla 2. ve 3. mertebedendir.

Γ_U , $\pm U$ ile üretilen bir gruptur ve $\Gamma_U < \Gamma$ dir. $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\pm U^n \in \Gamma_U$ dur.

Teorem 1.8.2. [16]

$T \in \Gamma$ ve $trT = t$ olmak üzere bir $L \in \Gamma$ vardır öyle ki $S = L^{-1}TL$ ise

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}t\right| \leq \frac{1}{2}|\gamma|, \quad \left|\delta - \frac{1}{2}t\right| \leq \frac{1}{2}|\gamma|, \ |\gamma| \leq |\beta|, \quad 3\gamma^2 \leq |t^2 - 4|$$

tür. Burada $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ dır. Üstelik L, U ve V ile üretilen gruba aittir.

İspat: $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için

$$T_1 \coloneqq U^{-n}TU^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-nc & b+n(a-d)-n^2c \\ c & d+nc \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

dir. $trT_1 = t$ olsun. Alınan bir n elemanı için

$$\left|a_1 - \frac{1}{2}t\right| = \left|\frac{1}{2}(a-d) - nc\right| = \left|d_1 - \frac{1}{2}t\right| \le \frac{1}{2}|c| = \frac{1}{2}|c_1|$$

dir ve $c = 0$ için $a = d$ olacağından yukarıdaki eşitsizliğin sonucu çift olabilir. Eğer $|c_1| < |b_1|$ ise işlem durur. Aksine $|c_1| > |b_1|$ ise

$$T_2 := V^{-1}T_1V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & -c_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

olur. Burada $|c_2| < |c_1|$ ve $trT_2 = t$ dir. Benzer şekilde bir m seçilerek $T_3 \coloneqq U^{-m}T_2U^m$ ve

$$\left|a_3 - \frac{1}{2}t\right| = \left|d_3 - \frac{1}{2}t\right| \le \frac{1}{2}|c_3| = \frac{1}{2}|c_2| = \frac{1}{2}|b_1|$$

yazılabilir. Burada $|c_3| \le |b_3|$ ise işlem durur. Eğer değilse $|c_3| > |b_3|$ olur ve yine yukarıdakine gibi $|c_4| < |c_3| < |c_1|$ şartını sağlayan T_4 matrisi elde edilir. Bu işlem bir

$S = T_{k+1}$ matrisine ulaşıldığında sonlu bir k adımda durmalıdır. Böylece k adım sonunda

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}t\right| \le \frac{1}{2}|\gamma|\,, \qquad \left|\delta - \frac{1}{2}t\right| \le \frac{1}{2}|\gamma|\,,\ |\gamma| \le |\beta|$$

elde edilmiş olur. Buradan

$$|t^2-4| = |(\alpha+\delta)^2-4| = |4\beta\gamma + (\alpha-\delta)^2| \ge 4|\beta||\gamma| - |\alpha-\delta|^2 \ge 4\gamma^2 - \gamma^2 = 3\gamma^2$$

olur. ■

Teorem 1.8.3. [16]

$T \in \Gamma$ olsun. T sonlu mertebeli ise T, $\pm I$, $\pm V$, $\pm P, \pm P^2$ matrislerinden birinin eşleniğidir ve $|trT| \le 2$ dir. Aksine $|trT| \le 2$ ise T matrisi , $k \in \mathbb{Z}$ için $\pm U^k$ nın bir eşleniğidir. ■

Teorem 1.8.4. [18]

Γ modüler grubu $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerinden üretilir.

İspat: $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için

$VT = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$, $U^k = \begin{pmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{pmatrix}$

dir. Farz edelim ki $|c| \leq |a|$ olsun. (Bu durum T için geçerli değilse VT matrisiyle başlanır.) Eğer $c = 0$ ise $T = \pm U^{q_0}$ dır. $c \neq 0$ olması durumunda $r_{n+1} = \pm 1$ ise algoritma sonlanır. Öklid Algoritmasından a ve c için

$$a = q_0 c + r_1 \ , \quad -c = q_1 r_1 + r_2 \ , \quad r_1 = q_2 r_2 + r_3 \ , \ \ldots \ , \ (-1)^n r_{n-1} = q_q r_n + 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$(VU^{-q_n}V \ldots VU^{-q_0})T$$

çarpımından $q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ için $\pm U^{q_{n+1}}$ elde edilir. $|c| > |a|$ olması durumunda;

$$T = V^m U^{q_0} V U^{q_1} \ldots V U^{q_n} V U^{q_{n+1}} \ ,$$

$m = 0,1,2,3$; $q_0, q_1, \ldots, q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ ve $q_0, \ldots, q_n \neq 0$ dır.■

Örnek 1.8.5.

$T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olsun. $c = 3$, $a = 5$ ve buradan $3 < 5$ olduğundan bölme algoritması uygulanır.

$5 = 3q_0 + r_1$ ise $q_0 = 1$, $r_1 = 2$ dir. Buradan

$-3 = q_1.2 + r_2$ ise $q_1 = -2$, $r_2 = 1$ dir. $r_2 = 1$ olduğundan algoritma durur.

$2 = q_2.1 + r_3$ ise $q_2 = 2$, $r_3 = 0$.

Böylece $n = 2$ için $(VU^{-q_2}VU^{-q_1}VU^{-q_0})T$ çarpımı yapılır.

$$\begin{aligned}(VU^{-2}VU^{2}VU^{-1})T &= \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} =: A\end{aligned}$$

Elde edilen A matrisini V matrisi yardımıyla döndürelim. Yani,

$$VAV = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U^{-4}$$

matrisi elde edilir. Böylece,

$$(VU^{-2}VU^{2}VU^{-1})T = U^{-4}$$

tür. Son eşitlikten T matrisini çekersek

$$T = UV^{-1}U^{-2}V^{-1}U^{2}V^{-2}U^{-4}V^{-1}$$

şeklinde olur ve T matrisi U ve V matrisleriyle elde edilmiş olur.

Teorem 1.8.6. [16]

Γ, V ve P^2 den üretilir. $\forall\ T \in \Gamma$ için $0 \le r \le 1,\ 0 \le p_i \le 2\ \ (0 \le i \le n),\ \ p_i > 0$ $(0 < i < n)$ olmak üzere

$$T = (-1)^r P^{2p_0} V P^{2p_1} V \ldots V P^{2p_n}$$

yazılabilir. ($n = 0$ olduğunda yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı $(-1)^r P^{2p_0}$ olur.) ■

Teorem 1.8.7. [16]

V ve P sırasıyla 2 ve 3 periyodlu olmak üzere $\bar{\Gamma}$, V ve P dönüşümlerinden elde edilir Yani

$$\bar{\Gamma} = \langle P, V \rangle$$

dir. Ayrıca $\forall\ T \in \bar{\Gamma}$ dönüşümü için $0 \le p_i \le 2\ \ (0 \le i \le n)$, $p_i > 0\ \ (0 < i < n)$ olmak üzere

$$T = P^{p_0} V P^{p_1} V \ldots V P^{p_n}$$

tek gösterimi vardır. ■

Teorem1.8.7. ye göre $\bar{\Gamma}$ grubu $\langle V \rangle$ ve $\langle P \rangle$ devirli gruplarının serbest çarpımıdır. Bu durum

$$\bar{\Gamma} = \langle V \rangle * \langle P \rangle$$

ile gösterilir.

1.9. Γ^2 Modüler Alt Grubu

Γ^2 ile Γ modüler grubunun elemanlarının kareleri alınarak elde edilen grubu göstereceğiz ve kolaylıkla görülür ki $\Gamma^2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + bc + cd \equiv 0 \ (\ mod\ 2)\right\}$ dır. Buradan Γ^2 grubunun elemanları $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2d \end{pmatrix}$ matris gösterimlerinden birine sahiptir.

1.10. Γ^3 Modüler Alt Grubu

Γ^3 ile Γ modüler grubunun elemanlarının küpleri alınarak elde edilen grubu göstereceğiz. [16] dan görülebileceği gibi, $\Gamma^3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : ab + cd \equiv 0 \ (\ mod\ 3)\right\}$ şeklinde gösterilir. Buradan kolaylıkla Γ^3 grubunun elemanlarının $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris gösterimlerinden birine sahiptir. İlk iki tip gösterime sahip elemanların Γ^3 te olacağı aşikardır. Üçüncü tip elemanlara gelince

$a, b, c, d \not\equiv 0 \ (mod\ 3)$ olmak üzere $ad - bc = 1$ koşulunu gerçekleyen elemanlardır, yani;

$a, b, c, d \not\equiv 0 \ (mod\ 3)$ olmak üzere $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma^3$ ancak ve ancak $T \in \Gamma$ dır [9].

1.11. Modüler Grubun Kongrüans Alt Grupları

Çalışmalarımız tamamen Modüler grubun alt gruplarına dayandığı için bu bölümde bizim için çok önemli olan alt grupları ve bu grupların gerekli özelliklerini vereceğiz.

Tanım 1.11.1.

n pozitif tamsayı olmak üzere Γ grubunun temel kongrüans alt grubu

$\Gamma(n) \coloneqq \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1 \ (mod\ n),\ b \equiv\ c \equiv 0 \ (mod\ n)\right\}$

ile tanımlanır. Γ grubunun $\Gamma(n)$ temel kongrüans alt gruplarını içeren herhangi bir alt grubuna kongrüans alt grubu denir. Üzerinde en çok çalışılan bazı kongrüans alt grupları;

$$\Gamma_1(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \, a \equiv d \equiv 1 \,(mod\, n), \;\; c \equiv 0 \,(mod\, n) \right\}, \tag{1.16}$$

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \, c \equiv 0 \,(mod\, n) \right\}, \tag{1.17}$$

$$\Gamma^0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \middle| \, b \equiv 0 \,(mod\, n) \right\} \tag{1.18}$$

gruplarıdır ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\Gamma(n) \leq \Gamma_1(n) \leq \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ilişkisi söz konusudur.

Ayrıca $\Gamma(n)$, Γ grubunun normal bir alt grubudur, böylece $\Gamma(n)$ grubu $\Gamma_0(n)$ ve $\Gamma_1(n)$ gruplarının da normal alt grubudur. Diğer taraftan $\Gamma_1(n) \lhd \Gamma_0(n)$ dir. Buna göre indeksler $n > 2$ için,

$$|\Gamma : \Gamma_0(n)| = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \tag{1.19}$$

$$|\Gamma : \Gamma_1(n)| = \frac{n^2}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \tag{1.20}$$

$$|\Gamma : \Gamma(n)| = \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \tag{1.21}$$

dir. [18]

$n = 2$ durumunda $|\Gamma : \Gamma_0(2)| = 3$, $|\Gamma : \Gamma_1(2)| = 3$, $|\Gamma : \Gamma(2)| = 6$ dir. $n > 2$ için yukarıda verilen indekslerden aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir;

$$|\Gamma_0(n) : \Gamma_1(n)| = \frac{|\Gamma:\Gamma_1(n)|}{|\Gamma:\Gamma_0(n)|} = \frac{n}{2} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{1.22}$$

$$|\Gamma_1(n) : \Gamma(n)| = \frac{|\Gamma:\Gamma(n)|}{|\Gamma:\Gamma_1(n)|} = n. \tag{1.23}$$

1.12. Serbest Gruplar

Bir grup üreticilerin bir kümesi ve bu üreticilerin arasındaki bağıntılar yardımı ile verilir. Örneğin; D_n, r ve s üreteçleriyle üretilen ve üreteçleri arasında

$r^n = e \qquad s^2 = e \qquad srsr = e$

bağıntıları olan bir grup olarak tanımlanabilir.

Bu kısımda bu guplar tanıtılacaktır. İlk önce üreteçlerin bir X kümesi üzerinde serbest grup tanımlanacaktır. Bu grup X tarafından üretilen bir gruptur ve bu grup elde edilirken X in elemanlarının özellikleri kullanılmaz. Çünkü ters elemanlar problem oluşturur. Önce monoidler oluşturulacaktır. Bir monoid, üzerinde birleşme ve birim eleman özelliğini sağlayan bir ikili işlemlerin S kümesidir. Monoidlerin bir $\alpha: S \to S'$ homomorfizması öyle bir dönüşümdür ki, $\forall\, a, b \in S$ ve $e \in S$ birim elemanı olmak üzere,

$\alpha(ab) = \alpha(b)\alpha(b)$ ve $\alpha(e) = e$

dir. Monoid homomorfizması bütün sonlu çarpımları korur.

1.12.1. Serbest Monoidler

$X = \{a, b, c, \ldots\}$ sembollerin bir kümesi olsun. Bir kelime X te tekrarlanabilen sembollerin sonlu bir sırasıdır. Örneğin,

$aa, aabac, b$

farklı kelimelerdir. İki kelimenin çarpımını yan yana yazarak elde edebiliriz. Örneğin,

$aaaa * aabac = aaaaabac$

gibi. Bu bir küme üzerindeki bütün kelimelerin ikili işlemlerini tanımlar. Boş sıra olabilir ve bu 1 ile ifade edilir. Dolayısı ile 1 bir birim eleman gibi davranır. Bu ikili işlemle birlikte kelimelerin kümesini SX ile gösterelim. O halde SX, X te serbest monoid diye adlandırılan bir monoiddir.

X in bir a elemanını a kelimesiyle tanımladığımızda X , kümesi SX in bir altkümesi olur ve onu üretir. Kümelerin herhangi bir dönüşümü için $\alpha: X \to S$; X ten S monoidine aşağıdaki diyagramı komütatif yapan tek bir $SX \to S$ homomorfizma vardır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a \to a"] \arrow[dr, "\alpha"'] & SX \arrow[d, dashed] \\ & S \end{tikzcd}$$

1.12.2. Serbest Grupların Yapısı

Burada $FX \supset X$ ve FX , SX monoidi ile aynı özelliğe sahip bir FX grubu oluşturulacaktır. X' , X teki sembolleri ve her $a \epsilon X$ için a^{-1} ile gösterilen sembolleri de içersin. Yani

$X' = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, \ldots\}$

olsun. W' , X' ndeki sembollerin oluşturduğu kelimelerin bir kümesi olsun. Bu, çarpma işlemi altında bir monoid olur, fakat bir grup olmaz çünkü a nın tersi henüz a^{-1} değildir ve aşağıdaki gibi verilen kelimelerdeki açık terimler sadeleştirilemez.

$\ldots aa^{-1} \ldots$ veya $\ldots a^{-1}a \ldots$

Bir kelime yukarıda verilen çiftlerden hiçbirini içermezse bu kelimeye indirgenmiş bir kelime denir. Bir w kelimesiyle başlayarak, w nın indirgenmiş formu olarak adlandırılan w_0 kelimesini elde etmek için sadeleşmelerin sonlu bir sırası oluşturulabilir. Bu sadeleşmeleri oluşturmak için birçok farklı yol takip edilebilir. Örneğin,

$ca\underline{bb^{-1}}a^{-1}c^{-1}ca \to c\underline{aa^{-1}}c^{-1}ca \to \underline{cc^{-1}}ca \to ca.$

$cabb^{-1}a^{-1}\underline{c^{-1}c}a \to cabb^{-1}\underline{a^{-1}a} \to ca\underline{bb^{-1}} \to ca.$

Altı çizilen çiftler sadeleştirme yapılan çiftlerdir. Dikkat edilirse a ve a^{-1} sadeleştirildi ve farklı terimler iki durumda da kaldı. (ilk durumda sağdaki ca, ikinci durumda soldaki ca) Her iki durumda da aynı sonuçlar elde edildi.

Teorem 1.12.3.

Bir kelimenin indirgenmiş formu yalnızca bir tanedir.

İspat: w kelimesinin uzunluğu için indüksiyon kullanılır. Eğer w indirgenmiş ise ispata gerek yoktur. Diğer yandan her iki durumda da sonucun aynı olmasından $a_0{a_0}^{-1}$ veya ${a_0}^{-1}a_0$ çiftinin olduğunu varsayalım.

İndüksiyon prensibiyle kolayca görülür ki $a_0{a_0}^{-1}$ veya ${a_0}^{-1}a_0$ sembollerinin w da kısaltılmasıyla elde edilen w nın iki indirgenmiş formu birbirine eşittir. Örneğin,

... ${a_0}^{-1}\underline{a_0{a_0}^{-1}}$ ... veya ... $\underline{a_0{a_0}^{-1}}a_0$ ...

gibi. Buradan w ve w' eğer aynı indirgenmiş forma sahipseler w ve w' kelimeleri denktir denir ve $w{\sim}w'$ ile gösterilir. Bu bir denklik bağıntısıdır.■

Teorem 1.12.4.

Denk kelimelerin karşılıklı çarpımları denktir. Yani,

$w{\sim}w', v{\sim}v' \Rightarrow wv{\sim}w'v'$

dir.

İspat: w_0 ve v_0 , w ve v nin indirgenmiş formları olsunlar. O halde wv indirgenmiş formdadır. Öncelikle w_0v_0 elde etmek için w ve v ayrı ayrı mümkün olduğu kadar sadeleştirilebilir ve sonra sadeleştirmeye devam edilebilir. Böylece wv nin indirgenmiş formu w_0v_0 nin indirgenmiş formudur. Benzer bir durum $w'v'$ için de geçerlidir, fakat (varsayımla) w ve v nin indirgenmiş formları w' ve v' nin indirgenmiş formlarına denktir ve böylece iki durumda da aynı sonuç elde edilir. ■

FX kelimelerin denklik sınıflarının bir kümesi olsun. Teorem1.12.4. şunu gösterir: W' nde verilen ikili işlem FX i monoid yapan bir ikili işlemdir. Üstelik burada kelimeler terslere sahiptir. Gerçekten,

$$(ab \dots gh)(h^{-1}g^{-1} \dots b^{-1}a^{-1}) \sim 1$$

dir.

Böylece FX e X üzerinde bir serbest grup denir. Özetle: FX in elemanları X' nün kelimeleriyle gösterilir. FX te iki kelime aynı indirgenmiş forma sahip olduklarında aynı elemanı gösterir. Çarpma bitişiklikle tanımlanır. Boş kelime 1 ile ifade edilir. Terslerin elde edilişi açıktır. Diğer yandan FX in her elemanı tek bir indirgenmiş kelimeyle gösterilir. Çarpma bitişiklikle ve indirgenmiş forma geçmek için tanımlanır.

Sonuç olarak X kümesi FX i üretir.

Teorem 1.12.5.

X ten bir G grubuna herhangi bir $\alpha: X \to G$ dönüşümü için aşağıdaki diyagramı komütatif yapan bir tek $FX \to G$ homomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a \to a"] \arrow[dr, "\alpha"'] & FX \arrow[d] \\ & G \end{tikzcd}$$

İspat: $\alpha: X \to G$ dönüşümünü düşünelim. Bu dönüşüm $\alpha(a^{-1}) = \alpha(a)^{-1}$ ile $X' \to G$ dönüşümüne genişletilebilir. Çünkü G özellikle bir monoiddir ve α , $SX' \to G$ monoidlerinin bir homomorfizmasına genişler. Bu dönüşüm G nin elemanı için denk kelimeler oluşturur ve böylece $FX = SX'/\sim$ dır. Buradan $FX \to G$ dönüşümü bir grup homomorfizmidir ve tektir çünkü FX in üreteçlerinin bir kümesi üzerinde tanımlanmıştır. ■

Sonuç 1.12.6.

Her grup bir serbest grubun bir bölüm grubudur.

İspat: G nin üreteçlerinin bir X kümesini seçelim (örneğin, $X = G$) ve F de X ten üretilen bir serbest grup olsun. (1.12.5) e göre $a \to a : X \to G$ dönüşümü için bir $F \to G$

homomorfizmi vardır ve görüntüsü G ye denk olması gereken ve X i kapsayan bir alt gruptur.■

1.13. Serbest Çarpım

Grupların direk çarpımı abelyen gruplar üzerinde oluşturulur. Direk çarpım gibi serbest çarpım da verilen bir gruptan yeni bir grup inşa etmeyi sağlar. Serbest çarpım direk çarpımdan şu yönüyle farklıdır: Serbest çarpımın tanımı, elemanların farklı çarpanlardan oluşmasını gerektirmez. Yani çarpanlar tekrarlanabilir. Serbest çarpımı şöyle verebiliriz.

Bir G grubu, onun alt grupları olan $\alpha \in I$ indeksli A_α nın serbest çarpımı olarak adlandırılır, eğer A_α alt grupları G yi üretirse; yani eğer G nin her g elemanı A_α nın sonlu sayıdaki elemanlarının bir çarpımı ise,

$$g = a_1 a_2 \dots a_n\ , \quad a_i \in A_{\alpha_i}\ , \quad i = 1,2,\dots,n \tag{1.24}$$

dir, ve her $g \in G,\ g \neq 1$ (1.24) teki gibi tek bir gösterime sahiptir ve üstelik a_i elemanları birim elemandan farklıdır ve de (1.24) te ard arda gelen iki eleman aynı A_α alt grubunda bulunmaz. Yani $a_i \in A_{\alpha_i}$ iken $a_{i+1} \notin A_{\alpha_i}, a_{i+1} \in A_{\alpha_{i+1}}$ dir. Buna rağmen (1.24) teki çarpım aynı alt gruptan birçok çarpan içerebilir.

Serbest çarpım

$$G = \textstyle\prod_\alpha * A_\alpha \tag{1.25}$$

sembolüyle gösterilir ve eğer G sonlu sayıdaki $A_1, A_2, \dots, A_k$ ların bir serbest çarpımı ise

$$G = A_1 * A_2 * \dots * A_k$$

şeklinde gösterilir.

A_α alt gruplarına G nin (1.25) deki serbest parçalanmasının serbest çarpanları adı verilir. (1.24) teki ifade (1.25) te verilen parçalanmadaki g elemanının normal formu (veya indirgenemez gösterimi) olarak adlandırılır ve bu parçalanmadaki g nin uzunluğu olan n sayısı için $n = l(g)$ yazılır.

Bir elemanın normal formunun tekliği şunu söyler: Kalan çarpanlarla üretilen Gnin alt gruplarıyla (1.25) teki herhangi A_α serbest çarpanlarının kesişimi E dir. Burada $E = \{e\}$ dir.

Farz edelim ki bir G grubu alt grupların serbest çarpımlarında parçalanabilir olsun. Eğer (1.25), bir parçalanma gibiyse, birimden ve (1.25) teki serbest çarpanlardan farklı a_1 ve a_2 gibi iki eleman alınır, Serbest çarpımın tanımından $a_1 a_2$ ve $a_2 a_1$ çarpımları G nin elemanlarından farklıdır, (1.25) teki tüm A_α serbest çarpanları değişmeli olsa bile G, non-komütatif olmak zorundadır. Ayrıca

a_1a_2 , $a_1a_2a_1a_2$, ..., $(a_1a_2)^n$, ...

şeklindeki bütün çarpımlar G nin elemanlarından farklıdır. Tüm A_α serbest çarpanları periyodik olsa bile G sonsuz dereceden elemanlara sahiptir. Bu yüzden abelyen gruplar ve periyodik grupların (özellikle sonlu gruplar) serbest çarpım olamayacağı açıktır.

Serbest çarpımlara ayrılabilen gruplar serbest gruplardır. Devirli olmayan bir grup sonsuz devirli grupların serbest çarpımıdır. x_α, bir W serbest grubunun serbest üreteçlerinin bir sistemi olsun. Eğer $\{x_\alpha\} = A_\alpha$ ise G açıkça A_α alt gruplarından üretilir ve W nın her elemanı yani x_α sembolündeki her kelime x_α elemanlarının kuvvetlerinin bir çarpımı şeklinde tek olarak yazılabilir. Bu nedenle W, onun sonsuz devirli A_α alt gruplarının serbest çarpımıdır.

1.13.1. Kurosh Alt Grup Teoremi

$$G = \prod_\alpha{}^* A_\alpha \qquad (1.26)$$

ve H, G nin bir keyfi alt grubu ise H grubu, F bir serbest grup veya $\{1\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi bir serbest çarpıma sahiptir.

$$H = F * \prod_\beta{}^* B_\beta$$

Her B_β , G de A_α serbest çarpanlarının bir alt grubunun eşleniğidir.

İspat: G nin (1.26) daki serbest parçalanması göz önüne alınarak normal formda verilen bir elemanın terim uzunluğu kullanılmalıdır. Ayrıca aşağıdaki tanımlar verilebilir.

Eğer $g \in G$, $l(g) = 2k$ uzunluğuna sahipse

$$g = a_{-k} \ldots a_{-1}a_1 \ldots a_k$$

kelimesinde $a_{-k} \ldots a_{-1}$ olan kısıma g nin sol yarısı ; $a_1 \ldots a_k$ olan kısıma ise g nin sağ yarısı denir. Eğer $l(g) = 2k + 1$ ve

$$g = a_{-k} \ldots a_{-1}a_0a_1 \ldots a_k$$

ise $a_{-k} \ldots a_{-1}$, g nin sol yarısı $a_1 \ldots a_k$, g nin sağ yarısı ve a_0, g nin ortası olarak adlandırılır. Hatta eğer g nin sağ ve sol yarıları tersler ve $i = 1,2, \ldots, k$ için $a_{-1} = a_1^{-1}$ ise g bir dönüşüm olarak adlandırılır.■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Modüler Grupların Bazı Alt Gruplarının Yapısı

Γ, 2×2 tipinde bir modüler grubunu göz önüne alalım. Γ nın bir Δ alt grubu verilsin.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrislerinin modül Δ üstleri sırasıyla r ve s ise Δ , (r, s) tipindedir denir. Eğer Δ, Γ da sonlu indeksli ise $rs \neq 0$ dır. Gerçekte G herhangi bir grup ve H, i indeksli bir alt grup ise bir $e > 0$ tamsayısı vardır öyle ki $1, g, \dots, g^i \in G$, $i + 1$ tane elemanı modül H ye göre tamamen farklı olamayacağından $\forall\ g \in G$ için $g^e \in H$ dir.

Böylece Δ, Γ da sonlu indeksli ise $\Delta \supset \Gamma^m$ dir. Γ^m , pozitif bir m tamsayısı için Γ nın elemanlarının m. kuvvetleri ile üretilen Γ nın bütün normal alt gruplarıdır. Akla gelen bir soru Δ , bir alt grup içermezse Γ daki indeksinin sonlu olup olmayacağıdır. Bu ilişki [2] te görülmektedir öyle ki bunun olması için kesin gerekli ve yeterli durumlar verilmiştir. Bu yalnızca $\Delta = \Gamma^m$ olduğunu düşünmek için açıkça yeterlidir. Bu araştırmanın amacı Γ^m gruplarının yapısını açıklamak ve sırası geldiğinde Γ' grubunu karakterize etmektir. Γ', Γ nın komütatör alt grubu ve $\Gamma' = \Gamma^2 \cap \Gamma^3$ tür. Bu $\Gamma = \Gamma^2\Gamma^3$ formülüyle hoş bir benzerlik gösterir.

Bu problem Burnside problemine benzerdir. Farklı olan şey Γ modüler grubunun serbest bir grup olmayıp 2. ve 3. mertebeden iki devirli grubun serbest çarpımı olduğudur.

2.1.1. Γ^m Grupları

$\bar{\Gamma}$ modüler grubu

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{y} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

ile üretilir ve, I birim matris olmak üzere. $\bar{x}^2 = \bar{y}^3 = -I$ dır.

Eğer $\bar{z}$, $\bar{\Gamma}$ nin herhangi bir elemanı ve $\bar{z}$ ile $-\bar{z}$ aynı dönüşümle tanımlandığından elde edilen grup Γ modüler grubudur. Bu grup x ve y sembolleriyle üretilir , $x^2 = y^3 = 1$ dir.

$x_1, x_{2,} \dots, x_n, \dots$ tarafından üretilen grup $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ şeklinde yazılır. Böylece

$$\Gamma = \langle x, y \rangle \quad , \quad x^2 = y^3 = 1$$

dir. Γ nın tüm Γ^m normal alt grupları, Γ nın bütün elemanları $x_1, x_2, \dots$ olmak üzere,

$$\Gamma^m = \langle {x_1}^m, {x_2}^m, \dots, \rangle$$

ile tanımlanır. Bu tanımdan kolaylıkla;

Sonuç: $\Gamma^m \supset \Gamma^{mn}$ (2.2)

dir.

İspat: $x \in \Gamma\ ve\ x^{mn} \in \Gamma^{mn}$ keyfi olsun. Bu durumda

$$x^{mn} \in \Gamma^{mn} \Longrightarrow (x^n)^m \in \Gamma^{mn} \Longrightarrow (x^n)^m =: y^m \in \Gamma^m \qquad (y = x^n)$$

olduğundan $\Gamma^m \supset \Gamma^{mn}$ olur.■

Sonuç: $(\Gamma^m)^n \supset \Gamma^{mn}$ (2.3)

dir.

İspat: $x \in \Gamma$, $x^m \in \Gamma^m$, $x^{mn} \in \Gamma^{mn}$ keyfi olsun. O halde

$$x^{mn} \in \Gamma^{mn} \Longrightarrow (x^m)^n \in \Gamma^{mn} \Longrightarrow (x^m)^n \in (\Gamma^m)^n \qquad (x^m \in \Gamma^m)$$

olduğunda $(\Gamma^m)^n \supset \Gamma^{mn}$ yazılır. ■

Sonuç: (m,n), m ve n pozitif tamsayılarının en büyük ortak bölenini göstermek üzere,

$$\Gamma^m \Gamma^n = \Gamma^{(m,n)} \tag{2.4}$$

dir.

İspat: Γ^m grupları, Γ nın normal alt grupları olduğundan çarpım iyi tanımlıdır.

(2.2) den $\Gamma^{(m,n)} \supset \Gamma^m$, $\Gamma^{(m,n)} \supset \Gamma^n$ olduğu verilmiş. O halde , $\Gamma^{(m,n)} \supset \Gamma^m \Gamma^n$ dir.

Diğer yandan $z \in \Gamma$ herhangi bir eleman olsun. $m_1.m + n_1.n = (m,n)$ olacak şekilde m_1, n_1 tamsayıları tanımlayalım. O halde

$$z^{m_1 m} \in \Gamma^m , \ z^{n_1 n} \in \Gamma^n , \ z^{m_1 m + n_1 n} \in \Gamma^m \Gamma^n , \ z^{(m,n)} \in \Gamma^m \Gamma^n$$

olur. Buradan $\Gamma^m \Gamma^n \supset \Gamma^{(m,n)}$ ve $\Gamma^m \Gamma^n = \Gamma^{(m,n)}$ elde edilir. ■

Özel olarak,

$$\Gamma^2 \Gamma^3 = \Gamma \tag{2.5}$$

tir. Öncelikle Γ^2 ve Γ^3 ün yapısını inceleyeceğiz.

Teorem 2.1.1.

Γ^2 grubu üçüncü mertebeden iki devirli grubun serbest çarpımıdır ve $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde,

$|\Gamma\colon \Gamma^2| = 2\,, \qquad \Gamma = \Gamma^2 + x\Gamma^2\,, \qquad \Gamma^2 = \langle y, xyx \rangle$

tir.

Yani,

$\Gamma^2 = \langle y, xyx \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$

İspat: $H = \langle y, xyx \rangle$ olsun. H nin Γ^2 de Γ nın normal alt grubu olduğunu ve elemanlarının Teorem2.1.1 in şartlarını sağladığı görülür. Yani, x in kuvvetlerinin toplamı çifttir. Açıkça,

$H = \langle y, xyx \rangle$ yani $H = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ dır.

$z \in \Gamma$ herhangi bir eleman olsun. Γ, x ve y ile üretildiğinden c_i ler 0 da olabilen tamsayılar olmak üzere,

$$z = y^{c_1} x y^{c_2} x \ldots y^{c_n} x y^{c_{n+1}} \tag{2.6}$$

yazılabilir. Böylece,

$z = y^{c_1} (xyx)^{c_2} y^{c_3} \ldots (xyx)^{c_n} y^{c_{n+1}} \qquad , n\ \text{çift ise}$

$z = y^{c_1} (xyx)^{c_2} y^{c_3} \ldots y^{c_n} (xyx)^{c_{n+1}} x \qquad , n\ \text{tek ise}$

şeklindedir. Buradan $z \in H$ ya da $zx \in H$ tır. Çünkü

$zx = y^{c_1} (xyx)^{c_2} y^{c_3} \ldots y^{c_n} (xyx)^{c_{n+1}} x.x$ ve $x.x = x^2 = 1$

dir. $x \notin H$ olduğundan $\Gamma = H + Hx = H + xH$. ($x \in \Gamma$ ve $x \notin H$ olduğundan $x \in Hx = \{hx \colon h \in H\}$ dir.)

$\Gamma \supset \Gamma^2 \supset H$ ve $|\Gamma \colon H| = 2$ olduğundan $|\Gamma\colon \Gamma^2| = 1$ veya $|\Gamma\colon \Gamma^2| = 2$ dir. Fakat $\Gamma \neq \Gamma^2$

$(x \notin \Gamma^2)$ olduğundan $|\Gamma\colon \Gamma^2| = 2$ dir. Böylece $\Gamma^2 = H$ dir. H nin üçüncü dereceden iki devirli grubun serbest çarpımı olduğu açıktır. Çünkü H için

$y^3 = (xyx)^3 = 1$

dir. Böylece teoremin ispatı biter.■

Teorem 2.1.2.

Γ^3 grubu ikinci mertebeden üç devirli grubun serbest çarpımıdır ve $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde,

$$|\Gamma : \Gamma^3| = 3 , \qquad \Gamma = \Gamma^3 + y\Gamma^3 + y^2\Gamma^3 , \qquad \Gamma^3 = \langle x, yxy^2, y^2xy \rangle$$

dir.

Yani,

$$\Gamma^3 = \langle x, yxy^2, y^2xy \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

İspat: $K = \langle x, yxy^2, y^2xy \rangle$ olsun. O halde K, Γ^3 te Γ nın normal alt grubu ve K nın elemanları Teorem 2.1.2. nin şartlarını sağlar, yani; y nin kuvvetlerinin toplamı üçün bir katıdır. Açıkça,

$K = \langle x, yxy^2, y^2xy \rangle$ yani $K = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rangle$ dır.

w_n, $y^{c_1}xy^{c_2}x \ldots y^{c_n}$ formunda bir ifade olsun. Yani,

$$w_n = y^{c_1}xy^{c_2}x \ldots y^{c_n}$$

ve buradan hareketle $y^{c_1}x = y^{c_1}xy^{2c_1}y^{-2c_1}$ için $w_n = y^{c_1}xy^{2c_1}w_{n-1}$ yazılır, öyle ki;

$w_{n-1} = y^{c_2-2c_1}x \ldots y^{c_n}x$ dir. Fakat aşağıda verildiği gibi $y^{c_1}xy^{2c_1} = x$, yxy^2 ya da y^2xy dir.

$$\begin{cases} y^{c_1}xy^{2c_1} = x , & c_1 \equiv 0 \pmod 3 \quad ise \\ y^{c_1}xy^{2c_1} = yxy^2 , & c_1 \equiv 1 \pmod 3 \quad ise \\ y^{c_1}xy^{2c_1} = y^2xy , & c_1 \equiv 2 \pmod 3 \quad ise \end{cases}$$

Buradan indüksiyonla n. adımda $w_n = ky^{c_0}$ elde edilir ki bu da $k \in K$ ve c_0 ın tamsayı olduğunu gösterir. Gerçekten,

$$w_1 = y^{c_1}x \ , \ x \in K$$

$$w_2 = y^{c_1}xy^{c_2}x = y^{c_1}xy^{2c_1}y^{-2c_1}y^{c_2}x \ , \ y^{c_1}xy^{2c_1} \in K$$

$$w_2 = y^{c_1}xy^{2c_1}w_1 = y^{c_1}xy^{2c_1}ky^{c_0} \ , \quad w_1 = ky^{c_0} \ , \quad y^{c_1}xy^{2c_1}k \in K$$

$$w_2 = ky^{c_0}$$

...

$$w_n = ky^{c_0} \quad : \quad k \in K \ , \ c_0 \in \mathbb{Z}$$

dir. Böylece (2.6) da verilen z için $z = w_ny^{c_{n+1}} = ky^c \quad : \ c \in \mathbb{Z}$ elde edilir.

$z = ky^{c_0}y^{c_{n+1}} = ky^{c_0+c_n+1} = ky^c$, $c_0 + c_n + 1 \coloneqq c$

Ne y ne de y^2, K ya ait olmadığından; yani $y, y^2 \notin K$ olduğundan

$\Gamma = K + Ky + Ky^2 = K + yK + y^2K$

dır. Yani $y \in \Gamma$, $y^2 \in \Gamma$ ve $y, y^2 \notin K$ olduğundan y ve y^2 , K nın yan sınıflarındadır. ($y \in Ky$ ve $y^2 \in Ky^2$)

Şimdi $\Gamma \supset \Gamma^3 \supset K$ ve $|\Gamma : K| = 3$ olduğundan; $|\Gamma : \Gamma^3| = 1$ veya $|\Gamma : \Gamma^3| = 3$ tür. Fakat $\Gamma \neq \Gamma^3$ olduğundan ($y \notin \Gamma^3$) $|\Gamma : \Gamma^3| = 3$ olur. O halde $\Gamma^3 = K$ dır.

K nın ikinci dereceden üç devirli grubun serbest çarpımı olduğunu ispatlamak için sadece hiçbir üreteçin diğer ikisi tarafından üretilen gruba ait olmadığını göstermeye ihtiyaç vardır.

$x^2 = (yxy^2)^2 = (y^2xy)^2 = 1$ bağıntıları aşikardır.

$yxy^2 = z$ dersek , $\langle x, z\rangle$ nin elemanları $(xz)^n$, $(zx)^n$, $(xz)^n x$, $(zx)^n z$ formundadır ve bunların hiçbiri (2.1) de verilen x ve y den elde edilen y^2xy ye eşit olamaz.

$$yxy^2 = z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = y^2xy$$

$$xz = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq y^2xy \quad , \quad zx = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq y^2xy$$

dir. Bunların hiçbir kuvvetinden y^2xy elde edilemez. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.■

m , 6 ile bölünmediğinde, Teorem2.1.1. ve Teorem2.1.2., Γ^m yi belirler.

Yani,

Teorem 2.1.3.

$$\begin{aligned} \Gamma^m &= \Gamma \ , & (m,6) &= 1, \\ \Gamma^{2m} &= \Gamma^2 \ , & (m,3) &= 1, \\ \Gamma^{3m} &= \Gamma^3 \ , & (m,2) &= 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

İspat: $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $(m,6) = 1$ için $x = x^m$, $y = y^{\pm m}$ olduğundan $x \in \Gamma^m$ ve $y \in \Gamma^m$ dir. Bu durumda $\Gamma = \Gamma^m$ dir. Yani,

$\Gamma = \langle x, y\rangle = \Gamma^m$

dir. Farz edelim ki $(m,3) = 1$ olsun. O halde $y = y^{\pm 2m}$, $xyx = (xyx)^{\pm 2m}$ ise $\Gamma^2 \subset \Gamma^{2m}$ dir. Ayrıca (2.1.2) de $\Gamma^2 \supset \Gamma^{2m}$ olduğundan $\Gamma^2 = \Gamma^{2m}$ dir.

Son olarak farz edelim ki $(m,2)=1$ olsun. Bu durumda $x=x^{3m}$, $yxy^2=(yxy^2)^{3m}$, $y^2xy=(y^2xy)^{3m}$ ile de $\Gamma^{3m}\supset\Gamma^3$ tür. (2.2.) den $\Gamma^3\supset\Gamma^{3m}$ dir. Dolayısı ile de $\Gamma^3=\Gamma^{3m}$ dir. Bu ispatı bitirir. ■

Lemma 2.1.4.

Γ nın Γ' komütatör alt grubu rankı 2 olan bir serbest gruptur ve $x=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde,

$$|\Gamma:\Gamma'|=6\ ,\qquad \Gamma=\sum_{r=0}^{5}(xy)^r\Gamma'\ ,\quad \Gamma'=\langle xyxy^2,xy^2xy\rangle. \tag{2.8}$$

İspat: J. Nielsen [8] de sonlu mertebeden sonlu tane devirli grubun serbest çarpımının komütatör alt grubunun sonlu ranklı bir serbest alt grup olduğunu göstermiştir.

$$a=xyxy^2\ ,\qquad b=xy^2xy \tag{2.9}$$

dersek, matris gösterimi olarak

$$\bar{a}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ ,\qquad \bar{b}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

dir.

Γ/Γ^2 , Γ/Γ^3 bölüm grupları devirli ve böylece değişmelidir. Ve ayrıca $\Gamma^2\supset\Gamma'$, $\Gamma^3\supset\Gamma'$ dür. Böylece, $\Gamma^2\cap\Gamma^3\supset\Gamma'$ dür.

Γ^2 ve Γ^3 , Γ nın normal alt grupları olduğundan izomorfizm teoreminden

$$\Gamma^2\Gamma^3/\Gamma^3\cong\Gamma^2/\Gamma^2\cap\Gamma^3$$

tür. Bunu göstermek için ,

$$\Phi:\Gamma^2\Gamma^3\to\Gamma^2/\Gamma^2\cap\Gamma^3$$

$$\Phi\Big(\underbrace{A}_{\in\Gamma^2}\ \underbrace{B}_{\in\Gamma^3}\Big)=A(\Gamma^2\cap\Gamma^3)$$

dönüşümünün bir epimorfizma olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$B=I$ alınırsa,

$\Phi(A.I)=A(\Gamma^2\cap\Gamma^3)$ olup Φ örten olur.

Şimdi Φ nin homomorfizma olduğunu gösterelim.

$\Phi(AB)=\Phi(A)\Phi(B)$ olduğunu göstermeliyiz.

$A=A_1A_2\qquad B=B_1B_2\ :\ A_1,B_1\in\Gamma^2\qquad A_2,B_2\in\Gamma^3$ olmak üzere,

$$\Phi\left(\overbrace{A_1A_2}^{A}\,\overbrace{B_1B_2}^{B}\right) = \Phi(A)\Phi(B)$$
$$= A_1(\Gamma^2 \cap \Gamma^3)B_1(\Gamma^2 \cap \Gamma^3)$$
$$= A_1B_1\Gamma^2 \cap \Gamma^3$$

olmalıdır.

$$A_1A_2B_1B_2 = A_1A_2B_1A_2^{-1}A_2B_2 \xrightarrow{\Phi} A_1\,\underbrace{A_2B_1A_2^{-1}}_{\in\Gamma^2}(\Gamma^2 \cap \Gamma^3) =$$
$$A_1(\Gamma^2 \cap \Gamma^3)A_2B_1A_2^{-1}(\Gamma^2 \cap \Gamma^3)$$

($A_2 \in \Gamma^2, B_1 \in \Gamma^3$, $A_2^{-1} \in \Gamma^2$ ve Γ^2 normal olduğundan $A_2B_1A_2^{-1} \in \Gamma^2$ dir.)

$A_2B_1A_2^{-1}(\Gamma^2 \cap \Gamma^3) = B_1(\Gamma^2 \cap \Gamma^3)$ olup olmadığını gösterelim.

$B_1A_2^{-1} = A_2^{-1}B_1$

$B_1A_2^{-1}(\Gamma^2 \cap \Gamma^3) = A_2^{-1}B_1(\Gamma^2 \cap \Gamma^3)$

$B_1^{-1} \in \Gamma^2, A_2 \in \Gamma^3, B_1 \in \Gamma^2$ ve Γ^3 normal olduğundan $B_1^{-1}A_2B_1 \in \Gamma^3$ dir.

$B_1^{-1}A_2B_1 \in \Gamma^3$, $A_2^{-1} \in \Gamma^3$ olduğundan; $B_1^{-1}A_2B_1A_2^{-1} \in \Gamma^3$ ve $B_1^{-1} \in \Gamma^2$, $A_2B_1A_2^{-1} \in \Gamma^2$

olduğundan $B_1^{-1}A_2B_1A_2^{-1} \in \Gamma^2$ dir. $B_1^{-1}A_2B_1A_2^{-1} \in \Gamma^2 \cap \Gamma^3$ olup Φ homomorfizmadır. O halde

$$\Phi(AB) = A(\Gamma^2 \cap \Gamma^3)$$
$$\Phi(AB) = \Gamma^2 \cap \Gamma^3 = A(\Gamma^2 \cap \Gamma^3) \qquad A \in \Gamma^2 \cap \Gamma^3 \Rightarrow A \in \Gamma^3 \Rightarrow AB \in \Gamma^3 \Rightarrow$$
$$\text{Çek}\Phi = \Gamma^3$$

tür.

İzomorfizm Teoreminden,

$$\Gamma/\Gamma^3 = \Gamma^2\Gamma^3/\Gamma^3 \cong \Gamma^2/\Gamma^2 \cap \Gamma^3$$

tür. (2.5) ten $\Gamma/\Gamma^3 \cong \Gamma^2/\Gamma^2 \cap \Gamma^3$ olur. Böylece

$$|\Gamma^2 : \Gamma^2 \cap \Gamma^3| = |\Gamma : \Gamma^3| = 3$$

tür. Fakat $\Gamma \supset \Gamma^2 \supset \Gamma^2 \cap \Gamma^3$ olduğundan

$$|\Gamma : \Gamma^2 \cap \Gamma^3| = |\Gamma : \Gamma^2||\Gamma^2 : \Gamma^2 \cap \Gamma^3| = 2.3 = 6$$

dır. $\Gamma \supset \Gamma^2 \cap \Gamma^3 \supset \Gamma'$ ($\Gamma \supset \Gamma^2$, $\Gamma \supset \Gamma^3 \Rightarrow \Gamma \supset \Gamma^2 \cap \Gamma^3$) ve $|\Gamma : \Gamma'| = |\Gamma : \Gamma^2 \cap \Gamma^3| = 6$ olduğundan $\Gamma' = \Gamma^2 \cap \Gamma^3$ tür. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 2.1.5.

Γ', Γ nın komütatör alt grubu ise

$\Gamma' = \Gamma^2 \cap \Gamma^3$ dir.■ (2.11)

Teorem 2.1.3. ten Γ^{6m} gruplarının incelenmesi kalmıştır. $\Gamma^2 \supset \Gamma^6$, $\Gamma^3 \supset \Gamma^6$ olduğundan (2.11) den

$\Gamma' \supset \Gamma^6$ (2.12)

elde edilir. Gerçekten,

$z \in \Gamma$ için $z^6 \in \Gamma^6$ dır. $z^6 = (z^3)^2 \in \Gamma^6$ ve $w := z^3$ olarak alınırsa $w^2 \in \Gamma^2$ ve buradan da $z^6 \in \Gamma^2$ dir. Benzer şekilde $z^6 \in \Gamma^6$ için $z^6 = (z^2)^3 \in \Gamma^6$ ve $t := z^2$ denirse $t^3 \in \Gamma^3$ olur. Böylece $z^6 \in \Gamma^3$ olur. $z^6 \in \Gamma^2$ ve $z^6 \in \Gamma^3$ olduğundan $z^6 \in \Gamma^2 \cap \Gamma^3$ tür. Buradan $\Gamma' \supset \Gamma^6$ dır.

O halde Γ' bir serbest grup ve $\Gamma^6 \supset \Gamma^{6m}$ dir, Schreier Teoremi [14].

Teorem 2.1.6.

Γ^{6m} grupları serbest gruplardır.■

Γ^{6m} gruplarıyla ilgili birkaç şey daha söylenebilir. İlk durumda $\Gamma \supset \Gamma'$ olduğundan $\Gamma^{6m} \supset (\Gamma')^{6m}$ dır.

$(\Gamma = \Gamma^2\,\Gamma^3\ ,\ \Gamma^2 \supset \Gamma'\ ,\ \Gamma^3 \supset \Gamma' \Rightarrow \Gamma = \Gamma^2\Gamma^3 \supset \Gamma'\ )$

Böylece eğer $|\Gamma' : (\Gamma')^{6m}| = \infty$ ise $|\Gamma : \Gamma^{6m}|$ de sonsuzdur. Özellikle; 6 için Burnside probleminin M.Hall'a ait çözümü ([11]) $|\Gamma' : (\Gamma')^6| < \infty$ iken $|\Gamma : \Gamma^6| < \infty$ olduğunu söyler. İkinci olarak (2.3) ve (2.12) den $(\Gamma')^m \supset (\Gamma^6)^m \supset \Gamma^{6m}$ dir.

Burnside probleminin Novikov [15] sonuçlarından , $m \geq 72$ için $|\Gamma : \Gamma^{6m}| = \infty$ olduğundan $m \geq 72$ için $|\Gamma' : (\Gamma')^6| = \infty$ dur.

Diğer tarafta 70 durum vardır.

Γ^{6m} , $2 \leq m \leq 71$ olmak üzere $|\Gamma : \Gamma^6|$ bilinmiyor. (2.13)

Lemma 2.1.7.

G α, β elemanlarıyla üretilen bir grup olsun. N de G nin bir normal alt grubu olsun.

$[\alpha,\beta]=\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ (2.14)

Bu takdirde G', G nin komütatör alt grubu olmak üzere $N\supset G'$ dür.

İspat: $G=\langle\alpha,\beta\rangle$, $N\lhd G$ ve $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\epsilon N$ ise $G'\subset N$ olduğunu gösterelim.

$(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})\epsilon N$ ise $(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})^{-1}\epsilon N \Rightarrow \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\,\epsilon N$ dir.

Göstermemiz gereken G grubunun N'ye göre değişmeli olup olmadığıdır. Yani $x,y\,\epsilon\,G$ olmak üzere $xyN=yxN$ olmalıdır.

$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\epsilon N$ olduğu biliniyor. Buradan

$\alpha^{-1}\beta^{-1}\epsilon\beta^{-1}\alpha^{-1}N=N\beta^{-1}\alpha^{-1}$

$\alpha^{-1}\beta^{-1}\epsilon N\beta^{-1}\alpha^{-1}\Rightarrow\alpha^{-1}\beta^{-1}\epsilon\beta^{-1}\alpha^{-1}N$

$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta\epsilon\beta^{-1}\alpha^{-1}N\alpha\beta\,\epsilon\,N$ ($g\epsilon G$ olmak üzere $gNg^{-1}\epsilon N$)

olur. Benzer şekilde $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1},\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta\epsilon N$ 'dir.

$\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\,\epsilon N$ olmalıdır.

$\alpha^{-1}\underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{N}\alpha\,\epsilon N \quad\Rightarrow\alpha^{-1}N\alpha\;\epsilon N$ dir. Bu da $\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\,\epsilon N$ olduğunu söyler. O halde $(\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha)^{-1}\epsilon N \Rightarrow \alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}\,\epsilon N$ ve ikili yer değiştirmeleri olan $\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\;\epsilon N$ ise $\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\,\epsilon N$ dir. Üstelik $\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\,\epsilon N$ dir.

Gerçekten ;

$\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\,\epsilon N$ için

$$\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\beta\sim\alpha\,\underbrace{\beta^{-1}\,\underbrace{\underbrace{\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}}_{\epsilon N}\beta}_{\epsilon N}\,\alpha^{-1}}_{\epsilon N}\,\beta^{-1}\beta\,\epsilon N$$

olur. Benzer şekilde diğerleri de gösterilebilir.

O halde $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, $\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$, $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$, $\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}$, $\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha$, $\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}$, $\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta$, $\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\,\epsilon N$ 'dir. Şimdi

$x=\alpha^2$ ve $y=\beta$ alalım. $xyx^{-1}y^{-1}\epsilon N$ olduğunu gösterelim.

$\alpha^2\beta\alpha^{-2}\beta^{-1}\epsilon N$ midir?

$$\alpha^2\beta\alpha^{-1}.\alpha^{-1}\beta^{-1}=\alpha^2\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{\epsilon N}$$

$$=\alpha^2\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}$$

$$=\alpha.\underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{\epsilon N}\alpha^{-1}$$

$$=\alpha N\alpha^{-1}\,\epsilon N$$

olduğundan $\alpha^2\beta\alpha^{-2}\beta^{-1}\epsilon N$ olur.

$x = \alpha^2$, $y = \beta^2$ için $\alpha^2\beta^2\alpha^{-2}\beta^{-2} \epsilon N$ olup olmadığına bakalım.

$$\alpha.\alpha\beta\beta\alpha^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta\underbrace{\beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}}_{\epsilon N}\alpha\beta\alpha^{-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}\beta^{-1}$$

$$\sim \alpha\beta\underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{\epsilon N}\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\beta^{-1}$$

$$\sim \alpha\beta\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta\underbrace{\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha}_{\epsilon N}\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

$$= \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in N \text{ dir.}$$

Ayrıca $x = \alpha^a$ ve $y = \beta$ için $\alpha^a\beta\alpha^{-a}\beta^{-1} \epsilon N$ olmalıdır.

$$\alpha^{a-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\alpha^{1-a}\beta^{-1} \sim \alpha^{a-1}\underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{\epsilon N}\beta\alpha^{1-a}\beta^{-1}$$

$$\sim \alpha^{a-1}\beta\alpha^{1-a}\beta^{-1} \sim \alpha^{a-2}\beta\alpha^{2-a}\beta^{-1} \sim \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

dir. O halde $\alpha^a\beta\alpha^{-a}\beta^{-1}\epsilon N$ ve benzer şekilde $\alpha\beta^b\alpha^{-1}\beta^b\epsilon N$ ‘dir.

Son olarak $x = \alpha^a$ ve $y = \beta^b$ için $\alpha^a\beta^b\alpha^{-a}\beta^{-b}\epsilon N$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha^a\beta^b\alpha^{-a}\beta^{-b} = \alpha^{a-1}\alpha\beta^b\alpha^{-1}\alpha^{1-a}\beta^{-b}$$

$$\sim \alpha^{a-1}\underbrace{\alpha\beta^b\alpha^{-1}\beta^{-b}}_{\epsilon N}\beta^b\alpha^{1-a}\beta^{-b}$$

$$\sim \alpha^{a-1}\beta^b\alpha^{1-a}\beta^b \sim \alpha\beta^b\alpha^{-1}\beta^b \epsilon N$$

olup $\alpha^a\beta^b\alpha^{-a}\beta^{-b} \epsilon N$ elde edilir.

Böylece $G,$ modül N’ye göre değişmelidir. Buradan da $N \supset G'$ dür.■

Sonuç 2.1.8.

Γ'', Γ nın ikinci komütatör alt grubu olmak üzere $\Gamma^6 \supset \Gamma''$ dür.■

İspatı için $N = \Gamma^6$, $G' = \Gamma''$, $G = \Gamma'$ alınarak yukarıdaki önerme uygulanır.

Γ' (2.9) da verilen a,b ile üretildiğinden ve $\Gamma' \supset \Gamma^6$ olduğundan Γ^6 , Γ' nün bir normal alt grubudur ve

$$[a,b] = (xyxyx)^6 \epsilon\, \Gamma^6 \subset \Gamma'$$

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = (xyxyx)^6$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \epsilon \Gamma^6$$

dır.

Sonuç 2.1.9.

Γ'/Γ^6 bölüm grubu değişmelidir.■

Aşağıda, kullanacağımız bazı temel bilgiler verelim.

[8] ' deki sonlu ranklı bir serbest grubun komütatör alt grubu olan Γ'' nün Γ daki indeksi sonsudur. Böylece $\Gamma^6 \neq \Gamma''$ dır.

p, q pozitif tamsayılar olsun. Γ' nün $\Gamma'(p,q)$ normal alt gruplarının bir sınıfı şöyle tanımlanır. $w \in \Gamma'$,

$$w = a^{r_1}b^{s_1}\ldots.a^{r_n}b^{s_n}$$

elemanı $\Gamma'(p,q)$ ye aittir ancak ve ancak

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \equiv 0 \quad (mod p) \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} s_i \equiv 0 \quad (mod q)$$

dır. Yani

$$w \in \Gamma'(p,q) \supset \Gamma'' \iff r_1 + r_2 + \ldots. + r_n \equiv 0 \quad (mod p), \ s_1 + s_2 + \ldots + s_n \equiv 0 \ (mod q)$$

dır. Açıkça,

$$\Gamma'(p,q) \supset \Gamma'' \tag{2.15}$$

dür. Bunu göstermek için keyfi bir $\big[[a,b],[c,d]\big] \in \Gamma''$ elemanı alalım.

$$\big[[a,b],[c,d]\big] = [aba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}d^{-1}]$$

$$= \underbrace{aba^{-1}b^{-1}}_{\in \Gamma'(p,q)} . \underbrace{cdc^{-1}d^{-1}}_{\in \Gamma'(p,q)} . \underbrace{bab^{-1}a^{-1}}_{\in \Gamma'(p,q)} . \underbrace{dcd^{-1}c^{-1}}_{\in \Gamma'(p,q)} \ \in \Gamma'(p,q)$$

veya başka bir gösterimle, $aba^{-1}b^{-1}$ elemanı için

$$r_1 + r_2 = 1 - 1 \equiv 0 \quad (mod p)$$

$$s_1 + s_2 = 1 - 1 \equiv 0 \quad (mod q)$$

olduğundan $aba^{-1}b^{-1} \in \Gamma'(p,q)$ olur. Diğerleri için de benzer durum vardır. Böylece her durumda $\Gamma'' \subset \Gamma'(p,q)$ elde edilir.

$$|\Gamma' : \Gamma'(p,q)| = pq \ , \qquad \Gamma' = \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{q-1} a^r b^s \Gamma'(p,q) \, , \tag{2.16}$$

ve $\Gamma'(p,q)$ rankı $1 + pq$ olan bir serbest gruptur. Burada

$$\Gamma' = a^0b^0\Gamma'(p,q) + a^0b^1\Gamma'(p,q) + \cdots. + a^0b^{q-1}\Gamma'(p,q) + a^1b^0\Gamma'(p,q) +$$
$$\cdots. + a^1b^{p-1}\Gamma'(p,q) + \cdots. + a^{p-1}b^0\Gamma'(p,q) + \ldots. + a^{p-1}b^{q-1}\Gamma'(p,q)$$

olup Γ' , pq tane eleman tarafından üretildiği için $|\Gamma' : \Gamma'(p,q)| = pq$ dur. Ayrıca $\Gamma'(p,q)$, rankı $1 + pq$ olan bir serbest gruptur. Γ' , 2 ranklı ve $|\Gamma' : \Gamma'(p,q)| = pq$ dur ([14]). Bu nedenle r ranklı bir serbest gruptaki indeksi i olan R ranklı bir alt grup için Schreier Formülü

$R = 1 + i(r-1)$

dir. (2.15) formülünden

$$w \in \Gamma'' \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} s_i = 0$$

dır. Yani $w \in \Gamma'' \quad \Leftrightarrow \quad r_{1+}r_2 + \ldots + r_n = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = 0$ dır.

Teorem 2.1.10.

Γ^6 grubu , $\Gamma'(6,6)$ grubudur. Böylece Γ^6 nın Γ daki indeksi 216 dır ve 37 üreteçli bir serbest gruptur. Ayrıca

$$|\Gamma' : \Gamma^6| = 36 \quad , \quad \Gamma' = \sum a^r b^s \Gamma^6 \quad , \quad 0 \le r, s \le 5 \qquad (2.17)$$

dır.

$$\Gamma \supset \Gamma' \supset \Gamma^6 \;\; ve \;\; |\Gamma : \Gamma^6| = |\Gamma : \Gamma'| \, . \, |\Gamma' : \Gamma^6| = 6.36 = 216$$

ve

$$\Gamma' = a^0 b^0 \Gamma^6 + a^0 b^1 \Gamma^6 + \cdots . + a^0 b^5 \Gamma^6 + a^1 b^0 \Gamma^6 + .. + a^1 b^5 \Gamma^6 + \cdots . + a^5 b^0 \Gamma^6 + \cdots . + a^5 b^5 \Gamma^6$$

dır.

İspat: $w = a^{r_1} b^{s_1} \ldots . a^{r_n} b^{s_n} \in \Gamma'(6,6)$ olsun. Lemma2.1.2.'den Γ' , Γ'' ye göre değişmeli olduğundan

$$w = a^{r_1 + \ldots + r_n} b^{s_1 + \ldots + s_n} w_1$$

öyle ki $w_1 \in \Gamma''$ yazılır.

$A \in \Gamma'$ olmak üzere $A\Gamma'' = \Gamma'' A$ olduğu verilmiş. O halde

$$\omega = a^{r_1} b^{s_1} \ldots a^{r_n} b^{s_n} , \omega \in a^{r_1} b^{s_1} \ldots a^{r_n} b^{s_n} \Gamma' = a^{r_1 + \cdots + r_n} b^{s_1 + \cdots + s_n} \Gamma''$$

dür. Buradan

$$\omega = a^{r_1 + \cdots + r_n} b^{s_1 + \cdots + s_n} \, \omega_1 \in \Gamma'' \ni$$

$$xy\Gamma'' = yx\Gamma''$$

$$a^{r_1} b^{s_1} a^{r_2} b^{s_2} \Gamma'' = a^{r_1} \Gamma'' \underline{b^{s_1} \Gamma'' a^{r_2} \Gamma''} \, b^{s_2} \Gamma''$$

$$= a^{r_1} \Gamma'' . \underline{b^{s_1} a^{r_2}} \, \Gamma'' . b^{s_2} \Gamma''$$

ve böylece

$$a^{r_1} b^{s_1} a^{r_2} \Gamma'' = \; b^{s_1} a^{r_1 + r_2} .$$

$$\Gamma'' \subset \Gamma^6 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i \equiv \sum_{i=1}^{n} s_i \equiv 0 \;\; (mod 6),$$

olduğundan $w \in \Gamma^6$ dır. Böylece Γ' (6,6) $\subset \Gamma^6$ elde edilir.

Şimdi $u \epsilon \Gamma$ keyfi olsun. Lemma2.1.4. 'ten bir r tamsayısı vardır; öyle ki r , $0 \leq r \leq 5$ ve $u = (xy)^r u'$, $u' \epsilon \Gamma'$. Böylece

$$u^6 = \{(xy)^r u'\}^6 = \left\{(xy)^r u'^{(xy)^{-r}}\right\}\left\{(xy)^{2r} u'^{(xy)^{-2r}}\right\} \ldots \left\{(xy)^{6r} u'^{(xy)^{-6r}}\right\}(xy)^{6r}$$

olur. Basit bir hesapla

$$(xy)^6 = ab^{-1}a^{-1}b \,\epsilon\, \Gamma'' \subset \Gamma'(6,6) \qquad (2.18)$$

dır.

$$(xy)^6 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ab^{-1}a^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olup $ab^{-1}a^{-1}b$ elemanı için kuvvetler incelendiğinde $r_1 + r_2 = 1 - 1 = 0 = -1 + 1 = s_1 + s_2$ ve $1 - 1 \equiv 0 \ (mod\ 6)$ olduğundan $(xy)^6 = ab^{-1}a^{-1}b \,\epsilon\, \Gamma'(6,6)$ elde edilir.

Veya $a, b \in \Gamma'$ için Γ'', Γ' nün komütatör alt grubu olduğundan $ab^{-1}a^{-1}b$ $=(xy)^6 \epsilon\, \Gamma''$

dür.

Şimdi ise $w \,\epsilon\, \Gamma$ iken $s(w) = (xy)w(xy)^{-1}$ tanımlayalım. Böylece

$$u^6 = s^r(u')s^{2r}(u') \ldots s^{6r}(u')(xy)^6 \qquad (2.19)$$

dır. Her k tamsayısı için $s^k(u') \,\epsilon\, \Gamma'$ dür. Çünkü,

$$s^k(u') = (xy)^k u'(xy)^{-k}$$

$$(xy)^k = xyxy \ldots xy$$

Burada xy nin kuvveti k olduğundan $k \equiv 0 \ (mod\ k)$ dır. Buradan da $(xy)^k \epsilon\, \Gamma'(k,k)\Gamma'$.

Böylece $(xy)^{-k} \epsilon\, \Gamma'$ ve $u' \epsilon \Gamma'$ olduğundan

$$S^k(u') = (xy)^k u'(xy)^{-k} \epsilon\, \Gamma'$$

olur. Ayrıca $\forall$ $g, h \,\epsilon \Gamma'$ için

$$S^k(gh) = S^k(g)S^k(h)$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} S^k(gh) &= (xy)^k gh(xy)^{-k} \\ &= (xy)^k g(xy)^{-k}(xy)^k h(xy)^{-k} \\ &= S^k(g)S^k(h) \epsilon\, \Gamma' \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan $u_1 \epsilon\, \Gamma'' \subset \Gamma'(6,6)$ olmak üzere

$$u^6 = \{s^r(a)s^{2r}(a) \ldots . s^{6r}(a)\}^{\alpha}\{s^r(b) \ldots . s^{6r}(b)\}^{\beta} u_1 \qquad (2.20)$$

olacak şekilde α, β tamsayı vardır.

Γ', Γ'' ye göre abelyen olduğundan

$$\Gamma' = \langle xyxy^2, xy^2xy\rangle = \langle a, b\rangle$$

$$u' \in \Gamma' \Rightarrow u' = a^{k_1}b^{l_1} \dots a^{k_i}b^{l_i}$$

$$S^r(u') = S^r(a^{k_1})S^r(b^{l_1}) \dots S^r(a^{k_i})(b^{l_i})$$

dir. Burada

$$S^r(a^k) = (xy)^r a^k (xy)^{-r}$$

$$= \underbrace{(xy)^r a(xy)^{-r}\,(xy)^r a(xy)^{-r}\,(xy)^r a \;\dots\; a(xy)^{-r}(xy)^r a(xy)^{-r}}_{k\ tane}$$

$$= [S^r(a)]^k$$

dir. Böylece

$$S^r(u') = [S^r(a)]^{k_1}.[S^r(a)]^{k_2} \dots [S^r(a)]^{k_i}.[S^r(b)]^{l_1} \dots [S^r(b)]^{l_i}$$

$$S^r(u') = [S^r(a)]^{k_1+k_2+\dots+k_i}.[S^r(b)]^{l_1+l_2+\dots+l_i}$$

$$S^{2r}(u') = [S^{2r}(a)]^{k_1+k_2+\dots+k_i}.[S^{2r}(b)]^{l_1+l_2+\dots+l_i}$$

$$\vdots$$

$$S^{6r}(u') = [S^{6r}(a)]^{k_1+k_2+\dots+k_i}.[S^{6r}(b)]^{l_1+l_2+\dots+l_i}$$

$$S^r(u').S^{2r}(u') \dots S^{6r}(u') = \left(S^r(a)\right)^{k_1+\dots+k_i}.\left(S^r(b)\right)^{l_1+\dots+l_i} \dots$$

$$\dots \quad \left(S^{6r}(a)\right)^{k_1+\dots+k_i}.\left(S^{6r}(b)\right)^{l_1+\dots+l_i}$$

$$= \left(S^r(a)\right)^{k_1+\dots+k_i}.\left(S^{2r}(a)\right)^{k_1+\dots+k_i} \dots \left(S^{6r}(a)\right)^{k_1+\dots+k_i}.$$

$$\left(S^r(b)\right)^{l_1+\dots+l_i} \dots \left(S^{6r}(b)\right)^{l_1+\dots+l_i}$$

$$= \{S^r(a)S^{2r}(a) \dots S^{6r}(a)\}^{k_1+k_2+\dots+k_i}.\{S^r(b)S^{2r}(b) \dots S^{6r}(b)\}^{l_1+l_2+\dots+l_i}$$

$k_i, l_i \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\sum_{n=1}^{i} k_i \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{i} l_i \in \mathbb{Z}$ dır.

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\alpha \coloneqq \sum_{n=1}^{i} k_i\,, \quad \beta \coloneqq \sum_{n=1}^{i} l_i$$

alırsak $u^6 = \{S^r(a)S^{2r}(a) \dots S^{6r}(a)\}^{\alpha}.\{S^r(b)S^{2r}b \dots S^{6r}(b)\}^{\beta}$, u_1, öyle ki $u_1 \in \Gamma'' \subset \Gamma'(6,6)$ elde edilmiş olur. Aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

$$\begin{aligned}
s(a) &= ab^{-1}, & s(b) &= a, \\
s^2(a) &= ab^{-1}a^{-1}, & s^2(b) &= ab^{-1}, \\
s^3(a) &= ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}, & s^3(b) &= ab^{-1}a^{-1}, \\
s^4(a) &= ab^{-1}a^{-1}b^2a^{-1}, & s^4(b) &= ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}, \\
s^5(a) &= ab^{-1}a^{-1}baba^{-1}, & s^5(b) &= ab^{-1}a^{-1}b^2a^{-1}, \\
s^6(a) &= ab^{-1}a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}, & s^6(b) &= ab^{-1}a^{-1}baba^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Bir örnek için $S^2(a)$ yı inceleyelim:

$S^2(a) = ab^{-1}a^{-1}$ için

$S^2(a) = (xy)^2a(xy)^2$

$x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$xy = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(xy)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(xy)^{-2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (xy)^2a(xy)^{-2} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab^{-1}a^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olup $S^2(a) = ab^{-1}a^{-1}$ dir.

Tablo (2.21)'deki a, b' nin üsleri toplamı ve (2.20) göz önüne alındığında eğer $r \neq 0$ ise $u^6 \in \Gamma'' \subset \Gamma'(6,6)$ dır. Bu yüzden eğer $r = 0$ ise bu kez de $u^6 = I$ ve $I \in \Gamma'(6,6)$ olacağından $u^6 \in \Gamma'(6,6)$ olup her durumda $u^6 \in \Gamma'(6,6)$ dır. Buradan da $\Gamma^6 \subset \Gamma'(6,6)$ olur. O halde $\Gamma^6 \subset \Gamma'(6,6)$ ve $\Gamma'(6,6) \subset \Gamma^6$ olduğundan $\Gamma^6 = \Gamma'(6,6)$ dir.■

Göze çarpan başka bir sonuç Γ^6 nın Γ'' ye göre parçalanmasıdır. Yani,

$$\Gamma^6 = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{a}^{6r}\mathrm{b}^{6s}\, \Gamma''$$

şeklinde verilebilir.

Γ nın matris gösterimini kullanarak $\Gamma(n)$ yi tanımlayalım. $\Gamma(n)$, Γ nin n. dereceden temel kongrüans grubudur öyle ki 2×2 tipinde, determinantı 1 ve $A \equiv \pm I(mod n)$ şartını sağlayan matrislerin tümünden oluşur. $\bar{\Gamma}(n)$ ise $A \equiv I(mod n)$ şartını sağlayan determinantı 1 olan 2×2 tipndeki matrislerin tamamını içerir.

Teorem 2.1.11.

$\Gamma' \supset \Gamma(6) \supset \Gamma^6$.

İspat: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$ matrisleri için $A^6 \equiv \pm I \ (mod6)$ dır.

$A^2 = tA - I$, $t = a + d$, t, 2 ve 3'ün katıdır.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \underbrace{(a + d)}_{t} A - I$$

$$\left.\begin{matrix} a + d \equiv 0 \ (mod2) \\ a + d \equiv 0 \ (mod3) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a + d \equiv 0(mod6)$$

$\Gamma^2 \supset \Gamma(2)$ ve $\Gamma^3 \supset \Gamma(3)$ olduğu açıktır. Gerçekten,

$A \in \Gamma^2$ aldığımızda A matrisi $\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2d \end{pmatrix}$ den biri olabilir.

$A \in \Gamma(2)$ keyfi verilsin. Buradan $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2c & d \end{pmatrix}$, $A \equiv \pm I \ (mod2)$ alınabilir. O halde $A \in \Gamma^2$ dir. Böylece $\Gamma(2) \subset \Gamma^2$ elde edilir.

$\Gamma(2): \{A \in \Gamma : A \equiv \pm I \ (mod2) \ , |A| = 1\}$.

Benzer şekilde $\Gamma^3 \supset \Gamma(3)$ olduğunu gösterelim. $A \in \Gamma^3$ aldığımızda A matrisi $\begin{pmatrix} 3a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ den biri olabilir.

$A \in \Gamma(3)$ keyfi verilsin. Buradan $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}$, $a, d \equiv 1 \ (mod3)$ $|A| = 1$ dir. O halde $\forall A \in \Gamma(3)$ için $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ 3c & d \end{pmatrix}$ matrisinde $3ab + 3cd \equiv 0 \ (mod3)$ ve $|A| = 1$ şartları sağlandığından $A \in \Gamma^3$ tür. Buradan $\Gamma^3 \supset \Gamma(3)$ elde edilir.

$\Gamma(3) = \{A \in \Gamma : A = \pm I \ (mod3) , \ |A| = 1 \}$.

Böylece $\Gamma(2) \cap \Gamma(3) = \Gamma(6)$, $\Gamma(2) \cap \Gamma(3) = \{A \in \Gamma : A = \pm I(mod6) \ , \ |A| = 1\}$ ve $\Gamma(2) \cap \Gamma(3) = \Gamma' \supset \Gamma(6)$ elde edilir.■

(2.13) teki alt gruplar sonsuz indeksli ise Γ daki indeksi büyüktür.

Örneğin;

$\Gamma^6 \supset (\Gamma^6)^2 \supset \Gamma^{12}$, $\Gamma^6 \supset (\Gamma^6)^3 \supset \Gamma^{18}$

için Γ^6, 37 üreteçli serbest bir grup olduğundan [11] ; Teorem 2.1.10' dan

$|\Gamma^6 : (\Gamma^6)^2| = 2^{37}$, $|\Gamma^6 : (\Gamma^6)^3| = 3^{8473}$,

dir. Böylece

$|\Gamma : \Gamma^{12}| \geq 6^{23}.2^{37}$, $|\Gamma : \Gamma^{18}| \geq 6^3.3^{8473}$

tür. $\Gamma \supset \Gamma^6$ olduğu kullanılırsa

$$|\Gamma : \Gamma^{12}| = \underbrace{|\Gamma : \Gamma^6|}_{6^3} . \underbrace{|\Gamma^6 : (\Gamma^6)^2|}_{2^{37}} . |(\Gamma^6)^2 : \Gamma^{12}| \geq 6^3 . 2^{37}$$

sonucuna varılır. Yine benzer şekilde

$$|\Gamma : \Gamma^{18}| = \underbrace{|\Gamma : \Gamma^6|}_{6^3} . \underbrace{|\Gamma^6 : (\Gamma^6)^3|}_{3^{8473}} . |(\Gamma^6)^3 : \Gamma^{18}| \geq 6^3 . 3^{8473}$$

elde edilir.

2.2. Modüler Grubun Serbest ve Normal Alt Grupları

Bu bölümde Γ modüler grubuna uygulanan Kurosh alt grup teoreminin bazı sonuçları gösterilecek ve Γ nın normal ve serbest alt grupları hakkında bilgi verilecektir. Γ, 2×2 tipinde, determinantı 1 ve elemanları tamsayı olan matrislerin kümesidir. Matris ve onun negatifi aynı dönüşümü verir. Γ, 2. ve 3. mertebeden iki devirli grubun serbest çarpımı olarak verilecektir. $\Gamma = \langle x \rangle * \langle y \rangle$ öyle ki $x^2 = y^3 = 1$ ve $x_1, x_2, \ldots$ elemanlarıyla üretilen grup $\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ şeklinde yazılır. Γ nın bütün elemanlarının m. kuvvetleriyle üretilen ve Γ nın alt grubu olan Γ^m tanımlanır. [13] te bu grupların yapısı incelendi ve aşağıdaki gibi gösterildi:

$$\Gamma^2 = \langle y \rangle * \langle xyx \rangle = \langle y, xyx \rangle \qquad (2.22)$$

$$\Gamma^3 = \langle x \rangle * \langle yxy^2 \rangle * \langle y^2xy \rangle = \langle x, yxy^2, y^2xy \rangle$$

Lemma 2.2.1.

H, Γ nın trivial olmayan bir alt grubu olsun. O halde H bir serbest gruptur $\Leftrightarrow$ H, sonlu periyodlu hiçbir eleman içermez.

İspat: Kurosh alt grup teoreminden [1] ; G serbest çarpımının bir $H \neq \{1\}$ alt grubu bir serbest çarpımdır. F serbest ya da $\{1\}$ olacak şekilde $H = F * II * G_i$ dir. G_i, G'nin serbest çarpanlarından birinin bir alt grubunun eşleniğidir.

$$G = \Gamma = \langle x \rangle * \langle y \rangle$$

olduğundan G nin serbest çarpanları $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ dir. O halde

$$G_1 \cong \langle 1, x \rangle, \; G_2 \cong \langle 1, y, y^2 \rangle$$

dir. Burada x, y sonlu periyodlu olduğundan $a \in G_1 * G_2 \backslash \{e\}$ için $a \neq x, y$ dir. Bu durumda $a = xy$ veya $a = xy^2$ dir. Bunların her birinin mertebesi sonsuzdur. Böylece

Kurosh alt grup teoreminden F serbest veya $\{1\}$ ve her G_i $\langle x \rangle$ veya $\langle y \rangle$ nin eşleniği, $H < \Gamma$ olmak üzere

$$H = F * \mathrm{II} * G_i \tag{2.23}$$

dir. Buna göre H sonlu periyodlu hiçbir eleman içermezse $\mathrm{II} * G_i$ serbest çarpımı boştur ve bu yüzden $H = F$ dir. Burada $H,$ birimden veya kendisinden farklı olduğundan H serbesttir.

Tersine serbest grubun birimden farklı bütün elemanları sonsuz mertebedendir. Gerçekten,

$$w = x_{\delta_1}^{\varepsilon_1} x_{\delta_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\delta_n}^{\varepsilon_n}$$

kelimesini göz önüne alınır. Eğer w 'da $x_{\delta_1}^{\varepsilon_1}$ ve $x_{\delta_n}^{\varepsilon_n}$, $x_{\delta_2}^{\varepsilon_2}$ ve $x_{\delta_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}$, … , $x_{\delta_k}^{\varepsilon_k}$ ve $x_{\delta_{n-k+1}}^{\varepsilon_{n-k+1}}$ çiftleri birbirinin tersleri ve $x_{\delta_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}}$ ve $x_{\delta_{n-k}}^{\varepsilon_{n-k}}$ çifti birbirinin tersi değil ise

$$\overline{w} = x_{\delta_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} x_{\delta_{k+2}}^{\varepsilon_{k+2}} \dots x_{\delta_{n-k}}^{\varepsilon_{n-k}}$$

yazılır. Bu eşitlikte k sayısı $0 \le k \le n/2$ aralığında olmalıdır. Çünkü w kelimesi boş değildir. Şimdi $s > 0$ sayısı için

$$w^s = x_{\delta_1}^{\varepsilon_1} x_{\delta_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{\delta_k}^{\varepsilon_k} \overline{w}^s x_{\delta_{n-k+1}}^{\varepsilon_{n-k+1}} \dots x_{\delta_n}^{\varepsilon_n}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafında herhangi bir kısaltma yapılmaz. Yani indirgenmiş olan kelime boştan farklıdır. Böylece $w^s \neq 1$ dir. ■

Lemma 2.2.2.

Sonlu periyodlu eleman içeren Γ nın tek normal alt grubları Γ, Γ^2 ve Γ^3 tür.

İspat: H, Γ nın sonlu periyodlu bir eleman içeren bir normal alt grubu olsun.

$$H = F * II * G_i$$

ve G_i ler $< x >$ veya $< y >$ nin eşleniği olduğundan H , 2 periyodlu veya 3 periyodlu eleman içerir. Çünkü $x^2 = y^3 = 1$ dir. Γ nın 2 periyodlu her elemanı x in eşleniği, 3 periyodlu her elemanı y veya y^{-1} in eşleniğidir.

Buradan $y \in H$ veya $y^{-1} \in H$ olur. Böylelikle üç durum ortaya çıkar:

i) $x \in H$ ve $y \in H$ tır. O halde $H \supset \Gamma.$ Diğer yandan $H,$ Γ nın normal alt grubu olduğundan $\Gamma \supset H$ tır. Buradan $H = \Gamma$ olduğu söylenir.

ii) $y \in H$ ve $x \notin H$ tır. O halde $H \neq \Gamma$ dır. H, normal olduğundan $y \in H$ ve $x \in \Gamma$ için $xyx^{-1} \in H$ olur. $x^2 = 1$ ve $x = x^{-1}$ olduğundan $xyx^{-1} = xyx \in H$ olur. O halde (2.22) den $H \supset \Gamma^2$ olur. Ayrıca $|\Gamma : \Gamma^2| = 2$ açıkça;

$$\Gamma \supset H \supset \Gamma^2 \text{ ve } |\Gamma : \Gamma^2| = \underbrace{|\Gamma : H|}_{2} . \underbrace{|H : \Gamma^2|}_{1} = 2 \, , \; |H : \Gamma^2| = 1$$

dir. Dolayısıyla $H = \Gamma^2$ dir.

iii) $x \in H$ ve $y \notin H$ dir. Buradan $H \neq \Gamma$ olduğu söylenir. Yine H normal olduğundan $x \in H$, $y \in \Gamma$ için $yxy^{-1} \in H$ dir. $y^3 = 1$ ve $y^{-1} = y^2$ olduğu düşünülürse $yxy^{-1} = yxy^2 \in H$ olur. $y \in H$ ve H, bir grup olduğundan $y^{-1} \in H$ olur. Bu durumda $x \in \Gamma$ için $y^{-1}xy \in H$ hatta $y^2xy \in H$ dir. (2.22) den $H \supset \Gamma^3$ olur .

$$\Gamma \supset H \supset \Gamma^3 \text{ ve } |\Gamma : \Gamma^3| = \underbrace{|\Gamma : H|}_{3} . \underbrace{|H : \Gamma^3|}_{1} = 3 \; , \quad |H : \Gamma^3| = 1$$

olduğundan $H = \Gamma^3$ tür.■

Teorem 2.2.3.

H, Γ nın $\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3$ ten farklı trivial olmayan normal bir alt grubu olsun. Bu durumda, H serbest bir gruptur.

İspat: H, Γ nın $\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3$ ten farklı trivial olmayan normal bir alt grubu olsun. Bu durumda Lemma 2.2.2. den H , sonlu periyodlu hiçbir eleman içermez. Böylece Lemma 2.2.1. den H serbest bir gruptur.

Teorem 2.2.4.

H, Γ nın $\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3$ ten farklı $|\Gamma : H| = \mu < \infty$ olan normal bir alt grubu olsun. Bu durumda μ , 6 ile bölünür.

İspat: Teorem 2.2.3. ten H serbest gruptur. Bu yüzden H, x i veya y yi içeremez. Ayrıca H normal olduğundan $xy^{-1} \in H$ ise $y^{-1}x \in H$ ve böylece $y = y^{-1}xxy^{-1} \in H$ olur. Fakat bu bir çelişkidir. O halde xH, yH yan sınıfları H tan ayrık ve farklıdır. Yani $H \cap xH = \emptyset$ ve $H \cap yH = \emptyset$ tur. Bu yüzden Γ / H , 2. ve 3. mertebeden devirli grupları kapsar.■

Γ dan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanını göz önüne alalım. Açıkça A ve $-A$ matrisleri aynı dönüşümü verir. $\Gamma_0(n)$, n pozitif bir tam sayı olmak üzere $c \equiv 0\ (modn)$ şartını sağlayan Γ nın normal bir alt grubudur. Eğer

$a^2 + 1 \equiv 0\ (modn)$

ise $\Gamma_0(n)$, 2 periyotlu bir eleman içerir.

$a^2 \pm a + 1 \equiv 0\ (modn)$

ise $\Gamma_0(n)$, 3 periyodlu bir eleman içerir; başka da sonlu periyodlu eleman içermez.[3]

Bu durumlarda $\Gamma_0(n)$ sonlu periyodlu hiçbir eleman içermeyebilir. Kongrüans çözümlerinin varlığı, sonlu periyodlu $\Gamma_0(n)$ nin elemanlarının varlığını destekler. Böylece $a^2 + 1 = nt$ ise $\begin{pmatrix} a & -t \\ n & -a \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ dir ve 2 periyodludur. $a^2 \pm a + 1 = nt$ ise $\begin{pmatrix} -a & -t \\ n & a \pm 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ dir ve 3 periyodludur. Böylece Lemma2.2.1. aşağıdaki teoremi verir.

Teorem 2.2.5.

$a^2 + 1 \not\equiv 0\ (modn)$ veya $a^2 \pm a + 1 \not\equiv 0\ (modn)$ olan a yoksa $\Gamma_0(n)$ serbesttir.

Özellikle n, $12t - 1$ şeklinde bir sayıysa $\Gamma_0(n)$ serbesttir. Bu alandaki genel ispatlar ağırlıklı olarak grup teorisine ve geometriye dayanır. [5]

Teorem2.2.4. ün bir genellemesi yapılabilir. m, n pozitif tamsayılar ve $\Gamma(m, n)$, $b \equiv 0\ (mod\ m)$, $c \equiv 0\ (mod\ n)$ ile tanımlanmış ve Γ nın bir alt grubu olmak üzere $\Gamma_0(n) = \Gamma(1, n)$ dir.

Teorem 2.2.6.

mn tek ise $\Gamma(m, n)$ serbesttir ancak ve ancak mn, $4t + 3$ formundaki bir asalla ve 9 ile ya da $3t + 2$ formundaki bir asalla bölünebilirdir. mn çift ise $\Gamma(m, n)$ serbesttir ancak ve ancak mn, 4 ya da $4t + 3$ formundaki bir asalla bölünebilirdir.

İspat: $D = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. Böylece $D^{-1}\Gamma(m, n)D = \Gamma(1, mn) = \Gamma_0(mn)$ dir. Burada $\Gamma(m, n)$ ve $\Gamma_0(mn)$ alt grupları eşlenik alt gruplardır. Böylece teoremin devamı Teorem 2.2.3 ten açıktır. ■

Γ nın, $\Gamma(m,n)$ ve $\Gamma_0(mn)$ alt grupları eşleniktir $\Leftrightarrow$ $(m,n) = 1$ dir.

$G < \Gamma$ olmak üzere $G(n)$, G nin temel kongrüans alt grubu ise $n > 1$ için $G(n)$ daima serbesttir. Çünkü Teorem2.2.3. ten $G(n)$, $\Gamma(n)$ nin bir alt grubu ve $\Gamma(n)$ de Γ nın $\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3$ ten farklı normal bir alt grubu ise $G(n)$ serbesttir.

3. İRDELEME

Lineer kesirli dönüşümlerin grubu olarak bilinen $PGL(2,\mathbb{C})$ grubunun alt grubu olan $PSL(2,\mathbb{R})$ özellikle 19. yüzyılda Öklid olmayan geometriler ve İnvaryant Teorinin keşfiyle büyük önem kazanmış, gerek topolojik grup yapısına uygun olması gerekse cebirsel metotlarda derinlemesine incelenmesi sebebiyle oldukça önem kazanmıştır.

$PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun alt grubu olan Γ Modüler Grup ve onun kongrüans, serbest ve normal alt grupları üzerinde önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında literatürdeki genel kavramlar özetlenmiş ve çalışmamızın en önemli kısmı olan $\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3$ gruplarının serbest çarpım ve Γ', Γ^{6m} grupları için serbest grup durumu incelenmiştir.

Burada temel referansımız Morris Newman'ın [13], [19] makaleleri olmuştur. Buradaki teoremlerden yararlanılmıştır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, modüler grubun alt grupları üzerinde çalışıldı. Bunlarla ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca bu çalışmada:

1. Γ modüler grubunun iki ve üç periyodlu iki eliptik eleman tarafından üretildiği incelendi ve bununla ilgili örnekler ve teorem verildi.
2. Γ modüler grubunun ikinci ve üçüncü mertebeden iki devirli grubun serbest çarpımı olduğu araştırıldı.
3. Γ^2 grubunun üçüncü mertebeden iki devirli grubun serbest çarpımı olduğu gösterildi.
4. Γ^3 grubunun ikinci mertebeden üç devirli grubun serbest çarpımı olduğu araştırıldı.
5. Γ' komütatör alt grubunun serbest grup olduğu incelendi.
6. Γ^{6m} gruplarının serbest grup olduğu gösteildi.
7. Γ nın alt gruplarının Γ daki indeksleri ve bunlarla ilgili bazı örnekler verildi.

5. ÖNERİLER

1. Γ modüler grubun özellikleri incelenen Γ^2 ve Γ^3 alt gruplarının alt yörüngesel graflarla olan ilişkileri incelenebilir.
2. Bu tezde açık bulunan $2 \leq m \leq 71$ olmak üzere Γ^{6m} nin Γ daki indeksi araştırılabilir.
3. Γ modüler grubunun bazı farklı özel alt gruplarının komütatör alt gruplarının Γ^m ile olan ilişkileri araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Kurosh, A. G. The theory of groups, New York, 1956.

2. Karras, A. and Solitar, D. Note on a theorem of Schreier, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 696-697.

3. Akbaş, M. On Suborbital Graphs For The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33 (2001), 647-652.

4. F. Klein, Vorlesungen über die Theoric der elliptischen Modulfunctionen, Leipzig, 1890.

5. H. Rademacher, Über die Erzeugenden von Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 7 (1930), 134-148.

6. Hungerford, T.W. Algebra, Clevelent State University, USA, 1973.

7. J. H. Van Lint, On the multiplier system of the Riemann-Dedekind function η, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 61 (=Indag. Math., vol. 20) (1958), pp. 522-527

8. J. Nielsen, The commutator subgroup of the free product of the cyclic groups, Mat. Tidsskr. B., (1948), 49-56.

9. Kesicioğlu, Y., Γ^3 ve G_5 Hecke Gruplarının Alt Yörüngesel Grafları, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.

10. L. R. Ford, Automorfic functions, 2nd., New York,1951

11. M. Hall, Jr. The theory of groups, New York, 1959

12. M. Newman, Subgroup of the modular group and sum of squares, Amer. J. Math., 82 (1960), 761-778.

13. M. Newman, The structure of some subgroups of the modular group, Illinois J. Math., 6 (1962), 480-487.

14. O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. Math. Sem. Univ. 5 (1927), 161-183.

15. P.S. Novikov, On periodic groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 127 (1959) , 749-752.

16. Rankin, R.A. Modular Forms and Functions, Cambridge University, Press, 1978.

17. R. C. Gunning, Lecturers on modular forms, Princeton, 1962.

18. Schoneberg, B. Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, 1974.

19. M. Newman, Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group, 1962.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep Akdemirci 1988 yılında Rize/Pazar'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Pazar'da tamamladı. 2007-2010 yılları arasında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde eğitimini tamamladı. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2010 yılından itibaren özel bir kurumda öğretmenlik yapmakta ve iyi derecede İngilizce bilmektedir.