KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRLEŞTİRME FONKSİYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ümit ERTUĞRUL

HAZİRAN 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRLEŞTİRME FONKSİYONLARI

Ümit ERTUĞRUL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14.05.2012
Tezin Savunma Tarihi : 05.06.2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Ümit ERTUĞRUL Tarafından Hazırlanan

BİRLEŞTİRME FONKSİYONLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 15/05/2012 gün ve 1456 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	**…………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ**	**…………………………**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte emeğiyle, öneri ve yönlendirmeleriyle önemli katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Funda KARAÇAL ’a en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca öğrenim sürecinde katkı sağlayan matematik bölümündeki tüm değerli öğretim üyeleri ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, oda arkadaşlarım Öğr. Gör. Hüsnü Anıl ÇOBAN ’a ve kıymetli abim Öğr. Gör. Tuncay KÖR ’e teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi katkılarından dolayı TÜBİTAK ’a teşekkür ederim.

Ümit ERTUĞRUL
Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Birleştirme Fonksiyonları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Funda KARAÇAL ’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.   14/05/2012

Ümit ERTUĞRUL

İÇİNDEKİLER

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

BİRLEŞTİRME FONKSİYONLARI

Ümit ERTUĞRUL

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2012, 71 Sayfa

Bu tezde esas amaç birleştirme fonksiyonlarını incelemek ve bu konu hakkında detaylı bilgi vermektir.

Birinci bölümde konu ile ilgili genel bilgilerden bahsedilerek literatürdeki bazı önemli teorem ve sonuçların ispatları genişletilerek verilmiştir. İlave olarak, tez içerisinde kullanılan kavramlar ile ilgili temel bilgiler açıklayıcı örnekler ile verilmiştir.

İkinci bölümde birleştirme fonksiyonlarının monotonluk, süreklilik, simetriklik gibi özellikleri örnekleriyle birlikte sunuldu.

Anahtar Kelimeler: Birleştirme fonksiyonları, İdempotent, Simetrik, Parçalanabilirlik.

Master Thesis

SUMMARY

AGGREGATION FUNCTIONS

Ümit ERTUĞRUL

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Funda KARAÇAL
2012, 71 Pages

Major aim of the present thesis is to investigate aggregation functions and to give detailed knowledge about this subject.

In the first chapter, general informations about the subject were discussed and proofs of some important theorems and conclusions in the literature were given detailed. In addition, fundamental informations related to the terms are used in this thesis were given with descriptive examples.

In the second chapter, properties of aggregation functions like monotonicity, continuity, symmetry are introduced with examples of them.

Key Words: Aggregation functions, İdempotent, Symmetry, Decomposability.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	**:** Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	**:** Pozitif tamsayıların kümesi
$\mathbb{N}_0$	**:** Negatif olmayan tamsayıların kümesi
$\mathbb{Q}$	**:** Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{R}}$	**:** Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\lvert \mathrm{K} \rvert$	**:** K kümesinin kardinalitesi
$\mathbf{1}_K$	**:** K kümesinin karakteristik fonksiyonu
∞	**:** Sonsuz
$\emptyset$	**:** Boş küme
$\wedge$	**:** Infimum işlemi
$\vee$	**:** Supremum işlemi
$\overline{\mathrm{X}}$	**:** X kümesinin üst sınırlarının kümesi
$\underline{\mathrm{X}}$	**:** X kümesinin alt sınırlarının kümesi
δ_F	**:** F fonksiyonunun diyagonal kesimi
$ran(F)$	**:** F fonksiyonunun resmi
$\lVert . \rVert$	**:** Norm sembolü
$\mathbf{x}\vert_K$	**:** **x** elemanının K kümesine kısıtlanışı
σ_K	**:** K sayılabilir kümesi üzerindeki tüm permutasyonların kümesi
inf	**:** infimum işlemi
sup	**:** supremum işlemi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çeşitli nümerik değerleri tek değer olacak şekilde bir araya getirme sürecine birleştirme denir ve bu süreci gerçekleştiren nümerik fonksiyona birleştirme fonksiyonu denir. Bu basit tanım birleştirme fonksiyonlarının kullanım alanlarına dikkat çeker: uygulamalı matematik (olasılık, istatistik ve karar kuramı), bilgisayar bilimleri (yapay zeka, yöneylem araştırması) ve birçok diğer uygulama alanları (ekonomi ve finans, örüntü tanıma, görüntü işleme, veri füzyonu, çok kriterli karar alma, otomatik akıl yürütme vs.)

Birleştirme fonksiyonlarının tarihi matematik kadar eski olmasına rağmen (aritmetik ortalamayı düşünerek), bu fonksiyonların varlığı son zamanlara kadar anlaşılamamıştı. Uygulama alanlarının hızlı gelişimi, birleştirme fonksiyonları için sağlam bir teorik tabanın kurulmasını gerekli kıldı. Bu sebeple 1980'lerden bu yana iyi bir çalışma alanı oldu ve hızla gelişti. Son 10 yılda matematiğin bağımsız bir alanı oldu.

Birleştirme fonksiyonları ilk önce n-li $A: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ olarak Klir ve Folger[1] tarafından 1988 'de sunulmuştur.

Devam eden süreçte birçok çalışmalar yapılmış ve sonuçlar elde dilmiştir. Elde edilen sonuçların çoğu, farklı yayınlarda veya genellikle birleştirme fonksiyonlarının özel sınıflarının çalışılmış olduğu monografilerde yer almıştır. 1997'de R.R. Yager ve J. Kacprzyk [2] 'ın OWA birleştirme operatörü üzerine düzenlenmiş kitabı bunlara örnek olarak verilebilir. Yine bu yıllarda birleştirme fonksiyonlarının uygulama alanlarına da ilgi gösterilmeye başlanmış, tıpkı 1998'de B. Bouchon-Meunier'in[3] monografisindeki gibi son eğilimlere ve birleştirme tekniklerindeki gelişmelere yer verilmeye çalışılmıştır.

Genişletilmiş birleştirme fonksiyonlarının birim aralık üzerindeki tanımının ilk olarak 1999'da Kolesarova ve Komornikova[4] tarafından ifade edildiği kabul edilmektedir.

Calvo, Mayor ve Mesiar [Physica Verlag] tarafından 2002 yılında yayınlanmış olan "Aggregation Operators New Trends and Application"[5] isimli çalışma bu alandaki çalışmalara yön vermiştir. Bu çalışmada birleştirme fonksiyonlarının uygulama alanlarına ve birleştirme fonksiyonlarındaki yeni yaklaşımlara değinilmiştir.

2007 yılında Beliakov, Pradara ve Calvo tarafından hazırlanmış olan “Aggregation Functions: A Guide for Practitioners”[6] isimli çalışma uygulama alanlarına ve uygulamacılara yönelik olarak bu alanda oldukça önem kazanmış bir kaynak olarak bu sürece katkı sağlamıştır.

2009 yılında Grabish, Marichal, Mesiar ve Pap tarafından yayınlanan ve bu çalışmaya esas teşkil eden “Aggregation Functions”[7] isimli çalışmada birleştirme fonksiyonları keyfi $\mathbb{I}$ aralığı üzerinde tanımlanmış olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışma bu alanda temel kaynak olarak sıkça kullanılmaktadır.

Aslında 21. yüzyılın ilk yıllarında azımsanmayacak miktarda literatüre ulaşılmış, birçok önemli sonuç bulunmuş (birleştirme fonksiyonlarının farklı sınıflarının karakterizasyonları gibi) ve daha önce çalışılmış veya ilgili olan diğer konularla birçok bağlantısı yapılmış durumdadır. Son yıllarda araştırmacıların yoğun ilgi gösterdiği ve temelini yukarıda bahsi geçen kaynaklardan alan bu çalışma alanı hızla gelişmeye devam etmektedir. Birleştirme fonksiyonları ile birçok çalışma genellikle IFSA, IEEE, IPMU, EUSFLAT, EUROFUSE, FSTA gibi uluslararası konferanslarda sunulmuş ve sunulmaya devam etmektedir.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1.1.

P bir küme ve $\leq$, P üzerinde bir bağıntı olsun. Her $x, y, z \in P$ için

P1. $(x, x) \in \leq$ (Yansıma)

P2. $(x, y) \in \leq$ ve $(y, x) \in \leq$ ise $x = y$ (Ters Simetri)

P3. $(x, y) \in \leq$ ve $(y, z) \in \leq$ ise $(x, z) \in \leq$ (Geçişme)

koşulları sağlanıyorsa $\leq$ bağıntısına P üzerinde bir sıralama (veya kısmen sıralama) denir. Eğer $(x, y) \in \leq$ ise bu durum $x \leq y$ şeklinde gösterilir. Üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı mevcut olan P kümesine sıralı küme (veya kısmen sıralı küme) denir ve $(P, \leq)$ ikilisi ile gösterilir.

$x \leq y$ ise bu durum ‘y, x’ i içerir’ olarak ifade edilir. Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve ‘x, y ’de öz olarak içerilir’ olarak ifade edilir. Ayrıca ‘$x \leq y$ yanlış’ ise $x \nleq y$ yazılır. $x \nleq y$ ve $y \nleq x$ ise ‘x ve y elemanları kıyaslanamaz’ denir ve $x \parallel y$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in P$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(P, \leq)$ kısmen sıralı kümesine zincir veya tam sıralı küme denir.

Uyarı 1.3.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun

(i) Her $x \in P$ için $a \leq x$ koşulunu sağlayan $a \in P$ elemanı mevcutsa, tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten, a ve b bu özelliği sağlayan iki eleman olsa, $a \leq b$ ve $b \leq a$ olur ki P kısmen sıralı küme olduğundan P2 özelliği ile $a = b$ olduğu elde edilir. Böyle bir eleman (eğer mevcutsa) 0 ile gösterilir ve P 'nin en küçük elemanı olarak adlandırılır.

(ii) Eğer her $x \in P$ için $x \leq b$ koşulunu sağlayan $b \in P$ elemanı mevcutsa 1 ile gösterilir ve P 'nin en büyük elemanı olarak adlandırılır. Böyle bir eleman mevcutsa tek olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Eğer 0 ve 1 mevcutsa, 0 ve 1 'e evrensel sınırlar denir. Çünkü her $x \in P$ için $0 \leq x \leq 1$ 'dir.

Tanım 1.4.[8]

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $S \subseteq P$ alt kümesi ise, $(S, \leq)$ kısmen sıralı bir kümedir. Özel olarak, P bir zincir ise S de zincirdir.

Örnek 1.5.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi bir zincir olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\mathbb{N}_0$ pozitif doğal sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir.

Tanım 1.6.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun. $a \in X$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $a \leq x$ ise bu a elemanına X kümesinin en küçük elemanıdır denir ve EkeX ile gösterilir. X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve EbeX ile gösterilir.

Tanım 1.7.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i) $a \in P$ ve her $x \in X$ için $x \leq a$ ise bu a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir ve X kümesinin üst sınırlarının kümesi $\overline{X}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\overline{X} = \{a \in P | \forall x \in X \text{ için } x \leq a\}$$

dır.

(ii) $b \in P$ ve her $x \in X$ için $b \leq x$ ise bu b elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir ve X kümesinin alt sınırlarının kümesi $\underline{X}$ ile gösterilir. Bu takdirde

$$\underline{X} = \{b \in P | \forall x \in X \text{ için } b \leq x\}$$

dir.

Tanım 1.8.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı bir küme ve $X \subseteq P$ olsun. $\overline{X}$ kümesinin varsa en küçük elemanına X kümesinin supremumu denir ve $supX$ ile gösterilir. Dual olarak, $\underline{X}$ kümesinin varsa en büyük elemanına X kümesinin infimumu denir ve $infX$ ile gösterilir. Yani $supX = Eke\overline{X}$ ve $infX = Ebe\underline{X}$ 'dir. $supX$ ve $infX$ (eğer mevcut ise) P2 özelliği ile tektir.

$(P, \leq)$ kısmen sıralı küme ve $x, y \in P$ olsun. Eğer mevcutsa $x \vee y \coloneqq \sup\{x, y\}$ ve $x \wedge y \coloneqq \inf\{x, y\}$ ile verilir. Bazen $X = \{x_\tau : \tau \in M\} \subseteq P$ için $supX = \bigvee_{\tau \in M} x_\tau$ (eğer mevcutsa) ve $infX = \bigwedge_{\tau \in M} x_\tau$ (eğer mevcutsa) ile gösterilir.

1.3. Üçgensel Normlar

Tanım 1.9.

Bir üçgensel norm (kısaca t-norm) $[0,1]$ birim aralığı üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur; yani $T: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu her $x, y, z \in [0,1]$ için

T1. $T(x, y) = T(y, x)$ (Komutatiflik)

T2. $T\big(x, T(y, z)\big) = T(T(x, y), z)$ (Birleşme)

T3. $y \leq z$ ise $T(x, y) \leq T(x, z)$ (Monotonluk)

T4. $T(x, 1) = x$ (Sınır şartı)

özelliklerini sağlar. T-konorm dual olarak tanımlanır.

Örnek 1.10.

Temel olarak kabul edilen dört t-norm T_M, T_P, T_L, T_D aşağıdaki gibidir:

$T_M(x, y) = min(x, y)$ (Minimum)

$T_P(x, y) = xy$ (Çarpım)

$T_L(x, y) = max(x + y - 1, 0)$ (Lukasiewicz t-norm)

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in [0,1)^2, \\ min(x, y) & \text{Aksi halde.} \end{cases}$$ (Drastik çarpım)

1.4. Kullanılan Notasyon

Bu çalışmada reel aralıkları tanımlamak için uluslararası standartlar kullanılır, yani [ve] kare parantezler kullanılır. [a,b] ye bir kapalı aralık, [a,b[ve]a,b] aralıklarına yarı kapalı veya yarı açık aralıklar denir. Buna ek olarak, bu tezde | sembolü bir aralık notasyonu ile veya farklı olarak [veya] ile gösterilir. Örnek olarak |a,b|, a başlangıç ve b bitiş noktalı herhangi reel aralığı gösterir.

Bu tezde herhangi bir birleştirme fonksiyonunun değişkenleri ortak bir $\mathbb{I}$ bölgesine aittir. Buradaki $\mathbb{I}$ bölgesi boştan farklı bir reel aralıktır, sınırlı bir aralıktır veya değildir. Bazı istisnai durumlar hariç $\mathbb{I}$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ genişletilmiş reel sayılar kümesinin boştan farklı bir aralığını temsil etmektedir.

n sıfırdan farklı doğal sayı olmak üzere [n]:={1,2,…,n} olsun. n-sıralıları göstermek için çoğu zaman $(x_1, \dots, x_n)$ yerine koyu **x** sembolü kullanılır.

Kullanışsız terminolojiden kaçınmak için aşağıdaki terminoloji verilir:

Bir Ω kümesinin herhangi K altkümesi için $\mathbf{1}_K : \Omega \to \{0,1\}$, K nın karakteristik fonksiyonu

$$\mathbf{1}_K(w) = \begin{cases} 1, & w \in K \\ 0, & Aksi\ takdirde \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak herhangi $K \subseteq [n]$ için $\mathbf{1}_K$, $\{0,1\}^n$ de K nın karakteristik vektörünü göstersin, yani eğer $i \in K$ ise i. koordinatı 1, aksi takdirde 0 olan n-sıralı olsun. $\mathbf{1}_\emptyset$ ve $\mathbf{1}_{[n]}$ nin yerine sık sık **0** ve **1** yazılır.

Herhangi K kümesinin kardinalitesi |K| ile gösterilir.

Herhangi $K \subseteq [n]$ ve herhangi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için **x** 'in K alt kümesine kısıtlanması $\mathbf{x}|_K$ ile gösterilir (Bu [n] den $\mathbb{I}$ ya bir fonksiyon olarak tanıtılır). Diğer bir deyişle $\mathbf{x}|_K$ |K|-sıralıdır öyle ki artan bir sırada K nın elemanları ile indislenen **x**'in koordinatlarının göz önüne alınmasıyla elde edilir. Tek eleman için $\mathbf{x}|_{\{k\}} = x_k$ yazılır.

Herhangi $K \subseteq [n]$ ve $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n$ için, $\boldsymbol{x}_K\boldsymbol{y}$ $i \in K$ ise i. koordinatı x_i olan aksi takdirde y_i ile tanımlanan n-sıralısını gösterir.

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^m$ ve bir $F: \mathbb{I}^{n+m} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ notasyonu $F(x_1, .., x_n, y_1, \dots, y_m)$ nin kısa gösterimidir (iki vektörden daha fazlası için de benzer şekilde). $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^0$ bir boş vektör(yani hiçbir bileşeni yok) adlandaırılır. Örnek olarak $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{y})$ ve $F(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})) = F(F(\boldsymbol{y}))$ ile verilir.

Herhangi $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{I}$ için $k.x := x, \dots, x$ (k defa) yazılır. Örnek olarak,

$F(3.x, 2.y) = F(x, x, x, y, y)$ ’dir. Daha genel olarak eğer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ ise bu takdirde k.$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ ’in kopyalarını sıralayarak ve parantezler silinerek elde edilen $(k \times n)$ değerli sıralı listesini temsil eder.

Herhangi $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun diyagonal kesimi $\delta_F(x) := F(n.x)$ ile tanımlanan $\delta_F: \mathbb{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ birli fonksiyonudur. $\mathbb{I}^n$ ’in diyagonal kesimi de $diag(\mathbb{I}^n) := \{(n.x): x \in \mathbb{I}\}$ ile gösterilir.

Herhangi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^n$ n-sıralıları için, $\boldsymbol{xx}'$ bileşen tarzında çarpım yapmakla elde edilen $(x_1x_1', \dots, x_nx_n')$ n-sıralısıdır. Benzer şekilde $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{x}'}, \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'}, \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}'$ ve $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}'$ n-sıralıları bileşen tarzında tanımlanır. $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}'$ eşitsizliği de bileşen tarzında anlaşılır. Bununla birlikte $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}'$ ifadesi $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}'$ ve $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ anlamına gelir. Benzer olarak fonksiyonlar için $F < F'$ ifadesi $F \leq F'$ ve en az bir $\boldsymbol{x}$ için $F(\boldsymbol{x}) < F'(\boldsymbol{x})$ anlamındadır.

Herhangi f fonksiyonu için ran(f), f in değer kümesini; dom(f) f ’in tanım kümesini gösterir.

Herhangi K sayılabilir kümesi için σ_K, K kümesi üzerindeki tüm permütasyonların kümesini gösterir. Herhangi $A \subseteq K$ ve $\sigma \epsilon \sigma_K$ için $\sigma(A) := \{\sigma(a) | a \epsilon A\}$ ile verilir.

Herhangi $\sigma \epsilon \sigma_{[n]}$ için

$\mathbb{I}^n_\sigma := \{\boldsymbol{x} \epsilon \mathbb{I}^n | x_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}\}$

olarak tanımlanır.

Verilen herhangi **x** n-sıralısı ve bir $\sigma \epsilon \sigma_{[n]}$ permütasyonu için $[\boldsymbol{x}]_\sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ ile tanımlanır.

$x \to x$ idantik fonksiyonu id ile gösterilir.

Toplama ve çarpmanın genel reel aritmetik işlemlerinin genişletilmiş $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ reel doğrusuna genişlemesi ile ilgili olarak, $\infty + (-\infty) = -\infty$ ve $0.\infty = 0$ kabulleri yapılır. Herhangi $[a, b] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ kapalı aralığı için $sup\emptyset = a$ ve $inf\emptyset = b$ kabul edilir.

1.5. Birleştirme Fonksiyonları

Birleştirme fonksiyonu kavramını tanıtmak için ilk önce literatürde sık sık incelendiği gibi $\mathbb{I} = [0,1]$ durumu incelenecektir.

Tanım 1.11.

$[0,1]^n$ de birleştirme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir $A^{(n)}: [0,1]^n \to [0,1]$ fonksiyonudur:

(i) $A^{(n)}$ her bir değişkene göre azalmayandır.

(ii) $A^{(n)}(0,0,\dots,0) = 0$ ve $A^{(n)}(1,1,\dots,1) = 1$ sınır şartları sağlanır.

Genel durumda aşağıdaki tanım verilir:

Tanım 1.12.

$\mathbb{I}^n$ 'de birleştirme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir $A^{(n)}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonudur:

(i) $A^{(n)}$, her bir değişkene göre azalmayandır.

(ii) $\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf \mathbb{I}$ ve $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sup \mathbb{I}$ (1.1)

dır.

Burada n sıfırdan farklı doğal sayısı birleştirme fonksiyonunun değişkenlerinin sayısını temsil eder. Hiçbir karışıklık olmayacağı zaman $A^{(n)}$ yerine kısaca A yazılacaktır.

Örnek:

$$AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.2}$$

ile tanımlanan aritmetik ortalama her $\mathbb{I}$ aralığı için $\mathbb{I}^n$ de bir birleştirme fonksiyonudur.

(i) $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{I}^n$ ve $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}$ iken $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ olduğu elde edilir. O halde $AM^{(n)}$ 'nin azalmayanlığı açıktır.

(ii) $\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf \mathbb{I}$ ve $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sup \mathbb{I}$ eşitliklerinin doğruluğu gösterilmelidir. $\inf \mathbb{I} = a$, $sup\mathbb{I} = b$ olsun. $\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) = a$ olduğu gösterilmelidir. $\inf \mathbb{I} = a$ olduğundan her $x_i \in \mathbb{I}$ için $a \le x_i$ dir. O halde $na \le x_1 + \dots + x_n$ elde edilir. Buradan da $a \le \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ bulunur. O halde $a \in \underline{\{AM^{(n)}(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n\}}$ elde edilir. $c \in \underline{\{AM^{(n)}(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n\}}$ keyfi alınsın. Bu takdirde her $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için $c \le AM^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ elde edilir. Bu durumda $c \le \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$ olur. $\mathbb{I}$ boştan farklı olduğundan b-a>0 dır. O halde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyleki her $n \ge n_0$ için $\mathrm{b} - \mathrm{a} > \frac{1}{n_0}$ ve $\mathrm{a} + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ 'dır. O halde bu $x_i = \mathrm{a} + \frac{1}{n} \in \mathbb{I}$ elemanları için $c \le \frac{\mathrm{a}+\frac{1}{n}+\dots+\mathrm{a}+\frac{1}{n}}{n} = \mathrm{a} + \frac{1}{n}$ elde edilir. Buradan limit durumuna geçilirse $c \le a$ elde dilir. Bu ise a 'nın $\{AM^{(n)}(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n\}$ kümesinin infimumu yani $\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf\mathbb{I}$ olduğunu verir. $\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}} AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sup\mathbb{I}$ eşitliği de benzer şekilde gösterilir.

(i) ve (ii) $AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ nin birleştirme fonksiyonu olduğunu gösterir.

Özel bir durum olarak bir tekil birleştirme fonksiyonu yani $A^{(1)}: \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ birleştirme fonksiyonu verilir. Bu birleştirme fonksiyonu ve her $x \in \mathbb{I}$ için

$$A^{(1)}(x) = x \tag{1.3}$$

olarak göz önüne alınır.

Karışıklık olmaması amacıyla, çok değişkenli keyfi fonksiyonu gösterirken F (veya G,H,..) harfi, birleştirme fonksiyonunu belirtirken A harfi kullanılır.

Herhangi F fonksiyonun değer kümesi $ran(F)$ ile gösterilir.

Uyarı 1.13.

(i) 1.12 Tanım'ın (i) ve (ii) şartlarını sağlayan herhangi $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için ran(F)$\subseteq \overline{\mathbb{I}}$ olduğu açıktır. Gerçekten $inf\mathbb{I} = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} F(x) \leq \mathrm{F}(x) \leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} F(x) = sup\mathbb{I}$ olduğundan ran(F)$\subseteq \overline{\mathbb{I}}$ dir. Bununla birlikte 1.12. Tanım ile $\mathbb{I}^n$ 'de herhangi birleştirme fonksiyonu çok daha genel olan ran(A)$\subseteq \mathbb{I}$ özelliğine sahiptir.

(ii) Bir A birleştirme fonksiyonu $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ n sıralısı ile, [n] den $\mathbb{I}$ ya $x(i) = x_i$ şeklinde bir fonksiyon olarak göz önüne alınabilir. Bu durumda $A: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ birleştirme fonksiyonu, bu fonksiyon cinsinden $A(x) = A\big(x(1), \ldots, x(n)\big)$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.14.

Herhangi $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun diyagonal kesimi her $x \in \mathbb{I}$ için $\delta_F(x) = F(x, \ldots, x)$ ile tanımlanan $\delta_F: \mathbb{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ birli fonksiyonudur.

1.12. Tanım 'da verilen sınır şartları birleştirme fonksiyonunun tanım kümesinin özelleştirmeden tanımlanamayacağını gösterir. Aşağıdaki önerme $\mathbb{I}^n$ de azalmayan $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun bir birleştirme fonksiyonu olması için $ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ şartının ve (1.1) sınır şartının sadece δ_F diyagonal kesimi için gerekli olduğunu verir.

Önerme 1.15.

Bir azalmayan $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\mathbb{I}^n$ 'de bir birleştirme fonksiyonudur $\Leftrightarrow$ $\inf_{\mathrm{x}\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \inf\mathbb{I}$, $\sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \sup\mathbb{I}$ ve $ran(\delta_F) \subseteq \mathbb{I}$ sağlanır.

İspat.

"⇒"$F\colon \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu bir birleştirme fonksiyonu olsun. O halde F sınır şartlarını sağladığından $inf\mathbb{I} = inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} F\,(x_1, \dots, x_n)$ ve $\sup\mathbb{I} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} F\,(x_1, \dots, x_n)$ dir. Buradan her $x^* \epsilon\ \mathbb{I}$ için $inf\mathbb{I}\ \leq \mathrm{F}(x^*, \dots, x^*)$ ve $inf\mathbb{I} \in \underline{\{F(x^*, \dots, x^*) \colon x^* \in \mathbb{I}\}}$ olur.

c $\in \underline{\{F(x^*, \dots, x^*) \colon x^* \in \mathbb{I}\}}$ keyfi alınsın. Her $x^* \in \mathbb{I}$ için c$\leq\ F(x^*, \dots, x^*)$ dir. Bundan dolayı keyfi $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için de bu eşitsizlik doğrudur. Gerçekten her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için $\mathbb{I}$ zincir olduğundan $min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mevcuttur. $min(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ olsun. Bu durumda her $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için c $\leq\ F(x_i, \dots, x_i)$ $\leq F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olduğundan $c\ \leq\ \inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{I}^n} F\,(x_1, \dots, x_n) = inf\mathbb{I}$ olur. Bu ise $\inf_{x^*\in\mathbb{I}} \delta_F(x^*)\ = inf\mathbb{I}$ olduğunu verir. Benzer şekilde $\sup_{x^*\in\mathbb{I}} \delta_F(x^*)\ = sup\mathbb{I}$ olduğu da gösterilebilir ve F birleştirme fonksiyonu olduğundan $ran(\delta_F) \subseteq ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ olduğu elde edilir.

" ⇐ " $F\colon I^n\ \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu bir azalmayan fonksiyon, her $x \in \mathbb{I}$ için $\inf_{\mathrm{x}\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \inf\mathbb{I}$, $\sup_{\mathrm{x}\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \sup\mathbb{I}$ ve $ran(\delta_F) \subseteq \mathbb{I}$ eşitlikleri sağlansın. F 'in birleştirme fonksiyonu olduğunu göstermek amacıyla, her $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için $\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x})\ = inf\mathbb{I}$, $\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x})\ = sup\mathbb{I}$ ve $ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ olduğu gösterilmelidir.

Keyfi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için, F 'in azalmayanlığından

$\delta_F(Min(x_1, x_2, \dots, x_n)) = F(Min(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, Min(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\leq\ F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

sağlanır. Buradan

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} \delta_F\big(\mathrm{Min}(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) \leq \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ve böylece $inf\mathbb{I} \leq \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bulunur.

Her $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için $\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x}) \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olduğundan, özel olarak her $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x \in \mathbb{I}$ elemanları içinde

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x}) \leq F(x, x, \dots, x) = \delta_F(x)$$

ve dolayısıyla

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x}) \leq \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}} \delta_F(x)$$

bulunur. Bu ise $\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = inf\mathbb{I}$ eşitliğini verir. Benzer şekilde $\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n} F(\boldsymbol{x}) = sup\mathbb{I}$ olduğu da gösterilebilir.

$ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ olduğunu göstermek amacıyla $y \in ran(F)$ keyfi alınsın. O halde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ elemanı $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olacak şekilde mevcuttur.

$$F\big(Min(x_1,\dots,x_n),\dots,Min(x_1,\dots,x_n)\big) \le y = F(x_1,x_2,\dots,x_n)$$
$$\le F\big(Mak(x_1,\dots,x_n),\dots,Mak(x_1,\dots,x_n)\big)$$

yani

$$\delta_F\big(Min(x_1,\dots,x_n)\big) \le y = F(x_1,x_2,\dots,x_n) \le \delta_F\big(Mak(x_1,\dots,x_n)\big)$$

dir. $\delta_F\big(Min(x_1,\dots,x_n)\big)$, $\delta_F\big(Mak(x_1,\dots,x_n)\big) \in ran(\delta_F) \subseteq \mathbb{I}$ ve $\mathbb{I}$ bir aralık olduğundan $y \in \mathbb{I}$ olur. Bu da $ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ olduğunu verir. O halde F bir birleştirme fonksiyonudur.

Önerme 1.16.

$F\colon \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ azalmayan bir fonksiyon ve $a \coloneqq inf\mathbb{I}$ ve $b \coloneqq sup\mathbb{I}$ olsun. Bu takdirde:

$$\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = a \iff \begin{cases} \delta_F(a) = a & \text{eğer } a \in \mathbb{I} \\ \lim\limits_{x\to a^+} \delta_F(x) = a & \text{eğer } a \notin \mathbb{I} \end{cases}$$

ve

$$\sup_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = b \iff \begin{cases} \delta_F(b) = b & \text{eğer } b \in \mathbb{I} \\ \lim\limits_{x\to b^-} \delta_F(x) = b & \text{eğer } b \notin \mathbb{I} \end{cases}$$

dir.

İspat.

İlk kısmın ispatı verilecektir. İkinci kısmın ispatı da benzer şekilde verilir.

$F\colon \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ bir azalmayan bir fonksiyon ve $a \coloneqq inf\mathbb{I}$ ve $b \coloneqq sup\mathbb{I}$ olsun.

" $\Rightarrow$ " $\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = a$ olsun.

(i) Eğer $a \in \mathbb{I}$ ise δ_F in monotonluğundan $\delta_F(a) = \inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = a$

(ii) $a \notin \mathbb{I}$ olsun.

İki durum söz konusu olur:

a) $a = -\infty$ olabilir. $M < 0$ olsun. Bu takdirde $x^* \in \mathbb{I}$, $x^* < 0$ elemanı $\delta_F(x^*) \le M$ olacak şekilde mevcuttur. δ_F 'in monotonluğundan $x \le x^*$ olan her $x \in \mathbb{I}$ için $\delta_F(x) \le \delta_F(x^*) \le M$ olur.

b) $a > -\infty$ olabilir. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde $x^* \in \mathbb{I}$, $0 \le \delta_F(x^*) - a \le \varepsilon$ olacak şekilde mevcuttur. δ_F 'in monotonluğundan $x \le x^*$ olacak şekildeki her $x \in \mathbb{I}$ için $0 \le \delta_F(x) - a \le \delta_F(x^*) - a \le \varepsilon$ olur.

Bu iki durumda da $\lim_{x\to a^+} \delta_F(x) = a$ elde edilir.

" $\Leftarrow$ "

İspatın bu kısmında da iki durum mümkündür:

(i) $a \in \mathbb{I}$ ve $\delta_F(a) = a$ olsun. Bu durumda $a = inf\mathbb{I}$ olduğundan her $x \in \mathbb{I}$ için $a \leq x$ olur. O halde monotonluktan her $x \in \mathbb{I}$ için $a = \delta_F(a) \leq \delta_F(x)$ olur. Buradan da $a \leq \inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x)$ elde edilir

$c = \inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x)$ olsun. Her $x \in \mathbb{I}$ için $c \leq \delta_F(x)$ olur. Özel olarak $a \in \mathbb{I}$ içinde $\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = c \leq \delta_F(a) = a$ olur.

Böylece $\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = a$ olduğu elde edilir.

(ii) $a \notin \mathbb{I}$ olsun. $a = inf\mathbb{I}$, $b = sup\mathbb{I}$ ve $a \notin \mathbb{I}$ olduğundan $a < b$ dir.

Şimdi şu iki durum incelenmelidir:

a) $a > -\infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde $0 < \mu < b - a$ mevcuttur öyle ki $x \leq a + \mu$ şartını sağlayan her $x \in \mathbb{I}$ için $0 \leq \delta_F(x) - a \leq \varepsilon$ sağlanır. $x^* = a + \mu$ seçilirse $x^* \in \mathbb{I}$ olur ve $0 \leq \delta_F(x^*) - a \leq \varepsilon$ şartı sağlanır.

b) $a = -\infty$ olsun. $M < 0$ olsun. O halde $x^* < 0$ olan $x^* \in \mathbb{I}$ mevcuttur öyle ki her $x \leq x^*$ için $\delta_F(x) \leq M$ sağlanır. Özel olarak $\delta_F(x^*) \leq M$ sağlanır

Bu iki durumda da $\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = a$ elde edilir.

Örnek 1.17.

$$\prod(\boldsymbol{x}) := \prod_{i=1}^{n} x_i$$

çarpım fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun $\mathbb{I}^{\,n} = [0,\infty]^{\,n}$ e kısıtlanışı sürekli ve azalmayandır. Çarpımın varlığını garanti altına almak için $0.\infty = 0$ alınır. $n > 1$ ise $[0,\infty]$ da $\delta_{\prod}(x) = x$ denkleminin çözümleri $0, 1$ ve ∞ dur. Bundan dolayı 1.16 ve 1.17 Önerme ile çarpım fonksiyonu $[0,\infty]^n$ e kısıtlandığında sadece $|0,1|^n, |1,\infty|^n, |0,\infty|^n$ alt bölgelerinde birleştirme fonksiyonudur. Gerçekten 1.15 ve 1.16 Önermeleri ile

$$\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = a \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \delta_F(a) = a & \text{eğer } a \in \mathbb{I} \\ \lim\limits_{x\to a^+} \delta_F(x) = a & \text{eğer } a \notin \mathbb{I} \end{cases}$$

olduğu kullanılırsa $a \in \mathbb{I}$ iken $\delta_F(a) = a^n = a \Longrightarrow a = 0{,}1$ ve $a \notin \mathbb{I}$ iken $\lim_{x\to a^+} \delta_F(x) = \lim_{x\to a^+} x \ldots x = a^n = a$ olduğundan aralığın uç noktaları a = 0,1 olabilir. Benzer şekilde b= 1, ∞ olabilir. O halde muhtemel aralıklar $|0{,}1|, |1,\infty|, |0,\infty|$ olabilir.

Örnek 1.18.

$F(\boldsymbol{x}) := \frac{(\sum_i x_i)^2 - \sum_i x_i^2}{(\sum_i x_i)}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyonu $\mathbb{I}^{\,n} =]0,\infty[^{\,n}$ e kısıtlanırsa bu fonksiyon bu aralıkta sürekli ve azalmayandır. Eğer $n > 2$ ise $\delta_F(x) = x$

denkleminin $]0,\infty[$ da çözümü yoktur. Gerçekten, $\delta_F(x) = \frac{(x+x+\cdots+x)^2-x^2-x^2-\cdots-x^2}{(x+x+\cdots+x)} = \frac{n^2x^2-nx^2}{nx} = nx - x \implies nx - x = x \implies nx = 2x \; ve \; n > 2$ olduğundan $]0,\infty[$ da çözümü yoktur. Böylece F nin $]0,\infty[^n$ e kısıtlanışı birleştirme fonksiyonudur fakat bir öz alt bölgede birleştirme fonksiyonu değildir. $n = 2$ için herhangi alt bölgede göz önüne alınabilir(Bu takdirde F harmonik ortalama olur). Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.19.

$F\colon \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer F idempotent ise (yani her $x\epsilon\ \mathbb{I}$ için $\delta_F(x) = x$ ise) bu takdirde F, $\mathbb{I}^n$ de bir birleştirme fonksiyonudur ve üstelik $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I}$ olmak üzere herhangi $\mathbb{J}^n$ alt aralığında bir birleştirme fonksiyonudur.

Bu sonuç açıktır: Gerçekten 1.15 ve 1.16 Önermeleri ile azalmayan bir fonksiyon birleştirme fonksiyonudur $\Leftrightarrow$ $\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \inf \mathbb{I}$ ve $\sup_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \sup \mathbb{I}$ dir. O halde F azalmayan ve idempotent olduğundan $\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \inf_{x\in\mathbb{I}} x = \inf \mathbb{I}$ ve $\sup_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \sup_{x\in\mathbb{I}} x = \sup \mathbb{I}$ olduğundan F bir birleştirme fonksiyonu olur.

Şimdi genişletilmiş birleştirme fonksiyonu kavramı tanıtılsın:

Tanım 1.20.

$\bigcup_{n\in\mathbb{I}} \mathbb{I}^n$ de genişletilmiş fonksiyon $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{I}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ olan bir fonksiyondur. $\bigcup_{n\in\mathbb{I}} \mathbb{I}^n$ de bir genişletilmiş birleştirme fonksiyonu $\bigcup_{n\in\mathbb{I}} \mathbb{I}^n$ de genişletilmiş A fonksiyonudur ve her $n \in \mathbb{N}$ için A 'nın $\mathbb{I}^n$ ye kısıtlanışı olan $A^{(n)} \coloneqq A|_{\mathbb{I}^n}$ fonksiyonu $\mathbb{I}^n$ de bir birleştirme fonksiyonudur.

Bir genişletilmiş fonksiyon herhangi sayıda bileşen için tanımlandığından, bu fonksiyon bir $(F^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi olarak tanıtılabilir. Burada bu dizinin n. elemanı bir n-li $F^{(n)}\colon \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonudur. Karışıklık olmayacağı zaman, bir genişletilmiş fonksiyona basit olarak bir fonksiyon denilecektir.

Bir genişletilmiş birleştirme fonksiyonuna örnek olarak, aritmetik anlam $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilebilir, burada $A^{(n)}$ her $n \in \mathbb{N}$ için (1.2) ile tanımlanır.

Uyarı 1.21.

Bir keyfi genişletilmiş fonksiyonda, farklı n ve m için $F^{(n)}$ ve $F^{(m)}$ fonksiyonlarının birbiri ile ilgili olmasına gerek yoktur. Örnek olarak $F^{(n)}$ aritmetik anlam olarak verilirken, $F^{(m)}$ çarpım olarak verilebilir. Bununla birlikte daha sonra yapılan çalışmalar bölümünde görüleceği gibi bunlar birleşme veya parçalanabilirlik gibi belli gruplama özellikleri ile uygun bir şekilde ilgili olabilirler.

Şimdi iyi bilinen birleştirme fonksiyonlarının bazılarını tanıtacağız:

Örnekler.

1. Aritmetik anlam fonksiyonu $AM: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ ve geometrik anlam fonksiyonu $GM: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$AM(\boldsymbol{x}) \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.4}$$

$$GM(\boldsymbol{x}) \coloneqq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.5}$$

Burada $n > 1$ olduğunda geometrik anlam her bölgede birleştirme fonksiyonu değildir. $\mathbb{I} \subseteq [0, \infty]$ olacak şekilde bir $\mathbb{I}^n$ bölgesi göz önüne alınmalıdır. Gerçekten $n > 1$ için 1.15 ve 1.16 Önermeleri kullanılsın: Eğer $a \coloneqq inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ise $\delta_{GM}(a) = a$ olmalıdır yani $|a| = a$ (n çift ise) olmalıdır. Benzer şekilde eğer $a \notin \mathbb{I}$ ise $\lim_{x \to a^+} \delta_F(x) = a$ eşitliğinden de $|a| = a$ (n çift ise) elde edilir. O halde her n için sağlanabilmesi için $a \geq 0$ olmalı yani GM, $\mathbb{I} \subseteq [0, \infty]$ koşulunu sağlayacak $\mathbb{I}$ 'larda düşünülmelidir.

Bu aralıklar için GM in birleştirme fonksiyonu olduğunu göstermek kolaydır. Gerçekten:

(i) GM 'in azalmayanlığı açıktır.

(ii) 1.15 ve 1.16 Önermeleri kullanılarak: Eğer $a \coloneqq inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ise $\delta_{GM}(a) = |a| = a$ ve eğer $a \notin \mathbb{I}$ ise $\lim_{x \to a^+} \delta_{GM}(x) = |a| = a$ eşitlikleri sağlandığından ve benzer şekilde supremum içinde eşitliklerin varlıkları kolaylıkla gösterilebileceğinden, GM bir birleştirme fonksiyonudur.

2. Herhangi $k \in [n]$ için $P_k: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ projeksiyon fonksiyonu ve k. bileşen ile ilgili $OS_k: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ sıra istatistik fonksiyonu sırasıyla

$$P_k(\boldsymbol{x}) \coloneqq x_k \tag{1.6}$$

$$OS_k(\boldsymbol{x}) \coloneqq x_{(k)} \tag{1.7}$$

ile tanımlanır, burada $x_{(k)}$ **x** in k. alttaki koordinatıdır yani

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(k)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

dir.

Birinci ve sonuncu koordinatlar üzerine projeksiyonlar

$$P_F(\boldsymbol{x}) \coloneqq P_1(\boldsymbol{x}) = x_1 \tag{1.8}$$

$$P_L(\boldsymbol{x}) \coloneqq P_n(\boldsymbol{x}) = x_n \tag{1.9}$$

Benzer şekilde $x_{(1)}$ ve $x_{(n)}$ sıra istatistikleri sırasıyla minimum ve maksimum fonksiyonlarıdır:

$$Min(\boldsymbol{x}) \coloneqq OS_1(\boldsymbol{x}) = \min\{x_1, \dots, x_n\} \tag{1.10}$$

$$Mak(\boldsymbol{x}) \coloneqq OS_n(\boldsymbol{x}) = \max\{x_1, \dots, x_n\} \tag{1.11}$$

Şimdi $Min(x)$ fonksiyonunun bir birleştirme fonksiyonu olduğu gösterilsin:

(i) $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ olsun. O halde her i için $x_i \leq y_i$ 'dir. O halde $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \min\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ olduğundan $Min(\boldsymbol{x}) \leq \mathrm{Min}\,(\boldsymbol{y})$ 'dir.

(ii) $\inf\big(Min(\boldsymbol{x})\big) = \inf\,(Min\{x_1, \dots, x_n\})$. $min\{x_1, \dots, x_n\} = x_k$ olsun. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ keyfi olsun. $\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n}\big(Min(\boldsymbol{x})\big) = \inf_{x_i\in\mathbb{I}}(Min\{x_1, \dots, x_n\}) = inf_{x_k\in\mathbb{I}}(x_k) = inf\mathbb{I}$ olur. Benzer şekilde $\sup\big(Min(\boldsymbol{x})\big) = sup\mathbb{I}$ olduğu gösterilir.

O halde $Min(\boldsymbol{x})$ fonksiyonu bir birleştirme fonksiyonudur. Benzer şekilde $Mak(\boldsymbol{x})$ fonksiyonu da bir birleştirme fonksiyonudur.

Bu fonksiyonlar bazen $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri cinsinden sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılırlar:

$Min(\boldsymbol{x}) = \wedge_{i=1}^{n} x_i$ ve $Mak(x) = \vee_{i=1}^{n} x_i$

OS_k 'nında aşağıdaki şekilde yazılabileceğine dikkat edelim(Bkz Ovchinnikov[9]):

$$OS_k(\boldsymbol{x}) = \wedge_{\substack{K\subseteq[n] \\ |K|=k}}(\vee_{i\in K} x_i) = \vee_{\substack{K\subseteq[n] \\ |K|=n-k+1}}(\wedge_{i\in K} x_i)$$

yazılabilir.

$(x_1, \dots, x_{2k-1})$ değerlerinin bir tek sayısı için medyan da basit olarak $Med(x_1, \dots, x_{2k-1}) \coloneqq x_{(k)}$ ile tanımlanır ve

$$Med(x_1, \dots, x_{2k-1}) = \wedge_{\substack{K\subseteq[2k-1] \\ |K|=k}}(\vee_{i\in K} x_i) = \vee_{\substack{K\subseteq[2k-1] \\ |K|=k}}(\wedge_{i\in K} x_i)$$

Örnek olarak:

$$Med(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$$

eşitliği verilebilir.

$(x_1, \dots, x_{2k})$ değerlerinin bir çift sayısı için medyan

$$Med(x_1, \dots, x_{2k}) \coloneqq AM\big(x_{(k)}, x_{(k+1)}\big) = \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$$

ile tanımlanır. Herhangi $\alpha \in \mathbb{I}$ için α-medyan fonksiyonu, $Med_{\alpha}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$

$$Med_{\alpha}(x) = Med(x_1, \dots, x_n, \alpha, \dots, \alpha) = \mathrm{Med}\big(\mathrm{Min}(\mathrm{x}), \alpha, \mathrm{Max}(\mathrm{x})\big) \quad (1.12)$$

ile tanımlanır.

3. Herhangi boştan farklı $K \subseteq [n]$ için, kısmi minimum $Min_{\mathrm{K}}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ ve kısmi maksimum $Mak_{\mathrm{K}}: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ (K ile ilgili) sırasıyla

$$Min_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \wedge_{i \in K} x_i \quad (1.13)$$

$$Mak_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \vee_{i \in K} x_i \quad (1.14)$$

ile verilir.

4. $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ olacak şekildeki herhangi ağırlık vektörü $w = (w_1, \dots, w_n) \in [0,1]^n$ için, ağırlık aritmetik fonksiyonu $WAM_w: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ ve w ile ilgili sıralı ağırlık ortalama fonksiyonu $OWA_w: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ sırasıyla

$$WAM_w(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \quad (1.15)$$

$$OWA_w(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)} \quad (1.16)$$

ile verilir.

WAM_w birleştirme fonksiyonudur. Gerçekten:

(i) WAM_w 'nin azalmayanlığı toplamın azalmayanlığından açıktır.

(ii) $inf\mathbb{I} = a$ olsun.

$a \notin \mathbb{I}$ ise $\lim_{x \to a^+} \delta_{WAM_w}(x) = \lim_{x \to a^+} (w_1 x + \dots + w_n x) = \lim_{x \to a^+} 1.x = a$

$a \in \mathbb{I}$ ise $\delta_{WAM_w}(a) = w_1 a + \dots + w_n a = 1.a = a$

O halde 1.16 Önerme ile $inf_{x \in \mathbb{I}} \delta_{WAM_w}(x) = inf\mathbb{I}$ olur benzer şekilde $sup_{x \in \mathbb{I}} \delta_{WAM_w}(x) = sup\mathbb{I}$ olduğu gösterilir böylece 1.15 Önerme ile azalmayan WAM_w 'nin birleştirme fonksiyonu olduğu elde edilir.

Benzer işlemler altında OWA_w'ninde bir birleştirme fonksiyonu olduğu gösterilebilir.

5. Toplam $\sum$: $\overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$\sum(\boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.17}$$

ile tanımlanır. $n > 1$ olduğunda bu fonksiyon her bölgede birleştirme fonksiyonu değildir. $|-\infty,\infty|^n, |0,\infty|^n, |-\infty,0|^n$ bölgeleri göz önüne alınmalıdır. $inf\mathbb{I} = a$ olsun. $n > 1$ için 1.15 ve 1.16 Önermeleri ve toplamın azalmayanlığı göz önüne alınsın.

$a \notin \mathbb{I}$ olsa $\lim_{x\to a^+} \delta_\Sigma(x) = \lim_{x\to a^+}(x + \cdots + x) = na = a$ olmalı, bu durumda $a = -\infty$, $a = 0$ olabilir.

$a \in \mathbb{I}$ olması durumunda da benzer sonuçlar elde edilir.

Benzer şekilde supremum içinde durum incelendiğinde $b = 0,\infty$ olabilir. Bu durumda muhtemel aralıklar olarak $|-\infty,\infty|^n, |0,\infty|^n, |-\infty,0|^n$ aralıkları elde edilir.

6. Çarpım $\prod$: $\overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

$$\prod(\boldsymbol{x}) \coloneqq \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{1.18}$$

ile tanımlanır. $n > 1$ olduğunda bu fonksiyon her bölgede birleştirme fonksiyonu değildir. $[0,\infty]^n$ e kısıtlandığında $|0,1|^n, |1,\infty|^n, |0,\infty|^n$ bölgeleri göz önüne alınmalıdır.

$n > 1$ durumunda toplam için 1.15 ve 1.16 Önermeleri ve çarpımın azalmayanlığı göz önüne alınsın.

$inf\mathbb{I} = a$ olsun.

$a \notin \mathbb{I}$ olsa $\lim_{x\to a^+} \delta_\Pi(x) = \lim_{x\to a^+} x^n = a^n = a$ olmalıdır. Bu durumda $a = 1$, $a = 0$ olabilir.

$a \in \mathbb{I}$ olması durumunda da benzer sonuçlar elde edilir.

Benzer şekilde supremum içinde durum incelendiğinde $b = 1,\infty$ olabilir. Bu durumda muhtemel aralıklar $|0,1|^n, |1,\infty|^n, |0,\infty|^n$ aralıklardır.

7. $\mathbb{I} = [a,b]$ bir kapalı aralık olsun. $[a,b]^n$ 'de en küçük ve en büyük birleştirme fonksiyonları sırası ile

$$A_\perp(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} b & \text{Her } i \in [n] \text{ için } x_i = b \text{ ise} \\ a & \text{Aksi takdirde} \end{cases} \tag{1.19}$$

$$A_\top(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} a & \text{Her } i \in [n] \text{ için } x_i = a \text{ ise} \\ b & \text{Aksi takdirde} \end{cases} \tag{1.20}$$

dır.

Tanım ile herhangi $A: [a,b]^n \to [a,b]$ fonksiyonu için $A_\perp \leq A \leq A_\top$ elde edilir.

Açık olarak $K_c(\boldsymbol{x}) \coloneqq c$ ile tanımlanan sabit $K_c: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu birleştirme fonksiyonu olmayan bir fonksiyona açık bir örnektir ($\mathbb{I} = \{c\}$ olmadıkça). Burada c sabit bir sayıdır.

1.6. Normlar

Tanım 1.22.[10]

Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı reel değerli

1. $\forall x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$
3. $\forall x, y \in X$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna bir norm denir.

Normların önemli bir örneği $p \in [1, \infty[$ için Minkowski normu

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile verilir ve L_p norm ile de isimlendirilir ve bu normun limit durumu $\|x\|_\infty \coloneqq \max_i |x_i|$ dir ve Chebyshev normu olarak isimlendirilir.

Önerme 1.23.

$x \in \mathbb{I}^n$ ve $q \geq p \geq 1$ olacak şekildeki p, q reel sayıları için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq n^{1-\frac{1}{p}}\|x\|_p \tag{1.21}$$

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \leq n\|x\|_p \tag{1.22}$$

ve

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \tag{1.23}$$

dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Bazı Matematiksel Özellikler

Bu bölümde birleştirme fonksiyonları için gerekli standart ve temel özellikler sunulmuştur. Örneğin, artan monotonluk birleştirme sürecinde kullanılan fonksiyonlar için vazgeçilmez bir şarttır.

2.1.1. Monotonluk

Tanım 2.1.
$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu (her bir bileşene göre) azalmayandır:$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}'$ olan her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}) \leq F(\boldsymbol{x}')$ ’dir.

Bir azalmayan fonksiyon bileşenlerin herhangi bir artışına negatif olmayan karşılık verir. Diğer bir deyişle artan herhangi bir giriş değeri için çıkış değerini azaltamaz.

Tanım ile azalmayan monotonluk tüm birleştirme fonksiyonları tarafından paylaşılan temel bir özelliktir(1.12 Tanım ile).

Tanım 2.2.
$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu (her bir bileşene göre) kesin artandır $:\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}'$ olan her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}) < F(\boldsymbol{x}')$ dir.

Böylece, bir fonksiyon kesin artandır $:\Leftrightarrow$ Bu fonksiyon azalmayandır ve bu fonksiyon en az bir giriş değerindeki artışa pozitif bir tepki gösterir.

Kesin artan monotonluk açık olarak azalmayan monotonluğu gerektirir. Keza bu aşağıda tanımlanan her bir bileşene göre indirgenebilirlik veya kısaltılabilirlik de[11] denilen ve aşağıda tanımlanan duyarlılık(Örnek için bkz[12]**)** kavramını gerektirir.

Tanım 2.3.
$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna duyarlı denir $:\Leftrightarrow$ Herhangi $i \in [n]$ indisi ve $\boldsymbol{x} + \lambda 1_{\{i\}} \in \mathbb{I}^n$ olacak şekildeki her $\lambda \neq 0$ ve her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$ dir.

Yukarıda verilen iki tanımdan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Önerme2.4.
Bir azalmayan $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu kesin artandır $\Leftrightarrow$ F duyarlıdır.

" $\Rightarrow$ " F kesin artan olsun. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ ve $\lambda \neq 0$ olmak üzere $\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}} \in \mathbb{I}^n$ keyfi alınsın.

$\lambda > 0$ ise $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}}$ ve F kesin artan olduğundan $F(\boldsymbol{x}) < F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$ elde edilir. Yani $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$ 'dır.

$\lambda < 0$ ise $\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}} < \boldsymbol{x}$ ve F kesin artan olduğundan $F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}}) < F(\boldsymbol{x})$ elde edilir. Yani $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$ 'dır.

Böylece $\lambda \neq 0$ için $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$ olduğu elde edilir.

" $\Leftarrow$ " F duyarlı olsun. O halde $\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}} \in \mathbb{I}^n$ olacak şekildeki her $\lambda \neq 0$ ve her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$ 'dir. $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}'$ iken $F(\boldsymbol{x}) < F(\boldsymbol{x}')$ olduğu gösterilmelidir. $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}'$ olsun. F 'in azalmayanlığından $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}'$ iken $F(\boldsymbol{x}) \leq F(\boldsymbol{x}')$ olduğu elde edilir. O halde $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x}')$ olduğu gösterilmelidir.
$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) < (x_1', \dots, x_i', \dots, x_n') = \boldsymbol{x}'$ olduğundan bir $i \in [n]$ için $x_i < x_i'$ dir. $x_i' - x_i = \lambda > 0$ olarak tanımlanılırsa $x_i < \lambda + x_i$ olur. F 'in azalmayanlığından

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq F(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n) = F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$$

olur. Fakat F duyarlı olduğundan, $F(\boldsymbol{x}) \neq F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$ olup

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) < F(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n) = F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}})$$

olur. Buradan da

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) < F(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n) = F(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{i\}}) \leq F(x_1', \dots, x_n')$$

elde edilir. Bu da $F(\boldsymbol{x}) < F(\boldsymbol{x}')$ olduğunu verir. O halde F kesin artandır.

Tanım 2.5.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna hemfikir artan denir $:\Leftrightarrow$ F azalmayandır ve herhangi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^n$ ve her $i \in [n]$ için $x_i < x_i'$ ise $F(\boldsymbol{x}) < F(\boldsymbol{x}')$ dir.

Açık olarak kesin artan monotonluk hemfikir artan monotonluğu gerektirir. Örnek olarak aritmetik ortalama AM kesin artandır böylece duyarlı ve hemfikir artandır. Tersi her durumda doğru olmak zorunda değildir. Min ve Mak fonksiyonları hemfikir artandır fakat kesin artan değildir. Gerçekten $x, y, z \in \mathbb{I}$ ve $x < y < z$ olsun. $(x\,, y) < (x\,, z)$ fakat $x = Min(x\,, y) = Min(x\,, z)$ dir.

$\prod$ çarpım fonksiyonu, $[0,1]^n$ üzerinde hemfikir artandır. Bununla birlikte 0 giriş değerleri arasında yer alırsa, $\prod$ 'nin duyarlılığı bozulur. Gerçekten $i = 1$ için $x = (0, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ ve $\lambda \neq 0$ olduğunda $x_2' = x_2 + \lambda \in [0,1]$ olacak şekilde alınırsa

$$\begin{aligned} \prod(\boldsymbol{x}) &= \prod(0, x_2, \dots, x_n) = 0. x_2 \dots x_n = 0. (x_2 + \lambda) \dots x_n = \prod(0, x_2 + \lambda, x_3, \dots, x_n) \\ &= \prod(\boldsymbol{x} + \lambda \mathbf{1}_{\{2\}}) \end{aligned}$$

olur. Bu ise duyarlılık özelliğinin sağlanmadığını gösterir.

$[0,1]^n$ üzerinde $S_L(\boldsymbol{x}) := Min(\sum_{i=1}^{n} x_i, 1)$ sınırlı toplamı azalmayandır fakat hemfikir artan değildir. S_L 'nin azalmayanlığı Min fonksiyonunun azalmayanlığı kullanılarak kolayca elde edilir. $n \geq 2$ ve $\boldsymbol{x} = (0.6, 0.6, \ldots, 0.6) < (0.7, 0.7, \ldots, 0.7) = \boldsymbol{y}$ için $S_L(\boldsymbol{x}) = Min(n.(0.6), 1) = 1 = Min(n.(0.7), 1) = S_L(\boldsymbol{y})$ olup $S_L(\boldsymbol{x}) = S_L(\boldsymbol{y})$ olduğundan hemfikir artan değildir.

Uyarı 2.6.

2.5 Tanımda azalmayan monotonluk gereklidir. Çünkü azalmayan monotonluk ikinci şarttan elde edilmez. Bir örnek olarak $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ için

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in \{(0,1), (1,0)\} \\ Mak(x_1, x_2), & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

verilebilir. Gerçekten $0 < x_1 < 1$ olmak üzere $(x_1, 0) < (1,0)$ dır. Fakat $F(x_1, 0) = x_1 \nleq 0 = F(1,0)$ dır.

2.1.2. Süreklilik

Bu bölümde süreklilik özelliği ve onun daha güçlendirilmiş ve daha zayıflatılmış bazı durumları incelenecektir.

Tanım 2.7.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu süreklidir $:\Longleftrightarrow$ Her $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{I}^n$ için

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^*} F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}^*)$$

dir.

Süreklilik özelliği temelde bileşenlerdeki herhangi küçük değişikliklerin (mümkün küçük hatalar) birleştirme fonksiyonu altındaki değerde büyük değişiklikler(çıkış hatası) meydana getirmeyeceği anlamına gelir.

Azalmayan fonksiyonlar için süreklilik aşağıdaki önermede olduğu gibi farklı şekillerde de karakterize edilebilir (Örnek için bkz [13]).

Önerme 2.8.

Azalmayan bir $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki şartlar denktir:

(i) F süreklidir.

(ii) F her bir değişkene göre süreklidir, yani her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ ve her $i \in [n]$ için

$u \to F(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

birli fonksiyonu süreklidir.

(iii) F ara değer özelliğine sahiptir: Herhangi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ ve $c \in [F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})]$ için, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{I}^n$ elemanı $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}$ ve $F(\boldsymbol{z}) = c$ olacak şekilde mevcuttur.

İspat.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ 2.24. Önerme'de sol süreklilik ve sağ sürekliliğin daha genel durumlarında bu denkliğin ispatını vereceğiz.

$(i) \Longrightarrow (iii)$ Sürekli olan birli fonksiyonların ara değer özelliğini sağladığı(onların azalmayan olup olmadığından bağımsız olarak) iyi bilinir. Herhangi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ ve $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ (bu trivial olmayan tek durumdur) için bir birli $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(t) \coloneqq F((1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y})$ ile tanımlanır. Bu fonksiyon F sürekli olduğundan süreklidir ve her $c \in [F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})] = [f(0), f(1)]$ için bir $t_0 \in [0,1]$ $f(t_o) = c$ olacak şekilde mevcuttur. Yani $\boldsymbol{z} = (1-t_0)\boldsymbol{x} + t_0\boldsymbol{y}$ elemanı için $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}$ ve $F(\boldsymbol{z}) = f(t_0) = c$ sağlanır. Gerçekten $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}$ koşulunu sağlar. Varsayalım $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{z} = (1-t_0)\boldsymbol{x} + t_0\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}t_0 + t_0\boldsymbol{y}$ olsun. O halde $\boldsymbol{x}t_0 > \boldsymbol{y}t_0$ olur. Böylece $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. O halde $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z}$ elde edilir. Benzer şekilde $\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}$ olduğu elde edilir.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ $\Theta\colon \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\Theta(u) := F(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ile tanımlansın. Θ, $u_0 \in \mathbb{I}$ da sürekli olmasın. O halde bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur öyle ki her $\delta > 0$ için $|x - u_0| < \delta$ olan en az bir $x \in \mathbb{I}$ için $|\Theta(x) - \Theta(u_0)| > \varepsilon$ 'dur. $\delta = \frac{1}{m}$ için $|x_m - u_0| < \frac{1}{m}$ olan x_m 'ler için $|\Theta(x_m) - \Theta(u_0)| > \varepsilon$ dur. O halde $|\Theta(x_m) - \Theta(u_0)| > \varepsilon$ yani $\Theta(x_m) > \varepsilon + \Theta(u_0) > \Theta(u_0)$ olmalıdır. Bu durumda $\varepsilon + \Theta(u_0) \in [\Theta(u_0), \Theta(x_m)]$ olur. Ara değer özelliği sağlandığından $u_0 \leq c_\varepsilon \leq x_m$ olacak şekilde $\Theta(c_\varepsilon) = \varepsilon + \Theta(u_0)$ mevcuttur. $m \to \infty$ için $x_m \to u_0$ yani $\Theta(u_0) > \varepsilon + \Theta(u_0) > \Theta(u_0)$ elde edilir. Bu ise $\Theta(u_0) > \Theta(u_0)$ çelişkisini doğurur. O halde Θ, $\mathbb{I}$ 'da süreklidir.

Süreklilik reel değerli fonksiyonların topolojik bir özelliğidir. Aslında bir F fonksiyonunun sürekliliği, F 'in giriş değerlerindeki küçük hatalar için büyük çıkış değeri hatası vermesini engeller. Bununla birlikte sürekli fonksiyonlar için giriş değerleri ve çıkış değerleri arasında kesin bir bağıntı yoktur. Bu problemden kaçınmak için sürekliliğin daha güçlü formları önerilmiştir. İlk önce iyi bilinen düzgün süreklilik göz önüne alınır. Ardından mutlak süreklilik göz önüne alınır. Mutlak süreklilik, integrasyon ve differensiyalle yakından ilişkilidir. Belki de sürekliliğin bilinen en güçlü formu giriş ve çıkış değerleri arasındaki bağıntıyı açıklayan Lipschitz süreklilik özelliğidir.

Uyarı 2.9.

Daha sonrada görülebileceği gibi her birli Lipschitz fonksiyonu mutlak sürekli, her birli mutlak sürekli fonksiyon düzgün sürekli, her n-li düzgün sürekli fonksiyon sürekli ve her n-li sürekli fonksiyon ara değer özelliğine sahiptir.

Tanım 2.10.

$\|.\|: \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ bir norm ve $D \subseteq \mathbb{I}^n$ olsun. Bir $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna D 'de ($\|.\|$ normuna göre) düzgün süreklidir denir :$\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ mevcuttur öyle ki $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$ olan her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ için $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$ 'dir.

Her düzgün sürekli fonksiyon süreklidir fakat tersi doğru değildir. Örneğin $F(x) \coloneqq x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'de süreklidir fakat düzgün sürekli değildir. Eğer düzgün sürekli olsaydı $\varepsilon = 1$ 'e karşılık $\delta \coloneqq \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $|x - y| < \delta$ olduğunda $|x^2 - y^2| < 1$ olmalıdır. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{1}{k} \to 0$ olduğundan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki $\frac{1}{k_0} < \delta$ yani $\delta k_0 > 1$ dir. Şayet $x = k_0$, $y = k_0 + \frac{\delta}{2}$ alınırsa $|x - y| < \delta$ olur. Fakat $|F(x) - F(y)| = |x^2 - y^2| = k_0\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişki F 'nin $\mathbb{R}$ 'de düzgün sürekli olmadığını verir. Bununla birlikte fonksiyonlar için süreklilik ve düzgün süreklilik özellikleri kapalı ve sınırlı aralıklarda çakışır.

Önerme 2.11.

Bir $F: [a,b]^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]^n$ de düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ F, $[a,b]^n$ de süreklidir.

İspat.

Varsayalım ki F, $[a,b]^n$ de sürekli fakat düzgün sürekli olmasın. O halde $\varepsilon > 0$ mevcuttur öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ ve $\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k)} \in [a,b]^n$ için

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{y}^{(k)}\right\| < \frac{1}{k} \; ve \; \left|F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) - F(\boldsymbol{y}^{(k)})\right| \geq \varepsilon$$

dır. Kapalı ve sınırlı kümeler üzerinde her dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcut olduğundan $\boldsymbol{x}^{(k)}$ dizisinin $\boldsymbol{x}^* \in [a,b]^n$ noktasına yakınsayan $\boldsymbol{x}^{(k_m)}$ ve $\boldsymbol{y}^{(k)}$ dizisinin $\boldsymbol{y}^* \in [a,b]^n$ noktasına yakınsayan $\boldsymbol{y}^{(k_m)}$ alt dizileri mevcuttur. $\left\|\boldsymbol{x}^{(k_m)} - \boldsymbol{y}^{(k_m)}\right\| < \frac{1}{k_m}$ nin bir sonucu olarak $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^*$ dır. Böylece $F(x^{(k_m)}) \to F(x^*)$ ve $F(y^{(k_m)}) \to F(x^*)$ elde edilir. O halde $\frac{\varepsilon}{2}$ 'ye karşılık bir $N \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki $\forall k \geq N$ için $\left|F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) - F(\boldsymbol{x}^*)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\left|F\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right) - F(\boldsymbol{x}^*)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Böylece $\left|F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) - F(\boldsymbol{y}^{(k)})\right| \leq$

$\left|F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)-F(\boldsymbol{x}^{*})\right|+\left|F\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right)-F(\boldsymbol{x}^{*})\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ olur. Bu ise kabul ile çelişir. O halde düzgün süreklidir.

Tanım 2.12.

$f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve D, $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesi olsun. D üzerinde f 'nin varyasyonu $Var_D(f)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır: Eğer $D\cap\mathbb{I}=\emptyset$ ise $Var_D(f)=0$, aksi takdirde $Var_D(f)$

$$Sup\{\sum_{i=1}^{n}|f(a_i)-f(a_{i-1})|:a_0,\dots,a_n\in D\cap\mathbb{I},a_0\leq\cdots\leq a_n\}$$

ile tanımlanır, buradaki supremum $n\in\mathbb{N}$ için tüm sonlu $\{a_0,\dots,a_n\}$ aileleri üzerinden alınır. Eğer $Var_D(f)$ sonlu ise f, D üzerinde sınırlı varyasyonludur denir.

Tanım 2.13.

Birli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna mutlak sürekli denir :⇔ Her $\varepsilon>0$ için bir $\delta>0$ sayısı mevcuttur öyle ki $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ olan $i=1,\dots,n$ ikişer tarzda ayrık $]a_i,b_i[\subset]a,b[$ aralıklarının herhangi sonlu sistemi için $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$ sağlanır.

Bir kapalı aralık üzerinde, her mutlak sürekli fonksiyon süreklidir. Gerçekten 2.13. Tanım'dan aralıkların sonlu ailesi olarak $|x-y|<\delta$ olan $[a,b]$ nin sabit $]x-y[$ alt aralığı tek bir keyfi aralık olarak göz önüne alınırsa $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ bulunur

Önerme 2.14.[14]

Bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli fonksiyonu, $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonludur.

İspat.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mutlak sürekli olsun. O halde bir $\delta>0$ mevcuttur öyle ki $\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)<\delta$ ve $\{[c_i,d_i]:1\leq i\leq n\}$, $[a,b]$ 'nin aralıklarının ikişer tarzda ayrık sonlu bir ailesi için $\sum_{i=1}^{n}|f(d_i)-f(c_i)|<1$ 'dir. $\frac{b-a}{\delta}\leq k$ olacak şekilde en yakın tamsayı k olsun. Bu şekilde $[a,b]$ 'nin $\{x_i=a+\frac{i(b-a)}{k}:0\leq i\leq k\}$ parçalanışı inşa edilsin. Bu parçalanışın her bir alt aralığı $\frac{(b-a)}{k}\leq\delta$ uzunluğuna sahiptir. Mutlak süreklilik şartından dolayı $Var_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\leq 1$ elde edilir. O halde bu şekildeki alt aralıklar için bir üst sınır mevcuttur. $[a,b]$ aralığı için $c\in(a,b)$ iken f, $[a,c]$ ve $[c,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ise f $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonlu ve $Var_{[a,b]}(f)=Var_{[a,c]}(f)+Var_{[c,b]}(f)$ olmasını kullanarak $Var_{[a,b]}(f)\leq k$ olduğu elde edilir. O halde f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı varyasyonludur.

Şimdi sürekli fakat sınırlı varyasyonlu olmayan bu sebeple mutlak sürekli de olmayan fonksiyonlara örnek verelim.

Örnek 2.15.

$$f(x) = \begin{cases} xCos\left(\frac{\pi}{2x}\right), & x \in]0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu [0,1] üzerinde süreklidir (Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x| < \delta = \varepsilon$ olduğunda $|xCos\left(\frac{\pi}{2x}\right)| < |x| < \varepsilon$ 'dir). [0,1] aralığının $i \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \frac{1}{2i} < \frac{1}{2i-1} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$$

şeklindeki her bir D_i parçalanması için

$$Var_{[0,1]}(f) \geq \sum_{i=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$$

dir. $i \to \infty$ için $Var_{[0,1]}(f) \to \infty$ olduğundan f sınırlı varyasyonlu değildir.

Tanım 2.16.

$\|.\|: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to [0, \infty[$ bir norm olsun. Eğer $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $c \in]0, \infty[$ sabiti ve her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n$ için

$$|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa F Lipschitz şartını sağlar denir veya F Lipschitzdir ($\|.\|$ normuna göre) denir. Daha açık olarak (2.1) 'i sağlayan herhangi $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna c-Lipschitzdir denir. (2.1) 'i sağlayan $c > 0$ sabitlerinin en büyük alt sınırı d 'ye en iyi Lipschitz sabiti denir (Yani F d-Lipschitzdir fakat her $u \in]0, d[$ için F, u-Lipschitz değildir).

c-Lipschitz şartı birleştirme fonksiyonlarına uygulandığında ilginç bir yoruma sahiptir. Bu şart giriş değerlerindeki yaklaşık hataya kıyasla, ilgili çıkış değerlerindeki olası hatayı tahmin etme imkanını verir. Bu da bazı $\varepsilon > 0$ 'lar için $\|x - y\| \leq \varepsilon$ iken $|F(x) - F(y)| \leq c\varepsilon$ olmasından elde edilir.

Önerme 2.17.

Keyfi $p, q \in [1, \infty]$ reel sayıları için $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\|.\|_p$ normuna göre Lipschitzdir $\Leftrightarrow$ $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ **,** $\|.\|_q$ normuna göre Lipschitzdir. Üstelik, F, $\|.\|_p$ normuna göre c-Lipschitz ise, bu takdirde $q \leq p$ için $\|.\|_q$ normuna göre de c-Lipschitzdir ve $q > p$ için $\|.\|_q$ normuna göre n.c Lipschitzdir.

İspat.

1.23. Önerme ile verilen eşitsizlikler yardımıyla ispatı yapalım:

" $\Rightarrow$ " F, $\|.\|_p$ normuna göre Lipschitz olsun. Gösterilmesi gereken $\|.\|_q$ normuna göre de Lipschitz olduğudur. F, $\|.\|_p$ normuna göre Lipschitz olduğundan bir $c > 0$ için $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p$ dir. O halde 1.23. Önerme (1.21) ve (1.22) eşitsizliklerinden $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 \leq c.n\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_q$ elde edilir. $d \coloneqq c.n$ olarak tanımlarsak $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq d\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_q$ olduğundan F, $\|.\|_q$ normuna göre de Lipschitzdir.

" $\Leftarrow$ " Gerek şart kısmına benzer olarak yapılır.

Şimdi ikinci kısmı gösterelim:

$q \leq p$ olsun. $q \leq p$ olduğu duruma göre 1.23. Önerme (1.23) eşitsizliğini yeniden düzenlersek $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_q$ olduğu elde edilir. F, $\|.\|_p$ normuna göre c-Lipschitz olsun. O halde $c > 0$ için $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p$ olduğunu ve $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_q$ eşitsizliğini beraber kullanırsak $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_q$ olduğu elde edilir yani F $\|.\|_q$ normuna göre de c-Lipschitzdir.

$q > p$ olsun. F, $\|.\|_p$ normuna göre c-Lipschitz yani $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p$ olsun. 1.23. Önerme (1.21) ve (1.22) eşitsizlikleri kullanılarak $|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})| \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p \leq c\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 \leq c.n\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_q$ elde ederiz ki bu da $\|.\|_q$ normuna göre $n.c$ Lipschitz olduğunu verir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında norm özellikle belirtilmedikçe fonksiyonların Lipschitz özelliği, standart olarak L_1 normu üzerinden düşünülecektir.

Fonksiyonların Lipschitz özelliği standart olarak ∞ 'u içermeyen bölgelerde tanımlanır. Lipschitz özelliği sınırsız $\mathbb{I}$ aralığı için $\mathbb{I}^n$ ler üzerinde de tanımlanmış olabilir. Bununla birlikte $\mathbb{I}$ aralığı ∞ veya $-\infty$ 'u içeriyorsa Lipschitz özelliği sürekliliği gerektirmez. Örneğin $[0, \infty]^n$ üzerinde tanımlı en küçük birleştirme fonksiyonu $A_\perp$ L_1-normuna göre Lipschitzdir fakat sürekli değildir. Gerçekten:

$$A_\perp(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} b & \text{Her } i \in [n] \text{için } x_i = b \text{ ise} \\ a & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

fonksiyonu sürekli olsun. O halde limiti $\boldsymbol{x}$ olan (x_n) dizisi için $\big(F(x_n)\big)$ dizisi de $F(\boldsymbol{x})$ noktasına yakınsamalıdır. $(\boldsymbol{x_n}) = (\infty, \dots, \infty, n) \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \boldsymbol{x} = (\infty, \dots, \infty, \infty)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} A_\perp(\boldsymbol{x_n}) = A_\perp(\boldsymbol{x})$ olmalıdır. $A_\perp(\boldsymbol{x_n}) = A_\perp(\infty, \dots, \infty, n) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} A_\perp(\boldsymbol{x_n}) = 0$ olur. $A_\perp(\boldsymbol{x}) = A_\perp(\infty, \dots, \infty, \infty) = \infty$ olduğunu tanımdan elde ederiz.

Bu da $0 = \infty$ çelişkisini verir. O halde $A_\perp$ sürekli değildir. Buna rağmen $A_\perp$ Lipschitzdir. Gerçekten $|A_\perp(\boldsymbol{x}) - A_\perp(\boldsymbol{y})|$ değeri 0 veya ∞ olabilir. Bu değer 0 iken Lipschitz özelliğini sağladığı açıktır. O halde $|A_\perp(\boldsymbol{x}) - A_\perp(\boldsymbol{y})| = |\infty - 0| = \infty$ olduğu durumu(benzer şekilde $|\infty - \infty|$ durumu da benzer şekilde incelenebilir) incelensin. $A_\perp(\boldsymbol{x}) = \infty$ olsun. Bu durumda $\forall i \in [n]$ için $x_i = \infty$ dir. O halde $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |\infty - y_i| = \infty$ olur. Bu durumda $|A_\perp(\boldsymbol{x}) - A_\perp(\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1$ eşitsizliği sağlanır ki bu $A_\perp$ 'nin Lipschitz olduğunu verir.

$\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ olan tüm durumlarda birli fonksiyonlar için Lipschitz özelliği mutlak sürekliliği verir ama tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $[0,1]$ üzerinde $\sqrt{x}$ mutlak sürekli fakat Lipschitz değildir. Lipschitz olsaydı her x için $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| \leq M.|x|$ sağlayacak $M \in]0,\infty[$ bulunmalıdır. O halde $x = \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ için de sağlanmalıdır. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \leq M \;\Rightarrow \infty \;\leq M$$

çelişkisi oluşur. O halde $\sqrt{x}$ Lipschitz değildir.

Örnek 2.18.

(i) Π: $[0,1]^2 \to [0,1]$ çarpım fonksiyonu L_1 normuna göre 1-Lipschitzdir. Bu yüzden mutlak süreklidir. Gerçekten

$$\begin{aligned} |\prod(x_1,x_2) - \prod(y_1,y_2)| &= |x_1x_2 - y_1y_2| \\ &= |x_1x_2 - x_1y_2 + x_1y_2 - y_1y_2| \\ &= x_1|x_2 - y_2| + y_2|x_1 - y_1| \\ &\leq |x_2 - y_2| + |x_1 - y_1| = \|x - y\|_1 \end{aligned}$$

olduğundan Π, L_1 normuna göre 1-Lipschitzdir.

(ii) GM: $[0,1]^2 \to [0,1]$ geometrik ortalama L_1 normuna göre Lipschitz değildir. Fakat GM süreklidir ve bu sebeple 2.11. Önerme kullanılarak düzgün süreklidir. Gerçekten eğer Lipschitz olsaydı $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in [0,1]^n$ için $c \in]0,\infty[$ sabiti $|GM(\boldsymbol{x}) - GM(\boldsymbol{y})| \leq c.\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1$ olacak şekilde bulunabilmelidir. O halde $\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ ve $\boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{n^2}, 1\right)$ içinde bu eşitsizlik sağlanmalıdır. O halde:

$$\left| \sqrt{\frac{1}{n}.1} - \sqrt{\frac{1}{n^2}.1} \right| \leq c.\left\| \left(\frac{1}{n}, 1\right) - \left(\frac{1}{n^2}, 1\right) \right\|_1 = c.\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right|$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right) \leq c.\frac{n-1}{n^2}$$

$$\frac{\sqrt{n}-1}{n}.\frac{n^2}{n-1} \leq c$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n.\left(\sqrt{n}-1\right)}{n-1} \leq \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\infty \leq c$$

elde edilir. Bu da $c \in]0,\infty[$ olmasıyla çelişir. O halde GM, L_1 normuna göre Lipschitz değildir.

Aşağıdaki önerme Calvo ve Mesiar [15] ’te $[a,b] = [0,1]$ özel durumu için verilmiştir:

Önerme 2.19.

$[a,b]$ reel bir aralık olsun. L_1 normuna göre $[a,b]^n$ de tanımlı $1-$Lipschitz olan en büyük ve en küçük birleştirme fonksiyonları sırasıyla

$A^{*(n)}: [a,b]^n \to [a,b],\ A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) \coloneqq Min(a+\|\boldsymbol{x}-na\|_1, b)$

$A_*^{(n)}: [a,b]^n \to [a,b],\ A_*^{(n)}(\boldsymbol{x}) \coloneqq Mak(b-\|nb-\boldsymbol{x}\|_1, a)$

ile verilir.

İspat.

$A^{*(n)}$ in birleştirme fonksiyonu olduğu gösterilmelidir. $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ olacak şekilde $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in [a,b]^n$ keyfi alınsın. $A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = Min(a+\|\boldsymbol{x}-na\|_1, b) \leq Min(a+\|\boldsymbol{y}-na\|_1, b) = A^{*(n)}(\boldsymbol{y})$ olup azalmayandır. Sınır şartlarını sağladığı yani $\inf_{\boldsymbol{x}\in[a,b]^n} A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf[a,b] = a$ ve $\sup_{\boldsymbol{x}\in[a,b]^n} A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = \sup\,[\mathrm{a},\mathrm{b}] = b$ olduğu gösterilmelidir. $na \in [a,b]^n$ ve $A^{*(n)}(na) = a$ olduğundan $\inf_{\boldsymbol{x}\in[a,b]^n} A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = a$ ’dır. Benzer şekilde $(b,a,a,\dots,a) \in [a,b]^n$ ve $A^{*(n)}(b,a,a,\dots,a) = b$ olduğundan $\sup_{\boldsymbol{x}\in[a,b]^n} A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = b$ ’dir. O halde sınır şartları da sağlanır. Böylece bir birleştirme fonksiyonu olduğu elde edilmiş olur.

L_1 normuna göre 1-Lipschitz olan keyfi $B: [a,b]^n \to [a,b]$ birleştirme fonksiyonu göz önüne alınsın. Gösterilmesi gereken $B \leq A^{*(n)}$ olduğu, yani her $\boldsymbol{x} \in [a,b]^n$ için $B(\boldsymbol{x}) \leq A^{*(n)}(\boldsymbol{x})$ olduğudur. B, $1-$Lipschitz olduğundan $|B(\boldsymbol{x}) - B(na)| \leq \|\boldsymbol{x}-na\|_1$ dir. O halde $B(\boldsymbol{x}) - B(na) \leq \|\boldsymbol{x}-na\|_1$ olduğundan $B(\boldsymbol{x}) \leq \|\boldsymbol{x}-na\|_1 + B(na) = \|\boldsymbol{x}-na\|_1 + a$ ve B fonksiyonunun tanımlanışı gereği $B(\boldsymbol{x}) \leq b$ olduğundan $B(\boldsymbol{x}) \leq Min(a+\|\boldsymbol{x}-na\|_1, b) = A^{*(n)}(\boldsymbol{x})$ dir.

$A^{*(n)}$ birleştirme fonksiyonunun L_1 normuna göre 1-Lipschitz olduğu gösterilmelidir. O halde gösterilmesi gereken $\left|A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) - A^{*(n)}(\boldsymbol{y})\right| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğu, daha açık olarak $|Min(a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1, b) - Min(a + \|\boldsymbol{y} - na\|_1, b)| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğudur.

(i) $A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1$ ve $A^{*(n)}(\boldsymbol{y}) = a + \|\boldsymbol{y} - na\|_1$ olsun. Bu durumda $|a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1 - a - \|\boldsymbol{y} - na\|_1| = |\|\boldsymbol{x} - na\|_1 - \|\boldsymbol{y} - na\|_1| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ dir.

(ii) $A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1$ ve $A^{*(n)}(\boldsymbol{y}) = b$ olsun. $|a - b + \|\boldsymbol{x} - na\|_1| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğu gösterilmelidir. $a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1 \leq b \leq a + \|\boldsymbol{y} - na\|_1$ olduğundan $a - b + \|\boldsymbol{x} - na\|_1 \leq 0$ olduğu elde edilir. O halde $b - a - \|\boldsymbol{x} - na\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1 \leq b \leq a + \|\boldsymbol{y} - na\|_1$ olduğundan $0 \leq b - a - \|\boldsymbol{x} - na\|_1 \leq \|\boldsymbol{y} - na\|_1 - \|\boldsymbol{x} - na\|_1 \leq |\|\boldsymbol{y} - na\|_1 - \|\boldsymbol{x} - na\|_1| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğu elde edilir.

(iii) $A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = b$ ve $A^{*(n)}(\boldsymbol{y}) = a + \|\boldsymbol{y} - na\|_1$ olsun. $|b - a - \|\boldsymbol{y} - na\|_1| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğu gösterilmelidir. $a + \|\boldsymbol{y} - na\|_1 \leq b \leq a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1$ olduğundan $b - a - \|\boldsymbol{y} - na\|_1 \geq 0$ olduğu elde edilir. O halde $b - a - \|\boldsymbol{y} - na\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $a + \|\boldsymbol{y} - na\|_1 \leq b \leq a + \|\boldsymbol{x} - na\|_1$ olduğundan $0 \leq b - a - \|\boldsymbol{y} - na\|_1 \leq \|\boldsymbol{x} - na\|_1 - \|\boldsymbol{y} - na\|_1 \leq |\|\boldsymbol{x} - na\|_1 - \|\boldsymbol{y} - na\|_1| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1$ olduğu elde edilir.

(iv) $A^{*(n)}(\boldsymbol{x}) = b$ ve $A^{*(n)}(\boldsymbol{y}) = b$ olması durumu açıktır.

Benzer işlemler $A_*^{(n)}$ için de yapılarak istenilen elde edilir.

Sonsuz $\mathbb{I}$ reel aralıkları için her Lipschitz fonksiyon(her $\|.\|$ normuna göre) süreklidir. Tersi genelde doğru değildir.

Gerçekten $A\colon \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ birleştirme fonksiyonu lipschitz olsun. O halde $\exists c \in]0,\infty[$ öyle ki $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n$ için $|A(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{y})| \leq c.\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ dir. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon/c \geq 0$ seçilirse $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| < \delta = \varepsilon/c$ için $|A(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{y})| \leq c.\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ 'den elde edilir. Bu ise sürekliliği verir.

Örnek 2.20.

$[0,\infty[^n$ aralığı üzerinde GM geometrik ortalama süreklidir fakat L_1 normuna göre Lipschitz değildir.

Gerçekten GM geometrik ortalamanın sürekli olduğu açıktır. GM, Lipschitz olsun. $GM\colon [0,\infty[^n \to [0,\infty[$ için $\boldsymbol{x} = (u,1,1,\dots,1), \boldsymbol{y} = (0,1,1,\dots,1) \in [0,\infty[^n$ olarak alınırsa $\left|\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{0}\right| \leq c\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1 = c.u$ olacak şekilde $c \in]0,\infty[$ sabiti mevcut olsun. Fakat

$\sqrt[n]{\frac{u}{u^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{u^{n-1}}} \leq c$ olduğundan $u \to 0$ için $\infty \leq c$ olur. Bu ise GM 'in Lipschitz olamayacağını gösterir.

$A: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ genişletilmiş birleştirme fonksiyonunun sürekliliği her bir $A^{(n)}$ 'nin sürekliliği anlamındadır. Üstelik A için Lipschitz şartı, her $A^{(n)}$ c −Lipschitz olacak şekilde bir sabit $c \in]0,\infty[$ 'un varlığıyla kısıtlanır.

Örnek 2.21.

1) AM: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ aritmetik ortalama fonksiyonu, $\mathbb{I}$ aralığından bağımsız olarak (L_1 normuna göre) 1-Lipschitz 'dir.

AM: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$, L_1 normuna göre 1-Lipschitz yani keyfi $n \in \mathbb{N}$ için $AM^{(n)}$ nin 1-Lipschitz olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
\left|AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) - AM^{(n)}(\boldsymbol{y})\right| &= \left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right| \\
&= \left|\frac{x_1 - y_1}{n} + \cdots + \frac{x_n - y_n}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}|x_1 - y_1| + \cdots \frac{1}{n}|x_n - y_n| \\
&\leq |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|
\end{aligned}$$

olduğundan 1-Lipschitz 'dir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $AM^{(n)}$ için L_1-normuna göre en iyi Lipschitz sabiti $\frac{1}{n}$ dir. $AM^{(n)}$, $c < \frac{1}{n}$ için c-Lipschitz (L_1-normuna göre) olsun.

$$\begin{aligned}
\left|AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) - AM^{(n)}(\boldsymbol{y})\right| &\leq c(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|) \\
&< \frac{1}{n}(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{n}|x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n| < \frac{1}{n}(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|)$$

olmalıdır. $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}$, $x_n \neq y_n$ alalım. Buradan $|x_n - y_n| < |x_n - y_n|$ çelişkisi elde edilir.

L_∞ normuna göre her n için $AM^{(n)}$, 1-Lipschitz 'dir ve 1, en iyi Lipschitz sabitidir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\left|AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) - AM^{(n)}(\boldsymbol{y})\right| = \left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} - \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right| &\leq \left|\frac{x_1 - y_1}{n} + \cdots + \frac{x_n - y_n}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n}|x_1 - y_1| + \cdots + \frac{1}{n}|x_n - y_n|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n} Max_i|x_i - y_i| + \cdots + \frac{1}{n} Max_i|x_i - y_i| = Max_i|x_i - y_i|$$

olduğundan ispat açıktır. En iyi Lipschitz sabiti 1 'dir. Varsayalım ki $c < 1$ için:

$$\left|AM^{(n)}(\boldsymbol{x}) - AM^{(n)}(\boldsymbol{y})\right| \leq c.\, Max_i|x_i - y_i| < Max_i|x_i - y_i|$$

sağlansın. $\boldsymbol{x}^* = (x, \dots, x), \boldsymbol{y}^* = (y, \dots, y) \in \mathbb{I}^n, x \neq y$ için

$$\left|AM^{(n)}(\boldsymbol{x}^*) - AM^{(n)}(\boldsymbol{y}^*)\right| = |x - y| \leq c.\, Max_i|x_i - y_i| = c.\, |x - y| < |x - y|$$

$$\Rightarrow 1 \leq c < 1$$

elde edilir, bu bir çelişkidir. O halde 1 en iyi Lipschitz sabitidir.

2) Q: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ genişletilmiş birleştirme fonksiyonu $Q(\boldsymbol{x}) \coloneqq \prod_i x_i^i$ ile verilsin. Q, (L_1 normuna göre) Lipschitz değildir, buna rağmen $Q^{(n)}$ Lipschitzdir ($Q^{(n)}$ için en iyi Lipschitz sabiti n dir.)

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in [0,1]^n$ için

$$\begin{aligned}
\left|Q^{(n)}(\boldsymbol{x}) - Q^{(n)}(\boldsymbol{y})\right| &= |x_1 x_2^2 x_3^3 \dots x_n^n - y_1 y_2^2 y_3^3 \dots y_n^n| \\
&\leq |x_1 - y_1| + |x_2^2 - y_2^2| + \cdots + |x_n^n - y_n^n| \\
&\leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.\, |x_2 + y_2| + |x_3 - y_3|.\, |x_3^2 + x_3 y_3 + y_3^2| + \cdots \\
&\dots + |x_n - y_n|.\, |x_n^{n-1} + x_n^{n-2} y_n + x_n^{n-3} y_n^2 + \cdots + x_n y_n^{n-2} + y_n^{n-1}| \\
&\leq |x_1 - y_1| n + |x_2 - y_2| n + \cdots + |x_n - y_n| n \\
&= n(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|) \\
&= n\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_1
\end{aligned}$$

n en iyi Lipschitz sabitidir, gerçekten: $c < n$ ve

$$\begin{aligned}
\left|Q^{(n)}(\boldsymbol{x}) - Q^{(n)}(\boldsymbol{y})\right| &= |x_1 x_2^2 x_3^3 \dots x_n^n - y_1 y_2^2 y_3^3 \dots y_n^n| \\
&\leq c(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|) \\
&< n(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|)
\end{aligned}$$

sağlansın. $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1} = 1$ ve $x_n \neq y_n$ alırsak:

$$|x_n^n - y_n^n| < c.\, |x_n - y_n|$$

$$|x_n - y_n|.\, |x_n^{n-1} + x_n^{n-2} y_n + x_n^{n-3} y_n^2 + \cdots + x_n y_n^{n-2} + y_n^{n-1}| < c.\, |x_n - y_n|$$

$$|x_n^{n-1} + x_n^{n-2} y_n + x_n^{n-3} y_n^2 + \cdots + x_n y_n^{n-2} + y_n^{n-1}| < c$$

elde edilir. $x_n = 1 - \frac{1}{m}$, $y_n = 1$ olarak seçilirse

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-2} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{m}\right) + 1 < c$$

elde edilir. $m \to \infty$ için

$$1 + \cdots + 1 = n \leq c$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde en iyi Lipschitz sabiti n ’dir.

Q nun L_1 normuna göre Lipschitz olmadığını gösterelim: Varsayalım ki Q, L_1 normuna göre c-Lipschitz olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $Q^{(n)}$, c-Lipschitzdir. Fakat $Q^{(n)}$ için en iyi Lipschitz sabiti n olduğundan dolayı $n \leq c$ elde ederiz. Her $n \in \mathbb{N}$ için bu eşitlik sağlanmalıdır. Buradan $n \to \infty$ için $\infty \leq c$ çelişkisi elde edilir. O halde Q, L_1 normuna göre Lipschitz değildir.

Tanım 2.22.

Azalmayan $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna alt yarı sürekli veya sol sürekli denir $:\Leftrightarrow$ $\bigvee_k \boldsymbol{x}^{(k)} \in \mathbb{I}^n$ olan her $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{I}^n)^{\mathbb{N}}$ için

$$\bigvee_{k\in\mathbb{N}} F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) = F\left(\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

dir.

Tanım 2.23.

Azalmayan $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna üst yarı sürekli veya sağ sürekli denir $:\Leftrightarrow$ $\bigwedge_k \boldsymbol{x}^{(k)} \in \mathbb{I}^n$ olan her $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{I}^n)^{\mathbb{N}}$ için

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right) = F\left(\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

dir.

Önerme 2.24.

Bir azalmayan $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu alt yarı süreklidir (sırasıyla üst yarı süreklidir) $\Leftrightarrow$ F her bir bileşene göre alt yarı süreklidir (sırasıyla üst yarı süreklidir).

İspat.

" $\Rightarrow$ " F alt yarı sürekli olsun. F ’in her bileşene göre alt yarı sürekli olduğu açıktır.

" $\Leftarrow$ " F her bir bileşene göre sürekli olsun. $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{I}^n$ nin bir azalmayan dizisi olsun öyle ki $\boldsymbol{x} = \bigvee_k \boldsymbol{x}^{(k)} \in \mathbb{I}^k$ (Keyfi $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $(x_1, \bigvee_{i=1}^2 x_i, \bigvee_{i=1}^3 x_i, \dots, \bigvee_{i=1}^n x_i, \dots)$ azalmayan olacağından dizi bu şekilde seçilebilir) olsun. O halde $({x_i}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{I}$ ’nın bir azalmayan dizisi olur öyle ki her $i \in [n]$ için $x_i = \bigvee_k {x_i}^{(k)}$ dir. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. F ’in alt yarı sürekliliğinden ve azalmayan monotonluğundan bir $j_1 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $k_1 \geq j_1$ için

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) - F\left(x_1^{(k_1)}, x_2, \dots, x_n\right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

elde edilir. Benzer şekilde, bir $j_2 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $k_2 \geq j_2$ için

$$F\left(x_1^{(j_1)}\ , x_2, \dots, x_n\right) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n\right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

olur. Bu n eşitsizliği bir araya getirerek ve $j \coloneqq \max(j_1, \dots j_n)$ seçerek her $k \geq j$ için ve F in monotonluğu kullanılarak

$$\left|F(\boldsymbol{x}) - F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\right| = \left|F(\boldsymbol{x}) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right) + F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right) - F\left(x^{(k)}\right)\right|$$

$$\leq \left|F(x) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right)\right| + \left|F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right) - F\left(x^{(k)}\right)\right|$$

$$\leq \left|F(x) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right)\right| + \left|F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n\right)\right|$$
$$+ \left|F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n\right) - F\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\right|$$

$$\dots$$

$$\leq \left|F(x) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right)\right| + \left|F\left(x_1^{(j_1)}, x_2, \dots, x_n\right) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n\right)\right|$$
$$+ \dots + \left|F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_{n-1}^{(k_{n-1})}, x_n\right) - F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_{n-1}^{(k_{n-1})}, x_n^{(k_n)}\right)\right|$$
$$+ \left|F\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_{n-1}^{(k_{n-1})}, x_n^{(k_n)}\right) - F\left(x^{(k)}\right)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise F 'in alt yarı sürekliliğini verir.

Önerme 2.25.

Bir $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ birleştirme fonksiyonu süreklidir $\Leftrightarrow$ F hem alt yarı sürekli hem üst yarı süreklidir.

Örnek 2.26.

(i) $T^{nM}: [0,1]^2 \to [0,1]$, $T^{nM}(x_1, x_2) \coloneqq \begin{cases} Min(x_1, x_2) & eğer\ x_1 + x_2 > 1 \\ 0 & aksi\ takdirde \end{cases}$ olarak verilen birleştirme fonksiyonu sol sürekli (alt yarı sürekli) fakat sürekli olmayan birleştirme fonksiyonlarına önemli bir örnektir.

T^{nM} birleştirme fonksiyonudur. Gerçekten fonksiyonun azalmayanlığı açıktır. $T^{nM}(0,0) = 0$ ve $T^{nM}(1,1) = 1$ olduğundan sınır şartlarını sağladığı da açıktır. O halde bir birleştirme fonksiyonudur.

$m \geq 2, m \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) \in [0,1]^2$ için

$$T^{nM}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \bigwedge_{m=2}^{\infty} T^{nM}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}$$

fakat

$$T^{nM}\left(\bigwedge_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)\right) = T^{nM}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$$

dir. O halde üst yarı sürekli değildir.

T^{nM} 'in alt yarı sürekli olduğunu göstermek için azalmayan $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ için

$$\underbrace{T^{nM}\left(\bigvee_{k\in\mathbb{N}}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})\right)}_{(2.2)} = \underbrace{\bigvee_{k\in\mathbb{N}} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}_{(2.3)}$$

eşitliği gösterilmelidir. $(x_1^{(k)}), (x_2^{(k)})$ dizileri azalmayan olsun.

$\bigvee_{k\in\mathbb{N}}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \left(\bigvee_{k\in\mathbb{N}} x_1^{(k)}, \bigvee_{k\in\mathbb{N}} x_2^{(k)}\right) = (x, y)$ olsun.

a) $x + y \leq 1$ olsun. Bu durumda (2.2) ifadesi 0 a eşit olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_1^{(k)} \leq x$ ve $x_2^{(k)} \leq y$ olduğundan (2.3) ifadesi de 0 'a eşit olur ve eşitlik sağlanır.

b) $x + y > 1$ olsun. Bu durumda (2.2) ifadesi $\min(x, y)$ olur. O halde gösterilmesi gereken (2.3) ifadesinin $\min(x, y)$ 'e eşit olduğudur. Dizi azalmayan olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $x_1^{(k)} + x_2^{(k)} \leq 1$ olamaz. Aksi takdirde $\bigvee\left(x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right) \leq x + y \leq 1$ çelişkisi elde edilir. O halde en az bir $k \in \mathbb{N}$ için $x_1^{(k)} + x_2^{(k)} > 1$ dir. Böyle k 'ların en küçüğünü k_0 ile gösterelim. $x_1^{(k_0)} \leq x$ ve $x_2^{(k_0)} \leq y$ olduğunu biliyoruz. Her $k \geq k_0$ için

$x_1^{(k_0)} \leq x_1^{(k)} \leq x$ ve $x_2^{(k_0)} \leq x_2^{(k)} \leq y$ dir.

Azalmayanlıktan her $k \geq k_0$ için,

$0 \neq T^{nM}(x_1^{(k_0)}, x_2^{(k_0)}) \leq T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$

$0 \neq Min(x_1^{(k_0)}, x_2^{(k_0)}) \leq T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \Rightarrow T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \neq 0$

dır. Buradan

$$T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = Min(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$$

elde edilir. Şimdi

$$\bigvee_{k\geq k_0} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \bigvee_{k\geq k_0}(Min(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})) = Min(x, y) \tag{2.4}$$

olduğu gösterilmelidir.

Minimum sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\bigvee_{k\geq k_0} Min(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = Min\left(\bigvee_{k\geq k_0}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})\right) = Min\left(\bigvee_{k\geq k_0} x_1^{(k)}, \bigvee_{k\geq k_0} x_2^{(k)}\right)$$

dir. O halde, $\bigvee_{k\geq k_0} x_1^{(k)} = x$ ve $\bigvee_{k\geq k_0} x_2^{(k)} = y$ olduğu gösterilirse (2.4) ispat edilmiş olur. $\bigvee_{k\geq k_0} x_1^{(k)} = l$ olsun.

Dizinin azalmayanlığından, $l \geq x_1^{(1)} \vee \dots \vee x_1^{(k_0-1)}$ olduğu kullanılarak

$$x = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} x_1^{(k)} = x_1^{(1)} \vee \dots \vee x_1^{(k_0-1)} \vee l = l = \bigvee_{k\geq k_0} x_1^{(k)}$$

elde edilir ve benzer şekilde $\bigvee_{k\geq k_0} x_2^{(k)} = y$ olduğundan $k \geq k_0$ için

$$\bigvee_{k\geq k_0} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = Min(x,y) \tag{2.5}$$

bulunur.

$$\bigvee_{k\in\mathbb{N}} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$$
$$= T^{nM}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \vee T^{nM}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \vee \dots \vee T^{nM}(x_1^{(k_0-1)}, x_2^{(k_0-1)})$$
$$\vee(\bigvee_{k\geq k_0} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$$

olur. Dizinin azalmayanlığı ve T^{nM} 'nin monotonluğu kullanılırsa

$$\bigvee_{k\in\mathbb{N}} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \bigvee_{k\geq k_0} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$$

olur. (2.5) eşitliği kullanılırsa

$$\bigvee_{k\in\mathbb{N}} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = Min(x,y)$$

bulunur. Böylece

$$T^{nM}\left(\bigvee_{k\in\mathbb{N}}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})\right) = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} T^{nM}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$$

eşitliği elde edilir.

(ii) $T_D: [0,1]^n \to [0,1], T_D(x) \coloneqq \begin{cases} Min(\boldsymbol{x}) & \text{Eğer } |\{i \in [n] | x_i < 1| < 2 \\ 0 & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan drastik çarpım fonksiyonu üst yarı süreklidir fakat sürekli değildir.

T_D bileşen anlamda üst yarı sürekli ise üst yarı sürekli olduğundan gösterilmesi gereken:

$$T_D\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i}, x_2, \dots, x_n\right) = \bigwedge_{i=1}^{\infty} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n)$$

eşitliğidir.

a) $\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i} = 1$ olsun. $\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i} = 1 \leq x_{1i}$ olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $x_{1i} = 1$ dir. Böylece

$$T_D\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i}, x_2, \dots, x_n\right) = T_D(1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{\infty} T_D(1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{\infty} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n)$$

olduğu elde edilir.

b) $\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i} = a < 1$ olsun. $\mathrm{I}' \subseteq \mathbb{N}$ vardır öyle ki $i \in \mathrm{I}'$ için $x_{1i} < 1$ dir. Böylece

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i} = \bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} x_{1i} \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{I}'} x_{1i}\right) = \bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} x_{1i}$$

elde edilir.

b1) x_i 'lerden $(i = 2, \dots, n)$ en az biri 1'den küçük olsun.

$$T_D\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i}, x_2, \dots, x_n\right) = T_D\left(\bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} x_{1i}, x_2, \dots, x_n\right) = 0$$

ve

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{I}'} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n) \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n)\right)$$

$$= \bigwedge_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{I}'} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n) \wedge 0 = 0$$

olup eşitlik sağlanır.

b2) $x_2 = \cdots = x_n = 1$ olsun. Bu durumda:

$$T_D\left(\bigwedge_{i=1}^{\infty} x_{1i}, x_2, \dots, x_n\right) = T_D\left(\bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} x_{1i}, x_2, \dots, x_n\right) = \bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} x_{1i}$$

ve

$$\bigwedge_{i=1}^{\infty} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{I}'} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n) \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n)\right)$$

$$= 1 \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} T_D(x_{1i}, x_2, \dots, x_n)\right) = 1 \wedge \left(\bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} x_{1i}\right) = \bigwedge_{i \in \mathrm{I}'} x_{1i}$$

olup eşitlik elde edilir.

Tüm durumlarda eşitlik elde edildiğinden T_D üst yarı süreklidir.

T_D sürekli değildir çünkü alt yarı sürekli değildir. Gerçekten:

$\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},1,\dots,1\right)\in[0,1]^n$ için $T_D\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},1,\dots,1\right)=0$ 'dir. $\bigvee_n\left(T_D\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},1,\dots,1\right)\right)=\bigvee_n 0=0$ ve $T_D\left(\bigvee_n\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},1,\dots,1\right)\right)=T_D(1,1,\dots,1)=1$ olduğundan alt yarı sürekli değildir o halde sürekli değildir.

2.1.3. Simetriklik

Simetri özelliği komutatiflik, anonimlik olarak da bilinir. Cebirde iyi bilinen, bir ikili işlemdeki komutatiflik $x*y=y*x$ olup kolaylıkla $n\geq 2$ için n-li fonksiyonlara şu şekilde genellenir:

Tanım 2.27.

$F:\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna bir simetrik fonksiyon denir $:\Leftrightarrow$ Her $\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n$ ve $\sigma\in\mathscr{O}_{[n]}$ için $F(\boldsymbol{x})=F([\boldsymbol{x}]_\sigma)$ dir.

Simetri özelliği, bileşenlerin birleştirme fonksiyonu altındaki değerinin bileşenlerin sırasından bağımsız olduğunu ifade eder. Bu kimliği bilinmeyen uzmanların fikirlerinin veya eşit önemdeki kriterlerin birleştirilmesinde gereklidir.

Şimdiye kadar tanıtmış olduğumuz çoğu birleştirme fonksiyonu simetriktir. Örneğin AM, GM, OWA_w birleştirme fonksiyonları simetriktir. Simetrik olmayan birleştirme fonksiyonlarının önemli bir örneği WAM_w ağırlıklı aritmetik ortalamadır.

WAM_w fonksiyonu sadece $w_1=w_2=\cdots=w_n=\frac{1}{n}$ olması durumunda yani $WAM_w=AM$ durumunda simetriktir.

$\sum_{i=1}^n w_i=1$ olacak şekildeki herhangi ağırlık vektörü $w=(w_1,\dots,w_n)\in[0,1]^n$ için ağırlıklı aritmetik fonksiyonu $WAM_w:\mathbb{I}^n\to\mathbb{I}$

$$WAM_w(\boldsymbol{x}):=\sum_{i=1}^n w_i x_i$$

ile tanımlanır. $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{I}^n$, $x_1<x_2=x_3=\cdots=x_n$ olacak şekilde seçilsin $\sigma=(12)$ için $WAM_w(\boldsymbol{x})=WAM_w\left([\boldsymbol{x}]_{(12)}\right)$ olmalıdır. Buradan:

$$w_1.x_1+w_2.x_2+w_3.x_3+\cdots+w_n.x_n=w_1.x_2+w_2.x_1+w_3.x_3+\cdots+w_n.x_n$$

$$w_1(x_1-x_2)=w_2(x_1-x_2)$$

$$w_1=w_2$$

elde edilir. $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n') \in \mathbb{I}^n,\ x_2' < x_3' = x_1' = \cdots = x_n'$ olacak şekilde seçilsin. $\sigma = (23)$ için $WAM_w(\boldsymbol{x}') = WAM_w\left([\boldsymbol{x}']_{(23)}\right)$ olmalıdır.

$$w_1.x_1 + w_2.x_2 + w_3.x_3 + \cdots + w_n.x_n = w_1.x_1 + w_2.x_3 + w_3.x_2 + \cdots + w_n.x_n$$

$$w_2(x_2 - x_3) = w_2(x_2 - x_3)$$

$$w_2 = w_3$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek WAM_w fonksiyonun simetri özelliğini ancak $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \frac{1}{n}$ olması durumunda sağladığı görülür. Bu ise WAM_w fonksiyonunun AM olması durumuna denktir.

Grup teoride iyi bilinen bir sonraki sonuç simetri özelliğinin yalnızca iki eşitlikle kontrol edilebildiğini gösterir[16]:

Önerme 2.28.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu simetriktir $\Leftrightarrow$ Her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için

(i) $F(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

(ii) $F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

(i) şıkkında verilen eşitlik (12) devresini, (ii) şıkkında verilen eşitlik (1…n) devresini ifade eder. Bu iki devre σ_n'i ürettiğinden ispat açıktır[17].

Önerme 2.29.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu simetriktir $:\Leftrightarrow$ $G: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için $F(x_1, \ldots, x_n) = G\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$ 'dir.

İspat.

" $\Rightarrow$ " F simetrik olsun. Bu durumda her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ ve $\sigma \in \mathcal{O}_{[n]}$ için $F(\boldsymbol{x}) = F([\boldsymbol{x}]_\sigma)$ 'dır. $G(x_1, \ldots, x_n) := F\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$ olarak tanımlansın. Buradan $G\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right) = F\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right) = F(x_1, \ldots, x_n)$ olup eşitlik sağlanır.

" $\Leftarrow$ " $F(x_1, \ldots, x_n) = G\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$ olacak şekilde $G: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mevcut olsun 2.28 Önermeyi kullanırsak

$$F(x_2, x_1, \ldots, x_n) = G\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

$$F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = G\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece F simetriktir.

2.29. Önerme'deki F simetrik fonksiyonu bizi farklı G fonksiyonlarına yönlendirebilir. Örneğin $F = OS_1$ alındığında $1 \in K$ olan herhangi $K \subseteq [n]$ için $G = Min_K$ alınabilir.

F simetrik olmayan bir fonksiyon olmak üzere $F(x_1, \dots, x_n) \coloneqq F\big(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}\big)$ olarak tanımlansın. Bu takdirde F, 2.38. Önerme'nin tüm şartlarını sağlar. Böylece simetrik olmayan bir fonksiyon bu şekilde simetrik hale getirilebilir. Simetrikleştirme sürecine bağlı olarak, WAM_W ağırlıklı aritmetik ortalamasından, OWA_W sıralı ağırlıklı ortalama elde edilir.

Aşağıdaki teknik simetrik fonksiyonların alt sınıflarından birleştirme fonksiyonlarının belli sınıflarını tanımlamaya imkan verir. İki bileşen için şu şekilde tanımlanır:

Verilen bir $F: \mathbb{I}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için

$F_1(x_1, x_2) \coloneqq F\big(x_{(1)}, x_{(2)}\big)$,

$F_2(x_1, x_2) \coloneqq F\big(x_{(2)}, x_{(1)}\big)$

fonksiyonları tanımlansın. Bu fonksiyonların süreklilik, idempotentlik gibi özellikleri F fonksiyonundan elde edilir. $F_1(x_1, x_2) = F\big(x_{(1)}, x_{(2)}\big) = F_1(x_2, x_1)$ ve $F_2(x_1, x_2) = F\big(x_{(2)}, x_{(1)}\big) = F_2(x_2, x_1)$ olduğundan F_1 ve F_2 fonksiyonlarının simetrik olduğu açıktır. Üstelik,

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} F_1(x_1, x_2) & , \text{eğer } x_1 \leq x_2 \\ F_2(x_1, x_2) & , \text{eğer } x_2 \leq x_1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda F, $\mathbb{I}^2$ 'nin diyagonal kesiminin üstünde F_1 ile, altında da F_2 ile çakışır. Böylece bu tanımlama ile simetrik fonksiyonlardan simetrik olmayan asosyatif fonksiyonlar elde edilir(Fodor[18], Sander [19]).

Yukarıdaki teknik n-li girdilere genellenebilir. Verilen $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $F_\sigma(\boldsymbol{x}) \coloneqq F\left(x_{(\sigma(1))}, \dots, x_{(\sigma(n))}\right)$ (her $\sigma \in \mathcal{O}_{[n]}$) olarak tanımlanan $n!$ tane simetrik fonksiyon elde edilebilir. $\mathbb{I}^n = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{O}_{[n]}} \mathbb{I}^n_\sigma$ olduğu için tüm bölgelerde her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n_\sigma$ için $F(\boldsymbol{x}) = F_\sigma(\boldsymbol{x})$ olduğu elde edilir.

2.1.4. İdempotentlik

Cebirde, $x * x = x$ eşitliği sağlanıyorsa x elemanına $*$ ikili işlemine göre idempotent eleman denir. Bu cebirsel özellik n-li fonksiyonlara genişletilebilir. Böylece idempotentlik özelliği n-li fonksiyonlar için tanımlanmış olur.

Tanım 2.30.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ idempotent fonksiyondur $:\Leftrightarrow$ $\delta_F = id$, yani her $x \in \mathbb{I}$ için $F(nx) = x$ tir.

Çoklu karar alma ve birleştirme fonksiyonları gibi bazı alanlarda idempotentlik doğal bir özellik olarak kabul edilebilir (Örnek için bakınız Fodor ve Roubens[20]). İdempotent fonksiyonlara örnek olarak $AM, WAM_W, OWA_W, Min, Max$ ve Med verilebilir. İdempotent olmayan birleştirme fonksiyonuna örnek olarak Σ ve Π fonksiyonları verilebilir.

1.19. Sonuç ile azalmayan ve idempotent olan her $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu bir birleştirme fonksiyonudur.

Tanım 2.31.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $x \in \mathbb{I}$ ya idempotent eleman denir $:\Leftrightarrow$ $\delta_F(x) = x$ 'dir.

$[0,1]^n$ de $\prod$ çarpım fonksiyonu 0 ve 1 hariç idempotent elemanlara sahip değildir. $[0,1]^n$ de idempotent olmayan fakat trivialden farklı bir idempotent elemana sahip bir fonksiyon örneği elde etmek için $c \in]0,1[$ keyfi seçilsin ve $A_{\{c\}}: [0,1]^n \to [0,1]$ olmak üzere

$$A_{\{c\}}(\boldsymbol{x}) := Med\left(0, c + \sum_{i=1}^{n}(x_i - c), 1\right)$$

olarak tanımlansın. $A_{\{c\}}$ 'nin 0, 1 ve c idempotent elemanlarına sahip olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.32.

$F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş birleştirme fonksiyonu için $x \in \mathbb{I}$ 'ya asimptotik idempotent eleman denir $:\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \delta_{F^{(n)}}(x) = x$ dir.

Örnek olarak $\prod: \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ genişletilmiş çarpım birleştirme fonksiyonu yalnızca 0 ve 1 asimptotik idempotent elemanlarına sahiptir. 0 ve 1 in asimptotik idempotent eleman olduğu açık olarak görülür. Gerçekten $0 < x < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ olur ki $x \neq 0$ olduğundan, x asimptotik idempotent eleman olamaz. $A: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $A^{(1)}(x) = x$ ve $n > 1$ için $A^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ olarak tanımlanan genişletilmiş fonksiyon için $\lim_{n\to\infty} A^{(n)}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} x = x$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ bir asimptotik idempotent elemandır.

Tanım 2.33.

$F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonuna resim-idempotent denir $:\Leftrightarrow \delta_F \circ F = F$ dir, yani her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için $F\big(n.F(\boldsymbol{x})\big) = F(\boldsymbol{x})$ sağlanır.

İdempotent $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonunun resim-idempotent olduğu açıktır.

Önerme 2.34.

$F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ resim-idempotent bir fonksiyon olsun. F idempotenttir $\Leftrightarrow ran(F) = \mathbb{I}$ dır.

İspat.

" $\Rightarrow$ " Bir $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu resim-idempotent ve idempotent olsun. $ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ olduğu açıktır. Bunun tersine olarak $a \in \mathbb{I}$ keyfi alalım. $(a, a, \dots, a) \in \mathbb{I}^n$ için F idempotent olduğundan $F(a, a, \dots, a) = a$ olduğundan $a \in ran(F)$ olur. Buradan da $\mathbb{I} \subseteq ran(F)$ olduğu elde edilir. Böylece $ran(F) = \mathbb{I}$ bulunur.

" $\Leftarrow$ " $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ resim-idempotent ve $ran(F) = \mathbb{I}$ olsun. Her $x \in \mathbb{I}$ için $ran(F) = \mathbb{I}$ olduğundan bir $\boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n$ mevcuttur öyle ki $x = F(\boldsymbol{y})$ sağlanır. O halde F resim-idempotent olduğundan $F(x, \dots, x) = F\big(F(\boldsymbol{y}), \dots, F(\boldsymbol{y})\big) = F\big(n.F(\boldsymbol{y})\big) = F(\boldsymbol{y}) = x$ olur. Bu ise F 'in idempotent olduğunu verir.

Örnek 2.35.

$a \leq b$ olan herhangi $a, b \in \mathbb{I}$ sayıları ve $G: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ idempotent fonksiyonu için, $F(\boldsymbol{x}) = Med(a, G(\boldsymbol{x}), b)$ ile tanımlanan $F: \mathbb{I}^n \to [a, b]$ fonksiyonu resim-idempotenttir fakat idempotent değildir ($\mathbb{I} = [a, b]$ olmadıkça).

Gerçekten $F\big(n.F(\boldsymbol{x})\big) = Med\big(a, G\big(n.F(\boldsymbol{x})\big), b\big) = Med(a, F(\boldsymbol{x}), b) = F(\boldsymbol{x})$ ($F(\boldsymbol{x})$ tanımı gereği a ile b arasında kalır) olduğundan resim-idempotenttir. $\mathbb{I} = [a, b]$ olmadıkça F 'in idempotent olmadığını göstermek amacıyla $[a, b] \subsetneq \mathbb{I}$ kabul edilsin. Bu durumda $x < a$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{I}$ ya da $y > b$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{I}$ mevcuttur. $x < a$, $x \in \mathbb{I}$ durumunda F idempotent olsa $F(nx) = x$ olur. F 'in tanımı ile $a \leq F(nx) = x \leq b$ olur, bu bir çelişkidir. Benzer şekilde $y > b$, $y \in \mathbb{I}$ durumunda da benzer çelişki elde edilir. O halde bu durumda F idempotent olamaz.

Özel olarak her sabit fonksiyon resim-idempotenttir fakat idempotent değildir.

Tanım ile, her resim-idempotent $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonunun $f = \delta_F$ diyagonal kesimi $f \circ f = f$ eşitliğini sağlar. Bu eşitliğe idempotentlik eşitliği(bkz[21]**)** denir. $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ resim-idempotent olsun. f için $f \circ f = f$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Her $x \in \mathbb{I}$ için

$(f \circ f)(x) = f\big(\delta_F(x)\big) = f\big(F(n.x)\big) = F\big(nF(n.x)\big) = F(n.x) = \delta_F(x) = f(x)$ olduğundan eşitlik sağlanır. Bu tip fonksiyonlara örnek olarak $f = id$ ve $f = c(c \in \mathbb{I})$ sabit fonksiyonları verilebilir.

Aşağıdaki önerme idempotentlik eşitliğinin çözümlerinin ailesini ve kapalı aralıklar üzerinde tanımlanan azalmayan ve sürekli çözümlerin alt ailesini karakterize eder[22].

Önerme 2.36.

$f: \mathbb{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $f \circ f = f$ eşitliğini sağlar $\Leftrightarrow$ $f|_{ran(f)} = id|_{ran(f)}$ 'dir.

Üstelik $\mathbb{I}$ bir kapalı aralık ise böyle bir f fonksiyonu (yani $f \circ f = f$ olan) sürekli ve azalmayandır $\Leftrightarrow$ $a \leq b$ olan $a, b \in \mathbb{I}$ elemanları $f(x) = Med(a, x, b)$ olacak şekilde mevcuttur.

İspat.

" $\Rightarrow$ " $f: \mathbb{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $f \circ f = f$ eşitliğini sağlasın. Gösterilmesi gereken her $x \in ran(f)$ için $f(x) = id(x) = x$ olduğudur. $f \circ f = f$ olduğundan her x için $f(f(x)) = f(x)$ sağlanır. f in tanımı gereği $f(x) \in \mathbb{I}$ olduğundan $ran(f) \subseteq \mathbb{I}$ olur. O halde keyfi $x \in ran(f)$ için bir $z \in \mathbb{I}$ mevcuttur öyle ki $x = f(z)$ dir. Buradan da $f(x) = f\big(f(z)\big) = f(z) = x$ olup istenilen elde edilir.

" $\Leftarrow$ "$f: \mathbb{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $f|_{ran(f)} = id|_{ran(f)}$ olsun. Her $x \in \mathbb{I}$ için $f(x) \in ran(f)$ olduğundan $f\big(f(x)\big) = id\big(f(x)\big) = f(x)$ olur. Bu ise $f \circ f = f$ olduğunu verir.

İkinci kısmın ispatını verelim:

" $\Rightarrow$ " $\mathbb{I}$ bir kapalı aralık, f azalmayan, sürekli ve $f \circ f = f$ olsun. Bu durumda $f(x) = Med(a, x, b)$ olduğu gösterilmelidir. f sürekli ve azalmayan olduğundan $a, b \in \mathbb{I}$ elemanları mevcuttur öyle ki $a \leq b$ için $ranf = [a, b]$ şeklindedir. Mevcut durumları inceleyelim:

a) $a \leq x \leq b$ olan $x \in \mathbb{I}$ için $x \in ranf$ ve $f|_{ran(f)} = id|_{ran(f)}$ olduğundan $f(x) = x$ olup istenilen elde edilir.

b) $x < a \leq b$ için $Med(a, x, b) = a$ olur. Azalmayanlıktan $f(x) \leq f(a)$ olur. $f(x) \in ran(f)$ olduğundan $a \leq f(x)$ olur. f 'in azalmayanlığından ve $f \circ f = f$ olduğundan $f(a) \leq f\big(f(x)\big) = f(x)$ elde edilir. Buradan $f(a) = f(x)$ elde edilir. $a \in ran(f)$ ve $f|_{ran(f)} = id|_{ran(f)}$ olduğundan $f(a) = a$ bulunur. O halde $f(x) = a$ 'dır. Yani $f(x) = Med(a, x, b)$ eşitliği sağlanır.

c) b şıkkına dual olarak durum incelemesi yapılır.

$" \Leftarrow "$ $a \leq b$ olan $a, b \in \mathbb{I}$ elemanları $f(x) = Med(a, x, b)$ olacak şekilde mevcut olsun.

f 'in azalmayan olduğunu göstermek amacıyla tersinin doğru olduğu yani $x_1 \leq x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olduğu kabul edilsin.

a) $f(x_1) = b$ ve $f(x_2) = b$ olursa $f(x_1) = b > b = f(x_2)$ olur. Bu bir çelişkidir.

b) $f(x_1) = b$ ve $f(x_2) = x_2$ olsun. Bu durumda $f(x_1) = b$ eşitliğinden $a \leq b \leq x_1$ ve $f(x_2) = x_2$ eşitliğinden $a \leq x_2 \leq b$ elde edilir. Bu iki durumdan $a \leq x_2 \leq b \leq x_1$ elde edilir. $x_1 \leq x_2$ olduğundan $x_1 = x_2$ elde edilir. Bu ise $f(x_1) > f(x_2) = f(x_1)$ çelişkisini doğurur.

c) $f(x_1) = b$ ve $f(x_2) = a$ olsun. $f(x_1) = b$ eşitliğinden $a \leq b \leq x_1$ ve $f(x_2) = a$ eşitliğinden $x_2 \leq a \leq b$ elde edilir. Buradan $x_2 \leq a \leq b \leq x_1$ olur. $x_1 \leq x_2$ olduğundan $x_1 = x_2$ elde edilir. Buradan $f(x_1) > f(x_2) = f(x_1)$ çelişkisi elde edilir.

d) $f(x_1) = x_1$ ve $f(x_2) = b$ olsun. $f(x_1) = x_1$ eşitliğinden $a \leq x_1 \leq b$ ve $f(x_2) = b$ eşitliğinden $a \leq b \leq x_2$ elde edilir. Buradan $a \leq x_1 \leq b \leq x_2$ bulunur. $x_1 = f(x_1) \leq f(x_2) = b$ olur. Bu ise $f(x_1) > f(x_2)$ olması ile çelişir.

e) $f(x_1) = x_1$ ve $f(x_2) = x_2$ olsun. $f(x_1) = x_1$ eşitliğinden $a \leq x_1 \leq b$ ve $f(x_2) = x_2$ eşitliğinden $a \leq x_2 \leq b$ bulunur. Buradan $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ elde edilir. O halde $x_1 = f(x_1) \leq f(x_2) = x_2$ olur. Bu ise $f(x_1) > f(x_2)$ ile çelişir.

f) $f(x_1) = x_1$ ve $f(x_2) = a$ olsun. $f(x_1) = x_1$ eşitliğinden $a \leq x_1 \leq b$ ve $f(x_2) = a$ eşitliğinden $x_2 \leq a \leq b$ elde edilir. Buradan $x_1 \leq x_2 \leq a \leq x_1$ elde edilir O halde $x_1 = x_2$ dir. Bu ise $f(x_1) > f(x_2) = f(x_1)$ çelişkisini doğurur.

g) $f(x_1) = a$ ve $f(x_2) = b$ olsun. $f(x_1) = a$ eşitliğinden $x_1 \leq a \leq b$ ve $f(x_2) = b$ eşitliğinden $a \leq b \leq x_2$ elde edilir. Buradan da $x_1 \leq a \leq b \leq x_2$ elde edilir. O halde $a = f(x_1) \leq f(x_2) = b$ olur, bu ise $f(x_1) > f(x_2)$ ile çelişir.

h) $f(x_1) = a$ ve $f(x_2) = x_2$ olsun. $f(x_1) = a$ eşitliğinden $x_1 \leq a \leq b$ ve $f(x_2) = x_2$ eşitliğinden $a \leq x_2 \leq b$ bulunur. Buradan da $x_1 \leq a \leq x_2 \leq b$ elde edilir. O halde $a = f(x_1) \leq f(x_2) = x_2$ olur, bu ise $f(x_1) > f(x_2)$ ile çelişir.

i) $f(x_1) = a$ ve $f(x_2) = a$ olsun. Bu $f(x_1) > f(x_2)$ ile çelişir.

O halde $x_1 \leq x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olamaz. Böylece $x_1 \leq x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$ olup f azalmayandır.

Şimdi de sürekliliğini gösterelim:

f fonksiyonu açıkça şu şekilde yazılabilir:

$$f(x)=\begin{cases} a & ,x\le a \\ x & ,a<x<b \\ b & ,x\ge b \end{cases}$$

$a<x<b$ olan x ’ler için $f(x)=x$ olup bu x ’ler için f ’in sürekli olduğu açıktır. O halde $x=a$ ve $x=b$ noktaları incelenmelidir. $x=b$ noktasında f ’in sürekliliğini inceleyelim: $\lim_{x\to b^+} f(x)=\lim_{x\to b^+} b=b=f(b)$ ve $\lim_{x\to b^-} f(x)= \lim_{x\to b^-} x= b=f(b)$ olup $x=b$ noktasında süreklidir. $x=a$ noktasında f ’in sürekliliğini inceleyelim: $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} x=a=f(a)$ ve $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-} a= a=f(a)$ olup $x=a$ noktasında süreklidir. O halde f süreklidir.

Tanım 2.37.

$F:[a,b]^n\to\overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu uç noktaları koruyan fonksiyondur $:\Leftrightarrow$ $F(n.a)=a$ ve $F(n.b)=b$ dir.

İdempotentlik özelliği genişletilmiş fonksiyonlara aşağıdaki şekilde genelleştirilir[23]:

Tanım 2.38.

$F:\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ güçlü idempotenttir $:\Leftrightarrow$ Her $n\in\mathbb{N}$ ve her $\boldsymbol{x}\in\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{I}^m$ için $F(n.\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x})$ dir.

Örnek olarak, $F:\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ güçlü idempotent ise $F(x_1,x_2,x_1,x_2)=F(x_1,x_2)$ dir.

Önerme 2.39.

$F:\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ güçlü idempotent olsun. Bu durumda F idempotenttir $\Leftrightarrow$ Her $x\in\mathbb{I}$ için $F(x)=x$ ’dir.

İspat.

" $\Rightarrow$ " $F:\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ güçlü idempotent ve idempotent olsun. $x\in\mathbb{I}$ keyfi olsun. $F(x)=F(nx)=x$ olduğundan $F(x)=x$ dir.

" $\Leftarrow$ " $F:\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ in güçlü idempotent ve her $x\in\mathbb{I}$ için $F(x)=x$ olsun. Güçlü idempotentliği ve $F(x)=x$ olduğu sırasıyla kullanılarak $F(nx)=F(x)=x$ elde edilir.

1-li birleştirme fonksiyonları üzerinde yapılan her $x\in\mathbb{I}$ için $A(x)=x$ olması kabulüne göre her güçlü idempotent genişletilmiş birleştirme fonksiyonu idempotenttir.

Tanım 2.40.

$F:\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna idempotentleştirilebilir denir $:\Leftrightarrow$ F in diyagonal kesimi δ_F kesin artan ve $ran(\delta_F)=ran(F)$ ’tir.

Azalmayan ve idempotent olan her $F:\mathbb{I}^n\to\overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $ran(F)=\mathbb{I}$ ’dır. Böylece F idempotentleştirilebilirdir. Gerçekten, 1.19. Sonuç ile azalmayan ve idempotent olan $F:\mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu bir birleştirme fonksiyonudur ve 1.13. Uyarı ile F birleştirme fonksiyonu ise $ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ dır. Tersine $x \in \mathbb{I}$ keyfi alınsın. F idempotent olduğundan $F(x, x, \dots, x) = x$ dir. O halde $x \in ran(F)$ dir. Buradan $\mathbb{I} \subseteq ran(F)$ olduğu elde edilir. Böylece $ran(F) = \mathbb{I}$ olduğu elde edilmiş olur. F idempotent olduğundan açık olarak $ran(\delta_F) = \mathbb{I}$ dır. O halde $ran(F) = ran(\delta_F)$ elde edilir. F azalmayan olduğundan δ_F azalmayandır, üstelik δ_F kesin artandır. Gerçekten $x, y \in \mathbb{I}$ ve $x < y$ iken δ_F 'in azalmayanlığından $\delta_F(x) \leq \delta_F(y)$ 'dir. $\delta_F(x) = F(nx) = F(ny) = \delta_F(y)$ olursa F idempotent olduğundan $x = y$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece δ_F kesin artan ve $ran(\delta_F) = ran(F)$ olduğundan F idempotentleştirilebilirdir.

Aşağıdaki önerme ve onun sonucu idempotentleştirilebilir fonksiyonların kümesinin tanımlanmasını sağlar.

Önerme 2.41.

$F:\mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu idempotentleştirilebilirdir $\Leftrightarrow$ Bir kesin artan $f:\mathbb{I} \to ran(F)$ bire-bir örten fonksiyonu ve bir $G:\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ idempotent fonksiyonu

$$F = f \circ G \tag{2.6}$$

olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda, $f = \delta_F$, F 'in diyagonal kesimidir.

İspat.

" $\Rightarrow$ " F idempotentleştirilebilir olsun. Bu durumda 2.40. Tanım ile $f = \delta_F$, $\mathbb{I}$ 'dan $ran(F)$ 'e kesin artan, bire-bir örten bir fonksiyon olarak elde edilir. Böylece $\mathbb{I}^n$ 'den $\mathbb{I}$ 'ya $G = \delta_F^{-1} \circ F$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Her $x \in \mathbb{I}$ için, $G(n.x) = (\delta_F^{-1} \circ F)(n.x) = \delta_F^{-1}(F(n.x))$ bulunur. $\delta_F^{-1}\big(F(n.x)\big) = y$ olsun. Bu durumda $\delta_F(y) = F(nx) \Rightarrow \delta_F(y) = \delta_F(x)$ ve δ_F bire-bir olduğundan $x = y$ elde edilir. O halde $G(n.x) = \delta_F^{-1}\big(F(n.x)\big) = y = x$ olup G idempotenttir. Ayrıca G, $F = f \circ G$ eşitliğini sağlar.

" $\Leftarrow$ " F 'in idempotentleştirilebilir olduğu gösterilmelidir. $x \in \mathbb{I}$ keyfi alınsın. $\delta_F(x) = F(n.x) = (f \circ G)(n.x) = f\big(G(n.x)\big) = f(x)$ olur. O halde bu şartları sağlayan f, δ_F 'e eşittir. $\delta_F = f$ kesin artan olduğundan $ran(\delta_F) = ran(F)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $ran(\delta_F) \subseteq ran(F)$ dir. Ters kapsama için $y \in ran(F)$ alınsın. Bu durumda bir $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için $y = F(\boldsymbol{x})$ sağlanır. Yani $y = (\delta_F \circ G)(\boldsymbol{x}) = \delta_F(G(\boldsymbol{x}))$ olur, bu ise $y \in ran(\delta_F)$ olduğunu verir. O halde $ran(\delta_F) = ran(F)$ elde edilir. Böylece F idempotentleştirilebilirdir.

Sonuç 2.42.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu idempotentleştirilebilirdir $\Leftrightarrow$ δ_F kesin artandır ve bir $G: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu $F = \delta_F \circ G$ olacak şekilde mevcuttur.

İspat.

"$\Rightarrow$" F idempotentleştirilebilir olsun. Tanımla δ_F kesin artan ve 2.41. Önerme ile bir $G: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu $F = \delta_F \circ G$ olacak şekilde mevcuttur.

" $\Leftarrow$ " $ran(\delta_F) \subseteq ran(F) = ran(\delta_F \circ G) \subseteq ran(\delta_F)$ olduğundan $ran(\delta_F) = ran(F)$ elde edilir. δ_F 'in kesin artanlığı bilindiğinden F idempotentleştirilebilirdir.

Uyarı 2.43.

(i) 2.41. Önerme ve 2.42. Sonuçta elde edilen G (idempotent) fonksiyonu $G = \delta_F^{-1} \circ F$ ile F kullanılarak tek türlü belirlenir.

(ii) 2.41. Önerme basit olarak $G \coloneqq \delta_F^{-1} \circ F$ yazarak herhangi bir idempotentleştirilebilir F fonksiyonundan bir idempotent G fonksiyonu üretmeyi mümkün kılar. Bu sürece idempotentleme süreci(bkz [5]**)** denir. Örnek olarak $F = \Sigma$ toplam fonksiyonundan ile $G = AM$ aritmetik ortalama üretilir. Gerçekten keyfi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için $G(\boldsymbol{x}) = (\delta_\Sigma^{-1} \circ \Sigma)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_\Sigma^{-1}(x_1 + \cdots + x_n)$ 'dir. $\delta_\Sigma^{-1}(x_1 + \cdots + x_n) = y$ olsun. $\delta_\Sigma(y) = (x_1 + \cdots + x_n) \Rightarrow ny = x_1 + \cdots + x_n$ olur. Böylece $G(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = AM(\boldsymbol{x})$ sağlanır.

(iii) 2.41. Önerme idempotent fonksiyonlara ilişkin tanımlardan idempotentleştirilmiş fonksiyonların kesin alt sınıflarını tam olarak tanımlamayı mümkün kılar. Aslında, (2.6) 'daki G fonksiyonu, F 'ten gelen (simetri, süreklilik v.b.) özelliklere ilave olarak idempotenttir.

2.1.5. Konjanktiflik, Disjanktiflik ve İnternallik

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ve $G: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ iki n-li fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\mathbb{I}^n$ 'de $F \leq G$ ise, G, F 'ten güçlüdür denir. Min ve Mak fonksiyonları düşünülerek tüm birleştirme fonksiyonlarının üç ana sınıfı elde edilebilir: konjanktif fonksiyonlar, disjanktif fonksiyonlar ve internal fonksiyonlar.

Tanım 2.44.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ konjanktiftir denir $:\Leftrightarrow$ $inf\mathbb{I} \leq F \leq Min$ 'dir.

Konjanktif fonksiyonlar, bir mantıksal “ve” operatörü ile ilgililermiş gibi değerleri bir araya getirir. Böylece tüm değerler yüksek olduğunda sonuç değeri yüksektir. Bu sebeple hiçbir yüksek değerin yerini düşük bir değer telafi etmez. $[0,1]^n$ üzerinde tanımlı en yaygın konjanktif fonksiyonlar t-normlardır.

Tanım 2.45.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ disjanktiftir denir $:\Leftrightarrow Mak \leq F \leq sup\mathbb{I}$ dır.

Disjanktif fonksiyonlar “veya” operatörü ile bağlanmış değerleri bir araya getirir öyle ki en az bir giriş değeri yüksek ise sonuç değeri yüksektir. Bu şekilde tanımlanan disjanktif fonksiyonlar, konjanktif fonksiyonların dualidir. $[0,1]^n$ ’de tanımlı en yaygın disjanktif fonksiyonlar t-konormlardır.

Önerme 2.46.

$A: [a,b]^n \to \overline{\mathbb{R}}$ birleştirme fonksiyonu konjanktiftir(sırasıyla disjanktiftir) $\Leftrightarrow$ Her $i \in [n]$ ve her $x \in [a,b]$ için $A(x_{\{i\}}b) \leq x$ ($A(x_{\{i\}}a) \geq x$) ’dir.

İspat.

Konjanktif fonksiyonlar için gösterilsin, disjanktif fonksiyonlar için de benzer şekilde gösterilir.

" $\Rightarrow$ " A konjanktif olsun. Bu takdirde $A\left(x_{\{i\}}b\right) = A(b, \dots, b, x, b, \dots, b) \leq Min(x,b) = x$ elde edilir.

" $\Leftarrow$ " $\boldsymbol{x} \in [a,b]^n$ keyfi alalım. $i \in [n]$ için $x_i = Min(\boldsymbol{x})$ olsun. $inf\mathbb{I} \leq A(x) \leq A\left(x_{i_{\{i\}}}b\right) \leq x_i = Min(\boldsymbol{x})$ olduğundan A konjanktiftir.

Tanım 2.47.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna internal denir$:\Leftrightarrow Min \leq F \leq Mak$ ’dır.

Uyarı 2.48.

Çoklu karar almada, bu fonksiyonlar dengeleyici fonksiyonlar olarak da adlandırılır. Aslında, bu tür fonksiyonlarda bir kriter için bir kötü skor(sırasıyla bir iyi skor) genellikle bir iyi (sırasıyla bir kötü) skor ile telafi edilir. Böylece birleştirme fonksiyonunun değeri orta değerde olur.

Açık olarak tüm $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ internal fonksiyonlar için $ran(F) \subseteq \mathbb{I}$ sağlanır. Üstelik aşağıdaki önerme internallik ile idempotentliğin yakından ilişkili olduğunu gösterir.

Önerme 2.49.

$F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ internal ise idempotenttir. Tersine, $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu azalmayan ve idempotent ise internaldir.

İspat.

F internal olsun. Her $x \in \mathbb{I}$ için $Min(x, \dots, x) = x \leq F(x, \dots, x) \leq x = Mak(x, \dots, x)$ ve böylece $F(x, \dots, x) = x$ olur. O halde F idempotenttir.

Tersine F idempotent ve azalmayan olsun. O halde $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{I}^n$ için $Min(\boldsymbol{x}) = F(Min(\boldsymbol{x}), \dots, Min(\boldsymbol{x})) \leq F(x_1, \dots, x_n) \leq F(Mak(\boldsymbol{x}), \dots, Mak(\boldsymbol{x})) \leq Mak(\boldsymbol{x})$ olduğundan F internaldir.

Önerme 2.50.

$\mathbb{I}$ sınırlı bir reel aralık olsun. İdempotent $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu internaldir $\Leftrightarrow$ Her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n \backslash diag(\mathbb{I}^n)$ için bir $G: \mathbb{I}^n \backslash diag(\mathbb{I}^n) \to [0,1]$ fonksiyonu

$$F(\boldsymbol{x}) = Min(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})\big(Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x})\big) \tag{2.7}$$

olacak şekilde mevcuttur.

İspat.

"$\Rightarrow$" $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ idempotent fonksiyonu internal olsun. $G(\boldsymbol{x}) := \frac{F(x) - Min(x)}{Mak(x) - Min(x)}$ olarak tanımlanırsa her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n \backslash diag(\mathbb{I}^n)$ için $Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x}) \neq 0$ olup F internal olduğundan $Min(\boldsymbol{x}) \leq F(\boldsymbol{x}) \leq Mak(\boldsymbol{x})$ olur. Böylece $0 \leq F(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x}) \leq Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x})$ olur. O halde $0 \leq G(\boldsymbol{x}) = \frac{F(x) - Min(x)}{Mak(x) - Min(x)} \leq 1$ olup aranan şartları sağlayan G fonksiyonu bulunur.

" $\Leftarrow$ " F ’in internal olmadığını varsayalım. Yani bir $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n \backslash diag(\mathbb{I}^n)$ için $F(\boldsymbol{x}) > Mak(\boldsymbol{x})$ veya $F(\boldsymbol{x}) < Min(\boldsymbol{x})$ olsun. İlk durumu inceleyelim: $F(\boldsymbol{x}) = Min(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})\big(Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x})\big) > Mak(\boldsymbol{x}) \Rightarrow G(\boldsymbol{x})\big(Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x})\big) > Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x}) \Rightarrow G(\boldsymbol{x}) > 1$ çelişkisi elde edilir. İkinci durumda da benzer şekilde $F(\boldsymbol{x}) = Min(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})\big(Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x})\big) < Min(\boldsymbol{x})$ ise $G(\boldsymbol{x})\big(Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x})\big) < 0$ ve $Mak(\boldsymbol{x}) - Min(\boldsymbol{x}) \geq 0$ olduğundan $G(\boldsymbol{x}) < 0$ çelişkisi elde edilir. O halde F internal dir.

Konjanktiflik ve disjanktiflik tanımı geliştirilerek k-konjanktiflik ve k-disjanktiflik tanımları [24] verilir:

Tanım 2.51.

$k \in [n]$ ve $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin

(i) $inf\mathbb{I} \leq F \leq OS_k$ ise F ’e k-konjanktif denir.

(ii) $OS_{n-k+1} \leq F \leq sup\mathbb{I}$ ise F ’e k-disjanktif denir.

Bu tanıma göre, bir fonksiyon konjanktiftir ⇔ 1-konjanktiftir. Benzer şekilde disjanktiftir ⇔ 1-disjanktiftir. Bir fonksiyon internaldir ⇔ Bu fonksiyon n-konjanktif ve n-disjanktiftir.

Örnek

a) 3-lü $F(x_1, x_2, x_3) = Min(x_1, x_2)$ fonksiyonu 2-konjanktif fakat konjanktif değildir. Gösterilmesi gereken $inf\mathbb{I} \leq F \leq OS_2$ olduğudur. $inf\mathbb{I} \leq F$ olduğu açık olduğundan $F \leq OS_2$ olduğunu göstermek amacıyla mevcut tüm durumlar ele alınıp incelenirse:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ iken $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \leq x_2 = OS_2(x_1, x_2, x_3)$

(ii) $x_2 \leq x_1 \leq x_3$ iken $F(x_1, x_2, x_3) = x_2 \leq x_1 = OS_2(x_1, x_2, x_3)$

(iii) $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ iken $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \leq x_3 = OS_2(x_1, x_2, x_3)$

(iv) $x_2 \leq x_3 \leq x_1$ iken $F(x_1, x_2, x_3) = x_2 \leq x_3 = OS_2(x_1, x_2, x_3)$

(v) $x_3 \leq x_1 \leq x_2$ iken $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \leq x_1 = OS_2(x_1, x_2, x_3)$

(vi) $x_3 \leq x_2 \leq x_1$ iken $F(x_1, x_2, x_3) = x_2 \leq x_2 = OS_2(x_1, x_2, x_3)$

olduğundan F, 2-konjanktiftir. Fakat F konjanktif değildir. Gerçekten $x_3 < x_1 < x_2$ sırasına sahip olan (x_1, x_2, x_3) ler için $F(x_1, x_2, x_3) = Min(x_1, x_2) = x_1 \nleq x_3 = Min(x_1, x_2, x_3)$ dir.

b) $OWA_W = \sum_{i=1}^{n} w_i \, OS_i$, sıralı ağırlıklı ortalama ele alınsın. OWA_W k-konjanktif(k-disjanktif) ⇔ Her $i > k$ (Her $i < n - k + 1$) için $w_i = 0$ dır.

" ⇒ " OWA_W k-konjanktif olsun, yani her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için $inf\mathbb{I} \leq OWA_W(\boldsymbol{x}) \leq OS_k(\boldsymbol{x})$ sağlansın. Böylece $a < b,\ a, b \in \mathbb{I},\ \boldsymbol{x}' = (a, a, \ldots, \underbrace{a}_{k.bileşen}, b, b, \ldots, b) \in \mathbb{I}^n$ için de $OWA_W(\boldsymbol{x}') \leq OS_k(\boldsymbol{x}') = a$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu eşitsizlik yardımıyla:

$$w_1 a + \cdots + w_k a + w_{k+1} b + \cdots + w_n b \leq a$$

$$(w_1 + \cdots + w_k) a + (w_{k+1} + \cdots + w_n) b \leq a$$

elde edilir. OWA_W fonksiyonunun tanımı gereği $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ olduğundan:

$$[1 - (w_{k+1} + \cdots + w_n)] a + (w_{k+1} + \cdots + w_n) b \leq a$$

$$a - (w_{k+1} + \cdots + w_n) a + (w_{k+1} + \cdots + w_n) b \leq a$$

$$(w_{k+1} + \cdots + w_n) b \leq (w_{k+1} + \cdots + w_n) a$$

elde edilir. $w_{k+1} + \cdots + w_n \geq 0$ dır. Bu durumda $w_{k+1} + \cdots + w_n > 0$ olursa üstteki eşitsizlikten $b \leq a$ çelişkisini verir. O halde $w_{k+1} + \cdots + w_n = 0$ elde edilir. Ayrıca her i için $w_i \geq 0$ olduğundan her $i > k$ için $w_i = 0$ bulunur.

" $\Leftarrow$ " Her $i > k$ için $w_i = 0$ olsun. Gösterilmesi gereken $inf\mathbb{I} \leq OWA_W \leq OS_k$ olduğudur. $OWA_W : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olduğundan $inf\mathbb{I} \leq OWA_W$ olduğu açıktır. Böylece $OWA_W \leq OS_k$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabulümüzü kullanarak $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ keyfi elemanı için:

$$OWA_W(\boldsymbol{x}) = x_{(1)}w_1 + \cdots + x_{(k)}w_k + x_{(k+1)}.0 + \cdots + x_{(n)}.0$$

$$= x_{(1)}w_1 + \cdots + x_{(k)}w_k \leq x_{(k)}w_1 + \cdots + x_{(k)}w_k$$

$$OWA_W(\boldsymbol{x}) \leq x_{(k)}(w_1 + \cdots + w_k)$$

bulunur. Her $i > k$ için $w_i = 0$ olduğundan $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$ olur. Buradan:

$$OWA_W(\boldsymbol{x}) \leq x_{(k)} = OS_k(\boldsymbol{x})$$

elde edilmiş olur. O halde her $i > k$ için $w_i = 0$ iken $inf\mathbb{I} \leq OWA_W \leq OS_k$ olduğundan OWA_W k-konjanktiftir.

Bazı F k-konjanktif fonksiyonları için $x_{(k+1)}, x_{(k+2)}, \ldots, x_{(n)}$ ’in yerine $x_{(k)}$ ’ya eşit veya daha büyük değerler alınırsa sonuç değişmez. Benzer şekilde, bazı F k-disjanktif fonksiyonları için $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n-k)}$ ’nın yerine $x_{(n-k+1)}$ ’e eşit veya daha küçük değerler alınırsa sonuç değişmez.

2.2. Grup Tabanlı Özellikler

Bu bölümde birleştirme fonksiyonlarının grup tabanlı özellikleriyle ilgilenilecektir. Bileşenlerin ayrık alt gruplara ayırabildiği, her bir alt grubun birleştirme fonksiyonu altındaki değerinin bulunabildiği ve bu değerleri bir araya getirdiğimizde genel değerin elde edebileceği kabul edilecektir. Güçlü bir özellik olarak asosyatiflik sunulabilir. Zayıf olanlara örnek olarak parçalanabilirlik, otodağılabilirlik ve bisimetri verilebilir.

2.2.1. Asosyatiflik

$*$ ikili işleminin asosyatiflik özelliği $(x * y) * z = x * (y * z)$ anlamına gelir ve karışıklığa mahal vermediği durumlarda $x * y * z$ yazılabilmesini mümkün kılar. Eğer bir ikili işlem $f(a, b) = a * b$ gibi bir iki değerli fonksiyon olarak alınırsa, asosyatiflik özelliği $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$ olarak anlaşılır ve bu eşitlik genel olarak asosyatif fonksiyon eşitliği olarak bilinir.

Tanım 2.52.

$F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ fonksiyonu asosyatiftir $:\Leftrightarrow$ Her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^3$ için

$$F(F(x_1, x_2), x_3) = F\big(x_1, F(x_2, x_3)\big) \tag{2.8}$$

dir.

Temelde asosyatiflik özelliği yalnızca iki bileşenli birleştirme fonksiyonları ile ilgilidir. Fakat aşağıdaki tanımda ifade edildiği gibi asosyatiflik özelliği sonlu n elemana genişletilebilir.

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ve $\boldsymbol{x'} = (x'_1, \dots, x'_m)$ iki vektörü için $F(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m)$ 'yi ifade ederken $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'})$ notasyonunun kullanıldığını hatırlayalım. Eğer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^0$ bir boş vektör ise basit olarak bu vektör fonksiyondan düşürülür. Örneğin, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^0$ ise $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = F(\boldsymbol{x'})$ ve $F\big(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x'})\big) = F(F(\boldsymbol{x'}))$ 'dir.

Tanım 2.53.

$F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu asosyatiftir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = F\big(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x'})\big) \tag{2.9}$$

dir.

Önerme 2.54.

$F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu asosyatiftir $\Leftrightarrow$ Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x'}), \boldsymbol{x''}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''})$ 'dir.

İspat.

“$\Rightarrow$"

$F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu asosyatif olsun. Asosyatifliğin tanımından her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ olduğu biliniyor. Her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x'}), \boldsymbol{x''}) = F\Big(F\big(\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x'})\big), F(\boldsymbol{x''})\Big) = F\Big(F\Big(F(\boldsymbol{x}), F\big(F(\boldsymbol{x'})\big)\Big), F(\boldsymbol{x''})\Big)$$

$$= F\big(F(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x'})), F(\boldsymbol{x''})\big) = F\big(F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}), F(\boldsymbol{x''})\big) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''}) \text{ olur.}$$

"$\Leftarrow$"

Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x'}), \boldsymbol{x''}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x''})$ olsun. $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^{**} \in \mathbb{I}^0$ boş vektörler olmak üzere her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = F(\boldsymbol{x}^*, F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x'}) = F(F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x'}) = F(F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x'}, \boldsymbol{x}^{**}) =$$

$$F(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}^{**}) = F(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x}'))$$

olduğundan asosyatiftir.

Asosyatiflik özelliği en az üç elemanın birleştirilmesinde parantezleri kaldırmamızı mümkün kılan iyi bilinen bir özelliktir. Asosyatiflik varsayımı altında karışıklığa yol açmayacak şekilde n eleman birleştirilmesinden $n+1$ elemanın birleşletirilmesini mümkün kılan bir yol vardır. Bu da her genişletilmiş asosyatif F fonksiyonunun aslında $F^{(2)}$ ikili fonksiyonu tarafından tam olarak belirlendiğini söyler. Gerçekten asosyatiflik ile açık olarak

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(F(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$$

dir.

Pratik hesaplamalar için birleştirilecek tüm giriş değerlerini bilmeden önce birleştirme sürecine başlanabilir. Eklenecek giriş değerleri mevcut birleştirilmiş çıkış değerleri ile basitçe birleştirilebilir. Asosyatif fonksiyonlara örnek olarak $Min, Mak, \Sigma, \Pi, P_F, P_L$ fonksiyonları verilebilir. Asosyatif olmayanlara örnek olarak AM, GM gibi fonksiyonlar verilebilir.

Asosyatiflik ve idempotentlik birleşme sürecindeki tekrar eden bileşenlerin etkisini iptal eder. Gerçekten asosyatiflik ve idempotentlik altında açık olarak her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$F(m.x, n.y) = F\big(F(m.x), F(n.y)\big) = F(x, y)$$

bulunur. Örnek olarak

$$F(x, y, \dots, y) = F(x, y)$$

elde edilir. Bu özellik birleştirme sürecinde tekrarlayan bileşenlerin etkili olamayacağını söyler.

Tanım 2.55.

Bir $F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ ikili fonksiyonunun $F_*: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ geri genişlemesi ve $F^*: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ ileri genişlemesi ardışık olarak sırasıyla

$$F_*^{(1)} \coloneqq F^{*(1)} \coloneqq id$$

$$F_*^{(2)} \coloneqq F^{*(2)} \coloneqq F$$

ve, her $n > 2$ için:

$$F_*^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \coloneqq F(x_1, F_*^{(n-1)}(x_2, \dots, x_n))$$

$$F^{*(n)}(x_1, \dots, x_n) \coloneqq F\big(F^{*(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n\big)$$

ile tanımlanır.

Uyarı 2.56.

Bir $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ genişletilmiş fonksiyon asosyatiftir $\Leftrightarrow$ $F^{(2)}$ nin geri ve ileri genişlemeleri F ile çakışır.

2.2.2. Parçalanabilirlik ve Güçlü Parçalanabilirlik

Bir genişletilmiş fonksiyon olarak AM 'nin doğal olarak (2.8) asosyatiflik eşitliğini sağlamadığını göstermek kolaydır. Aritmetik ortalama veya geometrik ortalama gibi diğer ortalama fonksiyonlarının sağlayacağı bir fonksiyonel eşitlik olup olmadığı sorusu ilginç gelebilir. Bu durumda ortalama fonksiyonlarının asosyatifliği de denilen bir eşitlik aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

$n \geq 1$ olmak üzere tüm $0 \leq k \leq n$ tamsayıları için

$$F(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = F(k.F(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

dir.

Eşdeğer olarak, her $k \in \mathbb{N}_0$, her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k$ ve her $\boldsymbol{x'} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'}) = F(k.F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x'})$$

dir.

2.2.2.1. Parçalanabilirlik

İlk önce Bemporad tarafından [25] 'de aritmetik ortalamanın bir karakterizasyonunda tanıtılan ortalamaların asosyatifliği, ortalama değer denilen değerleri karakterize etmek için Kolmogroff[26] ve Nagumo[27] tarafından kullanıldı. Son zamanlarda, Marichal ve Roubens[28] klasik asosyatiflik ile karışmasın diye bu özelliğe asosyatiflik yerine "parçanabilirlik" denilmesini önerdi. Doğal olarak yinelemeli asosyatiflik veya ağırlıklı asosyatiflik gibi alternatif isimlerde göz önüne alınabilir. Simetri olmadığı zaman, ilk bileşene ayrıcalık tanımamak için bu özelliği yeniden yazmak gerekir. Böylece aşağıdaki tanım göz önüne alınır:

Tanım 2.57.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ parçalanabilirdir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $k, k' \in \mathbb{N}_0$, her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k$ ve $\boldsymbol{x'} \in \mathbb{I}^{k'}$ için

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = F\left(k.F(\boldsymbol{x}), k'F(\boldsymbol{x}')\right) \tag{2.10}$$

sağlanır.

(2.10) ’da $k = 0$ veya $k' = 0$ alınmasıyla her parçalanabilir fonksiyonun resim-idempotent olduğu anlaşılır. Üstelik aşağıda verilen önerme ile parçalanabilirlik ardışık indisli bileşenlerin herhangi alt kümesinin her bir elemanı tüm birleştirme işlemini değiştirmeksizin onların kısmi birleştirilmesiyle yer değiştirilebileceği anlamına gelir.

Önerme 2.58.

F: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ parçalanabilirdir $\Leftrightarrow$ Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $k' \in \mathbb{N}_0$ ve her $\boldsymbol{x'} \in \mathbb{I}^{k'}$ ve her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x''} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}, k'.F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}'') = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

" $\Rightarrow$ "

Her $k, k', k'' \in \mathbb{N}_0$ ve her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^{k'}, \boldsymbol{x}'' \in \mathbb{I}^{k''}$ için

$$F(\boldsymbol{x}, k'.F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}'')$$

$$= F\left((k+k')F\left(\boldsymbol{x}, k'.F(\boldsymbol{x}')\right), k''.F(\boldsymbol{x}'')\right) \qquad \text{(parçalanabilirlik ile)}$$

$$= F\left((k+k').F\left(k.F(\boldsymbol{x}), k'.F\left(k'.F(\boldsymbol{x}')\right)\right), k''.F(\boldsymbol{x}'')\right) \qquad \text{(parçalanabilirlik ile)}$$

$$= F\left((k+k').F\left(k.F(\boldsymbol{x}), k'.F(\boldsymbol{x}')\right), k''.F(\boldsymbol{x}'')\right) \qquad \text{(resim} - \text{idempotentlik ile)}$$

$$= F\left((k+k').F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'), k''.F(\boldsymbol{x}'')\right) \qquad \text{(parçalanabilirlik ile)}$$

$$= F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')$$

elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Her $k' \in \mathbb{N}_0$, her $\boldsymbol{x'} \in \mathbb{I}^{k'}$ve her $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x''} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}, k'.F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{x}'') = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')$ sağlansın. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k$, $\boldsymbol{x'} \in \mathbb{I}^{k'}$keyfi vektörleri ve $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{I}^0$ boş vektörleri için

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = F(\boldsymbol{y}, k.F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}') = F(k.F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}') = F(k.F(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}', \boldsymbol{z})$$

$$= F(k.F(\boldsymbol{x}), k'.F(\boldsymbol{x}'), \boldsymbol{z}) = F\left(k.F(\boldsymbol{x}), k'.F(\boldsymbol{x}')\right)$$

elde edilir.

Parçalanabilir fonksiyonlara örnek olarak $Min, Mak, AM, GM, P_F, P_L$ verilebilir. Σ, Π parçalanabilir olmayan fonksiyonlara örnek olarak verilebilir.

Aşağıdaki önerme (bkz [29]) asosyatif bir fonksiyonun parçalanabilir olması için bir yeter şart verir:

Önerme 2.59.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ resim-idempotent ve asosyatif ise parçalanabilirdir.

İspat.

$k, k' \in \mathbb{N}_0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^{k'}$ keyfi olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} F\big(k.F(\boldsymbol{x}), k'.F(\boldsymbol{x}')\big) &= F\Big(F\big(k.F(\boldsymbol{x})\big), F\big(k'F(\boldsymbol{x}')\big)\Big) && \text{(asosyatiflik ile)} \\ &= F\big(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x}')\big) && \text{(resim-idempotentlik ile)} \\ &= F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') && \text{(asosyatiflik ile)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Uyarı 2.60.

Asosyatifliğin tersine parçalanabilirlik n eleman ile $n+1$ elemanın birleştirme fonksiyonu altındaki değeri arasındaki ilişkiyi belirlemez. Örnek olarak, $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ parçalanabilir bir fonksiyon, $q \geq 2$ tam sayı, $c \in \mathbb{R}$ bir sabit ve $G\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu

$$G^{(n)} := \begin{cases} F^{(n)} & \text{eğer } n \leq q \\ K_c^{(n)} & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ile tanımlanırsa $G^{(n)}$ ’de parçalanabilirdir, burada $K_c^{(n)}$ $x \to c$ olan n-li sabit fonksiyondur.

Gerçekten $q = 3$ olması durumunda $G^{(3)} = F^{(3)}$ ve $G^{(4)} = K_c^{(4)}$ olur ki $n = 3$ ve $n + 1 = 4$ için bu fonksiyonların aralarında ilişki yoktur. $G^{(n)}$ 'in parçalanabilir olduğunu gösterelim:

(i) $n \leq q$ olsun. $G^{(n)} = F^{(n)}$ olup, F parçalanabilir olduğundan G parçalanabilirdir.

(ii) $n > q$ olsun. $k + k' = n$ olacak şekilde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^{k'}$ keyfi elemanlarını alalım.

$$G^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = K_c^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = c,$$

$$G^{(n)}\Big(k.G^{(k)}(\boldsymbol{x}), k'.G^{(k')}(\boldsymbol{x}')\Big) = K_c^{(n)}\Big(k.G^{(k)}(\boldsymbol{x}), k'.G^{(k')}(\boldsymbol{x}')\Big) = c$$

olup

$$G^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G^{(n)}\Big(k.G^{(k)}(\boldsymbol{x}), k'.G^{(k')}(\boldsymbol{x}')\Big)$$

eşitliği sağlandığından parçalanabilirdir.

2.2.2.2. Güçlü Parçalanabilirlik

Asosyatiflik özelliği gibi parçalanabilirlik de yalnızca ardışık indisli bileşenlerin birleştirilmesini gerektirir. Şimdi bileşenlerin herhangi alt kümesinin birleştirildiği daha genel durum göz önüne alınabilir. Örnek olarak aşağıdaki özelliğin sağlanmasını istenebilir.

$$F(x_1, x_2, x_3) = F\big(F(x_1, x_3), x_2, F(x_1, x_3)\big) \tag{2.11}$$

Parçalanabilirliğin daha güçlü formu olan güçlü parçalanabilirlik aşağıdaki şekliyle Marichal[29] tarafından önerilmiştir ve aşağıdaki gibi formüle edilir:

Tanım 2.61.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ güçlü parçalanabilirdir :⇔ Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq [n]$ ve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left(\sum_{i\in K} F(\,\boldsymbol{x}|_K)1_{\{i\}} + \sum_{j\in K^c} F(\,\boldsymbol{x}|_{K^c})1_{\{j\}}\right) \tag{2.12}$$

dir.

Örnek olarak, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ için $K = \{1\}$ için güçlü parçalanabilirliği inceleyelim:

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3) &= F\left(\sum_{i\in\{1\}} F(\,\boldsymbol{x}|_{\{1\}})\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j\in\{2,3\}} F(\,\boldsymbol{x}|_{\{2,3\}})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)\\
&= F\big(F(\boldsymbol{x}|_{\{1\}})\mathbf{1}_{\{1\}} + F(\boldsymbol{x}|_{\{2,3\}})\mathbf{1}_{\{2\}} + F(\boldsymbol{x}|_{\{2,3\}})\mathbf{1}_{\{3\}}\big)\\
&= F\big((F(x_1), 0,0) + (0, F(x_2, x_3), 0) + (0,0, F(x_2, x_3))\big)\\
&= F\big(F(x_1), F(x_2, x_3), F(x_2, x_3)\big)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım ile güçlü parçalanabilirlik parçalanabilirliği ve böylece resim-idempotentliği gerektirir. Gerçekten $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^{k'}$keyfi alınsın .$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ olsun. $K = [k]$ için:

$$F(\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = F\left(\sum_{i\in K} F(\,\boldsymbol{y}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j\in K^c} F(\,\boldsymbol{y}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)$$

$$= F\Big((F(\boldsymbol{x}), (k + k' - 1).0) + (0, F(\boldsymbol{x}), (k + k' - 2).0) + \cdots + \big((k - 1).0, F(\boldsymbol{x}), k'.0\big) + (k.0, F(\boldsymbol{x}'), (k' - 1).0) + \big((k + 1).0, F(\boldsymbol{x}'), (k' - 2).0\big) + \cdots + \big((k + k' - 1).0, F(\boldsymbol{x}')\big)\Big)$$

$$= F\big(k.F(\boldsymbol{x}), k'.F(\boldsymbol{x}')\big)$$

olduğundan parçalanabilirdir. Parçalanabilirlik var ise resim-idempotentliğin var olduğu zaten biliniyor.

Üstelik, simetri şartı altında parçalanabilirlik ve güçlü parçalanabilirlik birbirine denktir. Gerçekten F simetrik ve parçalanabilir olsun. $\boldsymbol{y} \in \mathbb{I}^n$ keyfi alınsın.

$$F(\boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{y}|_K, \boldsymbol{y}|_{K^c}) = F\left(\underbrace{F(\boldsymbol{y}|_K), \dots, F(\boldsymbol{y}|_K)}_{|K| tane}, \underbrace{F(\boldsymbol{y}|_{K^c}), \dots, F(\boldsymbol{y}|_{K^c})}_{|K^c| tane}\right)$$

$$= F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{y}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{y}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)$$

elde edilir. Böylece F güçlü parçalanabilirdir.

Parçalanabilirlikte olduğu gibi, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ 'de bileşenlerin (ardışık olması gerekmez) her alt kümesinin her bir elemanı tüm birleştirilmiş değerde değişiklik olmaksızın, bu alt kümenin kısmen birleştirilmiş değeri ile yer değişikliği yapılabilir.

Önerme 2.62.

$F: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ güçlü parçalanabilirdir $\Leftrightarrow$Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq [n]$ ve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} x_j \mathbf{1}_{\{j\}}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

" $\Rightarrow$ " $F: \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ güçlü parçalanabilir olsun. O halde tüm $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq [n]$ ve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{x}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)$$

dir. Güçlü parçalanabilirlik tanımından her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ dir. O halde herhangi $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq [n]$ ve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} x_j \mathbf{1}_{\{j\}}\right)$$

olduğu gösterilmelidir. $\boldsymbol{y} = \sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} x_j\, \mathbf{1}_{\{j\}}$ için $F(\boldsymbol{y})$ üzerinde $n \in \mathbb{N}$ $K \subseteq [n]$ ve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için güçlü parçalanabilirlik tanımını uygulandığında, her güçlü parçalanabilir fonksiyonun resim-idempotent olduğu da kullanılarak $F(\boldsymbol{y}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{x}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)$ elde edilir. $F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{x}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right) = F(\boldsymbol{x})$ olduğu parçalanabilir olduğundan biliniyor. O halde

$$F(\boldsymbol{y}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{x}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right) = F(\boldsymbol{x})$$

elde edilir.

" $\Leftarrow$ " Tersine her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve tüm $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq [n]$ ve $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} x_j\, \mathbf{1}_{\{j\}}\right) \tag{2.13}$$

olsun.

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{x}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)$$

eşitliği gösterilmelidir. $\boldsymbol{y} = \sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} x_j\, \mathbf{1}_{\{j\}}$ için (2.13) kabulü $L = K^C \subseteq [n]$ olacak şekilde L kümesi için uygulanırsa $F(\boldsymbol{y}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{x}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)$ olduğu elde edilir. (2.13) kullanılarak

$$F(\boldsymbol{x}) = F\left(\sum_{i \in K} F(\boldsymbol{x}|_K)\mathbf{1}_{\{i\}} + \sum_{j \in K^c} F(\boldsymbol{x}|_{K^c})\mathbf{1}_{\{j\}}\right)$$

eşitliği elde edilir. O halde F güçlü parçalanabilirdir.

Güçlü parçalanabilir fonksiyonlara örnek olarak Min, Max, AM, GM, P_F ve P_L verilebilir. Her parçalanabilir fonksiyonun güçlü parçalanabilir olmadığı aşağıdaki örnekten[29] elde edilir.

Örnek 2.63.

Genişletilmiş ağırlıklı ortalama şu şekilde tanımlanır:

$$A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}}{2^n - 1} x_i$$

Bu fonksiyon parçalanabilirdir fakat güçlü parçalanabilir değildir. Gerçekten her $k, k' \in \mathbb{N}_0$ ve Her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^k$ ve her $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{I}^{k'}$ için:

$$\begin{aligned}
A\big(k.A(\boldsymbol{x}), k'.A(\boldsymbol{x}')\big) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{2^{i-1}}{2^{k+k'}-1} A(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=k+1}^{k+k'} \frac{2^{i-1}}{2^{k+k'}-1} A(\boldsymbol{x}') \\
&= \frac{2^k - 1}{2^{k+k'}-1} A(\boldsymbol{x}) + \frac{2^k\big(2^{k'}-1\big)}{2^{k+k'}-1} A(\boldsymbol{x}') \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{2^{i-1}}{2^{k+k'}-1} x_i + \sum_{i=1}^{k'} \frac{2^{k+i-1}}{2^{k+k'}-1} x_i' = A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')
\end{aligned}$$

sağlandığından $A^{(n)}$ parçalanabilirdir. Fakat $A^{(n)}$ güçlü parçalanabilir değildir. Çünkü:

$$A(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{4}{7}x_3$$

ve

$$A\big(A(x_1, x_3), x_2, A(x_1, x_3)\big) = \frac{5}{21}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{10}{21}x_3$$

olur bu ise (2.11) ile çelişir.

Birçok kaynakta [30, 31, 32] parçalanabilirlik ve güçlü parçalanabilirlik arasındaki yakın ilişki bulunabilir. Birçoğu Nagumo[27] dan esinlenilmiş olan lemmalar aşağıda sunulmuştur:

Lemma 2.64.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ güçlü parçalanabilir ve idempotent olsun. Bu takdirde $k, n, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ ve $\boldsymbol{x}^{(i)} \in \mathbb{I}^{p_i}$, $i = 1, \dots, n$ için

$$F\big(k.x^{(1)}, \dots, k.x^{(n)}\big) = F\big(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\big)$$

elde edilir.

İspat.

Basit olarak,

$$F\big(k.x^{(1)}, \dots, k.x^{(n)}\big)$$

$$= F\Big((k.p_1 + \cdots + k.p_n).F\big(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\big)\Big) \qquad \text{(güçlü parçalanabilirlik ile)}$$

$$= F\big(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\big) \qquad \text{(idempotentlik ile)}$$

elde edilir.

Lemma 2.65.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ güçlü parçalanabilir ve idempotent olsun. Bu durumda $n, p \in \mathbb{N}$ ve $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{I}^p$ için,

$$F\big(x^{(1)},\dots,x^{(n)}\big)=F\big(F(x^{(1)}),\dots,F(x^{(n)})\big)$$

elde edilir. Özel olarak F güçlü idempotenttir.

İspat.

$$F\big(x^{(1)},\dots,x^{(n)}\big)=F\Big(p.F\big(x^{(1)}\big),\dots,p.F\big(x^{(n)}\big)\Big) \qquad \text{(güçlü parçalanabilirlik ile)}$$

$$=F\big(F(x^{(1)}),\dots,F(x^{(n)})\big) \qquad \text{(2.64. Lemma ile)}$$

elde edilir.

Lemma 2.66.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ güçlü parçalanabilir ve idempotent olsun. Bu durumda $n\in\mathbb{N}$ ve her $\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^n$ için:

$$F(x_1,\dots,x_n)=F(x'_n,\dots,x'_1)$$

elde edilir. Burada her $i=1,2,\dots,n$ için $x'_i \coloneqq F(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ dir.

İspat.

$$F(x_1,\dots,x_n)=F((n-1).x_1,\dots,(n-1).x_n) \qquad \text{(2.64 Lemma ile)}$$

$$=F\big((n-1)(x'_n,\dots,x'_1)\big) \qquad \text{(güçlü parçalanabilirlik ile)}$$

$$=F(x'_n,\dots,x'_1) \qquad \text{(güçlü idempotentlik ile)}$$

elde edilir.

Uyarı 2.67.

İdempotentlik altında güçlü parçalanabilirliğin tanımı her bir x_i elemanı ile $\boldsymbol{x}^{(i)}\in\mathbb{I}^p$ p-sıralı elemanı yer değiştirilerek verilebilir. Örneğin, (2.11) ifadesinin eşiti $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)}\in\mathbb{I}^p$ p-lileri ile şu şekilde yazılabilir:

$$F\big(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)}\big)$$

$$=F\big(p.F(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(3)}),p.F(\boldsymbol{x}^{(2)}),p.F(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(3)})\big) \qquad \text{(güçlü parçalanabilirlik ile)}$$

$$=F\big(F(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(3)}),F(\boldsymbol{x}^{(2)}),F(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(3)})\big) \qquad \text{(2.64 Lemma ile)}$$

elde ederiz.

2.2.3. Otodağılabilirlik

Bu bölümde self-dağılmalılık da denilen otodağılabilirlik özelliği incelenecektir. Otodağılabilirlik özelliği orjinalde iki bileşenli fonksiyonlar için tanımlanır fakat bu tanım kolayca n bileşenli fonksiyonlara genişletilebilir.

Tanım 2.68.

$F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ fonksiyonu otodağılabilirdir $:\Leftrightarrow$ Her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^3$ için

$$F\big(x_1, F(x_2, x_3)\big) = F\big(F(x_1, x_2), F(x_1, x_3)\big) \tag{2.14}$$

$$F(F(x_1, x_2), x_3) = F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_3)\big) \tag{2.15}$$

dir.

2.2.4. Bisimetri

Bu bölümde mediyalite de denilen bisimetri özelliği incelenecektir.

Tanım 2.69.

$F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ fonksiyonu bisimetriktir $:\Leftrightarrow$ Her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^4$ için

$$F\big(F(x_1, x_2), F(x_3, x_4)\big) = F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_4)\big)$$

sağlanır.

Bu tanımın bir sonucu olarak $F: \mathbb{I}^2 \to \mathbb{I}$ idempotent ve bisimetrik ise otodağılabilirdir.

Gerçekten, her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^4$ için $F\big(F(x_1, x_2), F(x_3, x_4)\big) = F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_4)\big)$ olduğu biliniyor. O halde $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, x_3, x_3) \in \mathbb{I}^4$ için

$$F\big(F(x_1, x_2), F(x_3, x_3)\big) = F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_3)\big)$$

$$\Rightarrow F(F(x_1, x_2), x_3) = F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_3)\big)$$

elde edilir. Bu ise (2.15) 'i verir.

$\boldsymbol{x}'' = (x_1, x_2, x_1, x_3) \in \mathbb{I}^4$ için

$$F\big(F(x_1, x_1), F(x_2, x_3)\big) = F\big(F(x_1, x_2), F(x_1, x_3)\big)$$

$$\Rightarrow F\big(x_1, F(x_2, x_3)\big) = F\big(F(x_1, x_2), F(x_1, x_3)\big)$$

elde ederiz. Bu da (2.14) 'ü verir. (2.14) ve (2.15) 'ten otodağılabilirdir.

n bileşen için bisimetri özelliği aşağıdaki şekli alır:

Tanım 2.70.

Bir $F: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu bisimetriktir $:\Leftrightarrow$ Tüm

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{I}^{n \times n}$$

kare matrisleri için,

$$F\big(F(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F(x_{n1},\dots,x_{nn})\big)$$

$$= F\big(F(x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,F(x_{1n},\dots,x_{nn})\big) \qquad (2.16)$$

eşitliği sağlanır.

Bisimetri, her kare matrisin tüm elemanlarının birleştirme şartının öncelikle satırlar üzerinde, sonra sütunlar üzerinde veya tersi şekilde gerçekleşebileceğini ifade eder. Bununla birlikte sadece kare matrisler için sağlandığından bu özellik birleştirme fonksiyonları açısından iyi bir yoruma sahipmiş gibi görünmez ve teorik olarak kullanışsız kalır. Bundan dolayı bu özellik genişletilmiş fonksiyonlar için aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.71.

Bir $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonuna güçlü bisimetriktir denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in \mathbb{I}$ için $F(x) = x$ ve her $n, p \in \mathbb{N}$ ve tüm

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix} \in \mathbb{I}^{p\times n}$$

matrisler için

$$F\Big(F(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F\big(x_{p1},\dots,x_{pn}\big)\Big) = F\Big(F\big(x_{11},\dots,x_{p1}\big),\dots,F\big(x_{1n},\dots,x_{pn}\big)\Big)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.72.

Güçlü bisimetrik fonksiyonlara örnek olarak AM, GM, Min, Mak, Π ve Σ verilebilir. Bisimetrik fakat güçlü bisimetrik olmayana örnek olarak

$$A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} Min(x) & , n\ tek \\ Mak(x) & , n\ çift \end{cases}$$

fonksiyonu verilebilir.

Açık olarak $F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ genişletilmiş güçlü bisimetrik fonksiyonu için $F^{(n)}$ n-li fonksiyon bisimetriktir. Üstelik aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 2.73.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ güçlü parçalanabilir ve idempotent olsun. Bu durumda güçlü bisimetriktir. Özel olarak $F^{(2)}$ bisimetriktir.

İspat.

Daha iyi anlaşılması için öncelikle $F^{(2)}$ nin bisimetrik olduğu gösterilsin.

$$F\big(F(x_1,x_2),F(x_3,x_4)\big)$$

$$= F(x_1,x_2,x_3,x_4) \qquad \text{(2.65 Lemma ile)}$$

$= F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_4), F(x_1, x_3), F(x_2, x_4)\big)$ (güçlü parçalanabilirlik ile)

$= F\big(F(x_1, x_3), F(x_2, x_4)\big)$ (güçlü idempotentlik ile)

F ’in güçlü bisimetrik olduğunu göstermek amacıyla aynı ifadeler kullanılabilir.

$F\Big(F(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F\big(x_{p1}, \dots, x_{pn}\big)\Big)$

$= F(x_{11}, \dots, x_{1n}; \dots; x_{p1}, \dots, x_{pn})$ (2.65 Lemma ile)

$= F\Big(p.\Big(F\big(x_{11}, \dots, x_{p1}\big), \dots, F\big(x_{1n}, \dots, x_{pn}\big)\Big)\Big)$ (güçlü parçalanabilirlik ile)

$= F\Big(F\big(x_{11}, \dots, x_{p1}\big), \dots, F\big(x_{1n}, \dots, x_{pn}\big)\Big)$ (güçlü idempotentlik ile)

2.3. İleri Özellikler

Bu bölümde n-li fonksiyonların ve genişletilmiş birleştirme fonksiyonlarının önceki bölümlerde sunulmayan bazı özellikleri tanıtılacaktır.

2.3.1. Birim ve Sıfırlayan Elemanlar

Birim eleman özelliği ikili işlemlerde iyi bilinen bir özelliktir. Bir X kümesi üzerinde tanımlı $*$ işlemi ele alınsın. Her $x \in X$ için $x * e = e * x = x$ sağlanıyorsa, $e \in X$’e, $*$ işleminin birim elemanı denir. Açıkça her $*$ ikili işleminin en fazla bir tane birim elemanı vardır. Tanımdan da anlaşılacağı üzere bir ikili işlemde birim elemanın etkisi onun ihmal edilmesi şeklindedir. Bu fikir aşağıdaki genel tanımın alt yapısını oluşturur.

Tanım 2.74.

$F\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş fonksiyon olsun. Bir $e \in \mathbb{I}$ ’ya F ’in genişletilmiş birim elemanı denir :⇔ Her $i \in [n]$ ve $x_i = e$ olan her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için

$F(x_1, \dots, x_{i-1}, e, x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

sağlanır.

Yani birim eleman giriş değerlerinden çıkarıldığında birleştirilmiş değere etki etmez. Çoklu karar almada, bazı kriterler için genişletilmiş birim eleman atamak, diğer kalan kriterlerin belirleyici olduğu anlamına gelir.

n-li fonksiyonlar için alternatif yaklaşım şu tanımla verilir:

Tanım 2.75.

Bir $e \in \mathbb{I}$ elemanına $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun bir birim elemanı denir $:\Leftrightarrow$ Her $i \in [n]$ ve her $x \in \mathbb{I}$ için $F\left(x_{\{i\}}e\right) = x$ sağlanır.

Açık olarak $e \in \mathbb{I}$, $F^{(1)}(x) = x$ olan bir genişletilmiş $F: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun birim elemanı ise bu takdirde e, her $n \in \mathbb{N}$ için $F^{(n)}$ nin birim elemanıdır. Örnek olarak, $e = 0$ elemanı, $\sum$ genişletilmiş toplamı için birim elemandır.

Önerme 2.76.

$A: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ fonksiyonu, $e \in \mathbb{I}$ birimli bir birleştirme fonksiyonu olsun. $a \coloneqq inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ve $b \coloneqq sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ olarak tanımlansın. A konjanktiftir $\Leftrightarrow$ $e = b$ 'dir. Dual olarak, A disjanktiftir $\Leftrightarrow e = a$ dır.

İspat.

Konjanktif olması durumu göz önüne alınsın. Diğer durumda ispat dual olarak yapılır.

" $\Rightarrow$ " A konjanktif ve $b \coloneqq sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} b &= A(e, \dots, e, b, e, \dots, e) = A\left(b_{\{i\}}e\right) \\ &\leq Min\left(b_{\{i\}}e\right) = Min(e, \dots, e, b, e, \dots, e) = e && \text{(konjanktiflik ile)} \\ &\leq b && \text{(supremum özelliği ile)} \end{aligned}$$

olup buradan $e = b$ elde edilir.

" $\Leftarrow$ " $b \coloneqq sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ olmak üzere $e = b$ olsun. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ keyfi alınsın. $x_i = Min(\boldsymbol{x})$ olsun. Sırasıyla birleştirme fonksiyonunun azalmayanlığı ve $e = b$ için birim eleman özelliği kullanılırsa:

$$A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq A(b, \dots, b, x_i, b, \dots, b) = x_i = Min(\boldsymbol{x})$$

olup, A konjanktiftir.

Tanım 2.77.

$a \in \mathbb{I}$ 'ya $F: \mathbb{I}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun sıfırlayan elemanı denir $:\Leftrightarrow$ $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$ olan her $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ için $F(\boldsymbol{x}) = a$ sağlanır.

Önerme 2.78.

$A: \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ bir birleştirme fonksiyonu olsun. A konjanktif ve $a \coloneqq inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ise a sıfırlayan elemandır. Dual olarak A disjanktif ve $b \coloneqq sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ise b sıfırlayan elemandır.

İspat.

İlk kısmın ispatı yapılsın. İkinci kısmın ispatı da dual olarak yapılır. $a = inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ iken $a \in \{x_1, \dots, x_n\}$ olacak şekilde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^n$ alalım. A konjanktif olduğundan

$a \leq A(\boldsymbol{x}) \leq Min(\boldsymbol{x}) = a$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Bu önermenin tersi doğru değildir. Örneğin $[0,1]^n$ de GM için 0 bir sıfırlayan elemandır fakat GM konjanktif değildir. Sıfırın bir sıfırlayan eleman olduğu açıktır. Fakat GM konjanktif değildir. Çünkü $\boldsymbol{x} = (\, 1\, ,0.01\, ,0.1\, ,0.1\, , \ldots, 0.1\,)$ için

$GM(\boldsymbol{x}) = \sqrt[n]{(1).(0.01).(0.1).(0.1) \ldots (0.1)} = \sqrt[n]{(0.1)^n} = 0.1$

$Min(\boldsymbol{x}) = Min\{\, 1\, ,0.01\, ,0.1\, ,0.1\, , \ldots, 0.1\, \} = 0.01$

olup $0.1 \nleq 0.01$ olmadığından GM konjanktif değildir.

3. İRDELEME

Giriş değerlerinin tek bir çıkış değeri oluşturacak şekilde birleştirilmesi yalnızca matematik ve fizikte değil, aynı zamanda mühendislikte, ekonomide, sosyal ve diğer bilimlerde de oldukça önemlidir. Bu önemi sebebiyle bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır. Temelde n-li girdileri tek bir çıkış değerine dönüştüren birleştirme fonksiyonları ilk olarak birim aralık üzerinde tanımlanmıştır. Fakat uygulamada karşılaşılan girdi değerleri çoğu zaman birim aralık içerisinde yer almamaktadır. Böylece birim aralıklar üzerinde tanımlı birleştirme fonksiyonlarının farklı tanım kümeleri üzerinde tanımlanması problemi ele alınmaya çalışılmıştır. Birleştirme fonksiyonları birim aralık üzerinde incelenirken daha sonraki yıllarda keyfi reel aralıklar üzerinde incelenmeye başlanmıştır. Bu anlamda birçok çalışmalar yapılmış, belirli aşamalar kaydedilmiştir. Ardından sınırlı kısmen sıralı kümeler ve benzer şekilde kafesler üzerinde birleştirme fonksiyonları tanımlanmıştır. Sınırlı kısmen sıralı kümeler (kafesler) üzerinde yapılan çalışmalar birleştirme fonksiyonları için yeni bir alan oluşturur. Birleştirme fonksiyonlarının farklı tanım kümeleri üzerinde tanımlanması probleminin yanı sıra uygulamada ve teoride kullanılmak üzere özel tipte fonksiyonların tanımlanması ve incelenmesi de oldukça önem arz etmektedir. Bu yönde yapılmış birçok monografi mevcuttur. Bu çalışmada ise öncelikle birim aralık üzerinde ardından reel aralıklar üzerinde birleştirme fonksiyonları tanıtılmıştır. Literatürde sıklıkla karşılaşılan ve önem arz eden birleştirme fonksiyonu örnekleri verilmiş, birleştirme fonksiyonlarına ait özellikler incelenmiş ve teoremler ispatlarıyla birlikte sunulmaya çalışılmıştır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, reel aralıklar üzerinde tanımlı birleştirme fonksiyonları ile çalışıldı. Birleştirme fonksiyonları ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca bu çalışmada:

1. Birleştirme fonksiyonlarının literatürde en çok rastlanan örnekleri incelendi.
2. Bir n-li fonksiyon için kesin artanlık, duyarlılık ve hemfikir artanlık kavramları incelendi.
3. n-li fonksiyonlar için süreklilik, düzgün süreklilik, mutlak süreklilik, varyasyon, Lipshitz kavramları ve bu kavramlarla ilgili birleştirme fonksiyonlarına örnekler verildi.
4. Simetrik fonksiyon tanımı ve bir fonksiyonun simetrik olması için gerek ve yeter şartlar verildi.
5. İdempotent fonksiyon, resim-idempotent fonksiyon (n-li), güçlü idempotentlik, idempotentleştirilebilir fonksiyonlar ve bunlarla ilgili bazı önermeler incelendi.
6. n-li fonksiyonlar için konjanktiflik, disjanktiflik, internallik kavramları verildi ve örnekleri incelendi.
7. k-konjanktif, k-disjanktif fonksiyonlar tanıtılıp bu kavramlara ait birleştirme fonksiyonu örnekleri ve bazı teoremler verildi.
8. Asosyatiflik, parçalanabilirlik, güçlü parçalanabilirlik, otodağılabilirlik, bisimetriklik gibi bazı grup tabanlı özellikler incelendi.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada birleştirme fonksiyonlarının [0,1] üzerindeki tanımı ifade edildikten sonra keyfi $\mathbb{I}$ aralığı üzerinde birleştirme fonksiyonunun genel tanımı verilmiştir. Ardından bu fonksiyonların elemanter matematiksel özellikleri, grup tabanlı özellikleri ve bazı ileri özellikleri ifade edilmiş, örneklerle açıklanmış, temel teoremler ifade edilmiş ve açık ispatlarına yer verilmiştir.

Mesiar ve Komornikova tarafından yapılmış olan "Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification" isimli çalışmada sınırlı kısmen sıralı kümeler (kafesler) üzerinde birleştirme fonksiyonlarının bazı mümkün olan sınıflandırılmaları tanıtılıp, incelenmiş olmasına rağmen bu yönde literatürde yeterli çalışma bulunmamaktadır.

Bu tezde reel aralıklar üzerinde tanımlanan birleştirme fonksiyonları için verilen monotonluk, idempotentlik, asosyatiflik, parçalanabilirlik, güçlü parçalanabilirlik, birim eleman, sıfırlayan eleman, konjanktiflik, disjanktiflik, internallik gibi özelliklerin ve teoremlerin sınırlı kısmen sıralı kümeler üzerinde tanımlanan birleştirme fonksiyonları için incelemesi yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Klir, G. ve Folger T., Fuzzy Sets, Uncertainty and Information, Prentice Hall, Englewood, 1988.

2. Yager, R.R. ve Kacprzyk J., The Ordered Weighted Averaging Operators, Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997.

3. Bouchon-Meunier, B., Aggregation and Fusion of Imperfect Information, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 12, Physica Verlag, Hiedelberg, 1998.

4. Kolesárová, A. ve Komorníková M., Triangular Norm-Based Iterative Compensatory Operators, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 109-120.

5. Calvo, T., Mayor, G. ve Mesiar, R., Aggregation Operators New Trends and Applications, Mesiar R., 3-104, Physica-Verlag, Heidelberg, 2003.

6. Beliakov, G., Pradera, A. ve Calvo, T., Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, Springer-Verlag, Heidelberg, 2007.

7. Grabish, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R. ve Pap, E., Aggregation Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

8. Birkhoff, G., Lattice Theory, 3rd Edition, Providence, Rhode Island, 1967.

9. Ovchinnikov, S., Means on ordered sets, Mathematical Social Sciences, 32 (1996) 39-56.

10. Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., Principles of Real Analysis, Third Edition 217-218, Academic Press, San Diego, 1998.

11. Aczél, J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, 19 255, Academic Press, New York, 1966.

12. Aczél, J., On Weighted Synthesis of Judgements. Aequationes Mathematicae, 27 (1984) 288-307.

13. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Integration With Respect to Decomposable Measures Based on a Conditionally Distributive Semiring on The Unit Interval, International Journal Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems, 8 (2000) 701-717.

14. Grady, N., http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2009/ grady .pdf 03 Mayıs 2012

15. Calvo, T. ve Mesiar, R., Stability of aggregation operators. – Proceedings of The 2nd International Conference in Fuzzy Logic and Technology,Eylül 2001, Leicester, Special Session SS9b,475-478

16. Rotman, J.J., An Introduction to The Theory of Groups, Volume 148, 4th edition, 24, Springer-Verlag, New York, 1995.

17. Hungerford, T.W., Algebra, Fourth Edition 51, Springer-Verlag, New York, 1987.

18. Fodor, J.C., An Extension of Fung-Fu’s Theorem, International Journal Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems, 4 (1996) 225-243.

19. Sander, W., Associative Aggregation Operators, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 97 (2002) 124-158.

20. Fodor, J.C. ve Roubens, M., Fuzzy Preference modelling and Multicriteria Decision Support, 14, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,1994.

21. Kuczma, M., Choczewski, B. ve Ger, R., Iterative Functional Equations, Volume 32, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

22. Schwezier, B. ve Sklar, A., Probabilistic Metric Spaces, Dover Publications, New York, 2005.

23. Calvo, T., Mesiar, R. ve Yager, R.R., Quantitative weights and aggregation, IEEE Transactions Fuzzy Systems, 12 (2004) 62-69.

24. Marichal, J.-L., k-Intolerant Capacities and Choquet Integrals, European Journal Operational Research, 177 (2007) 1453-1468.

25. Bemporad, G., Sul principio della media aritmetica, Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei, 3 (1926) 87-91.

26. Kolmogoroff, A.N., Sur La Notion De La Moyenne, Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei, 12 (1930) 388-391.

27. Nagumo, M., Über Eine Klasse Der Mittelwerte, Japanese Journal of Mathematics., 7 (1930) 71-79.

28. Marichal, J.-L. ve Roubens, M., Characterization of Some Stable Aggregation Functions, -IEPM’93, Haziran 1993, Mons, In Proceedings 1st International Conference on Industrial Engineering and Production Management 187-196.

29. Marichal, J.-L., Mathonet, P. ve Tousset, E., Characterization of Some Aggregation Functions Stable for Positive Linear Transformations, Fuzzy Set and Systems, 102 (1999) 293-314.

30. Fodor, J.C. ve Marichal, J.-L., On nonstrict means, Aequationes Mathematicae, 54 (1997) 308-327.

31. Marichal, J.-L., On An Axiomatization of The Quasi-Arithmetic Mean Values Without The Symmetry Axiom, Aequationes Mathematicae, 59 (2000) 74-83.

32. Marichal, J.-L., Mathonet, P. ve Tousset, E., Characterization of Some Aggregation Functions Stable for Positive Linear Transformations, Fuzzy Set and Systems, 102 (1999) 293-314.

ÖZGEÇMİŞ

Ümit Ertuğrul, 1987 yılında Trabzon'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Trabzon da tamamladı. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2010 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine ve aynı birimde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir. İyi derecede İngilizce bilmektedir.