

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DEĞİŞKEN DİFÜZYON KATSAYILI KONVEKSİYON-DİFÜZYON
DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canan ÇİFTÇİ

**HAZİRAN 2012
TRABZON**

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DEĞİŞKEN DİFÜZYON KATSAYILI KONVEKSİYON-DİFÜZYON
DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Matematikçi Canan ÇİFTÇİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21.05.2012
Tezin Savunma Tarihi : 15.06.2012

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Canan ÇİFTÇİ tarafından hazırlanan

**DEĞİŞKEN DİFÜZYON KATSAYILI KONVEKSİYON-DİFÜZYON
DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 15 / 06 / 2012 gün ve 1458/3 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

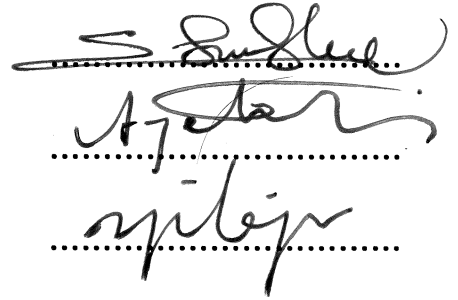
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof.Dr. Erhan COŞKUN

Üye : Yrd.Doç.Dr. Selçuk Han AYDIN

Üye : Yrd.Doç.Dr. Yücel ÖZMEN



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve zamanını esirgemeyen, yüksek lisansın tüm sıkıntılı dönemlerinde her konuda destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN' a teşekkür ederim.

Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Cemil YAPAR, Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN, Yrd. Doç. Dr. Süleyman ŞENYURT, Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL ve Arş. Gör. Erdiç YÜCESOY' a her konuda gösterdikleri iyi niyet ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümü hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Son olarak, maddi ve manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim Orhan ASLAN, Sevgi ASLAN, Özgür ÇİFTÇİ, Burcu PELİT ve özellikle anneme ve kardeşlerime hoşgörü ve sabırlarından dolayı; maddi desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Canan ÇİFTÇİ
Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN’ ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/ 05/ 2012

Canan ÇİFTÇİ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET.....	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	X
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Konveksiyon-Difüzyon Olayı.....	1
1.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi	2
1.3.1. Tarihsel Gelişim	2
1.3.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları	4
1.3.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları	5
1.3.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması.....	5
1.3.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulama Alanları.....	7
1.4. Literatür Taraması	7
1.5. Tezin Planı.....	11
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	12
2.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferensiyel Denklemlere Uygulanması.....	12
2.1.1. Giriş.....	12
2.1.2. Ayırıklaştırma	12
2.2. Elemanlar.....	13
2.2.1. 1-D Elemanlar.....	14
2.2.2. 2-D Elemanlar.....	14
2.3. Şekil Fonksiyonları.....	15
2.3.1. 1-D Şekil Fonksiyonları.....	16
2.3.2. Üçgen Eleman Şekil Fonksiyonları	21

2.3.3.	Dörtgen Eleman Şekil Fonksiyonları	26
2.4.	Sınır Koşulları.....	29
2.5.	Sabit Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi	30
2.5.1.	Güçlü Hal.....	30
2.5.2.	Zayıf Hal.....	31
2.5.3.	Varyasyonel Hal	34
2.5.3.1.	1-D Varyasyonel Hal	34
2.5.3.2.	2-D Varyasyonel Hal	37
2.6.	Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi	41
2.6.1.	Güçlü Hal.....	41
2.6.2.	Zayıf Hal.....	42
2.6.3.	Varyasyonel Hal	43
2.6.3.1.	1-D Varyasyonel Hal	43
2.6.3.2.	2-D Varyasyonel Hal	44
3.	BULGULAR VE TARTIŞMA.....	46
3.1.	1-D Sabit Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi.....	46
3.2.	2-D Sabit Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi.....	50
3.3.	1-D Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi.....	54
3.4.	2-D Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi.....	55
4.	SONUÇLAR.....	63
5.	ÖNERİLER	64
6.	KAYNAKLAR.....	65
7.	EKLER	67
ÖZGEÇMİŞ		

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

DEĞİŞKEN DİFÜZYON KATSAYILI KONVEKSİYON-DİFÜZYON
DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Canan ÇİFTÇİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN
2012, 72 Sayfa, 6 Ek Sayfa

Pek çok fiziksel ve mühendislik probleminin matematiksel modellemesi konveksiyon-difüzyon denklemi ile tanımlanır. Bundan dolayı literatürde konveksiyon-difüzyon denklemi ile ilgili analitik ve sayısal olmak üzere pek çok çalışma bulunmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi, pek çok probleme uygulanabilirliğinden dolayı çalışmalarda tercih edilen yöntemlerin başında yer almaktadır. Fakat literatürdeki çalışmaların çoğu, konveksiyon-difüzyon denkleminde difüzyon katsayısının sabit olduğu durumu incelemektedir. Bu çalışmada ilk olarak konveksiyon-difüzyon denkleminin sabit difüzyon katsayılı halinin bir ve iki boyutlu uzaylardaki sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonları verilmektedir. Daha sonra, elde edilen formülasyonlar değişken difüzyon katsayılı denklemler için genelleştirilmiştir. Son olarak, elde edilen formülasyonlar bir ve iki boyutlu uzaylarda örnek problemler üzerinde test edilip sonuçların yorumları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlar yöntemi, Konveksiyon-difüzyon denklemi, değişken difüzyon katsayısı

Master Thesis

SUMMARY

THE FINITE ELEMENT METHOD SOLUTION OF VARIABLE DIFFUSION
COEFFICIENT CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Canan ÇİFTÇİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN
2012, 72 Pages, 6 Pages Appendix

Mathematical modeling of many physical and engineering problems is defined with convection-diffusion equation. Therefore, there are many analytic and numeric studies about convection-diffusion equation in literature. The finite element method is the most preferred numerical method in these studies since it can be applied to many problems easily. But, most of the studies in literature are about constant coefficient case of the convection-diffusion equation. In the first part of this study, the finite element formulations of the constant coefficient case of the convection-diffusion equation are given in both one and two dimensional cases. Then, obtained formulations are generalized for variable diffusion coefficient equations. Finally, obtained formulations are tested on some problems in one and two dimensions and results are discussed.

Key Words: Finite element method, convection-diffusion equation, variable diffusion coefficient

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. (a) Sonlu farklar (b) Sonlu elemanlar yönteminde ayırıklaştırma.....	6
Şekil 2. Ayırıklaştırma noktalarının numaralandırma sırası.....	13
Şekil 3. Bir sonlu elemanlar modelinde ayırıklaştırma noktaları ve elemanlar	13
Şekil 4. Bir boyutlu elemanlar.....	14
Şekil 5. İki boyutlu elemanlar	15
Şekil 6. Doğrusal eleman şekil fonksiyonları.....	18
Şekil 7. Kuadratik eleman koordinat dönüşümü	19
Şekil 8. Kuadratik eleman şekil fonksiyonları	20
Şekil 9. Kübik eleman koordinat dönüşümü	20
Şekil 10. Kübik eleman şekil fonksiyonları	21
Şekil 11. Köşe noktaları verilen genel bir üçgen.....	22
Şekil 12. Genel bir üçgenin standart birim üçgene dönüşümü	25
Şekil 13. Genel bir dörtgenin standart dörtgene dönüşümü	28
Şekil 14. Örnek 1 sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	47
Şekil 15. Örnek 2 sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	48
Şekil 16. Örnek 3 sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	49
Şekil 17. Örnek 3 mutlak hata dağılım grafikleri	50
Şekil 18. $n = 1$ için sayısal çözüm ve sayısal çözüm izdüşüm grafikleri	52
Şekil 19. $n = 10$ için sayısal çözüm ve sayısal çözüm izdüşüm grafikleri.....	53
Şekil 20. Örnek 1 sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	54
Şekil 21. Örnek 2 sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	55
Şekil 22. Örnek 1 sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	56
Şekil 23. Örnek 1 sayısal çözüm izdüşüm grafiği	57
Şekil 24. U_1 için sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	58
Şekil 25. U_2 için sayısal ve tam çözüm grafikleri.....	58
Şekil 26. Örnek 3 sayısal çözüm izdüşüm grafikleri	60
Şekil 27. Örnek 3 sayısal çözüm izdüşüm grafikleri	61
Şekil 28. Örnek 4 sayısal çözüm izdüşüm grafikleri.....	62

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Üçgen eleman koordinat dönüşümü.....	25
Tablo 2. Dörtgen eleman koordinat dönüşümü.....	29
Tablo 3. Gauss formülü için integral noktaları ve ağırlık katsayıları.....	37
Tablo 4. Gauss formülü için integral noktaları ve ağırlık katsayıları.....	41
Tablo 5. Örnek 1 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları.....	46
Tablo 6. Örnek 2 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları.....	48
Tablo 7. Örnek 3 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları.....	50
Tablo 8. Örnek 1 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları.....	54
Tablo 9. Örnek 2 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları.....	55
Tablo 10. Örnek 1 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları.....	56

SEMBOLLER DİZİNİ

- \mathbf{a} : Konveksiyon katsayısı
- A_e : Üçgen elemanın alanı
- $b(\omega, u)$: Bilineer form
- F^e : Eleman vektör
- F : Global vektör
- J : Jakobian
- K^e : Eleman matris
- K : Global matris
- $l(\omega)$: Lineer form
- \mathbf{n} : Normal vektör ($\mathbf{n} = (n_x, n_y)$)
- $\mathbf{n} \cdot \nabla$: $n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}$
- N_i^e : Eleman şekil fonksiyonları
- Q^e : Eleman sınır integral vektörü
- Q : Global sınır integral vektörü
- SEY : Sonlu elemanlar yöntemi
- u : Bilinmeyen fonksiyonun zayıf çözümü
- u_h^e : Bilinmeyen fonksiyonun eleman üzerinde ayrıklaştırılmış çözümü
- U : Bilinmeyen fonksiyonun tam çözümü
- ω : Ağırlık (test) fonksiyonu
- ω_i : Gauss-kuadratür sayısal integral ağırlık katsayısı
- (x, y) : Global (doğal) koordinatlar
- Γ : Bölgenin sınırı
- Γ_D : Dirichlet türü koşullu sınır
- Γ_N : Neumann türü koşullu sınır
- δ_{ij} : Kronocker delta

κ	: Difüzyon katsayısı
ξ_i	: Gauss-kuadratr sayısal integral noktası
(ξ, η)	: Yerel (taşınmış) koordinatlar
Ω	: Tanım bölgesi
Ω_e	: e elemanına ait bölge
$\partial\Omega$: Ω bölgesinin sınırı
∇	: Gradyent $(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j})$
∇^2	: Laplace $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$
1D	: Bir boyutlu uzay
2D	: İki boyutlu uzay

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tezdeki çalışmalarda, konveksiyon-difüzyon yapısındaki denklemlerin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü incelenecektir. Öncelikle konveksiyon-difüzyon denkleminde, difüzyon katsayısının sabit olarak alındığı durumu incelenecek ve sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonu elde edilip, denklemin çözümü gerçekleştirilecektir. İkinci aşamada ise, difüzyon katsayısının değişken olduğu durumlar incelenecektir. Elde edilen formülasyonlar örnek problemler üzerinde test edilip sonuçlar yorumlanacaktır.

Öncelikle konveksiyon-difüzyon olayının tanımını ve fiziksel olarak anlamını inceleyelim.

1.2. Konveksiyon-Difüzyon Olayı

Difüzyon (yayılma) olayı, bir maddenin konsantrasyonun yüksek olduğu yerden düşük olduğu yere doğru hareketi olarak adlandırılır. Örneğin, kapalı kaptaki kokusu olan buharlaşma özelliğine sahip bir sıvının (örn. kolonyağı) veya gazın (örn. parfüm), kabın kapağı açılınca kokunun bütün odaya yayılması veya bir damla mürekkebin bir bardak suya atılınca bütün bardağı boyaması gibi.

Gaz molekülleri, aralarındaki çekim kuvvetlerinden kurtulmuş olup aralarından geçerek difüze olurlar. Suda ise moleküller birbirleri üzerinde serbestçe kayıp yuvarlanabilirler. Fakat aralarındaki çekim kuvvetleri onları birbirlerine yakın tutar ve difüzyonları orta hızlı sayılır. Katılarda moleküller katı bir yapı içinde büyük ölçüde titreşim hareketi yaparlar ve moleküllerin ferdi difüzyonları oldukça yavaştır. Moleküllerin hareket veya kinetik enerjileri mutlak sıcaklıkla doğru orantılıdır. Sıcaklık yükseldikçe hareket artar. Dolayısıyla sıcaklık arttıkça difüzyon hızı da artar.

Konveksiyon (taşınım), katı yüzey ile akışkan arasında gerçekleşen ısı transferinin bir çeşididir. Akışkan içindeki akımlar vasıtasıyla ısı transfer edilir. Konveksiyon olayı, akışkan içindeki veya akışkanla sınır yüzey arasındaki sıcaklık farklarından ve bu farkın yoğunluk üzerinde oluşturduğu etkiden doğabilmektedir.

Konveksiyon-difüzyon denklemleri, hareket veya süreç aktarımlarında, bir bölgeden gelen akımların sirkülasyonu ile bir gaz ya da sıvı transferinde, akış mekaniğinde, ısı veya atmosferdeki diğer atmosferik özelliklerin transferinde kullanılır.

1.3. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bu bölümde, mühendislik problemleri başta olmak üzere pek çok matematiksel ve fiziksel problemin çözümünde kullanılan Sonlu Elemanlar Yöntemini (SEY) incelenecektir.

Sonlu elemanlar yöntemi, diferensiyel denklemlerle ifade edilen problemleri çözmek için kullanılan etkin bir sayısal yöntemdir. Sonlu farklar yönteminden daha güçlü ve genel bir yöntemdir. Sonlu elemanlar yöntemi, karmaşık veya büyük bölgelerde tanımlı olan problemlerin, daha basit alt bölgelere ayrıştırılarak, her bir alt bölge üzerinde daha esnek koşullar altında elde edilen çözümlerin birleşiminden, tam çözüme yaklaşık bir çözümün bulunduğu sayısal yöntemdir.

Yöntemin üç temel niteliği vardır: [1]

- 1) İlk olarak, geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesi sonlu elemanlar olarak adlandırılan geometrik olarak basit alt bölgelere ayrılır. Elemanlar arasındaki bağlantı, düğüm noktaları adı verilen noktalarla sağlanır.
- 2) İkinci olarak, her elemandaki çözüm, cebirsel polinomların lineer kombinasyonundan oluşan elemanlar arasında da sürekli fonksiyonlar olarak tanımlanır.
- 3) Son olarak, bilinmeyen fonksiyonlar, her eleman üzerinde tanımlanan denklemlerin belirli noktadaki çözümleri ile elde edilir.

Kullanılan yaklaşım fonksiyonları, genellikle polinomlardan seçilir. Seçilen polinomların derecesi ise çözülecek problemin tanım denkleminin derecesine ve çözüm yapılacak elemandaki ayrıklaştırma nokta sayısına bağlıdır. Sonlu elemanlar yönteminde, eleman bazında bilinmeyenler, denklemin çözümünün ayrıklaştırma noktalarındaki değerleridir. [2]

1.3.1. Tarihsel Gelişim

Sonlu elemanlar yöntemi her ne kadar yeni bir yöntem gibi görünüyorsa dahi, kullanım yaygınlığı, gelişimi ve başarısı bilgisayarların hızlı gelişimi ile artmıştır. Sonlu

elemanlar yönteminin ilk uygulaması iki bin yıl önce geometri alanında olmuştur. Eski geometriciler sonlu elemanları, π nin yaklaşık değerini bulmak, dairenin alanını ve çevresini hesaplamak için kullanmışlardır. Daire örneğinde, daireyi düzenli poligonlara ayırıp basitleştirilmiş problemi çözmek, sonlu elemanlar yönteminin önemli karakteristiğini göstermektedir. [3]

Sonlu elemanlar yönteminin modern kullanımı yapı analizi alanında olmuştur ve ilk çalışmalar Alexander Hrennikoff (1941) ve Mc Henry (1943) tarafından geliştirilen yarı analitik analiz metotlarıdır. Hrennikoff ve Mc Henry gerilme çözümleri için bir boyutlu doğru elemanlarını kullanmışlardır. Richard Courant gerilme çözümlerini varyasyonel bir formda kurmayı önermiştir. Daha sonra, Courant yaklaşık nümerik çözümler elde etmek için tüm bölgeyi oluşturan alt üçgensel bölgeler üzerinde parçalı şekil fonksiyonlarını tanıtmıştır. Levy 1947 yılında esnek (diğer adı ile kuvvet) yöntemini geliştirmiş olmasına rağmen, elde etmiş olduğu denklemler elle çözülebilecek denklemler olduğundan çok fazla tercih edilmemiştir. Ancak, bilgisayar yazılımlarının gelişmesi ile Levy'nin önerdiği yöntem kullanılmaya başlanmıştır. Argyis ve Kelsey (1954) enerji prensibini kullanarak "matrix structural analysis" (matrislerin yapısal analizi) yöntemini geliştirmiştir. Bu gelişme, enerji prensibinin sonlu elemanlar yönteminde önemli bir rol oynamasını sağlamıştır. Turner ve diğ. (1956) iki boyutlu elemanlar üzerinde çalışmalar yapmışlardır. Kafes eleman, giriş eleman, iki boyutlu üçgen ve dikdörtgen elemanlar için eleman matrisini (rijitlik matrisini) oluşturmuşlardır. "Sonlu Elemanlar" terimi ilk defa Ray W.Clough (1960) tarafından üçgen ve dikdörtgen elemanların düzlemsel gerilme analizinde uygulanmaya başlandığında kullanılmıştır. Metodun üç boyutlu problemlere uygulanması, iki boyutlu teoriden sonra kolayca gerçekleşmiştir (Argyis (1964)).

Düzgün bükümlü dikdörtgensel plaka elemanının eleman matrisi Melosh (1961) tarafından geliştirilmiştir. İlk gerçek kabuk elemanlar aksenal ve simetrik elemanlar olup üç boyutlu yapı analizinde kullanılmışlardır (Grafton ve Strome (1963)). Bunları silindirik ve diğer kabuk elemanları izlemiştir (Gallagher (1962)). Araştırmacılar 1960'lı yılların başlarında doğrusal olmayan (non-linear) problemlerle ilgilenmeye başlamışlardır. Turner ve diğ. (1960) geometrik olarak doğrusal olmayan problemler için bir çözüm tekniği geliştirmişlerdir. Sonlu elemanlar yöntemiyle kararlılık analizi ise ilk olarak Martin (1965) tarafından incelenmiştir. Daha sonraları statik problemlerin yanısıra dinamik problemler de sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmeye başlandı (Olgierd Zienkiewicz ve diğ. (1966) ve Koning ve Davids (1969)). 1943 yılında Richard Courant bölgesel sürekli doğrusal

yaklaşım kullanarak bir burulma problemi için çözüm üretmiştir.

Yapı alanı dışındaki problemlerin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü 1960'lı yıllarda başlamıştır. Örneğin; Olgierd Zienkiewicz ve Cheung (1965) sonlu elemanlar yöntemi ile Poisson denklemini çözmüştür. Doctors (1970) ise sonlu elemanlar yöntemini potansiyel akışa uygulamıştır. Sonlu elemanlar yönteminde sıkça kullanılan “varyasyonel formülasyon” terimi ilk kez Melosh (1963) tarafından kullanılmış ve “ağırlıklı rezidü yöntemi” nin sonlu elemanlar yönteminde uygulanması ise Szabo ve Lee (1969) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bunlara ek olarak, sonlu elemanlar yöntemi zaman içerisinde geliştirilerek ısı transferi, yeraltı sularının akışı, manyetik alan ve diğer bir çok alandaki problemlerin çözümlerine de uygulanmıştır. [4]

Genel amaçlı sonlu elemanlar paket programları 1970'li yıllardan itibaren ortaya çıkmaya başlamıştır. Günümüzde Ansys, Abaqus, Adina, COMSOL Multiphysics, Nastran, SAP 2000 gibi ticari, FreeFEM, Calculix, Elmer, GetFEM++, OOFEM gibi açık kaynak kodlu pek çok sonlu elemanlar analizi yapan paket program mevcuttur. Ayrıca günümüzde, sonlu elemanlar metodu ve uygulamalarıyla ilgili binlerce makale ve pek çok kitap yayınlanmıştır. İlerleyen bilgisayar teknoloji doğrultusunda sonlu elemanlar yöntemi de geliştirilerek daha verimli ve hızlı çözüm yöntemleri gerçekleştirilmektedir.

1.3.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları [5]

- Sonlu elemanlar yöntemi, geometrisi karmaşık şekillerin incelenmesinde kolaylıklar sağlar. Çözüm bölgesi alt bölgelere ayrıştırılabilir, bölgenin yapısına göre değişik sonlu elemanlar kullanılabilir. İsteğe bağlı olarak bazı bölgelerde daha hassas hesaplamalar gerçekleştirilebilir. Bu yönleriyle SEY, diğer sayısal yöntemlere göre daha esnek ve kullanışlıdır.
- SEY, mühendislik yaklaşımı ile incelendiğinde değişik ve karmaşık malzeme özellikleri olan sistemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Noktadan noktaya değişen, doğrusal olmayan, zamana bağlı, sıcaklığa bağlı gibi değişik malzeme özellikleri dikkate alınabilir.
- SEY 'de sürekli, süreksiz veya değişken etkiler incelenebilir.
- Sınır şartları, sistemin temel denklemleri kurulduktan sonra ve oldukça basit bir işlemle denklemlere dahil edilebilir. Bu SEY'in en önemli özelliklerinden biridir. Sınır şartları, formülasyonu ve çözümde kullanılan değişken fonksiyonlarını

değiştirmez.

- SEY matematiksel olarak geliştirilebilir, böylece çok sayıda problemi çözmek için güçlü ve çok yönlü bir araç olarak kullanılabilir.
- SEY'in hem mühendislik ve fiziksel anlamı, hem de matematiksel temelleri vardır.
- Mühendislik olarak incelendiğinde, sebep sonuç ilişkisine ait problemler, genel direngenlik matrisi ile birbirine bağlanan geliştirilmiş kuvvetler ve yer değiştirmeler cinsinden formüle edilebilir. Sonlu elemanlar yönteminin bu özelliği problemlerin anlaşılmasını ve çözülmesini hem mümkün kılar hem de basitleştirir.

1.3.3. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları [6,7]

- Bütün sayısal yöntemlerde olduğu gibi problemin çözümü bölgenin ayrıklaştırılmasında kullanılan noktalarda sayısal değer olarak elde edilir (Sürekli fonksiyon olarak çözüm bu değerler kullanılarak yaklaşık olarak elde edilebilir).
- Bütün sayısal analiz yöntemleri gibi sonlu elemanlar yöntemi de pratik uygulamalarda bilgisayar kullanımı gerektirmektedir.
- Sonsuz boyutlu dış bölge problemlerine uygulanmasında sınırlamalar getirir.
- Çözüm aşamasında kullanılacak fiziksel ve matematiksel yaklaşık ve sayısal değerler (parametre değerleri, ayrıklaştırma ve fonksiyon yaklaşık değerleri gibi), çözüm aşamasında kullanılan sayısal yöntemler ve bilgisayar yazılımlarından kaynaklı yuvarlama hataları, elde edilen sonuçlarda hatalara neden olacaktır.
- Daha fazla sayıda eleman kullanılarak daha yakınsak sonuçlar elde edilebilir. Fakat bu durum, formülasyon sonunda oluşacak sistemin büyümesi, çözümünün verimliliği ve hesaplama masrafları gibi dezavantajlar yaratacaktır.
- Sonlu elemanlar yönteminde kullanılan programların bir kısmı ticari yazılımlardır. Bundan dolayı kullanılacak programların lisanslanması ve gelişmeler doğrultusunda güncellenmesi gerekmektedir.

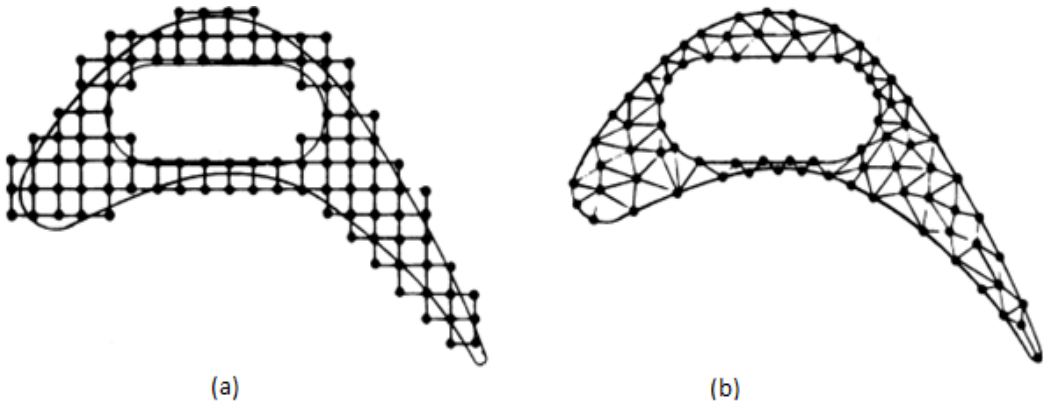
1.3.4. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması

Sonlu elemanlar yöntemi gibi diferensiyel denklemlerin çözümünde en çok kullanılan yöntemler arasında Sonlu Farklar Yöntemi (Finite Difference Method - FDM) ve Sınır

Elemanları Yöntemi (Boundary Element Method – BEM) de yer almaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi bu iki yöntem ile karşılaştırılacak olunur ise;

Sonlu farklar yöntemi, genellikle kartezyen koordinatlarda bölgenin düzgün dikdörtgenlere ayrıştırılması ile elde edilen noktalar üzerinde, türev değerlerinin Taylor seri açılımı ile fark denklemleri ile ifade edilmesine dayanır. Uygulaması son derece basit olmasına rağmen, özellikle düzgün olmayan bölgelerin ayrıştırılması, bölgenin ve problemin fiziksel şartlarının tanımlanması açısından sonlu elemanlar yöntemi kadar etkin değildir [8]. Genellikle bölgeyi ayrıştırmada kullanılan nokta sayısı sonlu elemanlar yöntemine göre fazla olduğundan dolayı, elde edilen ana sistemin boyutu sonlu elemanlar yönteminde elde edilen sistemin boyutundan daha büyüktür.

Sınır elemanları yöntemi de sonlu elemanlar yöntemine benzer bir sayısal yöntem olmasına rağmen bölge integrallerini sınır integrallerine dönüştürerek integralleri bir alt boyuta indirgemektedir. Buna ek olarak sadece bölge sınırını ayrıştırdığı için oluşan sistem boyutu sonlu elemanlar yöntemine göre daha küçüktür. Ayrıca dış bölge problemlerinin çözümünün uygulamasına imkan tanınması avantajı vardır. Fakat, yöntemin uygulanabilmesi için gerekli olan operatörün temel çözümünün (fundamental solution) bulunması zor olduğundan dolayı tüm diferensiyel denklem türlerine uygulanması mümkün değildir. Ayrıca homojen olmayan, simetrik olmayan veya doğrusal olmayan denklemlerde oluşacak çözüm denklemleri tüm bölgeye yayılacağından dolayı ana sistemin boyutu artmaktadır.



Şekil 1. (a) Sonlu farklar (b) Sonlu elemanlar yönteminde ayrıştırma [8]

1.3.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulama Alanları [7]

- Elastik cisimlerin mekaniğine ait problemler
- Robotlar (dinamik problemleri)
- Isı iletimi problemleri
- Nükleer mühendislik problemleri
- Toprak mekaniğine ait problemler
- Biomekaniğe ait problemler
- Elektrik mühendisliğine ait problemler
- Akışkanlar mekaniğine ait problemler

1.4. Literatür Taraması

Daha önce belirtildiği gibi, pek çok fizik ve mühendislik problemin matematiksel modellemesinde konveksiyon-difüzyon denklemi ile karşılaşıldığından dolayı, literatürde konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümüne yönelik analitik, yarı analitik ve sayısal olmak üzere çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu bölümde, sayısal çözümlere yönelik bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilecektir.

Sonlu elemanlar yönteminin yanında, başta sonlu farklar yöntemi olmak üzere, sınır elemanları yöntemi, ağırsız yöntemler, diferensiyel kuadratür yöntemi, sonlu hacimler yöntemi, bölge ayrıştırma yöntemi gibi pek çok sayısal yöntemle konveksiyon-difüzyon denkleminin sayısal çözümü ile ilgili çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çalışmalarda da sonlu elemanlar yönteminin değişik versiyonları kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminin en çok kullanılan versiyonları, adapte edilmiş sonlu elemanlar yöntemi (Adaptive FEM), genelleştirilmiş sonlu elemanlar yöntemi (GFEM), hp-sonlu elemanlar yöntemi (hp-FEM), geliştirilmiş sonlu elemanlar yöntemi (XFEM), düzgün sonlu elemanlar yöntemi (SFEM), stabilize edilmiş sonlu elemanlar yöntemleri (Stabilized FEM), iki/üç aşamalı sonlu elemanlar yöntemleri (Two Level/Three Level FEM) olarak sayılabilir.

Analitik ve Diğer Sayısal Yöntemlerle Yapılan Çalışmalar:

Marco Túllio de Vilhena, An analytical solution of the steady state convective-diffusion equation with space dependent diffusion coefficient (Journal of Membrane Science, 71, 1–2 (1992) 51–56) isimli çalışmasında konveksiyon-difüzyon denkleminin zaman bağımsız kararlı halinin konum değişken difüzyon katsayılı halinin analitik çözümünü incelemiştir.

A. Rapa, L. Elliottb, D.B. Inghamb, D. Lesnicb ve X. Wen, DRBEM for Cauchy convection-diffusion problems with variable coefficients (Engineering Analysis with Boundary Elements, 28 (2004) 1321–1333) isimli çalışmalarında ikili sınır elemanları yöntemi (Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM)) ile Tikhonov regülirizasyon yöntemi (Tikhonov regularisation method) veya yuvarlanmış tekil değer ayrıştırması yöntemi (Truncated Singular Value Decomposition (TSVD) method) birleşimi ile değişken katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemini çözmüşlerdir.

Ming-Chih Lai ve Yu-Hou Tseng, A fast iterative solver for the variable coefficient diffusion equation on a disk (Journal of Computational Physics ,208 (2005) 196–205) isimli çalışmalarında kutupsal koordinatlarda tanımlanan değişken katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemini sonlu farklar yaklaşımı kullanarak preconditioned conjugate gradient (PCG) yöntemi ile çözümünü elde etmişlerdir.

Yeliz Koca, Pozisyona bağlı difüzyon katsayısı içeren karşıt akımlı sistemlerde difüzyon işleminin modellenmesi (Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Kimya Mühendisliği Anabilim Dalı, Gebze, 2008) yüksek lisans tezinde, difüzyon katsayısının pozisyonun bir fonksiyonu olduğu durumların modellemelerini yapmış ve Rayleigh-Ritz yöntemi ile sayısal çözümlerini elde etmiştir.

Dmitri Lastochkin ve Moshe Favelukis, Bubble growth in a variable diffusion coefficient liquid(Chemical Engineering Journal, 69 (1998) 21-25) isimli çalışmalarında difüzyon katsayısının üstel olarak konsantrasyona bağlı olduğu durumu incelemiştir.

Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar:

Ramon Codina, Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation, (Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 156 (1998) 185-210) isimli çalışmasında, konveksiyon-difüzyon denkleminin değişik sonlu elemanlar

yöntemi formülasyonları ile çözümlerini, formülasyonların avantaj ve dezavantajlarını incelemiştir.

Önder Türk, The Finite Element Method Solution of Reaction-diffusion-advection Equations in Air Pollution, (Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, 2008) isimli yüksek lisans tezinde hava kirliliği modelleme problemlerinde ortaya çıkan reaksiyon difüzyon adveksiyon denklemlerinin stabilize sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü incelemiştir.

Janivita Joto Sudirham, Space-time Discontinuous Galerkin Methods For Convection-diffusion Problems Application to Wet-chemical Etching, (Doctor's Thesis, University of Twente, 2005, Indonesia) isimli doktora tezinde zaman bağımlı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin süreksiz Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü ve uygulamasını incelemiştir.

Feng-Nan Hwang, A new submesh strategy in the two-level finite element method for the advective-diffusive equation, (Master Thesis, University of Colorado Denver , 1999, Denver) isimli yüksek lisans tezinde konveksiyon-difüzyon denklemleri için iki aşamalı sonlu elemanlar yöntemi ve alt ağ üzerinde uygun sonlu elemanlar ağı belirlenmesi üzerine çalışma gerçekleştirmiştir.

J.M. Melenk ve C.Schwab, An hp finite element method for convection-diffusion problems, (IMA Journal of Numerical Analysis, 19, 3 (1999) 425-453) isimli çalışmalarında konveksiyon-difüzyon denkleminin hp-sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü incelemiştirlerdir.

R. Bruce Kellogg ve Christos Xenophontos, An Enriched Subspace Finite Element Method for Convection-diffusion Problems, (International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 7, 3 (2010) 477–490) isimli çalışmalarında sınır tabaka davranışının olduğu bir boyutlu konveksiyon-difüzyon denklemini, normal sonlu eleman yönteminde kullanılan şekil fonksiyonlarının sınır tabakasının olduğu bölgelerde, sınır tabaka davranışı ile aynı yapıda ek fonksiyonlar ile geliştirilmesi ile elde edilen yeni formülasyon ile çözümünü elde etmişlerdir.

J.M.L.Maubach, A parallel finite element method for convection-diffusion problems (Proceedings of the ECMI-2004 conference, 2004, Eindhoven) isimli konferans çalışmasında paralel sonlu elemanlar yönteminin konveksiyon-difüzyon denklemine uygulamasını gerçekleştirmiştir.

Stabilize Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Yapılan Çalışmalar:

Ramon Codina I Rovira, A Finite Element Model For Incompressible Flow Problems (Doctoral Thesis, Universitat Politecnica De Catalunya, 1992, Barcelona) isimli doktora tezinde, başta konveksiyon-difüzyon denklemleri olmak üzere akış problemleri için stabilizasyon yöntemlerini, kararlılık ve hata analizlerini incelemiştir.

R.D. Lazarov ve P.S. Vassilevski, Least-Squares Streamline Diffusion Finite Element Approximations to Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems, (Conference on Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problems Lozenetz, Bulgaria, 1998) isimli çalışmalarında en küçük kareler yöntemi ile sonlu elemanlar yönteminin singüler pertürbe konveksiyon-difüzyon problemlerinin çözümlerini incelemiştir.

Gerard R. Richter, An Explicit Finite Element Method for Convection-dominated Steady State Convection-diffusion Equations (Siam J. Numer. Anal., 28, 3 (1991) 744-759) isimli çalışmasında konveksiyon baskın konveksiyon-difüzyon denklemlerinin yüksek dereceli geliştirilmiş sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü ve analizini yapmıştır.

A.I. Neslitürk, A stabilizing subgrid for convection-diffusion problem, (Math. Models Methods Appl. Sci., 16 (2006) 211-232) ve On the choice of stabilizing sub-grid for convection-diffusion problem on rectangular grids, (Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 3687-3699) isimli çalışmalarında çok küçük difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin stabilize çözümlerini tek noktalı alt grid kullanarak elde etmiştir.

Eugenio Onate ve Marco Manzan Stabilization techniques for finite element analysis of convection-diffusion problems (Convection Heat Transfer.". WIT Press, 2000,10-25.) isimli çalışmalarında konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümünde kullanılan genel stabilizasyon formülasyonlarının özetini çıkartmışlardır.

Torsten Linß ve Niall Madden, A finite element analysis of a coupled system of singularly perturbed reaction-diffusion equations (Applied Mathematics and Computation, 148,3 (2004) 869-880) ve Christos Xenophontos ve Lisa Oberbroeckling A numerical study on the finite element solution of singularly perturbed systems of reaction-diffusion problems (Applied Mathematics and Computation,187 (2007) 1351-1367) çalışmalarında singüler pertürbeli konveksiyon-difüzyon denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümlerini incelemiştir.

1.5. Tezin Planı

Tez aşağıdaki taslak çerçevesinde hazırlanmıştır. Bölüm 2’de konveksiyon-difüzyon denkleminin matematiksel formülasyonu verilmiştir. Bu doğrultuda ilk olarak, sonlu elemanlar yönteminin ilk aşaması olan problemin alt elemanlara (bölgelere) ayrıklaştırılması için gerekli olan eleman türleri bir boyutlu ve iki boyutlu uzaylarda ayrı ayrı olarak Bölüm 2.2’de ve elemanlar üzerinde tanımlanan şekil fonksiyonları ve özellikleri Bölüm 2.3 de verilmiştir. Problemin güçlü, zayıf ve varyasyonel halleri Bölüm 2.5 ve Bölüm 2.6 da ayrı ayrı olarak verilmiştir. Bölüm 3’de ise sırası ile bir ve iki boyutlu uzaylarda sabit ve değişken difüzyon katsayılı örnek problemler üzerinde, Bölüm 2’de elde edilen formülasyonlar test edilmiş ve elde edilen sonuçların yorumları verilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diferensiyel Denklemlere Uygulanması

Bu bölümde sonlu elemanlar yönteminin diferensiyel denklemlere nasıl uygulanacağı incelenecektir. Aşağıda çözüm için izlenecek aşamalar ayrıntılı olarak verilmektedir.

2.1.1. Giriş

Çözüm yönteminde izlenilecek adımlar şunlardır: [9]

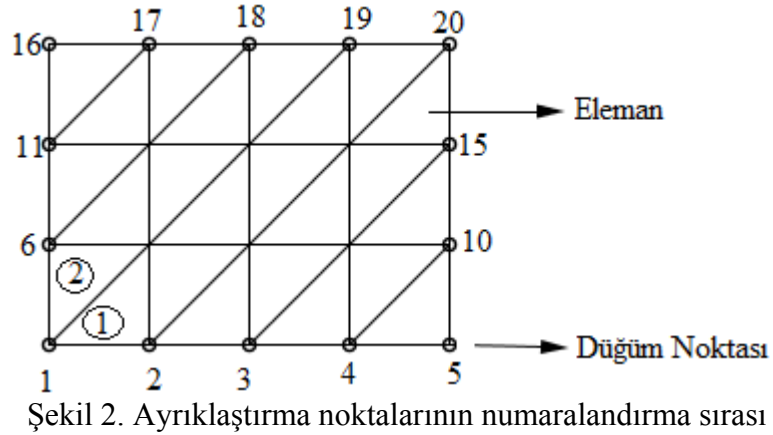
- Bölgenin sonlu elemanlara bölünmesi.
- Zayıf veya ağırlıklı integral formülasyonunun elde edilmesi.
- Şekil fonksiyonlarının seçimi.
- Zayıf form üzerinden sonlu elemanlar yönteminin geliştirilmesi.
- Alt eleman matrisinde elde edilen denklemlerin ana matrise yerleştirilmesi.
- Sınır şartlarının uygulanması.
- Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözümü.

2.1.2. Ayırıklaştırma

Sonlu eleman probleminin çözümünde ilk ve en önemli adımlardan biri, eleman türünün belirlenmesi ve çözüm bölgesinin belirlenen eleman türüne göre alt bölgelere (elemanlara) ayrılmasıdır. Problemin tanım bölgesinin ayırıklaştırılması, problemin çözümünde gerekli olacak bellek miktarını, işlem süresini ve yaklaşık çözümün yakınsaklığını etkilemektedir. Problemin çözüm bölgesinin geometrik yapısına en uygun olan eleman türü kullanılmalıdır. Eleman türüne ek olarak, elemanların boyutları ve sayıları da, tanımlanan problemi en iyi düzeyde temsil edecek ve hesaplamaları da en aza indirgeyecek şekilde seçilmelidir. Örneğin, fonksiyon belli bölgelerde ani değişim gösteriyor ise, bu yerlerde elemanlar daha yoğun olarak seçilmelidir. Sayısal çözüm, seçilen elemanların çözüm bölgesini temsil etme oranında elde edilecek sonuçlar gerçek çözüme yaklaşmış olacaktır. Uygun elemanlar seçmek kadar bu elemanlar ve onların ayırıklaştırma

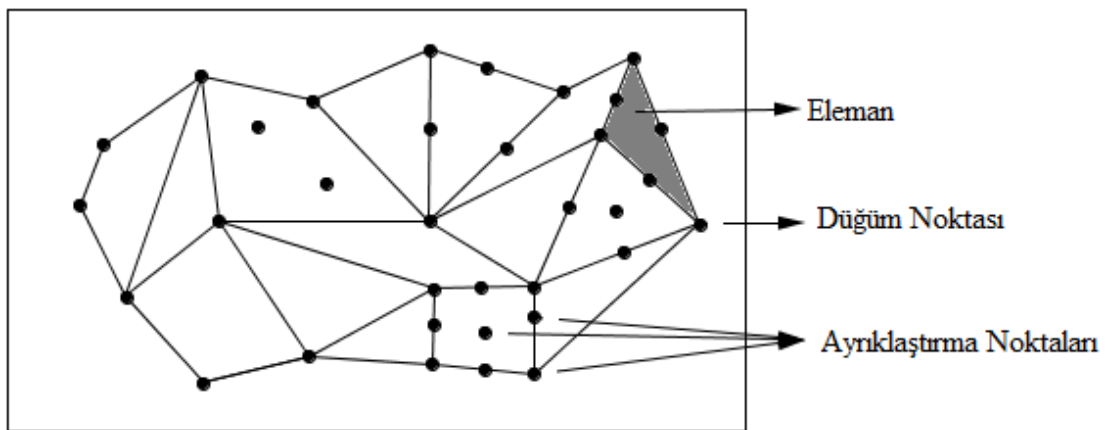
noktalarının (düğüm noktalarının) yerleri ve numaralandırma sırası da elde edilecek sayısal sonuçların yakınsaklığını etkileyen faktörler arasındadır. [10]

Bir bölgenin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü için ayrıklaştırılması, bölgenin daha küçük alt bölgelere ayrılmasıdır. Böylece, alt bölgelere ayrıklaştırılan problemin, her bir alt bölge üzerinde yapılan sade yaklaşımlar ile elde edilen çözümlerin birleşimi ile orijinal problemin çözümüne yaklaşık bir çözüm elde edilmektedir.



2.2. Elemanlar

Sonlu elemanlar yönteminde problemi tanımlayan bölge, eleman olarak adlandırılan basit geometrik alt bölgelere parçalanır (ayrıklaştırma işlemi). Bu elemanlar belli noktalardan birbirine bağlanır. Bu noktalara düğüm noktaları (nod) denir. Düğüm noktaları haricinde, eleman kenarlarında veya eleman içerisinde de noktalar seçilebilir. Seçilen bu noktalara ve düğüm noktalarının tamamına genel olarak ayrıklaştırma noktaları denir.

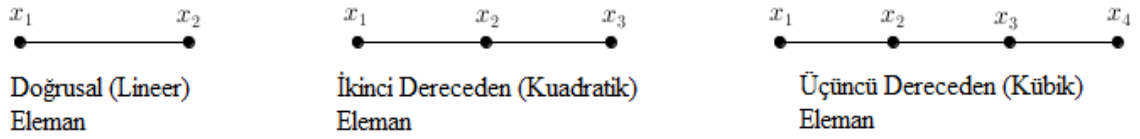


2.2.1. 1-D Elemanlar

Bir boyutlu uzayda (1D) elemanlar doğru parçaları ile gösterilir. Öncelikle, süreklilik koşulunun sağlanması için elemanın uç noktaları (düğüm noktaları) ayrıklaştırma noktaları olarak seçilmelidir. Eleman üzerindeki nokta sayısı ikiden daha fazla seçildiğinde, diğer ayrıklaştırma noktaları eleman içerisinde yer alır.

Nokta sayısının iki olduğu durumdaki elemanlara doğrusal (lineer) eleman denir. Eleman üzerindeki nokta sayısı üç olduğu durumda, noktaların ikisi elemanın uç noktalarında, üçüncüsü ise genellikle elemanın orta noktasında alınır. Bu tür elemanlara ikinci dereceden (kuadratik (quadratic)) eleman denir. Eleman üzerinde dört adet nokta alınır ise bu tür elemanlara üçüncü dereceden (kübik (cubic)) eleman denir.

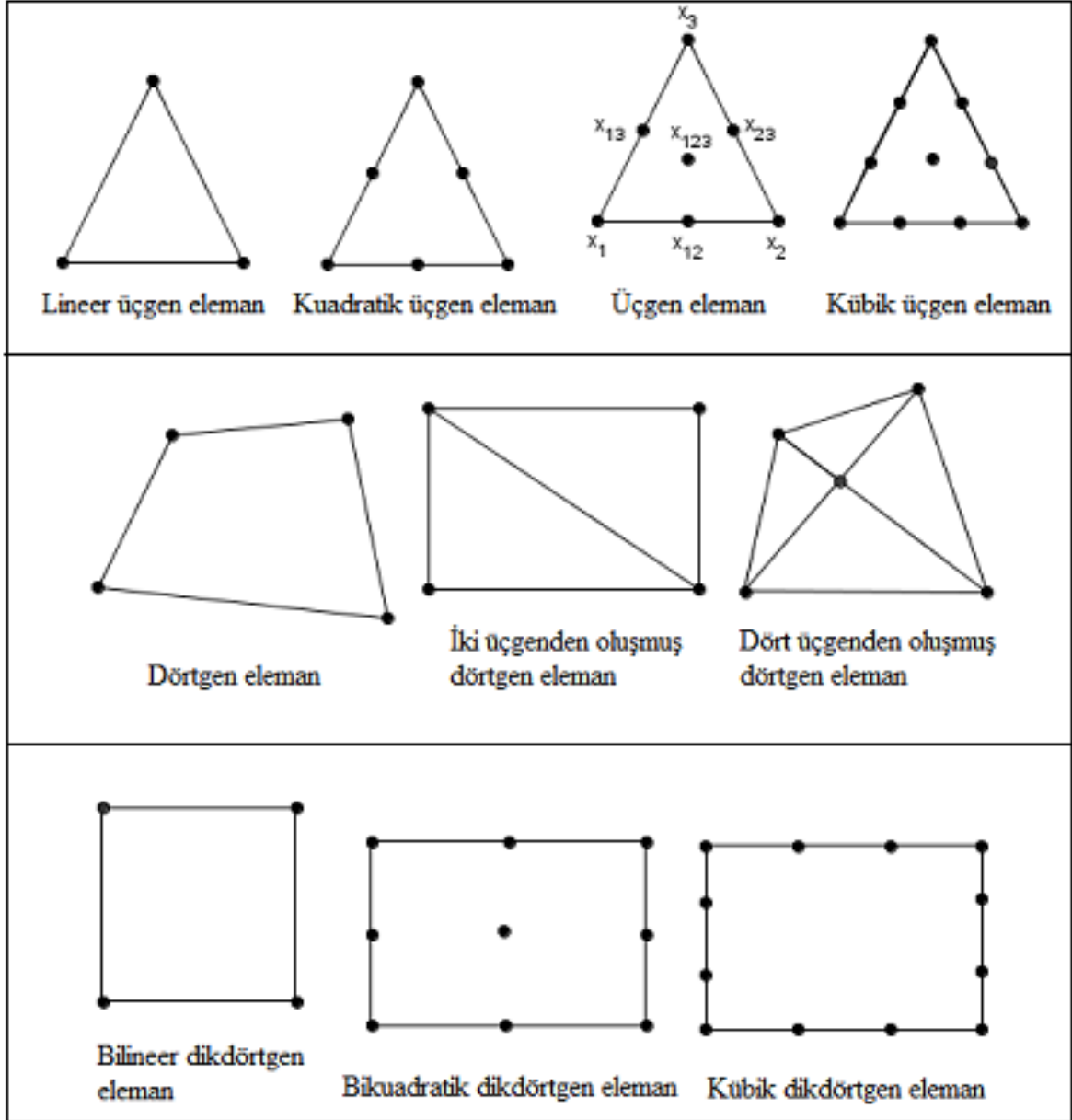
Bazı özel çözüm yöntemlerinde, bölgenin elemanlara ayrıklaştırma işleminde elemanların boyutu, sayısı ve ayrıklaştırma noktalarının yerleri problemin yapısına göre belirlenmektedir. [11,12,13]



2.2.2. 2-D Elemanlar

İki boyutlu uzayda genellikle üçgen ve dörtgen türü elemanlar kullanılmaktadır. Bu grubun temel elemanı, üç düğümlü üçgen elemandır. Üçgen eleman üzerinde altı, dokuz ve daha fazla ayrıklaştırma noktaları da seçilebilir. Ayrıklaştırma nokta sayısı, seçilecek şekil fonksiyonunun derecesine göre belirlenir. Düzgün olmayan bölgeler, daha düzgün bir şekilde alt bölgelere ayrıştırılabildiğinden dolayı, bu tür bölgelerin çözümünde genellikle üçgen elemanlar kullanılır. Bundan dolayı üçgen eleman, daha çok tercih edilen kullanışlı bir eleman tipidir. Ayrıklaştırma noktaları sadece üçgenin köşe noktalarında alındığında bu tür elemana doğrusal (lineer) üçgen eleman denir. Dörtgen eleman ise problemin geometrisine uygun olduğu durumlarda kullanışlı olan bir elemandır. Dörtgen eleman dört veya daha fazla noktali olabilir. Dörtgen eleman, problem bölgesi düzgün bir yapıda ise

çoğu zaman özel hal olan dikdörtgen eleman şeklinde kullanılır. [1]



Şekil 5. İki boyutlu elemanlar [14]

2.3. Şekil Fonksiyonları

Sonlu elemanlar yönteminde bilinmeyen fonksiyon, bölgenin elemanlara ayrıştırılması ile elde edilen eleman üzerinde seçilen ayrıştırma noktaları üzerinde tanımlanan şekil fonksiyonlarının (N_i) doğrusal kombinasyonu olarak,

$$u(\mathbf{x}) \approx u_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

formunda tanımlanır. Bir ve iki boyutlu uzaylarda şekil fonksiyonlarının özellikleri ve değerleri aşağıda verilmektedir.

2.3.1. 1-D Şekil Fonksiyonları

Eleman üzerinde tanımlanacak N_i^e şekil fonksiyonları ile eleman üzerindeki x_j noktaları arasında

$$N_i^e(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.2)$$

özelliği sağlanmalıdır. Şekil fonksiyon sayısı eleman üzerindeki ayrıklaştırma nokta sayısına eşittir.

Eleman üzerindeki nokta sayısı iki olduğu durumda (doğrusal eleman) N_i^e şekil fonksiyonları a ve b sabit sayılar olmak üzere

$$N_i^e(x_j) = a_i + b_i x_j, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.3)$$

doğrusal formda yazılabilir. Şekil fonksiyonlarının yukarıda belirtilen özelliğinden dolayı

$$N_1^e(x_1) = a_1 + b_1 x_1 = 1$$

$$N_1^e(x_2) = a_1 + b_1 x_2 = 0$$

olacağından

$$a_1 = \frac{-x_2}{x_1 - x_2}, \quad b_1 = \frac{1}{x_1 - x_2} \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.4) deki a_1 ve b_1 değerleri Denklem (2.3) de yerine yazılır ise,

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad (2.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$N_2^e(x_1) = a_2 + b_2 x_1 = 0$$

$$N_2^e(x_2) = a_2 + b_2 x_2 = 1$$

için

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2.6)$$

olarak bulunur.

En çok kullanılan sayısal integral yöntemi olan Gauss-Legendre (Gauss-Kuadratur) yöntemi $[-1,1]$ aralığında tanımlanmaktadır. Herhangi bir $[x_1, x_2]$ aralığında Gauss-Legendre integral yöntemini uygulayabilmek için, $[x_1, x_2]$ aralığı doğrusal dönüşüm yardımı ile $[-1,1]$ aralığına dönüştürülür. Herhangi bir $[x_1, x_2]$ aralığında tanımlanan şekil fonksiyonlarını $[-1,1]$ aralığı üzerinde tanımlamak için, a ve b sabit sayılar olmak üzere

$$x_i = a + b\xi_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.7)$$

formundaki doğrusal dönüşümünden

$$x_1 = a + b(-1)$$

$$x_2 = a + b(1)$$

değerleri ile

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad b = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (2.8)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.8) de bulunan a ve b değerleri Denklem (2.7) de yazıldığında,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi \quad (2.9)$$

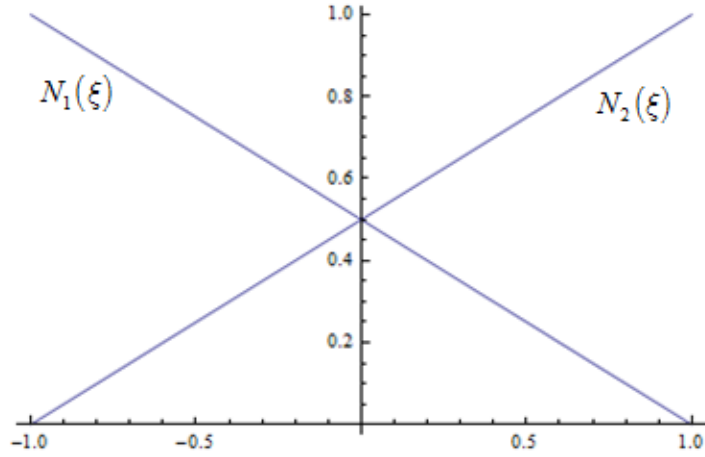
elde edilir.

$N_1(x)$ ve $N_2(x)$ şekil fonksiyonları $[-1,1]$ standart eleman üzerinde

$$N_1(\xi) = \frac{\xi - 1}{1 - (-1)} = \frac{1 - \xi}{2} \quad (2.10)$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 + \xi}{2}$$

halini alır.



Şekil 6. Doğrusal eleman şekil fonksiyonları

Bir boyutlu uzayda benzer şekilde yüksek dereceli elemanlar (kuadratik, kübik) için şekil fonksiyonları tanımlanabilir.

Kuadratik elemanda, N_i^e şekil fonksiyonları a_i , b_i ve c_i , $i=1,2,3$ sabit sayılar olmak üzere

$$N_i^e(x_j) = a_i + b_i x_j + c_i x_j^2, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

formunda yazılabilir. Şekil fonksiyonlarının özelliklerinden elde edilecek

$$N_1(x_1) = a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_1^2 = 1$$

$$N_1(x_2) = a_1 + b_1 x_2 + c_1 x_2^2 = 0$$

$$N_1(x_3) = a_1 + b_1 x_3 + c_1 x_3^2 = 0$$

denklem sisteminin çözümünden

$$a_1 = \frac{x_2 x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad b_1 = -\frac{x_2 + x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \quad c_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad (2.12)$$

bulunur. Bulunan bu değerler Denklem (2.11) de yerine yazıldığında

$$N_1(x) = \frac{x_2 x_3 - (x_2 + x_3)x + x^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \quad (2.13)$$

elde edilir. Benzer işlemlerle

$$N_2(x) = \frac{x_1 x_3 - (x_1 + x_3)x + x^2}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} \quad (2.14)$$

ve

$$N_3(x) = \frac{x_1 x_2 - (x_1 + x_2)x + x^2}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \quad (2.15)$$

bulunur.

x_2 , $[x_1, x_3]$ aralığında orta nokta olmak üzere $[x_1, x_3]$ aralığında bulunan şekil fonksiyonlarının $[-1, 1]$ elemanı üzerindeki karşılığı;

a , b ve c sabit sayılar olmak üzere

$$x_i = a + b\xi_i + c\xi_i^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

kuadratik denklemi tanımlansın.



Şekil 7. Kuadratik eleman koordinat dönüşümü

$$x_1 = a + b(-1) + c(-1)^2$$

$$x_2 = a + b(0) + c(0)^2$$

$$x_3 = a + b(1) + c(1)^2$$

denklemlerinden

$$a = x_3, \quad b = \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad c = \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{2} \quad (2.17)$$

elde edilir. Bulunan sabit değerler Denklem (2.16) da yerlerine yazıldığında

$$x = x_3 + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi + \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{2} \xi^2$$

elde edilir.

Böylece $[x_1, x_3]$ aralığında bulunan $N_1(x)$, $N_2(x)$ ve $N_3(x)$ şekil fonksiyonları $[-1, 1]$ aralığında, ξ bağımsız değişkenine göre

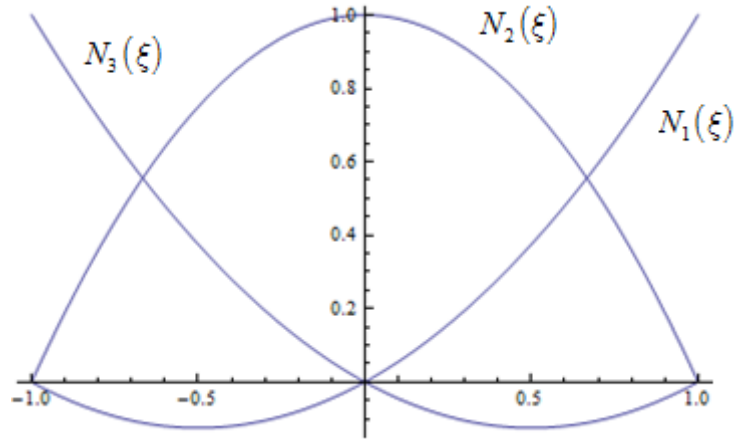
$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi - 1)}{2}$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$N_3(\xi) = \frac{\xi(\xi + 1)}{2}$$

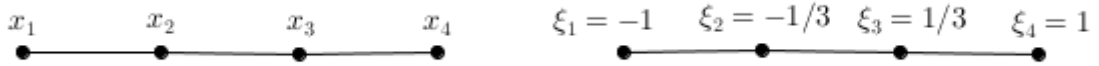
(2.18)

halini alır.



Şekil 8. Kuadratik eleman şekil fonksiyonları

Benzer işlemler yapıldığında kübik eleman şekil fonksiyonları $[x_1, x_4]$ aralığında



Şekil 9. Kübik eleman koordinat dönüşümü

$$N_1(x) = \frac{-x_2 x_3 x_4 + (x_3 x_4 + x_2(x_3 + x_4))x - (x_2 + x_3 + x_4)x^2 + x^3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$N_2(x) = \frac{-x_1 x_3 x_4 + (x_3 x_4 + x_1(x_3 + x_4))x - (x_1 + x_3 + x_4)x^2 + x^3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$N_3(x) = \frac{-x_1 x_2 x_4 + (x_2 x_4 + x_1(x_2 + x_4))x - (x_1 + x_2 + x_4)x^2 + x^3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$$

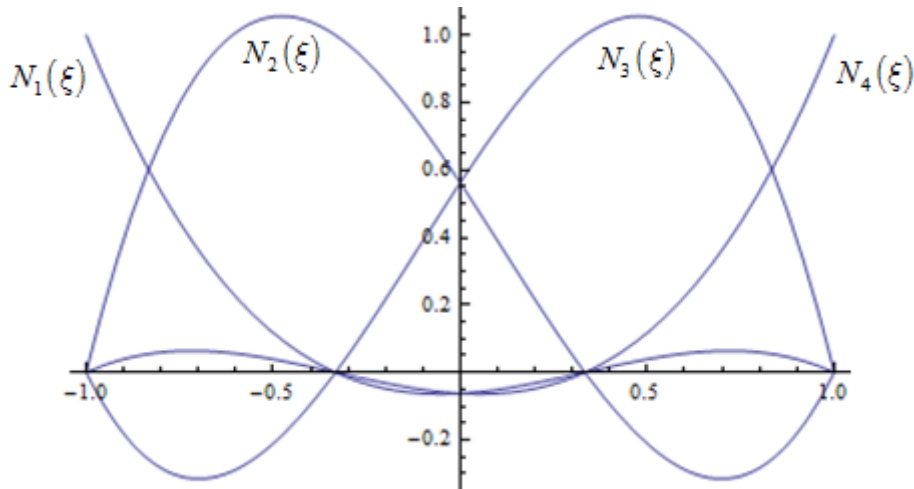
$$N_4(x) = \frac{-x_1 x_2 x_3 + (x_2 x_3 + x_1(x_2 + x_3))x - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + x^3}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)}$$

(2.19)

ve $[-1, 1]$ aralığında, ξ bağımsız değişkenine göre ise

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= -\frac{9}{16}\left(\xi^2 - \frac{1}{9}\right)(\xi - 1) \\
N_2(\xi) &= \frac{27}{16}(\xi^2 - 1)\left(\xi - \frac{1}{3}\right) \\
N_3(\xi) &= -\frac{27}{16}(\xi^2 - 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right) \\
N_4(\xi) &= \frac{9}{16}\left(\xi^2 - \frac{1}{9}\right)(\xi + 1)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

olarak bulunur.



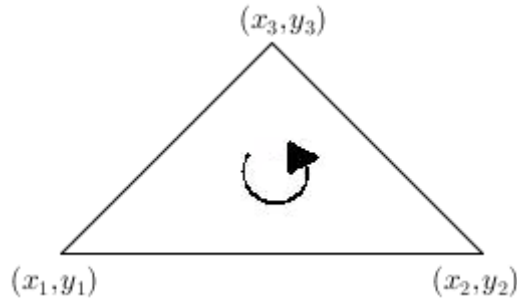
Şekil 10. Kübik eleman şekil fonksiyonları

2.3.2. Üçgen Eleman Şekil Fonksiyonları

Üçgen elemanlarla modelleme işine çözüm bölgesinin üçgenlere ayrılması ile başlanır. Sağlanması gerekli olan en temel şart, hiç boşluk kalmayacak şekilde üçgenlemenin yapılması ve üçgenlerin birbirinin üzerine çıkmamasıdır. Bir diğer şart ise, üçgenlerin birbirine köşelerinden bağlı olmalarıdır. Yani, bir üçgenin köşesi diğerinin kenarında olmamalıdır. Bu şartlara ek olarak iyi bir sonuç elde etmek için de gerekli şartlar vardır. En iyi sonuç için, üçgenler eşkenar üçgene yakın olmalıdırlar. Bunun nedeni, iç açısı çok küçük elemanlar kullanılırsa hatanın artmasıdır. Bir iç açısı küçültmek yerine daha küçük elemanlar kullanmak, tek bir üçgen yerine birkaç üçgen kullanmak daha doğru sonuçlar sağlayacaktır [15]. Her bir üçgeni tanımlayabilmek için köşeleri kullanılır. Üçgenin köşelerinin bulunduğu noktalar düğüm noktalarını oluşturmaktadır. Böylece bir üçgen eleman üç düğüm noktası ve üç kenardan meydana gelmektedir.

Üçgenin köşe noktaları yazılırken takip edilen sıra hep aynı dönüş yönünde olmalıdır. Ya tüm elemanlar için saat yönünde ya da tüm elemanlar için saat yönünün tersi yönde olmalıdır. Bir üçgen yazılırken sıralama üç türlü olabilir. Önemli olan nokta, önce hangi köşeden başlanırsa başlansın, tüm üçgenler için kabul edilen dönüş yönündeki sırayla diğer ikisinin yazılmasıdır. Bu şekilde problemin tanım bölgesi üçgenlere ayrıştırılır. Her bir üçgen üzerinde de noktalar seçilerek şekil fonksiyonları belirlenir. [15]

Üçgenin sadece köşe noktaları kullanılır ise doğrusal şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir. [16]



Şekil 11. Köşe noktaları verilen genel bir üçgen

Doğrusal şekil fonksiyonları

$$N_1(x, y) = a_1 + b_1x + c_1y$$

$$N_2(x, y) = a_2 + b_2x + c_2y$$

$$N_3(x, y) = a_3 + b_3x + c_3y$$

(2.21)

şeklinde tanımlansın.

Birinci ayırıklaştırma noktasında N_1 baz fonksiyonunun değeri 1 olup diğer noktalarda sıfıra doğru lineer olarak azalır. 2. ve 3. ayırıklaştırma noktalarında 1 değerini alan N_2 ve N_3 şekil fonksiyonları sırasıyla 1 - 3 ve 1 - 2 noktalarında sıfır değerini alır. Bunun sonucu olarak, herbir ayırıklaştırma noktasında $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ dir.

Üçgenin köşe noktaları, (2.21) şekil fonksiyonlarında yerine yazılırsa

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1) = 1 = a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 \\ N_1(x_2, y_2) = 0 = a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 \\ N_1(x_3, y_3) = 0 = a_1 + b_1x_3 + c_1y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2(x_1, y_1) = 0 = a_2 + b_2x_1 + c_2y_1 \\ N_2(x_2, y_2) = 1 = a_2 + b_2x_2 + c_2y_2 \\ N_2(x_3, y_3) = 0 = a_2 + b_2x_3 + c_2y_3 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} N_3(x_1, y_1) = 0 = a_3 + b_3x_1 + c_3y_1 \\ N_3(x_2, y_2) = 0 = a_3 + b_3x_2 + c_3y_2 \\ N_3(x_3, y_3) = 1 = a_3 + b_3x_3 + c_3y_3 \end{cases}$$

lineer denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemler matris formda sırasıyla,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere üçgen alan bilgilerinden $\det P_1$ in üçgenin alanının iki katı

olduğu görülür. Bu durumda üçgenin alanı,

$$A_e = \frac{1}{2} |\det P_1| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

olacaktır.

(2.22) deki denklem sistemlerinin Cramer kuralı ile çözümü yapılarak bilinmeyen a_i , b_i ve c_i , $i=1,2,3$ katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2A_e} \\ b_1 = \frac{y_2 - y_3}{2A_e} \\ c_1 = \frac{x_3 - x_2}{2A_e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2A_e} \\ b_2 = \frac{y_3 - y_1}{2A_e} \\ c_2 = \frac{x_1 - x_3}{2A_e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2A_e} \\ b_3 = \frac{y_1 - y_2}{2A_e} \\ c_3 = \frac{x_2 - x_1}{2A_e} \end{cases}$$

Bulunan bu değerler, Denklem (2.21) de yerlerine yazılır ise

$$N_1(x, y) = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A_e}$$

$$N_2(x, y) = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{2A_e} \quad (2.23)$$

$$N_3(x, y) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{2A_e}$$

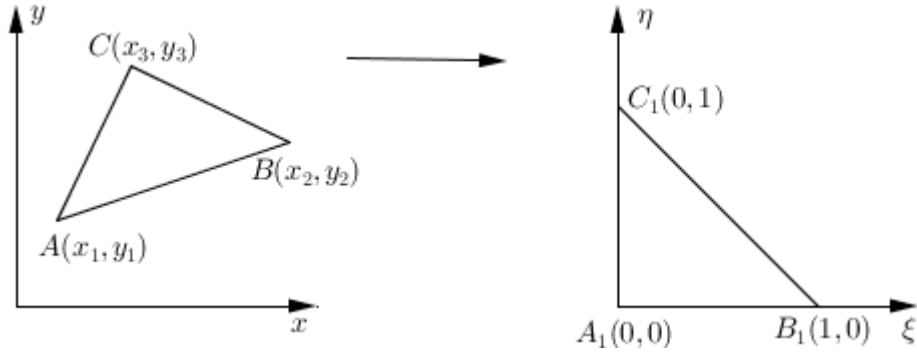
elde edilir.

Bölgenin üçgenleştirilmesinden elde edilen herhangi boyuttaki bir üçgen, doğrusal dönüşüm ile standart birim üçgene dönüştürülür.

(x, y) koordinat sistemi üzerinde tanımlanan herhangi bir üçgeni (ξ, η) koordinat sisteminde standart birim üçgene dönüştürmek için

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta \\ y &= \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\eta \end{aligned} \quad (2.24)$$

doğrusal dönüşümü tanımlansın. [17]



Şekil 12. Genel bir üçgenin standart birim üçgene dönüşümü

(x, y) koordinat sisteminde üçgenin köşe noktaları (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) olarak alınır ise, şekil fonksiyonlarının özellikleri kullanılarak α_i, β_i doğrusal dönüşüm katsayıları aşağıdaki koşullardan belirlenir:

Tablo 1. Üçgen eleman koordinat dönüşümü

$x - y$ koordinat sistemi	$\xi - \eta$ koordinat sistemi
(x_1, y_1)	$(0, 0)$
(x_2, y_2)	$(1, 0)$
(x_3, y_3)	$(0, 1)$

Tablodaki 1. ve 2. ifadeler sırasıyla Denklem (2.24) de yerine yazılır ise,

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 & y_1 &= \beta_1 \\ x_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 & y_2 &= \beta_1 + \beta_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= x_2 - x_1 \\ \beta_2 &= y_2 - y_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

bulunur.

Tablodaki 3. değer Denklem (2.24) de yerine yazıldığında;

$x_3 = \alpha_1 + \alpha_3$ ve $y_3 = \beta_1 + \beta_3$ olur. Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= x_3 - x_1 \\ \beta_3 &= y_3 - y_1\end{aligned}\tag{2.27}$$

bulunur. Bulunan α_i ve β_i değerleri Denklem (2.24) de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta\end{aligned}\tag{2.28}$$

elde edilir.

(ξ, η) koordinat sisteminin şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta\end{aligned}\tag{2.29}$$

olarak bulunur.

Üçgenin köşe noktaları ile birlikte köşe noktalarının orta noktaları da alınabilir. Böylece üçgen eleman altı ayrıklaştırma noktasından oluşmaktadır. Bu durumda, α_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, 6$ sabit sayılar olmak üzere

$$N_i(x, y) = \alpha_{i1} + \alpha_{i2}x + \alpha_{i3}y + \alpha_{i4}x^2 + \alpha_{i5}xy + \alpha_{i6}y^2, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

biçiminde altı tane kuadratik şekil fonksiyonu tanımlanabilir. [18]

2.3.3. Dörtgen Eleman Şekil Fonksiyonları

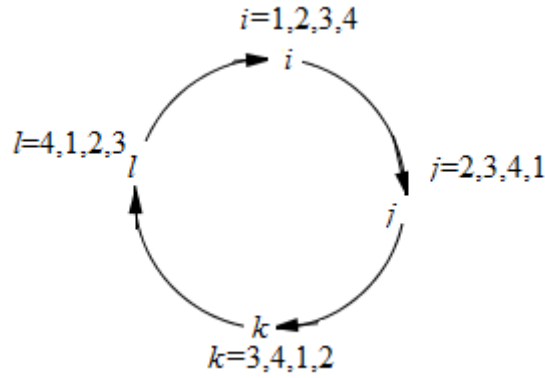
Problemin tanım bölgesi dörtgenlere ayrıştırılır ise, üçgen elemana benzer şekilde

$$\text{şekil fonksiyonları } P_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \text{ için}$$

$$\begin{aligned}\det P_2 &= x_2(-x_3(y_2 - y_3)(y_1 - y_4) + x_4(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)) - x_1x_4(y_2 - y_3)(y_1 - y_4) \\ &\quad + x_1x_3(y_1 - y_3)(y_2 - y_4) - x_1x_2(y_1 - y_2)(y_3 - y_4) - x_3x_4(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
N_i(x, y) &= \frac{(-1)^i}{\det P_2} \left[x_l x_k y_j (y_l - y_k) + x_j x_l y_k (y_j - y_l) + x_j x_k y_l (y_k - y_j) + (x_k y_k (y_j - y_l) \right. \\
&\quad \left. + x_l y_l (y_k - y_j) + x_j y_j (y_l - y_k)) x + (x_k x_l (y_k - y_l) + x_j x_k (y_j - y_k) \right. \\
&\quad \left. + x_j x_l (y_l - y_j)) y + (x_l (y_j - y_k) + x_k (y_l - y_j) + x_j (y_k - y_l)) xy \right]
\end{aligned}$$



genel formülünden

$$\begin{aligned}
N_1(x, y) &= \frac{1}{\det P_2} \left[x_3 x_4 y_2 (y_3 - y_4) + x_2 x_4 y_3 (y_4 - y_2) + x_2 x_3 y_4 (y_2 - y_3) + (x_3 y_3 (y_4 - y_2) \right. \\
&\quad \left. + x_4 y_4 (y_2 - y_3) + x_2 y_2 (y_3 - y_4)) x + (x_3 x_4 (y_4 - y_3) + x_2 x_3 (y_3 - y_2) \right. \\
&\quad \left. + x_2 x_4 (y_2 - y_4)) y + (x_4 (y_3 - y_2) + x_3 (y_2 - y_4) + x_2 (y_4 - y_3)) xy \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2(x, y) &= \frac{1}{\det P_2} \left[x_4 x_1 y_3 (y_1 - y_4) + x_3 x_1 y_4 (y_3 - y_1) + x_3 x_4 y_1 (y_4 - y_3) + (x_4 y_4 (y_3 - y_1) \right. \\
&\quad \left. + x_1 y_1 (y_4 - y_3) + x_3 y_3 (y_1 - y_4)) x + (x_4 x_1 (y_4 - y_1) + x_3 x_4 (y_3 - y_4) \right. \\
&\quad \left. + x_3 x_1 (y_1 - y_3)) y + (x_1 (y_3 - y_4) + x_3 (y_4 - y_1) + x_4 (y_1 - y_3)) xy \right]
\end{aligned}$$

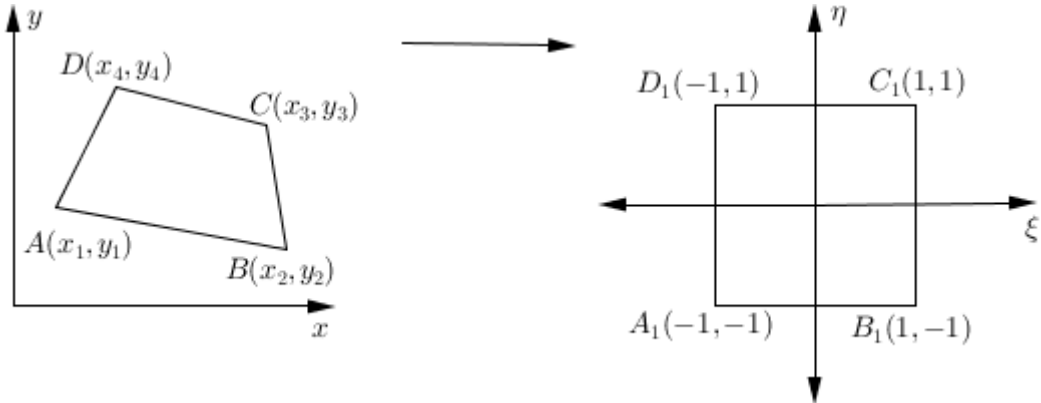
$$\begin{aligned}
N_3(x, y) &= \frac{1}{\det P_2} \left[x_1 x_2 y_4 (y_1 - y_2) + x_4 x_2 y_1 (y_2 - y_4) + x_4 x_1 y_2 (y_4 - y_1) + (x_1 y_1 (y_2 - y_4) \right. \\
&\quad \left. + x_2 y_2 (y_4 - y_1) + x_4 y_4 (y_1 - y_2)) x + (x_1 x_2 (y_2 - y_1) + x_4 x_1 (y_1 - y_4) \right. \\
&\quad \left. + x_4 x_2 (y_4 - y_2)) y + (x_2 (y_1 - y_4) + x_4 (y_2 - y_1) + x_1 (y_4 - y_2)) xy \right] \\
N_4(x, y) &= \frac{1}{\det P_2} \left[x_2 x_3 y_1 (y_3 - y_2) + x_1 x_3 y_2 (y_1 - y_3) + x_1 x_2 y_3 (y_2 - y_1) + (x_2 y_2 (y_1 - y_3) \right. \\
&\quad \left. + x_3 y_3 (y_2 - y_1) + x_1 y_1 (y_3 - y_2)) x + (x_2 x_3 (y_2 - y_3) + x_1 x_2 (y_1 - y_2) \right. \\
&\quad \left. + x_1 x_3 (y_3 - y_1)) y + (x_3 (y_1 - y_2) + x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1)) xy \right]
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

(x, y) koordinat sistemi üzerinde tanımlanan şekil fonksiyonlarını (ξ, η) koordinat sisteminde tanımlamak için;

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \\
y &= \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta
\end{aligned} \tag{2.30}$$

bi-linear dönüşümleri kullanılır.



Şekil 13. Genel bir dörtgenin standart dörtgene dönüşümü

Tablo 2. Dörtgen eleman koordinat dönüşümü

$x - y$ koordinat sistemi	$\xi - \eta$ koordinat sistemi
(x_1, y_1)	$(-1, -1)$
(x_2, y_2)	$(1, -1)$
(x_3, y_3)	$(1, 1)$
(x_4, y_4)	$(-1, 1)$

(x, y) koordinat sisteminde köşe noktaları (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) olan dörtgen eleman (ξ, η) koordinat sisteminde köşe noktaları $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ olan standart dörtgen elemana dönüştürüldüğünde, (ξ, η) koordinat sisteminde şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\
N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\
N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\
N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

olarak bulunur.

2.4. Sınır Koşulları

Diferensiyel denklemler için üç farklı sınır şartı tanımlanabilir: [19]

Bilinmeyen fonksiyon $u = u(\mathbf{x})$, Ω problemin tanım bölgesi ve $\partial\Omega$ bölgenin sınırı olmak üzere;

a. Dirichlet (birinci tip) türü sınır koşulu: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) in tanımladığı türde, sınırlarda bilinmeyen fonksiyonun değeri belirtilir.

$$u = g$$

b. Neumann (ikinci tip) türü sınır koşulu: Carl Neumann tarafından ortaya atılan sınır koşulunda, sınırlarda fonksiyonun normal türev değeri belirtilir.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g$$

c. Robin (üçüncü tip) türü sınır koşulu: Victor Gustave Robin (1855–1897) tarafından geliştirilmiş olup, Dirichlet ve Neumann sınır koşullarının lineer kombinasyonundan oluşmaktadır (sınır şartı olarak fonksiyon ve normal türevinin lineer kombinasyonunun değerleri belirtilir).

$$c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.5. Sabit Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi

Bu bölümde ilk olarak konveksiyon-difüzyon denkleminin tanımını verdikten sonra denklemin, güçlü hal, zayıf hal ve varyasyonel hal olmak üzere üç farklı durumu incelenecektir.

2.5.1. Güçlü Hal

Konveksiyon-difüzyon denklemi Ω bölgesinde

$$L(U) = -\nabla^2 U + \mathbf{a} \cdot \nabla U = f \quad (2.32)$$

eşitliği ve

$$U = g_0, \quad \Gamma_D$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = g_1, \quad \Gamma_N$$

sınır koşulları ile tanımlanır. Denklemden $U = U(\mathbf{x})$ bilinmeyen fonksiyonu, \mathbf{a} konveksiyon katsayısı ve f ise dış fonksiyonunu göstermektedir. Denklemden U fonksiyonu tek değişkenli reel bir fonksiyon olabileceği gibi çok değişkenli bir fonksiyon da olabilir.

1-D problem için

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} \quad \text{ve} \quad \mathbf{a} \cdot \nabla U = a(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

2-D problem için

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2}$$

ve

$$\mathbf{a} = (a_1(x, y), a_2(x, y)) \text{ için } \mathbf{a} \cdot \nabla U = a_1(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

olarak yazılabilir.

Bilinmeyen U fonksiyonu, denklemini Ω bölgesinin tamamında ve sınır şartlarını tüm sınırlarda sağlayacağından dolayı, problemin bu haline problemin güçlü hali (strong form) denir. Bu şartları sağlayan U fonksiyonunu bulmak yerine daha az koşulun belirtileceği daha sade bir çözüm bulmaya çalışılacaktır.

2.5.2. Zayıf Hal

Konveksiyon-difüzyon probleminin zayıf halini tanımlamak için ilk olarak aşağıdaki fonksiyon uzaylarını tanımlayalım. [20]

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : u' \in L^2(\Omega) \}$$

$$V = H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0, \partial\Omega \}$$

öyle ki;

$L^2(\Omega)$: Ω bölgesinde karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayını,

$H^1(\Omega)$: $L^2(\Omega)$ nın Sobolev alt uzayını (fonksiyonun birinci türevlerinin karesinin integrallenebildiği uzay),

$H_0^1(\Omega)$: Ω sınırlarında sıfır değerini alan $H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayını göstermektedir.

Verilen diferensiyel denklemin güçlü halini sağlayan $u \in V$ için, ilk olarak, problemin güçlü hali homojen formda yazılır, sonra bir ağırlık (test) fonksiyonu ω ile çarpılıp problemin tanım bölgesinde integrali alınır ve integralin değeri sıfıra eşitlenir. Bu yöntemle ağırlıklı rezidü yöntemi (weighted residual method) denir. [21,22]

1-D uzayda

$$\begin{cases} L(U(x)) = -U_{xx}(x) + aU_x(x) = f(x), & x_0 < x < x_N \\ U(x_0) = U_0 \\ U(x_N) = U_N \end{cases} \quad (2.33)$$

problemi tanımlanmış olsun. Denklem (2.33) e ağırlıklı rezidü yöntemi uygulanırsa;

$$\int_{x_0}^{x_N} (-u_{xx} + au_x - f)\omega dx = 0 \quad (2.34)$$

halini alır. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\int_{x_0}^{x_N} (u_x \omega_x + au_x \omega - f\omega) dx - u_x(x)\omega(x) \Big|_{x_0}^{x_N} = 0 \quad (2.35)$$

eşitliği elde edilir.

Problemin bu haline problemin zayıf hali (weak form) denir. Problemin sınır koşulları Dirichlet türünde verilir ise, ağırlık fonksiyonu için $\omega \in V$ ($\omega(x_0) = \omega(x_N) = 0$) ek koşulu ile sınır değer terimlerinin etkisi kaybolur. Bu durumda,

$$\int_{x_0}^{x_N} (u_x \omega_x + au_x \omega - f\omega) dx = 0 \quad (2.36)$$

denklemini elde edilir.

2-D uzayda ise

$$\begin{cases} L(U(x, y)) = -\nabla^2 U(x, y) + \mathbf{a}(x, y) \cdot \nabla U(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ U(x, y) \Big|_{(x, y) \in \Gamma_D} = g_0, & \Gamma_D \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} \Big|_{(x, y) \in \Gamma_N} = g_1, & \Gamma_N \end{cases} \quad (2.37)$$

probleminin zayıf hali için, ağırlıklı rezidü yöntemine göre (2.37) denklemi,

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u + \mathbf{a} \cdot \nabla u - f)\omega dx dy = 0 \quad (2.38)$$

olarak yazılır. Eşitlikte $-\nabla^2 u \omega$ terimi için Divergence teoremi

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u)\omega d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega + \oint_{\Gamma} \omega (\mathbf{n} \cdot \nabla u) ds \quad (2.39)$$

(2.38) denkleminde uygulanır ise

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \omega + (\mathbf{a} \cdot \nabla u) \omega - f \omega) dx dy - \oint_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla u) \omega ds = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir.

Burada, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ Γ sınırında birim normal vektördür.

Sınır integralinde ağırlık fonksiyonunun katsayısı,

$$q_n = (\mathbf{n} \cdot \nabla u) = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.41)$$

dır. Bu takdirde, (2.40) denklemi

$$\int_{\Omega} (\nabla \omega \cdot \nabla u + \omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u) - \omega f) dx dy - \oint_{\Gamma} \omega q_n ds = 0 \quad (2.42)$$

denklemine indirgenir. Problemin bu haline (2.37) probleminin zayıf hali denir. Problemin zayıf halinde, türev mertebesi bir derece düşürülmüş olur. Türev mertebesinin bir derece düşürülmesi ile, seçilen şekil fonksiyonları için birinci mertebeden türevli olma şartı yeterli olacaktır. Ayrıca, denklemin ayrıklaştırılmış halinde elde edilen eşitliğin sadece düğüm noktalarında (nodlarda) sağlanması koşulu kullanılır. Sayısal çözümdeki bu esnekliklerden dolayı (2.42), denklemin zayıf hali olarak adlandırılır. Bunun sonucu olarak denklemin güçlü hali zayıf halini de sağlamasına rağmen, zayıf hali güçlü halini sağlamaz.

$B(.,.)$ bilineer form ve $l(.)$ lineer form olmak üzere (2.42) denklemi

$$B(\omega, u) = l(\omega) \quad (2.43)$$

eşitliğine denk olarak yazılabilir. Eşitlikte

$$B(\omega, u) = \int_{\Omega} (\nabla \omega \cdot \nabla u + \omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u)) dx dy \quad (2.44)$$

ve

$$l(\omega) = \int_{\Omega} \omega f dx dy + \oint_{\Gamma} \omega q_n ds \quad (2.45)$$

integrallerine karşılık gelmektedir.

Dirichlet türü sınır koşulunun belirtildiği sınırlarda $\omega = 0$ koşulu sağlanacağından (2.42) eşitliğinde yer alan sınır integrali düşer. Böylece Dirichlet türü sınır koşulları için

$$\int_{\Omega} (\nabla \omega \cdot \nabla u + \omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u) - \omega f) dx dy = 0 \quad (2.46)$$

integral eşitliği elde edilir.

2.5.3. Varyasyonel Hal

Bilinmeyen u fonksiyonu Ω bölgesinde her bir e elemanı üzerinde

$$u(\mathbf{x}) \approx u_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n u_i^e N_i^e(\mathbf{x})$$

formunda ayrıklaştırılmış olarak tanımlansın.

Eşitlikte, $u_i^e = u(\mathbf{x}_i)$ ve $N_i^e(\mathbf{x})$ fonksiyonları

$$N_i^e(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

özelliğine sahip lineer şekil fonksiyonlarıdır.

Yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaması için $u_h^e(\mathbf{x})$ yaklaşımı üzerinde aşağıdaki koşullar belirtilir: [21]

- $u_h^e(\mathbf{x})$ eleman üzerinde ve elemanların bağlantı (düğüm) noktalarında sürekli olmalıdır.
- Baz polinomlarının tüm terimleri lineer bağımsız olmalıdır.
- $u_h^e(\mathbf{x})$ yi temsil eden polinomlar tam olmalıdır.

Sonlu elemanlar yaklaşımının problemin zayıf halinde yerine yazılarak elde edilen integral eşitliği, Ω bölgesinin ayrıklaştırıldığı her bir alt bölge (eleman) üzerinde hesaplanır. Elde edilen bu integral denkleminde problemin varyasyonel (ayrıklaştırılmış) formu denir.

2.5.3.1. 1-D Varyasyonel Hal

Sonlu elemanlar yöntemi için, Denklem (2.35) de u yerine Denklem (2.1) deki yaklaşım yazılır ise

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - f \omega \right) dx - \left(\omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \quad (2.47)$$

denklemini elde edilir. Problemin bu haline, problemin her eleman üzerinde ayrıklaştırılmış hali denir.

e elemanı üzerinde seçilen nodlardaki bilinmeyen n tane $u_1^e, u_2^e, \dots, u_n^e$ fonksiyon

değerlerine karşılık, n tane lineer bağımsız cebirsel denklem elde etmek için ağırlıklı rezidü yöntemlerinden biri olan Galerkin yöntemi kullanılır. Galerkin yönteminde, ağırlık fonksiyonu ω da $N_1^e, N_2^e, \dots, N_n^e$ şekil fonksiyonlarının lineer kombinasyonu türünden ifade edilir. ω fonksiyonunun şekil fonksiyonları türünden yaklaşımı Denklem (2.47) de yerine yazıldığında j -inci cebirsel denklem, $1 \leq j \leq n$ için

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) u_i^e \right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f N_j^e dx - \sum_{i=1}^n N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) dx \right) u_i^e - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f N_j^e dx - \sum_{i=1}^n N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \quad (2.48)$$

olarak elde edilir.

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right) dx$$

$$F_j^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f N_j^e dx \quad (2.49)$$

$$Q_{ij}^e = \sum_{i=1}^n N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

olmak üzere Denklem (2.48),

$$\sum_{i=1}^n K_{ij}^e u_i^e = F_j^e + Q_{ij}^e \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.50)$$

denkleminde denktir.

(2.50) denklem sistemi

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\} + \{Q^e\} \quad (2.51)$$

biçiminde matris formunda yazılabilir. $[K^e]$ $n \times n$ tipinde simetrik, pozitif tanımlı eleman matrisi, $\{F^e\}$ ve $\{Q^e\}$ $n \times 1$ tipinde eleman vektörü olmak üzere her bir eleman için eleman matrisi ve vektörü hesaplanır. Elde edilen eleman matris ve vektörlerden global matris ve vektör elde edilir (assembly procedure). Bir başka ifadeyle

$$[K] \{u\} = \{F\} + \{Q\} \quad (2.52)$$

denklem sistemi elde edilir.

Sistem çözümü yapılmadan öncelikle sınır koşulları uygulanmalıdır. Problemin sınır koşulları Dirichlet türünde verilir ise, ağırlık fonksiyonu belirtilen sınırlarda sıfır değerini alacağından Q_{ij}^e terimi sıfır değerini alır. Bu durumda,

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.53)$$

elde edilir.

$n=5$ alınırsa global matris ve global vektör aşağıdaki gibidir: [17]

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & K_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^4 & K_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 \end{bmatrix}$$

Şekil fonksiyonları, dolayısıyla integral içerisindeki fonksiyonlar genellikle polinom yapısında olduğundan dolayı, integralin sayısal olarak hesaplanması için, ilk olarak $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı Bölüm 2.3.1. de anlatıldığı üzere $[-1, 1]$ aralığına dönüştürülür. İntegral içerisindeki fonksiyonların da dönüşümleri yapılarak, polinom türü fonksiyonlar için en uygun sayısal integral hesaplama yöntemi olan Gauss-Legendre sayısal integral alma yöntemi kullanılır. Bu yöntem, [18,23]

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(\xi) |J| d\xi = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \omega_i \quad (2.54)$$

biçimindedir. Burada, ω_i Gauss formülünün ağırlık katsayıları, ξ_i Gauss sayısal integral noktalarını, n ise integrasyon nokta sayısıdır. Koordinat dönüşümünün “Jacobiani” olarak adlandırılan J terimi,

$$J = \frac{dx}{d\xi} \quad (2.55)$$

olarak tanımlanır. Gauss integrasyon yönteminde n tane Gauss integrasyon noktası kullanılarak $(2n-1)$ dereceli polinomların integralleri tam olarak hesaplanabilir.

Şekil fonksiyonlarının x koordinatına göre türevleri zincir kuralına göre aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} = J \frac{dN_i}{dx} \quad (2.56)$$

veya

$$\frac{dN_i}{dx} = (J)^{-1} \frac{dN_i}{d\xi} \quad (2.57)$$

Tablo 3. Gauss formülü için integral noktaları ve ağırlık katsayıları

Mertebe (n)	Sayısal İntegral Noktası (ξ_i)	Ağırlık Katsayısı (ω_i)
1	0.	2.
2	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626$	1.00000 00000 00000
3	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483$ 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	$\pm 0.86113\ 63115\ 94053$ $\pm 0.33998\ 10435\ 84856$	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	$\pm 0.90617\ 98459\ 00000$ $\pm 0.53846\ 93101\ 00000$ 0.0	0.23692 68851 00000 0.47862 86705 00000 0.56888 88889 00000
6	$\pm 0.93246\ 95142\ 00000$ $\pm 0.66120\ 93865\ 00000$ $\pm 0.23861\ 91861\ 00000$	0.17132 44924 00000 0.36076 15730 00000 0.46791 39346 00000

2.5.3.2. 2-D Varyasyonel Hal

İki boyutlu uzayda sonlu elemanlar yaklaşımı için, bir boyutlu uzaydaki formülasyona benzer şekilde (2.42) denkleminde u yerine Denklem (2.1) deki yaklaşım yazılır ise

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + a_1 \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a_2 \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} - \omega f \right\} dx dy - \oint_{\Gamma_e} \omega q_n ds = 0 \quad (2.58)$$

integral eşitliği elde edilir. Problemin bu haline, problemin her eleman üzerinde ayrılaştırılmış hali denir. 1-D'ye benzer şekilde, Galerkin yöntemine göre ağırlık fonksiyonu da şekil fonksiyonları türünden ifade edilip

$$\nabla\omega = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x}, \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) \text{ ve } \nabla u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}, \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) u_i^e \quad (2.59)$$

eşitlikleri kullanılarak eleman üzerindeki nodlardaki bilinmeyen fonksiyon değerleri için cebirsel denklemler,

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + a_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) u_i^e \right\} dx dy - \int_{\Omega_e} f N_j^e dx dy - \oint_{\Gamma_e} N_j^e q_n ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

veya

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + a_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dx dy \right\} u_i^e - \int_{\Omega_e} f N_j^e dx dy - \oint_{\Gamma_e} N_j^e q_n ds = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.60)$$

eşitliklerinden elde edilir.

Denklemlerde yer alan terimleri gruplandırmak için,

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left\{ \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + a_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} dx dy$$

$$F_j^e = \int_{\Omega_e} f N_j^e dx dy \quad (2.61)$$

$$Q_j^e = \oint_{\Gamma_e} N_j^e q_n ds$$

tanımlamaları yapılır ise, (2.60) denklemi

$$\sum_{i=1}^n K_{ij}^e u_i^e = F_j^e + Q_j^e \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.62)$$

denklem sistemi formunda ifade edilebilir. (2.62) integral denklem sistemi kısaca

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\} + \{Q^e\} \quad (2.63)$$

olarak da yazılabilir. Eşitlikte, $[K^e]$ $n \times n$ tipinde simetrik, pozitif tanımlı eleman matrisini, $\{F^e\}$ ve $\{Q^e\}$ $n \times 1$ tipinde eleman vektörünü temsil etmektedir.

Her bir eleman için, eleman matrisi ve vektörü hesaplanır. Bulunan eleman matris ve vektörleri kullanılarak elemanlar üzerindeki noktaların birbirine olan etkileri

$$[K]\{u\} = \{F\} + \{Q\} \quad (2.64)$$

şeklinde problem çözüm bölgesindeki tüm bilinmeyenlere karşılık gelen büyük (ana) sistem üzerine yansıtılır (global assembly procedure).

Büyük sistemin çözümü yapılmadan önce Dirichlet türü sınır koşul değerleri de sisteme aktarılır.

Eleman matrisi ve eleman vektörünün çözümleri için öncelikle şekil fonksiyonlarının x ve y koordinatlarına göre türevlerinin alınması ve integrallerinin bu koordinatlarda hesaplanması gerekmektedir. Eleman matristeki $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ ve $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ terimlerinin hesabı için, türev – zincir kuralı kullanılarak şekil fonksiyonlarının ξ ve η ya göre türevleri aşağıdaki gibi elde edilir: [24]

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

veya matris şeklinde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, Jacobian dönüşüm matrisi olarak bilinen J matrisi şekil fonksiyonları cinsinden

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

olarak kolayca hesaplanabilir.

Denklem (2.66) dan şekil fonksiyonlarının x ve y koordinatlarına göre türevlerini elde etmek için Jacobian matrisin tersi alınır ise,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

bulunur. $|J|$, Jacobian matrisin determinantıdır. x, y koordinat sisteminde herhangi bir alan, ξ, η koordinat sisteminde

$$dA = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (2.69)$$

olarak ifade edilir. Böylece (2.68) ve (2.69) daki ifadeler integral sınırları değiştirilerek denklem (2.61) de yerine yazıldığında eleman matrisi kolaylıkla hesaplanabilir.

Eleman matrisi ve eleman vektörünün çözümleri nümerik integrasyon yöntemlerinden Gauss-Kuadratur yöntemi kullanılarak hesaplanabilir [18,25]. Bu yöntem dörtgen eleman için,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_e} f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\approx \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^{n_x} \omega_i g(\xi_i, \eta) d\eta \\ &= \sum_{i=1}^{n_x} \omega_i \int_{-1}^1 g(\xi_i, \eta) d\eta \\ &\approx \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} g(\xi_i, \eta_j) \omega_i \omega_j \end{aligned} \quad (2.70)$$

şeklinde olup üçgen eleman için ise, birim üçgene dönüştürülen üçgen üzerinde

$$\iint_{\Omega_e} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \omega_i \quad (2.71)$$

şeklinde hesaplanır.

Burada, ω_i, ω_j Gauss formülünün ağırlık katsayılarını, ξ_i ve η_i ler Gauss sayısal integral

noktalarını, n_x ve n_y ise x ve y eksenleri boyutunda alınacak Gauss nokta sayılarını göstermektedir. Mertebesi n olan bir Gauss integrasyon formülünde, iki boyutlu problem için, $n \times n$ kadar nokta sayısı bulunmakta ve $(2n-1)$ dereceli polinomların integralinde kesin sonuç vermektedir.

Tablo 4. Gauss formülü için integral noktaları ve ağırlık katsayıları

Mertebe (n)	Polinom Derecesi	ξ_i	η_i	ω_i
1	1	1/3	1/3	1/2
3	2	1/6	1/6	1/6
		2/3	1/6	1/6
		1/6	2/3	1/6
4	3	1/3	1/3	-9/32
		3/5	1/5	25/96
		1/5	3/5	25/96
		1/5	1/5	25/96

2.6. Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi

Bu bölümde, sabit difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemi formülasyonu, değişken difüzyon katsayılı denklemler için geliştirilecektir.

2.6.1. Güçlü Hal

1-D problem için $\kappa = \kappa(x)$, 2-D problem için $\kappa = \kappa(x, y)$ olmak üzere

$$\left\{ \begin{array}{l} L(U) = -\kappa \nabla^2 U + \mathbf{a} \cdot \nabla U = f, \quad \Omega \\ U = g_0, \quad \Gamma_D \\ \frac{\partial U}{\partial n} = g_1, \quad \Gamma_N \end{array} \right. \quad (2.72)$$

problemi tanımlanmış olsun. Problemin bu hali problemin güçlü hali olarak adlandırılır.

2.6.2. Zayıf Hal

1-D uzayda (2.73) probleminin zayıf halini elde etmek için

$$\begin{cases} L(U(x)) = -\kappa(x)U_{xx}(x) + aU_x(x) = f(x), & x_0 < x < x_N \\ U(x_0) = U_0 \\ U(x_N) = U_N \end{cases} \quad (2.73)$$

denklemine ağırlıklı rezidü yöntemi uygulanırsa;

$$\int_{x_0}^{x_N} \omega(-\kappa u_{xx} + au_x - f) dx = 0 \quad (2.74)$$

integral eşitliği elde edilir. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\int_{x_0}^{x_N} (au_x \omega + \kappa u_x \omega_x + u_x \kappa_x \omega - f \omega) dx - \kappa u_x(x) \omega(x) \Big|_{x_0}^{x_N} = 0 \quad (2.75)$$

elde edilir. Problemin bu haline problemin zayıf hali (weak form) denir.

2-D uzayda ise

$$\begin{cases} L(U(x, y)) = -\kappa(x, y) \nabla^2 U(x, y) + \mathbf{a} \cdot \nabla U(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ U(x, y) = g_0, & \Gamma_D \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial n} = g_1, & \Gamma_N \end{cases} \quad (2.76)$$

probleminin zayıf hali için Denklem (2.76) a ağırlıklı rezidü yöntemi uygulanır ise

$$\int_{\Omega} \omega(-\kappa \nabla^2 u + \mathbf{a} \cdot \nabla u - f) dx dy = 0 \quad (2.77)$$

haline dönüşür. Divergence teoremi ile

$$\int_{\Omega} (\kappa \nabla \omega \cdot \nabla u + \omega \nabla \kappa \cdot \nabla u + \omega (\mathbf{a} \cdot \nabla u) - \omega f) dx dy - \oint_{\Gamma} \kappa \omega (\mathbf{n} \cdot \nabla u) ds = 0 \quad (2.78)$$

elde edilir.

Burada, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ Γ sınırında birim normal vektördür. Sınır integralinde ağırlık fonksiyonunun katsayısı,

$$p_n = \kappa(\mathbf{n} \cdot \nabla u) = n_x \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right) + n_y \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.79)$$

dır. Bu takdirde, (2.78) denklemi

$$\int_{\Omega} (\kappa \nabla \omega \cdot \nabla u + \omega \nabla \kappa \cdot \nabla u + \omega(\mathbf{a} \cdot \nabla u) - \omega f) dx dy - \oint_{\Gamma} \omega p_n ds = 0 \quad (2.80)$$

halini alır.

Problemin bu haline (2.76) probleminin zayıf hali denir. Problemimizde Dirichlet sınır koşulunun belirtildiği sınırdaki $\omega = 0$ koşulu sağlanacağından sınır integral terimleri düşer. Bu durumda,

$$\int_{\Omega} (\kappa \nabla \omega \cdot \nabla u + \omega \nabla \kappa \cdot \nabla u + \omega(\mathbf{a} \cdot \nabla u) - \omega f) dx dy = 0 \quad (2.81)$$

elde edilir.

2.6.3. Varyasyonel Hal

2.6.3.1. 1-D Varyasyonel Hal

Sonlu elemanlar yaklaşımı $u(x, y)$, Denklem (2.75) de yerine yazılarak

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(a\omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \kappa \frac{\partial \omega}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \omega \frac{\partial \kappa}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} - f\omega \right) dx \quad (2.82)$$

$$- \kappa \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0$$

elde edilir. $\omega = N_j^e$ eşitliği de Denklem (2.82) de yerine yazıldığında j -inci cebirsel denklem

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(aN_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \kappa \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e \right) dx \right] u_i^e - \int_{x_i}^{x_{i+1}} fN_j^e dx \quad (2.83)$$

$$- \kappa \sum_{i=1}^n N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

olarak elde edilir.

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(aN_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \kappa \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \kappa}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e \right) dx$$

$$F_j^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} fN_j^e dx$$

$$Q_{ij}^e = \kappa \sum_{i=1}^n N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} u_i^e \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

olmak üzere Denklem (2.83)

$$\sum_{i=1}^n K_{ij}^e u_i^e = F_j^e + Q_{ij}^e \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.84)$$

denkleminde denktir.

2.6.3.2. 2-D Varyasyonel Hal

(2.1) sonlu elemanlar yaklaşımı, Denklem (2.80) de yerine yazılarak

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \kappa \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) + \omega \left(\frac{\partial \kappa}{\partial x} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \kappa}{\partial y} \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + a_1 \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + a_2 \omega \sum_{i=1}^n u_i^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} - \omega f \right\} dx dy - \oint_{\Gamma_e} \omega p_n ds = 0 \quad (2.85)$$

elde edilir. 1-D durumuna benzer şekilde $\omega = N_j^e$ eşitliği (2.85) denkleminde yerine yazıldığında j -inci cebirsel denklem,

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega_e} \left\{ \kappa \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial \kappa}{\partial x} N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \kappa}{\partial y} N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + a_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + a_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} dx dy \right] u_i^e - \int_{\Omega_e} f N_j^e dx dy - \oint_{\Gamma_e} N_j^e p_n ds = 0, \quad j=1,2,\dots,n \quad (2.86)$$

biçiminde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} \left\{ \kappa \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) + \frac{\partial \kappa}{\partial x} N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial \kappa}{\partial y} N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} + a_1 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + a_2 N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right\} dx dy \\
F_j^e &= \int_{\Omega_e} f N_j^e dx dy \\
Q_j^e &= \oint_{\Gamma_e} N_j^e p_n ds
\end{aligned} \tag{2.87}$$

olmak üzere Denklem (2.86)

$$\sum_{i=1}^n K_{ij}^e u_i^e = F_j^e + Q_j^e, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{2.88}$$

formunda veya sınır koşullarının da dahil edilmesi ile genel matriks-vektör sistemi olarak

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{2.89}$$

sistemi elde edilir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bir önceki bölümde bir boyutlu ve iki boyutlu uzaylarda sabit ve değişken difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemleri için geliştirilen sonlu elemanlar yöntemi formülasyonları bazı örnek problemler üzerinde test edilip, bulunan sonuçların yorumları yapılacaktır.

3.1. 1-D Sabit Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi

Örnek 1

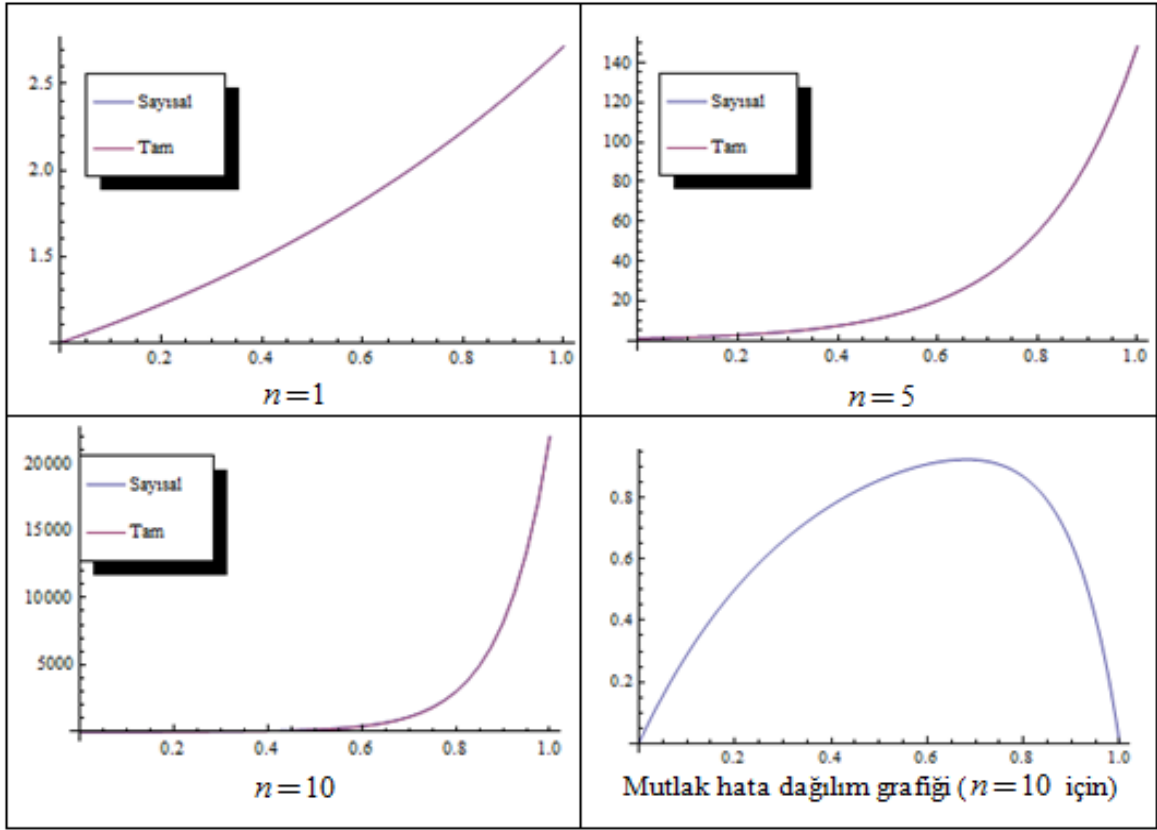
İlk örnek olarak

$$-U_{xx} - 3U_x = -e^{nx}n(n+3)$$

denklemini Dirichlet türü sınır koşulları ile tanımlanmış olsun. Sınır koşulları denklemin tam çözümü olan $U = e^{nx}$ eşitliğinden elde edilmektedir. Şekil 14’de $n = 1,5$ ve 10 değerleri için sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar ile gerçek çözüm değerleri karşılaştırılmış ve ayrıca $n = 10$ için sayısal çözüm ile gerçek çözüm arasındaki mutlak hatanın dağılımı grafik olarak verilmiştir. Denklemin gerçek çözümünün üstel fonksiyon olmasına ve üstel fonksiyonun çok hızlı artış göstermesine rağmen, sayısal yöntem ile elde edilen sonuçların gerçek çözüm ile uyumluluğu ve sonlu elemanlar yönteminin verimliliği gözlenmektedir. Mutlak hata grafiğinden de gerçek çözüm ile sayısal çözümün farkı ve çözümün yakınsaklığı gözlemlenebilir. Ayrıca Tablo 5’de elde edilen sonuçlarla ilgili en büyük mutlak hata ile birlikte, en büyük bağıl hata ve en büyük L^2 hata değerleri de sayısal olarak verilmiştir.

Tablo 5. Örnek 1 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları

	Mutlak Hata	Bağıl Hata	L^2 Hata
$n = 1$	0.00003	0.00002	0.00013
$n = 5$	0.05405	0.01270	0.25863
$n = 10$	0.92629	0.10717	9.9845



Şekil 14. Örnek 1 sayısal ve tam çözüm grafikleri

Örnek 2

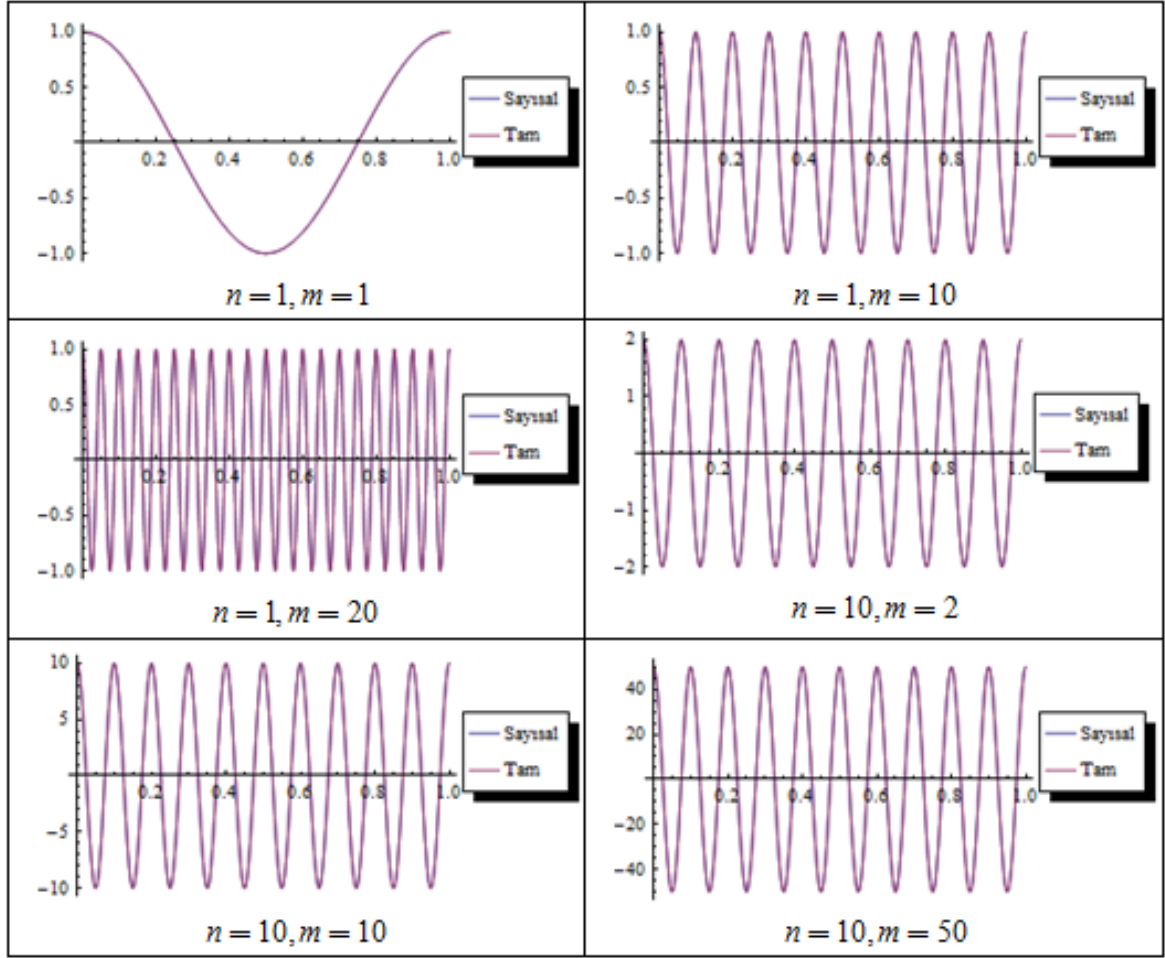
Bu örnekte, tam çözümü

$$U = n \cos(2\pi xm)$$

olan

$$U_{xx} + 2U_x = f(x)$$

diferensiyel denklemi incelenecektir. Tam çözümde m değeri ile birlikte çözümdeki salınım sayısı (periyot) ve n değeri ile genliği değiştirilerek sayısal çözüm sonuçları incelenecektir. Şekil 15'de farklı n ve m değerlerine karşılık elde edilen sonuçlar grafikler olarak, Tablo 6'da ise sayısal sonuçlar ile gerçek çözüm arasındaki mutlak hata, bağıl hata ve L^2 hata değerleri sayısal değerler olarak verilmektedir. n nin artması, çözümün genliğinin artmasına neden olmaktadır. Buna rağmen sayısal sonuçların gerçek çözüm ile uyumluluğu gözlenmektedir. Benzer şekilde, m nin artması ile periyot aralığı azalmakta ve salınım sayısı artmaktadır. Böylece fonksiyon hızlı şekilde değişim göstermektedir. Buna rağmen yine sonlu elemanlar yönteminin başarısı grafik ve tablo değerlerinden gözlemlenebilir.



Şekil 15. Örnek 2 sayısal ve tam çözüm grafikleri

Tablo 6. Örnek 2 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları

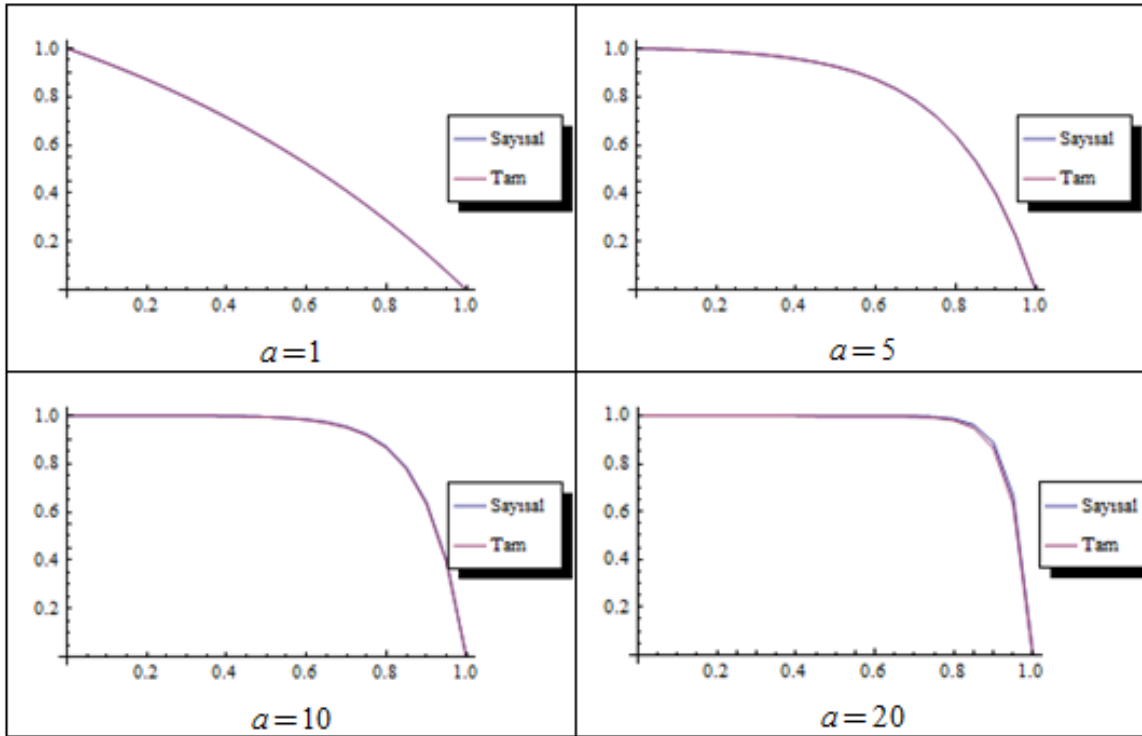
	Mutlak Hata	Bağıl Hata	L^2 Hata
$n = 1, m = 1$	0.00081295	0.00515176	0.00303583
$n = 1, m = 10$	0.00006749	0.00042835	0.00092645
$n = 1, m = 20$	0.00003325	0.00021049	0.00065485
$n = 10, m = 2$	0.00013498	0.00042835	0.00185289
$n = 10, m = 10$	0.00067489	0.00042835	0.00926447
$n = 10, m = 50$	0.00337443	0.00042835	0.0463224

Örnek 3

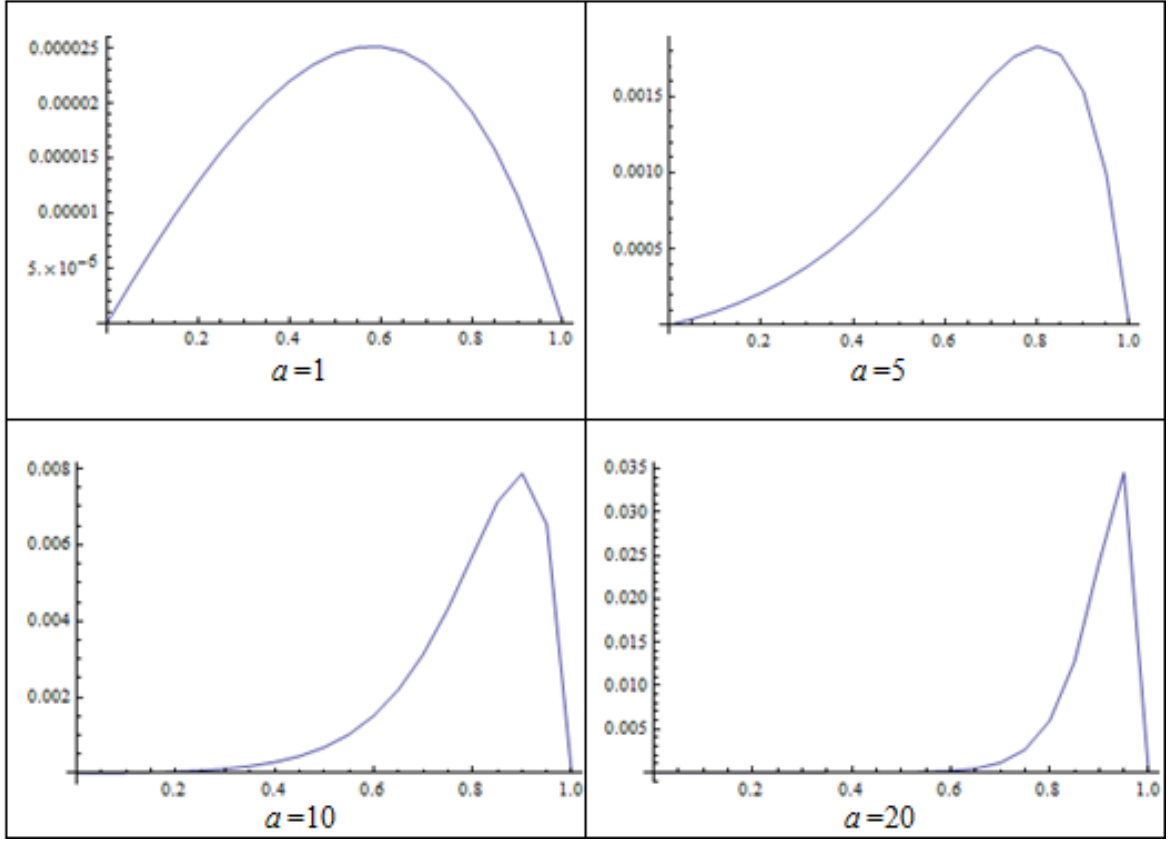
Bir boyutlu uzayda, sabit katsayılı konveksiyon-difüzyon denkleminin üçüncü örneği olarak, sınır tabaka problemi incelenecektir.

$$\begin{cases} -U_{xx} + aU_x = 0 \\ U(0) = 1, U(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminde, konveksiyon katsayısı olan a sabitinin artması ile $x=1$ sınır noktasında sınır tabakası oluşmaktadır. Bu davranış sayısal çözümlerden ve denklemin gerçek çözümü olan $U(x) = \frac{e^a - e^{ax}}{e^a - 1}$ eşitliğinden de gözlemlenebilir. Sınır tabaka problemlerinin sayısal çözümlerinde sayısal yöntemlerde bilinen kararlılık sorunları vardır. Bu sorunu gidermek için en çok kullanılan yöntemlerin başında, ayrıklaştırma nokta sayısını arttırmak, sınır tabakasının olduğu bölgede daha yoğun ayrıklaştırma noktası seçmek veya stabil bir sayısal yöntem formülasyonu kullanmak gelir. Şekil 16'da $a=1,5,10$ ve 20 değerleri için elde edilen sonuçların gerçek çözüm ile karşılaştırılması grafikler olarak verilmektedir. a nın küçük değerleri için sayısal sonuçlar gerçek çözüme çok yakın olmasına rağmen, a değeri büyüdükçe ($a=20$ için) sayısal çözüm ile gerçek çözümün farkı belirginleşmektedir. Her ne kadar sayısal çözümün yakınsaklığı için ayrıklaştırma nokta sayısını arttırmak gerekiyor olsa dahi, bu çözüm sayısal yöntemin maliyetini arttıracaktır. Sonuçlar benzer şekilde Tablo 7' de hata karşılaştırmaları ve Şekil 17'de hatanın değerleri ve dağılımları grafikler olarak verilmektedir. Sınır tabakasındaki hata artımı aynı şekilde hata dağılım grafiklerinden de gözlenmektedir.



Şekil 16. Örnek 3 sayısal ve tam çözüm grafikleri



Şekil 17. Örnek 3 mutlak hata dağılım grafikleri

Tablo 7. Örnek 3 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları

	Mutlak Hata	Bağlı Hata	L^2 Hata
$a=1$	0.0000251	0.0000819	0.000081
$a=5$	0.0018299	0.004480	0.004781
$a=10$	0.0078741	0.016589	0.015017
$a=20$	0.0345461	0.054651	0.044574

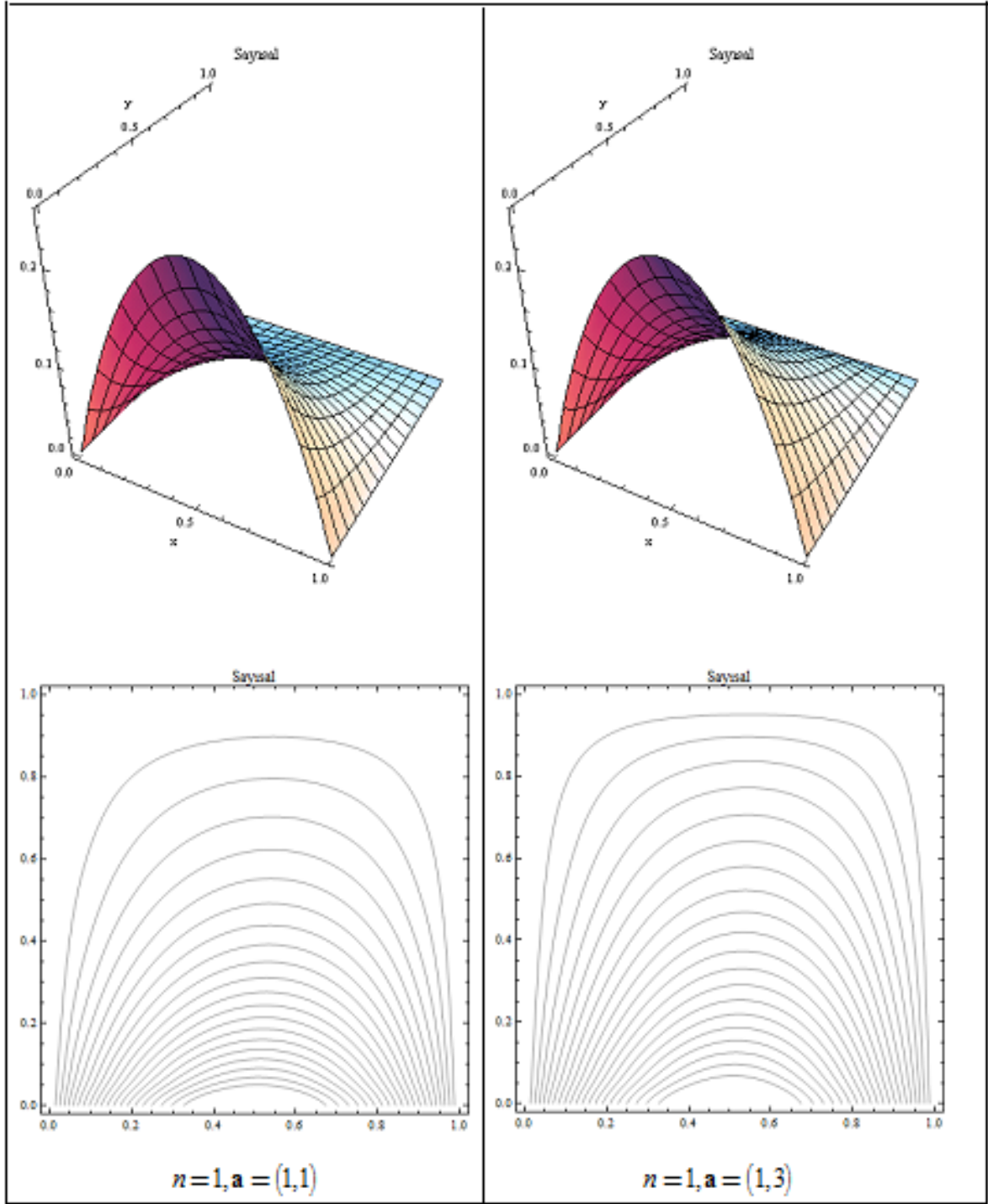
3.2. 2-D Sabit Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi

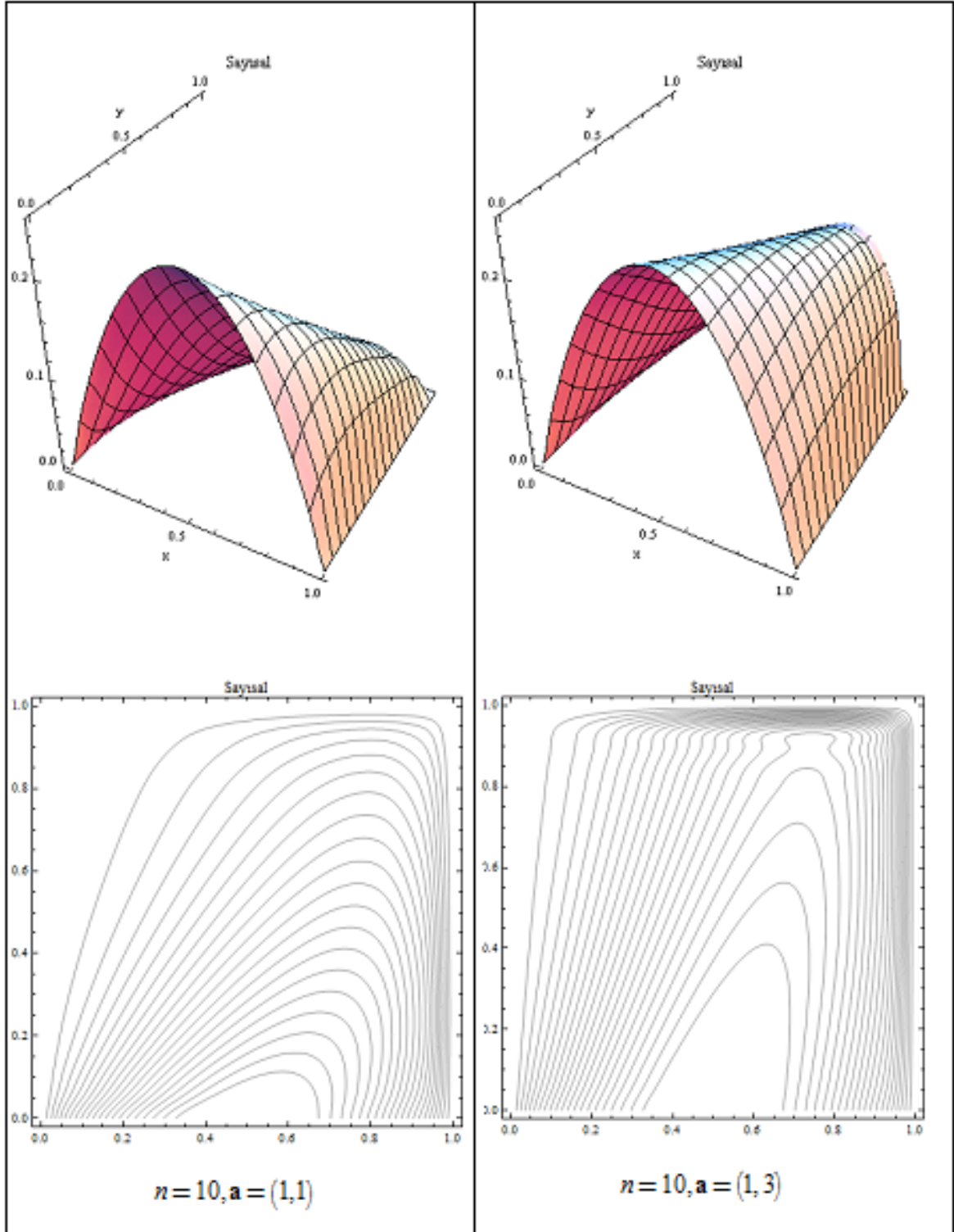
Bu bölümde iki boyutlu uzayda sabit katsayılı konveksiyon-difüzyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü bir boyutlu uzaydaki sınır tabaka problemine benzer bir örnek üzerinde incelenecektir.

$$-\nabla^2 U + n\mathbf{a} \cdot \nabla U = 0$$

diferensiyel denklemi $y=0$ alt sınırında $U=x(1-x)$ ve diğer sınırlarda $U=0$ Dirichlet türü sınır koşulları ile verilmektedir. Denklemin $n=1, 10$ ve $\mathbf{a}=(1,1), (1,3)$ değerleri için sayısal çözümleri elde edilmiş ve Şekil 18 ve Şekil 19'da üç boyutlu grafikler

ve izdüşüm eğrileri olarak sonuçlar gösterilmiştir. $n=1$ için, $\mathbf{a}=(1,1)$ değerinde, alt kenardan gelen akımın y eksenini boyunca ilerlemeye çalıştığı görülürken, $\mathbf{a}=(1,3)$ değerinde, konveksiyon katsayısında y bileşen değerinin artışından dolayı, $y=1$ sınırına doğru bir sınır tabakasının oluşmaya başladığı ve akımın üst kenara doğru yoğunlaşmaya çalıştığı ve kullanılan sayısal yöntemin bu davranışı belirgin bir şekilde yakaladığı gözlemlenmektedir. Aynı \mathbf{a} değerleri, $n=10$ için test edildiğinde, n değerinin artışından dolayı toplam konveksiyon terim katsayısı (vektörünün) artışı, $+y$ yönündeki sınır tabakasına ek olarak $+x$ yönünde de bir tabaka oluşmasına, dolayısıyla ikisinin birleşiminden sağ üst köşeye $(1,1)$ e doğru bir akım yoğunluğu gözlemlenmektedir. Bir önceki örnekte belirtildiği gibi, konveksiyon katsayısının artışının, sınır tabaka problemlerinde yarattığı kararlılık sorununun oluşmaya başladığı da $n=10$, $\mathbf{a}=(1,3)$ durumundaki grafikte gözlemlenmektedir.





Şekil 19. $n = 10$ için sayısal çözüm ve sayısal çözüm izdüşüm grafikleri

3.3. 1-D Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi

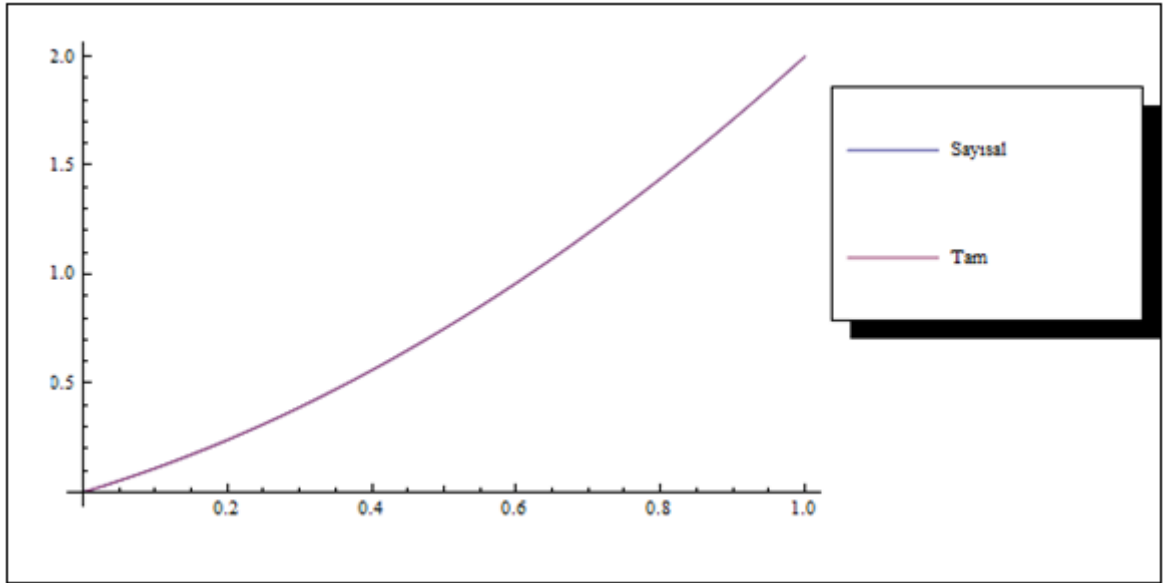
Sabit katsayılı konveksiyon-difüzyon denkleminin bir ve iki boyutlu uzaylarda sonlu elemanlar yönteminin sayısal çözümleri incelendikten sonra, bu bölümde değişken difüzyon katsayı durumları incelenecektir.

Örnek 1

Bir boyutlu uzayda ilk örnek olarak parabolik davranış gösteren polinom formdaki

$$-xU_{xx} + 2U_x = 2(x+1)$$

diferensiyel denklemi incelenecektir. Dirichlet türü sınır koşulları denklemin tam çözümü olan $U(x) = x^2 + x$ eşitliğinden elde edilmektedir. Az sayıda ayrıklaştırma nokta kullanılmasına rağmen sayısal çözümün tam çözüme olan yakınsaklığı Şekil 20'de grafik olarak, Tablo 8'de hata karşılaştırmaları olarak görülmektedir.



Şekil 20. Örnek 1 sayısal ve tam çözüm grafikleri

Tablo 8. Örnek 1 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları

Mutlak Hata	Bağıl Hata	L^2 Hata
2.66454×10^{-15}	2.70708×10^{-15}	8.43259×10^{-15}

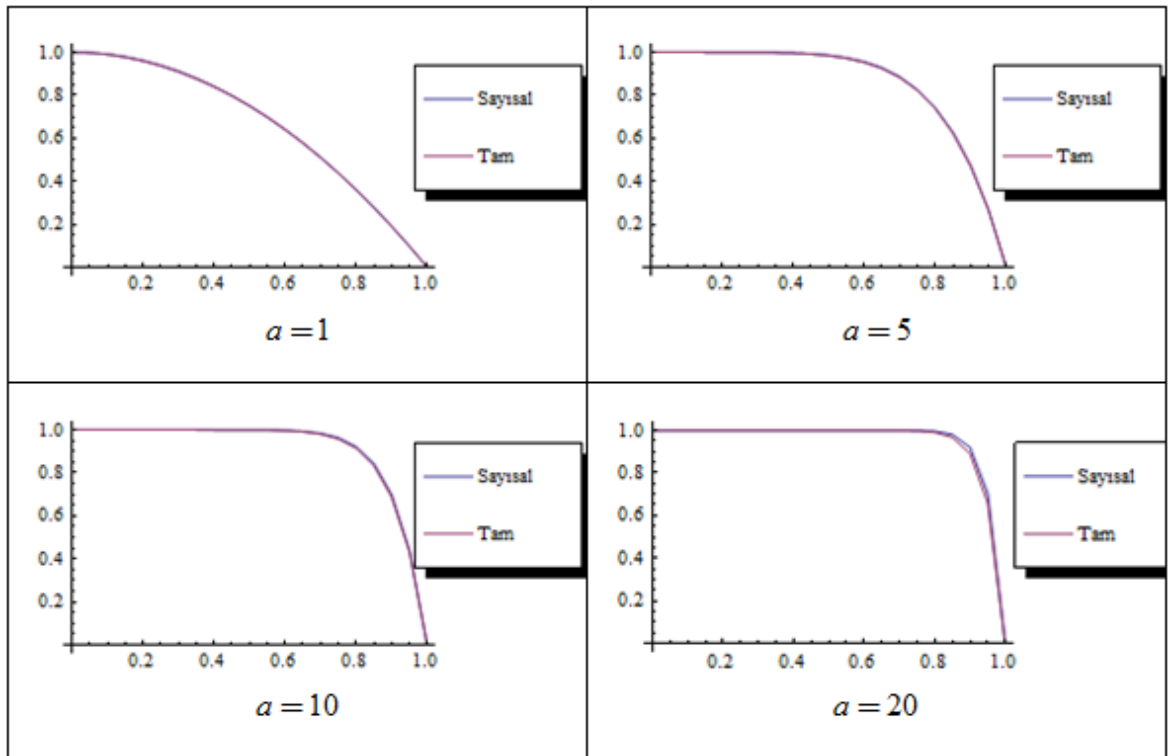
Örnek 2

Bir boyutlu uzayda sabit katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemi için çözülen Örnek 3 probleminin değişken difüzyon katsayılı durumu incelenecektir. Denklem ve sınır şartları

$$-x^2 U_{xx} + ax U_x = 0$$

$$U(0) = 1, U(1) = 0$$

eşitlikleri ile verilmektedir. Değişken difüzyon katsayılı sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen formülasyon, $a = 1, 5, 10$ ve 20 değerleri için test edilmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırmaları Şekil 21’de grafik ve Tablo 9’da hata değerleri türünden verilmiştir. Bir boyutlu uzaydaki duruma benzer şekilde, sınır tabakasının oluşumu ve a değerinin artımında sayısal çözümdeki hata artışı gözlemlenmektedir.



Şekil 21. Örnek 2 sayısal ve tam çözüm grafikleri

Tablo 9. Örnek 2 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları

	Mutlak Hata	Bağıl Hata	L^2 Hata
$a = 1$	0.0012438	0.0016966	0.004283
$a = 5$	0.0044259	0.0090283	0.0105584
$a = 10$	0.0124548	0.0242937	0.0221396
$a = 20$	0.0447802	0.0679066	0.0553636

3.4. 2-D Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Problemi

İki boyutlu uzayda değişken difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon problemi için

aşağıdaki test problemleri çözülecektir.

Örnek 1

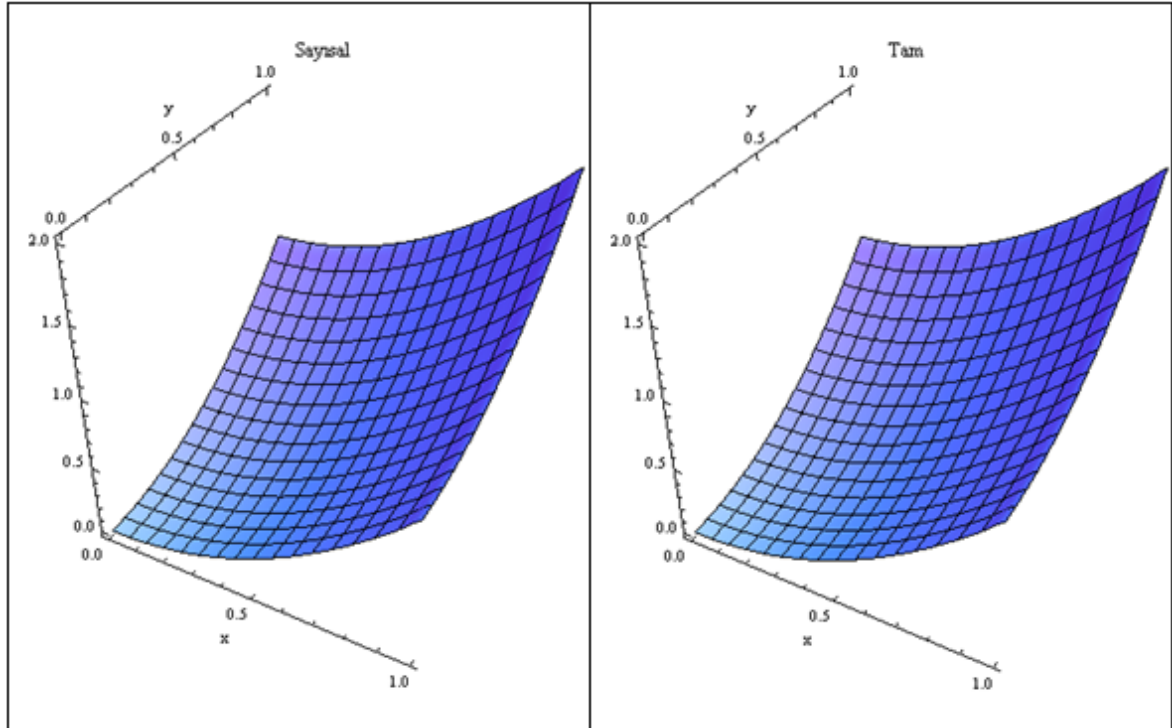
Formülasyon ilk olarak, basit formda polinom katsayılı

$$-(x+y)\nabla^2 U + (-2,3) \cdot \nabla U = 2y - 8x$$

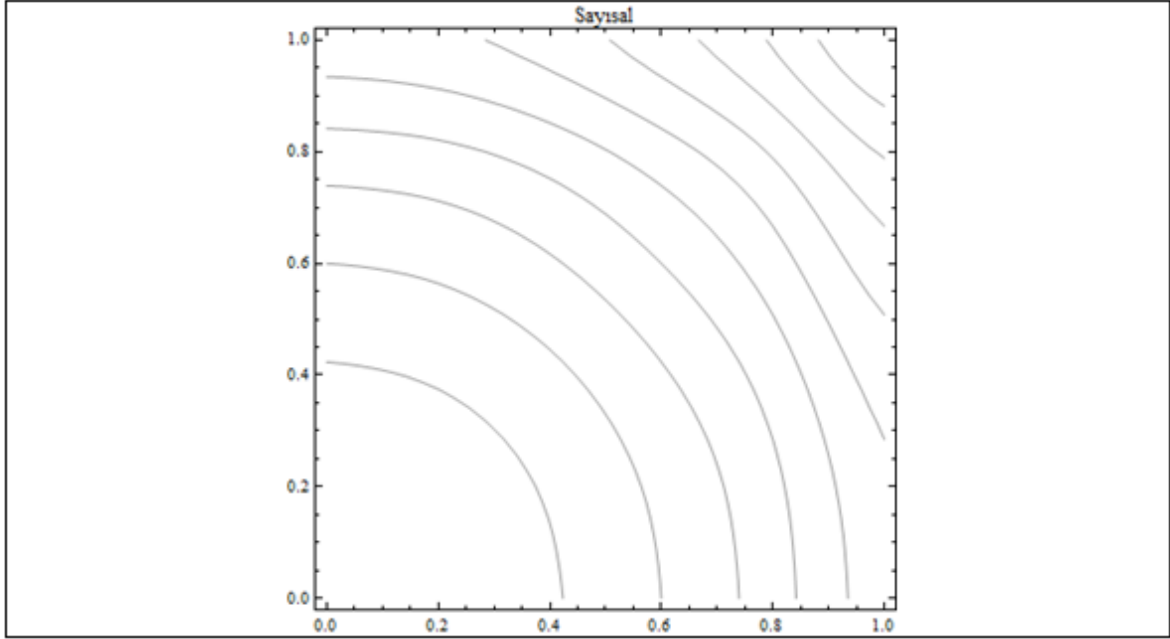
diferensiyel denklemi üzerinde test edilecektir. Denklemin tam çözümü de $U(x, y) = x^2 + y^2$ polinom formundadır. Sayısal çözüm ile tam çözüm sonuçları ve sayısal çözümün izdüşüm eğrileri Şekil 22 ve Şekil 23'de gösterilmektedir. Sayısal çözümün yakınsaklığı grafiklerden ve Tablo 10'da hata değer karşılaştırmalarından gözlemlenebilir.

Tablo 10. Örnek 1 tam çözüm ile sayısal çözüm hata karşılaştırmaları

Mutlak Hata	Bağıl Hata	L^2 Hata
8.88178×10^{-16}	1.9082×10^{-15}	2.30993×10^{-15}



Şekil 22. Örnek 1 sayısal ve tam çözüm grafikleri



Şekil 23. Örnek 1 sayısal çözüm izdüşüm grafiği

Örnek 2

Bu bölümde ise, sınırlarda hızlı düşüşün olduğu

$$-x^2 y \nabla^2 U_1 + (2, -9) \cdot \nabla U_1 = f_1(x, y)$$

ve çözüm bölgesi içerisinde ani değişimlerin olduğu

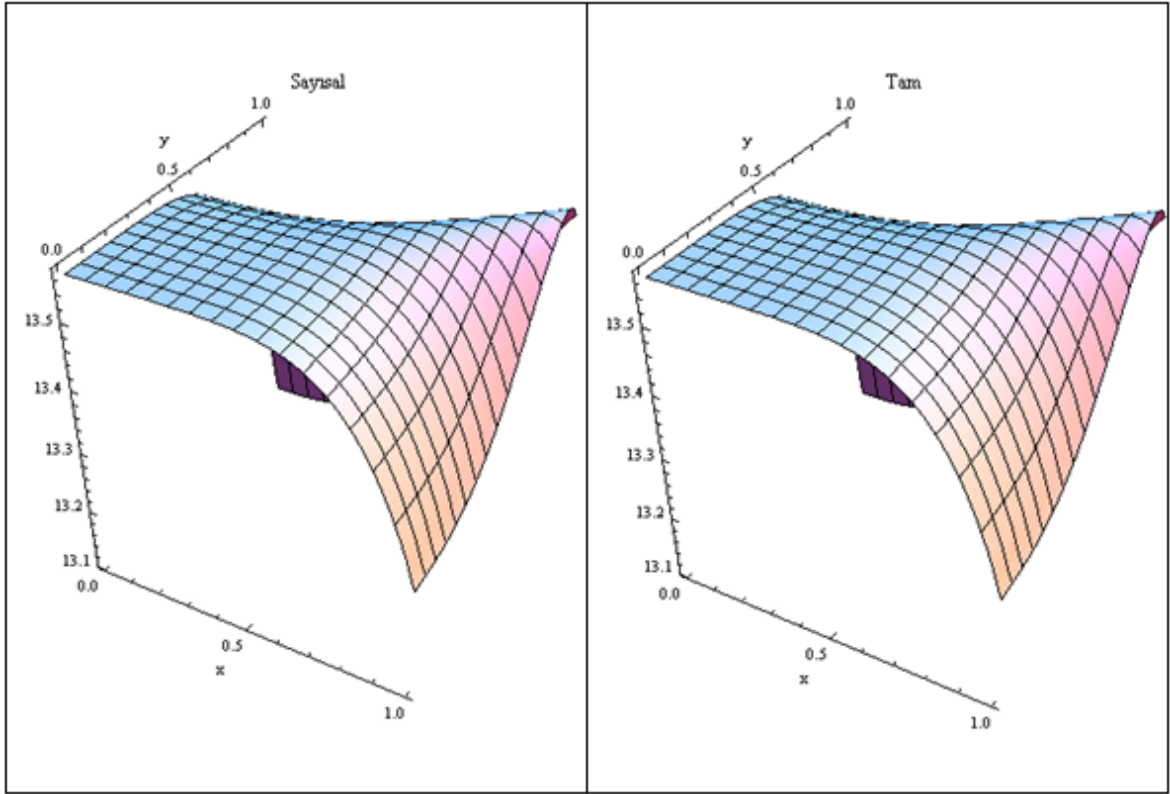
$$-Cosh(x - y) \nabla^2 U_2 + (-8, 5) \cdot \nabla U_2 = f_2(x, y)$$

denklemleri incelenecektir. Denklemlerde sağ taraf fonksiyonları ve Dirichlet türü sınır koşulları, denklemlerin tam çözümleri olan

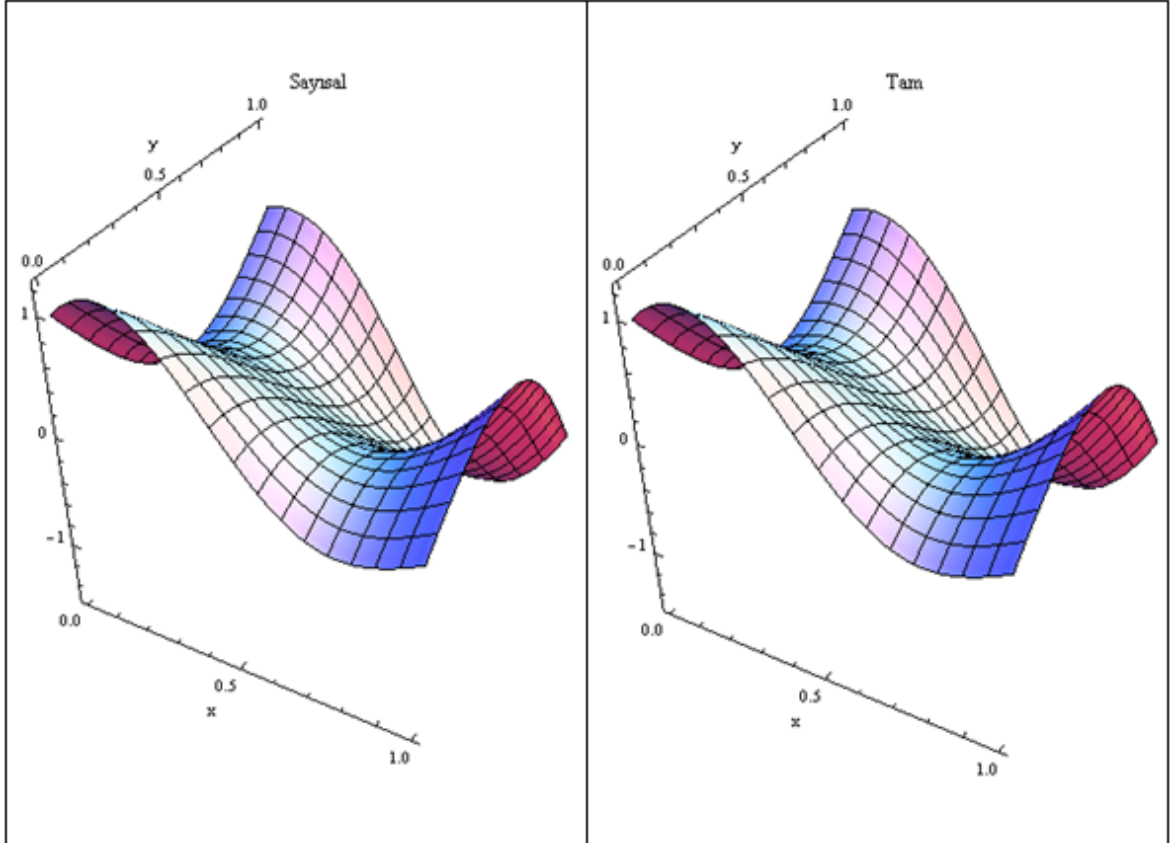
$$U_1(x, y) = 4\pi + \cos\left(\frac{\pi}{4}x^3 - y^3\right)$$

$$U_2(x, y) = \cos\left(\frac{3\pi x}{2} - y\right) + \sin(\pi(x - y))$$

eşitlikleri ile elde edilebilir. Her iki durumda da sayısal çözüm ile tam çözümün uyumluluğu gözlemlenmektedir.



Şekil 24. U_1 için sayısal ve tam çözüm grafikleri



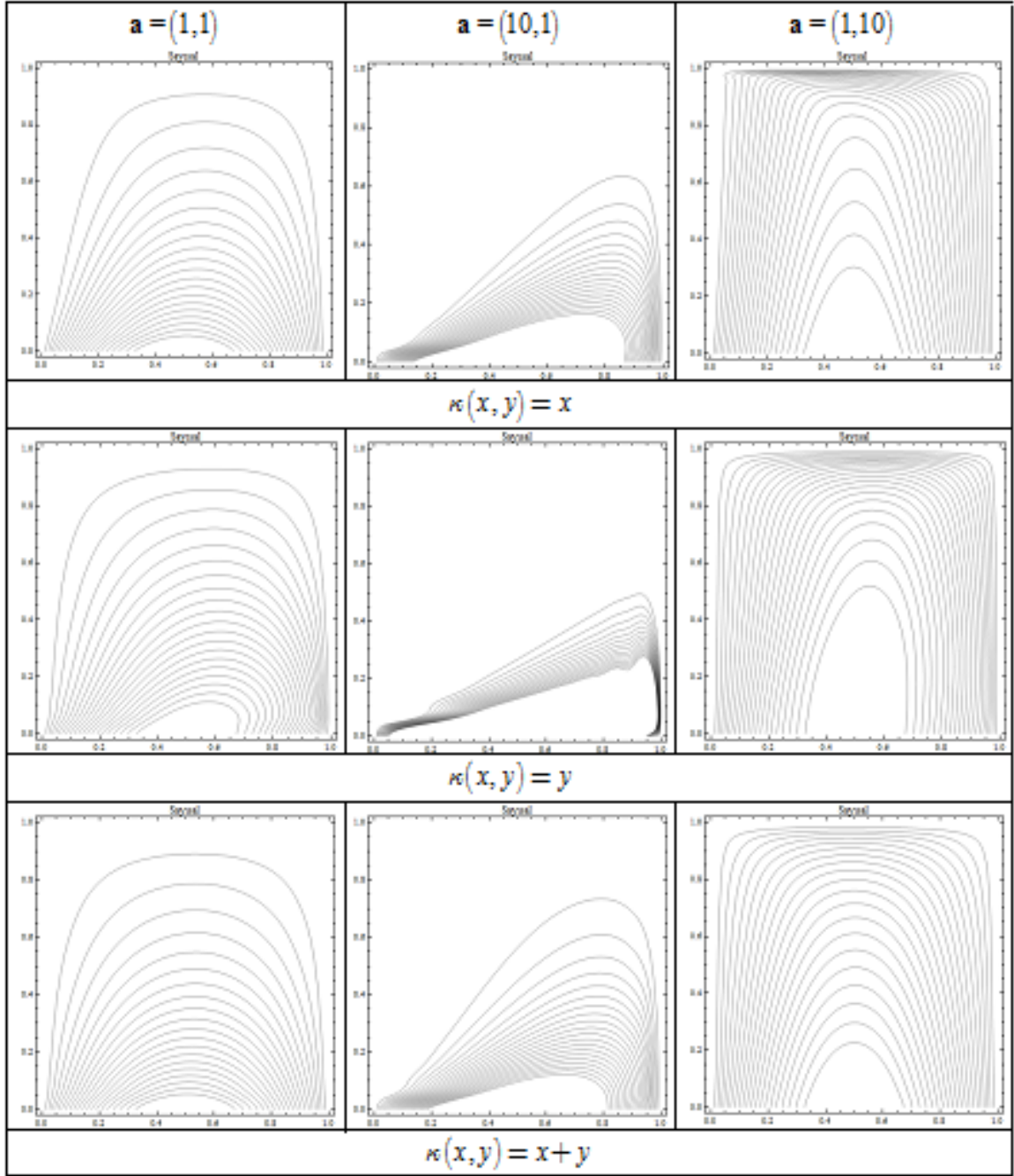
Şekil 25. U_2 için sayısal ve tam çözüm grafikleri

Örnek 3

Son olarak, iki boyutlu uzayda değişken difüzyon katsayılı

$$-\kappa(x, y)\nabla^2 U + \mathbf{a} \cdot \nabla U = 0$$

konveksiyon–difüzyon denkleminin değişik $\kappa(x, y)$ ve \mathbf{a} değerleri için çözümleri incelenmektedir. Sınır koşulları, sabit katsayılı Örnek 3.2 ile aynı alınmıştır. Sayısal sonuçların izdüşüm eğrileri $\kappa(x, y) = x, y, x + y$ durumlarına karşılık $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{a} = (10, 1)$ ve $\mathbf{a} = (1, 10)$ olmak üzere dokuz farklı durum için Şekil 26’da verilmiştir. İzdüşüm grafiklerinden difüzyon katsayısının değişimine konveksiyon katsayısının değer ve yön olarak değişim etkisi ve sınır tabakalarının oluşumu gözlenmektedir.



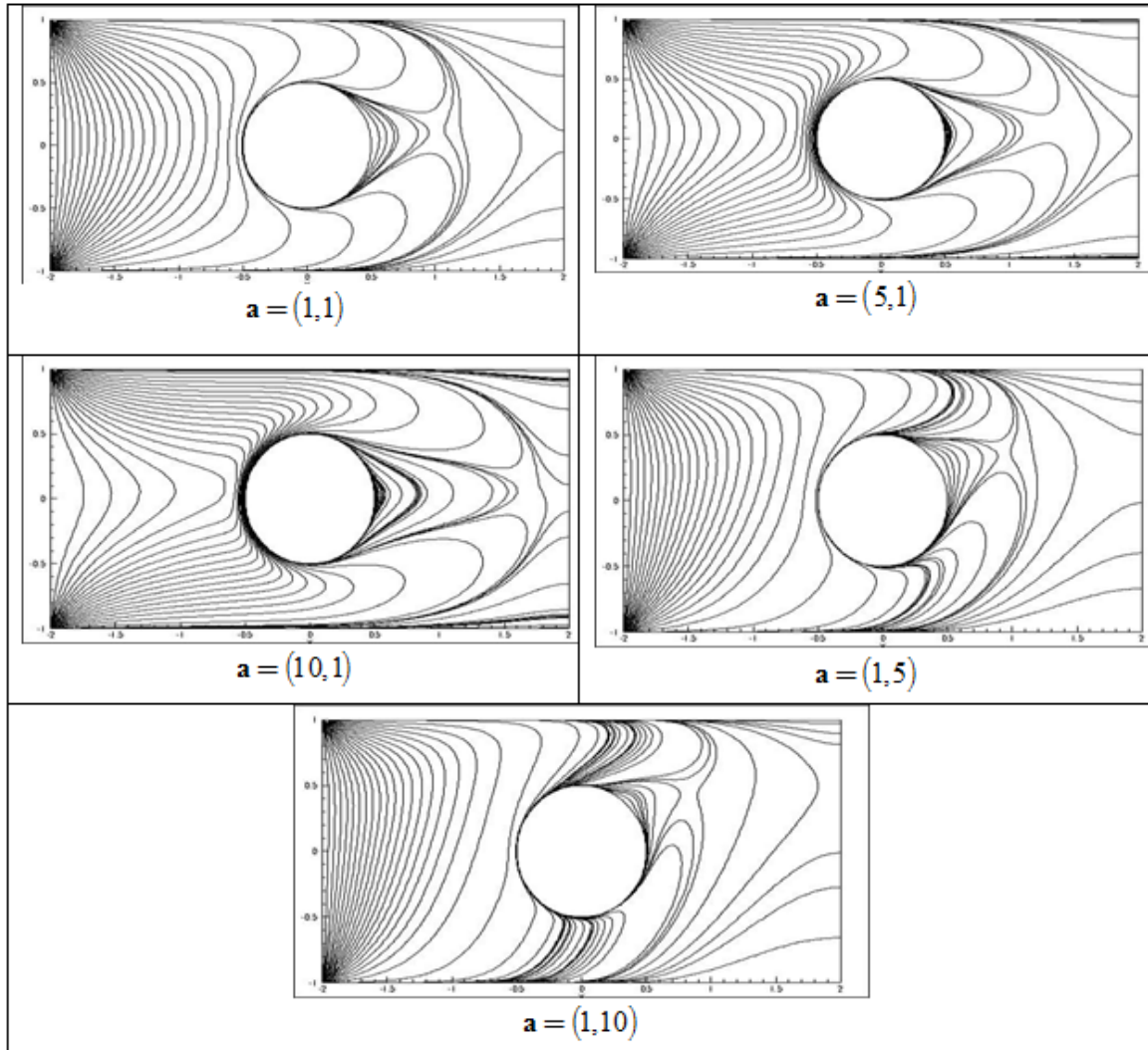
Şekil 26. Örnek 3 sayısal çözüm izdüşüm grafikleri

Örnek 4

İki boyutlu uzayda elde edilen formülasyonun değişik bölgeler üzerinde test edilmesi için, iki kenarı duvarlarla örülmüş kanal içerisinde bulunan silindir etrafındaki akımın değişken difüzyon katsayılı

$$-\kappa(x, y) \nabla^2 U + \mathbf{a} \cdot \nabla U = 0$$

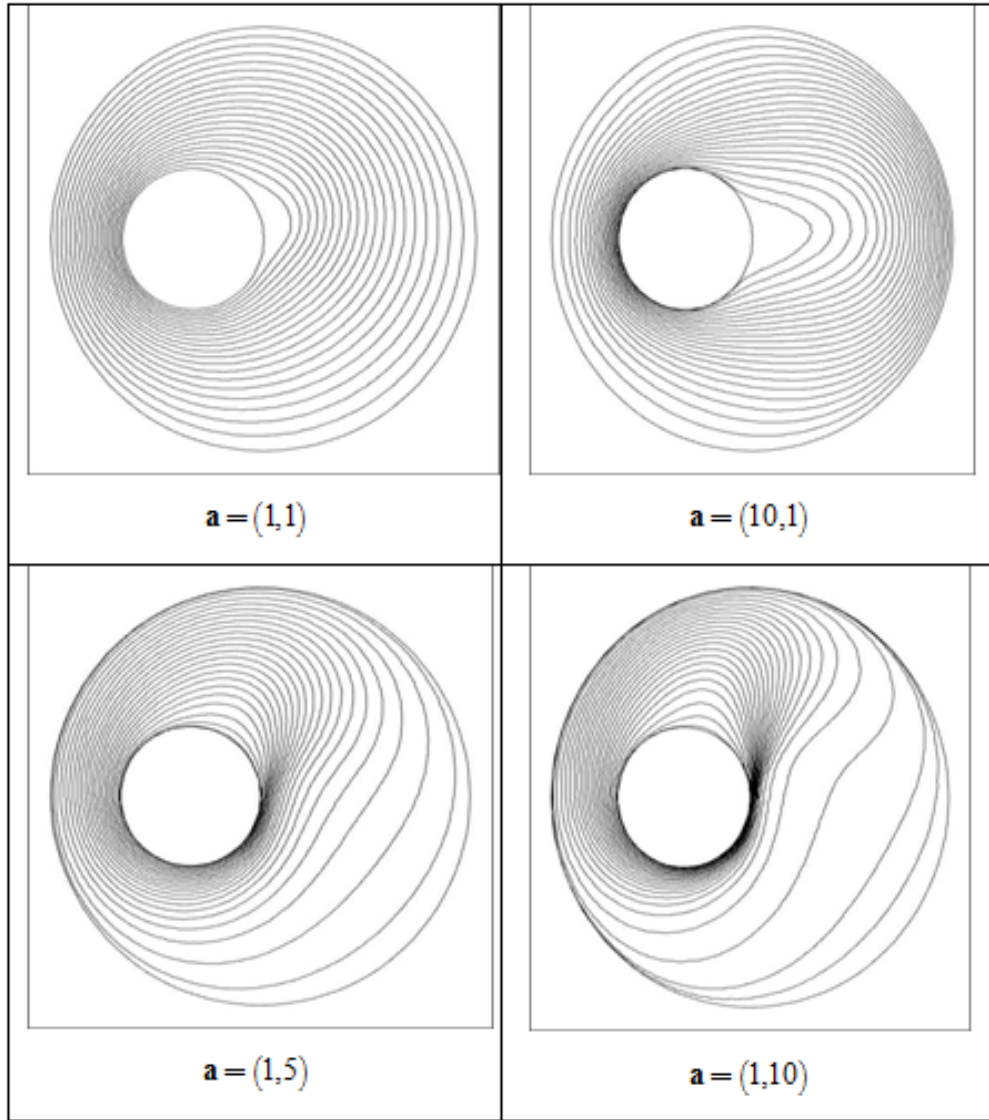
konveksiyon–difüzyon denklemi ile modellenmesi $\kappa(x, y) = x^2 + y^2$ olmak üzere değişik konveksiyon katsayıları için $\mathbf{a} = (1,1)$, $\mathbf{a} = (5,1)$, $\mathbf{a} = (10,1)$, $\mathbf{a} = (1,5)$ ve $\mathbf{a} = (1,10)$ olmak üzere beş farklı durum için Şekil 27’de verilmiştir. Sınır koşulları olarak, kanalın sol tarafından sabit hızla ($U=1$) sıvının girdiği kabul edilmektedir. Duvarlarda ve silindir etrafında sıvı akışı olmadığından $U=0$ olarak alınmaktadır. Kanalın çıkışında ise sıvı akışı serbest bırakılmaktadır ($\frac{\partial U}{\partial n} = 0$). Grafiklerinden konveksiyon katsayısının değişimine göre akımda meydana gelen hız ve yön değişiklikleri ile silindirin arkasındaki akım davranışındaki değişiklikler gözlenmektedir.



Şekil 27. Örnek 3 sayısal çözüm izdüşüm grafikleri

Örnek 5

Son olarak Örnek 4 teki denklemler, eş merkezli olmayan iki silindir bölge arasında test edilmektedir. İçteki silindir sabit kabul edildiğinden, iç silindir etrafında $U = 0$ ve dış silindir etrafında da sabit hızlı ($U = 1$) akım alınmaktadır. Benzer şekilde $\kappa(x, y) = x^2 + y^2$ olmak üzere değişik konveksiyon katsayıları için $\mathbf{a} = (1,1)$, $\mathbf{a} = (10,1)$, $\mathbf{a} = (1,5)$ ve $\mathbf{a} = (1,10)$ olmak üzere dört farklı durum için Şekil 28’de verilmiştir. Bir önceki örnekte olduğu gibi, grafiklerinden konveksiyon katsayısının değişimine göre akımda meydana gelen hız ve yön değişiklikleri bu örnek için de gözlenmektedir.



Şekil 28. Örnek 4 sayısal çözüm izdüşüm grafikleri

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada bir ve iki boyutlu uzaylarda konveksiyon-difüzyon denklemlerinin öncelikle difüzyon katsayısının sabit olduğu durumlardaki sonlu elemanlar yöntemi ile formülasyonu yapılmış, daha sonra elde edilen formülasyon Divergence teoremi yardımı ile değişken difüzyon katsayılı durumu için genelleştirilmiştir. Elde edilen formülasyonlar bir ve iki boyutlu uzaylarda sabit ve değişken difüzyon katsayılı değişik örnek problemler üzerinde test edilmiş ve yorumları yapılmıştır. Bulunan sonuçlardan, formülasyonların doğruluğu ve kullanılan sayısal yöntem olan sonlu elemanlar yönteminin başarısı gözlemlenmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemi ile sabit ve değişken difüzyon katsayılı konveksiyon-difüzyon denklemlerinin bir ve iki boyutlu uzaylarda sayısal çözümleri incelenmiştir. Tezde incelenen özellikle sınır tabaka problemlerinde, konveksiyon katsayısının baskın olduğu durumlarda sayısal yöntemin yetersizliği elde edilen sonuçların kararsızlığı olarak gözlemlenmiştir. Bu kararsızlıkları gidermek için, elde edilen formülasyonun kararlı sayısal yöntem formülasyonuna genelleştirilmesi, ileriki aşamalardaki çalışma olarak gerçekleştirilebilir.

Ayrıca, difüzyon katsayısının bilinmeyen fonksiyonu içerdiği durum ve konveksiyon teriminin bilinmeyen fonksiyon türünden doğrusal olmadığı durumlar için yapılan testlerde yakın çözümler elde edilememiştir. Belirtilen durumları da kapsayacak şekilde formülasyon genelleştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Özbaşı, C.Ö., Bidem:Sonlu Elemanlar Yöntemi
<http://bidem-cae.blogspot.com/2009/08/sonlu-elemanlar-analizi-tabitta.html> 9Ağustos 2009
2. Topcu, M. ve Taşgetiren, S., İki Boyutlu Problemler İçin Sonlu Elemanlar Ağı Oluşturulması, Journal of Engineering Science, 3, 2 (1997) 315-322.
3. Davies, A. J., The Finite Element Method: An Introduction with Partial Differential Equations, Second Edition, 1-6, Oxford University Press Inc., New York, 2011.
4. Logon, D. L., A First Course In The Finite Element Method, Fifth Edition, 2-4, Cengage Learning, USA, 2010.
5. [www.alghaform.com/Sonlu Elemanlar Yöntemi](http://www.alghaform.com/Sonlu-Elemanlar-Yontemi), 10.05.2009.
6. [www.elektrik.gen.tr/40 Soruda Marc Mentat ile Sonlu Elemanlar Analizi](http://www.elektrik.gen.tr/40-Soruda-Marc-Mentat-ile-Sonlu-Elemanlar-Analizi), 01.05.2008.
7. İREN, M., Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Bu Yöntemin Sınır Değer Problemlerine Uygulaması, Balıkesir Üniversitesi.
8. Huebner, K. H., Dewhirst, D. L., Smith, D.E. and Byrom, T.G., The Finite Element Method For Engineers, Fourt Edition,3-5, John Wiley & Sons.Inc., Canada, 2001.
9. Reddy, J. N., An Introduction to the Finite Element Method, The McGraw-Hill Companies, 2006.
10. Çepni, M. S. ve Deniz, R., Sonlu Elemanlar Yönteminin Dönüşümlerde Kullanılması, Jeodezi, Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi, 2, 93 (2005) 20-30.
11. Solin, P. and Avilla, J., Equidistributed Error Mesh for the Approximation of Exponential Boundary Layers, J. Comput. Appl. Math., 218, 1 (2008) 157-166.
12. Linß, T., Analysis of a Galerkin Finite Element Method on a Bakhvalov-Shishkin Mesh for a Linear Convection-Diffusion Problem, IMA Journal of Numerical Analysis, 20, 4 (2000) 621-623.
13. Linß, T., Layer-adapted Meshes for Convection-Diffusion Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 9-10 (2003) 1061-1105.
14. Braess, D., Finite Elements: Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
15. Uğurlu, E., İki Irisli Paralel Levhalı Dalga Kılavuzunun Sonlu Elemanlar Metodu Kullanılarak İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Gebze İleri teknoloji Enstitüsü,

Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Gebze, 2007.

16. Liu, G. R. and Quek, S. S., The Finite Element Method: A Practical Course, 129-160, Elsevier Science Ltd., Oxford, 2003.
17. Kythe, P. K. and Wei, D., An Introduction to Linear and Nonlinear Finite Element Analysis: A Computational Approach, 99-104, Birkhauser Boston, USA, 2004.
18. Flaherty, J. E. and Professor, A. E., Finite Element Analysis, Lecture Notes in Math, Newyork, 2000.
19. www.wikipedia.org/ Dirichlet Boundary Condition, 06.05.2012.
20. Sülü, E., Finite Element Methods For Partial Differential Equations, 2011.
21. Türk, Ö., The Finite Element Method Sollution of Reaction-Diffusion-Advection Equations in Air Pollution, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, 2008.
22. Shrikhande, M., Finite Element Method and Computational Structural Dynamics, Department of Eartquake Engineering Indian Institue of Technology Roorkee, India, 2008.
23. Salzman, P. J., GaussianQuadrature, 2001.
24. Sezer, R., Betonarme Plakların Sonlu Elemanlar Metodu ile Nonlineer Analizi, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 1995.
25. Nassehi, V. and Parvazinia, M., Finite Element Modeling of Multiscale Transport Phenomena, 1-13, Imperial College Press, London, 2011.

7. EKLER

Ek 1. Bir Boyut İçin Mathematica Program Kodu

```
Remove["Global`*"];
Clear["Global`"];
<<PlotLegends`
w=20;u0=1;u1=0;xs=0;xe=1;Nx=20;

κ[x_]:=x^2;
FindElKq[a_,b_,elnodenum_]:=Module[{elK,elq,i,j},elK=Table[0,{i,1,elnodenum},{j,1,elnodenum}];
  elq=Table[0,{i,1,elnodenum}];N1=(x-b)/(a-b);N2=(x-a)/(b-a);
  For[i=1,i≤elnodenum,i++,
    For[j=1,j≤elnodenum,j++,
      fi=w x D[Nj,x] N1+κ[x]*D[Ni,x]*D[Nj,x]+D[κ[x],x]*D[Nj,x]*N1;
      elK[[i,j]]=NIntegrate[fi,{x,a,b}];
    ];
    elq[[i]]=0.0;
  ];
  {elK,elq}
];

Uex[x_]:=1-x^(1+w);
elnum=Nx;glnodenum=Nx+1;elnodenum=2;

node=Table[0,{j,1,Nx},{i,1,2}];
For[i=1,i≤Nx,i++,node[[i,1]]=i;node[[i,2]]=i+1;]

glK=SparseArray[{},{glnodenum,glnodenum}];
glq=Table[0.0,{i,1,glnodenum}];
elK=Table[0,{i,1,elnodenum},{j,1,elnodenum}];
elq=Table[0,{i,1,elnodenum}];

For[k=1,k≤elnum,k++,
  {elK,elq}=FindElKq[xd[[k]],xd[[k+1]],elnodenum];
  For[i=1,i≤elnodenum,i++,
    glq[[node[[k,i]]]]+=elq[[i]];
    For[j=1,j≤elnodenum,j++,
      glK[[node[[k,i]],node[[k,j]]]]+=elK[[i,j]];
    ];
  ];
];

For[i=1,i≤glnodenum,i++,
  glq[[i]]+=-u0*glK[[i,1]];If[i≠1,glK[[i,1]]=0;glK[[1,i]]=0];];
```


Ek 1 devamı

```

For[i=1,i≤glnodenum,i++,
  glq[[i]]+=-u1*glK[[i,glnodenum]];
  If[i≠glnodenum,glK[[i,glnodenum]]=0;glK[[glnodenum,i]]=0];
];
glq[[1]]=u0;
glq[[glnodenum]]=u1;

glK[[1,1]]=glK[[glnodenum,glnodenum]]=1;
VStr=LinearSolve[glK,glq,Method→"Multifrontal"];

VnD=Table[VStr[[i]],{i,1,glnodenum}];
VeD=Table[Uex[xd[[i]]],{i,1,Nx+1}]/N;
ListPlot[{VnD,VeD},PlotRange→All,DataRange→{0,1},Joined→True,PlotLegend→{"N
ümerik Çözüm","Gerçek Çözüm"},LegendPosition→{1,-1},ImageSize→{600,300}]
Max[Abs[VnD-VeD]]
Sqrt[Sum[(VnD[[i]]-VeD[[i]])^2,{i,1,Nx+1}]]

```

Ek 2. İki Boyut İçin Mathematica Program Kodu

```

Remove["Global`*"];
Clear["Global`"];
<<PlotLegends`

funbdry[x_]:=x(1-x);
tdf=4;
κ[x_,y_]:=y;
ife[x_,y_]:=Module[{eps},eps=10^(-15);If[Abs[x-y]≤eps,1,0]]

FindElKqRec[elnodenum_]:=Module[{elK,elq,i,j},
  elK=Table[0,{j,elnodenum},{i,elnodenum}];
  elq=Table[0,{i,elnodenum}];
  Table[elK[[i,j]]+=(κ[x,y]*(dxNi dxNj+dyNi
dyNj)+((D[κ[s,t],s]/. {s→x,t→y})dxNj+(D[κ[s,t],t]/. {s→x,t→y})dyNj+bx *dxNj+by*
dyNj)Ni)*Jcbn*gwt[[tdf,k]]*gwt[[tdf,l]]/. {ζ→gpt[[tdf,k]],η→gpt[[tdf,l]]};,{k,tdf},{l,tdf},{
j,elnodenum},{i,elnodenum}];
  Table[elq[[i]]+=0.0*Ni*Jcbn*gwt[[tdf,k]]*gwt[[tdf,l]]/. {ζ→gpt[[tdf,k]],η→gpt[[tdf,l]]};,
{k,tdf},{l,tdf},{i,elnodenum}];
  {elK,elq}
]

FindElKqTri[elnodenum_]:=Module[{elK,elq,i,j,k},
  elK=Table[0,{j,elnodenum},{i,elnodenum}];
  elq=Table[0,{i,elnodenum}];

  Table[elK[[i,j]]+=(κ[x,y]*(dxNi dxNj+dyNi
dyNj)+((D[κ[s,t],s]/. {s→x,t→y})dxNj+(D[κ[s,t],t]/. {s→x,t→y})dyNj+bx *dxNj+by*
dyNj)Ni)*Jcbn*gwt[[tdf,k]]/. {ζ→gpt[[tdf,2k-1]],η→gpt[[tdf,2k]]};,{k,tdf},{j,elnodenum},
{i,elnodenum}];
  Table[elq[[i]]+=0.0*Ni*Jcbn*gwt[[tdf,k]]/. {ζ→gpt[[tdf,2k-1]],η→gpt[[tdf,2k]]};,
{k,tdf},{i,elnodenum}];
  {elK,elq}
]

xs=0.0;xe=1.0;ys=0.0;ye=1.0;bx=10;by=1;
eltype=3; (* 3:triangle 4:rectangle*)
Nx=20;
Ny=Nx;
dx=(xe-xs)/Nx;dy=(ye-ys)/Ny;yd=Join[Table[j*dy,{j,0,Ny-1}]]/N,{ye}];xd=Join[Table[j*
dx,{j,0,Nx-1}]]/N,{xe}];
elnum=Nx*Ny;
If[eltype==3,elnum=2*elnum];

SetDirectory["D:\\mthmtca"];
<<"Gauss.m"

```

Ek 2 devamı

```

glnodenum=(Nx+1)(Ny+1);
elnodenum=eltype;
glxy=Table[0,{i,glnodenum},{j,2}];
For[i=1,i<=(Ny+1),i++,
  For[j=1,j<=(Nx+1),j++,
    glxy[[i-1)(Nx+1)+j,1]]=xd[[j]];
    glxy[[i-1)(Nx+1)+j,2]]=yd[[i]];
  ];
];

node=Table[0,{j,1,elnum},{i,1,eltype}];

If[eltype==3,
  For[ i=1,i<=Ny,i++,
    For[j=1,j<=Nx,j++,
      node[[((i-1)*Nx+j)*2-1,1]]=(i-1)*(Nx+1)+j;
      node[[((i-1)*Nx+j)*2-1,2]]=(i-1)*(Nx+1)+j+1;
      node[[((i-1)*Nx+j)*2-1,3]]=i*(Nx+1)+j;

node[[((i-1)*Nx+j)*2,1]]=i*(Nx+1)+j+1;node[[((i-1)*Nx+j)*2,2]]=i*(Nx+1)+j;node[[((i-1)*
)*Nx+j)*2,3]]=(i-1)*(Nx+1)+j+1;
    ];
  ];
  ,
  For[i=1,i<=Ny,i++,
    For[ j=1,j<=Nx,j++,

node[[i-1)*Nx+j,1]]=(i-1)*(Nx+1)+j;node[[i-1)*Nx+j,2]]=(i-1)*(Nx+1)+j+1;node[[i-1)*
Nx+j,3]]=i*(Nx+1)+j+1;
      node[[i-1)*Nx+j,4]]=i*(Nx+1)+j;
    ];
  ];
];

nbdryn=0;
ibdry={};
vbdry={};
For[i=1,i<=glnodenum,i++,
  xb=glxy[[i,1]];
  yb=glxy[[i,2]];
  If[ife[xb,xs]==1,nbdryn++;ibdry=Join[ibdry,{i}];vbdry=Join[vbdry,{0}];,
  If[ife[xb,xe]==1,nbdryn++;ibdry=Join[ibdry,{i}];vbdry=Join[vbdry,{0}];,
  If[ife[yb,ys]==1,nbdryn++;ibdry=Join[ibdry,{i}];vbdry=Join[vbdry,{funbdry[xb]}];,
  If[ife[yb,ye]==1,nbdryn++;ibdry=Join[ibdry,{i}];vbdry=Join[vbdry,{0}];
  ]; ]; ]; ];

```

Ek 2 devamı

```

If[elnodenum==3
,N1=ζ;N2=η;N3=1-ζ-η;ζa=0;ζb=1;ηa=0;ηb=1-ζ;
invA=Inverse[{{0,0,1},{1,0,1},{0,1,1}}];
elx={x1,x2,x3};
ely={y1,y2,y3};
α=invA . elx;
β=invA . ely;
Jcbn=α[[1]]*β[[2]]-α[[2]]*β[[1]];
x=α[[1]]ζ+α[[2]]η+α[[3]];
y=β[[1]]ζ+β[[2]]η+β[[3]];

invB=Inverse[{{tα1,tβ1,1},{tα2,tβ2,1},{tα3,tβ3,1}}];
elζ={1,0,0};
elη={0,1,0};
iα=invB . elζ;
iβ=invB . elη;
Table[{dxNi=D[Ni,ζ]
iα[[1]]+D[Ni,η]iβ[[1]],dyNi=D[Ni,ζ]iα[[2]]+D[Ni,η]iβ[[2]]},{i,elnodenum}];

,N1=(1-ζ)(1-η)/4;N2=(1+ζ)(1-η)/4;N3=(1+ζ)(1+η)/4;N4=(1-ζ)(1+η)/4;ζa=-1;ζb=1;ηa=-1;η
b=1;
invA=Inverse[{{-1,-1,1,1},{1,-1,-1,1},{1,1,1,1},{-1,1,-1,1}}];
elx={x1,x2,x3,x4};
ely={y1,y2,y3,y4};
α=invA . elx;
β=invA . ely;
Jcbn=(α[[1]]+α[[3]]η)*(β[[2]]+β[[3]]ζ)-(α[[2]]+α[[3]]ζ)*(β[[1]]+β[[3]]η);
x=α[[1]]ζ+α[[2]]η+α[[3]]ζ η + α[[4]];
y=β[[1]]ζ+β[[2]]η+β[[3]]ζ η + β[[4]];

invB=Inverse[{{tα1,tβ1,tα1 tβ1,1},{tα2,tβ2,tα2 tβ2,1},{tα3,tβ3,tα3 tβ3,1},{tα4,tβ4,tα4
tβ4,1}}];
elζ={-1,1,1,-1};
elη={-1,-1,1,1};
iα=invB . elζ;
iβ=invB . elη;

Table[{dxNi=D[Ni,ζ](iα[[1]]+iα[[3]]y)+D[Ni,η](iβ[[1]]+iβ[[3]]y),dyNi=D[Ni,ζ](iα[[2]]+i
α[[3]]x)+D[Ni,η](iβ[[2]]+iβ[[3]]x)},{i,elnodenum}];
];

glK=SparseArray[{},{glnodenum,glnodenum}];
glq=Table[0.0,{i,1,glnodenum}]

```

Ek 2 devamı

```

elK=Table[0,{i,1,elnodenum},{j,1,elnodenum}];
elq=Table[0,{i,1,elnodenum}];

For[k=1,k<=elnum,k++,
  If[elnodenum==3
    ,{tα1,tα2,tα3}={x1,x2,x3}=Table[glxy[[node[[k,i]],1]],{i,eltype}];
    {tβ1,tβ2,tβ3}={y1,y2,y3}=Table[glxy[[node[[k,i]],2]],{i,eltype}];
    {elK,elq}=FindElKqTri[elnodenum];
    ,{tα1,tα2,tα3,tα4}={x1,x2,x3,x4}=Table[glxy[[node[[k,i]],1]],{i,eltype}];
    {tβ1,tβ2,tβ3,tβ4}={y1,y2,y3,y4}=Table[glxy[[node[[k,i]],2]],{i,eltype}];
    {elK,elq}=FindElKqRec[elnodenum];
  ];

  For[i=1,i<=elnodenum,i++,
    glq[[node[[k,i]]]]+=elq[[i]];
    For[j=1,j<=elnodenum,j++,
      glK[[node[[k,i]],node[[k,j]]]]+=elK[[i,j]];
    ];
  ];
]

For[i=1,i<=nbdryn,i++,
  bpt=ibdryn[[i]];
  vpt=vbdryn[[i]];
  For[j=1,j<=glnodenum,j++,
    If[glK[[j,bpt]]≠0,glq[[j]]-=glK[[j,bpt]]*vpt;glK[[j,bpt]]=0;];
    glK[[bpt,j]]=0.0;
  ];
  glK[[bpt,bpt]]=1.0;
  glq[[bpt]]=vpt;
];

VnD=Partition[LinearSolve[glK,glq,Method->"Multifrontal"],Nx+1];
ListPlot3D[VnD,PlotLabel->"Nümerik
Çözüm",AxesLabel->{"x","y"},DataRange->{{xs,xs},{ys,ys}},InterpolationOrder->3,PlotPoints->27,BoxRatios->{1,1,1},Boxed->False]
ListContourPlot[VnD,InterpolationOrder->3,ContourShading->None,Contours->20,DataRange->{{xs,xs},{ys,ys}},PlotLabel->"Nümerik Çözüm",AxesLabel->{"x","y"}]

```

ÖZGEÇMİŞ

Canan ÇİFTÇİ, 01.04.1986 yılında Karakoçan' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir' de tamamladı. 2005-2006 eğitim-öğretim yılı güz döneminde Ondokuz Mayıs Üniversitesi Ordu Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne başladı. 2008-2009 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Ordu Üniversitesini birincilikle bitirdi. 2009-2010 eğitim-öğretim yılı güz döneminde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 09.02.2010 tarihinde Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Orta seviyede İngilizce bilmektedir.