KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK GEOMETRİ VE NORMALLİYEN YAPISI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeliha AYDIN

MAYIS 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK GEOMETRİ VE NORMALLİYEN YAPISI

Zeliha AYDIN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :16.04.2012
Tezin Savunma Tarihi :11.05.2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Zeliha AYDIN Tarafından Hazırlanan

HİPERBOLİK GEOMETRİ VE NORMALLİYEN YAPISI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 17.04.2012 tarih ve 1453/1 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**:Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ**	....
Üye	**:Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ**	....
Üye	**:Prof. Dr. Hilmi ZENGİN**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖN SÖZ

Lisans ve yüksek lisans eğitim sürecim boyunca, çalışmalarımda bana yol gösteren ve tezimin bu hale gelmesinde emeği sonsuz olan hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Eğitim ve öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim annem Asiye Aydın ile babam Hayri Aydın'a teşekkür ederim.

Ayrıca tez bitirme sürecimde bana yardımcı olup vaktini ayıran Sayın Dr. Ali Hikmet DEĞER ve Sayın Dr. Murat Beşenk ile K.T.Ü. Matematik Bölümü akademisyenlerine de teşekkürü bir borç bilirim.

Zeliha AYDIN

Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Hiperbolik Geometri ve Normalliyen Yapısı" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ' ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri ve örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 16/04/2012

Z. Aydın

Zeliha AYDIN

İÇİNDEKİLER

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

HİPERBOLİK GEOMETRİ VE NORMALLİYEN YAPISI

Zeliha AYDIN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2012, 56 Sayfa

Bu tez çalışmasında Öklid geometrisinden farklı olarak hiperbolik geometriyi ortaya koyacak temel yapılar; $\Gamma_\circ(N)$ kongrüans grubunun H üst yarı düzlemi kendi üzerine resmeden homeomorfizmler grubu olan $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni araştırılmıştır.

Birinci bölümde temel teşkil edecek hiperbolik geometri kavramı ve ilgili Möbiüs dönüşümleri ve üst yarı düzlem ile ilişkileri verilmiştir. İkinci bölüm tezin esasını veren bölümdür. Burada esas itibariyle $\Gamma_\circ(N)$ kongrüans grubunun normalliyeni verilmiş ve $\Gamma_\circ(N)$ ile oluşan tüm grupların yapısı araştırılarak ilgili sonlu gruplar, alt grupların bir direkt çarpımı olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Geometri, Möbiüs dönüşümleri, Kongrüans alt gruplar, Normalliyen, Atkin- Lehner involüsyonları

Master Thesis

SUMMARY

HYPERBOLIC GEOMETRY AND THE STRUCTURE OF THE NORMALIZER

Zeliha AYDIN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
2012, 56 Pages

In this thesis hyperbolic geometry which is different from Euclidean geometry is given and the group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ of the homeomorphisms from the upper half plane into itself is constructed.

Chapter 1 is concerned with the study of some basic concepts of hyperbolic geometry and the Mobius transformations related to the upper half plane H. Chapter 2 is the main chapter in the theses. Here we obtain the normalizer $\Gamma_B(N)$ of the congruence subgroup $\Gamma_\circ(N)$ in the group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. And furthermore all finite subgroups extracted from the normalizer are examined and that the necessary and sufficient conditions for these finite groups to be a direct product for some subgroups are given.

Key Words: Hyperbolic Geometry, Möbius Transformations, Congruans subgroups, Normalizer, Atkin-Lehner Involutions.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\forall$	: Her
$\exists$	: Bazı
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir.
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{H}$	: Hiperbolik Düzlem
$\Longrightarrow$	: İse
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$\subseteq$	: Alt Küme
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
$\circ$	: Bileşke İşlemi
$\leq$	: Alt grup
$\lhd$	: Normal Alt Grup
$\otimes$	: Direkt Çarpım
$\langle \quad \rangle$	: Devirli grup
∞	: Sonsuz
Γ	: Modüler grup
$\Gamma_0(n)$	: Modüler grubun $c \equiv 0 \pmod{n}$ olan alt grubu
$\varphi(\mathrm{N})$	: Euler fonksiyonu
$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$	: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu
$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$	: Katsayıları tamsayı olan lineer matrislerin grubu
$\otimes_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_{\mathrm{i}}$	: $\mathrm{G_i}$ alt gruplarının direkt çarpımı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Tanım 1.1.1: Bir $G \neq \emptyset$ kümesi üzerinde $\circ$ ikili işlemi verilsin. $(G,\circ)$ ikilisi, aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(G,\circ)$ ikilisine bir grup denir.

i) $\forall a, b, c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

ii) $\forall a \in G$ için $e \circ a = a \circ e = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır.

iii) $\forall a \in G$ için $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ ters elemanı vardır.

Eğer $\forall a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ oluyorsa $(G,\circ)$ grubuna değişmeli veya abel grubu denir.

Tanım 1.1.2: $(G,\circ)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. H ye G nin alt grubu denir $\Leftrightarrow$

i) $\forall a, b \in H$ için $a \circ b \in H$

ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$

özellikleri sağlanır. Bu durum $H \leq G$ olarak gösterilir.

Tanım 1.1.3: $(G,\circ)$ bir grup ve $H \leq G$ olsun. $Hg := \{ h.g \mid h \in H\}$ kümesine H nın G kümesi üzerindeki bir sağ yan sınıfı, $gH := \{g.h \mid h \in H\}$ kümesine ise H nın G kümesi üzerindeki bir sol yan sınıfı denir.

Tanım 1.1.4: Bir M kümesinin kardinal sayısını $|M|$ ile göstereceğiz. G bir grup olmak üzere $|G|$ kardinal sayısına G grubunun mertebesi denir. $|G|$ sonlu bir kardinal sayı ise G ye sonlu grup denir. Bir G grubunun sonlu olması, $|G| < \infty$ şeklinde gösterilebilir.

Tanım 1.1.5: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H alt grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı eşittir. Bu sayıya H alt grubunun G içerisindeki indeksi denir ve $|G:H|$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6: G bir grup ve $M \subset G$ olsun. G nin M kümesini içeren tüm K_i alt gruplarının arakesitine G nin M tarafından üretilen alt grubu denir ve bu alt grup $\langle M \rangle$ ile gösterilir.

$$\langle M \rangle = \bigcap_{i \in I} K_i \,, \ M \subset K_i, \ K_i \leq G$$

$\langle M \rangle$, G de M kümesini içeren en küçük alt gruptur. $\langle M \rangle = G$ ise M ye G nin bir üretici sistemi denir.

Tanım 1.1.7: G bir grup ve $M \subset G$, G nin bir üretici sistemi olsun. $M = \{a\}$ şeklinde tek bir elemandan oluşuyorsa G ye devirli bir alt grup denir ve $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ şeklindedir. Bu ise G nin en küçük alt grubudur.

Tanım 1.1.8: $(G,.)$ bir grup ve bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde

i) $f: G \times G \to G, \; f(x,y) = xy$

ii) $f: G \to G, \; f(x) = x^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.1.9: $(G,\circ)$, $(G',*)$ birer abel grubu olsun. Bu takdirde $f:(G,\circ) \to (G',*)$ fonksiyonu $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ ise f ye bir homomorfizma denir.

Tanım 1.1.10: f fonksiyonu bir örten homomorfizma ise f ye bir epimorfizma denir.

Tanım 1.1.11: $N \leq G$ olsun. N ye G nin bir normal alt grubu denir $:\Leftrightarrow \forall g \in G$ için $gN = Ng$ dir. Bu ise $N \trianglelefteq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.12: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ kümesine H nın G deki normalliyeni denir. Normalliyen, H yı normal alt grup olarak içeren en büyük kümedir. $N_G(H) \leq G$ dir.

Tanım 1.1.13: $N \in \mathbb{Z}$ için $1 \leq a \leq N$ ve $(a, N) = 1$ olan a tam sayılarının sayısı $\varphi(N)$ ile gösterilir. Bu fonksiyona "Euler fonksiyonu" denir.

Teorem 1.1.14: $\forall m \in \mathbb{N}$ için $m = \prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}$ şeklinde ise $\varphi(m) = m.\prod_{i=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{P_1}\right)$ dir. Ayrıca m asal ise $\varphi(m) = m - 1$ dir.

Tanım 1.1.15: I bir indis kümesi olsun. G bir grup ve $i \in I$ için $G_i \leq G$ olsun. Aşağıdaki şartların gerçeklenmesi halinde, G grubu G_i alt gruplarının direkt çarpımı denir.

i) Her $i \in I$ için $G_i \trianglelefteq G$ dir.

ii) Her $g \in G$ için $g_i \in G_i$ ve yalnız sonlu sayıda i için $g_i \neq e$ olmak üzere

$$g = \prod_{i \in I} g_i$$

şeklinde (faktörlerin sırası hariç olmak üzere) tek türlü olarak yazılabilir. Özellikle $i \neq j$ için

$$G_i \cap G_j = E$$

ve dolayısıyla her $g_i \in G_i$ ve $g_j \in G_j$ için $g_i g_j = g_j g_i$ olarak verilir. Bu durumda G ye G_i lerin direkt çarpımı denir ve

$$G = \otimes_{i \in I} G_i$$

ile gösterilir. Burada $E = \{e\}$, G nin trivial alt gruplarıdır.

Giriş bölümünde, daha sonraki bölümlere temel oluşturacak kavramlar üzerinde durduk. Bu kavramların en önemlisi aşağıda vereceğimiz hiperbolik düzlemin "$\mathbb{H}$ üst yarı düzlem" modelidir. Bu modelde hiperbolik doğruları tanımlayacağız ve az da olsa paralellikten bahsedeceğiz. $\mathbb{H}$ nın uygun bir transformasyon grubunu belirlememize yardımcı olması için durumumuzu $\overline{\mathbb{C}}$ Riemann küresine genişletip, bu genişlemede $\mathbb{H}$ yı $\overline{\mathbb{C}}$ nin bir alt kümesi olarak nasıl yerleştirebileceğimizi göz önüne alacağız.

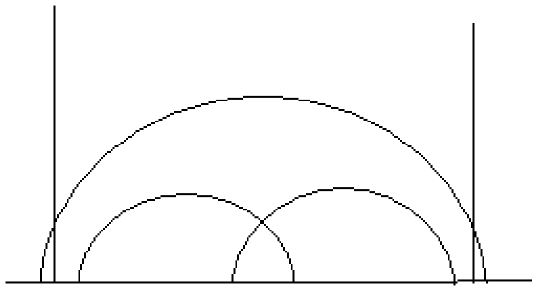
1.2. Hiperbolik Düzlem Modelleri

Bir model ile, belirleyeceğimiz bir uzay ve temel geometrik nesnelerin nasıl temsil edileceğinin bir seçimini kastetmekteyiz. Burada bu geometrik nesnelerin bazıları noktalar ve doğrulardır. Daha sonra hiperbolik düzlemin birçok modelinin olacağını göreceğiz. Modelin geometrisinin kesin bir tanımını verebilmek için yalnız bir özel model üzerinde çalışmaya başlayacağız. Çalışacağımız model "Üst Yarı Düzlem" modeli olacaktır. Bu modelin uzayı

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$$

üst yarı düzlemidir. Buradaki nokta ve açı kavramları $\mathbb{C}$ deki nokta ve açı kavramlarıdır. Yani, $\mathbb{H}$ daki iki eğri arasındaki açı, bu eğriler $\mathbb{C}$ de düşünülerek tanımlanan eğriler arasındaki açıdır. Yani teğet doğrular arasındaki açıdır. $\mathbb{H}$ daki hiperbolik doğruları bilinen Öklid doğruları ve $\mathbb{C}$ deki Öklid çemberleri cinsinden tanımlayacağız.

Tanım 1.2.1: Görünüşte farklı 2 tip hiperbolik doğru vardır. Birincisi $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ye dik olan öklid doğrularının $\mathbb{H}$ ile kesişimleri, diğeri ise $\mathbb{C}$ de olup merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde olan çemberlerin $\mathbb{H}$ ile kesişimleridir.



Şekil 1.1. $\mathbb{H}$ da Hiperbolik Doğrular

Yani hiperbolik doğrular, zayıf bir tabirle reel eksene dik yarı çemberler ve reel eksene dik yarı doğrulardır. Doğruları, yarıçapı ∞ olan çemberler olarak düşünürsek hiperbolik doğru reel eksene dik yarı çemberlerdir. Öklid geometrisinden bildiğimiz aşağıdaki benzer durumu verebiliriz.

Önerme 1.2.2: $p, q \in \mathbb{H}$ farklı noktalar olsun. Bu takdirde $\mathbb{H}$ da p ve q dan geçen bir ve bir tek hiperbolik L doğrusu vardır.

İspat: İki durumu göz önüne alalım. İlk önce $\mathrm{Re}(p) = \mathrm{Re}(q)$ olsun. Bu takdirde $S := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(q)\}$ Öklid doğrusu reel eksene paralel ve p, q dan geçer. Böylece $L = \mathbb{H} \cap S$ istenilen hiperbolik doğrudur.

Şimdi farzedelim ki $\mathrm{Re}(p) \neq \mathrm{Re}(q)$ dur. Artık p ve q dan geçen Öklid doğrusu $\mathbb{R}$ ye dik değildir. Dolayısı ile p ve q dan geçen ve $\mathbb{R}$ ye dik olan bir Öklid çemberi bulmalıyız. S_{pq}, p ve q dan geçen Öklid doğru parçası ve K da S_{pq} ye dik orta dikmesi olsun. Bu takdirde, p ve q dan geçen her Öklid çemberinin merkezi K üzerindedir. $\mathrm{Re}(p) \neq \mathrm{Re}(q)$ olduğundan K, $\mathbb{R}$ ye paralel değildir. Böylece K ile $\mathbb{R}$ bir tek $c \in \mathbb{R}$ noktasında kesişir. A, merkezi c ve yarıçapı $|c - p|$ olan Öklid çemberi olsun. Böylece A, p den geçer. c, K üzerinde olduğundan $|c - p| = |c - q|$ dır. Böylece K, q dan da geçer. Dolayısı ile $L = \mathbb{H} \cap A$ istenilen hiperbolik doğrudur. p ve q dan geçen hiperbolik doğrunun tekliği Öklid doğruları ve Öklid çemberlerinin kendi inşalarında var olan özelliklerinden çıkar.

Görüldüğü gibi hiperbolik doğruları $\mathbb{C}$ de Öklid doğruları ve Öklid çemberleri cinsinden tanımladık. Şimdi Öklid durumundaki gerçekleri kullanarak hiperbolik doğruların durumunu analiz etmeye çalışalım. Mesela L , $\mathbb{H}$ da p ve q dan geçen hiperbolik doğru ise L yi p ve q cinsinden ifade edebiliriz. p ve q nun reel kısımları aynı ise biliyoruz ki $S := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(q)\}$ olmak üzere $L = \mathbb{H} \cap S$ dir.

Bu noktada sorgulamamız gereken, $\mathbb{H}$ daki hiperbolik geometri $\mathbb{C}$ deki aşina olduğumuz Öklid geometrisinden farklı olup olmadığıdır. Gerçekten farklıdır. Bunu aşağıda, paralel doğrular durumunda göreceğiz.

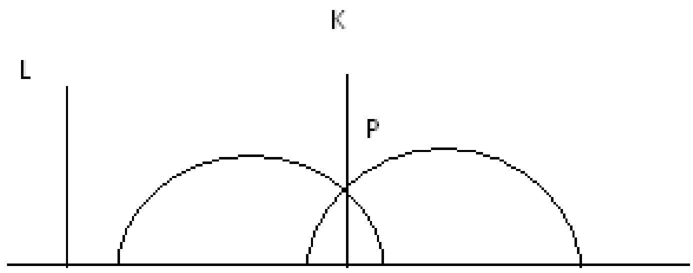
Tanım 1.2.3: İki hiperbolik doğrunun arakesiti boş ise bu iki doğruya "paraleldir" diyeceğiz.

Öklid geometrisinde paralel doğrular mevcuttur. Şayet S bir Öklid doğrusu ve $a \in \mathbb{C}$ de S üzerinde olmayan bir nokta ise a dan geçen S ye paralel yalnızca bir tek K doğrusu vardır. Öklid geometrisinde paralel doğrular eşit uzaklıktadır. Yani, S ve K paralel doğrular ve $a, b \in S$ ise bu takdirde a ile K arasındaki uzaklık, b ile K arasındaki uzaklığa eşittir.

Hiperbolik geometride paralellik oldukça farklı hale sahiptir.

Teorem 1.2.4: L, $\mathbb{H}$ da hiperbolik bir doğru ve $p \in \mathbb{H}, p \notin L$ olsun. Bu takdirde p den geçen L ye paralel olan sonsuz tane farklı hiperbolik doğru vardır.

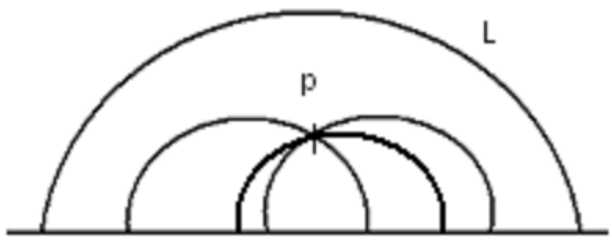
İspat: Önerme 1.2.2 nin ispatında olduğu gibi iki durumu göz önüne alacağız. İlk olarak farzedelim ki L bir S Öklid doğrusunun içinde olsun. p, S üzerinde olmadığından p den geçen S ye paralel olan bir K Öklid doğrusu vardır. S, $\mathbb{R}$ ye dik olduğundan K da $\mathbb{R}$ ye diktir. Böylece $\mathbb{H}$ da p den geçen L ye paralel $\mathbb{H} \cap K$ hiperbolik doğrusu elde edilir. p den geçen L ye paralel olan başka bir hiperbolik doğru elde edelim. Bunun için, K ile S arasında $x \in \mathbb{R}$ olan bir noktası alalım. A da x ve p den geçen merkezi $\mathbb{R}$ de olan bir Öklid çemberi olsun. $\mathrm{Re}(x) \neq \mathrm{Re}(q)$ olduğundan böyle bir A Öklid çemberi vardır. A nın alınışından dolayı $A \cap S = \emptyset$, yani $\mathbb{H} \cap A$ hiperbolik doğrusu L den ayrıktır. Yani $\mathbb{H} \cap A$, p den geçen L ye paralel olan ikinci bir hiperbolik doğrudur. K ile S arasında $\mathbb{R}$ üzerinde sonsuz tane nokta olduğundan bu oluşum p den geçen L ye paralel olan sonsuz tane hiperbolik doğru verir.



Şekil 1.2. ℍ da L ye paralel olan hiperbolik doğrular

Şimdi ikinci olarak farzedelim ki, L hiperbolik doğrusu bir A Öklid çemberinde bulunsun. D de p den geçen A ile aynı merkeze sahip Öklid çemberi olsun. Aynı merkezli çemberler ayrık olduğundan p den geçen ve L ye paralel bir hiperbolik doğru $\mathbb{H} \cap D$ dir. Şimdi p den geçen ve L ye paralel ikinci bir hiperbolik doğru elde edelim. A ile D arasında herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ alalım. E, merkezi $\mathbb{R}$ üzerinde olup x ve p den geçen Öklid çemberi olsun. Alınış gereği E ve A ayrıktır. Böylece $\mathbb{H} \cap E$ de p den geçen L ye paralel başka bir hiperbolik doğrudur.

$\mathbb{R}$ üzerinde A ile D arasında sonsuz tane nokta olduğundan p den geçen L ye paralel olan sonsuz tane hiperbolik doğru vardır.



Şekil 1.3. p den geçen L ye paralel olan hiperbolik doğru

Şu ana kadar hareket edebileceğimiz bir model elde ettik. Amacımız hiperbolik düzlemin bu özel modelini genişçe ele almak olmasına rağmen yine de diğer modellerden bazılarını da gösterebiliriz.

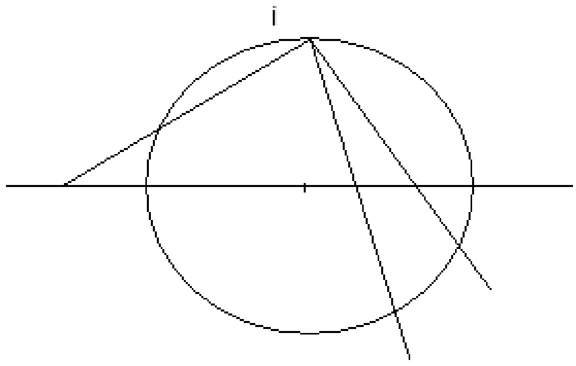
Bu kısmı, ilgili süreç içerisinde kullanacağımız birkaç ifade ile bitireceğiz. Yukarıda bahsedilen hiperbolik geometrinin gelişimi için tarihsel gelişmelere bakalım. Bunun için en iyi yaklaşım Öklid geometrisi aksiyomları ile başlamak olacaktır. Aksiyomlardan biri yukarıda bahsedilen paralel doğrular hakkındaki ifadedir. Yani bir S Öklid doğrusu ve bunun dışında bir p noktası verildiğinde p den geçen S ye paralel olan bir tek Öklid doğrusu vardır. Bu aksiyom “Paralel Postülatı” olarak bilinir. Bu durumda Hiperbolik Geometri, aksiyomların aynı kümesi kullanılarak tanımlanır. Fakat paralel postülatta hiperbolik değişiklikler vardır. Bu ise verilen bir L hiperbolik doğrusu ve bunun dışında bir p noktası için p den geçen L ye paralel olan en az iki tane hiperbolik doğru olmasıdır. Bu durumda üst yarı düzlem modeli; hiperbolik doğrularla Öklid olmayan geometrinin bir modelidir.

Şimdi yukarıda tanımını verdiğimiz hiperbolik geometride, hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmeden $\mathbb{H}$ nın dönüşümlerini belirleyeceğiz.

1.3. $\overline{\mathbb{C}}$ (Riemann Küresi)

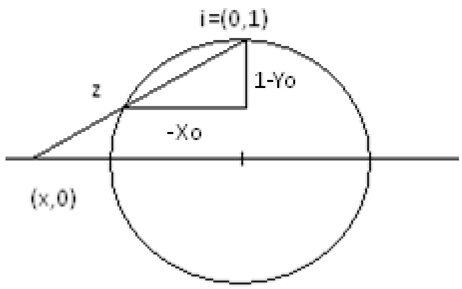
Hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmeden $\mathbb{H}$ nın dönüşümlerini belirlemek için görünüşte farklı olan iki hiperbolik doğruyu bir tek duruma getirmeye çalışalım. Bunun için ilk hareket noktamız, Öklid çemberi ile bir Öklid doğrusuna bir nokta ekleyerek elde edelim. Bunun için $\mathbb{C}$ de S^1 birim çemberini ve $\xi : S^1\backslash\{i\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonu şöyle tanımlayacağız.

$z\in S^1\backslash\{i\}$ alındığında K_z, i ve z den geçen Öklid doğrusu olmak üzere $\xi(z) = \mathbb{R} \cap K_z$ olarak tanımlanır. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır, çünkü $\mathrm{Im}(z) \neq 1$ olduğu sürece K_z ile $\mathbb{R}$ tek bir noktada kesişir. Bu işlem steografik izdüşüm olarak adlandırılır.



Şekil 1.4. Steografik İzdüşüm

Düzlemdeki $\mathbb{R}$ reel ekseni, kartezyen koordinatlar cinsinden $\mathbb{C}$ de x eksenine karşılık gelir ve böylece $\xi(z)$, K_z nin x kesişimidir.



Şekil 1.5. K_z doğrusunun eğimi

$$m = \frac{1 - y_0}{-x_0} = \frac{y_0 - 1}{x_0} = \frac{\mathrm{Im}z - 1}{\mathrm{Re}z}$$

Hesaplamalar gösterir ki; K_z nin eğimi $m = \frac{\mathrm{Im}z-1}{\mathrm{Re}z}$ dir.

Böylece K_z nin denklemi $y - 1 = \frac{\mathrm{Im}z-1}{\mathrm{Re}z} x$ dir.

Özellikle K_z nin x i kestiği nokta $\xi(z) = \frac{\mathrm{Re}z}{1-\mathrm{Im}z}$ dir.

Burada $\xi : S^1\backslash\{i\} \to \mathbb{R}$ dönüşümü birebir ve örten bir dönüşümdür. Gerçekten, geometrik olarak bu, $\mathbb{C}$ de farklı iki nokta bir tek Öklid çemberi belirlemesinden dolayı ortaya çıkar. Şayet z ve w, $\xi(z) = \xi(w)$ olan $S^1\backslash\{i\}$ nin noktaları ise K_z ve K_w, $\mathbb{R}$ nin aynı noktasından geçerler. Buna rağmen K_z ve K_w da i den geçtiğinden bu doğrular birbirlerine eşittir. Yani, $z = w$ dir.

Bu durumda $\mathbb{R}$ yi, S^1 den i yi atarak elde etmiş olduk. O halde S^1 öklid çemberini $\mathbb{R}$ Öklid doğrusuna tek bir nokta ilave ederek elde edebiliriz. Buradan yola çıkarak $\mathbb{H}$ yı içeren ve görünüşte farklı olan hiperbolik doğruları tek bir tip olarak elde edebileceğimiz uzay $\mathbb{C}$ ye bir noktanın eklenmesiyle elde edilen uzaydır. Bu da $\overline{\mathbb{C}}$ Riemann küresinin klasik elde edilmesidir.

Riemann Küresi $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dir. Görüldüğü gibi ∞, $\mathbb{C}$ de değildir. Şimdi $\overline{\mathbb{C}}$ nin temel özelliklerini vermeye çalışalım. Bunun için $\overline{\mathbb{C}}$ de açık küme ne demektir açıklayalım. İlk önce $\mathbb{C}$ deki durumu göz önüne alalım.

Tanım 1.3.1: $X \subset \mathbb{C}$ açıktır : $\Leftrightarrow$ $\forall z \in X$ için $\exists\, \varepsilon > 0$ öyleki $U_\varepsilon(z) \subset X$ dir. Burada $U_\varepsilon(z) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ z merkezli ε yarıçaplı Öklid dairesidir.

$X \subset \mathbb{C}$ kapalıdır : $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C} \backslash X = X^c$ açıktır.

$X \subset \mathbb{C}$ sınırlıdır: $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ öyleki $X \subset U_\varepsilon(0)$ dır.

Yukarıda $\mathbb{C}$ de yapılan tanımları $\overline{\mathbb{C}}$ ye genişletelim. Bunun için $\varepsilon > 0$ ve $z \in \overline{\mathbb{C}}$ için $U_\varepsilon(z)$ nin tanımını vermeliyiz.

Tanım.1.3.2: $z \in \mathbb{C}$ ise $U_\varepsilon(z) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ ve $U_\varepsilon(\infty) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : |w| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.3: $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ açıktır : $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ için $\exists\, \varepsilon > 0$ öyle ki $U_\varepsilon(x) \subset X$ dir.

Bu tanım bize $\mathbb{C}$ de açık olan bir D kümesinin $\overline{\mathbb{C}}$ de de açık olduğunu verir. Çünkü $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ nin alt kümesi idi. O halde $\mathbb{H}$, $\overline{\mathbb{C}}$ de de açık bir kümedir.

Diğer bir örnek olarak $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ kümesini göz önüne alabiliriz. E nin $\overline{\mathbb{C}}$ de açık olduğunu gösterelim. $E = U_1(\infty)$ olduğundan $z \in E\backslash\{\infty\}$ alalım. z nin $\partial E = S^1$ e olan uzaklığı $|z| - 1$ dir. Böylece $0 < \varepsilon < |z| - 1$ alırsak $U_\varepsilon(z) \subset E$ elde edilir.

Diğer taraftan S^1 birim çemberi $\mathbb{C}$ de açık değildir. Hangi $z \in S^1$ ve $\varepsilon > 0$ alınırsa alınsın $U_\varepsilon(z)$, $(1 + \frac{1}{2}\varepsilon)z$ yi ihtiva ettiğinden ve $\left|(1 + \frac{1}{2}\varepsilon)z\right| > 1$ olduğundan $U_\varepsilon(z) \not\subset S^1$ dir. Yani, S^1 açık değildir.

Tanım 1.3.4: $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ kapalıdır : $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathbb{C}} \setminus X$, $\overline{\mathbb{C}}$ de açıktır.

Bu tanıma göre $\overline{\mathbb{C}} \setminus S^1 = U_1(0) \cup U_1(\infty)$ olduğundan S^1 kapalıdır. Açık kümeler yakınsaklığı tanımlamak için kullanılacaktır. $\overline{\mathbb{C}}$ deki yakınsaklık $\mathbb{C}$ deki yakınsaklığa benzer; yani,

$\overline{\mathbb{C}}$ deki bir $\{z_n\}$ dizisi $\overline{\mathbb{C}}$ de bir z elemanına yakınsar $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n > N$ için $z_n \in U_\varepsilon(z)$ dir.

Örnek 1.3.5: $\left\{z_n = \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ dizisi $\overline{\mathbb{C}}$ de 0 a yakınsar ve $\{w_n = n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dizisi $\overline{\mathbb{C}}$ de ∞ a yakınsar.

Tanım 1.3.6: $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ olsun. $\overline{X} := \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \forall \varepsilon > 0 \text{ için } U_\varepsilon(z) \cap X \neq \emptyset\right\}$ kümesine X in kapanışı adı verilir.

Örnek 1.3.7: $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}/\{0\}\right\}$ kümesinin $\overline{\mathbb{C}}$ deki kapanışını incelersek, $0 < \varepsilon < |z| - 1$ şeklinde seçildiğinde, $\forall z \in S^1$ için $U_\varepsilon(z) \subset S^1 \cup \{\infty\}$ olduğundan $\overline{X} = \mathbb{R}$ dir.

Artık, $\mathbb{C}$ de Öklid doğrusu ve Öklid çemberleri kümesini tek bir tanım halinde verebiliriz.

Tanım 1.3.8: $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çember ; $\overline{\mathbb{C}}$ de ya bir Öklid çemberidir veya bir Öklid doğrusuna ∞ u eklemekle elde edilen kümedir.

Notasyon: S, $\mathbb{C}$ de bir Öklid doğrusu ise $\tau := S \cup \{\infty\}$, $\overline{\mathbb{C}}$ de S yi kapsayan çemberdir. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de genişletilmiş reel eksendir. Bunun yanında $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ yi içeren $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çemberdir. Önceden verilen steografik izdüşümü, Riemann küresi ve kompleks düzleme genişletebiliriz.

$\mathbb{C}$ yi $\mathbb{R}^3$ uzayında x_1x_2 düzlemi ile özdeşleştirelim. $\mathbb{R}^3$ teki koordinatları (x_1, x_2, x_3) olarak alalım. $z = x + yi \in \mathbb{C}$ noktasını $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$e karşılık getirelim.

$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $N = (0,0,1)$ olsun.

Bu takdirde $\xi : S^2/\{N\} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Her bir $p \in S^2/\{N\}$ için S_p, $\mathbb{R}^3$ te N ve p den geçen Öklid doğrusu olsun ve de $\xi(p) := S_p \cap \mathbb{C}$ olarak tanımlansın. Bu durumda ξ bir bijektif dönüşümdür.

Biliyoruz ki $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\mathbb{C}$ de her çember $\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$ biçimindeki bir denklemin çözüm kümesidir.

Ayrıca, $\mathbb{C}$ deki her Öklid doğrusu $\gamma \epsilon \mathbb{R}$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$ biçiminde bir denklemin çözüm kümesidir. Burada ∞ un böyle bir denklemin bir çözümü olup olmadığına bakalım.

$\beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$ biçimindeki bir denklem için ∞ u "süreklilikle" bir çözüm olduğunu düşünebiliriz. Yani, $\mathbb{C}$ de bu denklemi sağlayan ve ∞ a yakınsayan bir $\{z_n\}$ dizisi var demektir. Yani, $\beta z_n + \overline{\beta z_n} + \gamma = 0$ ise ∞ u denklemin bir çözümü kabul ediyoruz.

Özellikle, w_o, w_1 iki farklı çözüm olsun. Bu durumda, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $w_o + t(w_1 - w_o)$ keza bir çözümdür. $\{z_n = w_o + n(w_1 - w_o),\ n \in \mathbb{N}\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu dizi, $\overline{\mathbb{C}}$ de ∞ a yakınsar ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\beta z_n + \overline{\beta z_n} + \gamma = 0$ dır. Buna rağmen $\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ biçimindeki bir denklem için ∞ u "süreklilikle" denklemin bir çözümü olarak düşünemeyiz.

Çünkü $\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = \alpha \left|z + \frac{\bar{\beta}}{\alpha}\right|^2 + \gamma - \frac{|\beta|^2}{\alpha}$ dir. Özellikle, $\{z_n\}$ dizisi, $\overline{\mathbb{C}}$ de ∞ a yakınsayan bir dizi ise

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\, z_n\overline{z_n} + \beta z_n + \overline{\beta z} + \gamma) = \infty \text{ dur.}$$

Böylece n yeterince büyük olduğunda z_n, A= $\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0\}$ çemberi üzerinde değildir.

Tanım 1.3.9: $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonu $z \in \overline{\mathbb{C}}$ de süreklidir : $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ öyle ki $w \in U_\delta(z)$ olduğunda $f(w) \in U_\varepsilon(f(z))$ dir.

$f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonu süreklidir:$\Leftrightarrow$ f, $\overline{\mathbb{C}}$ nin her noktasında süreklidir.

Bu tanımın bir avantajı da $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı fonksiyonlarda yapıldığı gibi fonksiyonların çarpımı, bölümleri, toplamları ve farkları ile bileşke fonksiyonlarının süreklilikleri de benzer şekilde yapılır.

Buna rağmen, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı fonksiyonlarla $\overline{\mathbb{C}}$ den $\overline{\mathbb{C}}$ ye fonksiyonlar arasında elbette farklılıklar vardır. Bu farklılık ∞ un $\overline{\mathbb{C}}$ de olmasındandır. Bunu bir örnekle açıklayalım.

Önerme 1.3.10: $J:\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonu $J(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty \end{cases}$ şeklinde tanımlanıyor. Bu fonksiyon $\overline{\mathbb{C}}$ üzerinde süreklidir.

İspat: J nin 0 da sürekli olduğunu gösterelim. $J(0) = \infty$ olduğundan göstereceğiz ki $\exists\, \delta > 0$ öyle ki $J(U_\delta(0)) \subset U_\varepsilon\big(J(0)\big) = U_\varepsilon(\infty)$ dır.

$\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ alalım. $w \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$ için $|J(w)| = \frac{1}{|w|} > \frac{1}{\delta} = \varepsilon$. Yani $J(w) \in U_\varepsilon(\infty)$ dır. $J(0) = \infty \in U_\varepsilon(\infty)$ olduğundan J fonksiyonu 0 da süreklidir. Şimdi J nin ∞ da sürekli olduğunu gösterelim. Yine $\varepsilon > 0$ verilsin. $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ alırsak her $w \in U_\delta(\infty) \setminus \{\infty\}$ için $|J(w)| = \frac{1}{|w|} > \frac{1}{\delta} = \varepsilon$ elde edilir ki bu $J(w) \in U_\varepsilon(0)$ olduğunu gösterir. Tanımdan $J(\infty) = 0 \in U_\varepsilon(0)$ dır. Yani J, ∞ da süreklidir.

Şimdi son olarak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ da J nin sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir $\delta > 0$ bulacağız öyle ki $w \in U_\delta(z)$ olduğunda $J(w) \in U_\varepsilon(J(z))$ olacak.

Bunun için $\varepsilon^1 := \min(\varepsilon, \frac{1}{2|z|})$ alalım. Bu durumda $U_{\varepsilon^1}\left(\frac{1}{z}\right)$, 0 ı içermez. Her $\xi \in U_{\varepsilon^1}(J(z))$ için $|\xi| < |J(z)| + \varepsilon^1 = \frac{1}{|z|} + \varepsilon^1$ dir. $\varepsilon^1 \leq \frac{1}{2|z|}$ olduğundan, $|\xi| < \frac{3}{2|z|}$ dır.

$\xi = \frac{1}{w}$ alırsak $\frac{1}{|w|} < \frac{3}{2|z|}$ ve böylece $\frac{1}{|zw|} < \frac{3}{2|z|^2}$ dir. Böylece $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon^1 |z|^2$ alalım. $|z - w| < \delta$ olduğunda

$|J(z) - J(w)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{w}\right| = \frac{|z-w|}{|zw|} < \frac{\delta}{|zw|} < \frac{3\delta}{2|z|^2} = \varepsilon^1$ elde edilir. $\varepsilon^1 \leq \varepsilon$ olduğundan ispat tamamlanır.

Sürekli fonksiyonların çok kullanışlı bir özelliği, aslında onların bir tanımlayıcı özelliği yakınsak dizileri korumasıdır. Yani şayet, $f:\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sürekli ve $\{z_n\}$ dizisi de $\overline{\mathbb{C}}$ de z ye yakınsayan bir dizi ise $\{f(z_n)\}$ dizisi $\{f(z)\}$ dizisine yakınsar. Buna dizisel süreklilik de denir.

Tanım 1.3.11: $f:\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonuna bir "homeomorfizma" denir $\Leftrightarrow$ f birebir, örten, f ve f^{-1} süreklidir.

Önerme 1.3.12: $\mathrm{J}: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ \mathrm{J}(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C}/\{0\}$ için $\mathrm{J}(0) = \infty,\ \mathrm{J}(\infty) = 0$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de bir homeomorfizmadır. $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ için $\mathrm{J} \circ \mathrm{J}(z) = z$ olduğundan J bijektiftir.

$\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ için $\mathrm{J}^{-1}(z) = \mathrm{J}(z)$ olduğundan önerme 1.3.10 gereği J ve J^{-1} süreklidir. Yani J, $\overline{\mathbb{C}}$ nin bir homeomorfizmidir.

$\mathrm{Homeo}\,(\overline{\mathbb{C}}) := \{\mathrm{f}: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \mid \mathrm{f\ bir\ homeomorfizm}\}$ kümesi artık boş değildir. Bu küme fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur.

1.4. $\mathbb{H}$ nın ∞ daki Sınırı

Kısım 1.3 de $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çember, ya $\mathbb{C}$ de bir Öklid çemberi veya ∞ u içine alan $\mathbb{C}$ de bir Öklid doğrusu olduğunu gördük. Meselâ, $\mathbb{C}$ de S^1 ve $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ bu çemberlere örnektir.

Özellikle $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çemberin bütünleyeni iki bileşenden oluşur. S^1 için $\overline{\mathbb{C}} \backslash S^1$ in bileşenleri $D := U_1(0)$ ve $U_1(\infty)$ daireleridir. $\mathbb{R}$ için $\overline{\mathbb{C}} - \overline{\mathbb{R}}$ nin bileşenleri $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi ve $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 0\}$ alt yarı düzlemidir.

Tanım 1.4.1: $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çemberin $\overline{\mathbb{C}}$ deki bütünleyeninin bileşenlerinin her birine $\overline{\mathbb{C}}$ de bir daire adı verilir.

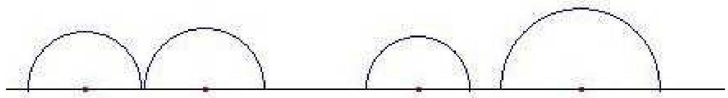
Bu tanıma göre $\overline{\mathbb{C}}$ de her daire $\overline{\mathbb{C}}$ de bir tek çember belirler ve her çember $\overline{\mathbb{C}}$ de iki ayrık daire belirler.

Bu kısımda özellikle $\overline{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{H}$ dairesi ve bunu belirleyen bir $\overline{\mathbb{R}}$ çemberine odaklanacağız. $\overline{\mathbb{R}}$ ye "$\mathbb{H}$ nın ∞ daki sınırı" adı verilir. $\overline{\mathbb{R}}$ deki noktalara ise " $\mathbb{H}$ nın ∞ daki noktaları " diyeceğiz.

Daha genel olarak $X \subset \mathbb{H}$ için X in ∞ daki sınırını göz önüne alacağız. Özellikle X in $\overline{\mathbb{C}}$ deki $\overline{X}$ kapanışını göz önüne aldığımızda X in ∞ daki sınırı $\overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}}$ arakesitidir.

Bir örnek olarak L, $\mathbb{H}$ da bir hiperbolik doğru ve farzedelim ki L, $\overline{\mathbb{C}}$ de A çemberinde bulunsun. Bu takdirde L nin sonsuzdaki sınırı $A \cap \overline{\mathbb{R}}$ arakesitinde bulunan bir çift noktadır.

Bu konuda daha karmaşık örnekler de vardır. Örneğin, L_1 ve L_2, $\mathbb{H}$ da paralel iki hiperbolik doğru olsun ve K, $\mathbb{H}$ da bir bölge öyle ki L_1 ve L_2 doğruları ile birlikte $\mathbb{H}$ nın bu ikisi arasında kalan bölge olsun.



Şekil 1.6. Paralel hiperbolik doğruların iki durumu

Bu K bölgesinin ∞ daki sınırı için iki olası durum söz konusudur.

C_k, $\overline{\mathbb{C}}$ de L_k yı kapsayan çember olsun. L_1 ve L_2 doğruları ayrık olduğundan ya C_1 ve C_2 ayrıktır veya C_1 ve C_2 bir tek noktada kesişir.

C_1 ve C_2, $x \in \overline{\mathbb{R}}$ de kesişirse K nın ∞ daki sınırı $\overline{\mathbb{R}}$ de bir kapalı yay ile $\{x\}$ kümesinin birleşimidir.

C_1 ve C_2 nin ayrık olmaları halinde K nın ∞ daki sınırı $\overline{\mathbb{R}}$ de iki kapalı yayın birleşimidir. Şekil 1.6 da bu durumlar gösterilmiştir.

Bu durum bize $\mathbb{H}$ daki hiperbolik doğruların iki farklı tipte paralel olabileceğini ifade eder. Yani, ∞ daki sınırları ortak olan paralel hiperbolik doğrular ve ∞ daki sınırları ayrık olan paralel hiperbolik doğrular.

∞ daki sınırları ayrık olan hiperbolik doğrulara "ultraparalel $\mathbb{H}$ doğruları" adını veriyoruz.

Kısım 1.2 de, özellikle de Önerme 1.2.2 de; $\mathbb{H}$ de iki noktanın yine $\mathbb{H}$ de bir tek hiperbolik doğru belirlediğini gördük. Bunun ispatında " verilen 2 noktadan geçen ve $\mathbb{R}$ ye dik olan, $\mathbb{C}$ den bir tek Öklid çemberi veya Öklid doğrusu geçer." gerçeğini kullandık. Aynı durum ∞ daki noktalar ile belirli hiperbolik doğrulara uygulanır.

Önerme 1.4.2: $p\in\mathbb{H}$ ve $q\in\overline{\mathbb{R}}$ olsun. Bu takdirde p ve q ile belirli $\mathbb{H}$ da bir tek hiperbolik doğru vardır.

İspat: $q = \infty$ olsun. p den geçen hiperbolik doğrulardan sadece birinin ∞ daki sınırında q yu kapsar. Bu hiperbolik doğru $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(p)\}$ Öklid doğrusundadır.

Teklik ise bir Öklid çemberinde bulunan hiçbir $\mathbb{H}$ doğrusu onun sonsuzdaki sınırında ∞ u bulunduramaz.

$q \neq \infty$ ve de $\mathrm{Re}(p) = \mathrm{Re}(q)$ olsun. Bu takdirde $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(p)\}$ Öklid doğrusunda bulunan hiperbolik doğru ∞ daki sınırında q yu kapsayan p den geçen bir tek hiperbolik doğrudur.

$q \neq \infty$ ve de $\mathrm{Re}(p) \neq \mathrm{Re}(q)$ olsun. Bu takdirde önerme 1.2.2 nin ispatından hareketle p, q dan geçen merkezi $\mathbb{R}$ olan bir tek Öklid çemberi elde ederiz. Bu Öklid çemberinin $\mathbb{H}$ ile kesişiminden istenilen bir tek $\mathbb{H}$ doğrusu elde edilir.

1.5. Möbiüs Dönüşümler Grubu

Amacımız dönüşümlerin uygun bir grubunun etkisi altında invaryant kalan bazı değerleri göz önüne alarak hiperbolik düzlemin geometrisini çalışmak olduğundan bu bölümü $\overline{\mathbb{C}}$ nin dönüşümlerinin bir grubu olan Genel Möbius Grubunu (“Möb”) ü göz önüne alacağız. Bu grup möbiüs dönüşümleri ve yansımaların bileşkelerinden oluşur. Kendimizi $\mathbb{H}$ yı koruyan “Möb” deki dönüşümlere odaklayacağız.

$\mathbb{H}$ daki her hiperbolik doğru $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çember olduğundan hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara götüren $\mathbb{H}$ nın dönüşümlerini bulmak için ilk önce $\overline{\mathbb{C}}$ de çemberleri çemberlere resmeden $\overline{\mathbb{C}}$, homeomorfizmlerinin grubunu belirleyeceğiz. Notasyonun uygunluğu için $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ ile $\overline{\mathbb{C}}$ nin homeomorfizmlerini, $\mathrm{Homeo}\,(\overline{\mathbb{C}})$ ile de $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberleri $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberlere resmeden $\overline{\mathbb{C}}$ nin homeomorfizmlerinin grubunu gösterelim.

$\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ nın herhangi iki elemanının bileşkesi yine $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ dedir; birim homeomorfizmi yine $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ dedir. Fakat acaba $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ de olan bir elemanın tersi yine $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ de midir? Yani henüz daha $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ nin grup olduğunu bilmiyoruz. $\overline{\mathbb{C}}$ de birçok homeomorfizmler vardır ama bunlar $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ de değildir.

Ayrıca $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}}) \subsetneq \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ dir. Gerçekten, ilk önce $\mathbb{C}$ nin homeomorfizmlerinin bir bilinen sınıfını, polinomları göz önüne alıp inceleyelim. Her bir $g(z)$ polinomuna bir $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = g(z)$ ve $f(\infty) = \infty$ fonksiyonu karşılık gelir. Amacımız polinomlardan gelen $\overline{\mathbb{C}}$ nin homeomorfizmleri olduğundan, derecesi “1” olan polinomlara odaklanalım.

Önerme 1.5.1: $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$, $f(\infty) = \infty$ elemanı $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ dedir.

İspat: Kısım 1.3 den biliyoruz ki $\overline{\mathbb{C}}$ de A çemberi $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$ biçimindeki denklemin çözüm kümesidir.

$\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$ A, $\mathbb{C}$ de bir çemberdir. İlk önce farzedelim ki A, $\mathbb{C}$ de bir Öklid doğrusu olsun. Bu takdirde $\exists \beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ öyle ki $A := \{z \in \mathbb{C} \mid \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0\}$ dır. Göstermek istiyoruz ki z bu denklemi sağlıyorsa $w = az + b$ de benzer bir denklemi sağlar. Burada $w = az + b$ olduğundan $z = \frac{1}{a}(w - b)$ dir. Bunu A daki denklemde yerine yazarsak

$\beta z + \overline{\beta z} + \gamma = \beta \frac{1}{a}(w - b) + \overline{\beta \frac{1}{a}(w - b)} + \gamma = \frac{\beta}{a} w + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)}\, \overline{w} - \frac{\beta}{a} b - \frac{\overline{\beta}}{a} b + \gamma = 0$ dır.

$\frac{\beta}{a} b + \frac{\overline{\beta}}{a} b = 2\mathrm{Re}(\frac{\beta}{a} b)$ olduğundan w de bir Öklid doğrusunun denklemini sağlar. Böylece f, $\mathbb{C}$ deki Öklid doğrularını $\mathbb{C}$ deki Öklid doğrularına resmeder. f nin Öklid çemberlerini Öklid çemberlerine resmetmesinin ispatı da benzerdir.

Not: $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ ise $f(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$, $f(\infty) = \infty$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ deki Öklid çemberlerini öklid çemberlerine resmeder.

Şimdi $\overline{\mathbb{C}}$ deki resim çemberi hakkında $f(z) = az + b$ ve $\overline{\mathbb{C}}$ deki orijinal çemberi de göz önüne alarak daha fazla bilgi edinmeye çalışalım.

Farzedelim ki S Öklid doğrusu $\beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$ denklemi ile verilsin. Bu takdirde S nin eğimi $\frac{\mathrm{Re}(\beta)}{\mathrm{Im}(\beta)}$ dır. f dönüşümü altında S nin resmi $\frac{\beta}{a} w + \overline{\left(\frac{\beta}{a}\right)}\, \overline{w} - \frac{\beta}{a} b - \overline{\frac{\beta}{a} b} + \gamma = 0$ idi. Bunun eğimi de $\frac{\mathrm{Re}(\beta \bar{a})}{\mathrm{Im}(\beta \bar{a})}$ dır.

Yukarıda $\mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ nin bir elemanını elde etmiştik. Şimdi bunun ikinci bir elemanını bulalım. Daha önce $J: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $J(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $J(0) = \infty, J(\infty) = 0$ fonksiyonunun $\overline{\mathbb{C}}$ den $\overline{\mathbb{C}}$ ye bir homeomorfizma olduğunu gördük.

Önerme 1.5.2: $J \in \mathrm{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ dir.

İspat: A, $\overline{\mathbb{C}}$ de $\alpha z\bar{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ verilen bir çember olsun. $w = \frac{1}{z}$ alırsak $z = \frac{1}{w}$ elde edilir. Bunu A nın denkleminde yerine koyarsak

$\alpha \frac{1}{w} \overline{\frac{1}{w}} + \beta \frac{1}{w} + \overline{\beta \frac{1}{w}} + \gamma = 0$ elde edilir. $w\overline{w}$ ile her iki tarafı çarparsak

$\alpha + \beta \overline{w} + \overline{\beta} w + \gamma w \overline{w} = 0$ elde edilir. α ve γ reel ve de w ve $\overline{w}$ nin katsayıları eşlenik olduğundan, bu denklem $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çemberin denklemidir. Yukarıdaki önerme yardımı ile J(A) çemberi hakkında bazı sayısal bilgileri A çemberinin terimleri cinsinden elde edebiliriz.

Mesela, A, $\overline{\mathbb{C}}$ de $2z + 2\bar{z} + 3 = 0$ denklemi ile verilsin. Bu takdirde, $J(A)$ nın denklemi $2\bar{w} + 2w + 3w\bar{w} = 0$ denklemi $\mathbb{C}$ de bir Öklid çemberidir. Bu çemberin merkezi $-\frac{2}{3}$ ve yarıçapı $\frac{2}{3}$ tür.

Not: Dikkat edilirse $\overline{\mathbb{C}}$ nin $f(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ ve $J(z) = \frac{1}{z}$ homeomorfizmlerinin olası her bileşkesi $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ biçimindedir.

Tanım 1.5.3: $m: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ z \to m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d\ \in \mathbb{C},\ ad - bc\ \neq 0$ dönüşümüne bir "möbius dönüşümü" adı verilir. Bütün möbius dönüşümlerini $Möb^{+}$ ile göstereceğiz.

1.6. "∞ " un Aritmetiği

$a \neq 0$ olmak üzere süreklilikten $\frac{a}{0}$, ∞ a karşılık getirilecektir. Yani $\frac{a}{0} = \lim_{w\to 0} \frac{a}{w}$ alacağız. $a \neq 0$ olduğundan $\frac{a}{w} \neq 0$ dır. $\left|\frac{a}{w}\right|$ yı göz önüne alırsak $\overline{\mathbb{C}}$ de $\lim_{w\to 0} \frac{a}{w} = \infty$ olduğu görülür. Buna rağmen $\frac{0}{0}$ tanımsızdır. Benzer biçimde, ∞ un $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ altındaki görüntüsünü süreklilikle tanımlayalım. Yani; $m(\infty) := \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$ dir. $m(\infty)$ iyi tanımlıdır, çünkü $ad - bc \neq 0$ olduğundan a ve c nin en az biri sıfırdan farklıdır.

$m(\infty) = \frac{a}{c}$ den $m(\infty) = \infty \iff c = 0,\ m(0) = \frac{b}{d}$ olduğundan $m(0) = c \Leftrightarrow b = 0$ dır.

Not: $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü bijektiftir ve tersi $m^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ şeklindedir.

Sonuç: $(Möb^{+}, \circ)$ bir gruptur. Grubun birim elemanı $m(z) = z$ dönüşümüdür.

Görüldüğü gibi bir möbius dönüşümünün biçimi bundan önce karşılaştığımız $\overline{\mathbb{C}}$ nin $a \neq 0$ olmak üzere, $a, b \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b, z \in \mathbb{C}$ ve $f(\infty) = \infty$ homeomorfizmi ile $J: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\ J(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C}/\{0\}$ için $J(0) = \infty,\ J(\infty) = 0$ homeomorfizmi biçimlerine benzerdir.

Şimdi göstereceğiz ki, her möbius dönüşümü bu biçimdeki iki dönüşümün bir bileşkesidir.

Teorem 1.6.1: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ Möbiüs dönüşümünü göz önüne alalım.

$c = 0$ ise $m(z) := \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ dir.

$c \neq 0$ ise $g(z) = c^2z + d$ ve $f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$ olmak üzere $m(z) = f(J(g(z)))$ dir.

İspat: İspat direk hesaplama ile çıkar. $c = 0$ ise problem yok.

$c \neq 0$ ise bu takdirde $m(z) := \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b).c}{(cz+d).c} = \frac{acz+bc}{c^2z+dc}$ dir. $ad - bc \neq 0$ olduğundan $m(z) := \frac{acz+bc}{c^2z+dc} = \frac{acz+ad-(ad-bc)}{c^2z+dc} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2z+dc} = f(J(g(z)))$ olup burada $g(z) = c^2z + dc$ ve $f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$ dir.

Sonuç 1.6.2 : Her Möbiüs dönüşümü $\overline{\mathbb{C}}$ nin bir homeomorfizmasıdır. Yani $\text{Möb}^+ \subset \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ dir.

Her Möbiüs dönüşümü, $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberleri $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberlere resmeden dönüşümlerin bir bileşkesi olduğundan, $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberleri $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberlere resmeder. Buradan aşağıdaki teoreme ulaşırız.

Teorem 1.6.3: $\text{Möb}^+ \subset \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ dir.

Şimdi möbius dönüşümlerini sabit noktalarına göre sınıflandıralım. $m \in \text{Möb}^+$ dönüşümünün bir sabit noktası $m(z) = z$ şartını sağlayan $z \in \overline{\mathbb{C}}$ noktalarıdır. m dönüşümü birim olmasın. Bu kısmın başında gördük ki $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ möbiüs dönüşümü için

$m(\infty) = \frac{a}{c}$ dir. Böylece $m(\infty) = \infty \Leftrightarrow c = 0$ dır.

$c = 0$ ise $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ dir. $m(z) = z = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ olsun. $\frac{a}{d} = 1$ ise $\mathbb{C}$ de çözüm yoktur. $\frac{a}{d} \neq 1$ ise $z = \frac{b}{d-a}$ denklemin bir çözümüdür. Özellikle $c = 0$ ise m, ya bir veya iki tane sabit noktaya sahiptir.

$c \neq 0$ ise $m(\infty) \neq \infty$ dur. Böylece m nin $\mathbb{C}$ deki sabit noktaları $m(z) := \frac{az+b}{cz+d} = z$ denkleminin çözümleridir. Ki bu çözümler $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ denkleminin kökleridir. Bu durumda $c \neq 0$ ise m, ya bir veya iki tane sabit noktaya sahiptir. Yukarıda yapılan bu hesaplamalar aşağıdaki önemli sonucu doğurur.

Teorem 1.6.4: $m(z)$, $\overline{\mathbb{C}}$ de farklı üç noktayı sabit bırakan bir möbius dönüşümü ise m birim dönüşümdür.

1.7. Möb^{+} nın Geçişkenlik (Transitiflik) Özelliği

Möb^{+} nın en önemli özelliklerinden biri de $\overline{\mathbb{C}}$ de yegane üçlü transitifliğidir. Yani, $\overline{\mathbb{C}}$ de alınan (z_1, z_2, z_3) ve (w_1, w_2, w_3) gibi farklı iki üçlü nokta için yalnızca bir tek $m \in$Möb^{+} vardır öyle ki $m(z_i) = w_i$, $i = 1,2,3$ şeklindedir.

Sıkça yapıldığı gibi varlık ve tekliğin ispatında teklik ispatı önce yapılır. Daha sonra elde edilen bütün imkanlar kullanılarak özel bir dönüşüm elde edilir. $\overline{\mathbb{C}}$ de farklı noktaların iki üçlüsü (z_1, z_2, z_3) ve (w_1, w_2, w_3) olsun.

Farzedelim ki, $\exists\, m, n \in$Möb^{+}öyle ki $n(z_1) = w_1 = m(z_1)$, $n(z_2) = w_2 = m(z_2)$ ve $n(z_3) = w_3 = m(z_3)$ tür. Teorem 1.6.4 den $m^{-1} \circ n$, $\overline{\mathbb{C}}$ de üç farklı noktayı sabit bıraktığından $m^{-1} \circ n$ birimdir. Böylece $m = n$ dir.

Şimdi (z_1, z_2, z_3) noktasını (w_1, w_2, w_3) noktasına resmeden bir Möb^{+} dönüşümü bulabilmek için $m(z_1) = 0$, $m(z_2) = 1$ ve $m(z_3) = \infty$ olan bir $m \in$Möb^{+} bulmak yeterlidir. Şayet böyle bir $m \in$Möb^{+} oluşturabilirsek $n(w_1) = 0$, $n(w_2) = 1$, $n(w_3) = \infty$ olan bir $n \in$Möb^{+} da bulabiliriz. Bu durumda $n^{-1} \circ m$ istenilen dönüşüm olur.

Böylece $m(z_1) = 0$, $m(z_2) = 1$ ve $m(z_3) = \infty$ olan bir $m \in$Möb^{+} bulalım. Bütün z_k lar $\mathbb{C}$ de tanımlı olsun. Bu durumda $\overline{\mathbb{C}}$ de

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} . \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Açıkça, $ad - bc = (z_2 - z_3)(-\, z_3(z_2 - z_1)) - (-z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0$ olduğundan $m \in$Möb^{+} dır.

Şayet,

$z_1 = \infty$ olursa $m(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$;

$z_2 = \infty$ alınırsa $m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$;

$z_3 = \infty$ alınırsa $m(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ elde edilir.

Herhangi bir üçlüyü diğer keyfi bir üçlüye resmeden özel bir möbius dönüşümü bulmak oldukça sıkıcı olur. Meselâ, $(2i, 1 + i, 3)$ üçlüsünü $(0, 2 + 2i, 4)$ üçlüsüne resmeden Möb^{+} dönüşümünü bulalım. Üçlülerin nümerik değerleri dönüşümü bulmayı güçlendirmektedir. Bunun için yukarıda mevcudiyet ispatındaki gibi $(2i, 1+i, 3)$ noktasını $(0,1,\infty)$ noktasına götüren m möbius dönüşümü

$$m(z) = \frac{z-2i}{z-3} \cdot \frac{1+i-3}{1+1-2i} = \frac{(-2+i)z+2+4i}{(1-i)z-3+3i}$$

dir. Ve $(0, 2+2i, 4)$ üçlüsü $(0, 1, \infty)$ üçlüsüne götüren $n \in Möb^{+}$ dönüşümü

$n(z) = \frac{z}{z-4} \cdot \frac{2+2i-4}{2+2i} = \frac{(-2+2i)z}{(2+2i)z-8-8i}$ şeklindedir. Böylece aradığımız dönüşüm,

$(n^{-1} \circ m)(z) = \frac{(24+8i)z+16-48i}{(6+6i)z+4-24i}$ dir.

Şu ana kadar $(z_{1,} z_{2,} z_3)$ gibi farklı noktaların sıralı üçlüleri ile hesap yaptık. Şimdi sıralı olmayan bir üçlüyü yani $\{z_{1,} z_{2,} z_3\}$ kümesini sıralı olmayan farklı noktaların $\{w_{1,} w_{2,} w_3\}$ kümesine resmeden Möbius dönüşümünün varlığı sıralı üçlülerde yapıldığı gibidir. Ancak teklik artık geçerli değildir.

Tanım 1.7.1: G bir grup, X bir küme olsun. $Bij(X)$ ile X den X e bijektif dönüşümlerin grubunu gösterelim. G den $Bij(X)$ grubuna bir homomorfizm varsa G ye X üzerinde hareket eder denir veya bir hareket grubu adı verilir.

1.7.1 Tanımı aşağıdaki gibi de verebiliriz.

$\Lambda : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü $(g, x) \in G \times X$ için , $\Lambda(g, x) = gx$

(i) $g_1 g_2 x = g_1(g_{2(x)})$

(ii) $ex = x$, $e \in G$ birim eleman

şartlarını sağlıyorsa G ye X üzerinde bir hareket grubu adı verilir. Bu tanımdan kolayca görülür ki $g \in G$ keyfi verildiğinde

$f_g : X \rightarrow X$, $x \in X$ için

$x \rightarrow gx$

bijektif bir dönüşüm ve bundan hareketle

$t: G \rightarrow bijX$

$g \rightarrow f_g$

$g \in G$ için bir homomorfizmdir.

Şimdi 1.7.1 tanımından yukarıdaki tanımı şöyle elde edebiliriz:

$f\colon G \to \mathrm{bij}X$

$g \ \to f_g$

bir homomorfizma olsun.

$\Lambda\colon G \times X \to X$ dönüşümünü

$(g, x) \to f_g(x)$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$\Lambda(g_1 g_2, x) = f_{g_1 g_2}(x) = f_{g_1} \circ f_{g_2}(x) = \Lambda\big(g_1, g_2(x)\big)$

elde edilir.($f_{g_1 g_2}$ bir homomorfizma)

$\Lambda(e, x) = f_e(x) = I(x) = x$

Yani f birim elemanı olan e yi I birim dönüşümüne resmeder. Bununla birlikte ikinci tanım elde edildi.

Özetlersek, şayet G grubunun her elemanı X in bir bijektif elemanına gidiyorsa ve eğer G nin elemanlarının grup çarpımı karşılık gelen bijektif elemanların bileşkesine karşılık geliyorsa G, X üzerinde hareket eder diyeceğiz.

Bu grup hareketini göz önüne alan grup, soyut bir obje değil de bir X kümesinin simetrilerinin özel bir koleksiyonu olarak düşünülmelidir. Grup hareketine birçok sıfatlar takılabilir. Şöyle ki;

G ye X üzerinde geçişli olarak hareket eder : $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X$ için $\exists\, g \in G$ öyle ki $g(x) = y$ dir. Bu özellik bizi ilgilendiren en önemli özelliklerden biridir.

Şimdi vereceğimiz lemma ile geçişkenliği elde etmeyi kontrol etmek için daha kolay bir şart veririz, ki bu Möb^+, $\overline{\mathbb{C}}$ nin farklı noktalarının üçlüleri üzerinde geçişli hareket etmesi ispatının bir genelleştirilmişidir.

Lemma 1.7.2: G, X üzerinde hareket etsin ve $x_0 \in X$ olsun. Farzedelim ki $\forall y \in X$ için $\exists\, g \in G$ öyle ki $g(y) = x_0$ dır. Bu takdirde G hareketi geçişlidir.

İspat: $y, z \in X$ keyfi olsun. $\exists\, g_y, g_z \in G$ öyle ki $g_y(y) = x_0 = g_z(z)$ dir. Bu takdirde $(g_z)^{-1} \circ g_y(y) = z$ olur.

Möb^+ nın, $\overline{\mathbb{C}}$ nin farklı noktalarının üçlüleri üzerindeki hareketini hatırlarsak; iki üçlü verildiğinde birini diğerine resmeden bir tek Möb^+ dönüşümü vardı. Bu bize G nin bir X kümesi üzerinde tek bir şekilde geçişken hareket etme tanımının verilebileceğini gösterir. $\forall x, y \in X$ için $\exists!\ g \in G$ öyle ki $g(x) = y$ ise G, X üzerinde bir tek şekilde geçişken hareket eder diyeceğiz. Bu dilde $Möb^{+}$nın durumunu aşağıdaki teoremle verelim.

Teorem 1.7.3: $Möb^{+}$ grubu, $\overline{\mathbb{C}}$ nin farklı noktalarının üçlülerinin T kümesi üzerinde tek olarak transitiftir.

Teorem 1.7.4: $Möb^{+}$ dönüşümü $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberlerin C kümesi üzerinde transitiftir.

İspat: İlk önce $\overline{\mathbb{C}}$ de farklı noktalarının bir üçlüsünün $\overline{\mathbb{C}}$ de bir tek çember belirlediğini gösterelim.

Bunun için, (z_1, z_2, z_3) $\overline{\mathbb{C}}$ de farklı noktalarının bir üçlüsü olsun. Şayet bütün z_k lar $\mathbb{C}$ de kolineer olmasın. Bu takdirde bu üç noktadan geçen bir tek Öklid çemberi vardır.

Şayet bütün z_k lar $\mathbb{C}$ de kolineer olsun. Bu takdirde bu noktalardan geçen bir tek Öklid doğrusu vardır.

Şayet z_k lardan biri ∞ ise diğer iki noktadan geçen bir tek Öklid doğrusu vardır. $\overline{\mathbb{C}}$ deki farklı üç nokta $\overline{\mathbb{C}}$ de bir tek çember belirlemesine rağmen tersi doğru değildir. $\overline{\mathbb{C}}$ de bir A çemberi verilmiş ise $\overline{\mathbb{C}}$ de farklı noktaların bir çok üçlüsü A çemberini verir.

A ve B, $\overline{\mathbb{C}}$ de iki çember olsun. A üzerinde farklı noktaların bir üçlüsü ve B üzerinde farklı noktaların bir üçlüsünü alalım. Ve $m \in Möb^{+}$ da A üzerinde alınan üçlüyü B üzerinde alınan üçlüye götürsün. $m(A)$ ve B, $\overline{\mathbb{C}}$ de aynı noktalardan geçen çemberler olduğundan $m(A) = B$ dir.

Yukarıdakilerin ışığı altında söyleyebiliriz ki $\overline{\mathbb{C}}$ nin farklı noktalarının üçlülerinin T kümesinden $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberlerin C kümesine örten bir dönüşüm vardır.

Teorem 1.7.5: $Möb^{+}$ grubu $\overline{\mathbb{C}}$ de dairelerin D kümesi üzerinde transitiftir.

İspat: D ve E, $\overline{\mathbb{C}}$ de herhangi iki daire öyle ki D, C_D çemberi tarafından ve E de C_E çemberi tarafından belirli olsun. $Möb^{+}$, $\overline{\mathbb{C}}$ de C çemberlerin kümesi üzerinde transitif olduğundan $\exists\ m \in Möb^{+}$ öyle ki $m(C_D) = C_E$ dir. Böylece, $m(D)$, C_E tarafından belirlenen bir dairedir.

Buna rağmen C_E ile belirlenen iki daire vardır ve $m(D) = E$ veya $m(D)$ nin C_E ile belirli diğer daire olup olmadığını bilmiyoruz. $m(D) = E$ ise ispat tamam.

$m(D) \neq E$ ise C_E yi C_E ye ve bu çember tarafından belirli iki daireden birini diğerine resmeden bir $Möb^+$ dönüşümü bulmalıyız. Bu zor değildir.

İlk önce $\overline{\mathbb{C}}$ de bilinen bir çemberle başlayıp, $Möb^+$ nın C üzerindeki transitifliğinden bu özel çember için yapılanı herhangi bir çembere taşıyabiliriz.

$\overline{\mathbb{R}}$ çemberini göz önüne alalım. Bu durumda $J: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $J(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü, $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$ ve $J(1) = 1$ olduğundan $\overline{\mathbb{R}}$ yi $\overline{\mathbb{R}}$ ye resmeder. $J(i) = -i$ olduğundan J, $\mathbb{H}$ yı $\mathbb{H}$ ya resmetmez. Dolayısı ile J , $\overline{\mathbb{R}}$ ile belirli dairelerden birini diğerine resmeder.

Şimdi A, $\overline{\mathbb{C}}$ de herhangi bir çember ve $n(A) = \overline{\mathbb{R}}$ olan $n \in Möb^+$ olsun. Bu takdirde $n^{-1} \circ J \circ n$ dönüşümü A yı A ya ve A ile belirli iki daireden birini diğerine resmeder. Bu ise ispatı bitirir.

1.8. Çapraz Oran

Bu kısımda $Möb^+$ altında invaryant kalan $\mathbb{C}$ üzerindeki fonksiyonları sorgulayacağız.

Tanım 1.8.1: $f: \overline{\mathbb{C}}^k \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonu $Möb^+$ altında invaryanttır denir.

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall m \in Möb^+ \text{ için } f(z_1, z_2, \dots, z_k) = f(mz_1, mz_2, \dots, mz_k) \text{ dır.}$$

$Möb^+$ nın $\mathbb{C}$ üzerindeki üçlü transitifliğinden $1 \leq n \leq 3$ için $Möb^+$ altında invaryant olan $f: \overline{\mathbb{C}}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonları sadece sabit fonksiyonlardır. $n \geq 4$ için $f: \overline{\mathbb{C}}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonları için durum oldukça ilginçtir.

Tanım 1.8.2: $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ farklı noktalar olsun. z_1, z_2, z_3, z_4 nin çapraz oranı

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

olarak tanımlanır. Şayet z_k lardan biri ∞ ise çapraz oran süreklilikle tanımlanır.
Yani,

$$[\infty, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z \to \infty} [z, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z \to \infty} \frac{(z - z_4)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_4)} = \frac{(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_4)}$$

dir. $[z_1, \infty; z_3, z_4]$, $[z_1, z_2; \infty, z_4]$ ve $[z_1, z_2; z_3, \infty]$ benzer biçimde tanımlanır.

Ayrıca çapraz oran Möb^+ altında değişmezdir. Bazı özel durumlarda çapraz oran kolaylıkla hesaplanabilir. Yukarıyı göz önüne alarak $[\infty, 0; 1, z] = \frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{|1-z|^2}$ dır. Böylece $[\infty, 0; 1, z]$ reeldir $\Leftrightarrow$ $\bar{z}$ ve böylece z reeldir.

Önerme 1.8.3: $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ farklı noktalar olsun. Bu takdirde, $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ de bir çember üzerindedir $\Leftrightarrow$ $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ farklı noktalar ve $m \in \text{Möb}^+$ da $m(z_1) = \infty$, $m(z_2) = 0$ ve $m(z_3) = 1$ dir. Bu durumda $m(z_1) = \infty$, $m(z_2) = 0$, $m(z_3) = 1$ ve $m(z_4)$, $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çember üzerindedir. (açıkça $\overline{\mathbb{R}}$ üzerinde) $\Leftrightarrow$ $m(z_4) \in \mathbb{R}$ dir.

$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [m(z_1), m(z_2); m(z_3), m(z_4)]$ ve Möb^+ çemberleri çemberlere resmettiğinden, z_1, z_2, z_3, z_4 bir çember üzerindedir $\Leftrightarrow$ $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ dir.

NOT: Çapraz oran tanımını göz önüne alırsak aşağıdaki tanımları da verebiliriz.

- $[z_1, z_2; z_3, z_4]_2 := \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_3-z_2)}$
- $[z_1, z_2; z_3, z_4]_3 := \frac{(z_2-z_1)(z_3-z_4)}{(z_2-z_4)(z_3-z_1)}$

Şu ana kadar verilen bu üç tip çapraz oran birbirleri ile yakından ilgilidir.

1.9. Möbiüs Dönüşümlerinin Sınıflandırılması

Kısım 1.5 de Möbiüs dönüşümlerinin çok dar da olsa bir sınıflandırılması verildi. Bunun iyi bir şekilde açılması gerekiyor.

Tanım 1.9.1: $m_1, m_2 \in \text{Möb}^+$ dönüşümlerine eşleniktirler denir:$\Leftrightarrow$ $\exists p \in \text{Möb}^+$ öyle ki $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$ dir.

Geometrik olarak m_1 ve m_2, p ile eşlenik ise m_1 in $\overline{\mathbb{C}}$ üzerindeki hareketi ile m_2 nin $p(\overline{\mathbb{C}}) = \overline{\mathbb{C}}$ üzerindeki hareketi aynıdır. Yani, eşleniklik, $\overline{\mathbb{C}}$ üzerinde koordinatların bir değişimini yansıtır.

Möb^+ dönüşümlerinin sınıflandırılmasındaki asıl amaç verilen herhangi bir Möb^+ dönüşümünü bir standart forma eşlenik yapmak ve mümkün olan standart formları sınıflandırmaktır.

$m \in \text{Möb}^+$ dönüşümü I dan farklı bir dönüşüm olsun.

Farzedelim ki, m $\overline{\mathbb{C}}$ de bir tek sabit noktaya sahip olsun ve bu nokta x olsun. $y \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ olsun. Bu takdirde $(x, y, m(y))$ $\overline{\mathbb{C}}$ de farklı noktaların bir (sıralı) üçlüsüdür.

$p \in \text{Möb}^+$ dönüşümü $(x, y, m(y))$ üçlüsünü, $(\infty, 0, 1)$ üçlüsüne resmetsin ve $p \circ m \circ p^{-1}$ bileşkesi göz önüne alınsın. p nin seçiminden $p \circ m \circ p^{-1}(\infty) = p \circ m(x) = p(x) = \infty$ dır. $p \circ m \circ p^{-1}$, ∞ u sabit bıraktığından $p \circ m \circ p^{-1}(z) = az + b$, $a \neq 0$ dır. $p \circ m \circ p^{-1}$, $\overline{\mathbb{C}}$ de sadece ∞ u sabit bıraktığından $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z$ nin $\mathbb{C}$ de çözümü yoktur. Böylece $a = 1$ olmak zorundadır.

$p \circ m \circ p^{-1}(0) = p \circ m(y) = 1$ olduğundan $b = 1$ dir. Böylece $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$ dir. Böylece, bir tek sabit noktaya sahip olan her $m \in \text{Möb}^+$ dönüşümü, bir Möb^+ dönüşümü ile $n(z) = z + 1$ gibi bir Möb dönüşümüne eşleniktir.

m dönüşümüne parabolik deyip $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$ e de onun standart formu diyeceğiz.

Şimdi özel bir örnek alalım. $m(z) = \frac{z}{(z+1)}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. O da “0” noktasıdır. Şimdi m yi standart biçime götüren $p \in \text{Möb}^+$ dönüşümünü bulalım.

$\infty \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ alalım. $m(\infty) = 1$ ise p, $(0, \infty, 1)$ i $(\infty, 0, 1)$ e resmeden dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $p(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümüdür.

Şimdi farzedelim ki m, $\overline{\mathbb{C}}$ de x ve y noktalarını sabit bıraksın. $q \in \text{Möb}^+$ yı öyle seçelim ki $q(x) = 0$ ve $q(y) = \infty$ olsun. Bu takdirde,

$q \circ m \circ q^{-1}(\infty) = q \circ m(y) = q(y) = \infty$ ve $q \circ m \circ q^{-1}(0) = q \circ m(x) = q(x) = 0$ dır. Böylece $q \circ m \circ q^{-1}(z) = az$ olan bir $a \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ mevcuttur ve a ya “m nin çarpanı” denir.

Özel bir örnek olarak $m(z) = \frac{2z+1}{z+1} \in \text{Möb}^+$ yı alalım. $m(\infty) = 2 \neq \infty$ olduğundan m nin sabit noktaları $m(z) = \frac{2z+1}{z+1} = z$ nin çözümleridir. Yani $z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ dir.

Şimdi, m yi standart biçime eşlenik yapacak olan q dönüşümünü bulalım. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ i "0" a ve $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ i ise "∞" a resmedecek olan $q \in \text{Möb}^{+}$ dönüşümlerinden biri

$$q(z) := \frac{z-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}{z-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})} \text{ dönüşümüdür.}$$

Burada $q \circ m \circ q^{-1}$ bileşkesini hesaplama yerine m nin çarpanını bir değerle hesaplamak çok daha basittir.

$$a = q \circ m \circ q^{-1}(1) = q \circ m(\infty) = q(2) = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \text{ dir.}$$

Not: $m \in \text{Möb}^{+}$, x ve y sabit noktalarına sahip olsun. $n_1(x) = 0 = n_2(x)$ ve $n_1(y) = \infty = n_2(y)$ ise $n_1 \circ m \circ {n_1}^{-1}$ ve $n_2 \circ m \circ {n_2}^{-1}$ çarpanları eşittir.

Not: İki sabit noktalı $m \in \text{Möb}^{+}$ dönüşümünü $s(x) = \infty$ ve $s(y) = 0$ ile standart biçime eşlenik yapabiliyorsak $s \circ m \circ s^{-1}$ in çarpanı $\frac{1}{a}$ dır.

Tanım 1.9.2: Son iki notun bir sonucu olarak, iki sabit noktalı bir Möbiüs dönüşümünün çarpanı sadece alınan terse (inverse) göre tanımlanır. Üstelik $J(z) = \frac{1}{z}$, $m(z) = az$ yi $m^{-1}(z) = \frac{1}{a}z$ ye eşlenik yapar.

Şayet m nin a çarpanı $|a| = 1$ özelliğini sağlar ise bir $\varphi \in (0, \pi)$ için $a = e^{2\varphi i}$ olarak yazılabilir. Ve $q \circ m \circ q^{-1}(z) = e^{2\varphi i}z$ orijin etrafındaki 2φ açılık bir dönmeyi temsil eder. Bu durumda φ ye eliptik dönüşüm adı verilir. $q \circ m \circ q^{-1}(z) = e^{2\varphi i}z$ ye, m nin standart biçimi adı verilir.

$|a| \neq 1$ ise $a = \lambda^2 e^{2\varphi i}$ olacak şekilde $\lambda \neq 1$ pozitif sayısı ve $\varphi \in [0,1)$ vardır. Böylece $q \circ m \circ q^{-1}(z) = \lambda^2 e^{2\varphi i}z$, λ^2 büzülmesi ($\lambda^2 > 1$ ise genişleme veya $\lambda^2 < 1$ ise daralma) ile orijin etrafında 2φ açılı bir dönmenin (trivial de olabilir) bileşkesidir. Bu durumda m ye "loxodromik" adı verilir ve $q \circ m \circ q^{-1}(z) = \lambda^2 e^{2\varphi i}z$, m nin standart biçimidir.

Not: "Loxodromic" ismi "loksodrome" kelimesinden gelir. Loksodrome küre üzerinde öyle bir eğridir ki her enlemi aynı açı ile keser. Boylam doğruları loxodromlardır.

Ancak, kutuplara helezon teşkil eden loksodromlar da vardır. Loksodromik Möbius dönüşümlerinin her biri ile loxodromu invaryant bırakır.

1.5. Möbiüs Dönüşümlerinin Matrislerle Gösterimi

İki Möbiüs dönüşümünün bileşkesi için formüle bakacak olursak 2×2 tipindeki matrislerle Möb^{+} arasında kuvvetli bir ilişki buluruz.

$m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ ve $n(z) := \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ dönüşümlerini göz önüne alalım. Bu takdirde, $n \circ m(z) = \frac{\alpha m(z)+\beta}{\gamma m(z)+\delta} = \frac{(\alpha a+\beta c)z\beta+\alpha b+\beta d}{(\gamma a+\delta c)z+\gamma b+\delta d}$ dir.

Şayet m ve n dönüşümlerinin katsayılarını 2×2 tipinde matrisler olarak alırsak

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi matris çarpımlarının elemanları iki Möb^{+} dönüşümünün bileşkesinin katsayılarına karşılık gelir. Bu benzerliği kullanarak kısım 1.9 da verilen sınıflandırmayı biraz daha açıklığa kavuşturalım.

2×2 tipindeki bir matrisle ilgili iki esas nümerik değer vardır. Bunlardan birisi **determinant** diğeri ise **iz** dir.

$m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ nin determinantı $\det(m) = ad - bc$ olarak tanımlanır. Dikkat edilirse bir Möb^{+} dönüşümünün determinantı iyi tanımlı değildir. m nin katsayılarını sıfırdan farklı bir sabitle çarparsak m nin hareketi üzerinde hiçbir değişiklik olmaz. Çünkü $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için $m(z) := \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\alpha az+\alpha b}{\alpha cz+\alpha d}$ dir. Buna rağmen determinantlar eşit değildir.

Uyarı: $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ dönüşümünde α yı öyle seçebiliriz ki m nin determinantı 1 olur. Bu durum da hâlâ bir karışıklığa sebep olabilir. Çünkü -1 ile çarpmak, m nin determinantını değiştirmeyecektir. Bu belirsizlik son belirsizliktir.

Tanım 1.10.1: Determinantı 1 yapma işlemine m yi "Normalleme(Normalleştirme)" işlemi diyeceğiz.

m Möbius dönüşümünü normalleştirdikten sonra kullanışlı başka bir nümerik değer söz konusudur. Bu nümerik değer **iz** dir.

$\tau: \text{Möb}^{+} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\tau(m) = (a + d)^2$, burada $m(z) \coloneqq \frac{az+b}{cz+d}$ dir.

Dönüşümü normalledikten sonra belirsizlik sadece -1 ile çarparken çıktığı için $\tau(m)$ iyi tanımlıdır. Burada gerçek iz, $iz(m) = a + d$ dir.

Ayrıca $\tau(p \circ m \circ p^{-1}) = \tau(m)$ ve $\tau(n \circ m) = \tau(m \circ n)$ dir.

τ nun eşlenik altında invaryant kalan bu özelliğini kullanırsak, Möbiüs dönüşümlerinin onları standart formlarına eşlenik yapmadan, farklı tiplerini ayırt edebiliriz. $m \in \text{Möb}^{+}$ ve $p \in \text{Möb}^{+}$ da m yi standart biçimine resmeden dönüşüm olsun. $\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1})$ olduğundan τ nun standart formlar üzerindeki değerlerini göz önüne almak yeterlidir.

- m parabolik ise $\tau(p \circ m \circ p^{-1}) = z + 1$ dir. Böylece $\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1}) = (1 + 1)^2 = 4$

Dikkat edilirse $e(z) = z$ özdeşlik dönüşümü için $\tau(e) = (1 + 1)^2 = 4$ dü.

- m eliptik veya loxodromik ise $p \circ m \circ p^{-1}(z) = \alpha^2 z$, $\alpha^2 \in \mathbb{C} \backslash \{0,1\}$ yazılabilir.

Buradan $p \circ m \circ p^{-1}(z) = \frac{\alpha z}{\alpha^{-1}}$ ve böylece $\tau(m) = \tau(p \circ m \circ p^{-1}) = (\alpha + \alpha^{-1})^2$ dir.

- m eliptik ise $|\alpha| = 1$ dir. Yani $\exists \theta \epsilon (0, \pi)$ öyle ki $\alpha = e^{i\theta}$ dır. Buradan,

$$\tau(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = 4\cos^2 \theta$$

Özellikle $\tau(m)$ reel ve $\tau(m) \in [0,4)$ dür.

- m loxodromik ise $|\alpha| \neq 1$ dir. Bu durumda $\rho > 0$, $\rho \neq 1$ ve bir $\theta \epsilon [0, \pi)$ için

$\alpha = \rho e^{i\theta}$ dır. Buradan, $\alpha + \alpha^{-1} = \rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}$ ve böylece

$\tau(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = \cos(2\theta)\,(\rho^2 + \rho^{-2}) + 2 + i\sin(2\theta)(\rho^2 - \rho^{-2})$ dir.

$\rho \neq 1$ olduğundan, $\theta \neq 0$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ için $\mathrm{Im}(\tau(m)) \neq 0$ dır.

Şimdi yaptıklarımızı aşağıda kısaca özetleyelim:

Önerme 1.10.2: m birimden farklı bir Möbius dönüşümü olsun. Bu takdirde;

1. m paraboliktir $\Leftrightarrow \tau(\mathrm{m}) = 4$
2. m eliptik $\Leftrightarrow \tau(\mathrm{m}) \in [0,4)$
3. m loxodromik $\Leftrightarrow \tau(\mathrm{m})$ sıfırdan farklı bir sanal kısma sahip veya $\tau(\mathrm{m})$ reel ve $\tau(\mathrm{m}) \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

Örneğin; $\mathrm{m}(\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{z}+1}{\mathrm{z}+3}$ örneğini göz önüne alalım. $\det(\mathrm{m}) = 3 - 1 = 2$ dir. m yi normalleştirirsek $\mathrm{m}(\mathrm{z}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{z}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{z}+\frac{3}{\sqrt{2}}}$ dir. Buradan $\tau(\mathrm{m}) = 8$ dir. Böylece de m loxodromik bir elemandır.

Dikkat edilirse bir eliptik veya loxodromik m elemanının çarpanını sadece $\tau(\mathrm{m})$ nin değerini bilerek hesaplayabiliriz. Şayet m, λ^2 çarpanına sahip ise bu takdirde,
$\tau(\mathrm{m}) = (\lambda + \lambda^{-1})^2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 2$ dir. Bu durumda, $\lambda^4 + \big(2 - \tau(\mathrm{m})\big)\lambda^2 + 1 = 0$ dır.

Buradan,
$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left[\tau(\mathrm{m}) - 2 \pm \sqrt{(2-\tau(\mathrm{m}))^2 - 4}\right] = \frac{1}{2}\left[\tau(\mathrm{m}) - 2 \pm \sqrt{-4\tau(\mathrm{m}) + \tau^2(\mathrm{m})}\right]$ dir.
$\frac{1}{2}\left[\tau(\mathrm{m}) - 2 + \sqrt{-4\tau(\mathrm{m}) + \tau^2(\mathrm{m})}\right]$ ve $\frac{1}{2}\left[\tau(\mathrm{m}) - 2 - \sqrt{-4\tau(\mathrm{m}) + \tau^2(\mathrm{m})}\right]$ birbirinin tersi olduğundan λ^2 çarpanını $|\lambda|^2$ olacak şekilde alabiliriz.

Bu kısmı Möbius dönüşümleri ile 2×2 matrisleri arasındaki ilişki ile bitirelim.

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) := \left\{\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathrm{a,b,c,d} \in \mathbb{C} \text{ ve } \mathrm{ad} - \mathrm{bc} \neq 0\right\},$$
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) := \left\{\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mathrm{a,b,c,d} \in \mathbb{C} \text{ ve } \mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1\right\}$$

olsun.

$$\mu\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Möb}^+$$

$$\mu\left(\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}\right) = \left(\mathrm{m}(\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{az}+\mathrm{b}}{\mathrm{cz}+\mathrm{d}}\right)$$

dönüşümü bu kısmın başında gördüğümüz gibi bir homomorfizmadır.

1.6. Yansımalar

1.6.3 Teorem ile gördük ki $\mathrm{Möb}^+ \subset \mathrm{Homeo}^{\mathrm{C}}(\overline{\mathbb{C}})$ dir. $\mathrm{Möb}^+$ nın $\mathrm{Homeo}^{\mathrm{C}}(\overline{\mathbb{C}})$ de kalan doğal bir genişlemesi vardır.

$\mathrm{Möb}^+$ yı daha büyük bir gruba genişletmek için $\mathrm{Möb}^+$ da olmayan $\overline{\mathbb{C}}$ nin en basit bir homeomorfizmini düşünelim. Bunlardan biri kompleks eşleniktir.

$\mathrm{C}(\mathrm{z}) = \bar{\mathrm{z}},\ \mathrm{z}\in\mathbb{C},\ \mathrm{C}\,(\infty) = \infty$ olsun.

Önerme 1.11.1: $\mathrm{C}: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}\ ,\mathrm{C}(\mathrm{z}) \coloneqq \begin{cases} \bar{\mathrm{z}}\,, & \mathrm{z}\in\mathbb{C} \\ \infty\,, & \mathrm{z} = \infty \end{cases}$ dönüşümü bir homeomorfizmadır.

İspat: C nin tersi kendisidir. Yani $\mathrm{C}^{-1}(\mathrm{z}) = \mathrm{C}(\mathrm{z})$ dir. Böylece C bijektiftir. C nin sürekli olduğunu gösterelim. $\mathrm{z}\in\overline{\mathbb{C}}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $\mathrm{C}(\mathrm{U}_\varepsilon(\mathrm{z})) = \mathrm{U}_\varepsilon(\mathrm{C}(\mathrm{z}))$ olduğundan ispat tamamlanır.

Tanım 1.11.2: $\mathrm{Möb} \coloneqq \langle \mathrm{Möb}^+, \mathrm{C} \rangle$ grubuna "Genel Möbius Grubu" denir.
Yani her $\mathrm{p}\in\mathrm{Möb}^+$ elemanı, $\mathrm{k} \geq 1$ ve $\mathrm{m}_\mathrm{k}\in\mathrm{Möb}^+$ olmak üzere, $\mathrm{p} = \mathrm{C} \circ \mathrm{m}_\mathrm{k} \circ \ldots \mathrm{C} \circ \mathrm{m}_1$ olarak yazılabilir.

Dikkat edilirse $\mathrm{Möb}^+$ nın bütün transitiflik özellikleri Möb de geçerlidir. Yani Möb grubu, $\overline{\mathbb{C}}$ grubu farklı noktaların üçlülerinin T kümesi üzerinde, $\overline{\mathbb{C}}$ deki çemberlerin C kümesi üzerinde ve $\overline{\mathbb{C}}$ deki daireler üzerinde transitiftir.

Buna rağmen Möb grubu farklı noktaların üçlüleri üzerinde tekli transitif değildir. Gerçekten $\mathrm{C}(\mathrm{z}) = \bar{\mathrm{z}}$ dönüşümü ile birim dönüşüm $(1,0,\infty)$ üçlüsünü, sırası ile $(1,0,\infty)$ üzerine resmeder.

Teorem 1.11.3: $\mathrm{Möb} \subset \mathrm{Homeo}^{\mathrm{C}}(\overline{\mathbb{C}})$ dir.

Geometrik olarak C nin, $\overline{\mathbb{C}}$ üzerindeki hareketi $\overline{\mathbb{R}}$ deki "yansıma" dır. Yani $\overline{\mathbb{R}}$ nin her noktası C tarafından sabit bırakılır ve her $\mathrm{z}\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ noktası öyle bir özelliğe sahiptir ki $\mathbb{R}$ doğrusu z ve $\mathrm{C}(\mathrm{z})$ yi birleştiren Öklid parçasının dik açıortayıdır.

Burada yansıma, $\overline{\mathbb{R}}$ özel çemberinde tanımlandı. Fakat yansımayı $\overline{\mathbb{C}}$ de herhangi bir çemberde tanımlayabiliriz.

Tanım 1.11.4: A, $\overline{\mathbb{C}}$ de herhangi bir çember ve $m \in \text{Möb}$ öyle ki $m(\overline{\mathbb{R}}) = A$ olsun. $C_A = m \circ C \circ m^{-1}$ bileşkesine A da "yansıma" adı verilir.

Dikkat edilirse $\overline{\mathbb{R}}$ yi A ya resmeden birçok m dönüşümü olabileceğinden C_A da bir belirsizlik düşünülebilir. İleride göreceğiz ki C_A iyi tanımlıdır.

Bir örnek olarak $A = S^1$ alalım. $\overline{\mathbb{R}}$ yi, S^1 e resmeden Möb^+ nın bir elemanı$(0,1,\infty)$ üçlüsünü $(i, 1, -i)$ ye götüren

$$m(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{i}{\sqrt{2}}}{\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

dönüşümüdür. Bu durumda $C_A(z) = m \circ C \circ m^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dir.

Şayet A , α merkezli ve ρ yarıçaplı $\mathbb{C}$ de bir çember ise S^1 deki yansımayı yani $c(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yi S^1 i, A ya resmeden p dönüşümü yardımı ile eşlenik yapabiliriz. Burada $p(z) = \rho z + \alpha$ biçimindedir.

A da C_A yansıması $C_A(z) = p \circ C \circ p^{-1}(z) = \frac{p^2}{\bar{z} - \bar{\alpha}} + \alpha$ dır.

Benzer şekilde şayet A, $\mathbb{C}$ de α dan geçen $\mathbb{R}$ ile θ açısı yapan bir Öklid doğrusu ise $\overline{\mathbb{R}}$ deki $C(z) = \bar{z}$ yansımasını $\mathbb{R}$ yi A ya resmeden $p(z) = e^{i\theta}z + \alpha$ yardımı ile eşlenik yaparsak A daki C_A yansıması $C_A(z) = p \circ C \circ p^{-1}(z) = e^{2i\theta}(\bar{z} - \bar{\alpha}) + \alpha$ dır.

Önerme 1.11.5: Möb ün her elemanı $\overline{\mathbb{C}}$ de sonlu tane çemberdeki yansımaların bileşkesi olarak verilebilir.

İspat: $\text{Möb} := \langle \text{Möb}^+, C: z \to \bar{z} \rangle$ ve Möb^+, $J(z) = \frac{1}{z}$ ve $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ olduğundan sadece bu dönüşümler için önermeyi doğrulamak yeterlidir.

Tanımdan C, $\overline{\mathbb{R}}$ deki yansımadır. J yi $C(z) = \bar{z}, S^1$ de $C(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansımasının bileşkesi olarak verilebilir. Möb^+ nın $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ biçimindeki her elemanı $\overline{\mathbb{C}}$ nin sonlu tane çemberindeki yansımaların bileşkesidir. Böylece ispat tamamlanır.

Not: Bundan önceki çoğu kısımlarda gördük ki Möb ün elemanları $\overline{\mathbb{C}}$ de çemberleri çemberlere resmeden $\overline{\mathbb{C}}$ nin homeomorfizmleridir. Bu özellik Möb ü karakterize eder.

Teorem 1.11.6: $\text{Möb} = \text{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ dir.

İspat: 1.6.3 Teorem de $\text{Möb} \subset \text{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $\text{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}}) \subset \text{Möb}$ olduğunu gösterelim.

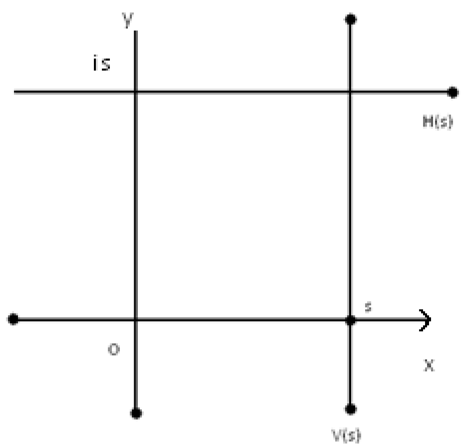
$f \in \text{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ keyfi olsun. $p \in \text{Möb}$ dönüşümü de $(f(0), f(1), f(\infty))$ u $(0,1,\infty)$ üçlüsüne resmetsin. Böylece $p \circ f$ dönüşümü,

$p \circ f(0) = 0$, $p \circ f(1) = 1$, $p \circ f(\infty) = \infty$ dır. $p \circ f$ çemberleri çemberlere resmettiğinden $p \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ dir. $p \circ f$, ∞ u sabit bırakıyor ve de $\mathbb{R}$ yi $\mathbb{R}$ ye resmettiğinden ya $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ veya $p \circ f(H)$ alt yarı düzlemidir. Birinci durumda $m := p$ alalım. İkinci durumda $C(z) = \overline{z}$ olmak üzere, $m = C \circ p$ alalım.

Böylece, $m \circ f(0) = 0$, $m \circ f(1) = 1$, $m \circ f(\infty) = \infty$ ve $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ dır. Gösterelim ki $m \circ f$ birim dönüşümdür. Bunu $m \circ f$ nin bütün noktalarını sabit bıraktığından $\overline{\mathbb{C}}$ de bir yoğun alt küme bulalım.

$m \circ f$ nin ∞ u sabit bıraktığı ve de $\text{Homeo}^{C}(\overline{\mathbb{C}})$ de olduğundan $m \circ f$ dönüşümü $\mathbb{C}$ deki Öklid doğrularını $\mathbb{C}$ deki Öklid doğrularına resmeder. Ve ayrıca $\mathbb{C}$ deki çemberleri $\mathbb{C}$ deki çemberlere resmeder.

$Z := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : m \circ f(z) = z\}$ kümesini tanımlayalım. Açıkça, $0, 1, \infty \in Z$ dir.
Keza X ve Y, $\mathbb{C}$ de bir z_0 noktasında kesişen iki Öklid doğrusu ve $m \circ f(X) = X$ ve $m \circ f(Y) = Y$ ise $m \circ f(z_0) = z_0$, böylece $z_0 \in Z$ dir. Her bir $s \in \mathbb{R}$ için $V(s)$, s den geçen $\mathbb{C}$ de dik doğru ve $H(s)$, *is* den geçen yatay doğru olsun.



Şekil 1.7. $\mathbb{C}$ de paralel ve $\mathbb{C}$ de dik doğrular

H , $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ de herhangi bir yatay doğru olsun. Bu takdirde $m \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ olduğundan $m \circ f(H)$ ve $m \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ de ayrık doğrulardır. Böylece $m \circ f(H)$, $\mathbb{C}$ de bir yatay doğrudur. Keza $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ olduğundan

H, $\mathbb{H}$ dadır. $\Leftrightarrow m \circ f(H) \subset \mathbb{H}$ dır.

A, $\frac{1}{2}$ merkezli $\frac{1}{2}$ yarıçaplı Öklid çemberi olsun. $V(0)$, A ya "0" da teğet dolduğundan $m \circ f(V(0))$ doğrusu $m \circ f(0) = 0$ da $m \circ f(A)$ ya teğettir. Ve benzer biçimde $m \circ f(V(1))$, 1 de $m \circ f(A)$ ya teğettir.

$V(0)$ ve $V(1)$, $\mathbb{C}$ de paralel Öklid doğruları olduğundan $m \circ f(V(0))$ ve $m \circ f\big(V(1)\big)$ keza $\mathbb{C}$ de paralel doğrulardır. Böylece $m \circ f(V(0)) = V(0)$ ve $m \circ f\big(V(1)\big) = V(1)$ dir.

0 ve 1 den geçen Öklid çemberlerine teğet olan ve 0 ve 1 den geçen doğrular paralel olmadığından $m \circ f(A) = A$ dır. Buna rağmen $m \circ f(A) = A$ olmasına rağmen $A \cap Z$ kümesinin 0 ve 1 den başka nokta ihtiva edip etmediğini bilmiyoruz.

Buna rağmen A ya teğet iki yatay doğru ile benzer hareket edelim.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ i de A ya teğet $H(\frac{1}{2})$ teğet doğrusunu göz önüne alalım. $m \circ f(H(\frac{1}{2}))$, $m \circ f(A) = A$ ya teğet olan $\mathbb{H}$ da bir yatay doğru olduğundan $m \circ f(H(\frac{1}{2})) = H$ dır.

Şimdi Z de daha fazla nokta vardır. Gerçekten $H\left(\frac{1}{2}\right) \cap V(0) = i\frac{1}{2}$ ve $H\left(\frac{1}{2}\right) \cap V(1) = 1 + i\frac{1}{2}$ noktaları Z dedir. Benzer şekilde $m \circ f(H(-\frac{1}{2})) = H(-\frac{1}{2})$ dir. Böylece $H\left(-\frac{1}{2}\right) \cap V(0) = -\frac{1}{2}i$ ve $H\left(-\frac{1}{2}\right) \cap V(1) = 1 - \frac{1}{2}i$ noktaları Z dedir.

Z deki her nokta çifti, $m \circ f$ ile kendi üzerine resmedilen bir Öklid doğrusu verir. Ve Z deki her üçlü $m \circ f$ ile kendi üzerine resmedilen bir Öklid çemberi verir. Bu Öklid doğruları ve Öklid çemberlerinin kesişimleri Z ye daha fazla nokta sağlar. Ki bunlar kendi kendilerine resmedilen daha fazla Öklid doğruları ve Öklid çemberleri verecektir.

Bu şekilde devam edilerek Z kümesi $\overline{\mathbb{C}}$ nin yoğun bir alt kümesini ihtiva eder ve bu küme üzerinde $m \circ f$ birimdir. Böylece $f = m^{-1} \in$ Möb elde edilir.

1.12. Möb ün Konformluğu

Tanım 1.12.1: $\overline{\mathbb{C}}$ de C_1 ve C_2 gibi iki düzgün yol verilsin ve bu yollar bir z_0 noktasında kesişsin. C_1 ve C_2 arasında (z_0 noktasında) ki açı Açı (C_1, C_2) ile gösterilir. Ve C_1 den C_2 ölçülür.

Ölçmede saat yönünün tersini pozitif olarak; aksi halde negatif olarak alacağız. Dolayısı ile Açı (C_2, C_1) = - Açı (C_1, C_2) dir.

Dikkat edilirse açı iyi tanımlı değildir. Fakat π nin tam katlarına göre tanımı düzenlenirse problem ortadan kalkar. Bu durumda açılar $\mathbb{R}/_{\pi\mathbb{Z}}$ nin elemanlarında tanımlanır. Fakat bu kısımda yukarıda verilen açı tanımı bir belirsizliğe neden olmayacaktır.

$\overline{\mathbb{C}}$ nin bir homeomorfizmi eğriler arasındaki açıların mutlak değerlerini koruyorsa bu homeomorfizmaya "konform" dur diyeceğiz. Dikkat edilirse bu kullanım standart değildir. Birçok bilim adamı konformluğu gerçek açıların korunması olarak tanımlar.

Teorem 1.12.2: Möb ün elemanları $\overline{\mathbb{C}}$ nin konform homeomorfizmleridir. Yani her m möbiüs dönüşümü konformdur.

İspat: Bir noktada iki eğri arasındaki açı, o noktada o eğrilerin teğetleri arasındaki açı olduğundan $X_1, X_2 \in \mathbb{C}$ de doğrular, m∈Möb olmak üzere,

$$\text{Açı}\ (X_1, X_2) = \text{Açı}(m(X_1), m(X_2))$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

X_1 ve X_2, z_0 dan geçen iki Öklid doğrusu ve z_k da $X_k$üzerinde z_0 dan farklı noktalar ve de S_k, X_k nın eğimini göstersin. Bu takdirde $S_k = \frac{\mathrm{Im}(z_k - z_0)}{\mathrm{Re}(z_k - z_0)}$ dır.

θ_k, X_k nın $\mathbb{R}$ ile yaptığı açı olsun. Bu takdirde $S_k = \mathrm{tg}(\theta_k)$ dır. Özellikle $\text{Açı}(X_1, X_2) = \theta_2 - \theta_1 = \mathrm{arctg}S_2 - \mathrm{arctg}S_1$ dir.

$\text{Möb} = \langle f(z) = az + b, a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{C},\ J(z) = \frac{1}{z}; C(z) = \bar{z} \rangle$ olduğunu yani Möb ün üç elmanı tarafından üretildiğini biliyoruz. Şimdi bunları sıra ile etki ettirelim.

Önce $f(z) = az + b, a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{C}$ alalım. $a = \rho e^{i\beta}$ yazalım. $f(\infty) = \infty$ olduğundan $f(X_1)$ ve $f(X_2)$, $\mathbb{C}$ de Öklid doğrularıdır. $f(X_k)$ doğruları $f(z_0)$ dan ve $f(z_k)$ dan geçtiklerinden $f(X_k)$ nın eğimi

$$t_k = \frac{\mathrm{Im}(f(z_k) - f(z_0))}{\mathrm{Re}(f(z_k) - f(z_0))} = \frac{\mathrm{Im}(a(z_k - z_0))}{\mathrm{Re}(a(z_k - z_0))} = \frac{\mathrm{Im}(e^{i\beta}(z_k - z_0))}{\mathrm{Re}(e^{i\beta}(z_k - z_0))} = \mathrm{tg}(\beta + \theta_k)$$ dır. Özellikle,

$\text{Açı}\,(f(X_1), f(X_2)) = \mathrm{arctg}(t_2) - \mathrm{arctg}(t_1) = (\beta + \theta_2) - (\beta + \theta_1) = \theta_2 - \theta_1 =$ $\text{Açı}(X_1, X_2)$ dir. Yani $m = f$ konformdur.

Şimdi $J(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümünü göz önüne alıp farklı bir yaklaşımla hareket edelim. Artık burada $J(X_1)$, $J(X_2)$ nin $\mathbb{C}$ de Öklid doğrusu olması gerekmez. Bunların her ikisi sıfırdan geçen Öklid çemberleri veya biri Öklid çemberi diğeri doğru olabilir. Biz burada $J(X_1)$ ve $J(X_2)$ yi 0 dan geçen Öklid çemberler olarak göz önüne alacağız.

X_k nın denklemi $\beta_k z + \overline{\beta_k z} + 1 = 0$, $\beta_k \in \mathbb{C}$ biçiminde olsun. X_k nın eğimi $S_k = \frac{\mathrm{Re}(\beta_k)}{\mathrm{Im}(\beta_k)}$ dır. Bu durumda $J(X_k)$ nın denklemi $z\bar{z} + \overline{\beta_k}z + \overline{\beta_k z} = 0$, yani $|z + \beta_k|^2 = |\beta_k|^2$ dır. Böylece $J(X_k)$, $-\beta_k$ merkezli $|\beta_k|$ yarıçaplı Öklid çemberidir. $J(X_k)$ nın 0 daki teğetinin eğimi $-\frac{\mathrm{Re}\beta_k}{\mathrm{Im}\beta_k} = -\mathrm{tg}\,\theta_k = \mathrm{tg}(-\theta_k)$ ve böylece $J(X_k)$ ile $\mathbb{R}$ arasındaki açı $-\theta_k$ dır.

Böylece $J(X_1)$ ve $J(X_2)$ arasındaki açı $\text{Açı}(J(X_1), J(X_2)) = -\theta_2 - (-\theta_1) =$ $-\text{Açı}\,(X_1, X_2)$ dir. Yani J konformdur.

Not: Dikkat edilirse yukarıdaki ispatta $f(z) = az + b$ dönüşümü X_1 ve X_2 arasındaki açının işaretini korumasına rağmen $C(z) = \bar{z}$ dönüşümü açının işaretini değiştirir. $J(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümüne göre $J(X_1)$ ve $J(X_2)$ nin $z = 0$ da aralarındaki açı X_1 ve X_2 nin ∞ daki açısıdır. Ki bu açı z_0 da X_1 ve X_2 arasındaki açının negatifidir. Böylece J dönüşümü X_1 ve X_2 arasındaki açının işaretini korur.

Sonuç olarak, Möb^+ nın her bir elemanı X_1 ve X_2 arasındaki açının işaretini korur.

1.13. $\mathbb{H}$ nın Korunması

Hatırlanırsa möbiüs dönüşümlerine girmemizin ve grubunun çalışılmasının amacı $\mathbb{H}$ nın hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmeden homeomorfizmlerini belirlemekti. Böyle dönüşümleri belirlemenin bir yolu $\mathbb{H}$ yı koruyan Möb ün alt grubudur.

$\text{Möb}(\mathbb{H}) := \{m \in \text{Möb} \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$ grubunu göz önüne alalım.

Teorem 1.13.1: Möb $(\mathbb{H})$ nın her elemanı $\mathbb{H}$ daki hiperbolik doğruları $\mathbb{H}$ daki hiperbolik doğrulara resmeder.

İspat: Teoremin ispatı teorem 1.12.1 in basit bir sonucudur. Yani, Möb $(\mathbb{H})$ nın elemanları $\overline{\mathbb{C}}$ de çemberler arasındaki açıyı korur ve bilindiği gibi $\mathbb{H}$ daki her hiperbolik doğru $\mathbb{H}$ ile $\overline{\mathbb{C}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ ye dik olan bir çemberin arakesitidir.

$\text{Möb}^+ (\mathbb{H}) := \{m \in \text{Möb}^+ \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$ kümesi Möb $(\mathbb{H})$ nın bir alt grubudur. Bu tanımlar tatminkar değildir. Çünkü bunların elemanlarının tiplerini bilmiyoruz. Şimdi bunları incelemeye çalışalım. $\mathbb{H}$, $\overline{\mathbb{C}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ çemberi ile belirli bir daire olduğundan

$\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) := \{m \in \text{Möb} \mid m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}$ alt grubunun elemanlarını belirleyelim. Biliyoruz ki Möb ün her elemanı $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere

$m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ dir veya $m(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ biçimindedir.

Dikkat edilirse ikinci durumda $m \circ C(z) = m(\bar{z}) = \frac{az+b}{cz+d}$ bileşkesini göz önüne alabiliriz. Böylece kendimizi sadece,

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ ye kısıtlayabiliriz.

$m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ olduğundan,

$m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, $m(\infty) = \frac{a}{c}$ ve $m^{-1}(0) = -\frac{b}{c}$ noktaları $\overline{\mathbb{R}}$ dedir. $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ olduğunu farzedersek bu üç nokta $\mathbb{R}$ dedir. Bu durumda m nin her kat sayısını c nin bir katı olarak yazabiliriz. Özellikle,

$a = m(\infty)c$, $b = -m^{-1}(0)a = -m^{-1}(0)m(\infty)c$ ve ayrıca,

$d = -m^{-1}(\infty)c$ dir. $\det m = 1$ den

$1 = ad - bc = c^2[\,m(\infty)(m^{-1}(0)) - m^{-1}(\infty)\,]$ dir. $m(\infty)$, $m^{-1}(0)$, $-m^{-1}(\infty)$ reel olduğundan c, ya reeldir veya sadece sanal kısımlıdır. Böylece m nin katsayılarının hepsi reel veya hepsi sadece sanal kısımlıdır.

Yukarıda $a = 0$ veya $c = 0$ olması durumunu göz önüne alırsak m nin katsayılarının ya hepsi reel veya hepsi sadece sanal kısımlıdır.

Tersine şayet $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$ veya $m(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $ad - bc = 1$ ve burada katsayıların hepsi veya hepsi sadece sanal ise $m(0), m(\infty), m^{-1}(\infty) \in \overline{\mathbb{R}}$ dir. Bu durumda $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ dir.

Bunları aşağıdaki teoremle özetleyelim:

Teorem 1.13.2: $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ nin her elemanı aşağıdakilerden biri biçimindedir:

1. $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc = 1$
2. $m(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc = 1$
3. $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d sadece sanal ve $ad - bc = 1$
4. $m(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a, b, c, d sadece sanal ve $ad - bc = 1$

Sonuç: A, $\overline{\mathbb{C}}$ de herhangi bir çember ise $\text{Möb}(A) = \{\, m \in \text{Möb} \mid m(A) = A\}$ alt grubunun da elemanlarını açık olarak yazabiliriz. Bunun için bize gerekli olan bir $p \in \text{Möb}$ öyle ki $p(\overline{\mathbb{R}}) = A$ elemanını seçmektir.

Bu durumda $\{p \circ m \circ p^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})\}$ kümesini göz önüne alalım. $n \in \text{Möb}$, $n(A) = A$ biçiminde ise $p^{-1} \circ n \circ p(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ dir. Böylece,

$\exists m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ öyle ki $p^{-1} \circ n \circ p = m$ dir. Buradan $n = p \circ m \circ p^{-1}$ dir. Böylece $\text{Möb}(A) = \{p \circ m \circ p^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})\}$ dir. Burada $\text{Möb}(A)$, p nin seçiminden bağımsızdır. Gerçekten, $q \in \text{Möb}$, $q(\overline{\mathbb{R}}) =$ A şartını sağlasın. Bu takdirde $p^{-1} \circ q$, $\overline{\mathbb{R}}$ yi $\overline{\mathbb{R}}$ ye resmeder. Böylece $\exists t \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ öyle ki $q = p \circ t$ dir. Böylece her $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ için $q \circ m \circ q^{-1} = p \circ (t \circ m \circ t^{-1}) \circ p^{-1}$ olduğundan

$\{p \circ m \circ p^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})\} = \{\, q \circ m \circ q^{-1} \mid m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})\}$ dir.

Şimdi sıra Möb ($\mathbb{H}$) nın belirlenmesine geldi. $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ nin her elemanı $\overline{\mathbb{C}}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ nin belirlediği iki daireyi ya korur veya birini diğerine resmeder. Bunu dairelerden birinde bir tek nokta olarak belirleyebileceğiz.

$m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$, Möb ($\mathbb{H}$) nın bir elemanıdır $\Leftrightarrow$ Im $(m(i)) > 0$ dır.

Şimdi Im $(m(i))$ yi kontrol edelim.

1. $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$

$$\text{Im}\,(m(i)) = \text{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} > 0$$

Böylece 1.13.2 Teoremdeki 1. Eleman $m \in$ Möb ($\mathbb{H}$) dır.

2. $m(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$ ise bu takdirde $\mathrm{Im}\big(m(i)\big) = -\frac{1}{c^2+d^2} < 0$ dır. Buradan $m \notin$ Möb ($\mathbb{H}$) dır.
3. $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d sadece sanal ve $ad - bc = 1$ olsun. Bu durumda $a = \alpha i$, $b = \beta i, c = \gamma i,\ d = \delta i$ olan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mevcuttur öyle ki

   $\mathrm{Im}\,\big(m(i)\big) = -\frac{1}{\gamma^2+\delta^2} < 0$ dır. Buradan $m \notin$ Möb ($\mathbb{H}$) dır.
4. $m(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a, b, c, d sadece sanal ve $ad - bc = 1$ olsun. Bu durumda $\mathrm{Im}\,\big(m(i)\big) = \frac{1}{\gamma^2+\delta^2} > 0$ dır. Böylece $m \in$Möb ($\mathbb{H}$) dır.

Teorem 1.13.3: Möb ($\mathbb{H}$) nın her elemanı ya $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$ veya $n(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a, b, c, d sadece sanal ve $ad - bc = 1$ dir.

Gösterim: Teorem 1.13.2 deki birinci tip elemanlar Möb$^+$ ($\mathbb{H}$) veya $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Yani $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \left\{m: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \,\middle|\, m(z) := \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}$ dir. Benzer şekilde Möb$^+$ ($\mathbb{H}$) nın her elemanı da $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$ olmak üzere $m(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ biçimindedir.

Uyarı: Möb ($\mathbb{H}$) nın elemanlarının hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmettiğini biliyoruz. Acaba, hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara resmeden bütün elemanlar Möb ($\mathbb{H}$) da mı? Bunu daha sonra göreceğiz.

Kısım 1.11 de $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çemberdeki yansımanın iyi tanımlı olduğunu daha sonra göstereceğimizi söylemiştik. Möb($\overline{\mathbb{R}}$) nın elemanlarının kesin belirlenmesi bunun ispatında merkezi rol oynayacaktır.

Önerme 1.13.4: $\overline{\mathbb{C}}$ deki bir çemberde yansıma iyi tanımlıdır.

İspat: Möb($\overline{\mathbb{R}}$) nın her m elemanı için $C(z) = \bar{z}$ olmak üzere $C \circ m = m \circ C$ dir. Şayet $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $ad - bc = 1$ ise bu takdirde,

$$C \circ m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = m \circ C(z) \text{ dir.}$$

Şayet $m(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a, b, c, d sadece sanal, $ad - bc = 1$ ise

$$C \circ m(z) = \frac{-az-b}{-cz-d} = \frac{az+b}{cz+d} = m \circ C\,(z) \text{ dir.}$$

A, $\overline{\mathbb{C}}$ de bir çember ve $m, n \in \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ de $\overline{\mathbb{R}}$ yi A ya resmeden iki eleman olsun. Bu takdirde $n^{-1} \circ m$, $\overline{\mathbb{R}}$ yi $\overline{\mathbb{R}}$ ye resmeder. Böylece $p := n^{-1} \circ m \in \mathrm{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ dir. Özellikle, $C \circ p = p \circ C$ dir. $m = n \circ p$ alırsak,

$$m \circ C \circ m^{-1} = n \circ p \circ C \circ p^{-1} \circ n^{-1} = n \circ p \circ p^{-1} \circ C \circ n^{-1} = n \circ C \circ n^{-1} \quad \text{dir.}$$

Böylece $\overline{\mathbb{C}}$ deki bir çemberde yansıma iyi tanımlıdır.

1.14. Möb ($\mathbb{H}$) nın Geçişkenlik Özellikleri

Önerme 1.14.1: Möb ($\mathbb{H}$), $\mathbb{H}$ üzerinde transitiftir.

İspat: Lemma 1.7.2 yi kullanarak $\mathbb{H}$ nın herhangi bir w noktasını i ye resmeden bir $m \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ nın varlığını göstermek yeterlidir. Bunun için $w = ai + b, a, b \in \mathbb{R}, b > 0$ yazalım. Möb($\mathbb{H}$) nın w yi i ye resmeden bir elemanını oluşturalım. İlk önce w yi pozitif sanal eksene $p(z) = z - a$ ile kaydıralım. Böylece de, $p(w) = p(ai + b) = bi$ dir. İkinci adım olarak $q(z) = \frac{1}{b}z$ yi $p(w)$ ye uygulayalım, böylece de $q(p(w)) = q(bi) = i$ dir. $-a \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{b} > 0$ olduğundan teorem 1.13.3 gereği $p(z)$ ve $q(z)$ böylece de $q \circ p(z)$ dönüşümü Möb ($\mathbb{H}$) dadır.

Uyarı: Möb ($\mathbb{H}$) nın S kümesi üzerinde transitif olması ve ayrıca bir hiperbolik doğru $\mathbb{H}$ da bir nokta çifti ile belirlenmesine rağmen, Möb ($\mathbb{H}$) grubunun $\mathbb{H}$ nın farklı noktalarının ikililerini $\mathcal{P}$ kümesi üzerinde veya $\mathbb{H}$ nın farklı noktalarının üçlülerinin $J_{\mathbb{H}}$ kümesi üzerinde transitif olması gerekmez. Bu durumu I pozitif sanal eksen alarak görebiliriz. I nın sonsuzdaki bitim noktaları 0 ve ∞ olduğundan Möb ($\mathbb{H}$) nın I yı kendi üzerine resmeden her elemanı ya 0 ve ∞ u sabit bırakır veya birini diğerine resmeder.

Teorem 1.13.3 den Möb ($\mathbb{H}$) nın elemanlarının genel biçimini biliyoruz. Yani Möb ($\mathbb{H}$) nın 0 ve ∞ u sabit bırakan elemanı $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ olmak üzere $m(z) = az$ biçiminde veya $m(z) = -a\bar{z}$ biçimindedir. 0 ve ∞ birbirine resmeden $m \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ dönüşümü $b > 0$ olmak üzere $m(z) = -\frac{b}{z}$ biçiminde veya $m(z) = \frac{b}{\bar{z}}$ biçimindedir.

Bu durumların hangisi olursa olsun I pozitif sanal ekseni kendi üzerine, i yi i ye ve 2i yi 3i ye resmeden Möb ($\mathbb{H}$) nın bir elemanı yoktur. Gerçekten I yı kendi üzerine, i yi de sabit bırakan bir tek Möb $(\mathbb{H})\backslash\{e\}$ dönüşümü $B(z) = -\bar{z}$ dir. Ki bu I da yansımadır ve böylece I yı sabit bırakır.

Tanım 1.14.2: $\mathbb{H}$ da bir yarı düzlem , $\mathbb{H}$ daki bir hiperbolik doğrunun bütünleyeninin bir bileşenidir.

- Özellikle her yarı düzlem bir tek hiperbolik doğru ile belirlenir ve her hiperbolik doğru bir çift düzlem belirler.
- Bir yarı düzlemi belirleyen hiperbolik doğru yarı düzlemin sınır doğrusudur.
- Bir yarı düzleme kapalıdır denir:$\Leftrightarrow$ bu bir L hiperbolik doğrusu ile $\mathbb{H}/L$ nin bir bileşeninin birleşimidir.
- Eğer bu, $\mathbb{H}/L$ nin bir bileşeni ise bu yarı düzleme açıktır denir.

Önerme 1.14.3: Möb ($\mathbb{H}$) grubu, $\overline{\mathbb{R}}$ nin farklı noktalarının üçlülerinin $J_{\overline{\mathbb{R}}}$ kümesi üzerinde transitiftir.

İspat: Lemma 1.7.2 yi göz önüne alarak $\overline{\mathbb{R}}$ de farklı noktaların (z_1, z_2, z_3) üçlüsü verildiğinde; Möb ($\mathbb{H}$) da (z_1, z_2, z_3) ü $(0,1,\infty)$ a resmeden bir dönüşümün bulunması yeterlidir. L öyle bir hiperbolik doğru olsun ki ∞ daki bitim noktaları z_1, z_3 olsun. Ve m$\in$Möb ($\mathbb{H}$) da L yi I imajiner eksenine resmetsin. $m(z_1) = 0$ ve $m(z_3) = \infty$ kabul edebiliriz.(Aksi halde m ile K, $K(z) = -\frac{1}{z}$ nin bileşkesi alınır.)$b = m(z_2)$ olsun.

$b > 0$ ise m ile $p(z) = \frac{1}{b}z$ nin bileşkesi (z_1, z_2, z_3) ü $(0,1,\infty)$ a resmeder.

$b < 0$ ise bu sefer $p(z) = \frac{1}{b}z$, Möb ($\mathbb{H}$) da değildir. Ama $q(z) = \frac{1}{b}\bar{z}$ dönüşümü Möb ($\mathbb{H}$) dadır. Bu durumda m ile q nun bileşkesi (z_1, z_2, z_3) ü $(0,1,\infty)$ a resmeder.

Not: Dikkat edilirse Möb$^+$ ($\mathbb{H}$) grubu $J_{\overline{\mathbb{R}}}$ kümesi üzerinde üçlü transitif değildir. Çünkü $PSL(2,\mathbb{R})$ nin $(0,1,\infty)$ u $(0,-1,\infty)$ a resmeden bir eleman yoktur.

Tanım 1.14.4: $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun $\Gamma := \left\{ z \to \frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$ alt grubuna “Modular Grup” adı verilir.

Gösterim: $\Gamma_0(\mathrm{N}) \coloneqq \left\{ \mathrm{T}: \mathrm{z} \to \frac{\mathrm{az+b}}{\mathrm{cz+d}} \middle| \mathrm{T} \in \Gamma \right\}$ grubu Γ modular grubunun bir alt grubudur.

Tanım 1.14.5: Γ , modüler grup olsun. Γ nın en küçük n tamsayılı bir $\Gamma(\mathrm{n})$ grubunu içeren herhangi bir G alt grubuna Γ nın bir kongrüans alt grubu denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. $\Gamma_\circ(\mathrm{N})$ Grubunun $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$deki Normalleyeni

Γ modular grubu birçok önemli alt gruba sahiptir. Bunlardan en önemlilerinden biri Klein ve Fricke'nin çalıştığı ve eliptik modular fonksiyonlar teorisine uyguladıkları $\Gamma_\circ(\mathrm{N})$ kongrüans alt grubudur.

Bu bölümde $\Gamma_\circ(\mathrm{N})$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ deki $\mathrm{N}_{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}(\Gamma_\circ(\mathrm{N})) =: \Gamma_\mathrm{B}(\mathrm{N})$ normalleyenini göz önüne alıp $\Gamma_\mathrm{B}(\mathrm{N}) \,/\, \Gamma_\circ(\mathrm{N})$ bölüm grubunun bunun bazı alt gruplarının bir direkt çarpımı biçiminde yazılıp yazılamayacağını göstereceğiz. Daha açık bir şekilde ifade etmek istersek, bu bölüm grubunun, $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$ için bir direkt çarpım şeklinde yazılması gerekip gerekmediğini örneklerle açıklayıp; hangi N ler için yazılabileceğini göstereceğiz. Bunu göstermekle [2] deki son teoremin bir doğru ifadesi de verilmiş olacaktır.

$\Gamma_\mathrm{B}(\mathrm{N})$ normalleyeni ilk defa [4] de verildi. Ancak şu anda literatürde kullanılan biçimi, ki bu [4] deki biçimden kolaylıkla elde edilebilir, [3] te verilmiştir. Burada verilen biçimi ile normaliyen; h tam sayısı $\mathrm{h}^2|\mathrm{N}$ olan 24 ün en büyük böleni $\mathrm{e} > 0$ tam sayısı N/h^2 nin bir tam böleni ve determinantı e olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ae} & \mathrm{b}/\mathrm{h} \\ \mathrm{cN}/\mathrm{h} & \mathrm{de} \end{pmatrix} \tag{1}$$

matrislerinden oluşur.

Lemma 2.1.1: $\mathrm{M} \in \mathbb{N}$ olmak üzere Ex(M), M nin tam bölenlerinin kümesini göstersin. $\mathrm{s}, \mathrm{m} \in \mathrm{Ex}(\mathrm{M})$ olmak üzere, Ex(M) üzerinde $\mathrm{s} * \mathrm{m} := \mathrm{s}.\mathrm{m} \,/\, (\mathrm{s},\mathrm{m})^2$ işlemini tanımlayalım. Bu takdirde $*$ işlemi Ex(M) kümesi üzerinde bir ikili işlem olup (Ex(M),$*$) C_2^r ye izomorf olan bir gruptur, burada r, M nin farklı asal çarpanlarının sayısıdır.

İspat: Açıkça 1 birim eleman ve her elemanın tersi kendisidir. P ve Q sırası ile s ve m nin tam bölenlerinin kümeleri ise, $\mathrm{P}\Delta\mathrm{Q} = (\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}) \backslash (\mathrm{P} \cap \mathrm{Q})$ simetrik farkı $\mathrm{s} * \mathrm{m}$ nin tam asal üst bölenlerinin kümesi ve Δ da bu kümeler üzerinde bir grup işlemi olduğundan $*$ ın asosyatiflik özelliği sağlanır. $\mathrm{Ex(M)}$ grubu abel ve 2^r mertebeli olduğundan $\mathrm{Ex(M)}$, C_2^r ye izomorftur.

Lemma 2.1.2: $ad \equiv 1 \bmod s$ kongrüansından $a \equiv d \bmod s$ denkleminin elde edilebilmesi için gerek ve yeter şart $s\,|24$ dür.

İspat: " $\Rightarrow$ " Farzedelim ki $ad \equiv 1 \bmod s$ den $a \equiv d \bmod s$ elde edilsin. Bu takdirde $U_S := \{\,[a] \in \mathbb{Z}_S \mid [a],\ \mathbb{Z}_S$ de bir birim, yani $(a,s) = 1\}$ kümesini göz önüne alalım. Hipotezden $a^2 \equiv 1 \bmod s$ elde edilir. Böylece, bu kısım $a \in U_S$ alındığında $a^2 \equiv 1 \bmod s$ olan s lerin bulunmasına indirgenmiş olur. $s := 2^\alpha 3^\beta {q_1}^{\alpha_1} \ldots {q_k}^{\alpha_k}$, s nin asal çarpanlarına ayrılışını göstersin. Bu durumda,

$$U_S \cong U_{2^\alpha} \times U_{3^\beta} \times U_{{q_1}^{\alpha_1}} \times \ldots \ldots \times U_{{q_k}^{\alpha_k}} \text{ elde edilir.}$$

Bilindiği gibi $p > 2$ bir asal sayı olmak üzere U_{p^e} devirli bir gruptur. Böylece $U_{3^\beta}, U_{{q_1}^{\alpha_1}}, \ldots, U_{{q_k}^{\alpha_k}}$ grupları devirlidir ve eleman sayıları sırası ile, φ Euler fonksiyonu olmak üzere, $\varphi(3^\beta), \varphi({q_1}^{\alpha_1}), \ldots, \varphi({q_k}^{\alpha_k})$ dır. Yukarıdaki bütün bu devirli grupların her bir elemanının mertebesi 2 olduğunda her bir grup iki elemanlıdır. Böylece $\beta = 1$ ve ${q_k}^{k_i}$ ler mevcut değildir.Yani $(i = 1,2,\ldots,k) = 0$ dır.

Dolayısı ile $\beta = 1$ veya 0 olmak üzere $S = 2^\alpha.3^\beta$ dır. Diğer taraftan eğer $\alpha \geq 3$ ise $U_{2^\alpha} = \{\pm 5^i \mid 0 \leq i \leq 2^{\alpha-2}\}$ dir. 5 in mertebesi $2^{\alpha-2}$ dir. $\alpha > 3$ ise $m \geq 4$ dür fakat U_{2^α} nın her bir elemanının mertebesi 2 dir. Böylece $\alpha \leq 3$ tür. Bu bize $s\,|24$ olduğunu söyler.

"$\Leftarrow$" $s \mid 24$ ve $ad \equiv 1 \bmod s$ olsun. Bu durumda $d \in \{1,5,7,11,13,17,19,23\}$ dir.

Bu durumda, $a^2 \equiv d^2 \equiv 1 \bmod s$ dir. Bu bize $a \equiv d \bmod s$ olduğunu verir.

Yukarıda

$$\Gamma_B(N) = \left\{ \begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} \middle|\ e \parallel \tfrac{N}{h^2},\ h,\ h^2\,|N \text{ olan 24 ün en büyük böleni ve } \det = e > 0 \right\}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} \in \Gamma_\circ(N) \text{ ise } b \equiv c \equiv 0 \bmod h \text{ ve } e = 1 = ad - bcN/h^2 \text{ olmalıdır.}$$

Böylece $ad \equiv 1 \bmod h$ dır. Lemma 2.1.2 den $a \equiv d \bmod h$ elde edilir.

Şimdi gösterelim ki aynı Möbiüs dönüşümünü temsil eden (1) biçimindeki bir matris ancak onun negatif işaretlisidir.

Lemma 2.1.3: $\begin{pmatrix} a_1e_1 & b_1/h \\ c_1N/h & d_1e_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2e_2 & b_2/h \\ c_2N/h & d_2e_2 \end{pmatrix} \in \Gamma_B(N)$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(k_1, k_2) = 1$ olmak üzere $k_1\begin{pmatrix} a_1e_1 & b_1/h \\ c_1N/h & d_1e_1 \end{pmatrix} = k_2\begin{pmatrix} a_2e_2 & b_2/h \\ c_2N/h & d_2e_2 \end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde $k_1, k_2 = \pm 1$ ve $e_1 = e_2$ dir.

İspat: Hipotezden $k_1b_1 = k_2b_2$, $k_1c_1 = k_2c_2$ ve böylece $k_2|b_1$, $k_2|c_1$ ve dolayısı ile de $k_2^2 \mid b_1c_1$ dir. Determinant alırsak $k_1^2\, e_1 = k_2^2\, e_2$ ve buradan $k_2^2\, |e_1$ elde edilir. $a_1d_1\, e_1 - b_1c_1\frac{N}{h^2\, e_1} = 1$ ve $h^2\, e_1 \mid N$ olduğundan $k_2^2\, |1$ dir. Böylece $k_2 = \pm 1$ dir. Benzer şekilde $k_1 = \pm 1$ dir. $e_1 = e_2$ olduğu aşikardır.

Bu durumda e sayısı, (1) matrisi ile verilen V dönüşümünün bir invaryantı(değişmezidir). Böylece $E: \Gamma_B(N) \to Ex(N/h^2)$, $E(V) = e$ iyi tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.4: e ye V dönüşümünün "eterminantı" adı verilir.

Önerme 2.1.5: E bir epimorfizmdir.

İspat: $\begin{pmatrix} a_1e_1 & b_1/h \\ c_1N/h & d_1e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2e_2 & b_2/h \\ c_2N/h & d_2e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B/h \\ cN/h & D \end{pmatrix}$

yazıldığında A, B, C ve D sayıları (e_1, e_2) ile bölünür ve eşitliğin sağındaki matrisin determinantı e_1e_2 dir. Diğer taraftan A ve D tamsayıları e_1, e_2 nin en küçük ortak katı olan $e_1e_2/(e_1, e_2)$ ile bölünür. Böylece sağdaki matris,

$$(e_1, e_2)\begin{pmatrix} a_3(e_1 * e_2) & b_3/h \\ c_3N/h & d_3(e_1 * e_2) \end{pmatrix}$$

biçiminde olup determinantı $e_1 * e_2$ dir. Dolayısı ile çarpım dönüşümünün eterminantı $e_1 * e_2$ dir. Böylece E bir homomorfizmdir. E nin örten olduğu (1) den aşikardır.

Sonuç: $V, V_1, V_2 \in \Gamma_B(N)$ olsun. Bu takdirde,

(i) $E(V) = E(V^{-1})$

(ii) $E(V_1V_2) = 1 \Leftrightarrow E(V_1) = E(V_2)$ dir.

Bu sonuçta $\Gamma_B(N)$ ye ait iki matris, bir $\Gamma_\circ(N)$ yan sınıfında iseler aynı eterminanta sahip oldukları açıktır. Ancak tersinin doğru olmadığını aşağıda göreceğiz.

Lemma 2.1.6: $i = 1,2$ olmak üzere $V_i = \begin{pmatrix} a_i e & b_i/h \\ c_i N/h & d_i e \end{pmatrix}$ matrislerinin determinantları e olsun. Bu takdirde,

V_1, V_2 bir $\Gamma_\circ(N)$ yan sınıfındadır $\Leftrightarrow$ $a_1 b_2 \equiv a_2 b_1 \mathrm{mod} h$, $c_1 d_2 \equiv c_2 d_1 \mathrm{mod} h$ dır.

İspat: $V_1 {V_2}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 d_2 e^2 - b_1 c_2 N/h^2 & -a_1 b_2 e/h + b_1 a_2 e/h \\ c_1 d_2 eN/h - d_1 c_2 eN/h & -c_1 b_2 N/h^2 + d_1 a_2 e^2 \end{pmatrix}$ dir.

Bütün dört giriş e ile bölünür. Böylece determinantı 1 elde edilir ve ikinci giriş $(b_1 a_2 - a_1 b_2)/h$ ve üçüncü giriş $(c_1 d_2 - d_1 c_2)/h$ dır. Bu durumda,

$V_1 {V_2}^{-1} \in \Gamma_\circ(N) \Leftrightarrow$ $b_1 a_2 \equiv a_1 b_2 \mathrm{mod} h$, $c_1 d_2 \equiv d_1 c_2 \mathrm{mod} h$ dır ve ispat tamamlanır.

$\Gamma_B(N)$ normalliyeninin yapısını daha iyi anlayabilmek için $\Gamma_B(N)$ nin bir kaç önemli alt grubunu vereceğiz.

1) $\Gamma_C(N) \coloneqq \{ T \in \Gamma_B(N) \mid \det T = 1\}$ olsun. Açıkça $\Gamma_C(N)$, $\Gamma_B(N)$ nin alt grubudur ve de $\Gamma_\circ(N/h^2) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_C(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ dir. Yani $\Gamma_C(N)$ ile $\Gamma_\circ(N/h^2)$ grupları $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile eşleniktir.

2) $\Gamma_W(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix} \middle| \, e \parallel N,\ \det = e \right\}$ kümesi $\Gamma_B(N)$ nin bir alt grubudur. Bu grubun elemanlarına Atkin Lehner dönüşümleri adı verilir.

3) Fricke Grubu: $z \to -\frac{1}{Nz}$ dönüşümü $\Gamma_B(N)$ de bir elemandır; bu elemana Fricke dönüşümü adı verilir. Bu dönüşüm ile $\Gamma_\circ(N)$ nin ürettiği $F(N)$ Fricke grubunu göz önüne alırsak $|F(N) \colon \Gamma_\circ(N)| = 2$ dir.

Şimdi $\Gamma_\circ(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ normalliyenindeki indeksini bulalım. $\Gamma_C(N)$ grubu,
$E \colon \Gamma_B(N) \to Ex(N/h^2)$ nin çekirdeği olduğundan $\Gamma_C(N)$ grubu $\Gamma_B(N)$ nin, ρ, N/h^2 nin farklı asal çarpanlarının sayısı olmak üzere 2^ρ indeksli bir normal alt grubudur.
Açıkça $\Gamma_\circ(N) < \Gamma_C(N)$ dir.

Önerme 2.1.7: $\epsilon_1 := \begin{cases} 1, & 2^2, 2^4, 2^6 \parallel N \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$ ve $\epsilon_2 := \begin{cases} 1, & 9 \parallel N \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$ ve $\tau := (\frac{3}{2})^{\epsilon_1}(\frac{4}{3})^{\epsilon_2}$ ise $|\Gamma_C(N) : \Gamma_\circ(N)| = h^2\tau$ dır.

İspat: $\Gamma_\circ(N/h^2) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_C(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$ olduğundan, $|\Gamma_C(N) : \Gamma_\circ(N)| = |\Gamma_\circ(N/h^2) : \Gamma_\circ(N)|$ dir. $|\Gamma : \Gamma_\circ(N)| = N \prod_{p|N}(1 + \frac{1}{p})$ olduğundan,

$$|\Gamma_C(N) : \Gamma_\circ(N)| = \frac{N \prod_{p|N}(1 + \frac{1}{p})}{\frac{N}{h^2} \cdot \prod_{p|\frac{N}{h^2}}(1 + \frac{1}{p})} = h^2\tau$$

dir. Burada,

$$\tau := \frac{\prod_{p|N}(1 + \frac{1}{p})}{\prod_{p|\frac{N}{h^2}}(1 + \frac{1}{p})}$$

dir.

r tam sayı olmak üzere $h(r)$ ile $(h(r))^2|r$ olan 24 ün en büyük bölenini gösterelim. $N = 2^\alpha . 3^\beta . K$, $(K, 6) = 1$ yazarsak $\alpha = 2, 4, 6$ veya $\beta = 2$ alırsak $\tau \neq 1$ dir. Bu bize τ nun istendiği biçimde olduğunu söyler.

Sonuç: ρ ve τ yukarıdaki gibi olmak üzere $|\Gamma_C(N) : \Gamma_\circ(N)| = 2^\rho . h^2 . \tau$ dır.

Uyarı: r, ρ ve τ yukarıda olduğu gibi ve de $S_2 = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 2 \mid (h(2^\alpha) \parallel N \\ 1, & \text{aksi halde} \end{cases}$ ve $S_3 = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \left(h(3^\beta)\right)^2 = 9 \parallel N \\ 1, & \text{aksi halde} \end{cases}$ olmak üzere $S = S_2 S_3$ olsun. Bu takdirde [5] de olduğu gibi

$2^\rho . h^2 . \tau = 2^r . h^2 . S$ dir.

Not: $W_{e_1}, W_{e_2} \in \Gamma_W(N)$ ise $W_{e_1} W_{e_2} = W_{e_1 * e_2}$ dir. Bu durumda $E^1 = \Gamma_W(N) \to Ex(N)$ epimorfizminin çekirdeği $\Gamma_\circ(N)$ dir.

$\Gamma_W(N) \,/\, \Gamma_\circ(N)$ bölüm grubu, r, N nin farklı asal bölenlerinin sayısı olmak üzere, C_2^r ye izomorftur. Böylece her W_e Atkin Lehner dönüşümü için ${W_e}^2 \in \Gamma_\circ(N)$ dir.

Önerme 2.1.8: $\Gamma_B(N)$ nin her bir V elemanı, $W \in \Gamma_W(N)$ ve $T \in \Gamma_C(N)$ olmak üzere, $V = WT$ biçiminde yazılabilir.

İspat: $e \parallel \frac{N}{h^2}$ olmak üzere $E(V) = e$ olsun. $E(W_f) = e$ olacak şekilde bir $f \in Ex(N)$ bulacağız. $N = 2^{\alpha} 3^{\beta}.N_o$, $(N_o, 6) = 1$ olsun. $h(2^{\alpha}) = 2^{u}$, $h(3^{\beta}) = 3^{v}$ ise
$\frac{N}{h^2} = 2^{\alpha-2u}.3^{\beta-2v}.N_o$ dır. $e \parallel \frac{N}{h^2}$ olduğundan $e = 2^{i}.3^{j}.N_1$ dir. Burada $i = \alpha - 2u$ veya 0, $j = \beta - 2v$ veya 0 ve $N_1 \parallel N_o$ dır. Şimdi

$$f = \begin{cases} 2^{\alpha}3^{\beta}N_1, & i, j \neq 0 \\ 2^{\alpha}N_1, & i \neq 0, j = 0 \\ 3^{\beta}N_1, & i = 0, j \neq 0 \\ N_1, & i = j = 0 \end{cases}$$

sayısını göz önüne alalım. Bu takdirde,
$E(W_f) = f/(h(f))^2 = e$ dir. Böylece $E(W_f) = E(V)$, dolayısı ile
$E(W_f^{-1}V) = 1$ ve $W_f^{-1}V \in \Gamma_C(N)$ dir. Sonuç olarak $V = W_f(W_f^{-1}V)$ dir.

Bu sonuçlarla aşağıdaki diyagrama ulaşılır.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_B(N) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \Gamma_W(N) \arrow[dr, dash] & & \Gamma_C(N) \arrow[dl, dash] \\ & \Gamma_\circ(N) & \end{tikzcd}$$

veya $B(N) := \Gamma_B(N)/\Gamma_\circ(N)$, $C(N) := \Gamma_C(N)/\Gamma_\circ(N)$, $W(N) = \Gamma_W(N)/\Gamma_\circ(N)$ alırsak

$$\begin{tikzcd} & B(N) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ W(N) \arrow[dr, dash] & & C(N) \arrow[dl, dash] \\ & \{I\} & \end{tikzcd}$$

diyagramı elde edilir.

Böylece önerme 2.1.7 de olduğu gibi $|\mathrm{B(N)}| = 2^{\rho}.\mathrm{h}^2.\tau = 2^{\mathrm{r}}.\mathrm{h}^2.\mathrm{S}$, $|\mathrm{C(N)}| = \mathrm{h}^2.\tau$ ve $|\mathrm{W(N)}| = 2^{\mathrm{r}}$ dir. Böylece $|\mathrm{W(N)} \cap \mathrm{C(N)}| = 2^{\mathrm{r}-\rho}$ dır. Dolayısı ile,

$$|\mathrm{W(N)} \cap \mathrm{C(N)}| = \begin{cases} 4, & 3^2 \parallel \mathrm{N} \text{ ve } 2^{2\delta} \parallel \mathrm{N}, \delta = 1{,}2 \text{ veya } 3; \\ 2, & 3^2 \parallel \mathrm{N} \text{ veya } 2^{2\delta} \parallel \mathrm{N}, \text{ ikisi aynı anda değil}; \\ 1, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$\mathrm{W(N)} \cong \mathrm{C}_2^{\mathrm{r}}$ olduğundan $\mathrm{W(N)}$ komutatif ve birimden farklı her elemanının mertebesi 2 dir. Bu tür elemanlar Atkin Lehner involüsyonları alarak adlandırılır.

2.2. B(N) Grubunun Çarpım Yapısı

Bu kısımda $\mathrm{B(N)}$ sonlu gruplarının yapısını inceleyeceğiz. Dikkat edilirse N, 4 veya 9 ile bölünmüyorsa $\mathrm{h} = 1$ dir. Böylece $\mathrm{B(N)}$, $\mathrm{C}_2^{\mathrm{r}}$ ile izomorftur. Biz burada $\mathrm{h} > 1$ durumunu göz önüne alacağız. Aşağıda göreceğiz ki, $\mathrm{p}^{\alpha} \parallel \mathrm{N}$ olmak üzere $\mathrm{B(N)}$, $\mathrm{B}'(\mathrm{p}^{\alpha})$ gruplarının hemen hemen bir direk çarpımıdır. Ayrıca $\mathrm{C}(\mathrm{p}^{\alpha})$ hemen hemen abel (değişmeli)dir. $\mathrm{B(N)}$ nin elemanları $\Gamma_{\circ}(\mathrm{N})$ yan sınıflarıdır. Küçük harflerle $\Gamma_{\circ}(\mathrm{N})$ nin yan sınıflarını büyük harflerle de normalliyendeki dönüşümleri göstereceğiz.

Önerme 2.2.1: $\mathrm{C(N)}$ grubu $\mathrm{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{N/h} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{s} = \begin{pmatrix} 1 & 1/\mathrm{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Gamma_{\circ}(\mathrm{N})$ yan sınıfları ile üretilir.

İspat: Açıkça $\mathrm{r}^{\mathrm{h}} = \mathrm{s}^{\mathrm{h}} = 1$ dir ve lemma 2.1.6 dan $\langle \mathrm{r} \rangle \cap \langle \mathrm{s} \rangle = \{\mathrm{I}\}$ dır. Böylece $\{\mathrm{r}^{\mathrm{i}}\mathrm{s}^{\mathrm{j}} \mid 0 \leq \mathrm{i} < \mathrm{h},\ 0 \leq \mathrm{j} < h\}$ kümesi h^2 tane elemandan oluşur. Dolayısı ile şayet $|\mathrm{C(N)}| = \mathrm{h}^2$ ise sonuç elde edilir. Önerme 2.1.7 den bu durum, N nin $2^2, 2^4, 2^6$ veya 3^2 ile tam olarak bölündüğü durumlar hariç, doğrudur. Böylece $\alpha = 0{,}1{,}2$ veya 3, $\beta = 0$ veya 1 ve $(\mathrm{N}_1, 6) = 1$ olmak üzere $\mathrm{N} = 2^{2\alpha}3^{\beta}\mathrm{N}_1$ farzedebiliriz. Bu durumda $\mathrm{h} = 2^{\alpha}3^{\beta}$, $\left(\mathrm{h}, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{h}^2}\right) = 1$ ve böylece öyle $\mathrm{t} \not\equiv 0$ modh tam sayıları vardır ki $1 + \mathrm{k} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{h}^2} \equiv 0 \mathrm{modh}$ dır. Şimdi $\mathrm{s}^{\mathrm{k}}\mathrm{r}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{k} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{h}^2} & \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{h}} \\ \frac{\mathrm{tN}}{\mathrm{h}} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{r}^{\mathrm{i}}\mathrm{s}^{\mathrm{j}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathrm{j}}{\mathrm{h}} \\ \frac{\mathrm{iN}}{\mathrm{h}} & 1 + \mathrm{ij}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{h}^2} \end{pmatrix}$ yazalım. Böylece Lemma 2.1.6 dan i ve j için $\mathrm{s}^{\mathrm{k}}\mathrm{r}^{\mathrm{t}} \neq \mathrm{r}^{\mathrm{i}}\mathrm{s}^{\mathrm{j}}$ dir.

Dolayısıyla $\langle r, s\rangle$ grubu r ve s tarafından üretilir ve h^2 den daha fazla elemana sahiptir. Ayrıca $|C(N)| \leq 2h^2$ olduğundan önerme 2.1.7 den $\langle r, s\rangle = C(N)$ elde edilir.

Sonuç: s, önerme 2.2.1 deki gibi olmak üzere $B(N) = \langle W(N), s\rangle$ dir.

İspat: Önerme 2.2.1 den $C(N) = \langle r, s\rangle$ dir. Ayrıca,

$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{N}{h} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ dır. $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere, $r = ws^{-1}w$ dir. Böylece önerme 2.1.8 den $B(N) = \langle W(N), s\rangle$ dir.

Şimdi göstereceğiz ki N nin bazı değerleri için B(N) grubu $\otimes B(p^{\alpha})$ direk çarpımı olarak yazılabilir. [2] de bu direk çarpımın N nin bütün değerleri için yazılabileceği ifade edilmiştir. Ancak bunun doğru olmadığını aşağıdaki örnekle verebiliriz.

Örnek: $N = 18$ alalım. Bu durumda $|B(18)| = 24$ ve B(N) grubu $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$ ve $s = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yan sınıfları ile üretilir ve buradaki bağıntılar, açıkça, $w^2s^3(ws)^4 = I$ dır. Ancak bilindiği gibi $S_4 = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^4 = I \rangle$ dır. Buradan B(18), S_4 e izomorf elde edilir. Ancak S_4 aşikar olmayan bir şekilde iki grubun direkt çarpımı olarak yazılamaz.

Şimdi N nin hangi değerleri için B(N) nin bir direk çarpım olarak yazılabileceğini gösterelim. Bunun için $M \parallel N$ olmak üzere B(N) grubunun B(M) ye izomorf bir alt grubuna sahip olduğunu gösterelim.

Önerme 2.2.2: $M \parallel N$ olsun. Bu takdirde B(N) nin $t = \begin{pmatrix} ae & \frac{b}{h(M)} \\ \frac{cN}{h(M)} & de \end{pmatrix}$ biçimindeki elemanlarının kümesi B(N) nin B(M) ye izomorf bir alt grubudur.

İspat: $N = MK$ ve $(M, K) = 1$ olsun. Bu takdirde $t = \begin{pmatrix} ae & \frac{bh(K)}{h(N)} \\ \frac{cNh(K)}{h(N)} & de \end{pmatrix} \in B(N)$ dir.

Bu elemanlar B(N) nin bir B'(M) alt grubunu oluşturur. $\Gamma_{B'}(M)$ ile bunlara $\Gamma_B(N)$ de karşılık gelen matrisleri gösterelim. Bilindiği gibi $t \in B(N)$ bir $\Gamma_0(N)$ T yan sınıfı temsil eder. Şimdi

$$F: B'(M) \longrightarrow B(M),$$

$$t = \Gamma_0(N)T \longrightarrow \Gamma_0(M)T$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Açıkça bu dönüşüm iyi tanımlıdır. Çünkü $\Gamma_0(N) \leq \Gamma_0(M)$ dir. F nin birebir olduğunu göstermek için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.2.3: $\Gamma_{B'}(M) \cap \Gamma_0(M) \leq \Gamma_0(N)$ dir.

İspat: $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha e & \frac{\beta}{h(M)} \\ \frac{\gamma N}{h(M)} & \delta e \end{pmatrix} \in \Gamma_{B'}(M) \cap \Gamma_0(M)$ ise $h(M) | \beta$, $M \,|\, \frac{\gamma N}{h(M)}$ dir. Böylece, $M \,|\gamma MK/h(M)$ dir. Buradan $h(M)|\gamma K$ dır. Ancak $(h(M), K) = 1$ olduğundan $h(M)|\,\gamma$ elde edilir ki bu $N \,|\, \frac{\gamma N}{h(M)}$ olduğunu yani $V_1 \in \Gamma_0(N)$ olduğunu verir.

Bu durum bize F nin çekirdeğinin birim elemandan oluştuğunu verir. Yani F birebirdir. Şimdi F nin örten olduğunu gösterelim.

$B(M)$ nin Atkin Lehner involusyonları ve $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h(M)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretildiğini biliyoruz. Diğer taraftan aynı $e \parallel M$ determinantına sahip herhangi iki Atkin Lehner transformasyonu aynı $\Gamma_0(M)$ yan sınıfına aittir. Böylece her bir $e \parallel M$ için bir tek $w_e \in B(M)$ Atkin Lehner involusyonları $\begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix}$, $e \parallel M$,dete biçimindedir. Böylece, F altında Atkin Lehner involusyonları $B(M)$ deki Atkin Lehner involusyonlarına resmedilir. $B'(M)$ deki $\Gamma_0(N)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h(M)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yan sınıfı, F altında, $B(M)$ de $\Gamma_0(M)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h(M)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yan sınıfına resmedilir. Sonuç olarak $B(M)$ nin üreteçleri F nin resmindedir. Yani, F örtendir.

Şimdi $N = M.K$, $(M, K) = 1$ olmak üzere $B'(M)$ nin $B(N)$ nin bir normal alt grubu olma şartlarını araştıralım. $F: B'(M) \longrightarrow B(M)$ bir izomorfizma olduğundan $B'(M)$ grubu $B'(M)$ deki Atkin Lehner involusyonları ile $S_M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h(M)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi tarafından üretilir.

Şayet t herhangi bir tam sayı olmak üzere, $W_F S_M^t W_F \in B'(M)$ ise $B(N)$ deki Atkin Lehner involusyonları komütatif olduğundan w_f Atkin Lehner involusyonu $B'(M)$ yi normaller. Açıkça $W_F S_M W_F B'(M)$ dir.

$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h(K)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{h(M)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{h(K)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{h(M)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğunda $e \parallel M$ olmak üzere $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h(K)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{h(K)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B'(M)$ ise $B'(M)$ normaldir. Matris çarpımı yapılırsa $\begin{pmatrix} ae + \frac{cN}{h(K)} & b + e\frac{(d-a)}{h(K)} - \frac{cN}{(h(K))^2} \\ cN & \frac{-cN}{h(K)} + de \end{pmatrix}$ elde edilir. $\frac{N}{h(K)} = \frac{MK}{h(K)}$, e ile bölünür. Böylece normallik şartı matrisin ikinci girişinin tam olması şartıdır. Bu da $h(K) \mid e(d-a)$ olması demektir. Ancak $(h(K), e) = 1$ olduğundan normallik şartı $a \equiv d \bmod (h(K))$ olma şartıdır. $h(K) \mid 24$ olduğundan, Lemma 2.1.2 gereği, $ad \equiv 1 \bmod (h(K))$ şartına indirgenir. $ade - \frac{bcN}{e} = 1$ olduğundan, $ade \equiv 1 \bmod \big(h(K)\big)$ ve bu durumda $ad \equiv 1 \bmod (h(K))$ şartı sadece $e \equiv 1 \bmod (h(K))$ şartına indirgenmiş oldu. Böylece,

Önerme 2.2.4: $(M, K) = 1$ ve $N = MK$ olsun. $B'(M) \lhd B(N) \Leftrightarrow \forall e \parallel M$ için $e \equiv 1 \bmod (h(K))$ dır.

Şimdi [1] deki Atkin Newman Teoreminin doğru bir ifadesini vereceğiz. Bunun için $N = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_r^{\alpha_r}$, N nin asal çarpanlara parçalanışı $\prod_i := \frac{N}{P_i^{\alpha_i}}$ olsun.

Sonuç 1: $B(N) = \otimes B'\big(P_i^{\alpha_i}\big) \Leftrightarrow i = 1,2,3, \ldots, r$ için $P_i^{\alpha_i} \equiv 1 \bmod (h(\prod_i))$ dir.

İspat: $B(N) = \otimes B'\big(P_i^{\alpha_i}\big)$ olsun. Bu durumda bütün $B'\big(P_i^{\alpha_i}\big)$, $B(N)$ de normaldir. Önerme 2.2.4 den $i = 1,2,3, \ldots, r$ için $P_i^{\alpha_i} \equiv 1 \bmod (h(\prod_i))$ dir.

Tersine $P_i^{\alpha_i} \equiv 1 \bmod (h(\prod_i))$ olduğundan önerme 2.2.4 gereği bütün $B'\big(P_i^{\alpha_i}\big)$ normaldir. $B(N) = \otimes B'\big(P_i^{\alpha_i}\big)$ olduğunu göstermek için ilk önce $B(N) = \langle \cup_{i=1}^{r} B'\big(\beta_i^{\alpha_i}\big) \rangle$ olduğunu, sonra da $i = 1,2,3, \ldots, r$ için $B'\big(P_i^{\alpha_i}\big) \cap \langle \cup_{\substack{j=1 \\ i \neq i}}^{r} B'\big(\beta_i^{\alpha_i}\big) \rangle = \{I\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$B'\big(P_i^{\alpha_i}\big) \leq B$ olduğundan $\langle \cup_{i=1}^{r} B'\big(P_i^{\alpha_i}\big) \rangle \leq B(N)$ dir. $W_f \in B(N)$ keyfi bir Atkin Lehner involusyonu olsun. $f \parallel N$ olduğundan $f = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_k^{\alpha_k}$ diyelim.

Açıkça $W_f = W_{P_1^{\alpha_1}} \dots W_{P_k^{\alpha_k}}$ dir. $W_{P_i^{\alpha_i}} \in B(P_i^{\alpha_i})$ olduğundan $W_f \in \langle \bigcup_{i=1}^{r} B(P_i^{\alpha_i}) \rangle$ dir.

Şimdi, $s = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanının $\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'(P_i^{\alpha_i}) \rangle$ olduğunu gösterelim.

$h = h(N) = h(P_1^{\alpha_1}) \dots h(P_r^{\alpha_r})$ ve $h |\, 2^3.3$ olduğunda $h = h(P_k^{\alpha_k}).h(P_t^{\alpha_t})$ diyelim.

$(h(P_k^{\alpha_k}), h(P_t^{\alpha_t})) = 1$ olduğundan $d_1\, h(P_t^{\alpha_t}) + d_2 h(P_k^{\alpha_k}) = 1$ olan $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{d_1}{h(P_k^{\alpha_k})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B'(P_k^{\alpha_k})$ ve $\begin{pmatrix} 1 & \frac{d_2}{h(P_t^{\alpha_t})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B'(P_t^{\alpha_t})$ olduğundan s bu iki matrisin çarpımı olarak $\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'(P_i^{\alpha_i}) \rangle$ grubundadır. Böylece, $B(N)$ nin üreteçleri $\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'(P_i^{\alpha_i}) \rangle$ dedir. Böylece $B(N) \leq \langle \bigcup_{i=1}^{r} B'(P_i^{\alpha_i}) \rangle$ dir.

Sonuç olarak, $B(N) = \langle \bigcup_{i=1}^{r} B'(P_i^{\alpha_i}) \rangle$ dir.

Şimdi son olarak $B'(P_i^{\alpha_i}) \cap \langle \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} B'\left(P_j^{\alpha_j}\right) \rangle = \{I\}$ olduğunu gösterelim. Kolaylıkla görebiliriz ki $\langle \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} B'\left(P_j^{\alpha_j}\right) \rangle = B'(\prod i)$ dir. Böylece, $B'(P_i^{\alpha_i}) \cap B'(\prod i) = \{I\}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$A \in B'(P_i^{\alpha_i}) \cap B'(\prod i)$ alalım. Bu durumda, $e_1 \parallel P_i^{\alpha_i}/h(P_i^{\alpha_i})^2$ ve $e_2 \parallel \frac{\prod i}{h(\prod i)^2}$ olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 e_1 & \frac{b_1}{h(P_1^{\alpha_1})} \\ \frac{c_1 N}{h(P_i^{\alpha_i})} & d_1 e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 e_2 & \frac{b_2}{h(\prod i)} \\ \frac{c_2 N}{h(\prod i)} & d_2 e_2 \end{pmatrix} \quad \text{dir.} \qquad h = h(N) = h(P_i^{\alpha_i}) = h(\prod i)$$

olduğundan $A = \begin{pmatrix} a_1 e_1 & \frac{b_1}{h(P_1^{\alpha_1})} \\ \frac{c_1 N}{h(P_i^{\alpha_i})} & d_1 e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 e_2 & \frac{b_2 h(P_i^{\alpha_i})}{h} \\ \frac{c_2 h(P_i^{\alpha_i})}{h} & d_2 e_2 \end{pmatrix}$ olup Lemma 2.1.3 ü kullanırsak

$e_1 = e_2$ ve böylece $e_1 = e_2 = 1$ elde edilir. Lemma 2.1.6 dan,

$a_1 b_2 h(P_i^{\alpha_i}) \equiv a_2 b_1 h(\prod i) \bmod h$ ve $c_1 h(\prod i) d_2 \equiv c_2 h(P_i^{\alpha_i}) d_1 \bmod h$ elde edilir. Bu durumda,

$h(\prod i) | a_1 b_2$, $h(P_i^{\alpha_i}) | a_2 b_1$, $h(P_i^{\alpha_i}) | c_1 d_2$ ve $h(\prod i)/d_1 c_2$ elde edilir. A nın eterminantı $a_1 d_1 - \frac{b_1 c_1 N}{(h(P_i^{\alpha_i}))^2} = a_2 d_2 - \frac{b_2 c_2 N}{(h(\prod i))^2} = 1$ dir. Böylece,

$h(P_i^{\alpha_i}) |\, b_1$, $h(P_i^{\alpha_i}) | c_1$ ve $h(\prod i) | b_2$, $h(\prod i) | c_2$ dir. Yani $A = I$ dır. Sonuç olarak,

$B(N) = \otimes B'(P_i^{\alpha_i})$ dir.

Sonuç 2: N bir tamkare ise $B(N) = \otimes B'\left(P_i^{\alpha_i}\right)$ dir.

İspat: $N = 2^{2\alpha_1}3^{2\alpha_2}.P_3^{2\alpha_3} \dots P_r^{2\alpha_r}$, N nin asal çarpanlara ayrılışı olsun. İlk önce $2^{2\alpha_1}$ alalım. Bu durumda $\prod_1 = 3^{2\alpha_2}.P_3^{2\alpha_3} \dots P_r^{2\alpha_r}$ dir ve $h(\prod_1) = 1$ veya 3 dür. Böylece, $2^{2\alpha_1} \equiv 1 \text{mod} 3$ tür. İkinci olarak $3^{2\alpha_2}$ alalım. Bu durumda $\prod_2 = 2^{2\alpha_1}.P_3^{2\alpha_3} \dots P_r^{2\alpha_r}$ böylece $h(\prod_2) = 1,2,4$ veya 8 dir. Bu ise $3^{2\alpha_2} \equiv \text{mod} h(\prod_2)$ olduğunu söyler.

Son olarak $P_i \neq 2,3$ olmak üzere $P_i^{2\alpha_i}$ yi alalım. Bu durumda $h(\prod_2)$, 24 ün bir bölenidir. $P_i \equiv 1,3,5,7 \text{mod} 8$ ve $P_i^{2\alpha_i} \equiv 1 \text{mod} 3$ tür. Yani, $P_i^{2\alpha_i} \equiv 1 \text{mod} 24$ tür. Yukarıdaki sonuçtan istenilen elde edilir.

Örnekler

1) $N = 18 = 2.3^2$ olsun. $2 \not\equiv 1\text{mod}(h(3^2) = 3)$ olduğundan Sonuç 1 e göre $B(18)$ bir direkt çarpım elemanı olarak yazılamaz.

2) $N = 2^5.127^2$ olsun. $2^5 \equiv 1\text{mod}(h(127^2) = 1)$ ve $127^2 \equiv 1\text{mod}(h(2^5) = 4)$ olduğundan $B(2^5.127^2) \cong B'(2^5) \times B'(127^2)$ dir.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada Hiperbolik Geometri tanımı verilerek temel özellikleri incelendi ve Möbiüs dönüşümleri ile ilgili özellikleri verildi.

Ayrıca, özellikle 1980 yılında ortaya konulan basit grup yapısının elde edilmesinde oldukça önemli bir yere sahip $\Gamma_0(\mathrm{N})$ nin $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$deki normalliyen yapısı araştırıldı ve $\Gamma_0(\mathrm{N})$ ile oluşan bölüm gruplarının hangi şartlar altında direkt çarpımlarının yapılabileceği problemi çözüldü.

4. ÖNERİLER

Normalliyenden hareketle elde edilen sonlu B(N) bölüm grubunun bazı ek temel özellikleri incelenebilir ve ayrıca bazı temel kongrüans alt grupların sürekli kesirlerle olan ilişkileri araştırılabilir; bu durumun graf teoride de uygulama alanının olup olmadığı incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Akbas, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Ph. D. Thesis, University of Southampton, Southampton, 1989.
2. Atkin, A.O.L and Lehner, J., Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. Nath. Ann, 185(1964) 134-160.
3. Conway, J.H. and Norton, S.P., Montrous Moonshine, Bull. London Math. Soc., 11(1979), 308-339.
4. Lehner, J. and Newman, M., Weierstrass points of $\Gamma_0(n)$. Annals of Mathematics, 79, 2, 1964.
5. Lehner, J. and Newman, M., Modular Functions, Proceeding of symposia in pure mathematics, 37, 1980
6. Bayar, E., Gruplar Teorisi, 37, K.T.Ü Basımevi, Trabzon, 1986.

ÖZGEÇMİŞ

Zeliha Aydın, 13.10.1986 tarihinde Trabzon'un Akçaabat ilçesinde doğdu. İlkokulu Akçaabat 100. Yıl İlköğretim Okulunda, ortaokulu Akçaabat Anadolu İmam Hatip Lisesinde ve lise eğitimini de Akçaabat Y.D.A. Lisesinde okul birinciliği ile tamamladı. 2004 yılında K.T.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazanıp 2008 yılında lisans eğitimini tamamladı.

2009-2010 Eğitim öğretim yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2010-2011 Eğitim öğretim yılında da K.T.Ü Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümünden Pedagojik Formasyon Eğitimi Sertifikasını alıp öğretmen olmaya hak kazandı. İyi derecede İngilizce bilmektedir.