KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DUAL SAYILAR VE DUAL SAYILARIN 2-BOYUTLU DUAL GEOMETRİYE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muharrem TOMAR

ŞUBAT 2012
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DUAL SAYILAR VE DUAL SAYILARIN 2-BOYUTLU GEOMETRİYE UYGULANIŞI

Muharrem TOMAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02.01.2012
Tezin Savunma Tarihi : 13.02.2012

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer PEKŞEN

Trabzon 2012

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Muharrem TOMAR tarafından hazırlanan

DUAL SAYILAR VE DUAL SAYILARIN

2-BOYUTLU GEOMETRİYE UYGULANIŞI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 17 / 01 / 2012 gün ve 1438 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ömer PEKŞEN

Üye : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

Üye : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

“Dual Sayılar ve Dual Sayıların 2-Boyutlu Dual Geometriye Uygulamaları” adlı bu tez çalışması Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında “Yüksek Lisans Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ömer PEKŞEN’e en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmalarımın yönlendirmesinde ve çalışmalarım sırasında yapıcı her konuda hiçbir yardımını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV (Cevat HACİEV)’e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Muharrem TOMAR
Trabzon 2012

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Dual Sayılar ve Dual Sayıların 2-Boyutlu Geometriye Uygulanışı” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ömer PEKŞEN‘in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 02/01/2012

Muharrem TOMAR

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa No</u>

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

DUAL SAYILAR VE DUAL SAYILARIN
2-BOYUTLU GEOMETRİYE UYGULANIŞI

Muharrem TOMAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ömer PEKŞEN
2012, 66 Sayfa

Bu çalışmada dual sayılar halkasının $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ ve $\mathbb{D}_3$ grupları tanımlandı ve incelendi. Ayrıca $\mathbb{D}_1$ grubu için noktaların $G-$denklik problemi noktaların invaryantları açısından çözüldü. Noktaların invaryantları bulunurken invaryant teorisinin yöntemleri kullanıldı. Bu yöntem kullanılarak ayrıca $\mathbb{D}_1$ grubunun yörüngeleri bulundu. Bu çalışmada iki boyutlu $G\mathbb{D}_1, G\mathbb{D}_2$ ve $G\mathbb{D}_3$ matris grupları tanımlandı. $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$ gruplarının $G\mathbb{D}_1$, $G\mathbb{D}_2$, $G\mathbb{D}_3$ gruplarına izomorf olduğu gösterildi. $G\mathbb{D}_1$ grubu için noktaların $G-$denklik problemi çözüldü.

Anahtar Kelimeler: Dual Sayı, İnvaryant

Master Thesis

SUMMARY

DUAL NUMBERS AND THE APPLİCATION OF
DUAL NUMBERS TO THE
2-DIMENSIONAL GEOMETRY

Muharrem TOMAR

Karadeniz Technical University
Institute of Science
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Ömer PEKŞEN
2012, 66 Pages

In this thesis $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ and $\mathbb{D}_3$ groups of the ring of dual numbers have been defined and investigated. The problem of $G-$equivalence of points for the group $\mathbb{D}_1$ have been solved in terms of invariant of points. Invariant theory methods have been used to find the invariants. By using these methods orbit of group $\mathbb{D}_1$ have been found. In this thesis, two dimensional matrix groups $G\mathbb{D}_1, G\mathbb{D}_2$ and $G\mathbb{D}_3$ have been defined. It has been shown that groups $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \mathbb{D}_3$ are isomorphic to groups $G\mathbb{D}_1, G\mathbb{D}_2, G\mathbb{D}_3$, respectively. The problem of $G-$equivalence of points for the group $G\mathbb{D}_1$ has also been solved.

Key Words: Dual Number, Invariant.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{D}$	Dual Sayılar Halkası
ε	Karesi "0" olan dual sayı
$\begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$	$A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısına karşılık gelen matris
$\overline{A}$	A dual sayısının eşleniği
$\lvert A\rvert_1$	$A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının 1. Tip Mutlak değeri
$\lvert A\rvert_2$	$A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının 2.Tip Mutlak değeri
$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1 = \left\{a + \varepsilon a^*, a \neq 0, a, a^* \in \mathbb{R}\right\}$
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_2 = \left\{1 + \varepsilon h^*, -1 + \varepsilon h^*, h^* \in \mathbb{R}\right\}$
$\mathbb{D}_3$	$\mathbb{D}_3 = \left\{1 + \varepsilon h^*, h^* \in \mathbb{R}\right\}$
$G\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1$ grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler grubu
$G\mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_2$ grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler grubu
$G\mathbb{D}_3$	$\mathbb{D}_3$ grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisler grubu
$x \overset{G}{\sim} y$	x elemanı y elemanına G-denktir
$\{x_\tau, \tau \in T\}$	T kümesiyle indekslenen noktalar ailesi
$\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$	$\{x_\tau, \tau \in T\}$ ailesi $\{y_\tau, \tau \in T\}$ ailesine $G-$denktir
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Cismi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Halkası
■	İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Dual sayı 1843-1879 yılları arasında yaşamış matematikçi bilim adamı William Kingdon Cliffford tarafından ortaya atılıp geliştirilmiş ve yepyeni bilimsel çalışmalara önayak olmuştur.

1903'de Eduard Study kendi adının verildiği Study dönüşümünde birim dual küre üzerindeki her bir noktanın $\mathbb{R}^3$'deki yönlü doğrularla birebir karşılık geldiğini kanıtladı. Bu ise $\mathbb{R}^3$'deki yönlü doğrular teorisini dual sayılar yardımıyla incelemelerine imkan verdi. Bunun sonucunda birçok bilim adamı bu yöntemi kullanarak yönlü doğrular teorisine ait çeşitli makaleler yayınladılar.

1977'de Hacısalihoğlu, H.H. [8] çalışmasında birim dual küre üzerinde çizilmiş bir çemberin çizgiler uzayındaki karşılığını göstermiştir.

1979'da Bottema, O. and B. Roth [4] kitabında dual sayılar teorisinin kinematik problemlerine uygulanışı hakkında geniş bilgi veriyor.

1983'de Hacısalihoğlu, H.H. , [1] kitabında dual sayıların çizgiler geometrisi adı altında $\mathbb{D}$-Modül yardımı ile regle yüzeyler, doğru kongrüansları ve doğru kompleksleri hakkında bilgiler verdi.

2002'de Angeles, J. [2] çalışmasında dual rotasyon matrislerinin invaryantları üzerinde çalıştı.

On yıllardır dual sayıların katı cisim dinamiğinde de uygulandığı biliniyor. 1994'de Brodsky V. and Shoham [3] çalışmasında dual atalet operatörü bu probleme çözüm önermektedir. Kütleye dual bir özellik vererek dinamik denklemlerin değişimleri boyunca üç boyutlu dual uzayda kalabilmenin mümkün olduğunu göstermiştir.

2009'da Taleshian, A. [9] çalışmasında dual sayıların kovaryant türevi üzerinde çalıştı.

Ayrıca $[5],[6],[7],[10-15]$‘de dual sayıların mekaniğe, lineer cebire ve diferansiyel geometriye ait çeşitli konularda uygulamaları verilmiştir.

Öncelikle 2-boyutlu dual düzlem geometrisi problemlerini cebirsel yöntemlerle, özel olarak, dual sayılar teorisi yardımı ile incelemek oldu. Bu yöntemi kullanmak için dual sayılara ait bazı yeni bulgular elde edildi. Tezin temel amacı öncelikle 2-boyutlu dual düzlem geometrisinin temel gruplarından biri olan $\mathbb{D}_1$ grubu için G-denklik problemleri incelendi, ardından $\mathbb{D}_1$ ile $G\mathbb{D}_1$, $\mathbb{D}_2$ ile $G\mathbb{D}_2$ ve $\mathbb{D}_3$ ile $G\mathbb{D}_3$ grupları arasındaki bağlantılar elde edildi..

Tezde aşağıdaki konular incelenmiştir:

1) $\mathbb{D}_1$ grubunun tanımı ve özellikleri;

2) $\mathbb{D}_1$ grubuna karşılık gelen $G\mathbb{D}_1$ dual sayılar matris grubunun tanımları ve özellikleri;

3) $\mathbb{D}_1$ grubuna göre $G-$denklik problemi;

1.2. Gruplar, Halkalar

Tanım 1: (Grup) G boş olmayan bir küme ve $(\cdot)$da G üzerinde tanımlı ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,\cdot)$ sistemine bir grup denir.

(i) Her $a,b\in G$ için $a\cdot b\in G$ dir. (kapalılık özelliği)

(ii) Her $a,b,c\in G$ için $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ dir. (birleşme özelliği)

(iii) Her $a\in G$ için $a\cdot e=e\cdot a=a$ olacak şekilde bir $e\in G$ vardır. (birim eleman özelliği)

(iv) Her $a\in G$ için $a\cdot b=b\cdot a=e$ olacak şekilde bir $b\in G$ vardır. (ters eleman özelliği). Burada (iii)’deki e elemanına grubun birim (etkisiz) elemanı denir. Ayrıca (iv)’deki b elemanına a’nın tersi denir ve $b=a^{-1}$ ile gösterilir. Bu dört şarta ek olarak eğer: (v)Her $a,b\in G$ için $a\cdot b=b\cdot a$ ise (değişme özelliği) bu gruba Abel (değişmeli) grup denir.

Örnek 1: $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ birer değişmeli gruptur.

Örnek 2: $(\mathbb{Q}/\{0\},\cdot),(\mathbb{R}/\{0\},\cdot),(\mathbb{C}/\{0\},\cdot)$ birer değişmeli gruptur.

Örnek 3: $(\mathbb{Z},\cdot)$ bir grup değildir.

Tanım 2: (Alt Grup) G bir grup H 'de onun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G 'de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H 'ye G 'nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Örnek 4: $(\mathbb{Q}/\{0\},\cdot)$ grubu $(\mathbb{R}/\{0\},\cdot)$ grubunun bir alt grubudur.

Örnek 5: $m \in \mathbb{Z}$ olsun. $(m\mathbb{Z},+)$ grubu $(\mathbb{Z},+)$ grubunun bir alt grubudur.

Örnek 6: $(\mathbb{Z},+)$ grubunda tek tamsayılar kümesi bir alt grup değildir.

Tanım 3: (Grup Homomorfizması) $(G,\cdot)$ ve $(H,*)$ iki grup olsun. $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu "grup işlemini koruyorsa" yani $\forall a,b \in G$ için $f(a\cdot b) = f(a) * f(b)$ ise f 'ye G 'den H 'ye bir grup homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir.

Örnek 7: $\mathrm{I}: G \to G$ birim dönüşümü G 'nin bir homomorfizmasıdır.

Örnek 8: $G = (\mathbb{Z},+)$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $f: G \to G$ dönüşümü her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = nx$ şeklinde tanımlansın. f bir homomorfizmadır.

Tanım 4: (Grup İzomorfizması) $f: G \to H$ grup homomorfizması birebir ve örten ise f 'ye bir izomorfizma denir. Eğer G 'den H 'ye örten bir İzomorfizma (yani birebir ve örten homomorfizma) varsa G ile H gruplarına izomorfiktirler veya eş yapılıdırlar denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Tanım 5: (Halka) $H \neq \varnothing$ bir küme olsun. H 'de "toplama" ve "çarpma" denilen $"\oplus"$ ve $"\odot"$ sembolleri ile gösterilen iki işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki üç şart sağlanırsa $(H,\oplus,\odot)$ sistemine bir halka denir.

(i) $(H,\oplus)$ değişmeli gruptur.

(ii) Her $a,b,c \in H$ için $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ dir. (Yani $(H,\odot)$ yarı gruptur.

(iii) Her $a,b,c \in H$ için

$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot b)$ (soldan dağılma)

$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$ (sağdan dağılma)

Bunlara ek olarak ;

(iv) Her $a,b \in H$ için $a \odot b = b \odot a$ ise (yani $\odot$ işlemi değişmeli ise) H 'ye değişmeli halka denir.

(v) Her $a \in H$ $a \odot e = e \odot a$ olacak şekilde bir $e \in H$ var ise e 'ye birim eleman; H 'ye birimli halka denir.

Örnek 9: $(\mathbb{Z},+,\cdot),(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot)$ sistemleri birer halkadır.

Örnek 10: $S = \{x + y\sqrt{2}, x, y \in \mathbb{Z}\}$ kümesi verilsin. $(S,+,\cdot)$ sistemi bir halkadır.

Tanım 6: (Alt halka) H bir halka ve $\varnothing \neq S \subseteq H$ olsun. S kümesi H 'de tanımlanan halka işlemlerine göre bir halka oluyorsa S 'ye H 'nin bir alt halkası denir.

Örnek 11: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ halkası $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ halkasının, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ halkası $(\mathbb{R},+,\cdot)$ halkasının ve $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ halkasıda $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ halkasının alt halkasıdır.

Tanım 7: (İdeal) R bir halka $\varnothing \neq \mathrm{I} \subset Q$ olsun.

i) $\forall a,b \in \mathrm{I}$ için $a-b \in \mathrm{I}$ ve $\forall a \in \mathrm{I}$ için $\forall r \in Q$ için $ra \in \mathrm{I}$ ise I 'ya Q 'nin sol ideali

ii) $\forall a,b \in \mathrm{I}$ için $a-b \in \mathrm{I}$ ve $\forall a \in \mathrm{I}$ için $\forall r \in Q$ için $ar \in \mathrm{I}$ ise I 'ya Q 'nin sağ ideali denir. Hem sağ hem de sol bir ideale iki taraflı ideal veya ideal denir.

Örnek 12: $\{0\}$ ve Q, Q 'nun aşikar idealleridir.

Örnek 13: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ halkasının, $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ ideali aşikar olmayan bir idealdir.

Tanım 8: (Halka Homomorfizması) $(H,+,\cdot)$ ve $(S,\oplus,\odot)$ iki halka ve $\theta : H \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer θ toplama ve çarpma işlemlerini koruyorsa; yani

(i) Her $a,b \in H$ için $\theta(a+b) = \theta(a) \oplus \theta(b)$

(ii) Her $a,b \in H$ için $\theta(a \cdot b) = \theta(a) \odot \theta(b)$ ise θ'ya bir halka homomorfizması denir.

Örnek 14: $\theta : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{30}$ **,** $\theta(x) = 6x$ şeklinde tanımlansın. θ bir halka homomorfizmasıdır.

Çözüm : $x, y \in \mathbb{Z}_{20}$ için $x + y = r$ ve $xy = s$ ise $\mathbb{Z}$'de $x + y = 20q + r$ ve $xy = 20t + s$ dir. $(q,t \in \mathbb{Z}$ ve $0 \le r,s < 20)$ bu durumda $\mathbb{Z}$'de $6x + 6y = 6(x + y) = 120q + 6r$ ve $6(xy) = 120t + 6s$ olur. $\mathbb{Z}_{30}$'da ise

$$\phi(x+y) = 6(x+y) = 6r = 6x + 6y = \phi(x) + \phi(y)$$

$$\phi(xy) = 6(xy) = 6s = 6 \cdot 6s = 6 \cdot 6(xy) = (6x)(6y) = \phi(x)\phi(y)$$ olur. Böylece ϕ bir halka homomorfizmasıdır.

Tanım 9: (Halka İzomorfizması) $\theta : H \to S$ halka homomorfizması birebir ve örten ise θ halka izomorfizması adını alır. Eğer H'den S'ye örten bir izomorfizma (yani birebir ve örten homomorfizma) varsa H ile S halkalarına izomorfiktirler denir.

Eğer $\theta : H \to H$ örten izomorfizma ise bir otomorfizmadır denir.

Örnek 15: $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$ bilinen matris toplamı ve çarpımı ile bir halkadır. $\phi : \mathbb{C} \to H, \phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ bir halka homomorfizmasıdır aynı zamanda $\mathbb{C}$ ile H izomorfiktirler.

Çözüm : $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ve $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\phi\big((a+bi)+(c+di)\big) = \phi\big((a+c)+(b+d)i\big) = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

$$= \phi(a+bi) + \phi(c+di)$$

$$\phi\big((a+bi)\cdot(c+di)\big) = \phi\big((ac-bd)+(ad+bc)i\big) = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \phi(a+bi) \cdot \phi(c+di)$$

Yani ϕ bir halka homomorfizmasıdır.

$\phi(a+bi) = \phi(c+di) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow a+bi = c+di$ olup ϕ birebirdir. Şimdi $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in H$ verilsin. $\phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ olup ϕ 'nin örten olduğu görülür.

Tanım 10: (Cisim) $(H,+,\cdot)$ bir halka olsun. Eğer $H \setminus \{0\}$ alt kümesi çarpma işlemine göre değişmeli bir grup ise $(H,+,\cdot)$ sistemine bir cisim denir.

Örnek 16: $(\mathbb{R},+,\cdot)$**,**$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ sistemleri birer cisimdir. Fakat $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ bir cisim değildir.

Çözüm: $(\mathbb{R},+,\cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka olduğunu biliyoruz. Şimdi $a \neq 0, a \in \mathbb{Q}$ alalım. $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olacak şekilde $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ olduğundan dolayı $(\mathbb{R},+,\cdot)$ sistemi bir cisimdir.

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka olduğunu biliyoruz. Şimdi $a \neq 0, a \in \mathbb{Q}$ alalım. $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olacak şekilde $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$ olduğundan dolayı $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ sistemi bir cisimdir.

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ birimli ve değişmeli bir halka olduğunu biliyoruz. $2 \in \mathbb{Z}$ fakat $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan dolayı $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ bir cisim değildir.

1.3. Dual Sayılar

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi $(+)$ toplama *ve* $(.)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cismi de $\mathbb{R}$ ile gösterilsin.

Tanım 11: $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A=(a,a^*)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$\mathbb{D}=\left\{\left(a,a^*\right): a, a^* \in\mathbb{R}\right\}$ üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır:

Tanım 12: (Toplama) $\oplus:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{D}$ iç işlemi $A=\left(a,a^*\right)$ ve $B=\left(b,b^*\right)$ olmak üzere, $A\oplus B=\left(a,a^*\right)\oplus\left(b,b^*\right)=(a+b,a^*+b^*)$ şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki toplama olarak adlandırılır.

Tanım 13: (Çarpma) $\odot:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{D}$ iç işlemi $A=\left(a,a^*\right)$ ve $B=\left(b,b^*\right)$ olmak üzere $A\odot B=AB=\left(a,a^*\right)\odot\left(b,b^*\right)=(ab,ab^*+a^*b)$ biçiminde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ 'deki çarpma olarak adlandırılır.

Tanım 14: (Eşitlik) $A=\left(a,a^*\right) ve B=\left(b,b^*\right)\in\mathbb{D}$ olmak üzere $a=b, a^*=b^*$ ise A ile B eşittir denir ve $A=B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 15: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere; $\mathbb{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ kümesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi denir ve $\forall\left(a,a^*\right)\in\mathbb{D}$ elemanına bir dual sayı denir.

1.4. Dual Sayılar Halkası

Teorem 1: $\left(\mathbb{D},\oplus,\odot\right)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

İspat: (i): $\left(\mathbb{D},\oplus\right)$ ikilisi abel gruptur.

(ii): $\odot$ çarpma işlemi $\mathbb{D}$ 'de birleşimli ve $\oplus$ toplama işlemine göre dağılmalıdır. Ayrıca $\odot$ çarpma işleminin birim elemanı $(1,0)$ 'dır.

H_1 : $\odot:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{D}$ biçiminde tanımlandığından kapalılık aksiyomu açıktır.

H_2 : Birleşme özelliği vardır. Gerçekten $A=\left(a,a^*\right)$, $B=\left(b,b^*\right)$ ve $C=(c,c^*)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ olmak üzere;

$$(A\oplus B)\oplus C=\left[\left(a,a^*\right)\oplus\left(b,b^*\right)\right]\oplus\left(c,c^*\right)=\left(a+b,a^*+b^*\right)\oplus\left(c,c^*\right)=$$

$$=\left(a+b+c,a^{*}+b^{*}+c^{*}\right)$$

$$A\oplus(B\oplus C)=\left(a,a^{*}\right)\oplus\left[\left(b,b^{*}\right)\oplus\left(c,c^{*}\right)\right]=\left(a,a^{*}\right)\oplus\left(b+c,b^{*}+c^{*}\right)=$$

$$=\left(a+b+c,a^{*}+b^{*}+c^{*}\right) \text{ olur.}$$

H_3 : $\oplus$ işlemine göre $\mathbb{D}$ de bir etkisiz eleman vardır. Gerçekten $A\oplus 0=0\oplus A=A$ olacak şekilde bir 0 etkisiz elemanına $0=(x,x^{*})$ diyelim,

$\left(a,a^{*}\right)\oplus\left(x,x^{*}\right)=\left(x,x^{*}\right)\oplus(a,a^{*})=(a,a^{*})$ yazılarak $a+x=a$ ve

$a^{*}+x^{*}=a^{*}\Rightarrow x=0$ ve $x^{*}=0$ olur. $0=(0,0)\in\mathbb{D}$ etkisiz elemanı elde edilir.

H_4 : $\oplus$ işlemine göre $\forall A\in\mathbb{D}$ için $A\oplus X=X\oplus A=O$ olacak şekilde bir tek $X=(x,x^{*})\in\mathbb{D}$ ters elemanı vardır.

$\left(a,a^{*}\right)\oplus\left(x,x^{*}\right)=\left(x,x^{*}\right)\oplus(a,a^{*})=(0,0)$ eşitliğinden $X=(-a,-a^{*})\in\mathbb{D}$ elde edilir.

Tekliğini göstermek için başka bir tane daha $Y=\left(y,y^{*}\right)\in\mathbb{D}$ olduğunu kabul edelim. $\left(a,a^{*}\right)\oplus\left(x,x^{*}\right)=\left(a,a^{*}\right)\oplus\left(y,y^{*}\right)=\left(0,0\right)$ eşitliğinden $a+x=a+y$ ve $a^{*}+x^{*}=a^{*}+y^{*}\Rightarrow$ $x=y$ ve $x^{*}=y^{*}$ olup $X=Y$ elde edilir.

O halde $\left(\mathbb{D},\oplus\right)$ ikilisi bir gruptur.

H_5 : $\forall A,B\in\mathbb{D}$ için $A\oplus B=B\oplus A$ dir.

Gerçekten , $A\oplus B=\left(a,a^{*}\right)\oplus\left(b,b^{*}\right)=\left(a+b,a^{*}+b^{*}\right)$

$$B\oplus A=\left(b,b^{*}\right)\oplus\left(a,a^{*}\right)=(a+b,a^{*}+b^{*})$$

Bu yüzden $\left(\mathbb{D},\oplus\right)$ ikilisi bir Abel grubudur.

$\odot:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{D}$ işleminin özellikleri

H_6 : $\odot:\mathbb{D}\times\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{D}$ bir iç işlem olduğu için $\mathbb{D}$ kümesi $\odot$ işlemine göre kapalıdır.

H_7 : $(A\odot B)\odot C=A\odot(B\odot C)$ sağlanır. Gerçekten

$$(A\odot B)\odot C=\left[\left(a,a^{*}\right)\odot\left(b,b^{*}\right)\right]\odot(c,c^{*})=\left(ab,ab^{*}+a^{*}b\right)\odot(c,c^{*})$$

$$=\left(abc,abc^{*}+ab^{*}c+a^{*}bc^{*}\right)$$

$$A\odot(B\odot C)=\left(a,a^{*}\right)\odot\left[\left(b,b^{*}\right)\odot(c,c^{*})\right]=\left(a,a^{*}\right)\odot\left[\left(bc,bc^{*}+b^{*}c\right)\right]$$

$$=(abc,abc^{*}+acb^{*}+a^{*}bc)$$

$H_8 : (A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ ve $C \odot \left(A \oplus B\right) = \left(C \odot A\right) \oplus (C \odot B)$ dir.

Gerçekten

$(A \oplus B) \odot C = (a+b, a^* + b^*) \odot (c, c^*) \; = (ab + bc, ac^* + bc^* + a^* c + b^* c)$ (1)

$(A \odot C) \oplus (B \odot C) = (ac, ac^* + b^* c) \oplus (bc, bc^* + b^* c)$

$= (ab + bc, ac^* + bc^* + a^* c + b^* c)$ (2)

(1) ve (2) den $(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ olur.

$C \odot \left(A \oplus B\right) = (c, c^*) \odot \left(a+b, a^* + b^*\right) = (ca + cb, ca^* + cb^* + c^* a + c^* b)$ (3)

$(C \odot A) \oplus (C \odot B) = (ca, ca^* + c^* a) \oplus (cb, cb^* + c^* b)$ (4)

(3) ve (4) den $C \odot \left(A \oplus B\right) = \left(C \odot A\right) \oplus (C \odot B)$ elde edilir.

O halde $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir halkadır.

$\forall A, B \in \mathbb{D}$ için $A \odot B = B \odot A$'dır. Gerçekten ;

$A \odot B = \left(a, a^*\right) \odot \left(b, b^*\right) = (ab, ab^* + a^* b)$ ve

$B \odot A = (b, b^*) \otimes (a, a^*) = (ba, ba^* + ab^*)$ olur.

O halde $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ değişmeli bir halkadır.

H_{10} : $\odot$ işlemi için $\left(1,0\right)$ etkisiz elemandır gerçekten ;

$\left(1,0\right) \odot A = \left(1,0\right) A = A$

$\left(1,0\right) \odot A = \left(1,0\right) \odot \left(a, a^*\right) = \left(a, a^*\right) = A$

$A \odot \left(1,0\right) = \left(a, a^*\right) \odot \left(1,0\right) = \left(a, a^*\right) = A$ olur.

O halde $\left(\mathbb{D}, \oplus, \odot\right)$ birimli bir halkadır. ■

Not: Biz bundan sonra $\left(\mathbb{D}, \oplus, \odot\right)$ halkasını $\mathbb{D}$ ile göstereceğiz.

Tanım 16: (Sıfır eleman) $A \oplus X = A$ denkleminin çözümü olan $X = \left(0,0\right)$ dual sayısına $\mathbb{D}$'nin sıfırı denir ve $0 = \left(0,\ 0\right)$ ile gösterilir.

Teorem 2: $\left(\mathbb{D}, \oplus, \odot\right)$ üçlüsü bir cisim değildir.

İspat: $\left(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \odot\right)$ ikilisi grup aksiyomlarından ters eleman özelliğini sağlamaz. Gerçekten;

$\forall A=(a,a^*)\in\mathbb{D}$ için $A\odot X=X\odot A=(1,0)$ olacak şekilde bir tek $X=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ ters eleman mevcut olmayabilir. $a\neq 0$ olsun.

$(a,a^*)\odot(x,x^*)=(ax,ax^*+a^*x)=(1,0)$

$x=\dfrac{1}{a}$ ve $x^*=\dfrac{-a^*}{a^2}$ bulunur.

$X=(\dfrac{1}{a},\dfrac{-a^*}{a^2})$ elemanı A'nın ters elemanıdır.

$a=0$ ise yani $(0,a^*)\in\mathbb{D}$ elemanının tersi yoktur. Gerçekten

$(0,a^*)(x,x^*)=(0,a^*x)=(1,0)$ olup bu bir çelişkidir. Bu ise $(\mathbb{D},\oplus,\odot)$ üçlüsünün cisim olmadığını gösterir. ■

Önerme 1: (Bölme) $A=(a,a^*),B=(b,b^*)$ ise $A\odot X=B$ denkleminin $X=(x,x^*)$ çözümü sadece aşağıdaki durumlarda mevcuttur:

1) $a\neq 0$ ise $X=\left(\dfrac{b}{a},\dfrac{b^*a-a^*b}{a^2}\right)$ dır.

2) $a=0,b=0,a^*\neq 0$ ise $X=\left(\dfrac{b^*}{a^*},x^*\right)$ dır.

3) $a=0,a^*=0,b=0,b^*=0$ ise $\forall X=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ çözümdür.

İspat 1: $AX=B\Rightarrow(a,a^*)(x,x^*)=(ax,ax^*+a^*x)=(b,b^*)$ (5)

Buradan $a\neq 0\Rightarrow ax=b\Rightarrow x=\dfrac{b}{a}$, $ax^*+a^*x=b^*\Rightarrow ax^*=b^*-a^*x\Rightarrow$

$$\Rightarrow ax^*=b^*-a^*\frac{b}{a}=\frac{b^*a-a^*b}{a}\Rightarrow x^*=\frac{b^*a-a^*b}{a^2}\Rightarrow X=\left(\frac{b}{a},\frac{b^*a-a^*b}{a^2}\right)$$

2) $a=0,b=0,a^*\neq 0$ alalım. Bu değerleri (5) eşitliğinde yerine yazarsak, $X=\left(\dfrac{b^*}{a^*},x^*\right)$ elde edilir.

3) $a=0, a^*=0, b=0, b^*=0$ alalım. Bu değerleri (5) ifadesinde kullanırsak, $(0,0)(x,x^*)=(0,0)$ olup bu $\forall X=(x,x^*)\in\mathbb{D}$'nin çözüm olduğunu gösterir.

Şimdi bu üç durumdan başka çözüm olmadığını gösterelim. Kabul edelim ki $Y=(y,y^*)$ şeklinde başka bir çözüm olsun. O halde $(ax, ax^*+a^*x)=(ay, ay^*+a^*y)$ olur. Buradan $ax=ay \Rightarrow a(x-y)=0 \Rightarrow a=0$ veya $x=y$'dir. $a=0 \Rightarrow a^*x=a^*y$ $\Rightarrow a^*(x-y)=0 \Rightarrow x=y$ veya $a^*=0$ elde edilir. $a=0 \Rightarrow A=(0,0)$ veya $A=(0,a^*)$ bulunur. Bu ise 1. ve 2. durumdur. $x=y \Rightarrow ax^*+a^*x=ay^*+a^*y \Rightarrow ax^*=ay^*$ $\Rightarrow a(x^*-y^*)=0 \Rightarrow x^*=y^* \Rightarrow A=B$ elde edilir. ■

Teorem 3: $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar.

İspat: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{D}$ fonksiyonu, $f: a \to (a\ ,0)$ olarak tanımlayalım. f halka homomorfizmasıdır. $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$f(a+b)=(a+b,0)=f(a+b,0)=a+b=(a,0)\oplus(b,0)=f(a)\oplus f(b)$ olur.

Ayrıca $f(ab)=(ab\ ,0)=(a,0)\odot(b,0)=f(a)\odot f(b)$ elde edilir.

f birebirdir. Gerçekten

$f(a)=f(b)\Rightarrow(a,0)=(b,0)\Rightarrow a=b$, O halde f birebirdir. ■

Tanım 17: Teorem 3 ün bir sonucu olarak $(a,0)$ dual sayısı, izomorfu olduğu "a" ile gösterilecektir. Yani; $(a,0)=a$ alınacaktır.

Tanım 18: Bir $A=(a,a^*)\in\mathbb{D}$ dual sayısında a reel sayısına A'nın reel kısmı "a^*" reel sayısına A'nın dual kısmı denir ve $Re\,A=a$ ve $DuA=a^*$ şeklinde yazılır.

Tanım 19: $(1,0)=1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir.

Tanım 20: $(0,1)$ dual sayısı kısaca ε ile gösterilmektedir. Yani $\varepsilon=(0,1)$ alınacak ve dual birim olarak adlandırılacaktır.

Sonuç 1: $\odot$ işleminin tanımı gereğince $\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = (0,1)(0,1) = (0,0) = 0$ dır. Yani $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 = 0$ olduğu görülür.

Tanım 21: $(0,0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin $\oplus$ toplama işlemine göre birim elemanı (Abel grubunun birim elemanı) denir ve $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ izomorfizminde karşılık geldiği “0” reel sayısı ile gösterilir.

Teorem 4: $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Yani $A = (a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ dır.

İspat: $\oplus$ toplama işleminin tanımı gereğince $A = (a, a^*) = (a, 0) + (0, a^*)$ şeklinde yazılabilir. Tanım 20 ve 21 den $A = (a, a^*) = a + \varepsilon a^*$ şeklinde olur.

$A = (a, a^*) = (a, 0) + (0, a^*)$ yazılışı tek türlüdür. Gerçekten $A = (a, a^*)$'ın başka bir yazılışı da $A = (a, a^*) = b + \varepsilon b^*$ biçiminde olsun. O halde $a + \varepsilon a^* = b + \varepsilon b^*$ olup iki dual sayının eşitliğinden $a = b$ ve $a^* = b^*$ olur. Bu da $A = (a, a^*) = (a, 0) + (0, a^*)$ yazılışının tek türlü olduğunu gösterir.

Sonuç 2: $\mathbb{R}$ 'deki $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerine ait kurallar $\mathbb{D}$ 'de aynen kullanılabilir. Bundan sonra $\oplus$ ve $\odot$ sembolleri yerine $(+)$ ve $(\cdot)$ işaretlerini kullanacağız.

Önerme 2: $A, B \in \mathbb{D}$ ve $A.B = 0$ ise A veya B den herhangi birinin 0 olması gerekmez.

İspat: $A = (0, a^*) = \varepsilon a^*$ ve $B = (0, b^*) = \varepsilon b^*$ ise $A \cdot B = (0, a^*) \cdot (0, b^*) = (0,0) = 0$ olur. Fakat $A \neq 0$ ve $B \neq 0$'dır. ■

Önerme 3: $A = (a, a^*) = a + \varepsilon a^* \in \mathbb{D}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile A nın çarpımı $\lambda \cdot A = (\lambda a, \lambda a^*) = \lambda a + \varepsilon \lambda a^*$ ‘dır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğundan dolayı λ reel sayısı $(\lambda, 0)$ dual sayısına izomorftur. Buna göre $\lambda \cdot A = (\lambda, 0)(a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$ olur. ■

Tanım 22: λ reel sayısı ile A dual sayısının çarpımı $\mathbb{R}\times\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{D}$ şeklinde bir dış işlem olup bir dual sayının bir reel skalar ile çarpımı adını alır.

Önerme 4: $A=a+\varepsilon a^{*}$ ve $B=b+\varepsilon b^{*}$ iki dual sayı olsun. Bu taktirde $AB=ab+\varepsilon\left(ab^{*}+a^{*}b\right)$'dir.

İspat: $AB=\left(a+\varepsilon a^{*}\right)\left(b+\varepsilon b^{*}\right)=ab+\varepsilon\left(ab^{*}+a^{*}b\right)$

$=ab+\varepsilon\left(ab^{*}+a^{*}b\right)+\varepsilon^{2}a^{*}b^{*}$ 'dan ve $\varepsilon^{2}=0$ olduğundan dolayı $AB=ab+\varepsilon\left(ab^{*}+a^{*}b\right)$ olur. ■

Önerme 5: $A=a+\varepsilon a^{*}, a\neq 0$ ve B=b$+\varepsilon b^{*}$ iki dual sayı olsun. Bu taktirde $\frac{B}{A}=\frac{b+\varepsilon b^{*}}{a+\varepsilon a^{*}}=\frac{b}{a}+\varepsilon\frac{b^{*}a-ba^{*}}{a^{2}}$'dir.

İspat: $\frac{B}{A}=\frac{b+\varepsilon b^{*}}{a+\varepsilon a^{*}}=\frac{\left(b+\varepsilon b^{*}\right)\left(a-\varepsilon a^{*}\right)}{\left(a+\varepsilon a^{*}\right)\left(a-\varepsilon a^{*}\right)}=\frac{ba+\varepsilon\left(b^{*}a-ba^{*}\right)-\varepsilon^{2}a^{*}b^{*}}{a^{2}+\varepsilon\left(aa^{*}-aa^{*}\right)-\varepsilon^{2}a^{*2}}$ ve $\varepsilon^{2}=0$

olduğundan dolayı $\frac{B}{A}=\frac{ba+\varepsilon\left(b^{*}a-ba^{*}\right)}{a^{2}}=\frac{ba}{a^{2}}+\varepsilon\frac{b^{*}a-ba^{*}}{a^{2}}=\frac{b}{a}+\varepsilon\frac{b^{*}a-ba^{*}}{a^{2}}$ bulunur. ■

Önerme 6: $A=a+\varepsilon a^{*}, a\neq 0$ dual sayısı verilsin. Bu taktirde $\frac{1}{A}=\frac{1}{a}-\varepsilon\frac{a^{*}}{a^{2}}$'dir.

İspat: $\frac{1}{A}=\frac{1}{a+\varepsilon a^{*}}=\frac{\left(a-\varepsilon a^{*}\right)}{\left(a+\varepsilon a^{*}\right)\left(a-\varepsilon a^{*}\right)}=\frac{a-\varepsilon a^{*}}{a^{2}+\varepsilon\left(aa^{*}-aa^{*}\right)-\varepsilon^{2}a^{*2}}$ ve $\varepsilon^{2}=0$

olduğundan dolayı $\frac{1}{A}=\frac{a-\varepsilon a^{*}}{a^{2}}=\frac{a}{a^{2}}-\varepsilon\frac{a^{*}}{a^{2}}=\frac{1}{a}-\varepsilon\frac{a^{*}}{a^{2}}$ olur. ■

1.5. $\mathbb{D}$-Modül

Tanım 23: K birimli bir halka ve X değişmeli bir grup olsun. $\varphi: K\times X\rightarrow X$, $\varphi\left(k,x\right)=kx$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa X ,K halkasının üzerinde bir modüldür denir.

$i)\ k(x+y)=kx+ky, \forall x,y\in X, k\in K$

$ii)\ (k_1+k_2)x=k_1x+k_2x, \forall x\in X, k_1,k_2\in K$

$iii)\ (k_1.k_2)x=k_1(k_2x), \forall x\in X, k_1,k_2\in K$

$iv)\ 1x=x, x\in X$

Eğer $K=\mathbb{D}$ ise $\mathbb{D}$ bir modüldür ve $\mathbb{D}$ -Modül olarak adlandırılır.

1.6. Dual Sayılar Halkasının İdealleri

Önerme 7: $(\mathbb{D}\ ,\oplus,\odot)$ halkasının tüm idealleri aşağıdaki gibidir.

(1) $K=\{(0,0)\}, K\subset\mathbb{D}$ $K,\mathbb{D}$ 'nin bir idealidir.

(2) $K=\mathbb{D}, K,\mathbb{D}$ 'nin bir idealidir.

(3) $K=\{\varepsilon a^*: a^*\in\mathbb{R}\},\mathbb{D}$ 'nin bir idealidir.

İspat: (1) ve (2) $\mathbb{D}$ 'nin aşikâr idealleridir.

(3) $K=\{\varepsilon a^*: a^*\in\mathbb{R}\}$'in bir ideal olduğunu gösterelim.

i) $a^*\varepsilon, b^*\varepsilon\in K$ $a^*\neq b^*$ $a^*\varepsilon-b^*\varepsilon=(a^*-b^*)\varepsilon\in K$

$ii)$ $\forall b^*\varepsilon\in K$ ve $\forall A=a+a^*\varepsilon\in\mathbb{D}$ olsun. $b^*\varepsilon(a+a^*\varepsilon)=(a+a^*\varepsilon)b^*\varepsilon=ab^*\varepsilon\in K$ ‘dır.

O halde $K=\{\varepsilon a^*: a^*\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{D}$ ’ nin bir idelidir.

Şimdi gösterelim ki, $\mathbb{D}$ ’ nin keyfi ideali bu ideallerin biri ile çakışır. I , $\mathbb{D}$ ’ nin bir ideali olsun. $\exists A\in\mathrm{I}$ öyle ki $A=a+\varepsilon a^*$ ve $a\neq 0$ olsun. Gösterelim ki, $\mathrm{I}=\mathbb{D}$ dir. Keyfi $B\in\mathbb{D}, B=b+\varepsilon b^*$ elemanı alalım. A için $a\neq 0$ olduğundan dolayı $AC=B$ olacak şekilde $C\in\mathbb{D}$ vardır. I ideal olduğundan $AC\in\mathrm{I}$ dır. Dolayısıyla $B\in\mathrm{I}, B\in\mathbb{D}$ keyfi olduğundan $\mathrm{I}=\mathbb{D}$ dir.

Şimdi I , $\mathbb{D}$ ’ nin bir ideali öyle ki keyfi $A\in\mathrm{I}, A=a+\varepsilon a^*$, için $a=0$ ve $a^*\neq 0$ olacak şekilde $A=\varepsilon a^*$ mevcut olsun. Bu taktirde $\mathrm{I}\subset\{\varepsilon b^*, b^*\in\mathbb{R}\}$ dir. Eğer $A\in\mathrm{I}, A=\varepsilon a^*, a^*\neq 0$ varsa, keyfi $B=\varepsilon b^*$ için (önerme 1’e göre) $AC=B$ olacak şekilde

$C \in \mathbb{D}$ vardır. Dolayısıyla $\mathrm{I} = \{\varepsilon b^*, b^* \in \mathbb{R}\}$' dir. Eğer keyfi $A \in \mathrm{I}, A = a + \varepsilon a^*$ için $a = 0$ ve $a^* = 0$ ise $\mathrm{I} = \{(0,0)\}$' dır. ■

1.7. Bir Dual Sayının Matris Gösterimi

Tanım 24: $a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}$ formundaki matrislerin kümesini M ile gösterelim. $(+)$ ve $(\cdot)$ matris işlemlerini göz önüne alalım.

Teorem 5: $(M, +, \cdot)$ birimli değişmeli bir halkadır ve bu halka $\mathbb{D}$ 'ye izomorftur.

İspat: Öncelikle $(M, +, \cdot)$ birimli değişmeli bir halka olduğunu gösterelim. $+ : M \times M \to M, \forall A, B \in M$ için

M_1. Kapalılık özelliği :

$$A + B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a^* + b^* & a+b \end{bmatrix} \in M$$ olup kapalıdır.

M_2. Birleşme özelliği :

$\forall A, B, C \in M$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a^* + b^* & a+b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ c^* & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b+c & 0 \\ b^* + c^* & b+c \end{bmatrix} = A + (B+C)$$ olup birleşme özelliği sağlanır.

M_3. Birim eleman:

$A + X = X + A = A$

$$A + X = \begin{bmatrix} a+x & 0 \\ a^* + x^* & a+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix} \Rightarrow a + x = a, a^* + x^* = a^* \Rightarrow x = x^* = 0$$

$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $+$ işleminin birimidir.

M_4. Ters eleman :

$A + B = B + A = 0$

$$A+B=\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a^*+b^* & a+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a+b=0, a^*+b^*=0 \Rightarrow b=-a, b^*=-a^*$$

$B=\begin{bmatrix} -a & 0 \\ -a^* & -a \end{bmatrix}$ $+$ işlemine göre A matrisinin ters matrisidir.

Teklik: Başka bir tane daha $C \in M$ olduğunu kabul edelim. $A+B=A+C=0$ eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a^*+b^* & a+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & 0 \\ a^*+c^* & a+c \end{bmatrix} \Rightarrow a+b=a+c, a^*+b^*=a^*+c^* \Rightarrow b=c, b^*=c^*$$

bulunur. Bu ise $B=C$ anlamına gelir.

Sonuç 3: $(M,+)$ bir gruptur.

M_5. Değişme özelliği : $A+B=B+A$' dir.

Sonuç 4: $(M,+)$ grubu değişmeli bir gruptur.

Ayrıca $\cdot : M \times M \to M, \forall A, B \in M$ işlemi için,

M_6. Kapalılık özelliği: $AB=\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ab & 0 \\ ab^*+ba^* & ab \end{bmatrix} \in M$ olup kapalıdır.

M_7. Birleşme özelliği : $\forall A, B, C \in M$ için

$$(AB)C=\begin{bmatrix} ab & 0 \\ ab^*+ba^* & ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ c^* & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} abc & 0 \\ ab^*c+a^*bc & ab \end{bmatrix}$$

$$A(BC)=\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} bc & 0 \\ bc^*+b^*c & bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} abc & 0 \\ ab^*c+a^*bc & ab \end{bmatrix}$$

$(AB)C=A(BC)$ olup birleşme özelliği sağlanıyor.

M_8. $\forall A, B, C \in M$ $(A+B)C=AC+BC$ ve $A(B+C)=AB+AC$ 'dir. Gerçekten

$$(A+B)C=\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a^*+b^* & a+b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ c^* & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a+b)c & 0 \\ (a^*+b^*)c+(a+b)c^* & (a+b)c \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ac+bc & 0 \\ a^*c+b^*c+ac^*+bc^* & ac+bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & 0 \\ a^*c+ac^* & ac \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} bc & 0 \\ b^*c+bc^* & bc \end{bmatrix}$$

$= AC + BC$ olup $(A+B)C = AC + BC$ elde edilir.

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b+c & 0 \\ b^*+c^* & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(b+c) & 0 \\ a^*(b+c)+a(b^*+c^*) & a(b+c) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(b+c) & 0 \\ a^*(b+c)+a(b^*+c^*) & a(b+c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+ac & 0 \\ a^*b+a^*c+ab^*+ac^* & ab+ac \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ a^*b+ab^* & ab \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ac & 0 \\ a^*c+ac^* & ac \end{bmatrix} = AB + AC$$ olup $A(B+C) = AB + AC$ bulunur.

Sonuç 5: $(M,+,.)$ bir halkadır.

M_9. Değişme özelliği : $\forall A, B \in M$ için

$$AB = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ ab^*+ba^* & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba & 0 \\ b^*a+a^*b & ba \end{bmatrix} = BA$$ olup değişme özelliği vardır.

Sonuç 6: $(M,+,.)$ halkası değişmelidir.

M_{10}. Birim eleman özelliği: Tüm 2×2 matrislerinin birim elemanı

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$$ olduğundan dolayı M ’ nin de birimidir.

Sonuç 7: $(M,+,.)$ halkası birimli bir halkadır.

Sonuç 8: $(M,+,.)$ halkası birimli ve değişmeli bir halkadır.

$$f:(a,a^*) \to f(a,a^*) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}$$ bir halka izomorfizmasıdır.

$A = (a,a^*)$ *ve* $(b,b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere ; $f(A+\mathrm{B}) = f(A) + (\mathrm{B})$ dir. Gerçekten ;

$$f(A+\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a^*+b^* & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b \end{bmatrix} = f(A) + f(B)$$

elde edilir. Ayrıca $f(A\cdot B) = f(A)\,f(B)$ dir:

$$f(A\cdot B) = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ ab^*+a^*b & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b \end{bmatrix} = f(A)\,f(B)$$ ve sonuç olarak

$f\,(A\cdot B) = f(A)\,f(\mathrm{B})$ elde edilir.

f birebirdir **:** $A \neq B$ ise $f(A) \neq f(B)$ dir. Gerçekten $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için $A \neq B$ ise $a \neq b$ veya $a^* \neq b^*$ dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b \end{bmatrix}$ ve $f(A) \neq f(B)$ dir.

f örtendir : $\mathbb{M}$ deki her bir $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}$ matrisi $\mathbb{D}$ deki bir tek $A = (a, a^*)$ dual sayısının f ile ifade edilmiş bir görüntüsüdür. O halde $\mathbb{D}$ ile $\mathbb{M}$ izomorftur. ■

Tanım 25: $A = (x, x^*) = x + \varepsilon x^*$ dual sayılarının bütününe dual düzlem denir ve $\mathbb{D}$ ile gösterilir. Her bir (x, x^*) ikilisine de dual düzlemin bir dual noktası denir.

1.8. Bir Dual Sayının 1.Tip Mutlak Değeri

Tanım 26: $A = (x, x^*) = x + \varepsilon x^*$ verilsin. $|A|_1 = |x + \varepsilon x^*|_1 = |x|$ sayısına A dual sayısının 1. tip mutlak değeri denir ve $|A|_1 = |x + \varepsilon x^*|_1$ ile gösterilir.

Önerme 8: $A = (x, x^*)$ dual sayı ve $|A|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$'dır.

İspat: $|x + \varepsilon x^*|_1 = |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$'dır. ■

Önerme 9: İki dual sayının çarpımının mutlak değeri, bu iki dual sayının mutlak değerleri çarpımına eşittir.

İspat : $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = b_1 + \varepsilon b_1^* \in \mathbb{D};$

$$|A_1 A_2|_1 = \left|\left(a_1 + \varepsilon a_1^*\right)\left(a_2 + \varepsilon a_2^*\right)\right|_1 = \left|a_1 a_2 + \varepsilon\left(a_1 a_2^* + a_1^* a_2\right)\right|_1 = |a_1 a_2| = |a_1||a_2| = |A_1|_1 |A_2|_1 \ ■$$

Önerme 10: (Üçgen Eşitsizliği) $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = b_1 + \varepsilon b_1^* \in \mathbb{D};$ olmak üzere ; $|A_1 + A_2|_1 \leq |A_1|_1 + |A_2|_1$'dir.

İspat: $|A_1 + A_2|_1 = \left|\left(a_1 + b_1\right) + \varepsilon\left(a_1^* + b_1^*\right)\right|_1 = |a_1 + b_1| \leq |a_1| + |b_1| = |A_1|_1 + |A_2|_1$ ■

1.9. Eşlenik Dual Sayılar

Tanım 27: $A = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ bir dual sayı olsun. $x - \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısına A'nin eşleniği denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Önerme 11: $A \in \mathbb{D}$ ve $\overline{A}$ dual eşleniği olmak üzere

(i) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$'dır.

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1} + \overline{A_2}, \overline{A_1 - A_2} = \overline{A_1} - \overline{A_2}$'dir.

(iii) $\overline{A_1 . A_2} = \overline{A_1} . \overline{A_2}$

(iv) $\overline{\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)} = \dfrac{\overline{A_1}}{\overline{A_2}}$,$A_2 \neq \left(0, x^*\right)$ dir.

(v) $\forall A \in \mathbb{D}$ için $A.\overline{A} = |A|_1^2$

(vi) $A + \overline{A} = 2\,Re(A)$ ve $\left(A - \overline{A}\right) = 2\varepsilon Du(A)$

İspat: (i) $\overline{A} = x - \varepsilon x^* \Rightarrow \overline{\left(\overline{A}\right)} = \overline{\left(x - \varepsilon x^*\right)} = x + \varepsilon x^* = A$

(ii) $\forall A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^* \in \mathbb{D}$

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{\left(a_1 + \varepsilon a_1^*\right) + \left(a_2 + \varepsilon a_2^*\right)} = \overline{\left(a_1 + a_2\right) + \varepsilon\left(a_1^* + a_2^*\right)} = \left(a_1 + a_2\right) - \varepsilon\left(a_1^* + a_2^*\right)$$

$$= \left(a_1 - \varepsilon a_1^*\right) + \left(a_2 - \varepsilon a_2^*\right) = \overline{A_1} + \overline{A_2}$$

$$\overline{A_1 - A_2} = \overline{\left(a_1 + \varepsilon a_1^*\right) - \left(a_2 + \varepsilon a_2^*\right)} = \overline{\left(a_1 - a_2\right) + \varepsilon\left(a_1^* - a_2^*\right)} = \left(a_1 - a_2\right) - \varepsilon\left(a_1^* - a_2^*\right)$$

$$= \left(a_1 - \varepsilon a_1^*\right) - \left(a_2 - \varepsilon a_2^*\right) = \overline{A_1} - \overline{A_2}$$

(iii) $\overline{A_1 . A_2} = \overline{\left(a_1 + \varepsilon a_1^*\right)\left(a_2 + \varepsilon a_2^*\right)} = \overline{a_1 a_2 + \varepsilon\left(a_1 a_2^* + a_1^* a_2\right)}$

$$= a_1 a_2 - \varepsilon\left(a_1 a_2^* + a_1^* a_2\right) \tag{6}$$

$$\overline{A_1} . \overline{A_2} = \left(a_1 - \varepsilon a_1^*\right)\left(a_2 - \varepsilon a_2^*\right) = a_1 a_2 - \varepsilon\left(a_1 a_2^* + a_1^* a_2\right) \tag{7}$$

(6) ve (7)'den $\overline{A_1 . A_2} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}$ olduğu elde edilir.

(iv) $\overline{\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)} = \overline{\left(\dfrac{a_1 + \varepsilon a_1^*}{a_2 + \varepsilon a_2^*}\right)} = \overline{\left(\dfrac{\left(a_1 + \varepsilon a_1^*\right)\left(a_2 - \varepsilon a_2^*\right)}{a_2^2}\right)}$

$$= \overline{\left(\frac{a_1 a_2 - \varepsilon\left(a_1 a_2^* - a_1^* a_2\right)}{a_2^2}\right)} = \frac{a_1}{a_2} + \varepsilon\left(\frac{a_1 a_2^* - a_1^* a_2}{a_2^2}\right) \tag{8}$$

$$\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_2}} = \frac{a_1 - \varepsilon a_1^*}{a_2 - \varepsilon a_2^*} = \frac{\left(a_1 - \varepsilon a_1^*\right)\left(a_2 + \varepsilon a_2^*\right)}{a_2^{\ 2}}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + \varepsilon\left(a_1 a_2^* - a_1^* a_2\right)}{a_2^{\ 2}} = \frac{a_1}{a_2} + \varepsilon\left(\frac{a_1 a_2^* - a_1^* a_2}{a_2^{\ 2}}\right) \tag{9}$$

(8) ve (9) 'den $\overline{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)} = \frac{\overline{A_1}}{\overline{A_2}}$,$A_2 \neq \left(0, a_2^*\right)$ olduğu elde edilir.

(v) $\forall A \in \mathbb{D}$ için $A.\overline{A} = \left(x + \varepsilon x^*\right)\left(x - \varepsilon x^*\right) = x^2 = |A|_1^2$

(vi) $A + \overline{A} = \left(x + \varepsilon x^*\right) + \left(x - \varepsilon x^*\right) = 2x = 2\,Re(A)$

$\left(A - \overline{A}\right) = \left(x + \varepsilon x^*\right) - \left(x - \varepsilon x^*\right) = 2\varepsilon x^* = 2\varepsilon Du(A)$ ■

Teorem 6 : $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu $f(A) = \overline{A}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f bir halka izomorfizmasıdır.

İspat: $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(A + B) = \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B} = f(A) + f(B)$

$f\left(A \cdot B\right) = \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B} = f\left(A\right) f\left(B\right)$

f birebirdir.

$A, B \in \mathbb{D}$ $\quad f(A) = f(B) \Rightarrow \overline{A} = \overline{B} \Rightarrow A = B$

f örtendir:

$\overline{A} = a - \varepsilon a^* \in \mathbb{D}$ dual sayısına bir tek $A = a + \varepsilon a^* \in \mathbb{D}$ karşılık gelir öyle ki $f(A) = \overline{A}$

dır. ■

1.10. Küme Üzerinde Grup Hareketi

Tanım 28: G bir grup ve K bir küme olsun. Bir $\varphi : G \times K \to K$ dönüşümü verilsin. $g \in G, x \in K$ için $\varphi\left(g, x\right) = gx$ şeklinde yazalım. $\forall g_1, g_2 \in G, x \in K$ için :

i) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$

ii) e, G' nin birimi olmak üzere $ex = x$

koşulları sağlanıyorsa φ ye G ' nin E üzerindeki hareketi(etkisi) denir. G' nin K üzerindeki hareketi $G:K$ ile gösterilir.

Örnek 17: $G=\{-1,1\}$ kümesini alalım. $(G,\cdot)$ bir grup $g\in G, x\in\mathbb{R}$ $\varphi(gx)=gx$, φ bir $\mathbb{R}$ etkidir.

Çözüm: *i)* $-1,1\in G$ ve $x\in\mathbb{R}$ $(-11)x=-1(1x)=-x$

ii) $1\in G$ $(G,\cdot)$'nın birimi ve $x\in\mathbb{R}$ alalım. $1x=x$ olup φ bir $\mathbb{R}$ etkidir.

Tanım 29: $\mathbb{D}=\left\{a+\varepsilon a^*, a, a^*\in\mathbb{R}\right\}$ dual sayılar kümesini alalım. Burada $a\neq 0$ olarak aldığımız tüm dual sayıları $\mathbb{D}_1$ ile yani $\mathbb{D}_1=\left\{a+\varepsilon a^*, a\neq 0, a, a^*\in\mathbb{R}\right\}$ biçiminde tanımlayalım. $\mathbb{D}_1=\left\{a+\varepsilon a^*, a\neq 0, a, a^*\in\mathbb{R}\right\}$ kümesi çarpma işlemine göre değişmeli bir grup olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Örnek 18: $\varphi:\mathbb{D}_1\times\mathbb{D}\to\mathbb{D}, H\in\mathbb{D}_1, A\in\mathbb{D}$ için $\varphi(H,A)=HA$ olarak yazalım. φ, $\mathbb{D}_1$'in $\mathbb{D}$ üzerindeki etkisidir.

Çözüm:

$i)$ $H_1=h_1+\varepsilon h_1^*, h_1\neq 0, H_2=h_2+\varepsilon h_2^*, h_2\neq 0, H_1, H_2\in\mathbb{D}_1$ ve $A=a+\varepsilon a^*, A\in\mathbb{D}$

alalım.

$$
\begin{aligned}
(H_1H_2)A &= \left[\left(h_1+\varepsilon h_1^*\right)\left(h_2+\varepsilon h_2^*\right)\right]\left(a+\varepsilon a^*\right)\\
&= \left[h_1h_2+\varepsilon\left(h_1h_2^*+h_1^*h_2\right)\right]\left(a+\varepsilon a^*\right)\\
&= h_1h_2a+\varepsilon\left(h_1h_2a^*+ah_1h_2^*+ah_1^*h_2\right) \text{ ve}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_1(H_2A) &= \left(h_1+\varepsilon h_1^*\right)\left[\left(h_2+\varepsilon h_2^*\right)\left(a+\varepsilon a^*\right)\right]\\
&= \left(h_1+\varepsilon h_1^*\right)\left[h_2a+\varepsilon\left(h_2a^*+h_2^*a\right)\right]\\
&= h_1h_2a+\varepsilon\left(h_1h_2a^*+ah_1h_2^*+ah_1^*h_2\right) \text{ olduğundan}
\end{aligned}
$$

$(H_1H_2)A=H_1(H_2A)$ elde edilir.

$ii)$ $e=1+0\varepsilon=1,$ $\mathbb{D}_1$'in birimi ve $A=a+\varepsilon a^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere,

$1\left(a+\varepsilon a^*\right)=a+\varepsilon a^*$ yani $1A=A$

1.11. Denk Vektörler Sistemi ve G-Yörünge

Tanım 30: $\mathbf{G}$ bir grup olmak üzere, G 'nin X üzerindeki etkisi verilmiş olsun. $x\in E, y\in E$ olsun. $\exists g\in G$ öyle ki $y=gx$ ise x elemanı y 'ye G -denktir denir ve bu durum $x\overset{G}{\sim}y$ ile gösterilir.

Önerme 12 : G grubunun X üzerindeki etkisi verilsin. Bu taktirde $\forall x,y\in X$ için $x\overset{G}{\sim}y$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: "$\sim$" bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetrik ve geçişli özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekir. Bunları gösterelim.

$i)$ $\forall x\in X$ için $x\sim x$' dir. $x\in X$ ve $g=e\in G$ alalım. $x=gx=ex$ olup $x\sim x$' dir.

$ii)$ $\forall x,y\in X$ için $x\sim y \Rightarrow y\sim x$' dir. $x,y\in X$ alalım. $x\sim y$ ise $\exists g\in G$ öyle ki $y=gx$' dir. Burada G grup olduğundan dolayı g^{-1} mevcuttur. O halde eşitliğin her iki tarafı $g^{-1}\in G$ ile çarpılırsa

$y=gx \Rightarrow g^{-1}y=g^{-1}gx \Rightarrow g^{-1}y=ex=x$ olup $y\sim x$' dir.

$iii)$ $\forall x,y,z\in X$ için $x\sim y$ ve $y\sim z \Rightarrow x\sim z$' dir. $x,y,z\in X$ alalım.

$x\sim y$ olduğundan $\exists g_1\in G$ öyle ki $y=g_1x$ 'dir. (10)

$y\sim z$ olduğundan $\exists g_2\in G$ öyle ki $x=g_2y$ 'dir. (11)

(11)' de y yerine (10) 'daki eşiti yazılırsa $z=g_2g_1x$' dir. Ancak $g_2g_1\in G$ olduğundan $x\sim z$' dir. Böylece "$\sim$" bağıntısının yansıma, simetrik ve geçişli özelliklerini sağladığından denklik bağıntısıdır. ■

Örnek 19 : $G=\{-1,1\}$ olsun. G grubunun $\mathbb{R}$ üzerindeki etkisini alalım. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ için $y=\mp x$ ise $x\overset{G}{\sim}y$' dir.

Çözüm : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $y = \mp x$ alalım.

Eğer $y = x$ ise $y = x = 1x$ ve $1 \in G$ olduğundan dolayı $x \overset{G}{\sim} y'$ dir.

Eğer $y = x$ ise $y = x = -1x$ ve $-1 \in G$ olduğundan dolayı $x \overset{G}{\sim} y'$ dir.

Örnek 20: $\mathbb{D} = \{a + \varepsilon a^*, a, a^* \in \mathbb{R}\}$ dual sayılar kümesini alalım. Burada $a \neq 0$ olarak aldığımız tüm dual sayıları $\mathbb{D}_1$ ile yani $\mathbb{D}_1 = \{a + \varepsilon a^*, a \neq 0, a, a^* \in \mathbb{R}\}$ biçiminde tanımlamıştık. $\mathbb{D}_1 = \{a + \varepsilon a^*, a \neq 0, a, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesinin çarpma işlemine göre değişmeli grup olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^* \in \mathbb{D}$ olsun. Eğer $a \neq 0, b \neq 0$ ise $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ denktir.

Çözüm : $B = H.A$, $b + \varepsilon b^* = (h + \varepsilon h^*)(a + \varepsilon a^*) = ha + \varepsilon(ha^* + h^* a)$

$ha = b$ ve $ha^* + h^* a = b^*$

$a \neq 0$ ve $\mathrm{b} \neq 0 \Rightarrow h = \dfrac{b}{a} \neq 0$ ve $h^* = \dfrac{b^* a - b a^*}{a^2}$ bulunur.

$H = h + \varepsilon h^*, h \neq 0, H \in \mathbb{D}_1$ bulunur. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ denktir.

Tanım 31: $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. $\exists g \in G$ için $y_\tau = g x_\tau, \forall \tau \in T$ ise bu vektör ailelerine G-denktir denir ve $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ ile gösterilir.

Önerme 13 : $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. Bu taktirde $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $i)$ $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{x_\tau, \tau \in T\}$ ‘dir. Gerçekten $g = e \in G$ alalım. $\forall \tau \in T$ için $x_\tau = e x_\tau$ ’dir. $'' \sim ''$ bağıntısı yansıyandır.

$ii)$ $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ olsun. O halde $\exists g \in G$ için $y_\tau = g x_\tau, \tau \in T$ ’dir. Burada G grup olduğundan dolayı g^{-1} mevcuttur. O halde eşitliğin her iki tarafı $g^{-1} \in G$ ile çarpılırsa $g^{-1} y_\tau = g^{-1} g x_\tau = x_\tau$, $\tau \in T$ ’dir. O halde $\{y_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{x_\tau, \tau \in T\}$ ’dir. $'' \sim ''$

bağıntısı simetriktir.

$iii)$ $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{z_\tau, \tau \in T\}$ olsun. O halde $\exists g_1 \in G$ için $y_\tau = g_1 x_\tau, \tau \in T$ ve $\exists g_2 \in G$ için $z_\tau = g_2 y_\tau, \tau \in T$ 'dir.

$z_\tau = g_2 y_\tau = g_2 (g_1 x_\tau) = g_2 g_1 x_\tau, \tau \in T$ ve G grup olduğundan dolayı $g = g_2 g_1 \in G$ 'dir. Yani $z_\tau = g x_\tau, \tau \in T$ 'dir. $"\sim"$ bağıntısı geçişgendir. O halde $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ bağıntısı denklik bağıntısıdır. ■

Tanım 32: Bir G grubunun bir X kümesi üzerinde etkisi verilsin. Bir $x \in X$ noktasının G yörüngesi $Gx = \{gx : g \in G\}$ olarak verilir.

Not: 1) Yörüngeler, G -denklik bağıntısının denklik sınıflarıdır.

2) İki yörüngenin arakesiti boş küme değilse yörüngeler çakışır. Arakesiti boş küme ise farklı yörüngelerdir.

Örnek 21: $G = \{-1,1\}$ ve $X = \mathbb{R}$ alalım. Bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının $G-$yörüngesi $Gx = \{\pm x, x \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Örnek 22: $\mathbb{D} = \{a + \varepsilon a^*, a, a^* \in \mathbb{R}\}$ dual sayılar kümesi ve

$\mathbb{D}_1 = \{a + \varepsilon a^*, a \neq 0, a, a^* \in \mathbb{R}\}$ grubunu alalım. $\mathbb{D} - \{\varepsilon a^*\}$, $\mathbb{D}_1 -$yörünge'dir.

Çözüm : $A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*, \forall A, B \in \mathbb{D} - \{\varepsilon a^*\}$ alalım. $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ 'dir.

$A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^* \in \mathbb{D} - \{\varepsilon a^*\}$ ise $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ dır.

$$B = HA \Rightarrow b + \varepsilon b^* = (h + \varepsilon h^*)(a + \varepsilon a^*) = ha + \varepsilon(ha^* + h^* a)$$

$$b = ha, b \neq 0, a \neq 0 \Rightarrow h \neq 0$$

$b^* = ha^* + h^* a \Rightarrow h^* = \dfrac{b^* a - b a^*}{a^2}$ bulunur. O halde $H = \dfrac{b}{a} + \varepsilon \dfrac{b^* a - b a^*}{a^2} \in \mathbb{D}_1$ bulunur. Bu bize keyfi $A,B \in \mathbb{D}-\left\{\varepsilon a^*\right\}$ gibi iki elemanın $\mathbb{D}_1$ – denk olduğunu gösterir. O halde

$\mathbb{D}-\left\{\varepsilon a^*, a^* \in \mathbb{R}\right\}$ kümesi bir $\mathbb{D}_1$ - yörünge ’dir.

1.12. G-İnvaryant Fonksiyon

Tanım 33: G bir grup olmak üzere, G'nin E üzerindeki etkisini alalım. f, E üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir reel fonksiyon olsun. $\forall g \in G$ için $f\left(gx\right)=f\left(x\right), \forall x \in E$ ise f, fonksiyona G -invaryant denir.

Örnek 23: $G=\{-1,1\}$ kümesini alalım $(G,\cdot)$ bir grup ve G ’nin $\mathbb{R}$ üzerindeki etkisini alalım. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2$, f, G – invaryanttır.

Çözüm : $1 \in G$, $x \in \mathbb{R}$ için $f\left(1x\right)=f\left(x\right)=x^2$ ve $-1 \in G$, $x \in \mathbb{R}$ için $f\left(-1x\right)=f\left(-x\right)=\left(-x\right)^2=x^2=f\left(x\right)$ bulunur. f, G – invaryanttır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Bir Dual Sayının 2. Tip Mutlak değeri

Tanım 34: $A = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının 2. tip mutlak değeri $|A|_2 = |x + \varepsilon x^*|_2 = x$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 14: $A = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayı ve $|A|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 'dır.

İspat: $(\Rightarrow) |A|_2 = 0$ olsun.

$|A|_2 = 0 \Rightarrow |A|_2 = |x + \varepsilon x^*|_2 = x = 0$

$(\Leftarrow)$ $x = 0$ olsun.

$x = 0 \Rightarrow 0 = x = |x + \varepsilon x^*|_2 \Rightarrow |A|_2 = 0$ ■

Önerme 15: $A = x + \varepsilon x^*, B = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ iki dual sayı ise $|A|_2 = |B|_2 \Rightarrow x = y$ 'dir.

İspat: $|A|_2 = |B|_2$ olsun. $|A|_2 = |B|_2 \Rightarrow |x + \varepsilon x^*|_2 = |y + \varepsilon y^*|_2 \Rightarrow x = y$ 'dir. ■

Önerme 16: $A = x + \varepsilon x^*, B = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ iki dual sayı ise $|A + B|_2 = |A|_2 + |B|_2$ 'dir.

İspat: $|A + B|_2 = |(x + y) + \varepsilon(x^* + y^*)|_2 = x + y = |A|_2 + |B|_2$ ■

Önerme 17: $A = x + \varepsilon x^*, B = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ iki dual sayı ise $|A - B|_2 = |A|_2 - |B|_2$ 'dir.

İspat: $|A - B|_2 = |(x - y) + \varepsilon(x^* - y^*)|_2 = x - y = |A|_2 - |B|_2$ ■

Önerme 18: $A = x + \varepsilon x^*, B = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ iki dual sayı ise $|AB|_2 = |A|_2 |B|_2$ 'dir.

İspat: $|AB|_2 = |xy + \varepsilon(x^* y + xy^*)|_2 = xy = |A|_2 |B|_2$ ■

Önerme 19: $A = x + \varepsilon x^*, B = y + \varepsilon y^*, y \neq 0$ iki dual sayı ise $\left|\frac{A}{B}\right|_2 = \frac{|A|_2}{|B|_2}$ 'dir.

İspat: $y \neq 0$ olduğundan B^{-1} mevcut olup buradan,

$\left|\frac{A}{B}\right|_2 |B|_2 = \left|\frac{AB}{B}\right|_2 = \left|ABB^{-1}\right|_2 = |A|_2$ elde edilir. Şimdi her iki tarafı $|B|_2$ ile bölersek $\left|\frac{A}{B}\right|_2 = \frac{|A|_2}{|B|_2}$ olarak bulunur. ■

Önerme 20: $A = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ bir dual sayı ise $A\overline{A} = |A|_2^{\,2}$'dir.

İspat: $A\overline{A} = (x+\varepsilon y)(x-\varepsilon y) = x^2 = xx = |A|_2 |A|_2 = |A|_2^{\,2}$'dir. ■

2.2. $\mathbb{D}_1$ Grubu

Teorem 7: $\mathbb{D}_1 = \left\{a+\varepsilon a^*, a \neq 0, a, a^* \in \mathbb{R}\right\}$ kümesi çarpma işlemine göre değişmeli gruptur.

İspat: 1) Kapalılık:

$A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^* \in \mathbb{D}_1$ alalım $AB = ab + \varepsilon\left(ab^* + a^* b\right) \in \mathbb{D}_1$ olduğunu gösterelim. $A, B \in \mathbb{D}_1$ olduğundan dolayı $a \neq 0, b \neq 0$ dır. $AB = ab + \varepsilon\left(ab^* + a^* b\right)$ ve $a \neq 0, b \neq 0$ olduğundan dolayı $ab \neq 0$ dır. O halde $AB \in \mathbb{D}_1$ dir.

2) Birleşme özelliği:

$A, B, C \in \mathbb{D}_1$ alalım.

$$(AB)C = \left[(a+\varepsilon a^*)(b+\varepsilon b^*)\right]\left(c+\varepsilon c^*\right) = \left[ab+\varepsilon(ab^*+a^*b)\right]\left(c+\varepsilon c^*\right)$$

$$=\text{abc}+\varepsilon(ab^*c+a^*bc+abc^*) \text{ ve}$$

$$A(BC) = (a+\varepsilon a^*)\left[(b+\varepsilon b^*)\left(c+\varepsilon c^*\right)\right] = (a+\varepsilon a^*)\left[bc+\varepsilon(b^*c+\varepsilon bc^*)\right]$$

$$=\text{abc}+\varepsilon(ab^*c+a^*bc+abc^*)$$

elde edilir. Yani $(AB)C = A(BC)$ dır.

3) Birim eleman özelliği:

$AX = XA = A$ olsun.

$AX = (a+\varepsilon a^*)(x+\varepsilon a^*) = ax + \varepsilon(ax^* + a^* x) = a + \varepsilon a^*$ ve

$XA = (x+\varepsilon x^*)(a+\varepsilon a^*) = ax + \varepsilon(ax^* + a^* x) = a + \varepsilon a^*$ ’ın eşitliğinden

$\Rightarrow ax = a$ bulunur ve $a \neq 0$ olduğundan $x = 1$ elde edilir. Ayrıca

$ax^* + a^* x = a^*$, $x = 1$ ve $a \neq 0$ olduğundan $x^* = 0$ dolayısıyla $X = 1 = (1,0) \in \mathbb{D}_1$ ’dir

4) Ters eleman özelliği:

$AX = XA = 1$ alalım. Yani, $AX = ax + \varepsilon(ax^* + a^* x) = 1, ax = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{a}, a \neq 0$

$ax^* + a^* x = 0$ ve $x = \dfrac{1}{a} \Rightarrow x^* = -\dfrac{a^*}{a^2} \Rightarrow A^{-1} = X = \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{a^*}{a^2}\right) \in \mathbb{D}_1$ olarak elde edilir.

5) Değişme Özelliği:

$AB = (a+\varepsilon a^*)(b+\varepsilon b^*) = ab + \varepsilon(ab^* + a^* b) = ba + \varepsilon(b^* a + ba^*) = BA$ ■

2.3. $G\mathbb{D}_1$ Grubu

Tanım 35 : $a \neq 0, H = a + \varepsilon a^* \in \mathbb{D}_1$ sayısına karşılık gelen matrislerin kümesini

$G\mathbb{D}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}, a \neq 0, a, a^* \in \mathbb{R} \right\}$ ile tanımlayalım.

2.4. $\mathbb{D}_1$ ile $G\mathbb{D}_1$ Grupları Arasındaki Bağlantı

Önerme 21: $a \neq 0, H = a + \varepsilon a^* \in \mathbb{D}_1$ olmak üzere

$f : \mathbb{D}_1 \to G\mathbb{D}_1$, $f(H) = f(a, a^*) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan f fonksiyonu bir grup izomorfizmasıdır.

İspat: $A,B\in\mathbb{D}_1$ olmak üzere

$$f(A+\mathrm{B})=f\left(a+b,a^*+b^*\right)=f\left(a+b+\varepsilon\left(a^*+b^*\right)\right)=\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a^*+b^* & a+b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b\end{bmatrix}=f\left(A\right)+f\left(B\right) \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca $f\left(AB\right)=f\left(A\right)f\left(B\right)$ dir.

$$f\left(AB\right)=f\left(\left(a,a^*\right)\left(b,b^*\right)\right)=f\left(ab,ab^*+a^*b\right)$$

$$=\begin{bmatrix} ab & 0 \\ ab^*+a^*b & ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b\end{bmatrix}=f\left(A\right)f\left(B\right) \text{ ve sonuç olarak}$$

$f\ (AB)=f\left(A\right)f\left(\mathrm{B}\right)$ elde edilir.

f birebirdir. Gerçekten $A\neq B$ ise $f(A)\neq f(B)$ dir. Gerçekten $A=\left(a,a^*\right)$ ve $B=\left(b,b^*\right)\in\mathbb{D}$ için $A\neq B$ ise $a\neq b$ veya $a^*\neq b^*$ dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} b & 0 \\ b^* & b\end{bmatrix}$ ve $f(A)\neq f(B)$ dir.

f örtendir. Gerçekten $G\mathbb{D}_1$ deki her bir $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a^* & a\end{bmatrix}$ matrisi $\mathbb{D}$ deki bir tek $A=\left(a,a^*\right)$ dual sayısının f ile ifade edilmiş bir görüntüsüdür. O halde $\mathbb{D}_1$ ile $G\mathbb{D}_1$ izomorftur. ■

2.5. $\mathbb{D}_1-$Denklik problemi

Tanım 36: $A,B\in\mathbb{D}$ olsun. Eğer $B=HA$ olacak şekilde $H\in\mathbb{D}_1$ varsa A ve B elemanları $\mathbb{D}_1-$denk denir ve $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ şeklinde yazılır.

Önerme 22: $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıyan, simetri ve geçişmenin var olduğunu göstermeliyiz.

i. Yansıyan: $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} A$ olması için $A = gA$ olacak şekilde $g \in \mathbb{D}_1$ olduğu gösterilmeli.

$g = 1$ için $A = 1A$ ve $1 \in \mathbb{D}_1$ olduğundan $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} A$ dir.

ii. Simetri: $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. Göstermeliyiz ki $B \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} A$ dir. $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olduğundan $B = gA$ olacak şekilde $g = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1, h \neq 0$ vardır. $h \neq 0$ olduğundan dolayı $\exists g^{-1} \in \mathbb{D}_1$,

$g^{-1} = \dfrac{1}{h} - \varepsilon \dfrac{h^*}{h^2}$, $h \neq 0$'dır olup $B \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} A$'dır.

iii. Geçişme: $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ ve $B \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} C$ olsun. Göstermeliyiz ki $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} C$ dir. $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olduğundan $B = g_1 A$ olacak şekilde $g_1 \in \mathbb{D}_1$ ve $B \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} C$ olduğundan $C = g_2 B$ olacak şekilde $g_2 \in \mathbb{D}_1$ vardır. $C = g_2 B = g_2 \left(g_1 A \right) = g_2 g_1 A$ ve $\mathbb{D}_1$ grup olduğundan dolayı $g_2 g_1 \in \mathbb{D}_1$'dir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} C$ dir. ■

Teorem 8: $A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^* \in \mathbb{D}$ olsun. Eğer

1. $a \neq 0, b = 0$ ise $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

2. $a = 0, b \neq 0$ ise $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

3. $a \neq 0, b \neq 0$ ise $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir.

4. $a = 0$, $b = 0$ durumunda dört durum söz konusudur.

4.1 $a^* \neq 0, b^* \neq 0 \Rightarrow A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir.

4.2 $a^* = 0, b^* \neq 0 \Rightarrow A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

4.3 $a^* \neq 0, b^* = 0 \Rightarrow A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir

4.4 $a^* = 0, b^* = 0 \Rightarrow A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir.

İspat: $B = HA$, $b + \varepsilon b^* = (h + \varepsilon h^*)(a + \varepsilon a^*) = ha + \varepsilon(ha^* + h^* a)$

$ha = b$ ve $ha^* + h^* a = b^*$ $\qquad (1)$

1. Eğer $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise (1) eşitliklerinden $b = 0$ olup çelişki elde edilir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ denk değildir.

2. Eğer $a \neq 0$ ve $b = 0$ ise (1) eşitliklerinden $h = 0$ olup buda bir çelişkidir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

3. $a \neq 0$ ve $\mathrm{b} \neq 0$ olsun (1) eşitliklerinden ;

$h = \dfrac{b}{a}$ ve $h^* = \dfrac{b^* a - b a^*}{a^2}$ bulunur. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir.

4. $a = 0$ ve b=0 için

4.1 $a^* \neq 0, b^* \neq 0$ ise (1) eşitliklerinden $h = \dfrac{b^*}{a^*} \neq 0$ bulunur. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir.

4.2 $a^* = 0, b^* \neq 0$ ise (1) eşitliklerinden $h = 0$ çelişki elde edilir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

4.3 $a^* \neq 0, b^* = 0$ ise (1) eşitliklerinden $b^* = 0$ çelişki elde edilir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

4.4 $a^* = 0, b^* = 0$ ise (1) eşitlikleri sağlanıyor. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir. ■

Sonuç 9: $\mathbb{D} \setminus \{\varepsilon a^*, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{D}_1 -$yörüngedir.

Sonuç 10: $\{\varepsilon a^*, a^* \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}$ kümesi $\mathbb{D}_1 -$yörüngedir.

Sonuç 11: $\{0\}$ kümesi $\mathbb{D}_1 -$yörüngedir.

Tanım 37: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ öyle ki $\forall H \in \mathbb{D}_1$ ve $\forall A \in \mathbb{D}$ için $f(HA) = f(A)$ ise f'ye $\mathbb{D}_1 -$invaryant fonksiyon denir.

Önerme 23: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{D}_1 -$invaryant invaryant fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu her $\mathbb{D}_1 -$yörüngede sabittir.

İspat: S **,** $\mathbb{D}_1$'in bir yörüngesi olsun yani $\exists x\in\mathbb{D}$ öyleki $S=\{Ax, A\in\mathbb{D}_1\}$'dir. Keyfi $Ax\in S$ ve f $\mathbb{D}_1-$invaryant fonksiyon olduğundan $f(Ax)=f(x)$ keyfi $A\in\mathbb{D}_1$'dir. Özel olarak $\mathbb{D}_1$'in $\mathbb{D}$'deki etkisinde sadece üç yörünge olduğundan $\exists c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ öyleki

1) $f(A)=c_1, \forall A\in\mathbb{D}\backslash\{\varepsilon a^*, a^*\in\mathbb{R}\}$

2) $f(A)=c_2, \forall A\in\{\varepsilon a^*\}\backslash\{0\}$

3) $f(A)=c_3, A=0$'dır.

Tanım 38: Eğer $\{A_1,A_2\}$ ve $\{B_1,B_2\}$ öyle ki $B_1=HA_1, B_2=HA_2$ olacak şekilde $H\in\mathbb{D}_1$ varsa $A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\}$ sistemine $\mathbb{D}_1$ denktir denir ve $\{A_1,A_2\}\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}\{B_1,B_2\}$ ile gösterilir.

Tanım 39: $f:\mathbb{D}^2\to\mathbb{D}$ öyle ki $\forall H\in\mathbb{D}_1$ ve $\forall A_1,A_2\in\mathbb{D}$ için $f(HA_1,HA_2)=f(A_1,A_2)$ ise f'ye $\mathbb{D}_1-$invaryant fonksiyon denir.

Teorem 9: $\{A_1,A_2\}$ **,** $A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, a_1\neq 0,\ A_2=a_2+\varepsilon a_2^*$ olsun. Bu takdirde $f(A_1,A_2)=A_1^{-1}A_2$ fonksiyonu $\mathbb{D}_1-$invaryanttır ve $A_1^{-1}A_2=\dfrac{a_2}{a_1}+\varepsilon\left(\dfrac{a_1a_2^*-a_1^*a_2}{a_1^2}\right)$'dir.

İspat: $\mathbb{D}_1$ grubunun $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi üzerindeki hareketini alalım. $A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, a_1\neq 0,\ A_2=a_2+\varepsilon a_2^*$ olmak üzere $f(A_1,A_2)=A_1^{-1}A_2$ ile verilen f'de $\mathbb{D}_1-$ invaryanttır. Gerçekten, $\forall H\in\mathbb{D}_1$ için,

$f(HA_1,HA_2)=(HA_1)^{-1}HA_2=H^{-1}A_1^{-1}HA_2=A_1^{-1}H^{-1}HA_2=A_1^{-1}A_2=f(A_1,A_2)$ elde edilip istenen sağlanır.

Şimdi $A_1^{-1}A_2=\dfrac{a_2}{a_1}+\varepsilon\left(\dfrac{a_1a_2^*-a_1^*a_2}{a_1^2}\right)$ olduğunu gösterelim. $a_1\neq 0$ olduğundan A_1^{-1} mevcuttur. O halde $A_1^{-1}=\dfrac{1}{a_1+\varepsilon a_1^*}=\dfrac{a_1-\varepsilon a_1^*}{(a_1+\varepsilon a_1^*)(a_1-\varepsilon a_1^*)}=\dfrac{a_1-\varepsilon a_1^*}{a_1^2}=\dfrac{1}{a_1}-\varepsilon\dfrac{\varepsilon a_1^*}{a_1^2}$

bulunur. $A_1^{-1}A_2=\left(\frac{1}{a_1}-\varepsilon\frac{a_1^*}{a_1^2}\right)\left(a_2+\varepsilon a_2^*\right)=\frac{a_2}{a_1}+\varepsilon\left(\frac{a_2}{a_1}-\frac{a_2a_1^*}{a_1^2}\right)=\frac{a_2}{a_1}+\varepsilon\left(\frac{a_1a_2^*-a_1^*a_2}{a_1^2}\right)$ olup istenilen elde edilir. ■

Teorem 10: $A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\}$, $A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, a_1\neq 0,\ A_2=a_2+\varepsilon a_2^*$, $B_1=b_1+\varepsilon b_1^*, b_1\neq 0,\ B_2=b_2+\varepsilon b_2^*\in\mathbb{D}$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B \Leftrightarrow A_1^{-1}A_2=B_1^{-1}B_2$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. Bu takdirde

$B_1=HA_1\Rightarrow\left(b_1+\varepsilon b_1^*\right)=\left(h+\varepsilon h^*\right)\left(a_1+\varepsilon a_1^*\right)=ha_1+\varepsilon\left(ha_1^*+h^*a_1\right)$
$B_2=HA_2\Rightarrow\left(b_2+\varepsilon b_2^*\right)=\left(h+\varepsilon h^*\right)\left(a_2+\varepsilon a_2^*\right)=ha_2+\varepsilon\left(ha_2^*+h^*a_2\right)$ olacak şekilde

$h\neq 0, H=h+\varepsilon h^*\in\mathbb{D}_1$ vardır. $B_1=HA_1,\ a_1\neq 0,\ A_1^{-1}$ mevcuttur.

$B_1A_1^{-1}=HA_1A_1^{-1}\Rightarrow H=B_1A_1^{-1}$ bulunur.

$B_2=HA_2=B_1A_1^{-1}A_2=B_1A_2A_1^{-1}$, ($b_1\neq 0$ olduğundan B_1^{-1} mevcut)

$B_1^{-1}B_2=B_1^{-1}B_1A_2A_1^{-1}\Rightarrow B_1^{-1}B_2=A_2A_1^{-1}$ ya da

$\Rightarrow B_1^{-1}B_2=A_1^{-1}A_2$ şeklinde yazılabilir.

$(\Leftarrow)$ $B_1^{-1}B_2=A_1^{-1}A_2$ olsun. $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olduğunu gösterelim.

$H=A_1^{-1}B_1$ alalım. Şimdi $H\in\mathbb{D}_1$ olduğunu gösterelim.

$$A_1^{-1}=\frac{1}{a_1+\varepsilon a_1^*}=\frac{a_1-\varepsilon a_1^*}{\left(a_1+\varepsilon a_1^*\right)\left(a_1-\varepsilon a_1^*\right)}=\frac{1}{a_1}-\varepsilon\frac{a_1^*}{a_1^2}$$

$A_1^{-1}=\frac{1}{a_1}-\varepsilon\frac{a_1^*}{a_1^2}, a_1\neq 0$ bulunur.

$H=A_1^{-1}B_1=\left(\frac{1}{a_1}-\varepsilon\frac{a_1^*}{a_1^2}\right)\left(b_1+\varepsilon b_1^*\right)=\frac{b_1}{a_1}+\varepsilon\left(\frac{b_1^*}{a_1}-\frac{a_1^*b_1}{a_1^2}\right), a_1\neq 0, b\neq 0$ olduğundan dolayı $\frac{b_1}{a_1}\neq 0$ olur. O halde $H\in\mathbb{D}_1$'dir.

$H=A_1^{-1}B_1\Rightarrow A_1H=A_1A_1^{-1}B_1=B_1\Rightarrow B_1=HA_1$'dir.

$B_1^{-1}B_2=A_1^{-1}A_2$ eşitliğinden ve $B_1A_1^{-1}=A_1^{-1}B_1$ ($\mathbb{D}_1$ değişmeli olduğundan)

$B_2=B_1A_1^{-1}A_2=A_1^{-1}B_1A_2=HA_2\Rightarrow B_2=HA_2$'dir. O halde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$'dir. ■

Teorem 11: $A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\}$, $A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, A_2=a_2+\varepsilon a_2^*, a_2\neq 0$,

$B_1=b_1+\varepsilon b_1^*\ B_2=b_2+\varepsilon b_2^*\in\mathbb{D}, b_2\neq 0$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B \Leftrightarrow A_2^{-1}A_1=B_2^{-1}B_1$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. Bu takdirde

$B_1=HA_1\Rightarrow\left(b_1+\varepsilon b_1^*\right)=\left(h+\varepsilon h^*\right)\left(a_1+\varepsilon a_1^*\right)=ha_1+\varepsilon\left(ha_1^*+h^*a_1\right)$

$B_2=HA_2\Rightarrow\left(b_2+\varepsilon b_2^*\right)=\left(h+\varepsilon h^*\right)\left(a_2+\varepsilon a_2^*\right)=ha_2+\varepsilon\left(ha_2^*+h^*a_2\right)$ olacak şekilde

$H=h+\varepsilon h^*\in\mathbb{D}_1$ vardır.

$a_2\neq 0$ olduğundan A_2^{-1} mevcuttur. $B_2=HA_2$ eşitliğinin her iki tarafı sağdan A_2^{-1} ile çarpılırsa $B_2A_2^{-1}=HA_2A_2^{-1}\Rightarrow H=B_2A_2^{-1}$ bulunur.

$B_1=HA_1=B_2A_2^{-1}A_1=B_2A_1A_2^{-1}$, ($b_2\neq 0$ olduğundan B_2^{-1} mevcut)

$B_2^{-1}B_1=B_2^{-1}B_2A_1A_2^{-1}=A_1A_2^{-1}=A_2^{-1}A_1$

$\Rightarrow B_2^{-1}B_1=A_2^{-1}A_1$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $B_2^{-1}B_1=A_2^{-1}A_1$ olsun. $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olduğunu gösterelim.

$H=A_2^{-1}B_2$ alalım. $H\in\mathbb{D}_1$ olduğunu gösterelim.

$$A_2^{-1}=\frac{1}{a_2+\varepsilon a_2^*}=\frac{a_2-\varepsilon a_2^*}{\left(a_2+\varepsilon a_2^*\right)\left(a_2-\varepsilon a_2^*\right)}=\frac{a_2}{a_2^2}-\varepsilon\frac{a_2^*}{a_2^2}=\frac{1}{a_2}-\varepsilon\frac{a_2^*}{a_2^2}\ ,\ a_2\neq 0$$

olduğundan $A_2^{-1}=\dfrac{1}{a_2}-\varepsilon\dfrac{a_2^*}{a_2^2}$ bulunur.

$H=A_2^{-1}B_2=\left(\dfrac{1}{a_2}-\varepsilon\dfrac{a_2^*}{a_2^2}\right)\left(b_2+\varepsilon b_2^*\right)=\dfrac{b_2}{a_2}+\varepsilon\left(\dfrac{b_2^*}{a_2}-\dfrac{a_2^*b_2}{a_2^2}\right)$ bulunur. $a_2\neq 0, b_2\neq 0$

olduğundan dolayı $\dfrac{b_2}{a_2}\neq 0$'dır. O halde $H\in\mathbb{D}_1$'dir.

$H=A_2^{-1}B_2\Rightarrow A_2H=A_2A_2^{-1}B_2=B_2\Rightarrow B_2=HA_2$'dir.

$B_2^{-1}B_1=A_2^{-1}A_1$ eşitliğinden ve $B_2A_2^{-1}=A_2^{-1}B_2$ ($\mathbb{D}_1$ değişmeli olduğundan)

$B_1=B_2A_2^{-1}A_1=A_2^{-1}B_2A_1=HA_1\Rightarrow B_1=HA_1$'dir. O halde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$'dir. ■

Önerme 24: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$, $B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*$, $B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* = 0, b_1^* = 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow A_2 \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B_2$ 'dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1, B_2 = HA_2$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ vardır.
$B_1 = HA_1 \Rightarrow (b_1 + \varepsilon b_1^*) = (h + \varepsilon h^*)(a_1 + \varepsilon a_1^*) = ha_1 + \varepsilon (ha_1^* + h^* a_1)$ ve
$B_2 = HA_2 \Rightarrow (b_2 + \varepsilon b_2^*) = (h + \varepsilon h^*)(a_2 + \varepsilon a_2^*) = ha_2 + \varepsilon (ha_2^* + h^* a_2)$ eşitliklerinden sonra

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = ha_1 \\ b_2 = ha_2 \\ b_1^* = ha_1^* + h^* a_1 \\ b_2^* = ha_2^* + h^* a_2 \end{array}\right\} \text{ elde edilir.} \qquad (1)$$

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0, b_1 = 0 \\ a_1^* = 0, b_1^* = 0 \end{array}\right\}$ olduğundan dolayı $b_2 = ha_2$ ve $b_2^* = ha_2^* + h^* a_2$ bulunur. Bu ise A ve B 'lerin $\mathbb{D}_1 -$denklik problemini A_2 ve B_2 'nin $\mathbb{D}_1 -$denklik problemine indirir.

$(\Leftarrow)$ $A_2 \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B_2$ olsun. O halde $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ vardır. $A_1 = B_1 = 0$ olduğundan dolayı $B_1 = HA_1$ bulunur. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olur. ■

Teorem 12 : $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*$, $B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow b_1^* b_2^{-1} = a_1^* a_2^{-1}$ 'dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. Bu takdirde

$$B_1 = HA_1 \Rightarrow (b_1 + \varepsilon b_1^*) = (h + \varepsilon h^*)(a_1 + \varepsilon a_1^*) = ha_1 + \varepsilon (ha_1^* + h^* a_1)$$

$B_2 = HA_2 \Rightarrow (b_2 + \varepsilon b_2^*) = (h + \varepsilon h^*)(a_2 + \varepsilon a_2^*) = ha_2 + \varepsilon (ha_2^* + h^* a_2)$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. Buna göre yukarıdaki (1) eşitliklerinden $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ olduğundan dolayı

$b_2 = ha_2, b_1^* = ha_1^*, b_2^* = ha_2^* + h^* a_2$ elde edilir. Buradan $h = \dfrac{b_2}{a_2}, a_2 \neq 0$ bulunur.

$h = \dfrac{b_2}{a_2}$ değeri $b_1^* = ha_1^*$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$b_1^* = \dfrac{b_2}{a_2} a_1^* \Rightarrow b_1^* a_2 = b_2 a_1^*, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0 \Rightarrow b_2^{-1} b_1^* a_2 a_2^{-1} = b_2^{-1} b_2 a_1^* a_2^{-1} \Rightarrow b_2^{-1} b_1^* = a_1^* a_2^{-1}$
ve $b_2^{-1}, b_1^* \in \mathbb{R}$ olduğundan $b_1^* b_2^{-1} = a_1^* a_2^{-1}$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $b_1^* b_2^{-1} = a_1^* a_2^{-1}$ olsun. $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olduğunu gösterelim.

$b_1^* b_2^{-1} = a_1^* a_2^{-1} \Rightarrow a_1^* \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, b_1^* \neq 0$ olduğundan $\dfrac{b_1^*}{a_1^*} = \dfrac{b_2}{a_2} \neq 0$ bulunur.

$h = \dfrac{b_1^*}{a_1^*} = \dfrac{b_2}{a_2}$ ve $h^* = \dfrac{b_2^* a_2 - b_2 a_2^*}{a_2^2}, a_2 \neq 0$ olarak seçelim. $H = \dfrac{b_1^*}{a_1^*} + \varepsilon h^* = \dfrac{b_2}{a_2} + \varepsilon h^*$

olduğunda $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olur. Gerçekten

$$B_1 = HA_1 \Rightarrow \varepsilon b_1^* = \left(\frac{b_1^*}{a_1^*} + \varepsilon h^* \right) \varepsilon a_1^* = \frac{b_1^*}{a_1^*} \varepsilon a_1^* + \varepsilon h^* \varepsilon a_1^* = \varepsilon b_1^*$$

$$B_2 = HA_2 \Rightarrow b_2 + \varepsilon b_2^* = \left(\frac{b_2}{a_2} + \varepsilon \frac{b_2^* a_2 - b_2 a_2^*}{a_2^2} \right) \left(a_2 + \varepsilon a_2^* \right)$$

$$= \frac{b_2}{a_2} a_2 + \varepsilon \left(\frac{b_2}{a_2} a_2^* + \frac{b_2^* a_2 - b_2 a_2^*}{a_2^2} a_2 \right) = b_2 + \varepsilon b_2^*$$ bulunur. O

halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olur. ■

Teorem 13: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_2 = 0, b_2 = 0$, $a_1^* \neq 0$, $a_2^* \neq 0$, $b_1^* \neq 0$, $b_2^* \neq 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow a_1^* a_2^{*^{-1}} = b_1^* b_2^{*^{-1}}$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ (1) eşitliklerinde $a_1 = 0, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 0$, $a_1^* \neq 0$, $a_2^* \neq 0$, $b_1^* \neq 0$, $b_2^* \neq 0$ alındığında $b_1^* = ha_1^* \Rightarrow b_1^* a_1^{*^{-1}} = ha_1^* a_1^{*^{-1}} = h \Rightarrow h = b_1^* a_1^{*^{-1}}$ (2)

$b_2^* = ha_2^* \Rightarrow b_2^* a_2^{*^{-1}} = ha_2^* a_2^{*^{-1}} = h \Rightarrow h = b_2^* a_2^{*^{-1}}$ (3)

(2) ve (3) den $b_1^* a_1^{*^{-1}} = b_2^* a_2^{*^{-1}}$’dir.

$b_1^* a_1^{*^{-1}} = b_2^* a_2^{*^{-1}} \Rightarrow b_2^{*^{-1}} b_1^* a_1^{*^{-1}} a_1 = b_2^{*^{-1}} b_2^* a_2^{*^{-1}} a_1 \Rightarrow b_2^{*^{-1}} b_1^* = a_2^{*^{-1}} a_1$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $b_2^{*^{-1}} b_1^* = a_2^{*^{-1}} a_1$ olsun.

$$b_2^{*^{-1}} b_1^* = a_2^{*^{-1}} a_1^* \Rightarrow a_2^* b_2^* b_2^{*^{-1}} b_1^* = a_2^* b_2^* a_2^{*^{-1}} a_1^* = b_2^* a_2^* a_2^{*^{-1}} a_1^* \Rightarrow a_2^* b_1^* = b_2^* a_1^*$$

$$\Rightarrow \frac{b_1^*}{a_1^*} = \frac{b_2^*}{a_2^*} \tag{4}$$

$H = \dfrac{b_1^*}{a_1^*} + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ alalım. Bu takdirde $B_1 = HA_1$ 'dir. Gerçekten;

$$\varepsilon b_1^* = \left(\frac{b_1^*}{a_1^*} + \varepsilon h^* \right) \varepsilon a_1^* \Rightarrow B_1 = HA_1$$

(4) eşitliğinden $H = \dfrac{b_2^*}{a_2^*} + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ dir. Gerçekten $\varepsilon b_2^* = \left(\dfrac{b_2^*}{a_2^*} + \varepsilon h^* \right) \varepsilon a_2^* \Rightarrow B_2 = HA_2$ 'dir.

Buradan $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ 'dir. ■

Önerme 25 : $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 \neq 0, b_1 = 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1 \neq 0, b_1 = 0$ alındığında $b_1 \neq 0$ bulunur. Bu ise $b_1 = 0$ olması ile çelişir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. ■

Önerme 26: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*$, $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 \neq 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1 = 0, b_1 \neq 0$ alındığında $b_1 = 0$ bulunur. Bu ise $b_1 \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. ■

Önerme 27 : $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$,

$A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_2 \neq 0, b_2 = 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_2 \neq 0, b_2 = 0$ alındığında $a_2 = 0$ bulunur. Bu ise $a_2 \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. ■

Önerme 28: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*$, $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_2 = 0, b_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_2 = 0, b_2 \neq 0$ alındığında $b_2 = 0$ bulunur. Bu ise $b_2 \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. ■

Önerme 29 : $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$,

$A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$ ve $a_1^* \neq 0, b_1^* = 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* = 0$ alındığında $a_1^* = 0$ bulunur. Bu ise $a_1^* \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. ■

Önerme 30 : $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$,

$A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$ ve $a_1^* = 0, b_1^* \neq 0$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1^* = 0, b_1^* \neq 0$ alınırsa $b_1^* = 0$ bulunur. Bu ise $b_1^* \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ değildir. ■

Önerme 31 : $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D},$ $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0$, $a_2 \neq 0, b_2 = 0$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1 = 0, b_1 = 0,$ $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0$, $a_2 \neq 0, b_2 = 0$ alınırsa $a_2 = 0$ bulunur. Bu ise $a_2 \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ değildir. ■

Önerme 32: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*,$ $B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D},$ $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0$, $a_2 = 0, b_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0$, $a_2 = 0, b_2 \neq 0$ alınırsa $b_2 = 0$ elde edilir. Bu ise $b_2 \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ değildir. ■

Önerme 33: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*, B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D},$ $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0$, $a_2 = 0, b_2 = 0$, $a_2^* \neq 0, b_2^* = 0$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1 = 0, b_1 = 0$, $a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0$, $a_2 = 0, b_2 = 0$,

$a_2^* \neq 0, b_2^* = 0$ alınırsa $a_2^* = 0$ bulunur. Bu ise $a_2^* \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. ■

Önerme 34: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*,\ B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$, $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\},\ a_1 = 0, b_1 = 0,\ a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0, a_2 = 0, b_2 = 0,\ a_2^* = 0, b_2^* \neq 0$ olsun.

Bu takdirde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir.

İspat: Kabul edelim ki $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B_1 = HA_1$ ve $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ vardır. (1) eşitliklerinde $a_1 = 0, b_1 = 0,\ a_1^* \neq 0, b_1^* \neq 0, a_2 = 0, b_2 = 0$, $a_2^* = 0, b_2^* \neq 0$ alınırsa $b_2^* = 0$ elde edilir. Bu ise $b_2^* \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. ■

Teorem 14: $\{A_1, A_2, ..., A_m\}, A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, a_1 \neq 0$. $A_2, ..., A_m \in \mathbb{D}$ olsun. Bu takdirde $k \in \{2, 3, ..., m\}$ olmak üzere $f^k(A_1, A_2, ..., A_m) = A_1^{-1}A_k = \dfrac{a_k}{a_1} + \varepsilon\left(\dfrac{a_1 a_k^* - a_1^* a_k}{a_1^2}\right)$ ile tanımlanan fonksiyonlar $\mathbb{D}_1 -$invaryanttır.

İspat: Önce $A_1^{-1}A_k = \dfrac{a_k}{a_1} + \varepsilon\left(\dfrac{a_1 a_k^* - a_1^* a_k}{a_1^2}\right)$ olduğunu gösterelim. $a_1 \neq 0$ olduğundan A_1^{-1} mevcuttur. O halde
$$A_1^{-1} = \frac{1}{a_1 + \varepsilon a_1^*} = \frac{a_1 - \varepsilon a_1^*}{(a_1 + \varepsilon a_1^*)(a_1 - \varepsilon a_1^*)} = \frac{a_1 - \varepsilon a_1^*}{a_1^2} = \frac{1}{a_1} - \varepsilon \frac{a_1^*}{a_1^2}$$
bulunur.
$$A_1^{-1}A_k = \left(\frac{1}{a_1} - \varepsilon \frac{a_1^*}{a_1^2}\right)(a_k + \varepsilon a_k^*) = \frac{a_k}{a_1} + \varepsilon\left(\frac{a_k^*}{a_1} - \frac{a_k a_1^*}{a_1^2}\right) = \frac{a_k}{a_1} + \varepsilon\left(\frac{a_1 a_k^* - a_1^* a_k}{a_1^2}\right)$$
olup istenilen elde edilir. Şimdi $\mathbb{D}_1$ grubunun $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi üzerindeki hareketini alalım. $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, a_1 \neq 0,\ k \in \{2, 3, ..., m\}$ olsun. $\forall H \in \mathbb{D}_1$ için,
$$f^k(HA_1, HA_2, ..., HA_m) = (HA_1)^{-1} HA_k = H^{-1}A_1^{-1}HA_k = A_1^{-1}H^{-1}HA_k = A_1^{-1}A_k = f^k(A_1, A_2, ..., A_m)$$
olup istenen sağlanır. ■

Teorem 15: $A=\{A_1,A_2,...,A_m\}, B=\{B_1,B_2,...,B_m\}$ alalım. $a_1\neq 0, b_1\neq 0$ olsun. Bu takdirde, $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B \Leftrightarrow A_1^{-1}A_k=B_1^{-1}B_k, k\in\{2,3,...,m\}$'dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olduğundan dolayı $\exists H\in\mathbb{D}_1$ öyle ki $B_1=HA_1, B_2=HA_2,...,B_m=HA_m$'dir. Bu eşitlikten ve A^{-1} mevcut olduğundan $B_1=HA_1$ eşitliğinin her iki tarafını A^{-1} ile çarparsak $H=A_1^{-1}B_1$ bulunur. Bu H'yi $B_2=HA_2,...,B_m=HA_m$ eşitliklerinde yerine yazarsak $B_2=HA_2=A_1^{-1}B_1A_2,...,B_m=HA_m=A_1^{-1}B_1A_m$ elde edilir. B_1^{-1} mevcut olup son eşitliğin ise her iki tarafını B_1^{-1} ile çarparsak $B_1^{-1}B_2=B_1^{-1}A_1^{-1}B_1A_2=B_1^{-1}B_1A_1^{-1}A_2=A_1^{-1}A_2,...,$ $B_1^{-1}B_m=B_1^{-1}A_1^{-1}B_1A_m=B_1^{-1}B_1A_1^{-1}A_m=A_1^{-1}A_m$ bulunur. Böylece $A_1^{-1}A_2=B_1^{-1}B_2, A_1^{-1}A_3=B_1^{-1}B_3,...,A_1^{-1}A_m=B_1^{-1}B_m$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $A_1^{-1}A_2=B_1^{-1}B_2, A_1^{-1}A_3=B_1^{-1}B_3,...,A_1^{-1}A_m=B_1^{-1}B_m$ olsun. Gösterelim ki $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$'dir. $H=A_1^{-1}B_1$ olarak seçelim. Buradan $B_1=HA_1$ bulunur.

$A_1^{-1}A_2=B_1^{-1}B_2, A_1^{-1}A_3=B_1^{-1}B_3,...,A_1^{-1}A_m=B_1^{-1}B_m$ eşitliklerinin her iki tarafını B_1 ile çarpalım. Buradan $B_1A_1^{-1}A_2=B_1B_1^{-1}B_2=B_2, B_1A_1^{-1}A_3=B_1B_1^{-1}B_3=B_3,...,B_1A_1^{-1}A_m=B_1B_1^{-1}B_m=B_m$ elde edilir ve $H=A_1^{-1}B_1$ olduğundan dolayı $B_2=HA_2,...,B_m=HA_m$ olur. O halde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ dir. ■

Tanım 40: $A=\{A_1,A_2,...,A_m\}$ noktalar sisteminde $a_1\neq 0$ ise A'ya $1-$regüler denir. Eğer $a_1=0, a_2=0,...,a_{k-1}=0, a_k\neq 0$ ise A'ya $k-$regüler denir ve $k=reg(A)$ ile gösterilir. Eğer tüm $a_1=0, a_2=0,...,a_k=0$ ise A'ya regüler olmayan sistem denir.

Önerme 35: $A=\{A_1,A_2,...,A_m\}, B=\{B_1,B_2,...,B_m\}$ alalım**.** $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ ve A $k-$ regüler ve B $l-$ regüler olsun bu takdirde $k=l$ yani $reg(A)=reg(B)$'dir.

İspat: $A=\{A_1,A_2,...,A_m\}, B=\{B_1,B_2,...,B_m\}$**,** $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ ve A $k-$ regüler ve B $l-$regüler olsun. Farz edelim ki $reg(A)\neq reg(B)$ olsun. Yani $k\neq l$ olsun.

$k < l$ alalım.

$A-k$ regüler ise $a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_{k-1} = 0, a_k \neq 0$ ve $B\ l-$ regüler ise $b_1 = 0, b_2 = 0, ..., b_k = 0, ..., b_{l-1} = 0, b_l \neq 0$. Bu ise $a_k \neq 0$ ve $b_k = 0$ anlamına gelir. Bu da bize $A_k \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B_k$ denk olmadığını gösterir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ denk değildir. Bu da $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olmasıyla çelişir.

$l < k$ alalım.

$A\ k-$ regüler ise $a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_l = 0, ..., a_{k-1} = 0, a_k \neq 0$ ve $B\ l-$ regüler ise $b_1 = 0, b_2 = 0, ..., b_{l-1} = 0, b_l \neq 0$. Bu ise $a_l = 0$ ve $b_l \neq 0$ anlamına gelir. Bu da bize $A_l \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B_l$ denk olmadığını gösterir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ değildir. Bu da $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olmasıyla çelişir. O halde $k = l$ bulunur. Yani $reg(A) = reg(B)$'dir. ■

2.6 . $G\mathbb{D}_1$ Denklik Problemi

$G\mathbb{D}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}, h \neq 0, h, h^* \in \mathbb{R} \right\}$ biçiminde olduğunu ve matrislerle çarpma işlemine göre grup olduğunu biliyoruz.

$A = \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bir vektör, $H \in G\mathbb{D}_1$, $H = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}$ ve $\varphi(HA) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha \\ h^*a + ha^* \end{bmatrix}$ olsun.

Önerme 36: $\varphi : G\mathbb{D}_1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü bir etkidir.

İspat: $\forall H, K \in G\mathbb{D}_1, \forall A \in \mathbb{R}^2$ için

i) $(HK)A = \left(\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ k^* & k \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hk & 0 \\ h^*k + hk^* & hk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hka \\ h^*ka + hk^*a + hka^* \end{bmatrix}$

$$H(KA) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ k^* & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{ka} \\ k^*a + ka^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hka \\ h^*ka + hk^*a + hka^* \end{bmatrix}$$

$(HK)A = H(KA)$'dır.

ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi $G\mathbb{D}_1$ grubunun birim elemanı olmak üzere $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}$ $1 \cdot A = A$'dır. ■

Tanım 41: $A, B \in \mathbb{R}^2$ vektörleri öyle ki $B = \mathbb{H}A$ olacak şekilde $\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ varsa A ve B elemanları $G\mathbb{D}_1$ denktir denir ve $A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ şeklinde gösterilir.

Önerme 37: $A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: i) Yansıma Özelliği **:** $A \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} A$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathbb{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G\mathbb{D}_1$ alınırsa $A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} A$ olur. Gerçekten $\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} \Rightarrow A = \mathbb{H}A$'dır.

ii) Simetri Özelliği : $A, B \in \mathbb{R}^2, A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. $B \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} A$ olduğunu göstermeliyiz. $A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olduğundan dolayı $B = \mathbb{H}A$ olacak şekilde $\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ vardır. Yani $\begin{bmatrix} b \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}$ ve $h \neq 0$ olduğundan $\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{h^2}\begin{bmatrix} h & 0 \\ -h^* & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{h^*}{h^2} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}$ matrisi ile her iki tarafı sol taraftan çarparsak $\begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{h^*}{h^2} & \frac{1}{h} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}, h \neq 0, \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ -\frac{h^*}{h^2} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \in G\mathbb{D}_1$ olduğundan $B \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} A$ bulunur.

iii) Geçişme Özelliği : $A, B, C \in \mathbb{R}^2, A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ ve $B \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} C$ olsun. $A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olduğundan dolayı $B = \mathbb{H}A$ olacak şekilde $\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ ve $B \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} C$ olduğundan dolayı $C = \mathbb{K}B$ olacak şekilde $\mathbb{K} \in G\mathbb{D}_1$ vardır. Yani $\begin{bmatrix} b \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}, h \neq 0$ ve $\begin{bmatrix} c \\ c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k^* & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ b^* \end{bmatrix}, k \neq 0$'dir.

$$\begin{bmatrix} c \\ c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ k^* & k \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} k & 0 \\ k^* & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hk & 0 \\ h^*k + hk^* & hk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}, \ hk \neq 0$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} c \\ c^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hk & 0 \\ h^*k + hk^* & hk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}, hk \neq 0$ ve $\begin{bmatrix} hk & 0 \\ h^*k + hk^* & hk \end{bmatrix} \in G\mathbb{D}_1$ olduğundan

$A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} C$ 'dir. ■

Önerme 38: $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^2, A = a + \varepsilon a^* \in \mathbb{D}, F(A) = \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}$ dönüşümü lineer uzay izomorfizmasıdır.

İspat: $A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^* \in \mathbb{D}, \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F(A+B) = F\left(\left(a + \varepsilon a^*\right) + \left(b + \varepsilon b^*\right)\right) = F\left(\left(a+b\right) + \varepsilon\left(a^* + b^*\right)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a+b \\ a^* + b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = F(A) + F(B)$$

$F(\lambda A) = F\left(\lambda\left(a + \varepsilon a^*\right)\right) = F\left(\lambda a + \varepsilon \lambda a^*\right) = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda a^* \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \lambda F(A)$ olur.O halde F lineerdir.

$F(A) = F(B)$ alalım. $F(A) = F(B) \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b^* \end{bmatrix} \Rightarrow a = b, a^* = b^* \Rightarrow A = B$ elde edilir. O halde F birebirdir.

$\mathbb{R}^2$'deki her bir $\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}$ vektörü $\mathbb{D}$ 'de bir tek $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısına karşılık geleceğinden F örtendir. ■

Önerme 39: $A, B \in \mathbb{D},\ A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow F(A) \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$'dir.

İspat: $(\Rightarrow) A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. O halde $B = HA$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ vardır.

$$B = HA \Rightarrow F(B) = F(HA) = F\left(ha + \varepsilon(ha^* + h^*a)\right) = \begin{bmatrix} ha \\ ha^* + h^*a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix} = \mathbb{H}F(A), h \neq 0$$

ve $\mathbb{H} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \in \mathrm{G}\mathbb{D}_1$ olduğundan $F(A) \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $F(A)\overset{G\mathbb{D}_1}{\sim}F(B)$ olsun. O halde $F(B)=HF(A)$ olacak şekilde $\mathbb{H}\in G\mathbb{D}_1$ vardır. $F(B)=\mathbb{H}F(A)\Rightarrow\begin{bmatrix} b \\ b^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ha \\ h^*a+ha^* \end{bmatrix}\Rightarrow b=ha, b^*=h^*a+ha^*$ bulunur. Bu ise $B=HA$ ve $h\neq 0$ olduğundan $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$ bulunur. ■

Tanım 42 : $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f(A_1,A_2)$, $\forall\mathbb{H}\in G\mathbb{D}_1,\forall A_1,A_2\in\mathbb{R}^2$ ise f 'ye $G\mathbb{D}_1-$invaryant fonksiyon denir.

Önerme 40: $f:\mathbb{D}^2\to\mathbb{D}$, $f(A_1,A_2)=f_1(A_1,A_2)+\varepsilon f_2(A_1,A_2)$ fonksiyonu $\mathbb{D}_1-$invaryanttır $\Leftrightarrow$ f_1, f_2 $G\mathbb{D}_1-$invaryanttır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $f:\mathbb{D}^2\to\mathbb{D}$ fonksiyonu $\mathbb{D}_1-$invaryant ise $\forall H\in\mathbb{D}_1,\forall A_1,A_2\in\mathbb{D}$
$f(HA_1,HA_2)=f(A_1,A_2)$'dir. f nin tanımı gereğince
$f(HA_1,HA_2)=f_1(HA_1,HA_2)+\varepsilon f_2(HA_1,HA_2)$ olur. Dual sayıların eşitliğine göre
$f_1(HA_1,HA_2)=f_1(A_1,A_2)$ ve $f_2(HA_1,HA_2)=f_2(A_1,A_2)$ bulunur. Bu ise f_1 ve f_2 fonksiyonlarının $\mathbb{D}_1-$invaryant olduğunu gösterir. Şimdi

$$HA_1=ha_1+\varepsilon\left(h^*a_1+ha_1^*\right)\to\begin{bmatrix} ha_1 \\ h^*a_1+ha_1^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$HA_2=ha_2+\varepsilon\left(h^*a_2+ha_2^*\right)\to\begin{bmatrix} ha_2 \\ h^*a_2+ha_2^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix},\ h\neq 0,\ \mathbb{H}=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\in G\mathbb{D}_1$$

olduğundan $f_1(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_1(A_1,A_2)$ bulunur. Benzer şekilde $f_2(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_1(A_1,A_2)$ bulunur. $f_1(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_1(A_1,A_2)$, $f_2(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_2(A_1,A_2)$, $\forall\mathbb{H}\in G\mathbb{D}_1,\forall A_1,A_2\in\mathbb{D}$ olduğundan f_1, f_2 $G\mathbb{D}_1-$invaryanttır.

$(\Leftarrow)$ f_1, f_2 $G\mathbb{D}_1-$invaryant olsun. O halde $f_1(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_1(A_1,A_2)$, $f_2(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_2(A_1,A_2)$, $\forall\mathbb{H}\in G\mathbb{D}_1,\forall A_1,A_2\in\mathbb{D}$'dir.

$$\mathbb{H}A_1=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ha_1 \\ h^*a_1+ha_1^* \end{bmatrix}\to ha_1+\varepsilon\left(h^*a_1+ha_1^*\right)=\left(h+\varepsilon h^*\right)\left(a_1+\varepsilon a_1^*\right)=HA_1$$

$$\mathbb{H}A_2=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ha_2 \\ h^*a_2+ha_2^* \end{bmatrix}\to ha_2+\varepsilon\left(h^*a_2+ha_2^*\right)=\left(h+\varepsilon h^*\right)\left(a_2+\varepsilon a_2^*\right)=HA_2,$$

$h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ bulunur. Buradan $f_1(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2) = f_1(A_1, A_2)$ ve $f_2(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2) = f_2(A_1, A_2)$, $\forall H \in \mathbb{D}_1, \forall A_1, A_2 \in \mathbb{D}$ olur. Bu ise f 'nin $\mathbb{D}_1 -$invaryant olduğu anlamına gelir. ■

Tanım 43: Eğer $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{D}$ öyle ki $B_1 = \mathbb{H}A_1, B_2 = \mathbb{H}A_2$ olacak şekilde $\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ varsa $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$ sistemine $\mathrm{G}\mathbb{D}_1$ denktir denir ve $\{A_1, A_2\} \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} \{B_1, B_2\}$ ile gösterilir.

Önerme 41: $\{A_1, A_2\} \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} \{B_1, B_2\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Bu önermenin ispatı önerme 37'deki gibi kolay bir şekilde gösterilebilir.

Önerme 42: $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{D}, A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$**,** $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow F(A) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$' dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. $B_1 = HA_1, B_2 = HA_2$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ vardır.

$$B_1 = HA_1 \Rightarrow F(B_1) = F(HA_1) = F\left(ha_1 + \varepsilon(ha_1^* + h^* a_1)\right) = \begin{bmatrix} ha_1 \\ ha_1^* + h^* a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{H}F(A_1), h \neq 0 \Rightarrow \quad \mathbb{H} \in \mathrm{G}\mathbb{D}_1 \Rightarrow F(A_1) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B_1) \tag{5}$$

$$B_2 = HA_2 \Rightarrow F(B_2) = F(HA_2) = F\left(ha_2 + \varepsilon(ha_2^* + h^* a_2)\right) = \begin{bmatrix} ha_2 \\ ha_2^* + h^* a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix}$$

$$= \mathbb{H}F(A_2), h \neq 0, \mathbb{H} \in \mathrm{G}\mathbb{D}_1 \Rightarrow F(A_2) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B_2) \tag{6}$$

bulunur. (5) ve (6)'den $F(A) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$'dir.

$(\Leftarrow)$ $F(A) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$ olsun. $B_1 = \mathbb{H}A_1, B_2 = \mathbb{H}A_2$ olacak şekilde $\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ vardır.

$$F(B_1) = \mathbb{H}F(A_1) \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha_1 \\ h^* a_1 + ha_1^* \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = ha_1, b_1^* = h^* a_1 + ha_1^*, h \neq 0$$

bulunur. Bu ise $B_1 = HA_1, H \in \mathbb{D}$ demektir.

$$F(B_2)=\mathbb{H}F(A_2)\Rightarrow\begin{bmatrix} b_2 \\ b_2^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ha_2 \\ h^*a_2+ha_2^* \end{bmatrix}\Rightarrow b_2=ha_2, b_2^*=h^*a_2+ha_2^*,$$

$h\neq 0$ bulunur. Bu ise $B_2=HA_2, H\in\mathbb{D}$ demektir. $B_1=HA_1, B_2=HA_2$ ve $H\in\mathbb{D}$ olduğundan $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B$'dir. ■

Teorem 16: $A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, a_1\neq 0,\ A_2=a_2+\varepsilon a_2^*$, $f(A_1,A_2)=f_1(A_1,A_2)+\varepsilon f_2(A_1,A_2)$ olsun. $f_1(A_1,A_2)=\dfrac{a_2}{a_1}$ ve $f_2(A_1,A_2)=\dfrac{a_1a_2^*-a_2a_1^*}{a_1^2}$ fonksiyonları $\mathrm{G}\mathbb{D}_1-$invaryant fonksiyonlardır.

İspat: $\forall\mathbb{H}\in G\mathbb{D}_1$ alalım. $f_1(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_1\left(\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix},\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix}\right)=$

$=f_1\left(\begin{bmatrix} ha_1 \\ h^*a_1+ha_1^* \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ha_2 \\ h^*a_2+ha_2^* \end{bmatrix}\right)=\dfrac{ha_2}{ha_1}=\dfrac{a_2}{a_1}=f_1(A_1,A_2)$ bulunur. O halde $f(A_1,A_2)=\dfrac{a_2}{a_1}$ fonksiyonu $\mathrm{G}\mathbb{D}_1-$invaryant fonksiyondur.

$$f_2(\mathbb{H}A_1,\mathbb{H}A_2)=f_2\left(\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix},\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix}\right)=f_2\left(\begin{bmatrix} ha_1 \\ h^*a_1+ha_1^* \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ha_2 \\ h^*a_2+ha_2^* \end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{(ha_1)(h^*a_2+ha_2^*)-(ha_2)(h^*a_1+ha_1^*)}{(ha_1)^2}=\frac{ha_1h^*a_2+ha_1ha_2^*-ha_2h^*a_1-ha_2ha_1^*}{h^2a_1^2}=$$

$=\dfrac{h^2(a_1a_2^*-a_2a_1^*)}{h^2a_1^2}=\dfrac{a_1a_2^*-a_2a_1^*}{a_1^2}=f_2(A_1,A_2)$ bulunur. O halde $f_2(A_1,A_2)=\dfrac{a_1a_2^*-a_2a_1^*}{a_1^2}$ fonksiyonu $\mathrm{G}\mathbb{D}_1-$invaryant fonksiyondur. ■

Teorem 17: $A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\}, A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, a_1\neq 0,\ A_2=a_2+\varepsilon a_2^*$, $a_2\neq 0$, $B_1=b_1+\varepsilon b_1^*, b_1\neq 0,\ b_2\neq 0$, $B_2=b_2+\varepsilon b_2^*\in\mathbb{D}$ olsun. Bu takdirde

$A\overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim}B\Leftrightarrow\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}$ ve $\dfrac{a_1a_2^*-a_2a_1^*}{a_1^2}=\dfrac{b_1b_2^*-b_2b_1^*}{b_1^2}$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)\ A\overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim}B$ olsun. Bu takdirde $B_1=\mathbb{H}A_1$ ve $B_2=\mathbb{H}A_2$ olacak şekilde $\mathbb{H}\in G\mathbb{D}_1$ vardır. $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ha_1 \\ ha_1^*+h^*a_1 \end{bmatrix}\Rightarrow b_1=ha_1, h\neq 0$ ve $b_1^*=ha_1^*+h^*a_1$

bulunur. $b_1 = ha_1 \Rightarrow h = \dfrac{b_1}{a_1}, a_1 \neq 0$ bulunur.

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha_2 \\ ha_2^* + h^* a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow b_2 = ha_2, h \neq 0 \text{ ve } b_2^* = ha_2^* + h^* a_2 \text{ bulunur.}$$

ve $b_2^* = ha_2^* + h^* a_2$ bulunur. $h = \dfrac{b_1}{a_1} \neq 0$ değerini $b_2 = ha_2$ olduğundan eşitliğinde yazalım.

$b_2 = \dfrac{b_1 a_2}{a_1}$ bulunur. Şimdi her iki tarafı b_1'e bölersek $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1}$ bulunur.

$b_1 = ha_1, b_1^* = ha_1^* + h^* a_1$ ve $b_2 = ha_2, b_2^* = ha_2^* + h^* a_2$ olduğundan dolayı $B_1 = HA_1$, $B_2 = HA_2$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ bulunur. Yani $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ bulunur. Bu ise Teorem 10'a göre $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ ise $A_1^{-1}A_2 = B_1^{-1}B_2$'dir. $A_1^{-1}A_2 = B_1^{-1}B_2 \Rightarrow \dfrac{a_1 a_2^* - a_2 a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_2^* - b_2 b_1^*}{b_1^2}$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1}$ ve $\dfrac{a_1 a_2^* - a_2 a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_2^* - b_2 b_1^*}{b_1^2}$ olsun.

$\dfrac{a_1 a_2^* - a_2 a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_2^* - b_2 b_1^*}{b_1^2} \Rightarrow A_1^{-1}A_2 = B_1^{-1}B_2$ bulunur. $A_1^{-1}A_2 = B_1^{-1}B_2 \Rightarrow A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olur.

$A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B \Rightarrow B_1 = HA_1,\ B_2 = HA_2$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ vardır. $B_1 = HA_1$ ise $h \neq 0$ $b_1 = ha_1, b_1^* = ha_1^* + h^* a_1$ ve $B_2 = HA_2$ ise $b_2 = ha_2, b_2^* = ha_2^* + h^* a_2$ bulunur.

$b_1 = ha_1, b_1^* = ha_1^* + h^* a_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}, h \neq 0, \mathbb{H} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \in G\mathbb{D}_1$ olduğundan $B_1 = \mathbb{H}A_1$ bulunur. Benzer şekilde $B_2 = \mathbb{H}A_2$ bulunabilir. O halde $A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ elde edilir. ■

Tanım 44: $f : \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{m \text{ tane}} \to \mathbb{R}$, $f(HA_1, HA_2, \ldots, HA_m) = f(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, $\forall H \in G\mathbb{D}_1$, $\forall A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^2$ ise f 'ye $G\mathbb{D}_1 -$ invaryant fonksiyon denir.

Önerme 43: $f : \mathbb{D}^m \to \mathbb{D}$, $f(A_1, A_2, \ldots, A_m) = f_1(A_1, A_2, \ldots, A_m) + \varepsilon f_2(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ fonksiyonu $\mathbb{D}_1 -$ invaryanttır $\Leftrightarrow$ f_1 ve f_2 $G\mathbb{D}_1 -$ invaryanttır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $f:\mathbb{D}^m \to \mathbb{D}$ fonksiyonu $\mathbb{D}_1-$invaryant ise $\forall H \in \mathbb{D}_1, \forall A_1, A_2, ..., A_m \in \mathbb{D}$ $f\left(HA_1, HA_2, ..., HA_m\right) = f\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$'dir. f nin tanımına göre $f\left(HA_1, HA_2, ..., HA_m\right) = f_1\left(HA_1, HA_2, ..., A_m\right) + \varepsilon f_2\left(HA_1, HA_2, ..., HA_m\right)$ olur. Dual sayıların eşitliğine göre $f_1\left(HA_1, HA_2, ..., HA_m\right) = f_1\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$ ve $f_2\left(HA_1, HA_2, ..., HA_m\right) = f_2\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$ bulunur. Bu ise f_1 ve f_2 fonksiyonlarının $\mathbb{D}_1-$invaryant olduğunu gösterir. Şimdi

$$HA_1 = ha_1 + \varepsilon\left(h^* a_1 + ha_1^*\right) \to \begin{bmatrix} ha_1 \\ h^* a_1 + ha_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}, h \neq 0,\ \mathbb{H} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Benzer şekilde $HA_2 \to \mathbb{H}A_2, ..., HA_m \to \mathbb{H}A_m$ bulunabilir.

$f_1\left(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2, ..., \mathbb{H}A_m\right) = f_1\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$ ve $f_2\left(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2, ..., \mathbb{H}A_m\right) = f_2\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$ bulunur. $f_1\left(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2, ..., \mathbb{H}A_m\right) = f_1\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$, $f_2\left(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2, ..., \mathbb{H}A_m\right) = f_1\left(A_1, A_2, ..., A_m\right), \forall \mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1, \forall A_1, A_2 \in \mathbb{D}$ olduğundan f_1, f_2 $G\mathbb{D}_1-$invaryanttır.

$(\Leftarrow)$ f_1, f_2 $G\mathbb{D}_1-$invaryant olsun. O halde $f_1\left(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2\right) = f_1\left(A_1, A_2\right)$, $f_2\left(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2\right) = f_2\left(A_1, A_2\right), \forall \mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1, \forall A_1, A_2 \in \mathbb{D}$'dir.

$$\mathbb{H}A_1 = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha_1 \\ h^* a_1 + ha_1^* \end{bmatrix} \to ha_1 + \varepsilon\left(h^* a_1 + ha_1^*\right) = \left(h + \varepsilon h^*\right)\left(a_1 + \varepsilon a_1^*\right) = HA_1$$

$h \neq 0, H = h + \varepsilon h^* \in \mathbb{D}_1$ elde edilir. Benzer şekilde $\mathbb{H}A_2 \to HA_2, ..., \mathbb{H}A_m \to HA_m$ elde edilir. Buradan $f_1\left(HA_1, HA_2, ..., HA_m\right) = f_1\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$ ve $f_2\left(HA_1, HA_2, ..., HA_m\right) = f_2\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$, $\forall H \in \mathbb{D}_1$, $\forall A_1, A_2, ..., A_m \in \mathbb{D}$ olur. Bu ise f $\mathbb{D}_1-$invaryant demektir. ■

Tanım 45: Eğer $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_m \in \mathbb{D}$ öyle ki $B_1 = \mathbb{H}A_1, B_2 = \mathbb{H}A_2, ..., B_m = \mathbb{H}A_m$ olacak şekilde $\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ varsa $A = \left\{A_1, A_2, ..., A_m\right\}$, $B = \left\{B_1, B_2, ..., B_m\right\}$ sistemine $\mathrm{G}\mathbb{D}_1$ denktir denir ve $\left\{A_1, A_2, ..., A_m\right\} \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} \left\{B_1, B_2, ..., B_m\right\}$ ile gösterilir.

Önerme 44: $\{A_1, A_2, .., .A_m\} \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Bu önermenin ispatı önerme 37'deki gibi kolay bir şekilde gösterilebilir. ■

Önerme 45: Eğer $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_m \in \mathbb{D}$, $A = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$,

$B = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$, $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow F(A) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$'dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. $B_1 = HA_1, B_2 = HA_2$ $,\ldots, B_m = HA_m$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$

vardır. $B_1 = HA_1 \Rightarrow F(B_1) = F(HA_1) = F\left(ha_1 + \varepsilon(ha_1^* + h^* a_1)\right) = \begin{bmatrix} ha_1 \\ ha_1^* + h^* a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}$

$= \mathbb{H}F(A_1), h \neq 0 \Rightarrow$ $\mathbb{H} \in \mathrm{G}\mathbb{D}_1 \Rightarrow F(A_1) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B_1)$'dir. Benzer şekilde $n \in \{2, 4, ..., m\}$ için

$F(A_n) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B_n)$'dir. O halde $F(A) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$'dir.

$(\Leftarrow)$ $F(A) \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} F(B)$ olsun. $B_1 = \mathbb{H}A_1, B_2 = \mathbb{H}A_2, ..., B_m = \mathbb{H}A_m$ olacak şekilde

$\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ vardır.

$$F(B_1) = \mathbb{H}F(A_1) \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha_1 \\ h^* a_1 + ha_1^* \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = ha_1, b_1^* = h^* a_1 + ha_1^*, h \neq 0$$

bulunur. Bu ise $B_1 = HA_1, H \in \mathbb{D}$ demektir. Benzer şekilde $k \in \{2, 3, ..., m\}$ için

$B_k = HA_k, H \in \mathbb{D}$ olur. O halde $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir. ■

Teorem 18: $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, a_1 \neq 0,\ A_2, ..., A_m \in \mathbb{D}$,

$f^k(A_1, A_2, ..., A_m) = f_1^k(A_1, A_2, ..., +A_m) + \varepsilon f_2^k(A_1, A_2, ..., A_m)$ olsun. $k \in \{2, 3, ..., m\}$

$f_1^k(A_1, A_2, ..., A_m) = \dfrac{a_k}{a_1}$ ve $f_2^k(A_1, A_2, ..., A_m) = \dfrac{a_1 a_k^* - a_k a_1^*}{a_1^2}$ fonksiyonları

$\mathrm{G}\mathbb{D}_1 -$invaryant fonksiyonlardır.

İspat: $\forall \mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ alalım.

$$f_1^k(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2, ..., \mathbb{H}A_m) = f_1^k\left(\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ a_k^* \end{bmatrix} \right) =$$

$$= f_1^k\left(\begin{bmatrix} ha_1 \\ h^*a_1 + ha_1^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ha_2 \\ h^*a_2 + ha_2^* \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} ha_m \\ h^*a_m + ha_m^* \end{bmatrix}\right) = \frac{ha_k}{ha_1} = \frac{a_k}{a_1} = f_1^k\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$$

bulunur. O halde $f^k\left(A_1, A_2, ..., A_m\right) = \dfrac{a_k}{a_1}$ fonksiyonu $G\mathbb{D}_1 -$invaryant fonksiyondur.

$$f_2^k\left(\mathbb{H}A_1, \mathbb{H}A_2, ..., \mathbb{H}A_m\right) = f_2^k\left(\begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_2^* \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_m \\ a_m^* \end{bmatrix}\right)$$

$$= f_2^k\left(\begin{bmatrix} ha_1 \\ h^*a_1 + ha_1^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ha_2 \\ h^*a_2 + ha_2^* \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} ha_m \\ h^*a_m + ha_m^* \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{\left(ha_1\right)\left(h^*a_k + ha_k^*\right) - \left(ha_k\right)\left(h^*a_1 + ha_1^*\right)}{\left(ha_1\right)^2} = \frac{ha_1h^*a_k + ha_1ha_k^* - ha_kh^*a_1 - ha_kha_1^*}{h^2a_1^2} =$$

$$= \frac{h^2\left(a_1a_k^* - a_ka_1^*\right)}{h^2a_1^2} = \frac{a_1a_k^* - a_ka_1^*}{a_1^2} = f_2^k\left(A_1, A_2, ..., A_m\right)$$ bulunur. O halde

$f_2^k\left(A_1, A_2, ..., A_m\right) = \dfrac{a_1a_k^* - a_ka_1^*}{a_1^2}$ fonksiyonu $G\mathbb{D}_1 -$invaryant fonksiyondur. ■

Teorem 19: $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_m \in \mathbb{D},\ A = \left\{A_1, A_2, ..., A_m\right\},\ B = \left\{B_1, B_2, ..., B_m\right\}$ alalım. $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow \dfrac{a_k}{a_1} = \dfrac{b_k}{b_1}$ ve

$\dfrac{a_1a_k^* - a_ka_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1b_k^* - b_kb_1^*}{b_1^2}, k \in \left\{2, 3, ..., m\right\}$ ’dir.

İspat: $\left(\Rightarrow\right) A \overset{G\mathbb{D}_1}{\sim} B$ olsun. Bu takdirde $k \in \left\{2, 3, ..., m\right\}$, $B_1 = \mathbb{H}A_1$, $B_k = \mathbb{H}A_k$ olacak şekilde $\mathbb{H} \in G\mathbb{D}_1$ vardır. $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha_1 \\ ha_1^* + h^*a_1 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = ha_1, h \neq 0$ ve $b_1^* = ha_1^* + h^*a_1$ bulunur.

$$\begin{bmatrix} b_k \\ b_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_k \\ a_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha_k \\ ha_k^* + h^*a_k \end{bmatrix} \Rightarrow b_k = ha_k, h \neq 0$$ ve $b_k^* = ha_k^* + h^*a_k$ bulunur.

$b_1 = ha_1 \Rightarrow h = \dfrac{b_1}{a_1}$ bulunur. Şimdi $h = \dfrac{b_1}{a_1}$ değerini $b_k = ha_k$ ’da yerine yazalım. $b_k = \dfrac{a_kb_1}{a_1}$ bulunur. Şimdi her iki tarafı b_1 ile bölersek $\dfrac{a_k}{a_1} = \dfrac{b_k}{b_1}$ bulunur. $b_1 = ha_1, b_1^* = ha_1^* + h^*a_1$ ve

$b_k = ha_k, b_k^* = ha_k^* + h^* a_k, k \in \{2,3,...,m\}$ olduğundan dolayı $B_1 = HA_1,\ B_k = HA_k$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ bulunur. Yani $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ bulunur. Bu ise Teorem 10'a göre $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ ise $A_1^{-1}A_k = B_1^{-1}B_k$'dır. $A_1^{-1}A_k = B_1^{-1}B_k \Rightarrow \dfrac{a_1 a_k^* - a_k a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_k^* - b_k b_1^*}{b_1^2}$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\dfrac{a_k}{a_1} = \dfrac{b_k}{b_1}$ ve $\dfrac{a_1 a_k^* - a_k a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_k^* - b_k b_1^*}{b_1^2}, k \in \{2,3,...,m\}$ olsun. $\dfrac{a_k}{a_1} = \dfrac{b_k}{b_1}$ ve

$\dfrac{a_1 a_k^* - a_k a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_k^* - b_k b_1^*}{b_1^2} \Rightarrow A_1^{-1}A_k = B_1^{-1}B_k$ şeklinde $A_1, A_k, B_1, B_k \in \mathbb{D}$ dual sayıları vardır.

$a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ ve $A_1^{-1}A_k = B_1^{-1}B_k$ olduğundan Teorem10'a göre $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir. $A \overset{\mathbb{D}_1}{\sim} B$ ise $B_1 = HA_1,\ B_k = HA_k$ olacak şekilde $H \in \mathbb{D}_1$ vardır. $B_1 = HA_1 \Rightarrow b_1 = ha_1, b_1^* = ha_1^* + h^* a_1,$

$B_k = HA_k \Rightarrow b_k = ha_k, b_k^* = ha_k^* + h^* a_k$ bulunur.

$$ha_1, b_1^* = ha_1^* + h^* a_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1^* \end{bmatrix}$$

$b_k = ha_k, b_k^* = ha_k^* + h^* a_k \Rightarrow \begin{bmatrix} b_k \\ b_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ a_k^* \end{bmatrix}, h \neq 0, \mathbb{H} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ h^* & h \end{bmatrix} \in G\mathbb{D}_1$ bulunur. Bu ise $B_1 = \mathbb{H}A_1, B_k = \mathbb{H}A_k,\ k \in \{2,3,...,m\}$ anlamına gelir. O halde $A \overset{\mathbf{G}\mathbb{D}_1}{\sim} B$'dir. ■

2.7. $\mathbb{D}_2$ Grubu

Tanım 46: $\mathbb{D} = \left\{ a + \varepsilon a^*, a, a^* \in \mathbb{R} \right\}$ dual sayılar kümesini alalım. Burada $a = \mp 1$ olarak aldığımız tüm dual sayıları $\mathbb{D}_2$ ile yani ; $\mathbb{D}_2 = \left\{ 1 + \varepsilon a^*, -1 + \varepsilon a^*, a^* \in \mathbb{R} \right\}$ biçiminde tanımlayalım.

Teorem 20: $\mathbb{D}_2 = \left\{ 1 + \varepsilon a^*, -1 + \varepsilon a^*, a^* \in \mathbb{R} \right\}$ kümesi çarpma işlemine göre değişmeli bir gruptur.

İspat: 1) Kapalılık:

$A=a+\varepsilon a^{*}, B=b+\varepsilon b^{*}\in\mathbb{D}_2$ alalım.

$AB=\left(a+\varepsilon a^{*}\right)\left(b+\varepsilon b^{*}\right)=ab+\varepsilon(ab^{*}+a^{*}b)$ ve $a,b=\mp1$ olduğundan $ab=\mp1$ olup

$AB\in\mathbb{D}_2$

2) Birleşme özelliği:

$A=a+\varepsilon a^{*}, B=b+\varepsilon b^{*}, C=c+\varepsilon c^{*}\in\mathbb{D}_2$ alalım.

$(AB)C=\left[(a+\varepsilon a^{*})(b+\varepsilon b^{*})\right]\left(c+\varepsilon c^{*}\right)=$

$=\left[ab+\varepsilon(ab^{*}+a^{*}b)\right]\left(c+\varepsilon c^{*}\right)=$

=abc+$\varepsilon(ab^{*}c+a^{*}bc+abc^{*})$ ve $a,b,c=\mp1$ olduğundan dolayı abc=∓1dir.

$A\left(BC\right)=(a+\varepsilon a^{*})\left[(b+\varepsilon b^{*})\left(c+\varepsilon c^{*}\right)\right]$

=$(a+\varepsilon a^{*})\left[bc+\varepsilon(b^{*}c+\varepsilon bc^{*})\right]$

=abc+$\varepsilon(ab^{*}c+a^{*}bc+abc^{*})$ ve $a,b,c=\mp1$ olduğundan dolayı abc=∓1dir.

$(AB)C=A\left(BC\right)$dir.

3) Birim eleman özelliği:

$A=a+\varepsilon a^{*}\in\mathbb{D}_2$ alalım.

$AX=XA=A$ olsun.

$AX=(a+\varepsilon a^{*})(x+\varepsilon a^{*})=ax+\varepsilon(ax^{*}+a^{*}x)=a+\varepsilon a^{*}$

$XA=(x+\varepsilon x^{*})(a+\varepsilon a^{*})=ax+\varepsilon(ax^{*}+a^{*}x)=a+\varepsilon a^{*}$

Buradan $ax=a\Rightarrow x=1$ ve $ax^{*}+a^{*}x=a^{*}$ ve $x=1$ olduğundan $x^{*}=0$ bulunur. O halde

$X=1=(1,0)\in\mathbb{D}_2$

4) Ters eleman özelliği:

$A=a+\varepsilon a^{*}, B=b+\varepsilon b^{*}\in\mathbb{D}_2$ alalım.

$AX=XA=1$ alalım. Yani,

$AX=ax+\varepsilon(ax^{*}+a^{*}x)=1$

$ax=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{a}, a=\mp1\Rightarrow x=\mp1$

$ax^{*}+a^{*}x=0$ ve $x=\pm1\Rightarrow x^{*}=-a^{*}$

$A^{-1} = X = \left(\pm 1, -a^{*}\right) \in \mathbb{D}_1$

5) Değişme Özelliği:

$A = a + \varepsilon a^{*}, B = b + \varepsilon b^{*} \in \mathbb{D}_2$ alalım.

$AB = (a+\varepsilon a^{*})(b+\varepsilon b^{*}) = ab + \varepsilon(ab^{*} + a^{*}b) = ba + \varepsilon(b^{*}a + ba^{*}) = BA$ ■

Önerme 46: $A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} B$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıyan, simetri ve geçişmenin var olduğunu göstermeliyiz.

i. Yansıyan:

$A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} A$ olması için $A = gA$ olacak şekilde $g \in \mathbb{D}_2$ olduğu gösterilmeli. $g = 1$ için $A = 1A$ ve $1 \in \mathbb{D}_2$ olduğundan $A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} A$ dir.

ii. Simetri: $A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} B$ olsun. Göstermeliyiz ki $B \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} A$ dir.

$A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} B$ olduğundan $B = gA$ olacak şekilde $g = h + \varepsilon h^{*} \in \mathbb{D}_2, h = \mp 1,$ vardır.

$h = 1$ alalım. $\exists g^{-1} \in \mathbb{D}_1, g^{-1} = 1 - \varepsilon h^{*}$ dir. $B = gA \Rightarrow A = g^{-1}B$ olup $B \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} A$'dır.

$h = -1$ alalım. $\exists g^{-1} \in \mathbb{D}_2, g^{-1} = -1 - \varepsilon h^{*}$ dir. $B = gA \Rightarrow A = g^{-1}B$ olup $B \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} A$'dır.

iii. Geçişme:

$A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} B$ ve $B \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} C$ olsun. Göstermeliyiz ki $A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} C$ dir. $A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} B$ olduğundan $B = g_1 A$ olacak şekilde $g_1 \in \mathbb{D}_2$ ve $B \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} C$ olduğundan $C = g_2 B$ olacak şekilde $g_2 \in \mathbb{D}_2$ vardır.

$C = g_2 B = g_2\left(g_1 A\right) = g_2 g_1 A$ ve $\mathbb{D}_2$ grup olduğundan dolayı $g_2 g_1 \in \mathbb{D}_2$ dir. O halde $A \overset{\mathbb{D}_2}{\sim} C$ dir. ■

2.8. $G\mathbb{D}_2$ Grubu

Tanım 48: $a \neq 0, H = a + \varepsilon a^* \in \mathbb{D}_1$ sayısına karşılık gelen matrislerin kümesini

$G\mathbb{D}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^* & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ b^* & -1 \end{bmatrix}, a^*, b^* \in \mathbb{R} \right\}$ ile tanımlayalım.

2.9. $\mathbb{D}_2$ ile $G\mathbb{D}_2$ Grupları Arasındaki Bağlantı

Önerme 47: $A, B \in \mathbb{D}_2$ olmak üzere

$f : \mathbb{D}_2 \to G\mathbb{D}_2,\ f(A) = f(1, a^*) = f(1 + \varepsilon a^*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^* & 1 \end{bmatrix}$,

$g : \mathbb{D}_2 \to G\mathbb{D}_2,\ g(B) = g(-1, b^*) = g(-1 + \varepsilon b^*) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ b^* & -1 \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan f ve g

fonksiyonları birer grup izomorfizmasıdır.

İspat: $A = (1, a^*), B = (1, b^*) \in \mathbb{D}_2$

$$f(A + \mathrm{B}) = f\left((1, a^*) + (1, b^*)\right) = f(2, a^* + b^*)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ a^* + b^* & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0 \\ a^* + b^* & 1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^* & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b^* & 1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^* & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b^* & 1 \end{bmatrix} = f(A) + f(B)$ elde edilir.

Ayrıca $f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$ dir.

$$f(A \cdot B) = f\left((1, a^*) \cdot (1, b^*)\right) = f(1, b^* + a^*)$$

$= \begin{bmatrix} 1 & b^* + a^* \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b^* & 1 \end{bmatrix} = f(A) \cdot f(B)$ ve sonuç olarak

$f\ (A \cdot B) = f(A) \cdot f(\mathrm{B})$ elde edilir.

f birebirdir **:**

$A \neq B$ ise $f(A) \neq f(B)$ dir. Gerçekten $A = (1, a^*) = 1 + \varepsilon a^*$ ve

$B=\left(1,b^*\right)=1+\varepsilon b^*\in\mathbb{D}_2$ için $A\neq B$ ise $a^*\neq b^*$ dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ b^* & 1\end{bmatrix}$ ve $f(A)\neq f(B)$ dir.

f örtendir : $G\mathbb{D}_2$ deki her bir $\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}$ matrisi $\mathbb{D}_2$ deki bir tek $A=\left(1,a^*\right)=1+\varepsilon a^*$ dual sayısının f ile ifade edilmiş bir görüntüsüdür. O halde $\mathbb{D}_2$ ile $G\mathbb{D}_2$ izomorftur.

$A=\left(-1,a^*\right),B=\left(-1,b^*\right)\in\mathbb{D}_2$

$$g(A+\mathrm{B})=g\left(\left(-1,a^*\right)+\left(-1,b^*\right)\right)=g\left(-2,a^*+b^*\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ a^*+b^* & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-1 & 0\\ a^*+b^* & -1-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ a^* & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ b^* & -1\end{bmatrix}$$

$=g\left(A\right)+g\left(B\right)$ elde edilir.

Ayrıca $g\left(A\cdot B\right)=g\left(A\right)\cdot g\left(B\right)$ dir:

$$g\left(A\cdot B\right)=g\left(\left(-1,a^*\right)\cdot\left(-1,b^*\right)\right)=g\left(1,-b^*-a^*\right)$$

$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -b^*-a^* & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ a^* & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ b^* & -1\end{bmatrix}=g\left(A\right)g\left(B\right)$ ve sonuç olarak

$g(A\cdot B)=g\left(A\right)\cdot g\left(\mathrm{B}\right)$ elde edilir.

g birebirdir **:**

$A\neq B$ ise $g(A)\neq g(B)$ dir. Gerçekten $A=\left(-1,a^*\right)$ ve $B=\left(-1,b^*\right)\in\mathbb{D}$ için $A\neq B$ ise $a^*\neq b^*$ dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ a^* & -1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1 & 0\\ b^* & -1\end{bmatrix}$ ve $g(A)\neq g(B)$ dir.

g örtendir : $G\mathbb{D}_2$ deki her bir $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ a^* & -1\end{bmatrix}$ matrisi $\mathbb{D}_2$ deki bir tek $A=\left(-1,a^*\right)$ dual sayısının g ile ifade edilmiş bir görüntüsüdür. O halde $\mathbb{D}_2$ ile $G\mathbb{D}_2$ izomorftur. ■

2.10. $\mathbb{D}_3$ Grubu

Tanım 48: $\mathbb{D}=\left\{a+\varepsilon a^*, a, a^* \in \mathbb{R}\right\}$ dual sayılar kümesini alalım. Burada $a=1$ olarak aldığımız tüm dual sayıları $\mathbb{D}_3$ ile yani $\mathbb{D}_3=\left\{1+\varepsilon a^*, a^* \in \mathbb{R}\right\}$ biçiminde tanımlayalım.

Teorem 21: $\mathbb{D}_3=\left\{1+\varepsilon a^*, a^* \in \mathbb{R}\right\}$ kümesi çarpma işlemine göre değişmeli gruptur.

İspat: 1) Kapalılık: $A=1+\varepsilon a^*, B=1+\varepsilon b^* \in \mathbb{D}_3$ alalım $AB \in \mathbb{D}_3$ olduğunu gösterelim.
$AB=(1+\varepsilon a^*)(1+\varepsilon b^*)=1+\varepsilon(b^*+a^*) \in \mathbb{D}_3$ dir.

2) Birleşme özelliği: $A, B, C \in \mathbb{D}_3$ alalım.

$$(AB)C=\left[(1+\varepsilon a^*)(1+\varepsilon b^*)\right]\left(1+\varepsilon c^*\right)=\left[1+\varepsilon(b^*+a^*)\right]\left(1+\varepsilon c^*\right)=1+\varepsilon(b^*+a^*+c^*)$$
$$A\left(BC\right)=(1+\varepsilon a^*)\left[(1+\varepsilon b^*)\left(1+\varepsilon c^*\right)\right]=(1+\varepsilon a^*)\left[1+\varepsilon(b^*+c^*)\right]=1+\varepsilon(b^*+a^*+c^*)$$

$\left(AB\right)C=A\left(BC\right)$ dir.

3) Birim eleman özelliği:

$AX=XA=A$ olsun.

$$AX=(1+\varepsilon a^*)(x+\varepsilon a^*)=x+\varepsilon(x^*+a^*x)=1+\varepsilon a^*$$
$$XA=(x+\varepsilon x^*)(1+\varepsilon a^*)=x+\varepsilon(x^*+a^*x)=1+\varepsilon a^*$$

Buradan $x=1$ olur ve $ax^*+a^*=a^* \Rightarrow x^*=0$

$X=1=(1,0) \in \mathbb{D}_3$

4) Ters eleman özelliği:

$AX=XA=1$ alalım. Yani,

$$AX=(1+\varepsilon a^*)(x+\varepsilon x^*)=x+\varepsilon(x^*+a^*x)=1$$

$x=1$ olur ve $ax^*+a^*=0 \Rightarrow x^*=-a^*$

$A^{-1}=X=\left(1,-a^*\right) \in \mathbb{D}_3$

5) Değişme Özelliği:

$AB=(1+\varepsilon a^*)(1+\varepsilon b^*)=1+\varepsilon(b^*+a^*)=1+\varepsilon(b^*+a^*)=BA$ ■

Önerme 48: $A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}B$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıyan, simetri ve geçişmenin var olduğunu göstermeliyiz.

i. Yansıyan:

$A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}A$ olması için $A=gA$ olacak şekilde $g\in\mathbb{D}_3$ olduğu gösterilmeli. $g=1$ için $A=1A$ ve $1\in\mathbb{D}_3$ olduğundan $A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}A$'dir.

ii. Simetri:

$A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}B$ olsun. Göstermeliyiz ki $B\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}A$ dir.

$A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}B$ olduğundan $B=gA$ olacak şekilde $g=1+\varepsilon h^*\in\mathbb{D}_3$ vardır. $\exists g^{-1}\in\mathbb{D}_1, g^{-1}=1-\varepsilon h^*$ dir. $B=gA\Rightarrow A=g^{-1}B$ olup $B\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}A$'dir.

iii. Geçişme:

$A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}B$ ve $B\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}C$ olsun. Göstermeliyiz ki $A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}C$ dir. $A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}B$ olduğundan $B=g_1A$ olacak şekilde $g_1\in\mathbb{D}_3$ ve $B\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}C$ olduğundan $C=g_2B$ olacak şekilde $g_2\in\mathbb{D}_3$ vardır.

$C=g_2B=g_2\left(g_1A\right)=g_2g_1A$ ve $\mathbb{D}_3$ grup olduğundan dolayı $g_2g_1\in\mathbb{D}_3$ dir. O halde $A\overset{\mathbb{D}_3}{\sim}C$ dir. ■

2.11. $G\mathbb{D}_3$ Grubu

Tanım 50: $a\neq 0, H=a+\varepsilon a^*\in\mathbb{D}_1$ sayısına karşılık gelen matrislerin kümesi

$$G\mathbb{D}_3=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}, a^*\in\mathbb{R}\right\}$$ ile tanımlayalım.

2.12. $\mathbb{D}_3$ ile $G\mathbb{D}_3$ Grupları Arasındaki Bağlantı

Önerme 49: $H=\left(1,a^*\right)\in\mathbb{D}_3$ olmak üzere $f:\mathbb{D}_3\to G\mathbb{D}_3$, $f\left(H\right)=f\left(1,a^*\right)=\begin{bmatrix}1 & a^*\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

olarak tanımlanan f fonksiyonu grup izomorfizmasıdır.

İspat: $A=\left(1,a^*\right), B=\left(1,b^*\right)\in\mathbb{D}_3$

$$f(A+\mathrm{B})=f\left(\left(1,a^*\right)+\left(1,b^*\right)\right)=f\left(2,a^*+b^*\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ a^*+b^* & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 0\\ a^*+b^* & 1+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ b^* & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ b^* & 1\end{bmatrix}=f\left(A\right)+f\left(B\right)$$ elde edilir.

Ayrıca $f\left(A\cdot B\right)=f\left(A\right)f\left(B\right)$ dir:

$$f\left(AB\right)=f\left(\left(1,a^*\right)\left(1,b^*\right)\right)=f\left(1,b^*+a^*\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ b^*+a^* & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ b^* & 1\end{bmatrix}=f\left(A\right)\cdot f\left(B\right)$$ ve sonuç olarak

$f\ (A\cdot B)=f\left(A\right)\cdot f\left(\mathrm{B}\right)$ elde edilir.

f birebirdir **:** $A\neq B$ ise $f(A)\neq f(B)$ dir. Gerçekten $A=\left(1,a^*\right)$ ve

$B=\left(1,b^*\right)\in\mathbb{D}$ için $A\neq B$ ise $a^*\neq b^*$ dir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ b^* & 1\end{bmatrix}$ ve $f(A)\neq f(B)$

dir.

f örtendir : $G\mathbb{D}_3$ deki her bir $\begin{bmatrix}1 & 0\\ a^* & 1\end{bmatrix}$ matrisi $\mathbb{D}_3$ deki bir tek $A=\left(1,a^*\right)$ dual

sayısının f ile ifade edilmiş bir görüntüsüdür. O halde $\mathbb{D}_3$ ile $G\mathbb{D}_3$ izomorftur. ■

3. BULGULAR

Tezde elde edilen bulguları şu şekilde sıralayabiliriz:

1. $A=x+\varepsilon x^{*}\in\mathbb{D}$ dual sayı ve $\left|A\right|_2=0\Leftrightarrow x=0$ olduğu Önerme 14'de gösterilmiştir.
2. $A=x+\varepsilon x^{*},B=y+\varepsilon y^{*}\in\mathbb{D}$ iki dual sayı ise $\left|A\right|_2=\left|B\right|_2\Rightarrow x=y$ olduğu Önerme 15'de gösterilmiştir.
3. $A=x+\varepsilon x^{*},B=y+\varepsilon y^{*}\in\mathbb{D}$ iki dual sayı ise $\left|A+B\right|_2=\left|A\right|_2+\left|B\right|_2$ olduğu Önerme 16'da gösterilmiştir.
4. $A=x+\varepsilon x^{*},B=y+\varepsilon y^{*}\in\mathbb{D}$ iki dual sayı ise $\left|A-B\right|_2=\left|A\right|_2-\left|B\right|_2$ olduğu Önerme 17'de gösterilmiştir.
5. $A=x+\varepsilon x^{*},B=y+\varepsilon y^{*}\in\mathbb{D}$ iki dual sayı ise $\left|AB\right|_2=\left|A\right|_2\left|B\right|_2$ Önerme 18'de gösterilmiştir.
6. $A=x+\varepsilon x^{*},B=y+\varepsilon y^{*},y\neq 0$ iki dual sayı ise $\left|\dfrac{A}{B}\right|_2=\dfrac{\left|A\right|_2}{\left|B\right|_2}$ olduğu Önerme 19'da gösterilmiştir.
7. $A=x+\varepsilon x^{*}\in\mathbb{D}$ bir dual sayı ise $A\overline{A}=\left|A\right|_2^{2}$ olduğu Önerme 20'de gösterilmiştir.
8. $\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2$ ve $\mathbb{D}_3$ gruplarının tanımları Tanım 35,47 ve 49'da verilmiştir.
9. $G\mathbb{D}_1,G\mathbb{D}_2$ ve $G\mathbb{D}_3$ matris gruplarının tanımı Tanım 35,47 ve 49'da verildi.
10. $\mathbb{D}_1$ İle $G\mathbb{D}_1$ arasındaki bağlantı Önerme 21'de gösterilmiştir.
11. $\mathbb{D}_2$ İle $G\mathbb{D}_2$ arasındaki bağlantı Önerme 47'de gösterilmiştir.
12. $\mathbb{D}_3$ İle $G\mathbb{D}_3$ arasındaki bağlantı Önerme 49'de gösterilmiştir.
13. $\mathbb{D}_1$ grubunun yörüngeleri Teorem 8'in sonuçları olarak elde edilmiştir.
14. $\{A_1,A_2\}$, $A_1=a_1+\varepsilon a_1^{*},a_1\neq 0,\ A_2=a_2+\varepsilon a_2^{*}$ olsun. Bu takdirde $A_1^{-1}A_2$ dual sayısı $\mathbb{D}_1-$invaryanttır ve $A_1^{-1}A_2=\dfrac{a_2}{a_1}+\varepsilon\left(\dfrac{a_1a_2^{*}-a_1^{*}a_2}{a_1^{2}}\right)$ Teorem 9'da gösterilmiştir.

15. $A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\}, A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, a_1\neq 0,\ A_2=a_2+\varepsilon a_2^*,\ B_1=b_1+\varepsilon b_1^*, b_1\neq 0,$

$B_2=b_2+\varepsilon b_2^*\in\mathbb{D}$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B\Leftrightarrow A_1^{-1}A_2=B_1^{-1}B_2$ olduğu Teorem 10'da gösterildi.

16. $A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\}, A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, A_2=a_2+\varepsilon a_2^*, a_2\neq 0,\ B_1=b_1+\varepsilon b_1^*$

$B_2=b_2+\varepsilon b_2^*\in\mathbb{D}, b_2\neq 0$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B\Leftrightarrow A_2^{-1}A_1=B_2^{-1}B_1$ olduğu Teorem 11'de gösterildi.

17. $A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, A_2=a_2+\varepsilon a_2^*, B_1=b_1+\varepsilon b_1^*,\ B_2=b_2+\varepsilon b_2^*\in\mathbb{D},$

$A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\},\ a_1=0, b_1=0,\ a_1^*\neq 0, b_1^*\neq 0, a_2\neq 0, b_2\neq 0$ olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B\Leftrightarrow b_1^*b_2^{-1}=a_1^*a_2^{-1}$ olduğu Teorem 12'de gösterildi.

18. $A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, A_2=a_2+\varepsilon a_2^*, B_1=b_1+\varepsilon b_1^*, B_2=b_2+\varepsilon b_2^*\in\mathbb{D},$

$A=\{A_1,A_2\}, B=\{B_1,B_2\},\ a_1=0, b_1=0, a_2=0, b_2=0, a_1^*\neq 0,\ a_2^*\neq 0,\ b_1^*\neq 0,\ b_2^*\neq 0$

olsun. Bu takdirde $A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B\Leftrightarrow a_1^*a_2^{*^{-1}}=b_1^*b_2^{*^{-1}}$ olduğu Teorem 13'de gösterildi.

19. $\{A_1,A_2,...,A_m\}, A_1=a_1+\varepsilon a_1^*, a_1\neq 0.\ A_2,...,A_m\in\mathbb{D}$ olsun. Bu takdirde $k\in\{2,3,...,m\}$ olmak üzere $A_1^{-1}A_k$ dual sayısı $\mathbb{D}_1-$invaryanttır ve $A_1^{-1}A_k=\dfrac{a_k}{a_1}+\varepsilon\left(\dfrac{a_1a_k^*-a_1^*a_k}{a_1^2}\right)$ olduğu Teorem 14'de gösterildi.

20. $A=\{A_1,A_2,...,A_m\}, B=\{B_1,B_2,...,B_m\}$ alalım. $a_1\neq 0, b_1\neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B\Leftrightarrow A_1^{-1}A_k=B_1^{-1}B_k, k\in\{2,3,...,m\}$ olduğu Teorem15'de gösterildi.

21. $\varphi: G\mathbb{D}_1\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dönüşümünün bir etki olduğu Önerme 36'da gösterildi.

22. $A\overset{G\mathbb{D}_1}{\sim}B$ bağıntısının denklik bağıntısı olduğu Önerme 37'de gösterildi

23. $F:\mathbb{D}\to\mathbb{R}^2, A=a+\varepsilon a^*\in\mathbb{D}, F(A)=\begin{bmatrix} a \\ a^* \end{bmatrix}$ dönüşümünün lineer uzay izomorfizması olduğu Önerme 38'de gösterildi.

24. $A,B\in\mathbb{D},\ A\overset{\mathbb{D}_1}{\sim}B\Leftrightarrow F(A)\overset{G\mathbb{D}_1}{\sim}F(B)$ olduğu Önerme 39'da gösterildi.

25. Önerme 40-42'de iki nokta için $G\mathbb{D}_1$-denklik problemi çözüldü.

26. $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, a_1 \neq 0,\ A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$, $f(A_1, A_2) = f_1(A_1, A_2) + \varepsilon f_2(A_1, A_2)$ olsun.

$f(A_1, A_2) = \dfrac{a_2}{a_1}$ ve $f_2(A_1, A_2) = \dfrac{a_1 a_2^* - a_2 a_1^*}{a_1^2}$ fonksiyonları $\mathrm{G}\mathbb{D}_1-$invaryant fonksiyonlar olduğu Teorem 16'da gösterildi.

27. $A = \{A_1, A_2\}, B = \{B_1, B_2\}$, $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, a_1 \neq 0,\ A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*,\ a_2 \neq 0$,

$B_1 = b_1 + \varepsilon b_1^*, b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0$, $B_2 = b_2 + \varepsilon b_2^* \in \mathbb{D}$ olsun. Bu takdirde $A \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1}$

ve $\dfrac{a_1 a_2^* - a_2 a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_2^* - b_2 b_1^*}{b_1^2}$ olduğu Teorem 17'de gösterildi.

28. $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*, a_1 \neq 0,\ A_2, ..., A_m \in \mathbb{D}$,

$f(A_1, A_2, ..., A_m) = f_1(A_1, A_2, ..., +A_m) + \varepsilon f_2(A_1, A_2, ..., A_m)$ olsun. $k \in \{2, 3, ..., m\}$

$f(A_1, A_2, ..., A_m) = \dfrac{a_k}{a_1}$ ve $f_2(A_1, A_2, ..., A_m) = \dfrac{a_1 a_k^* - a_k a_1^*}{a_1^2}$ fonksiyonları $\mathrm{G}\mathbb{D}_1-$ invaryant fonksiyonlar olduğu Teorem 18'de gösterildi.

29. $A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_m \in \mathbb{D},\ A = \{A_1, A_2, ..., A_m\},\ B = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ alalım.

$a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $A \overset{\mathrm{G}\mathbb{D}_1}{\sim} B \Leftrightarrow \dfrac{a_k}{a_1} = \dfrac{b_k}{b_1}$,

$\dfrac{a_1 a_k^* - a_k a_1^*}{a_1^2} = \dfrac{b_1 b_k^* - b_k b_1^*}{b_1^2}, k \in \{2, 3, ..., m\}$ olduğu Teorem 19'da gösterildi.

4. İRDELEME

Tezin amacı 2-boyutlu dual düzlem geometrisi problemlerini cebirsel yöntemlerle, özel olarak, dual sayılar teorisi yardımı ile incelemek oldu. Bu yöntemi kullanmak için dual sayılara ait bazı yeni bulgular elde edildi. Öncelikle 2-boyutlu dual düzlem geometrisinin temel gruplarından biri olan $\mathbb{D}_1$ grubu ve $G\mathbb{D}_1$ için G-denklik problemleri incelendi. Ardından $\mathbb{D}_1$ ile $G\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ ile $G\mathbb{D}_2$ ve $\mathbb{D}_3$ ile $G\mathbb{D}_3$ grupları arasındaki bağlantılar elde edildi.

5. SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçları şu şekilde sıralayabiliriz.

1. Dual sayılara ait bazı özellikler bulundu.
2. Bir dual sayının 2. tip mutlak değerinin özellikleri Önerme$\left[14-20\right]$'de elde edildi.
3. Önerme 21'de $\mathbb{D}_1$ İle $G\mathbb{D}_1$ arasındaki bağlantı ortaya çıkarıldı.
4. Önerme 47'de $\mathbb{D}_2$ İle $G\mathbb{D}_2$ arasındaki bağlantılar ortaya çıkarıldı.
5. Önerme 49'de $\mathbb{D}_3$ ile $G\mathbb{D}_3$ arasındaki bağlantılar ortaya çıkarıldı.
6. $\mathbb{D}_1$ denklik problemi bir nokta, iki nokta ve "n" tane nokta için Teorem $\left[8-15\right]$ ve Önerme $\left[23-35\right]$ 'de çözülmüştür.
7. $G\mathbb{D}_1$ denklik problemi Önerme $\left[36-45\right]$ ve Teorem $\left[15-19\right]$'da incelendi.

6. ÖNERİLER

Dual sayıların 2-boyutlu dual düzlemde bir nokta belirtmesi bu sayıları çok önemli yapar. Dual sayılar üzerine pek fazla kitap ve makale yazılmadığından burada araştırılması gereken konular mevcuttur. Bunlardan bazıları n tane dual noktanın $\mathbb{D}_2-$denklik ve $\mathbb{D}_3$ denklik şartları nelerdir? Fiziksel anlamları var mıdır?

Bu soruların cevapları araştırılmış ancak tam olarak sonuçlara ulaşılamamıştır. Bu soruların cevaplarını bulmak için biz bu sayıları 1- boyutta, 2-boyutta ve n-boyutta inceleyerek bulmaya çalıştık.

Tez çalışmasının önemi:

1. Dual sayıları anlamak ve önemli olduklarını göstermek.
2. Tezde kullanılan yöntemler dual sayılarda yeni yapılacak çalışmalarda önemlidir.
3. Tezde kullanılan yöntemler dual sayılarda noktalar sisteminin $\mathbb{D}_1-$ denklik probleminde ve kinematikte eğrilerin denklik probleminde önemlidir.
4. Bu problemlerin araştırılması bazı fiziksel (özel relativite) problemlerin çözümünde önemli olabilir.

7. KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H.H. , Hareket Geometri ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. 2, Ankara, 1983.

2. Angeles, J. , Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory , Methods and Algorithms , Springer-Verlag , New York , (2005).

3. Brodsky V. and Shoham M. , Asme J. Of Mecchanical Design, (1994), 116.

4. Bottema, O. and B. Roth. , Theoretical Kinematics, Amsterdam , (1979).

5. Study, E. , Geometrie der Dynamen, Leipzig, (1903).

6. Clifford, W. K. , Proc. London Mathematic Society, 4, (1873), 381.

7. Yücesan, A. , Çöken, A.C and Ayyıldız , N. , On the Dual Darboux Rotation Axis Of The Timlike Dual Space Curve, Balkan Society of Geometers , (2002).

8. Hacısalihoğlu, H.H. , Study Map Of a Circle , Journal of the FAC. SC. Of the K.T.Ü. I . Facs. (1977), 69-80.

9. Taleshian , A. , Application of Covariant Derivative in the Dual Space , Int. J. Contemp. Math. Sciences, 4 , 17, (2009), 821 – 826.

10. Fischer, I.S. , Dual-Numbers in Kinemathics and Dynamics. CRC Press Boca Raton (1999)

11. Pennestry E. , Stefanelli R. , Linear Algebra and Numerics Algorithms Using Dual Numbers , Springer Science , (2007)

12. Bandyopadhyay S. , Ghosal A. , Analtytical Determinetion of Principal Twists in Serial Paralel in Hybrid Manipulators Using Dual Vectors and Matrices , Departman of Mechanical Engineering , Indian Institute of Science , Bangalore , (2004).

13. Andrzej M. Frydryszak , Dual Numbers and Supersymmetric Mechanics , Instute of Theorical Physics , Universty of Wroklaw , Poland , (2005).

14. You-Liang Gu , Dual-Number Transformation abd Its Applications to Robotics , IEEE Journal of Robotics and Automation , (1987).

15. Köse Ö. , Kinematic Differential Geometry of a Rigid Body in Spatial , Applied Mathematics and Computation , (2006) , 17-29.

ÖZGEÇMİŞ

Muharrem TOMAR 18.10.1984 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini Samsun ili Belediye İlköğretim okulunda, ortaokulu Van Kazım Karabekir ortaokulunda, lise öğrenimini Giresun Espiye Lisesi'nde tamamladı. 2006 da 19 Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi matematik bölümünden mezun oldu. 2006 yılında Giresun'da yerel bir dershanede mesleki deneyimine başladı. 2008 yılı ara dönemde K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek lisansa kabul edildi. Halen Giresun Görele'de dershanede çalışmakta olup, orta derecede İngilizce bilmektedir.