KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLAR CEBİRLERİNDE KAPALI İDEALLER İLE BÖLGELERİN KONFORM DENKLİĞİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melek YAYLA

HAZİRAN 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLAR CEBİRLERİNDE KAPALI İDEALLER İLE BÖLGELERİN KONFORM DENKLİĞİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

Melek YAYLA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17.05.2011
Tezin Savunma Tarihi : 17.06.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Melek YAYLA tarafından hazırlanan

ANALİTİK FONKSİYONLAR CEBİRLERİNDE KAPALI İDEALLER İLE BÖLGELERİN KONFORM DENKLİĞİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 24 / 05/ 2011 gün ve 1406 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 17/06/2011 tarihinde yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ

Üye : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Üye : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans süresince, değerli zamanını ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan, tezin bu hale gelmesinde yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu güne gelene kadar bilgilerini benden esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim ve öğretim hayatım süresi içerisinde maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürler.

Melek YAYLA
Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Analitik Fonksiyonlar Cebirlerinde Kapalı İdealler İle Bölgelerin Konform Denkliğinin Cebirsel Karakterizasyonu” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ‘un sorumluluğunda tamamladığımı, örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 07/07/2011

Melek YAYLA

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

ANALİTİK FONKSİYONLAR CEBİRLERİNDE KAPALI İDEALLER İLE BÖLGELERİN KONFORM DENKLİĞİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

Melek YAYLA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
2011, 62 Sayfa

Bu tez çalışmasında analitik fonksiyon cebirleri üzerinde esas ideallerin topolojik, analitik fonksiyon cebirleri üzerinde tanımlı karakterlerin nokta karakterleri olduğu gösteriliyor. Ve son özellik kullanılarak kompleks düzlemde iki bölgenin konform eşdeğerliliğinin cebirsel bir karakterizasyonu veriliyor.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyonlar, Kapalı ve Esas İdealler, Kompleks Cebir, Konform Denklik.

Master Thesis

SUMMARY

CLOSED IDEALS on ALGEBRAS of ANALYTIC FUNCTIONS and ALGEBRAIC CHARACTERIZATION of CONFORMAL EQUIVALENCE of REGIONS

Melek YAYLA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematical Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
2011, 62 Pages

In this master thesis, it is shown that the principal ideals on analytic function algebras are topological, and the defined characters on analytical function algebras are point characters, and by using the last property , an algebraic characterization of conformal equivalance of two regions on complex plane is given.

Key Words: Analytic Functions, Closed and Principal Ideals, Complex Algebra, Conformal Equivalence

SEMBOLLER DİZİNİ

$\forall$	Her
$\exists$	Vardır
..	Öyle ki
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
o	Bileşke işlemi
$\subset$	Alt küme
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Arakesit
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Tam sayılar kümesi
$\wp\ X$	X kümesinin güç kümesi
$\lvert z \rvert$	z’nin modülü
$\bar{z}$	z’nin eşleniği
$\lVert f \rVert_K$	f’nin K normu
$A\ \mathbb{C}$	Analitik fonksiyonlar kümesi
$f^{\ n}$	f fonksiyonunun n. mertebeden türevi
$\int$	integral
$Z\ \ f$	f fonksiyonunun sıfır yerlerinin kümesi
R	Halka
M	M tarafından üretilen
$\rightarrow$	Yakınsar
$m\ \ f;a$	f fonksiyonunun a noktasındaki mertebesi

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Metrik Uzaylar

Tanım 1.1.1 : $X \neq \varnothing$ verilen bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon ise; d 'ye X üzerinde bir metrik ve $(X;d)$ ikilisine bir metrik uzay denir.

i. $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ dır.

ii. $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = 0$ dır $\Leftrightarrow x = y$ ise.

iii. $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ dir.

iv. $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ dir.

Örnek 1.1.2 : $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. $x \in \mathbb{R}$ için, $|x| := \begin{cases} x, & \text{x} \geq 0 \\ -x, & \text{x<0} \end{cases}$ olsun.

$$e = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu; $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $e(x,y) := |x - y|$ şeklinde tanımlanırsa; $e, \mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. e'ye $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı Öklit Metriği ve $(\mathbb{R};e)$ metrik uzayına 1- boyutlu Öklit Metrik uzayı denir.

Örnek 1.1.3 : $X \neq \varnothing$ olan bir küme ve $B(X;\mathbb{C}), X$ üzerinde tanımlı kompleks değerli tüm sınırlı fonksiyonların kümesi, yani

$B(X;\mathbb{C}) := \{ f : f : X \to \mathbb{C} \text{ ve } \exists M_f > 0 \therefore \forall x \in X \ |f(x)| \leq M_f \}$ olsun. X üzerinde tanımlı iki sınırlı fonksiyonun toplamı, çarpımı ve sabit bir kompleks sayı ile bir sınırlı fonksiyonun çarpımı sınırlı olduğundan; $\forall f, g \in B(X;\mathbb{C})$ için $\{ |f(x) - g(x)| : x \in X \} \subset \mathbb{C}$ alt kümesi boştan farklı ve üstten sınırlı bir kümedir. Dolayısıyla

$\sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in X \}$ vardır. O halde, $d_\infty : B(X;\mathbb{C}) \times B(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$\forall f,g\in B(X;\mathbb{C})$ için $d_\infty(f,g):=\sup\{|f(x)-g(x)|:x\in X\}$ şeklinde tanımlanırsa; d_∞ fonksiyonu $B(X;\mathbb{C})$ üzerinde bir metriktir. $(B(X;\mathbb{C}),d_\infty)$ metrik uzayına, X üzerinde tanımlı kompleks değerli tüm sınırlı fonksiyonların supremum metriğine göre oluşturulan metrik uzayı denir.

1.2. Metrik Uzaylarda Açık,Kapalı Kümeler ve Bir Alt Kümenin Kapanışı ,Sınırı

Tanım 1.2.1 : (X,d) bir metrik uzay ve $x,y\in X$ ise; $d(x,y)\geq 0$ sayısına, x noktasının y noktasına olan uzaklığı denir.

Tanım 1.2.2 : (X,d) bir metrik uzay $a\in X$ ve $r>0$ olsun. Bu taktirde; X ' in

$$B_d(a;r):=\{x:d(x,a)<r,\ x\in X\}\subset X$$

ve $$\overline{B_d}(a;r):=\{x:d(x,a)\leq r,\ x\in X\}\subset X$$

alt kümelerine sırası ile; (X,d) metrik uzayında $a-$ merkezli ve $r-$ yarıçaplı bir açık top ve $a-$ merkezli ve $r-$yarıçaplı bir kapalı top denir.

Tanım 1.2.3 : (X,d) bir metrik uzay, $A\subset X$ ve $x_0\in X$ olsun. $B_d(x_0,r_0)\subset A$ olacak şekilde bir $r_0>0$ sayısı varsa; $x_0\in A$ noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin içi denir ve A^o ile gösterilir. A' nın her noktası bir iç nokta ise; A alt kümesine (X,d) metrik uzayında bir açık alt küme veya A' ya X ' in d metriğine göre bir açık alt kümesi denir.

Teorem 1.2.4 : (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde, X ve $\varnothing$ kümelerinin her biri d metriğine göre X 'in birer açık alt kümesidir. (Munkres,1975)

Teorem 1.2.5 : (X,d) bir metrik uzay, $a\in X$ ve $r>0$ ise; $B_d(a;r)\subset X$ açık topu, (X,d) metrik uzayında bir açık alt kümedir (Munkres,1975).

Teorem 1.2.6 : (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde;

i. Λ bir damga kümesi olmak üzere; $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \wp(X)$ bir açık küme ailesi ise; $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset X$ alt kümesi bir açık alt kümedir $(Munkres, 1975)$.

ii. $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere; $\{O_1,O_2,\cdots,O_m\}\subset\wp(X)$ sonlu elemanlı bir açık küme ailesi ise;

$\bigcap_{k\in\{1,\cdots,m\}} O_k \subset X$ alt kümesi bir açık alt kümedir $(Munkres, 1975)$.

Uyarı 1.2.7 : (X,d) bir metrik uzay ise; (X,d) metrik uzayında sonlu elemanlı olmayan bir $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\wp(X)$ açık küme ailesinin arakesiti olan $O:=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset X$ alt kümesinin bir açık alt küme olması gerekmez.

Örnek olarak; $\forall n\in\mathbb{N}$ için $O_n := \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\subset\mathbb{R}$ alt kümeleri $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında bir açık alt kümedir. Fakat sonlu elemanlı olmayan $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset\wp(\mathbb{R})$ açık altküme ailesi için $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \{0\}$ ve $\{0\}\subset\mathbb{R}$ altkümesi, $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında bir açık alt küme olmadığından; $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \subset\mathbb{R}$ alt kümesi, $(\mathbb{R},e)$ metrik uzayında bir açık alt küme değildir.

Tanım 1.2.8 : (X,d) bir metrik uzay, $A\subset X$ ve $x_0\in X$ olsun. $\forall r>0$ sayısı için

$$A\cap B_d(x_0;r)\neq\varnothing$$

ise; $x_0\in X$ noktasına A alt kümesinin bir kapanış noktası denir.

$A\subset X$ alt kümesinin tüm kapanış noktalarından oluşan X ' in alt kümesine, A ' nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Şu halde;

$\overline{A} := \{x : x\in X \text{ ve } \forall r>0 \text{ icin } A\cap B_d(x;r)\neq\varnothing\}$ dir.

Tanım 1.2.9 : (X,d) bir metrik uzay $K\subset X$ olsun. Eğer $K^c := X\setminus K\subset X$, X ' in bir açık alt kümesi ise; K 'ya X ' in bir kapalı alt kümesi denir.

Teorem 1.2.10 : (X,d) bir metrik uzay ve $A\subset X$ ise $\overline{A}:=\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapalı} \\ A\subset K}} K$ dır.

İspat: $A=\varnothing$ ise iddia doğrudur. $A\neq\varnothing$ olması halinde iddianın doğru olduğunu gösterelim. Önce $\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapalı} \\ A\subset K}} K\subset\overline{A}$ olduğunu gösterelim. $x_0\in\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapalı} \\ A\subset K}} K$ olsun. $x_0\in\overline{A}$ olduğu yani $\forall r_0>0$ için $B_d(x_0;r_0)\cap A\neq\varnothing$ olduğu gösterilirse $\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapalı} \\ A\subset K}} K\subset\overline{A}$ olur.

Varsayalım ki bir $r_0>0$ için $B_d(x_0;r_0)\cap A=\varnothing$ olsun. O halde $A\subset\left(B_d(x_0;r_0)\right)^c$ dir. $x_0\in\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapalı} \\ A\subset K}} K$, $A\subset\left(B_d(x_0;r_0)\right)^c$ ve $\left(B_d(x_0;r_0)\right)^c\subset X$ kapalı olduğundan $x_0\in\left(B_d(x_o;r_o)\right)^c$ yani $x_0\notin B_d(x_o;r_o)$ elde edilir ki; bu bir çelişkidir. Çelişki, bir $r_0>0$ için $B_d(x_o;r_o)\cap A=\varnothing$ varsayımından kaynaklandığından $\forall r>0$ için $B_d(x_o;r_o)\cap A\neq\varnothing$ yani $x_0\in\overline{A}$ olur. Öyleyse;

$$\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapalı} \\ A\subset K}} K\subset\overline{A} \tag{1}$$

dir.

Tersine olarak $\overline{A}\subset\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapali} \\ A\subset K}} K$ olduğunu gösterelim.Varsayalım ki;

$\overline{A}\not\subset\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapali} \\ A\subset K}} K$ olsun. Bu durumda $\exists x_0\in\overline{A}\therefore x_0\notin\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapalı} \\ A\subset K}} K$ dir. O halde $\exists K_o\subset X$ kapalı alt kümesi öyle ki $x_0\notin K_0$, $x_0\in K_0^{\,c}$ dir. Bu durumda $B_d(x_0;r_0)\cap K_0=\varnothing$ dolayısıyla $B_d(x_0;r_0)\cap A=\varnothing$ olur. Bu ise $x_0\in\overline{A}$ olması ile çelişir. O halde

$$\overline{A}\subset\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapali} \\ A\subset K}} K \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) den $\overline{A}:=\bigcap\limits_{\substack{K\subset X \text{ kapali} \\ A\subset K}} K$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, herhangi bir kapalı küme ailesinin arakesiti daima kapalı bir alt küme olduğundan; $\overline{A} := \bigcap_{\substack{K\subset X \text{ kapali} \\ A\subset X}} K$ olması daima $\overline{A} \subset X$ alt kümesi bir kapalı alt kümedir. Ayrıca; diğer taraftan $A \subset X$ kapalı bir alt küme ise $\overline{A} = A$ dır.

Teorem 1.2.11 : (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde X ve $\varnothing$ kümelerinin her biri d metriğine göre X ' in birer kapalı alt kümesidir $(Munkres, 1975)$.

Teorem 1.2.12 : (X,d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ ise; $\overline{B_d}(a;r) \subset X$ kapalı topu, (X,d) metrik uzayında bir kapalı alt kümedir $(Munkres, 1975)$.

Teorem 1.2.13 : (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde;

i. Λ bir damga kümesi olmak üzere; $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \wp(X)$ bir kapalı küme ailesi ise;

$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \subset X$ alt kümesi bir kapalı alt kümedir $(Munkres, 1975)$.

ii. $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $\{K_1, K_2, \cdots, K_m\} \subset \wp(X)$, sonlu elemanlı bir kapalı küme ailesi ise;

$\bigcup_{\ell\in\{1,\cdots,m\}} K_\ell \subset X$ alt kümesi bir kapalı alt kümedir $(Munkres, 1975)$.

Uyarı 1.2.14 : (X,d) bir metrik uzay ise; (X,d) metrik uzayında sonlu elemanlı olmayan bir kapalı $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \wp(X)$ küme ailesinin birleşimi olan $K := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda \subset X$ alt kümesinin bir kapalı alt küme olması gerekmez. Örnek olarak; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $K_n := \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ alt kümeleri, $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayında bir kapalı alt kümedir. Fakat sonlu elemanlı olmayan $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\mathbb{R})$ kapalı alt küme ailesi için $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = [0,1)$ ve $[0,1) \subset \mathbb{R}$ alt kümesi, $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayında bir kapalı alt küme olmadığından; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \mathbb{R}$ alt kümesi, $(\mathbb{R}, e)$ metrik uzayında bir kapalı alt küme değildir.

Tanım 1.2.15 : (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun.

$d(x_0;A) := \inf\{d(x;x_0), x \in A\} \geq 0$ genişletilmiş reel sayısına x_0 noktasının A kümesine olan uzaklığı denir.

$d(x_0;\varnothing) = +\infty$ olduğu tanımdan açıktır. Diğer taraftan kolayca gösterilir ki $\varnothing \neq A \subset X$ alt kümesinin sınırlı bir alt küme olması için gerek ve yeter şart; $d(x_0;A)$'nın sonlu olmasıdır.

Teorem 1.2.16 : (X,d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ kapalı bir alt küme $x_0 \in K^c$ ise, $d(x_0;K) > 0$ dır.

İspat: $K \subset X$ kapalı bir alt küme ise, K^c açıktır. O halde $K \cap K^c = \varnothing$ dır. $x_0 \in K^c$ için; $d(x_0;K) := \inf\{|x_0 - w| : w \in K\}$ idi. $x_0 \in K^c$ olduğundan $x_0 \notin K$ dir. $x_0 \in K^c$ ve K^c

açık olduğundan $D(x_0;r_0) \subset K^c$ olan bir $r_0 > 0$ sayısı vardır. $K \cap K^c = \varnothing$ olduğundan

$K \cap D(x_0;r_0) = \varnothing$ olur. O halde $\forall w \in K$ için $w \notin D(x_0;r_0)$ olup $|x_0 - w| \geq r_0$ dır. O halde $\forall w \in K$ için $|x_0 - w| \geq r_0$ olduğundan $r_0 > 0$ sayısı;

$\{|x_0 - w| : w \in K\} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kümesinin bir alt sınırıdır. O halde $0 < r_0 \leq \inf\{|x_0 - w| : w \in K\} = d(x_0;K)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 1.2.17 : (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall r > 0$ sayısı için

$A \cap (B_d(x_0;r) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ ise; $x_0 \in X$ noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir.

$A \subset X$ alt kümesinin tüm yığılma noktalarından oluşan X ' in alt kümesine, A ' nın türev kümesi denir ve A' ile gösterilir.

Tanım 1.2.18: (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. $\forall r > 0$ sayısı için

$A \cap B_d(x_0;r) \neq \varnothing$ ve $A^c \cap B_d(x_0;r) \neq \varnothing$ ise; $x_0 \in X$ noktasına A kümesinin bir sınır noktası denir.

$A \subset X$ alt kümesinin tüm sınır noktalarından oluşan X ' in alt kümesine, A ' nın sınır kümesi denir ve ∂A ile gösterilir.

1.3.Ayrık,Yoğun, Yoğun Olmayan,Sınırlı ve Kompakt Alt Kümeler

Tanım 1.3.1 : (X,d) bir metrik uzay , $A \subset X$ ve $x_0 \in A$ olsun. $A \cap B_d(x_0;r_0) = \{x_0\}$ olacak şekilde bir $r_0 > 0$ sayısı var ise bu $x_0 \in A$ noktasına A ' nın bir ayrık noktası denir. Eğer A ' nın her elemanı bir ayrık nokta ise bu A 'ya X 'in bir ayrık alt kümesi denir.

Tanım 1.3.2 : (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\overline{A} = X$ ise; A ' ya X ' in bir yoğun alt kümesi denir.

Tanım 1.3.3 : (X,d) bir metrik uzay ve $E \subset X$ olsun. $\left(\overline{E}\right)^o = \varnothing$ ise; E ' ye X ' in hiçbir yerde yoğun olmayan bir alt kümesi denir.

Teorem 1.3.4 : (X,d) bir metrik uzay ve $E \subset X$ olsun. E ' nin X ' in hiçbir yerde yoğun olmayan bir alt kümesi olması için gerek ve yeter koşul, $\left(\overline{E}\right)^c \subset X$ alt kümesinin yoğun olmasıdır.

İspat: $\left(\overline{E}\right)^0 = \varnothing$ ise; $\overline{\left(\overline{E}\right)^c} = X$ dir. $\left(\overline{E}\right)^0 = \varnothing$ olduğundan $\forall x \in X$ için $x \notin \left(\overline{E}\right)^0$ dir. $x \notin \left(\overline{E}\right)^0$ olması ya $x \notin \overline{E}$ veya $x \in \overline{E}$ fakat $\forall r > 0$ için $B_d(x;r) \not\subset \overline{E}$ olduğunu gösterir.

$x \notin \overline{E}$ ise $x \in \left(\overline{E}\right)^c$ ve $\left(\overline{E}\right)^c \subset \overline{\left(\overline{E}\right)^c}$ olduğundan $x \in \overline{\left(\overline{E}\right)^c}$ olur. $x \notin \left(\overline{E}\right)^o$ için $x \in \overline{E}$ ve $\forall r > 0$ için $B_d(x;r) \not\subset \overline{E}$ ise, $\forall r > 0$ için $B_d(x;r) \cap \left(\overline{E}\right)^c \neq \varnothing$ dir. $x \notin \left(\overline{E}\right)^0$ için $x \in \overline{E}$ ve $\forall r > 0$ için $B_d(x;r) \not\subset \overline{E}$ olması halinde $\forall r > 0$ için $B_d(x;r) \cap \left(\overline{E}\right)^c \neq \varnothing$ olduğundan $x \in \overline{\left(\overline{E}\right)^c}$ olur. Sonuç olarak; $\left(\overline{E}\right)^o = \varnothing$ ise, $\forall x \in X$ için $x \in \overline{\left(\overline{E}\right)^c}$ olduğundan $X = \overline{\left(\overline{E}\right)^c}$ olur.

Tersine olarak; $\overline{\left(\overline{E}\right)^c} = X$ ise $\left(\overline{E}\right)^o = \varnothing$ dır. Farz edelim ki $\left(\overline{E}\right)^o \neq \varnothing$ olsun. O halde; $x_0 \in \left(\overline{E}\right)^o$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X$ noktası vardır. $\overline{\left(\overline{E}\right)^c} = X$ olduğundan $x_0 \in \overline{\left(\overline{E}\right)^c}$ dir. $x_0 \in \left(\overline{E}\right)^o$ olduğundan $B_d\left(x_0; r_0\right) \subset \overline{E}$ olan en az bir $r_0 > 0$ sayısı vardır ve bu $r_0 > 0$ sayısı $B_d\left(x_0; r_0\right) \cap \left(\overline{E}\right)^c = \varnothing$ olur ki; bu $x_0 \in \overline{\left(\overline{E}\right)^c}$ olması ile çelişir. O halde; $\overline{\left(\overline{E}\right)^c} = X$ ise $\left(\overline{E}\right)^o = \varnothing$ olmak zorundadır.

Tanım 1.3.5 : (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset B_d\left(x_0; r_0\right)$ olacak şekilde bir

$x_0 \in X$ ve $r_0 > 0$ sayısı var ise bu $A \subset X$ alt kümesine, bir sınırlı alt küme denir.

Tanım 1.3.6 : (X, d) bir metrik uzay ve A bu uzayın herhangi bir alt kümesi olsun. Her $\lambda \in L$ için A_λ kümesi (X, d) metrik uzayının bir açık alt kümesi olmak üzere, $\left\{A_\lambda\right\}_{\lambda \in L}$ ailesi için $A \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ bağıntısı gerçekleniyorsa, $\left\{A_\lambda\right\}_{\lambda \in L}$ açık küme ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir.

Tanım 1.3.7 : (X, d) bir metrik uzay ve K bu uzayın bir alt kümesi olsun. K kümesinin her açık örtülüşü, sonlu sayıda açık kümelerden oluşan bir sonlu örtülüşü seçilebilirse, yani $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ şartını sağlayan her $\left\{A_\lambda\right\}_{\lambda \in L}$ açık küme ailesi verildiğinde L indisler kümesinin $\left\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right\} \subset L$ gibi sonlu bir alt kümesi, $\forall i \in (1, n)$ için $A_{\lambda_i} \in \left\{A_\lambda\right\}_{\lambda \in L}$ olmak üzere;

$K \subset \bigcup_{i \in (1,n)} A_{\lambda_i}$ olacak şekilde bulunabilir ise, K kümesine X ' in bir kompakt alt kümesi denir.

1.4. Metrik Uzaylarda Yakınsak Diziler, Cauchy Dizileri ve Tam Metrik Uzaylar

Tanım 1.4.1 : (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X kümesinin noktalarından oluşan bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir. Öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası bulunabilirse $\{x_n\}$dizisine X kümesi üzerinde d metriğine göre yakınsak bir dizi ve x_0 noktasına d metriğine göre bir limit denir.

(X,d)bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X kümesinin noktalarından oluşan bir dizi olsun. $\{x_n\}$dizisi d metriğine göre yakınsak ve limit x_0 noktası ise,

$$n \to +\infty \text{ için } x_n \xrightarrow{d} x_0 \text{ veya } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \text{ veya } \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0) = 0$$

notasyonlarından biri ile gösterilir.

Teorem 1.4.2 : (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X uzayının noktalarından oluşan bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisi d metriğine göre yakınsak ise limiti tektir(*Munkres*,1975).

Teorem 1.4.3 : (X,d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. $x_0 \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter koşul; $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset A$ dizisinin mevcut olmasıdır.

İspat: $x_o \in \overline{A}$ ise; $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ olacak şekilde bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi vardır. Gerçekten;

$x_0 \in \overline{A}$ olduğunda; $\forall r > 0$ sayısı için $A \cap B_d(x_0; r) \neq \varnothing$ dır. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$ için; $A \cap B_d\left(x_0; \frac{1}{n}\right) \neq \varnothing$ olduğundan; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A \cap B_d\left(x_0; \frac{1}{n}\right) \neq \varnothing$ olan bir $\{x_n\} \subset A$ dizisi vardır. Bu $\{x_n\} \subset A$ dizisi; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ koşulunu sağladığından $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ dır.

Tersine olarak; $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ olan bir $\{x_n\}\subset A$ dizisi varsa; $x_0 \in \overline{A}$ dir. $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ olduğundan $\forall r>0$ sayısı için $\exists N(r)\in\mathbb{N} \therefore \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için $d(x_n,x_0)<r$ dir. $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için $d(x_n,x_0)<r$ olması; $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için $x_n \in B_d\left(x_0;\frac{1}{n}\right)$ olduğunu gösterir. O halde; $\{x_n\}\subset A$ olduğundan, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için

$x_n \in A\cap B_d\left(x_0;\frac{1}{n}\right)\neq\varnothing$ dir. Sonuç olarak; $\forall r>0$ sayısı için $A\cap B_d\left(x_0;\frac{1}{n}\right)\neq\varnothing$ olduğundan $x_0\in\overline{A}$ dir.

Tanım 1.4.4 : $\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ için; $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \therefore \forall m,n\in\mathbb{N}$, m ve $n\geq N(\varepsilon)$ için $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ ise; $\{x_n\}$dizisine d metriğine göre bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 1.4.5 : (X,d)bir metrik uzay ve $\{x_n\}$bu uzayda bir yakınsak dizi ise $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir$(Munkres, 1975)$.

Uyarı 1.4.6 : Teorem'in tersi genel olarak doğru değildir. $(\mathbb{R},e)$ Öklit Metrik uzayı ve $((0,1],e)$, $(\mathbb{R},e)$'nin alt uzayı olsun. $\left\{\frac{1}{n}\right\}\subset(0,1]$ dizisi, $((0,1],e)$ alt metrik uzayında bir Cauchy dizisidir fakat $\left\{\frac{1}{n}\right\}\subset(0,1]$ dizisi metrik $((0,1],e)$ uzayında yakınsak değildir.

Tanım 1.4.7 :(X,d) bir metrik uzay olsun. X uzayında d metriğine göre Cauchy dizisi olan her dizi yakınsak ise(X,d) metrik uzayına bir tam metrik uzayı denir.

Teorem 1.4.8 : $X\neq\varnothing$ olan bir küme ise $(B(X;\mathbb{R}),d_\infty)$ metrik uzayı bir tam metrik uzaydır.

İspat: $\{f_n\}$, $(B(X;\mathbb{R}),d_\infty)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde; $\forall\varepsilon>0$ sayısı için bir $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır, öyle ki; $x\in X$ keyfi fakat sabit alındığında;

$$\forall m,n\in\mathbb{N};\ m \text{ ve } n\geq N(\varepsilon) \text{ icin; } \left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{3}$$

olur. Bu ise $\{f_n\}$ reel sayı dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. O halde $\{f_n\}$ dizisi yakınsaktır. X ' den $\mathbb{R}$ ' ye tanımlı ve $\forall x\in X$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ değerini alan fonksiyon f olsun. Buna göre $f(x):=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ dır.

i. $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlıdır yani $f\in B(X,\mathbb{R})$ dir.

Gerçekten; $x\in X$ için $f(x):=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ olduğundan,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists N_x(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \therefore\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_x(\varepsilon) \text{ için } \left|f(x)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

dir.

$x\in X$ verildiğinde (3) ve (4)' ye göre $n_x\in\mathbb{N}$ sayısı, $n_x>\max\{N_x(\varepsilon)-N(\varepsilon)\}$ olacak şekilde seçilirse; (3) ve (4) den

$$\left|f(x)\right|=\left|f(x)-f_{n_x}(x)+f_{n_x}(x)-f_{N(\varepsilon)}(x)+f_{N(\varepsilon)}(x)\right|$$

$$\left|f(x)\right|\leq\left|f(x)-f_{n_x}(x)\right|+\left|f_{n_x}(x)-f_{N(\varepsilon)}(x)\right|+\left|f_{N(\varepsilon)}(x)\right|$$

$$\left|f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\left|f_{N(\varepsilon)}(x)\right| \tag{5}$$

olur. Eğer $\varepsilon=2$ alınmış olsa idi, (5) den $x\in X$ için $\left|f(x)\right|<f_{N(1)}(x)$

olur. Fakat $f_{N(1)}\in B(X,\mathbb{R})$ olduğundan $\exists M_{f_n}\geq 0\ \therefore\ \forall u\in X$ için $\left|f_{N(1)}(u)\right|\leq M_{f_n}$ dir.

O halde $\forall x\in X$ için $\left|f(x)<2+M_{f_n}\right|$ elde edilir ki, bu $f\in B(X;\mathbb{R})$ olduğunu gösterir.

ii. $\{f_n\}$ dizisi, $(B(X;\mathbb{R}),d_\infty)$ metrik uzayında $f\in B(X;\mathbb{R})$ fonksiyonuna yakınsaktır. $\forall\varepsilon>0$ sayısı ve $\forall x\in X$ verildiğinde $N(\varepsilon)$, $N_x\in\mathbb{N}$ doğal sayıları (3)ve

(4) deki sayılar olmak üzere; $x \in X$ için $n_x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $n_x > \max\{N_x(\varepsilon) - N(\varepsilon)\}$ olacak şekilde seçildiğinde; $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq N(\varepsilon)$ ve $\forall x \in X$ için;

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|f_n(x) - f_{N(\varepsilon)}(x) + f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{n_x}(x) + f_{n_x}(x) - f(x)\right| ,$$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \left|f_n(x) - f_{N(\varepsilon)}(x)\right| + \left|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{n_x}(x)\right| + \left|f_{n_x}(x) - f(x)\right| ,$$

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$

$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \dfrac{3\varepsilon}{4}$ olup, $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq N(\varepsilon)$ için $\sup\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right| : x \in X\right\} \leq \dfrac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$ olduğundan; $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N(\varepsilon)$ için $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$ olur. O halde $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = f$ dir. $\left(B(X;\mathbb{R}), d_\infty\right)$ metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan; $\left(B(X;\mathbb{R}), d_\infty\right)$ bir tam metrik uzaydır.

Teorem 1.4.9 : (X,d) bir tam metrik uzay ve $\varnothing \neq Y \subset X$ olsun. (Y,d) alt metrik uzayının bir tam metrik uzay olması için gerek ve yeter şart $Y \subset X$ altkümesinin bir kapalı küme olmasıdır.

İspat: $Y \subset X$ bir kapalı alt küme ise; (Y,d) alt metrik uzayı bir tam metrik uzaydır. (Y,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

$$\therefore \forall m,n \in \mathbb{N}\ ,m \text{ ve } n \geq N(\varepsilon) \text{ için } d(y_n, y_m) < \varepsilon$$

dir . $Y \subset X$ olduğundan $\{y_n\}$, X ' in noktalarından oluşan bir dizidir. O halde $\{y_n\}$, (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. O halde, (X,d) bir tam metrik uzay olduğundan; $\exists x \in X \therefore \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$ dir. $Y \subset X$ alt kümesi kapalı, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Y$ ve $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$ olduğundan $x \in Y$ olur. Böylece (Y,d) alt metrik uzayında alınan herhangi bir $\{y_n\}$ Cauchy dizisinin (Y,d) metrik uzayında yakınsak olduğu gösterildi. O halde (Y,d) alt metrik uzayı bir tam metrik uzaydır.

(Y,d) alt metrik uzayı tam ise; $Y \subset X$ alt kümesi, bir kapalı alt kümedir. $\{y_n\} \subset Y$ yakınsak ve limiti $x \in X$ olan bir dizi olsun. $x \in Y$ olduğu gösterilirse; $Y \subset X$ alt kümesi bir kapalı alt kümedir. $\lim_{n\to+\infty} y_n = x$ olduğundan $\{y_n\}$, (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. O halde $\{y_n\}$, (Y,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. O halde; (Y,d) alt metrik uzayı bir tam metrik uzay olduğundan; $\{y_n\} \subset Y$ dizisi, (Y,d) alt metrik uzayında yakınsaktır.

$y \in Y$ için $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ olsun. $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ ve $\lim_{n\to+\infty} y_n = x$ olduğundan; $x = y \in Y$ olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 1.4.10 : (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $A \subset X$, $f : A \subset X \to Y$ ve $x_0 \in A$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(x_o,\varepsilon) > 0 \therefore d(x,x_o) < \delta(x_o,\varepsilon)$ olan $\forall x \in A$ için, $\rho(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$ ise f 'ye $x_0 \in A$ noktasında süreklidir denir.

Teorem 1.4.11 : (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $A \subset X$, $f : A \subset X \to Y$ olsun. f fonksiyonunun $x_0 \in A$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart (X,d) metrik uzayında A 'nın noktalarından oluşan ve $x_0 \in A$ noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ yakınsak dizisi için $\{f(x_n)\}$ dizilerinin (Y,ρ) metrik uzayında yakınsak ve $\lim_{n+\to\infty} \rho(f(x_n), f(x_0)) = 0$ olmasıdır$(Munkres,1975)$.

Tanım 1.4.12 : (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $A \subset X$, $f : A \subset X \to Y$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(A,\varepsilon) > 0 \therefore d(x_1,x_2) < \delta(A,\varepsilon)$ olan $\forall x_1, x_2 \in A$ için $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ ise; $f : A \subset X \to Y$ dönüşümüne A üzerinde düzgün süreklidir denir.

Tanımdan görülüyor ki $A \subset X$, $f : A \subset X \to Y$ dönüşümü düzgün sürekli ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir. Bunun tersi genelde doğru değildir.

Örnek 1.4.13 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir fakat düzgün sürekli değildir.

Yine, $g:(0,1)\to\mathbb{R}, g(x):=\frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli ancak düzgün sürekli değildir.

1.5 Kompleks Düzlemin Topolojisi

Tanım 1.5.1 : $\mathbb{C}$ kompleks düzlem ve $z=x+iy\in\mathbb{C}$ olsun. $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ sayısına $z\in\mathbb{C}$ kompleks sayısının modülü ve $\overline{z}:=x-iy\in\mathbb{C}$ kompleks sayısına, $z\in\mathbb{C}$ kompleks sayısının eşleniği denir.

Tanımdan görüldüğü üzere; $\overline{\overline{z}}=z, |\overline{z}|=|z|, |-z|=|z|\ ve\ |z|^2=z.\overline{z}$ dir.

Teorem 1.5.2 : $z, z_1, z_2\in\mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde

i. $|z|=0$ dır ancak ve ancak $z=0$ ise.

ii. $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ için $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ dir.

iii. $z_2\neq 0$ ise $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ dir.

iv. $|z_1\mp z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dir.

v. $\left||z_1|-|z_2|\right|\leq|z_1\mp z_2|$ dir.

iv ve ***v*** üçgen eşitsizliği olarak bilinir$($*Freitag ve Busam*, 2005$)$.

Teorem 1.5.3 : $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ve $z\in\mathbb{C}$ olsun.

$$e:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu; $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için $e(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$ şeklinde tanımlanırsa; e $\mathbb{C}$ üzerinde bir metriktir. e'ye $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı Öklit Metriği ve $(\mathbb{C}; e)$ metrik uzayına Kompleks Öklit Metrik uzayı denir.

$(\mathbb{C}; e)$ metrik uzayı bir tam metrik uzayıdır $(Munkres, 1975)$

Teorem 1.5.4 **[Heine – Borel Teoremi]:** $\varnothing \neq K \subset \mathbb{C}$ olsun. K'nın kompakt bir alt küme olması için gerek ve yeter şart K'nın kapalı ve sınırlı bir alt küme olmasıdır $(Ahlfors,\ 1979)$.

Teorem 1.5.5 **[Bolzano – Weierstrass Teoremi]:** $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin sonsuz elemanlı kompakt her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır $(Ahlfors, 1979)$.

Teorem 1.5.6 : $G \neq \varnothing$, $\mathbb{C}$ de açık bir alt küme ise; aşağıdaki şartları sağlayan kompakt bir $\{K_n\}$ ailesi vardır.

i. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subset G$ kompakttır.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varnothing \neq K_n$ ve $K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1}$ dir.

iii. $K \subset G$ herhangi bir kompakt alt küme ise $K \subset K_{n_K}$ olacak şekilde bir $n_K \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.

iv. $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ dir.

$\{K_n\} \subset \wp(G)$ kompakt küme ailesine $G \subset \mathbb{C}$ açık alt kümesinin bir kompakt tüketilişi denir.

İspat : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $K_n := \overline{D}(0,n) \cap \{z : z \in G$ ve $\forall w \in \mathbb{C} \setminus G$ için $|z - w| \geq 1/n\}$ olsun.

i. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\overline{D}(0,n)$ kapalı daireleri kapalı ve sınırlı birer alt küme $\forall n \in \mathbb{N}$ için , $\{z : z \in G$ ve $\forall w \in \mathbb{C} \setminus G$ için $|z - w| \geq 1/n\} \subset \mathbb{C}$ alt kümeleri kapalı olduğundan; kapalı alt kümelerin arakesitlerinin daima kapalı olduğu göz önüne alındığında **;** $\forall n \in \mathbb{N}$ için K_n alt kümelerinin her biri kompleks düzlemde kapalı ve sınırlıdır. Dolayısıyla Heine-Borel Teoremi'ne göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için K_n alt kümeleri kompakttır.

ii. A ve B, $\mathbb{C}$'nin herhangi iki alt kümesi olsun. $\overset{o}{\left(A \cap B\right)} = A^o \cap B^o$ olduğundan

$$\overset{o}{K}_{n+1} = \left[\bar{D}(0,n+1) \cap \{z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| \geq 1/n+1\}\right]^o,$$

$$\overset{o}{K}_{n+1} = \bar{D}(0,n+1)^o \cap \{z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| \geq 1/n+1\}^o,$$

$$\overset{o}{K}_{n+1} = D(0,n+1) \cap \{z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| > 1/n+1\} \text{ dir.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\bar{D}(0,n) \subset D(0,n+1)$ ve

$$\left\{z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| \geq \frac{1}{n}\right\} \subset \left\{z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| > \frac{1}{n+1}\right\}$$

olduğundan ;

$$K_n = \bar{D}(0,n) \cap \{z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| \geq 1/n\},$$

$$K_n \subset D(0,n+1) \cap \{z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| > 1/n+1\},$$

$$K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1}$$

dir.

iii. $K \subset G$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. $K = \varnothing$ ise $1 \in \mathbb{N}$ için $K \subset K_1$ dir. $K \neq \varnothing$ olsun. K kompakt olduğundan K kapalı ve sınırlıdır. $K \subset G$ sınırlı olduğundan $K \subset \bar{D}(0,n_1)$ olan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. $K \subset G$ kompakt $\mathbb{C} \setminus G$ kapalı ve $K \cap \mathbb{C} \setminus G = \varnothing$ olduğundan $d(K, \mathbb{C} \setminus G) > 0$ dır. O halde $d(K, \mathbb{C} \setminus G) > 1 \setminus n_2$ olan bir $n_2 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. $d(K, \mathbb{C} \setminus G) = \inf\{|z-w| : z \in K \text{ ve } w \in \mathbb{C} \setminus G\}$ olduğundan $n_2 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı $\forall z \in K$ ve $w \in \mathbb{C} \setminus G$ için $|z-w| \geq d(K, \mathbb{C} \setminus G) > 1/n_2$

koşulunu sağlar. Dolayısıyla $K \subset \{ z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| \geq 1/n_2 \}$dir. O halde $n_k := \max\{ n_1, n_2 \}$ alınırsa;

$$K_{n_k} := \bar{D}(0, n_K) \cap \{ z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| \geq 1/n_K \}$$

olduğundan $K \subset K_{n_k}$ olur ve ispat tamamlanır.

iv. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subset G$ olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset G$ dir.

Tersine olarak; $z_0 \in G$ keyfi fakat bir nokta olsun. Bu durumda; $\exists n_1 \in \mathbb{N} \therefore |z_o| \leq n_1$ dir. $z_0 \notin G^c = \mathbb{C} \setminus G$ ve G^c kapalı olduğundan $d(z_o, G^c) > 0$ dır. O halde $d(z_o, G^c) > 1/n_2$ olan bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 := \max\{ n_1, n_2 \}$ alınırsa $|z_0| \leq n_0$ olduğundan $z_0 \in \bar{D}(0, n_o)$ ve $d(z_o, G^c) \geq 1/n_o$ olduğundan;

$z_0 \in \bar{D}(0, n_o) \cap \left\{ z : z \in G \text{ ve } \forall w \in \mathbb{C} \setminus G \text{ için } |z-w| \geq \frac{1}{n_o} \right\} = K_{n_o}$, yani $z_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ dir. O halde $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ dir. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset G$ ve $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ olduğundan $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ dir.

Teorem 1.5.7 : $G \neq \varnothing$**,** $\mathbb{C}$ de açık bir alt küme ve $\{K_n\} \subset \wp(G)$, G'nin bir kompakt tüketilmesi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\| f-g \|_{K_n} = \sup\{ |f(z) - g(z)| : z \in K_n \}$ ve

$$C(G;\mathbb{C}) := \{ f \mid f : G \to \mathbb{C} \text{sürekli} \}$$

olsun. Bu taktirde $d : C(G;\mathbb{C}) \times C(G;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{\| f-g \|_{K_n}}{1 + \| f-g \|_{K_n}}$

fonksiyonu $C(G,\mathbb{C})$ üzerinde bir metriktir.

İspat *i.* $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \frac{\| f-g \|_{K_n}}{1 + \| f-g \|_{K_n}} \geq 0$ dır. Gerçekten; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\| f-g \|_{K_n} := \sup\{ |f(z) - g(z)| : z \in K_n \}$ ve $\forall z \in K_n$ için $|f(z) - g(z)| \geq 0$ olduğundan

$0 \le \dfrac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} < 1$ dir. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ olup; negatif olmayan terimli serilerde Birinci Karşılaştırma Teoremi $(Rudin, 1976)$' ne göre $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}$ serisi yakınsak ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le \dfrac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}$ olduğundan $d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \ge 0$ dır.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{|f(z)-g(z)| : z \in K_n\} = \{|g(z)-f(z)| : z \in K_n\}$ olduğundan $\|f-g\|_{K_n} = \|g-f\|_{K_n}$ dir. O halde $d(f,g) = d(g,f)$ dir.

iii. $f = g$ ise $d(f,g) = 0$ olduğu açıktır. Tersine olarak; $d(f,g) = 0$ ise $f = g$ dir. Gerçekten; $d(f,g) = 0$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}$ serisinin n. kısmi toplamı

$$S_n = \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} \frac{\|f-g\|_{K_\ell}}{1+\|f-g\|_{K_\ell}}$$

ise $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ dır. O halde $m \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit alınan bir doğal sayı olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\left(\dfrac{1}{2}\right)^m \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(\varepsilon) \equiv \mathrm{N}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^m \varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge N(\varepsilon)$ için $|S_n - 0| < \left(\dfrac{1}{2}\right)^m \varepsilon$, yani $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge N(\varepsilon)$ için $\left|\sum_{\ell=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\ell} \dfrac{\|f-g\|_{K_\ell}}{1+\|f-g\|_{K_\ell}} - 0\right| < \left(\dfrac{1}{2}\right)^m \varepsilon$ dır. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge N(\varepsilon)$ için

$$\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} \frac{\|f-g\|_{K_\ell}}{1+\|f-g\|_{K_\ell}} < \left(\frac{1}{2}\right)^m \varepsilon$$

dir. $m\in\mathbb{N}$ doğal sayısı verildiğinde; $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N(\varepsilon)$ doğal sayısı $n>m$ olarak seçilirse; $\forall\varepsilon>0$ için $\left(\frac{1}{2}\right)^m\frac{\|f-g\|_{K_m}}{1+\|f-g\|_{K_m}}<\left(\frac{1}{2}\right)^m\varepsilon$,yani $\frac{\|f-g\|_{K_m}}{1+\|f-g\|_{K_m}}<\varepsilon$ olduğu görülür.

$\forall\varepsilon>0$ için $0\leq\frac{\|f-g\|_{K_m}}{1+\|f-g\|_{K_m}}<\varepsilon$ olduğundan $\frac{\|f-g\|_{K_m}}{1+\|f-g\|_{K_m}}=0$ dır. $m\in\mathbb{N}$ doğal sayısı için $\frac{\|f-g\|_{K_m}}{1+\|f-g\|_{K_m}}=0$ olduğundan $\|f-g\|_{K_m}=0$ dır. $m\in\mathbb{N}$ doğal sayısı için $\|f-g\|_{K_m}=0$ olması $\sup\{|f(z)-g(z)|:z\in K_m\}=0$, yani $\forall z\in K_m$ için $|f(z)-g(z)|=0$ dolayısıyla $\forall z\in K_m$ için $f(z)=g(z)$ olduğunu gösterir. $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$ olduğundan; $z\in G$ keyfi fakat sabit alındığında $z\in K_m$ olacak şekilde bir $m\in\mathbb{N}$ vardır ve $z\in K_m$ olduğundan $f(z)=g(z)$ dir. Böylece keyfi fakat sabit bir $z\in G$ alındığında $f(z)=g(z)$ olduğundan $f=g$ dir.

iv. Önce $a,b,c\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ için $a\leq b+c$ ise $\frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$ olduğunu gösterelim. $a,b,c\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ olduğundan; $1+b+c\geq 1+b>0$ ve $1+b+c\geq 1+c>0$ dolayısıyla

$$\frac{b+c}{1+b+c}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\qquad(6)$$

dir.

$$\frac{a}{1+a}\leq\frac{b+c}{1+b+c}\qquad(7)$$

dir.

Varsayalım ki $\frac{a}{1+a}>\frac{b+c}{1+b+c}$ olsun.Bu eşitsizlikten $1+b+c>0$ ve $1+a>0$ olduğu göz önüne alındığında $a>b+c$ elde edilir ki; bu $a\leq b+c$ olması ile çelişir. O halde $a\leq b+c$

ise, $\dfrac{a}{1+a}\leq\dfrac{b+c}{1+b+c}$ dir. $a,b,c\in\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ için $a\leq b+c$ ve (6) ve (7) eşitsizliklerinden;

$$\frac{a}{1+a}\leq\frac{b}{1+b}+\frac{C}{1+c}\quad \text{elde edilir.}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall z\in K_n$ için;

$$|f(z)-g(z)|\leq|f(z)-h(z)|+|h(z)-g(z)|$$

$$|f(z)-g(z)|\leq\|f-h\|_{K_n}+\|h-g\|_{K_n}$$

olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\|f-g\|_{K_n}\leq\|f-h\|_{K_n}+\|h-g\|_{K_n}$ ve dolayısıyla $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}\leq\frac{\|f-h\|_{K_n}}{1+\|f-h\|_{K_n}}+\frac{\|h-g\|_{K_n}}{1+\|h-g\|_{K_n}}$$

dir. Dolayısıyla $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{\|f-h\|_{K_n}}{1+\|f-h\|_{K_n}}\right)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{\|h-g\|_{K_n}}{1+\|h-g\|_{K_n}}\right)$, serileri yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{\|f-h\|_{K_n}}{1+\|f-h\|_{K_n}}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{\|h-g\|_{K_n}}{1+\|h-g\|_{K_n}}\right),$$

O halde $d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$ dir.

Sonuç olarak d , $C(G)$ üzerinde bir metriktir.

Tanım 1.5.8 : $\varnothing\neq A\subset\mathbb{C}$ ve $\{f_n\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_n:A\to\mathbb{C}$ fonksiyonlarından oluşan bir fonksiyon dizisi ve $z_0\in A$ olsun. $\{f_n(z_0)\}$ kompleks sayı dizisi yakınsak ise; $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $z_0\in A$ noktasında noktasal yakınsaktır denir.

Eğer $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $\forall z\in A$ noktasında noktasal yakınsak ise; $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine A üzerinde noktasal yakınsaktır denir. $\{f_n\}$, A üzerinde noktasal yakınsak bir fonksiyon dizisi olsun. $f : A \to C$ fonksiyonu $\forall z \in A$ için $f(z) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z)$ değerini alan fonksiyon olarak tanımlanırsa; $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin *A* üzerinde noktasal limiti denir.

Tanım 1.5.9 : $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ A üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon dizisi ve $f : A \to \mathbb{C}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(A,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir $\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ ve $\forall z \in A$ için $\left| f(z) - f_n(z) \right| < \varepsilon$ ise; $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 1.5.10 : $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ A üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon dizisi ve $f : A \to \mathbb{C}$ olsun. $\forall K \subset A$ kompakt alt kümesi üzerinde $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi, f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise; $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine *A*'nın kompakt alt kümeleri üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır veya $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi A üzerinde hemen hemen f'ye düzgün yakınsaktır denir.

Tanımdan görülüyor ki, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise; $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

Teorem 1.5.11 : $\varnothing \neq A \subset \mathbb{C}$ olsun. $\{f_n\}$, A üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon dizisi ve $f : A \to \mathbb{C}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $M_n := \sup\{\left| f(z) - f_n(z) \right| : z \in A\}$ olsun. $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi *A* üzerinde f'ye düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart; $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$ olmasıdır.

İspat. $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$ ise; $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır $\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ için $|M_n - 0| < \varepsilon$ dir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $M_n \geq 0$ olduğundan; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ için $0 \leq M_n < \varepsilon$ dır. O halde; $\forall \varepsilon > 0$ için $N(A;\varepsilon) \equiv N(\varepsilon)$ alınırsa; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(A,\varepsilon)$ ve $\forall z \in A$ için $| f(z) - f_n(z) | < \varepsilon$ olur. Bu ise $\{f_n\}$'nin A üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

Tersine olarak, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi A üzerinde f'ye düzgün yakınsak ise; $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$ dır.

$\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olsun. $\{f_n\}$, A üzerinde f 'ye düzgün yakınsak olduğundan;

bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır $\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(A,\varepsilon)$ ve $\forall z \in A$ için $|f(z) - f_n(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

dir. O halde; $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(A,\varepsilon)$ için $M_n := \sup\{|f(z) - f_n(z)| : z \in A\} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olduğundan $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = 0$ olur.

Teorem 1.5.12 : $\{f_m\} \subset C(G)$ dizisinin $(C(G), d)$ metrik uzayında $f \in C(G)$ fonksiyonuna yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\{f_m\}$ dizisinin G 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır.

İspat: $\{K_n\} \subset \wp(G)$, $G \subset \mathbb{C}$ açık alt kümesinin bir kompakt tüketilişi ve d, $\{K_n\}$ ailesinin $C(G)$ üzerinde tanımladığı metrik olsun. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $d(f_m, f) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{\|f_m - f\|_{K_n}}{1 + \|f_m - f\|_{K_n}}$ idi. Önce $f_m \xrightarrow{d} f$ yani $\lim\limits_{m \to +\infty} d(f_m, f) = 0$ ise $\{f_m\} \subset C(G)$ dizisinin G 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. $K \subset G$ keyfi fakat sabit alınan bir kompakt alt küme olsun. $f_m \overset{K}{\Rightarrow} f$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$K \subset G$ kompakt ve $\{K_n\} \subset \wp(G)$, G 'nin kompakt bir tüketilişi olduğundan $K \subset K_\ell$ olan bir $\ell \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. $K \subset K_\ell$ olan $\ell \in \mathbb{N}$ doğal sayılarının en küçüğü $N_0 \in \mathbb{N}$ olsun. $K \subset K_{N_0}$ olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\|f_m - f\|_K \leq \|f_m - f\|_{K_{N_o}}$ dolayısıyla

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{N_0} \frac{\|f_m - f\|_K}{1 + \|f_m - f\|_K} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N_o} \frac{\|f_m - f\|_{K_{N_o}}}{1 + \|f_m - f\|_{K_{N_o}}} \tag{8}$$

dır.

$f_m \xrightarrow{d} f$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık;

$$\forall m\in\mathbb{N},\ m\geq N^{*}(\varepsilon)\ \text{için}\ d(f_m,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}<\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{N}_0} \tag{9}$$

olacak şekilde bir $N^{*}(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır (8) ve (9) eşitsizliklerinden;

$$\forall m\in\mathbb{N},m\geq N^{*}(\varepsilon)\ \text{için}\ \left|\frac{\|f_m-f\|_K}{1+\|f_m-f\|_K}-0\right|<\varepsilon$$

yani $\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{\|f_m-f\|_K}{1+\|f_m-f\|_K}=0$ dolayısıyla $\lim\limits_{m\to+\infty}\|f_m-f\|_K=0$ olduğunu gösterir. $\lim\limits_{m\to+\infty}\|f_m-f\|_K=0$ olması; $f_m\overset{K}{\Rightarrow}f$ olduğu gösterir.

Tersine olarak $\forall K\subset G$ kompakt alt kümesi için $f_m\overset{K}{\Rightarrow}f$ ise; $f_m\xrightarrow{d}f$ dir. $\{K_n\}\subset\wp(G)$, $C(G)$ üzerinde d metriğini tanımlayan G'nin kompakt bir tüketilişi olsun. $\forall K\subset G$ kompakt alt kümesi için $f_m\overset{K}{\Rightarrow}f$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_m\overset{K_n}{\Rightarrow}f$ dolayısıyla $\lim\limits_{m\to+\infty}\|f_m-f\|_K=0$ dır. O halde $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\forall K\subset G$ kompakt ve $\forall m\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{m\to+\infty}\|f_m-f\|_K=0$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{m\to+\infty}\|f_m-f\|_{K_n}=0$ olur. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{\|f_m-f\|_K}{1+\|f_m-f\|_K}=0$ dır.Dolayısıyla $p\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit bir doğal sayı ise $\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{p}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}=0$ dır. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}=0$ dır. O halde $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{p(\varepsilon)}<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $p(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Bu $p(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ için $\lim\limits_{m\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{p(\varepsilon)}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}=0$ olduğundan;

$\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\therefore\forall m\in\mathbb{N}, m\geq N(\varepsilon)$ için $\sum_{n=1}^{p(\varepsilon)}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}<\frac{\varepsilon}{2}$

dir. $\forall m\in\mathbb{N}$ için $\quad d(f_m,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}$,

$$d(f_m,f)=\sum_{n=1}^{p(\varepsilon)}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}+\sum_{n=p(\varepsilon)+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}},$$

$$\sum_{n=p(\varepsilon)+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}\leq\sum_{n=p(\varepsilon)+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{p(\varepsilon)}<\frac{\varepsilon}{2}\qquad\text{ve}\qquad\sum_{n=1}^{p(\varepsilon)}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|f_m-f\|_{K_n}}{1+\|f_m-f\|_{K_n}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

olduğundan $\forall m\in\mathbb{N}, m\geq N(\varepsilon)$ için $d(f_m,f)<\varepsilon$ olur. Bu ise $\forall K\subset G$ kompakt alt kümesi için $f_m\overset{K}{\Rightarrow}f$ ise; $f_m\xrightarrow{d}f$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Tanım 1.5.13 : $G\subset\mathbb{C}$ açık bir alt küme, $f:G\to\mathbb{C}$ ve $a\in G$ olsun. f fonksiyonu $a\in G$ noktasında ve a noktasının uygun bir komşuluğunun her noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonuna $a\in G$ noktasında analitik fonksiyon denir.

Teorem 1.5.14 : $G\subset\mathbb{C}$ açık bir alt küme, d, $C(G,\mathbb{C})$ üzerinde G'nin bir kompakt tüketilişi üzerinde tanımlanan bir metrik ve $A(G,\mathbb{C}):=\{f : f:G\to\mathbb{C}$ analitik$\}$ olsun. Bu taktirde $A(G,\mathbb{C})\subset C(G,\mathbb{C})$ analitik fonksiyonlar ailesi $(C(G,\mathbb{C}),d)$ metrik uzayında kapalıdır.

İspat: $\{f_m\}\subset A(G,\mathbb{C})$, $(C(G,\mathbb{C}),d)$ metrik uzayında $f\in C(G,\mathbb{C})$ fonksiyonuna yakınsak bir dizi olsun. $\lim_{m\to+\infty}d(f_m,f)=0$ olduğundan; $\{f_m\}\subset A(G,\mathbb{C})$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde; $K\subset G$ herhangi bir kompakt alt küme ise $f_m\overset{K}{\Rightarrow}f$ dır. $z_0\in G$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. G açık olduğundan $D(z_0;r_0)\subset G$ olacak şekilde bir $r_0>0$ sayısı vardır. $T\subset D(z_0;r_0)\subset G$ herhangi bir kapalı üçgen; ∂T, T' nin pozitif yönlendirilmiş sınırı ve $\ell_{\partial T}$, ∂T' nin uzunluğu olsun. $\partial T\subset T\subset D(z_0;r_0)\subset G$ kompakt olduğundan $f_m\overset{\partial T}{\Rightarrow}f$ dir. O halde $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\forall m \in \mathbb{N}$; $m \geq N(\varepsilon)$ için $\| f_m - f \|_{\partial T} < \dfrac{\varepsilon}{1+\ell_{\partial T}}$ dır. O halde $\forall z \in \partial T$ ve $\forall m \geq N(\varepsilon)$ için; $\left| f_m(z) - f(z) \right| < \dfrac{\varepsilon}{1+\ell_{\partial T}}$ dır. $\forall m \in \mathbb{N}$; $m \geq N(\varepsilon)$ için;

$$\left| \int_{\partial T} f_m(z)dz - \int_{\partial T} f(z)dz \right| = \left| \int_{\partial T} \left(f_m(z) - f(z) \right) dz \right| \leq \| f_m - f \|_{\partial T} \, \ell_{\partial T} < \varepsilon \quad \text{olur.}$$

Bu gösterir ki $\left| \int_{\partial T} f_m(z)dz - \int_{\partial T} f(z)dz \right| < \varepsilon$ dır. $\{ f_m \} \subset A(G,\mathbb{C})$ olduğundan; "Cauchy İntegral Teoremi" ne göre $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\int_{\partial T} f_m(z)dz = \mathbf{0}$ dır. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| < \varepsilon$ olur. Son eşitsizlik $\int_{\partial T} f(z)dz = \mathbf{0}$ ve "Morera Teoremi" $(Ahlfors, 1979)$ göz önüne alındığında; f fonksiyonunun $D(z_0; r_0) \subset G$ üzerinde analitik bir fonksiyondur. $z_0 \in G$ keyfi olduğundan f fonksiyonu $G \subset \mathbb{C}$ de analitik bir fonksiyondur. Dolayısıyla $A(G;\mathbb{C}) \subset C(G;\mathbb{C})$ analitik fonksiyonlar ailesi $\left(C(G;\mathbb{C}), d \right)$ metrik uzayında kapalıdır.

Teorem 1.5.15 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme; $\{ K_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(G)$, G' nin bir kompakt tüketilişi, $d : C(G;\mathbb{C}) \times C(G;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $C(G;\mathbb{C})$ üzerinde $\{ K_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt tüketilişi tarafından tanımlanan metrik, $f \in C(G;\mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$ ve $g \in C(G;\mathbb{C})$ olsun. $g \in B_d(f;\varepsilon)$ olması için gerek ve yeter şart; bir $\delta > 0$ sayısı ve $\| g - f \|_K < \delta$ olacak şekilde bir $\varnothing \neq K \subset G$ kompakt alt kümesinin mevcut olmasıdır.

İspat *i.* $\varepsilon > 0$ verilen bir sayı olsun. Bu taktirde $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı ve bir kompakt $K \subset G$ alt kümesi vardır öyle ki $\| g - f \|_K < \delta$ olan $\forall g \in C(G;\mathbb{C})$ için; $g \in B_d(f;\varepsilon)$ dir.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ serisi yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$ olduğundan $\forall m\in\mathbb{N}$ için $S_m:=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ise $\lim_{m\to+\infty}S_m=1$ dir. O halde $\frac{1}{2}\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $p\equiv p(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyle ki $\forall m\in\mathbb{N}, m\geq p$ için $\left|1-S_m\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$ dir.

Özel hal olarak; $\left|1-S_p\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{2}\varepsilon \tag{10}$$

dir.

Diğer taraftan $\varphi(t):=\frac{t}{1+t}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sürekli, monoton artan ve $\varphi(0)=0$ olduğundan $\frac{1}{2}\varepsilon>0$ sayısına karşılık $0\leq t<\delta$ olan $\forall t\geq 0$ için $\left|\frac{t}{1+t}-0\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$

yani,
$$0\leq\frac{t}{1+t}<\frac{1}{2}\varepsilon \tag{11}$$

olacak şekilde bir $\delta\equiv\delta\left(0;\frac{1}{2}\varepsilon\right)>0$ sayısı vardır. $K:=K_p\subset G$ olsun. $\varepsilon>0$ sayısına $K:=K_p\subset G$ kompakt alt kümesi ve (11) koşulunu sağlayan $\delta>0$ sayısı karşılık getirilirse; $\left\|g-f\right\|_K<\delta$ olan $\forall g\in C(G;\mathbb{C})$ için $g\in B_d(f;\varepsilon)$ dir.

Gerçekten; $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\wp(G)$, G'nin bir kompakt tüketilişi olduğundan $\forall n\in\{1,2,\cdots,p\}$ için $K_n\subset K_p=K$ dir. Dolayısıyla $\forall n\in\{1,2,\cdots,p\}$ için $\left\|g-f\right\|_{K_n}\leq\left\|g-f\right\|_K<\delta$ olur.

O halde (11)'e göre $\forall n\in\{1,2,\cdots,p\}$ için $\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\left\|g-f\right\|_{K_n}}{1+\left\|g-f\right\|_{K_n}}<\frac{1}{2}\varepsilon$ dir. Öte yandan;

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq p+1$ için $0\leq\frac{\left\|g-f\right\|_{K_n}}{1+\left\|g-f\right\|_{K_n}}<1$ olduğundan (10)'a göre

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|g-f\|_{K_n}}{1+\|g-f\|_{K_n}}<\frac{1}{2}\varepsilon$$

dir. O halde; $$d(g,f):=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|g-f\|_{K_n}}{1+\|g-f\|_{K_n}},$$

$$d(g,f)=\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|g-f\|_{K_n}}{1+\|g-f\|_{K_n}}+\sum_{n=p+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\|g-f\|_{K_n}}{1+\|g-f\|_{K_n}},$$

$$d(g,f)<\varepsilon$$

olduğundan $g\in B_d(f;\varepsilon)$ elde edilir.

ii. Tersine olarak; bir $\delta>0$ sayısı ve bir kompakt $K\subset G$ alt kümesi verildiğinde; $\delta>0$ sayısı ve $K\subset G$ kompakt alt kümesine karşılık $\forall g\in B_d(f;\varepsilon)$ için $\|g-f\|_K<\delta$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısı vardır.

$\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\wp(G)$, G' nin kompakt bir tüketilişi ve $K\subset G$ kompakt olduğundan $K\subset K_m$ olan en az bir $m\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. $p\in\mathbb{N}$, $K\subset K_m$ olan $m\in\mathbb{N}$ doğal sayılarının en küçüğü olsun. $K\subset K_p$ olduğundan $\|g-f\|_K<\delta$ olan $\forall g\in C(G;\mathbb{C})$ için $\|g-f\|_K\le\|g-f\|_{K_p}$ dir. $\varphi(s):=\dfrac{s}{1-s}$ fonksiyonu $[0,1)$ aralığında sürekli ve $\varphi(0)=0$ olduğundan $\delta>0$ sayısına karşılık $0\le s<2^p.\varepsilon<1$ ve $0\le\dfrac{s}{1-s}<\delta$ olacak şekilde bir $\varepsilon\equiv\varepsilon(\delta)>0$ sayısı vardır. $t\ge 0$ sayıları $0\le\dfrac{t}{1+t}<2^p\varepsilon$ olacak şekilde seçilirse;

$0\le\dfrac{\frac{t}{1+t}}{1-\frac{t}{1+t}}<\delta$ olacağından $0\le\dfrac{t}{1+t}<2^p\varepsilon$ olan $\forall t\in\mathbb{R}$ için $0\le t<\delta$ dir. $g\in B_d(f;\varepsilon)$ olsun. $d(g,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\dfrac{\|g-f\|_{K_n}}{1+\|g-f\|_{K_n}}<\varepsilon$ olduğundan $\left(\frac{1}{2}\right)^p\dfrac{\|g-f\|_{K_p}}{1+\|g-f\|_{K_p}}<\varepsilon$.

yani $0 \le \dfrac{\|g-f\|_{K_p}}{1+\|g-f\|_{K_p}} < 2^p \varepsilon$ dir. O halde; $0 \le \|g-f\|_{K_p} < \delta$ dır. $K \subset K_p$ olduğundan $\|g-f\|_K \le \|g-f\|_{K_p}$ dir. O halde $\forall g \in B_d(f;\varepsilon)$ için $\|g-f\|_K < \delta$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 1.5.16 : $\varnothing \ne G \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme; $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(G)$, G ' nin kompakt bir tüketilişi, $d : C(G;\mathbb{C}) \times C(G;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $C(G;\mathbb{C})$ üzerinde $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt tüketilişi tarafından tanımlanan metrik ve $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ olsun. $\mathcal{O}$ ' nun $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında açık bir alt küme olması için gerek ve yeter şart $\forall f \in \mathcal{O}$ için;

$$\{g : g \in C(G;C) \text{ ve } \|g-f\|_{K_f} < \delta_f \} \subset \mathcal{O}$$

olacak şekilde bir $\delta_f > 0$ sayısı ve bir $K_f \subset G$ kompakt alt kümesinin mevcut olmasıdır.

İspat *i.* $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ açık ve $f \in \mathcal{O}$ olsun. O halde $B_d(f;\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ olan bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Teorem 1.5.15 ' e göre bu $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|g-f\|_{K_f} < \delta_f$ olan

$\forall g \in C(G;C)$ için $g \in B_d(f;\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta_f > 0$ sayısı ve bir $K_f \subset G$ kompakt alt kümesi vardır. $\|g-f\|_{K_f} < \delta_f$ olan $\forall g \in C(G;C)$ için $g \in B_d(f;\varepsilon)$ olması

$\left\{g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } \|g-f\|_{K_f}\right\} \subset B_d(f;\varepsilon)$ olduğunu ve $B_d(f;\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ olduğundan; $\left\{g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } \|g-f\|_{K_f}\right\} \subset \mathcal{O}$ olur.

ii. $\forall f \in \mathcal{O}$ için $\left\{g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } \|g-f\|_{K_f}\right\} \subset \mathcal{O}$ olacak şekilde bir $\delta_f > 0$ sayısı ve bir $K_f \subset G$ kompakt alt kümesi varsa, $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ alt kümesi açıktır. $f \in \mathcal{O}$ keyfi fakat sabit alınan bir fonksiyon olsun. Hipoteze göre;

$$\left\{g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } \|g-f\|_{K_f}\right\} \subset \mathcal{O}$$

olacak şekilde bir $\delta_f > 0$ sayısı ve kompakt bir $K_f \subset G$ alt kümesi vardır.

Teorem 1.5.15' e göre; bu $\delta_f > 0$ sayısı ve $K_f \subset G$ kompakt alt kümesine karşılık $\forall g \in B_d(f;\varepsilon)$ için $\|g - f\|_{K_f} < \delta_f$ olacak şekilde bir $\varepsilon_f > 0$ sayısı vardır. $\forall g \in B_d(f;\varepsilon_f)$ için $\|g - f\|_{K_f} < \delta_f$ olması; $B_d(f;\varepsilon_f) \subset \left\{ g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve} \|g - f\|_{K_f} \right\} \subset \mathcal{O}$, yani $B_d(f;\varepsilon) \subset \mathcal{O}$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak; $\mathcal{O}$'nun $\forall f \in \mathcal{O}$ noktası bir iç nokta olduğundan $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ alt kümesi bir açık alt kümedir.

Netice 1.5.17 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme; $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(G)$ ve $\{K_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(G)$, G 'nin iki kompakt tüketilişi olsun. $d, d^*; G$' nin $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(G)$ ve $\{K_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(G)$ kompakt tüketilişlerinin $C(G;\mathbb{C})$ üzerinde tanımladığı metrikler ve $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ olsun. $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ alt kümesinin $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında açık bir küme olması için gerek ve yeter şart; $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ alt kümesinin $(C(G;\mathbb{C}), d^*)$ metrik uzayında bir açık alt küme olmasıdır.

İspat: $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$, $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında açık bir alt küme olsun. O halde; Teorem 1.5.16' e göre $\forall f \in \mathcal{O}$ için; $\{g : g \in C(G;C)$ ve $\|g - f\|_{K_f} < \delta_f \} \subset \mathcal{O}$ olacak şekilde bir $\delta_f > 0$ sayısı ve bir $K_f \subset G$ kompakt alt kümesi vardır. Bu $\delta_f > 0$ sayısı ve $K_f \subset G$ kompakt alt kümesi için; $\{g : g \in C(G;C)$ ve $\|g - f\|_{K_f} < \delta_f \} \subset \mathcal{O}$ olduğundan; Teorem 1.5.16' e göre $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$, $(C(G;\mathbb{C}), d^*)$ metrik uzayında açıktır.

Tersine olarak; $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$, $(C(G;\mathbb{C}), d^*)$ metrik uzayında açık ise; $\mathcal{O} \subset C(G;\mathbb{C})$ nin $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında bir açık alt küme olduğu benzer şekilde gösterilir.

Netice 1.5.18: $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme ve $a \in G$ olsun.

$\mathfrak{X}(a) := \{ f : f \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } f(a) \neq 0 \} \subset C(G;\mathbb{C})$ alt kümesi $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında açıktır.

İspat: $f \in \mathfrak{X}(a)$ olsun. $f \in C(G;\mathbb{C})$ ve $f(a) \neq 0$ olduğundan; $K := \overline{D}(a;r_a) \subset G$ ve $\forall z \in K$ için $|f(z)| > \dfrac{|f(a)|}{2}$ olacak şekilde bir $r_a > 0$ sayısı vardır.

$$\left\{ g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ ve } \|g - f\|_K < \frac{|f(a)|}{2} \right\} \subset C(G;\mathbb{C})$$ alt kümesi göz önüne alınsın.

$\|g - f\|_K := sup\{|g(z) - f(z)| : z \in K\}$ ve $\forall z \in K$ için $|f(z)| > \dfrac{|f(a)|}{2}$ olduğundan;

$$\forall g \in \left\{ g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ ve } \|g - f\|_K < \frac{|f(a)|}{2} \right\} \subset C(G;\mathbb{C}) \text{ ve}$$

$\forall z \in K$ için; $|g(z)| = |f(z) + g(z) - f(z)|$

$$|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z) - f(z)|$$

$$|g(z)| \geq |f(z)| - \|g - f\|_K$$

$$|g(z)| > |f(z)| - \frac{|f(a)|}{2} > 0$$

$$|g(z)| > \frac{|f(a)|}{2} > 0$$

olup dolayısıyla $g(a) \neq 0$ olur. O halde;

$$\left\{ g : g \in C(G;\mathbb{C}) \text{ ve } \|g - f\|_K < \frac{|f(a)|}{2} \right\} \subset \mathfrak{X}(a)$$

dır. O halde $\mathfrak{X}(a)$ alt kümesi $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında açıktır.

Netice 1.5.19 : $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme ve $a \in G$ olsun. Bu taktirde;

$M_a := \{ f : f \in C(G;\mathbb{C}) \text{ ve } f(a) = 0\} \subset C(G;\mathbb{C})$ alt kümesi $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında kapalı bir alt kümedir.

İspat: $(M_a)^c = \{ f : f \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } f(a) = 0\}^c = \{ f : f \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } f(a) \neq 0\}$olup $\{ f : f \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } f(a) \neq 0\}$kümesi bir önceki neticeye göre açık olduğundan $M_a := \{ f : f \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } f(a) = 0\} \subset C(G;\mathbb{C})$ alt kümesi $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında kapalı bir alt kümedir.

Teorem 1.5.20 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme ve $a \in G$ olsun. Bu taktirde; $\mathfrak{X}(a) := \{ f : f \in C(G;\mathbb{C}) \text{ve } f(a) \neq 0\} \subset C(G;\mathbb{C})$ açık alt kümesi, $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında yoğun bir alt kümedir.

İspat: $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında $\overline{\mathfrak{X}(a)} = C(G;\mathbb{C})$ olduğu gösterilirse; ispat tamamlanır.

$f \in C(G;\mathbb{C})$ keyfi fakat sabit alınan bir fonksiyon, $g \in \mathfrak{X}(a)$ sabit bir fonksiyon ve K, G'nin boştan farklı herhangi bir kompakt alt kümesi olsun. $\{\alpha_n^f\} \subset \mathbb{C}$ dizisi; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n^f := \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , f(a) = 0 \\ -\dfrac{f(a)}{(n+1)g(a)} & , f(a) \neq 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanırsa; $\{ f + \alpha_n^f \cdot g\} \subset \mathfrak{X}(a)$ olup; $\left\| (f + \alpha_n^f \cdot g) - f \right\|_K = |\alpha_n^f| \|g\|_K$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \left\| (f + \alpha_n^f \cdot g) - f \right\|_K = 0$ dır. O halde $\{ f + \alpha_n^f \cdot g\} \subset \mathfrak{X}(a)$ dizisi, $(C(G;\mathbb{C}), d)$ metrik uzayında $f \in C(G;\mathbb{C})$ fonksiyonuna yakınsak olduğundan $f \in \overline{\mathfrak{X}(a)}$ dır. $f \in C(G;\mathbb{C})$ keyfi olduğundan

$\forall f \in C(G;\mathbb{C})$ için $f \in \overline{\mathfrak{X}(a)}$ olacağından $\overline{\mathfrak{X}(a)} = C(G;\mathbb{C})$ olup ispat tamamlanır.

1.6. Cauchy İntegral Formülleri ve Taylor Teoremi

Teorem 1.6.1 [Açık Dairelerde Cauchy İntegral Formülü] : $f(z)$, $D(a,R)$ açık dairesinde analitik ve $0<r<R$, $C(a,r):=\{a+re^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$, $D(a,r)$ açık dairesinin pozitif yönlendirilmiş sınırı ise;

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

dir $(Ahlfors, 1979)$.

Netice 1.6.2 : $G \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f : G \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ise; $\forall z \in G$ noktasında f 'nin istenilen her mertebeden türevi vardır. Ve $a \in G, r > 0$ için $\bar{D}(a,r) \subset G$ ise; $\forall\ n \in \mathbb{N}$ ve $\forall z \in D(a,r)$ için;

$$f^{(n)}(z) := \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

dir. Özel hal olarak;

$$f^{(n)}(a) := \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

dir $(Ahlfors, 1979)$.

Teorem 1.6.3: $G \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f : G \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $a \in G$ olsun. Bu takdirde; $\forall z \in G$ için $f(z) = f(a) + (z-a)g(z)$ olan bir tek $g : G \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır.

İspat. $g : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\forall z \in G$ için $g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} & , \quad z \neq a \\ f'(a) & , \quad z = a \end{cases}$

şeklinde tanımlansın. $g, G\setminus\{a\}$'da analitik ve $a\in G$'de süreklidir. $a\in G$ ve G açık olduğundan; $D(a,R)\subset G$ olan bir $R>0$ sayısı vardır. $g(z), D(a,R)\setminus\{a\}$ da analitik ve $a\in D(a,R)$ de sürekli olduğundan; $\forall T\subset D(a,R)$ kapalı üçgeni için $\int\limits_{\partial T} g(z)\,dz=0$ dır.

O halde; g'nin $D(a,R)$'de bir F ilkeli vardır. $\forall z\in D(a,R)$ için $F'(z)=g(z)$ ve F, $D(a,R)$ de analitik olduğundan; $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall z\in D(a,R)$ için $F^{(n)}(z)$ türevlerinin mevcut ve $F'(z)=g(z)$ olduğu göz önüne alındığında; $\forall z\in D(a,R)$ için, $g'(z)$ türevi mevcut olacağından; g fonksiyonu, $a\in G$'de analitiktir.

Sonuç olarak; $\forall z\in G$ için $g'(z)$ mevcut olduğundan, $g: G\to\mathbb{C}$ fonksiyonu analitiktir ve $\forall z\in G$ için $f(z)=f(a)+(z-a)g(z)$ koşulunu sağlar. g'nin tekliği kolayca görülür.

Taylor Teoremi 1.6.4 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ açık, $a\in G$, $f: G\to\mathbb{C}$ analitik ve tek değerli bir fonksiyon ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde $\forall z\in G$ için;

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+(z-a)^{n+1}f_{n+1}(z)$$

olacak şekilde bir tek $f_{n+1}: G\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır. $f_{n+1}: G\to\mathbb{C}$ fonksiyonu yerel olarak; $R:=d(a;\partial G)$ ve $0<r<R$ ise $\forall z\in D(a;r)$ için

$$f_{n+1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)}d\zeta$$

ile belirlidir.

İspat: $n\in\mathbb{N}$ için vardır $f_1,, f_2,\cdots, f_{n-1}, f_n: G\to\mathbb{C}$ analitik öyle ki $\forall z\in G$ için

$$f(z)=f(a)+(z-a)f_1(z) \qquad (*)$$

$$f_1(z)=f_1(a)+(z-a)f_2(z) \qquad (**)$$

$$f_2(z)=f_2(a)+(z-a)f_3(z) \qquad (***)$$

$\vdots$

$$f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + (z-a)\, f_n(z) \qquad (n)$$

$$f_n(z) = f_n(a) + (z-a)\, f_{n+1}(z) \qquad (n+1)$$

$(*)-(n+1)$ eşitlikleri arasında $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z)$ yok edilirse $\forall z \in G$ için;

$$f(z) = f(a) + f_1(a)(z-a) + \cdots + f_n(a)(z-a)^n + f_{n+1}(z)(z-a)^{n+1}$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin iki tarafının $k \in \{1,2,\cdots,n\}$ için $k.$ merteden türevi alınır ve z yerine a yazılırsa;

$$\left.\frac{d^k f(z)}{dz^k}\right|_{z=a} = \left.\frac{d^k\left(f(a) + f_1(a)(z-a) + \cdots + f_n(a)(z-a)^n + f_{n+1}(z)(z-a)^{n+1}\right)}{dz^k}\right|_{z=a}$$

eşitliğinden $\forall k \in \{1,2,\cdots,n\}$ için $f^{(k)}(a) = k!\, f_k(a)$, yani $f_k(a) = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ elde edilir. O halde; $\forall z \in G$ için

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + (z-a)^{n+1} f_{n+1}(z)$$

dir.

$z \in D(a;R)$ olsun. O halde $z \in D(a;r) \subset \overline{D}(a;r) \subset D(a;R) \subset G$ olan bir $r>0$ sayısı vardır. $\forall \zeta \in C(a;r)$ ve $z \in D(a;r)$ için

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!} \frac{1}{(\zeta-a)^{n+1-k}(\zeta-z)} + \frac{f_{n+1}(\zeta)}{(\zeta-z)}$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)}d\zeta=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a;r)}\frac{1}{(\zeta-a)^{n+1-k}(\zeta-z)}d\zeta\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a;r)}\frac{f_{n+1}(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta$$

dir.

$a,z\in D(a;r)$ ve $k\in\{0,1,\cdots,n\}$ için"Açık Daireler İçin Cauchy İntegral Formülü" ne göre

$\displaystyle\int_{C(a;r)}\frac{d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1-k}(\zeta-z)}=0$ ve $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a;r)}\frac{f_{n+1}(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta=f_{n+1}(z)$ olduğundan

$\forall z\in D(a;r)$ için; $\displaystyle f_{n+1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a;r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)}d\zeta$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 1.6.5 : $G\subset\mathbb{C}$ açık bir alt küme, $a\in G$, $n\in\mathbb{N}$ ve $f:G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $\forall z\in G$ için, $\displaystyle T_n(f;a,z):=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ olan $T_n(f;a,z)$ polinomuna f 'nin a noktasındaki $n.$ mertebeden Taylor polinomu denir.

Teorem 1.6.7 : $G\subset\mathbb{C}$ açık bir alt küme, $a\in G$, $f:G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $R:=d(a,\partial G)$ olsun. Bu takdirde; f 'nin $\{T_n(f;a,z)\}$ Taylor polinomları dizisi, $D(a,R)$ 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde f 'ye düzgün yakınsaktır.

İspat. $R:=d(a,\partial G)$ olduğundan; $D(a,R)\subset G$ dir. $K\subset D(a,R)$ keyfi bir kompakt alt küme ise; $K\subset D(a,s)\subset D(a,r)\subset D(a,R)$ olan $0<s<r<R$ sayıları vardır. Diğer taraftan Taylor teoremine göre; $\forall z\in G$ için;

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+f_{n+1}(z)(z-a)^{n+1} \quad (12)$$

olan bir tek $f_{n+1}(z):G\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır, ve $C(a,r):=\partial D(a,r)$ ise; $\forall z\in D(a,r)$ için;

$$f_{n+1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)}d\zeta \quad (13)$$

dir. $\forall z \in \mathbb{C}$ için, $T_n(f;a,z) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{f^{\ell}(a)}{\ell!}(z-a)^{\ell}$ olduğundan; (12) ve (13) eşitliklerinden $\forall z \in K$ için;

$$\left| f(z) - T_n(f;a,z) \right| = \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)(z-a)^{n+1}}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta \right| \qquad (14)$$

elde edilir.

$M(r) := \sup\{ |f(\zeta)| : \zeta \in C(a,r)\}$ olsun. $\forall \zeta \in C(a,r)$ için $|f(\zeta)| \le M(r)$, $\forall \zeta \in C(a,r)$ için $|\zeta - a| = r$ ve $K \subset D(a,s)$ olduğundan $\forall z \in K$ için $|z-a| < s$ dir.O halde; $\forall \zeta \in C(a,r)$ ve $\forall z \in K$ için; $|\zeta - z| = |\zeta - a + a - z|$

$$\ge \big| |\zeta - a| - |a-z| \big|$$

$$\ge |\zeta - a| - |z-a|$$

$$\ge r - |z-a|$$

$$> r - s > 0$$

dir. O halde; $\forall \zeta \in C(a,r)$ ve $\forall z \in K$ için; $\left| \frac{(z-a)^{n+1} f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}(\zeta-z)} \right| \le (s/r)^{n+1} \frac{M(r)}{r-s}$ dir.

Böylece (14) eşitliğinden $\forall z \in K$ için; $|f(z) - T_n(f;a,z)| \le (s/r)^{n+1} \frac{M(r)r}{r-s}$ elde edilir.Bu ise; $M_n := \sup\{ |f(z) - T_n(f;a,z)| : z \in K\}$ ise $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $M_n \le \left(s/r \right)^{n+1} \frac{M(r)r}{r-s}$ olduğunu gösterir. $0 < \frac{s}{r} < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}(s/r)^n = 0$ dır.

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq M_n \leq\ (s/r)^{n+1}\dfrac{M(r)r}{r-s}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}(s/r)^n = 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ dır. O halde Teorem 1.5.11'e göre f 'nin $a \in G$ noktasındaki $\{T_n(f;a,\cdot)\}$ Taylor polinomları dizisi $D(a,R)$ 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde $f(z)$ 'ye düzgün yakınsaktır.

Teorem 1.6.8 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ bir bölge $a \in G$ ve $f : G \to \mathbb{C}$ tek değerli ve analitik bir fonksiyon olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(a) = 0$ ise, f fonksiyonu G üzerinde sabittir.

İspat: $E := \{z : z \in G \text{ ve } \forall k \in \mathbb{N} \text{ icin } f^{(k)}(z) = 0\}$ olsun. $a \in E$ olduğundan $E \neq \varnothing$ dir.

i. $E \subset G$ alt kümesi açıktır. $z_0 \in E$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta ve $R := d(z_0, \partial G)$ olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f^{(k)}(z_0) = 0$ ve f 'nin $\{T_n(f;z_0,\cdot)\}$ Taylor polinomları dizisi, $D(z_0;R) \subset G$ 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde f 'ye düzgün yakınsak ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $T_n(f;z_0,z) = f(z_0)$ olduğundan $\forall z \in D(z_0;R)$ için $f(z) = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(f;z_0,z) = f(z_0)$ dır.O halde $\forall z \in D(z_0;R)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f^{(k)}(z) = 0$ olur. O halde $D(z_0;R) \subset E$ dir. Dolayısıyla keyfi alınan $z_0 \in E$ noktası, E 'nin bir iç noktası olduğundan $E \subset G$ alt kümesi açıktır.

ii. $G \setminus E \subset G$ alt kümesi açıktır. Farz edelim ki $G \setminus E \subset G$ alt kümesi açık olmasın. Bu taktirde; $G \setminus E$ ' nin iç noktası olmayan en az bir $z_0 \in G \setminus E$ noktası vardır. $z_0 \in G \setminus E$, $G \setminus E$ ' nin bir iç noktası olmadığından $\forall r > 0$ için $D(z_0;r) \cap E \neq \varnothing$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ olan en az bir $\{z_n\} \subset E$ dizisi vardır. $\{z_n\} \subset E$ olduğundan $\forall n,k \in \mathbb{N}$ için $f^k(z_n) = 0$ dır. $k \in \mathbb{N}$ keyfi fakat sabit alındığında $f^{(k)} : G \to \mathbb{C}$ türevlerinin her biri z_0 noktasında sürekli ve $\{z_n\} \subset G$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ olduğundan $f^{(k)}(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f^{(k)}(z_n) = 0$ olduğu görülür. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f^{(k)}(z_0) = 0$ olması, $z_0 \in E$ olduğunu gösterir ki; bu $z_0 \in G \setminus E$ olması ile çelişir. O halde; $G \setminus E \subset G$ alt kümesi bir açık küme olmak zorundadır.

$E, G \setminus E \subset G$ alt kümelerinin her ikisinin açık, $E \neq \varnothing$ ve G'nin bağlantılı olması $G \setminus E \neq \varnothing$, dolayısıyla $G = E$ olduğunu gösterir. $G = E$ olduğundan $\forall z \in G$ için $f'(z) = 0$ dır.Dolayısıyla G bölge olduğundan f fonksiyonu G üzerinde sabittir.

1.7. Analitik Fonksiyonların Sıfır Yerleri

Tanım 1.7.1 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ tek değerli ve analitik bir fonksiyon ve $a \in G$ olsun. $f(a) = 0$ ise, $a \in G$ noktasına f ' nin bir sıfır yeri denir. f ' nin G ' deki tüm sıfır yerlerinin kümesi $Z(f)$ ile gösterilir. Yani; $Z(f) := \{ z : z \in G \text{ ve } f(z) = 0 \}$ dır.

Tanım 1.7.2 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ tek değerli ve analitik bir fonksiyon ve $a \in Z(f)$ olsun. $f \neq 0$ ise $m := E.K.E \{ k : k \in \mathbb{N} \text{ve } f^{(k)}(a) \neq 0 \} \in \mathbb{N}$ doğal sayısına, f ' nin $a \in Z(f)$ sıfır yerindeki mertebesi denir. $f \neq 0$ analitik fonksiyonunun, $a \in Z(f)$ sıfır yerindeki mertebesi $m \in \mathbb{N}$ ise, a ' ya f ' nin $m.$mertebeden bir sıfır yeri denir.

Netice 1.7.3 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in G$ ve $f : G \to \mathbb{C}$ tek değerli ve analitik bir fonksiyon olsun. $a \in G$ noktası, f 'nin bir sıfır yeri ve $f \neq 0$ ise; $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ ve $f^{(m)}(a) \neq 0$ olacak şekilde bir tek $m \equiv m(f; a) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.

İspat: $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \neq 0$ olduğundan $f^{(\ell)}(a) \neq 0$ olacak şekilde en az bir $\ell \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. O halde; $M_{(a)} := \{ k : k \in \mathbb{N} \text{ ve } f^{(k)}(a) \neq 0 \} \subset \mathbb{N}$ alt kümesi boştan farklı olduğundan $M_{(a)} \subset \mathbb{N}$ alt kümesinin en küçük elemanı vardır (*Alpay ve Karakas*, 1996). $m \equiv m(f\ ; a) :=$ E.K.E $M_a \in \mathbb{N}$ ise, $M_a \in \mathbb{N}$ alt kümesinin tanımından $m =$ en küçük eleman $M_a \in \mathbb{N}$ doğal sayısının $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ ve $f^{(m)}(a) \neq 0$ şartlarını sağladığı açıktır. Son olarak;

n ve $m \in \mathbb{N}$, $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$, $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ve $f^{(m)}(a) \neq 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ şartlarını sağlayan iki fonksiyon ise $m = n$ olduğunu gösterelim. Farz edelim ki; $m \neq n$ olsun. O halde ya $m < n$ yada $n < m$ dir. $m < n$ ise $m-1 < n-1$ olduğundan $m \in \{0,1,\cdots,n-1\}$ dir. O halde $\forall k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$ için $f^{(k)}(a) = 0$ olduğundan $f^{(m)}(a) = 0$ olduğu görülür ki, bu $f^{(m)}(a) \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $m \not< n$ dir. Benzer şekilde $n \not< m$ dir. $m \not< n$ ve $n \not< m$ olması $m \neq n$ farz edilmesi ile çelişir. O halde m ,$n \in \mathbb{N}$; teoremin şartlarını sağlayan iki doğal sayı ise $m = n$ dir.

Teorem 1.7.4: $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in G$, $f : G \to \mathbb{C}$ analitik ve tek değerli bir fonksiyon olsun. a'nın f fonksiyonunun *m.* mertebeden bir sıfır yeri olması için gerek ve yeter şart $g(a) \neq 0$ değerini alan ve $\forall z \in G$ için $f(z) = (z-a)^m g(z)$ koşulunu sağlayan bir tek $g : G \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki $a \in G$ noktası f fonksiyonunun *m.* mertebeden bir sıfır yeri olsun. Teorem 1.6. 4 ‘ e göre $\forall z \in G$ için;

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m f_m(z)$$

olacak şekilde bir tek $f_m : G \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır ve $f_m : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu yerel olarak; $R := d(a;\partial G)$ ve $0 < r < R$ ise $\forall z \in D(a;r)$ için

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^m (\zeta-z)} d\zeta \tag{15}$$

ile belirlidir. $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ olduğundan $\forall z \in G$ için $f_m : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $f(z) = (z-a)^m f_m(z)$ koşulunu sağlar. (15) eşitliğinde $\forall \zeta \in C(a;r)$ için $f(\zeta) = (\zeta-a)^m f_m(\zeta)$ ve $z = a$ yazılırsa

$$f_m(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}} d\zeta$$

eşitliğinden Cauchy İntegral Formülü kullanılırsa $f_m(a)=\dfrac{f^{(m)}(a)}{m!}\neq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $g:=f_m$ fonksiyonu istenilen şartı sağlar.

Tersine olarak $\forall z\in G$ için $f(z)=(z-a)^m g(z)$ koşulunu sağlayan ve $g(a)\neq 0$ değerini alan bir $g:G\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu varsa $a\in G$ noktası f fonksiyonunun *m.* mertebeden bir sıfır yeridir. $R:=d(a;\partial G)$ ve $0<r<R$ olsun. $\overline{D(a;r)}\subset G$ ve $\forall z\in C(a;r)$ için $f(z)=(z-a)^m g(z)$ olduğundan Cauchy İntegral Formülüne göre

$\forall k\in\{0,1,\cdots,m-1\}$ için $m-k-1\geq 0$ olduğundan

$$f^{(k)}(a):=\frac{k!}{2\pi i}\int_{C(a;r)}(z-a)^{m-k-1}g(z)\,dz=0 \text{ ve}$$

$$f^{(m)}(a)=\frac{m!}{2\pi i}\int_{C(a;r)}\frac{g(z)}{z-a}dz=m!\,g(a)\neq 0$$ dır. O halde $z=a$ noktası f fonksiyonunun *m.* mertebeden bir sıfır yeridir.

Teorem 1.7.5 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f:G\to\mathbb{C}$ tek değerli ve analitik bir fonksiyon olsun. $f=0$ olması için gerek ve yeter şart $Z'(f)\cap G\neq\varnothing$ olmasıdır.

İspat: *i.* $f=0$ ise $Z(f)=G$ olduğundan $Z'(f)=G$ dir. Dolayısıyla $Z'(f)\cap G=G\neq\varnothing$ dir.

ii. $Z'(f)\cap G\neq\varnothing$ ise $f=0$ dir. $z_0\in Z'(f)\cap G\neq\varnothing$ olsun. $z_0\in G$ için $z_0\in Z'(f)$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\left(\left(z_0;\frac{1}{n}\right)\setminus\{z_0\}\right)\cap Z(f)\neq\varnothing$ dir. O halde $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$ olan bir $\{z_n\}\subset Z(f)\setminus\{z_0\}$ dizisi vardır. $f:G\to\mathbb{C}$ analitik olduğundan, f fonksiyonu $z_0\in G$ noktasında süreklidir. O halde $\{z_n\}\subset Z(f)\setminus\{z_0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$ ve $f(z_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$ olduğundan $f(z_0)=0$ yani $z_0\in Z(f)$ elde edilir. Farz edelim ki $f\neq 0$ olsun. $z_0\in Z(f)$ olduğundan $m\equiv m(f;z_0)$ ise, Teorem 1.7.4' e göre $g(z_0)\neq 0$ değerini alan ve $\forall z\in G$ için $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ olan bir tek $g:G\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır.

$g:G\to\mathbb{C}$ fonksiyonu, $z_0\in G$ noktasında sürekli ve $g(z_0)\neq 0$ olduğundan $\forall z\in D(z_0;r_0)$ için $g(z)\neq 0$ ve $D(z_0;r_0)\subset G$ olan en az bir $r_0>0$ sayısı vardır. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ ve $\{z_n\}\subset Z(f)\backslash\{z_0\}$ olduğundan $r_0>0$ sayısı için $\exists N(r_0)\in\mathbb{N} \therefore \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N(r_0)$ için $z_n\in D(z_0;r_0)\backslash\{z_0\}$ olur. O halde $n\in\mathbb{N},\ n\geq N(r_0)$ için $z_n\in D(z_0;r_0)\backslash\{z_0\}\subset G$, $z_n\in Z(f)$, $\forall z\in D(z_0;r_0)$ için $g(z)\neq 0$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N(r_0)$ için $(z_n-z_0)^m g(z_n)\neq 0$ dır. Fakat $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f(z_n)=0$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N(r_0)$ için $(z_n-z_0)^m g(z_n)\neq 0$ olması, $\forall z_n\in G$ için $f(z_n)=(z_n-z_0)^m g(z_n)\neq 0$ olduğunu gösterir ki bu $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f(z_n)=0$ olması ile çelişir. Çelişki $f\neq 0$ olduğunu farz etmekten geldi. O halde $Z^{'}(f)\cap G\neq\varnothing$ ise $f=0$ olmak zorundadır.

Netice 1.7.6 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f:G\to\mathbb{C}$ tek değerli analitik bir fonksiyon ve $A\subset Z(f)$ olsun. $A^{'}\cap G\neq\varnothing$ ise $f=0$ olur.

İspat: Varsayalım ki $f\neq 0$ olsun. Bu taktirde vardır $z_0\in Z(f)$ öyle ki $f(z_0)=0$ dır. O halde $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f^{(n)}(z_0)=0$ dır. Bu $z_0\in Z(f)$ noktası f fonksiyonunun *m.* mertebeden bir sıfırı olsun. O halde $\forall z\in G$ için $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0)\neq 0$ olacak şekilde bir $g:G\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır. $g(z_0)\neq 0$ olduğundan $D(z_0;r_0)\subset G$ ve $\forall z\in D(z_0;r_0)$ için $g(z)\neq 0$ olacak şekilde bir $r_0>0$ vardır. $z_0\in A'$ olduğundan $\left(D(z_0;r_0)\setminus\{z_0\}\right)\cap A\neq\varnothing$ dır. $z^*\in\left(D(z_0;r_0)\setminus\{z_0\}\right)\cap A$ alınırsa $f(z^*)=0$ dır. Fakat $f(z^*)=(z^*-z_0)^m g(z^*)$ eşitliğinden $(z^*-z_0)^m g(z^*)=0$ elde edilir ki bu $(z^*-z_0)^m\neq 0$ ve $g(z^*)\neq 0$ olması ile çelişir. O halde $A\subset Z(f)$ için $A'\cap G\neq\varnothing$ ise $f=0$ dır.

Netice 1.7.7 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f:G\to\mathbb{C}$ tek değerli ve analitik bir fonksiyon ve $a\in G$, f ’ nin bir sıfır yeri olsun. $f\neq 0$ ise, $f^{(k)}(a)\neq 0$ olacak şekilde en az bir $k\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.

İspat: Hipoteze göre $f(a)=0$ dır. İddia doğru değil ise; $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f^{(n)}(a)=0$ olacağından Teorem 1.6.8 ‘e göre $\forall z\in G$ için $f(z)=0$ olur ki; bu $f\neq 0$ hipotezi ile çelişir. O halde; $f^{(k)}(a)\neq 0$ olacak şekilde en az bir $k\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.

Netice 1.7.8 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f:G\to\mathbb{C}$ tek değerli ve analitik bir fonksiyon olsun. $f\neq 0$ ise, $Z(f)\subset G$,G ’ nin bir ayrık alt kümesidir. Yani $\forall a\in Z(f)$ için; $D(a;r_a)\cap Z(f)=\{a\}$ olacak şekilde bir $r_a>0$ sayısı vardır.

İspat: $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere, $a\in Z(f)$, f ’ nin $m.$ mertebeden bir sıfır yeri olsun. Bu durumda Teorem 1.7.4 ‘e göre $f(z)=(z-a)^m g(z)$ olan ve $g(a)\neq 0$ değerini alan bir $g:G\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır. $g(a)\neq 0$ olduğundan $D(a;r_a)\subset G$ ve $\forall z\in D(a;r_a)$ için $g(z)\neq 0$ olan bir $r_a>0$ sayısı vardır. O halde $\forall z\in D(a;a_r)\setminus\{a\}$ için $f(z)\neq 0$ dır. Öyleyse; $D(a;r_a)\cap Z(f)=\{a\}$ dır.

Netice 1.7.9 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f:G\to\mathbb{C}$ tek değerli, analitik ve $f\neq 0$ olan bir fonksiyon olsun. $\forall K\subset G$ kompakt alt kümesi için $Z(f)\cap K$ alt kümeleri sonlu elemanlıdır.

İspat: Varsayalım ki**;** en az bir $K\subset G$ kompakt altkümesi için $Z(f)\cap K$ sonsuz elemanlı bir alt küme olsun. O halde $Z(f)\cap K\subset K$ ve K kompakt yani sınırlı olduğundan Bolzano Weierstrass Teoremi’ ne göre $Z(f)\cap K$ ’nin $\mathbb{C}$ ’ de $z_0\in\mathbb{C}$ gibi en az bir yığılma noktası vardır. $z_0\in(Z(f)\cap K)'$ ve $Z(f)\cap K\subset K$ olduğundan $(Z(f)\cap K)'\subset K'$ dir. O halde $z_0\in K'$ dir. K kompakt olduğundan kapalıdır. O halde $z_0\in K\subset G$ dir. $Z(f)\cap K\subset Z(f)$ olduğundan $(Z(f)\cap K)'\subset Z'(f)$ dir. $z_0\in G$ ve $z_0\in(Z(f)\cap K)'$ olduğundan $Z'(f)\cap G\neq\varnothing$ dır. O halde Teorem 1.7.5’e göre $f=0$ olduğu görülür ki; bu $f\neq 0$ hipotezi ile çelişir. O halde $\forall K\subset G$ kompakt alt kümesi için $Z(f)\cap K$ alt kümeleri sonlu elemanlıdır.

Netice 1.7.10 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f:G\to\mathbb{C}$ tek değerli , analitik ve $f\neq 0$ olan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, f fonksiyonunun G deki $Z(f)$ sıfır kümesi sayılabilir bir kümedir.

İspat: $\{K_n\} \subset \wp(G)$ kompakt küme ailesi $G \subset \mathbb{C}$ açık alt kümesinin bir kompakt tüketilişi olsun. $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ olduğundan $Z(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(Z(f) \cap K_n\right)$ dir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $Z(f) \cap K_n$ kümeleri bir önceki teoreme göre sonlu elemanlıdır. Sonlu elemanlı kümelerin birleşimi sonlu olduğundan $Z(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(Z(f) \cap K_n\right)$ kümesi sonludur. O halde sayılabilir bir kümedir.

Teorem 1.7.11: $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ bir bölge; $A := \{a : a \in G\} \subset G$, G de ayrık sayılabilir bir alt küme ve $m_a \in \mathbb{N}$ bir doğal sayı olsun. Bu taktirde; $Z(f) = A$, $\forall a \in Z(f)$ sıfır yerinin mertebesi $m(f;a) = m_a$ olan bir tek $f \in A(G)$ fonksiyonu vardır $(Ash\ ve\ Novinger, 2007)$.

Daha fazla olarak ;

Teorem 1.7.12 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $A := \{a : a \in G\} \subset G$, G 'de ayrık sayılabilir bir alt küme olsun. Bu taktirde, $\forall a \in G$ noktasına bir $m_a \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve $\forall k \in \{0,1,\cdots,m_a\}$ için $\alpha_a^{(k)} \in \mathbb{C}$ sayıları karşılık getirilirse; $\forall k \in \{0,1,\cdots,m_a\}$ için $f^{(k)}(a) = \alpha_a^{(k)}$ değerlerini alan bir tek $f \in A(G)$ fonksiyonu vardır $(Ash\ ve\ Novinger, 2007)$.

İspat: Bu iki teoremin ispatında sonsuz çarpımların incelenmesi, "Weierstrass Teoremi"nin incelenmesi ve meromorf fonksiyonların incelenmesine ihtiyaç duyulduğundan her iki teoremin ispatı verilmeyecektir.

1.8. Halka,Tamlık Bölgesi,Cisim ve Kompleks Cebir Tanımları

Tanım 1.8.1 : $R \neq 0$ verilen bir küme ve $+,. = R \times R \to R$, R üzerinde tanımlı, adlarına sırasıyla toplama ve çarpma adı verilen iki işlem olsun. $+,.$ işlemleri R üzerinde aşağıdaki şartları sağlıyor ise; R ’ ye $+,.$ işlemlerine göre bir halka adı verilir ve $(R,+,\cdot)$ sembolü ile gösterilir.

i. R kümesi toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur,

ii. R kümesi üzerinde çarpma işlemi birleşme özellikli bir işlemdir,

iii. R kümesi üzerinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır, yani;

$\forall a,b,c\in R$ için $(a+b)c=ac+bc$ ve $c(a+b)=ca+cb$

dir.

Tanım 1.8.2 : $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. R halkasının çarpma işlemine göre birim elemanı varsa, $(R,+,\cdot)$ halkasına birimli bir halka denir.

Tanım 1.8.3 : $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Çarpma işlemi , R üzerinde değişme özellikli bir işlem ise; $(R,+,\cdot)$ halkasına değişmeli halka denir.

Tanım 1.8.4 : $(R,+,\cdot)$ birim elemanlı bir halka olsun. R halkasında sıfırdan farklı her elemanın çarpma işlemine göre tersi varsa; $(R,+,\cdot)$ halkasına bir bölüm halkası denir.

Tanım 1.8.5 : $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka olsun. Eğer $ab=0$ olan her $a,b\in R$ için $a=0$ veya $b=0$ ise bu $(R,+,\cdot)$ halkasına bir tamlık bölgesi denir.

Tanım 1.8.6 : Birim elemanlı, değişme özellikli bir bölüm halkasına bir değişmeli cisim denir.

Tanım 1.8.7 : $\varnothing\neq A$ üzerinde $+,\cdot$ işlemleri tanımlı bir küme ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi ve $\circ:\underset{(\alpha,x)\mapsto\alpha\circ x}{\mathbb{C}\times A\to A}$, A ’nın elemanları ile $\mathbb{C}$ ’ nin elemanlarının skaler çarpımı denilen bir işlem olsun. Bu işlemler aşağıdaki şartları sağlıyor ise; A ’ya bir kompleks cebir adı verilir.

I. A kümesi $\mathbb{C}$ üzerinde bir kompleks lineer uzaydır, yani;

L1) $A,+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur ,

L2) $1\in\mathbb{C}$ ve $\forall x\in A$ için $1\circ x=x$ dir ,

L3) $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ ve $\forall x,y\in A$ için $\alpha\circ(x+y)=\alpha\circ x+\alpha\circ y$ dir,

L4) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ve $\forall x\in A$ için $(\alpha+\beta)\circ x=\alpha\circ x+\beta\circ x$ dir,

L4) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ve $\forall x\in A$ için $\alpha\circ(\beta\circ x)=(\alpha\beta)\circ x$ dir.

II. Çarpma işlemi A kümesi üzerinde birleşme özellikli ve toplama işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özellikli bir işlemdir,yani $\forall x,y,z\in A$ için $x(yz)=(xy)z$ ve $x(y+z)=xy+xz$, $(x+y)z=xz+yz$ dir.

III. $\forall x,y\in A$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için $\alpha\circ(xy)=x(\alpha\circ y)=(\alpha\circ x)y$ dir.

$(A,+,\cdot)$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir kompleks cebir ise; $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ ve $\forall x,y\in A$ için $\alpha\circ x$ ve $x\cdot y$ yerine sırası ile αx ve xy sembolleri kullanılacaktır.

Tanım 1.8.8 : $(R,+,\cdot)$, $(R^*,\oplus,\odot)$ iki halka ve $\varphi:R\to R^*$ olsun. $\forall a,b\in R$ için $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$, $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ ise bu φ'ye R halkasından R^* halkasına tanımlı bir halka homomorfizması denir. φ dönüşümü bire-bir ve örten ise; φ' ye halka izomorfizması denir.

Tanım 1.8.9 : $(A,+,\cdot)$, $(B,\oplus,\odot)$ iki kompleks cebir ve $\varphi:A\to B$ olsun. $\forall x,y\in A$ ve $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ için $\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)\oplus\beta\varphi(y)$, $\varphi(xy)=\varphi(x)\odot\varphi(y)$ ise bu φ dönüşümüne , A kompleks cebirinden B kompleks cebirine tanımlı bir cebir homomorfizması denir.

Tanım 1.8.10 : $(A,+,\cdot)$,bir kompleks cebir ve $\chi:A\to\mathbb{C}$ bir cebir homomorfizması ise , χ' ye A üzerinde tanımlı bir çarpım lineer fonksiyoneli veya A'nın bir karakteri denir.

Tanım 1.8.11: $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $a,b\in R$ olsun. $b=ac$ olacak şekilde bir $c\in R$ varsa; a elemanına b elemanını böler ve a'ya b'nin bir böleni denir. $a\in R$, $b\in R$

’nin bir böleni ise bu durum $a|b$ şeklinde yazılarak gösterilir. $a|b$ ise $b=ac$ şartını sağlayan $c\in R$ elemanına b’nin a ile bölümü denir ve $c:=\frac{a}{b}$ şeklinde yazılır. Tanımdan görülüyor ki; $a,b,c\in R$ için $a|b$ ve $b|c$ ise $a|c$ dir.

Tanım 1.8.12: $(R,+,\cdot)$ birim elemanlı ve $u\in R$ olsun. $u|1$ ise yani $1=uv$ olacak şekilde bir $v\in R$ elemanı varsa; $u\in R$ elemanına R halkasının bir birimsel elemanı denir.

Tanım 1.8.13 : $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $a,b,d\in R$ olsun. $d|a, d|b$ ve $c|a, c|b$ olan her $c\in R$ için $c|d$ ise, d ’ ye a ve b ’ nin en büyük ortak böleni denir ve $d=e.b.o.b\{a,b\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.8.14 : $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka , $I\subset R$ ve $d\in R$ olsun. d , I ’nın bir ortak böleni ve I ’nın her $c\in R$ ortak böleni için $c|d$ ise $d\in R$ ’ye I ’nın bir en büyük ortak böleni denir.

Teorem 1.8.15 : G bir bölge $f,g\in A(G)$ olsun. $f|g$ olması için gerek ve yeter koşul $Z(f)\subset Z(g)$ olmasıdır(*Luecking ve Rubel*,1984).Eğer f ve g fonksiyonlarının en büyük ortak böleni birim ise $Z(f)\cap Z(g)=\varnothing$ tur.

1.9.Halka ve Cebirlerde İdealler

Tanım 1.9.1: $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $I\subset R$ olsun. $\forall a,b\in I$ ve $\forall r\in R$ için; $a-b\in I$ ve $ra\in I$ ise I ’ ya bir ideal adı verilir.

Tanım 1.9.2 : $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $I\subset R$ bir ideal olsun. $I\neq R$ ise I ’ ya R ’ nin bir öz ideali denir.

Tanım 1.9.3 : $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $M\subsetneqq R$ bir ideal olsun. $M\subset I$ olan her $I\subset R$ ideali için $I=M$ veya $I=R$ ise M ’ ye R halkasının bir maksimal ideali denir.

Teorem 1.9.4: $(R,+,\cdot)$ bir değişmeli halka , $\varnothing \neq \mathcal{M} \subset R$ ve

$$(\mathcal{M}) := \{ r_1 m_1 + r_2 m_2 + \cdots + r_n m_n : \; n \in \mathbb{N}; r_1, r_2, \cdots, r_n \in R \text{ ve } m_1, m_2 \cdots, m_n \in R \}$$

olsun. Bu taktirde $(\mathcal{M}) \subset R$ alt kümesi R halkasında bir idealdir. Bu ideale $\mathcal{M}$ tarafından üretilen ideal denir.

İspat: ***i.*** $r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n,\; t_1 m_1 + \cdots + t_n m_n \in (M)$ için;

$(r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n) - (t_1 m_1 + \cdots + t_n m_n) = m_1 (r_1 - t_1) + \cdots + m_n (r_n - t_n)$ dır.

R bir halka olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $k_n := r_n - t_n \in R$ dir. O halde $(r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n) - (t_1 m_1 + \cdots + t_n m_n) = m_1 k_1 + \cdots + m_n k_n \in (M)$ olur.

ii. $r \in R$ ve $r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n \in (M)$ için;

$r(r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n) = r r_1 m_1 + \cdots + r r_n m_n$ dır. R bir halka olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n := r r_n \in R$ dir. O halde $r(r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n) = r r_1 m_1 + \cdots + r r_n m_n = t_1 m_1 + \cdots + t_n m_n \in (M)$ olup $(\mathcal{M}) \subset R$ alt kümesi R halkasında bir idealdir.

Tanım 1.9.5 : $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $I \subset R$, R ' nin bir ideali olsun.

$I = (a_1, \cdots, a_n)$ olacak şekilde sonlu elemanlı bir $\{a_1, \cdots, a_n\} \subset I$ alt kümesi varsa, I ' ya bir sonlu üretilmiş ideal denir.

Tanım 1.9.6: $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $I \subset R$, R ' nin bir ideali olsun. $I = (a)$ olacak şekilde bir $a \in I$ varsa I ' ya bir esas ideal denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Analitik Fonksiyonlar Halkalarında Kapalı İdealler

Teorem 2.1.1 : $G \subset \mathbb{C}$ açık bir alt küme olmak üzere $A(G)$ analitik fonksiyonlar ailesi $+,.$ işlemlerine göre bir halkadır.

İspat: Analitik bir fonksiyonun bir kompleks sabit ile çarpımı, iki analitik fonksiyonun toplamı ve çarpımı yine analitik bir fonksiyon, fonksiyonlar arasındaki toplama işlemi ve çarpma işlemi değişme özellikli bir işlem ve ayrıca fonksiyonlar arasındaki çarpma işlemi toplama işlemi üzerine dağılma özellikli bir işlem olduğundan;

i. $A(G)$ analitik fonksiyonlar ailesi, $+,\cdot$ işlemine göre bir değişmeli bir gruptur. Gerçekten;

G1) $\forall f, g, h \in A(G)$ için $(f+g)+h = f+(g+h)$ dir.

G2) $\forall f \in A(G)$ için $f+0 = f = 0+f$ olacak şekilde bir $0 \in A(G)$ vardır.

G3) $\forall f \in A(G)$ için $f+(-f) = 0 = (-f)+f$ olacak şekilde bir $-f \in A(G)$ vardır. O halde $A(G)$ analitik fonksiyonlar ailesi bir gruptur. Üstelik $\forall f, g \in A(G)$ için $f+g = g+f$ olduğundan $A(G)$ analitik fonksiyonlar ailesi değişmeli bir gruptur.

ii. $\forall f, g, h \in A(G)$ için $(f \cdot g)\cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ ve,

iii. $\forall f, g, h \in A(G)$ için $f(g+h) = fg + fh$ ve $(f+g)h = fh + gh$ olduğundan $A(G)$ ailesi bir halkadır.

Teorem 2.1.2 : G bir bölge ise $A(G)$, G üzerinde tanımlı analitik fonksiyonlar halkası bir tamlık bölgesidir.

İspat: $f, g \in A(G)$, $fg = 0$ olan iki fonksiyon olsun. Eğer $f = 0$ veya $g = 0$ olduğu gösterilirse; $A(G)$ bir tamlık bölgesi olur. Aksi halde ;

$\exists z_0, w_0 \in G \therefore f(z_0) \neq 0$ ve $g(w_0) \neq 0$ dır. $f(z_0) \neq 0$ ve $f \in A(G)$ olduğundan;

$\exists D(z_0; r_0) \subset G \therefore \forall z \in D(z_0; r_0)$ için $f(z) \neq 0$ dır. $\forall z \in D(z_0; r_0)$ için $f(z) \neq 0$ ve $fg = 0$ olduğundan; $\forall z \in D(z_0; r_0)$ için $f(z)g(z) = 0$ olması $\forall z \in D(z_0; r_0)$ için $g(z) = 0$ olduğunu gösterir. O halde $z_0 \in (Z(g))'$ dir. $z_0 \in (Z(g))'$ ise $g = 0$ dır bu ise $g(w_0) \neq 0$ olması ile çelişir. O halde $fg = 0$ ise $f = 0$ veya $g = 0$ dır.

Teorem 2.1.3 : $\varnothing \neq G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $A(G)$ bir halka ve $\mathcal{F} := \{ f : f : G \to \mathbb{C} \} \subset \mathrm{A}(G)$ olsun. $\{0\} \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(G)$ ise $\mathcal{F}$ alt kümesinin bir en büyük ortak böleni vardır.

İspat: $\beta := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} Z(f)$ olsun. O halde $\exists g \in A(G) \therefore Z(g) = \beta$ dır. Öyleyse $\forall b \in \beta$ için $m(g,b) := e.k.e\{ m(f,b) : f \in \mathcal{F} \}$ dir. Bu da gösterir ki $\forall f \in \mathcal{F}$ için $g | f$ dir. Şimdi g 'nin $\mathcal{F}$ ailesinin en büyük ortak böleni olduğunu gösterelim. $h \in A(G)$ $\mathcal{F}$ ailesinin bir böleni olsun. $f \in \mathcal{F}$ için $h | f$ olduğundan $f = hk$ olacak şekilde $k \in A(G)$ vardır. O halde $Z(h) \subseteq Z(f)$ dir. $\beta := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} Z(f)$ olduğundan $Z(h) \subseteq \beta$ dır. O halde $h | g$ dir. Dolayısıyla $g, \mathcal{F}$ ailesinin en büyük ortak bölenidir.

Teorem 2.1.4: $f_1, f_2 \in A(G)$ aralarında asal fonksiyonlar ise vardır $g_1, g_2 \in A(G)$ öyle ki $f_1 g_1 + f_2 g_2 \equiv 1$ dir.

İspat: f_1 ve f_2 aralarında asal oldukları için $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \varnothing$ dir. $a \in Z(f_1)$, f_1 fonksiyonunun m_a. mertebeden bir sıfır yeri olsun. Bu taktirde;

$f_1(a) = 0, f_1'(a) = 0, \cdots, f_1^{(m_a - 1)}(a) = 0$ ve $f_1^{(m_a)}(a) \neq 0$ dır. Ayrıca $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \varnothing$ olduğundan $f_2(a) \neq 0$ dır. $a \in Z(f_1)$ noktasına , $\forall k \in \{0, 1, \cdots, m_a - 1, m_a\}$ için

$$1 - f_2(a)\alpha_a^{(0)} = 0 \qquad ,$$

$$f_2(a)\alpha_a^{(1)} + f_2'(a)\alpha_a^{(0)} = 0 \qquad ,$$

$$f_2(a)\alpha_a^{(2)} + 2f_2'(a)\alpha_a^{(1)} + f_2'(a)\alpha_a^{(0)} = 0 \qquad ,$$

$$\vdots$$

$$f_2(a)\alpha_a^{(m_a-1)} + \binom{m_a-1}{m_a-2} f_2(a)\alpha_a^{(m_a-2)} + \cdots + f_2^{(m_a-1)}(a)\alpha_a^{(0)} = 0 \quad ,$$

ve

$$f_2(a)\alpha_a^{(m_a)} + \binom{m_a}{m_a-1} f_2'(a)\alpha_a^{(m_a-1)} + \cdots + f_2^{(m_a)}(a)\alpha_a \neq 0$$

şartlarını sağlayan $\alpha_a^{(k)}$ sayıları karşılık getirilirse; $\forall k \in \{0,1,\cdots,m_a-1,m_a\}$ için $g_2^{(k)} := \alpha_a^{(k)}$ değerlerini alan bir tek $g_2 : G \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu vardır. $f := 1 - f_2 g_2$ olarak alınırsa; $(1-f_2g_2)(a) = 0$, $(1-f_2g_2)'(a) = 0$, $(1-f_2g_2)''(a) = 0$, $\cdots$, $(1-f_2g_2)^{(m_a-1)}(a) = 0$ ve $(1-f_2g_2)^{(m_a)}(a) \neq 0$ olduğundan , $a \in Z(f_1)$ noktası f fonksiyonunun m_a. mertebeden bir sıfır yeridir. O halde $Z(f_1) \subset Z(f)$ dir. Yani $f_1 | f = 1 - f_2g_2$ dir. O halde $\exists g_1 \in A(G)$ öyle ki $1 - f_2g_2 = f_1g_1$ dır. Buradan $f_1g_1 + f_2g_2 = 1$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.5: Eğer $\{f_1, f_2, \cdots f_n\} \subseteq A(G)$ ve d bu kümenin en büyük ortak böleni ise $f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_ng_n = d$ olacak şekilde vardır $g_1, g_2, \cdots, g_n \in A(G)$ fonksiyonları vardır.

İspat: İspatı tümevarımla yapalım. Önce $n = 2$ için doğruluğunu gösterelim.

$\{f_1, f_2\}$ kümesinin en büyük ortak böleni d olsun. Bu taktirde $\frac{f_1}{d}$ ve $\frac{f_2}{d}$ aralarında asaldır. O halde bir önceki teoremden vardır $g_1, g_2 \in A(G)$ öyle ki $\frac{f_1}{d}g_1 + \frac{f_2}{d}g_2 = 1$ dir. O halde $f_1g_1 + f_2g_2 = d$ olup $n = 2$ için doğrudur.

Şimdi $n-1$ için doğruluğunu kabul edip n için doğruluğunu gösterelim. $\{f_1, f_2, \cdots f_n\}$ kümesinin en büyük ortak böleni d ve $\{f_1, f_2, \cdots f_{n-1}\}$ kümesinin en büyük ortak böleni d_1 olsun. Bu durumda $d \mid d_1$ dir. O halde $\{f_n, d_1\}$' in en büyük ortak böleni d dir. Hipotezden;

$$\exists h_1, h_2, \cdots, h_{n-1} \in A(G) \therefore f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_{n-1}h_{n-1} = d_1 \qquad (16)$$

dir.

Ayrıca $\{f_n, d_1\}$' in en büyük ortak böleni d olduğundan;

$$\exists h, g_n \in A(G) \ \therefore \ d_1h + f_ng_n = d \qquad (17)$$

dir. (16) ve (17) birleştirilirse $f_1h_1h + f_2h_2h + \cdots + f_{n-1}h_{n-1}h + f_ng_n = d$ elde edilir. $h_1h, h_2h, \cdots, h_{n-1}h \in A(G)$ olup özel olarak $h_1h \equiv g_1, h_2h \equiv g_2, \cdots, h_{n-1}h \equiv g_{n-1}$ seçilirse $f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_{n-1}g_{n-1} + f_ng_n = d$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.6 : G bir bölge ve $a \in G$ olsun. Bu taktirde; $M_a := \{ f : f \in A(G) \text{ ve } f(a) = 0\} \subset A(G)$ bir maksimal idealdir.

İspat: $M_a \subset A(G)$ bir idealdir. Gerçekten; iki analitik fonksiyonun farkı ve iki analitik fonksiyonun çarpımı yine analitik bir fonksiyon ve ayrıca

$\forall f, g \in M_a$ için $(f-g)(a) = f(a) - g(a) = 0$ olup $f - g \in M_a$,

$\forall f \in M_a$ ve $\forall h \in A(G)$ için $(f \cdot h)(a) = f(a) \cdot h(a) = 0 \cdot h(a) = 0$ olup $f \cdot h \in M_a$ olduğundan $M_a \subset A(G)$ bir idealdir.

Şimdi $M_a \subset A(G)$ idealinin maksimal olduğunu gösterelim.

$M_a \subset I \subset A(G)$ olsun. Farz edelim ki $M_a \subsetneq I$ olsun. O halde $\exists g \in I \therefore g \notin M_a$, $g(a) \neq 0$ dır.

$\varphi(z) := \dfrac{g(a)-g(z)}{g(a)}$ alalım. $\varphi(a)=0$ olduğundan $\varphi \in M_a$ dolayısıyla $\varphi \in I$ dır. Ayrıca $g(a) \neq 0$ olduğundan $\dfrac{g}{g(a)} \in I$ ve $\varphi \in I$ olup $1 = \dfrac{g(a)-g(z)}{g(a)} + \dfrac{g(z)}{g(a)} \in I$ dır.

$1 \in I$ ve I ideal olduğundan $\forall f \in A(G)$ için $f = 1 \cdot f \in I$ olduğundan $A(G) = I$ eşitliği elde edilir. O halde $M_a \subset A(G)$ maksimal bir idealdir.

Ayrıca Netice 1.5.18 ‘a göre $M_a \subset A(G)$ kapalı bir alt küme olduğundan $M_a \subset A(G)$, $A(G)$ ailesinde kapalı bir maksimal idealdir.

Teorem 2.1.7: Her sonlu üretilmiş olan idealler esas idealdir.

İspat: $I = \{ f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n : g_1, g_2, \cdots, g_n \in A(G) \}$, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ tarafından doğrulan bir ideal ve $f \in I$ olsun. Bu taktirde $g_1, g_2, \cdots, g_n \in A(G)$ için $f = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n$ dir. $\{ f_1, f_2, \cdots, f_n \}$ kümesinin Teorem 2.1.3’ e göre bir en büyük ortak böleni vardır. Bu bölen d olsun. O halde $f_1 = d.\varphi_1$, $f_2 = d.\varphi_2$, $\cdots$, $f_n = d.\varphi_n$ dir. $f_1 = d.\varphi_1$, $f_2 = d.\varphi_2$, $\cdots$, $f_n = d.\varphi_n$ ve $f = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n$ olduğundan $d | f$ dir. Dolayısıyla I idealinin her bir elemanı d ’nin bir katıdır. Diğer taraftan $\{ f_1, f_2, \cdots, f_n \}$ kümesinin en büyük ortak böleni d olduğundan Teorem 2.1.5’ e göre $h_1, h_2, \cdots, h_n \in A(G)$ için $f_1 h_1 + f_2 h_2 + \cdots + f_n h_n = d$ olup $d \in I$ dır. Böylece d ve d nin her bir katı I idealine aittir. Dolayısıyla $I = \{ d.f : f \in A(G) \}$ şeklindedir. O halde I ideali d tarafından doğrulup I esas idealdir.

Teorem 2.1.8 : G bir bölge, $I \subset A(G)$ kapalı bir idealdir ancak ve ancak I esas ideal ise.

İspat: I esas ideal ise I kapalıdır. $I = (f)$ olsun. $(f) = \{0\}$ ise; $\{ f_n \} \subset I$, dizisi için $f_n = 0$ olup $f_n \to 0$ dır. O halde $0 \in I$ olup I kapalıdır.

$(f) \neq \{0\}$ olsun. Bu taktirde $\{f_n\} \subset (f)$ yakınsak ve $h \in A(G)$ için $\lim_{n\to+\infty} f_n = h$ olan bir dizi olsun. $h \in I$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\{f_n\} \subset (f)$ olduğundan $g_n \in A(G)$ olmak üzere $f_n = g_n f$ şeklindedir. $f_n = g_n f \to h$ olduğundan $\{f_n\} \subset (f)$ dizisi , G 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde $h \in A(G)$ analitik fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde $\forall K \subset G$ kompakt alt kümesi için $\lim_{n\to+\infty} \|g_n f - h\|_K = 0$ dır. $z_0 \in Z(f)$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta ve $K_{z_0} := \{z_0\}$ olsun. $K_{z_0} := \{z_0\} \subset G$ kompakt ve $\lim_{n\to+\infty} \|g_n f - h\|_{K_{z_0}} = 0$ olduğundan $|h(z_0)| = 0$ dır. Sonuç olarak $\forall z \in Z(f)$ için $z \in Z(h)$ olduğundan $Z(f) \subset Z(h)$ dir. O halde $f \mid h$ dir. Yani $h = f\varphi$ olan $\varphi \in A(G)$ vardır. O halde $h \in (f)$ olup; I ideali kapalıdır.

Tersine olarak $I \subset A(G)$ kapalı ise I ideali bir esas idealdir. $I = A(G)$ ise $A(G) = (\mathbf{1})$ olduğundan I ideali bir esas idealdir. $I = \{0\}$ ise $I = (0)$ olup I ideali bir esas idealdir. $\{\mathbf{0}\} \subsetneqq I \subsetneqq A(G)$ ve $A := \bigcap_{f \in I} Z(f)$ olsun. Bu durumda $f \neq \mathbf{0}$ ve $Z(f) \neq \varnothing$ en az bir $f \in I$ fonksiyonu vardır. O halde $Z(f) \subset G$ alt kümesi ayrık ve en fazla sayılabilir sonsuz elemanlıdır. Dolayısıyla $A \subset G$ alt kümesi ayrık ve en fazla sayılabilir sonsuz elemanlıdır. O halde Teorem 1.7.11'e göre $Z(\varphi) = A$ ve $\forall a \in A := \bigcap_{f \in I} Z(f)$ noktasındaki sıfır yerinin mertebesi $m(\varphi; a) = E.K.E\{m(f;a) : f \in I\}$ olan bir $\varphi \in A(G)$ fonksiyonu vardır. $\forall f \in I$ için $Z(\varphi) \subset Z(f)$ olduğundan $\varphi | f$ dir. Diğer taraftan kolayca gösterilir ki; $\phi \in A(G)$ fonksiyonu I 'nın bir ortak böleni ise $\phi | \varphi$ dir. Gerçekten $\phi \in A(G)$ fonksiyonu I 'nın bir ortak böleni olduğundan $\forall f \in I$ için $f = \phi k_f$ olacak şekilde bir $k_f \in A(G)$ vardır. Son eşitlik $\forall f \in I$ için $Z(\phi) \subset Z(f)$,dolayısıyla $Z(\phi) \subset Z(\varphi) = A := \bigcap_{f \in I} Z(f)$ dir. O halde Teorem 1.8.15'e göre $\phi | \varphi$ dir. Yani $\varphi \in A(G)$, I 'nın en büyük ortak bölenidir. $J = \left\{ \frac{f}{\varphi} : f \in I \right\}$ olsun. J, $A(G)$ halkasında bir idealdir, üstelik I ideali kapalı olduğundan J ideali de kapalıdır. Gerçekten $\left\{\frac{f_n}{\varphi}\right\} \subset J$, $h \in A(G)$ fonksiyonuna yakınsak bir dizi olsun. $h \in J$ olduğu gösterilirse, $J \subset A(G)$ ideali kapalıdır. $\left\{\frac{f_n}{\varphi}\right\} \subset J$, $h \in A(G)$ fonksiyonuna yakınsak bir dizi olduğundan bu dizi G 'nin kompakt alt kümeleri üzerinde $h \in J$ noktasına düzgün yakınsaktır. O halde $\forall K \subset G$ kompakt alt kümesi için $\left\|\frac{f_n}{\varphi} - h\right\|_K \to 0$ olduğundan $\|\varphi\|_K \left\|\frac{f_n}{\varphi} - h\right\|_K \to 0$ dolayısıyla $\| f_n - \varphi h\|_K \to 0$ dır. O halde $\{ f_n\} \subset I$ dizisi φh fonksiyonuna yakınsak ve I kapalı bir ideal olduğundan $\varphi h \in I$ dır. $\varphi h \in I$ olması $\varphi h = g$ olacak şekilde bir $g \in I$ 'nin mevcut olduğunu gösterdiğinden $h = \frac{g}{\varphi} \in J$ olduğu görülür. φ , I 'ya ait olan fonksiyonların en büyük ortak böleni olduğundan J ' de bulunan fonksiyonların en büyük ortak böleni 1 'dir. Gerçekten $d \in A(G)$, J 'nin en büyük ortak böleni d olsun. $Z(d) = \varnothing$ olduğu gösterilirse; $d \in A(G), A(G)$'nin bir birimsel elemanı olacağından J 'nin en büyük ortak böleni 1' dir. d, J 'nin en büyük ortak böleni olduğundan I'nın bir bölenidir. O halde φ, I 'nın en büyük ortak böleni olduğundan $d \mid \varphi$ dir. O halde $\forall f \in I$ için $Z(d) \subset Z(\varphi) \subset Z(f)$ dir. Varsayalım ki $Z(d) \neq \varnothing$, $z_o \in Z(d)$ olsun. $m(\varphi; z_0) = E.K.E\{m(f; z_o) : f \in I\}$ olduğundan $m(\varphi; z_0) = m(f_0; z_o)$ olan en az bir $f_0 \in I$ fonksiyonu vardır. Bu $f_0 \in I$ için $\frac{f_0}{\varphi} \in J$ ve d, J 'nin en büyük ortak böleni olduğundan $f_0 = d\varphi k_{f_0}$ olan bir $k_{f_0} \in A(G)$ fonksiyonu vardır. Diğer taraftan $\forall z \in G$ için $f_0(z) = (z - z_0)^{m(f_{z_0}; z_0)} F(z)$, $d(z) = (z - z_0)^{m(d; z_0)} E(z)$, $k_{f_0}(z) = (z - z_0)^{m(k_{f_0}; z_0)} H(z)$ olan ve $F(z_0) \neq 0, E(z_0) \neq 0, H(z_0) \neq 0$ değerlerinin alan $F, E, H \in A(G)$ fonksiyonları vardır. Bu değerler $f_0 = d\varphi k_{f_0}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(z - z_0)^{m(f_{z_0}; z_0)} F(z) = (z - z_0)^{m(d; z_0) + m(\varphi; z_0)} E(z) H(z)$$

elde edilir. $m(\varphi;z_0)=m(f_0;z_o)$ ve $F(z_0)\neq 0, E(z_0)\neq 0, H(z_0)\neq 0$ olduğundan; bu bir çelişkidir. O halde $Z(d)=\varnothing$ olmak zorundadır. $Z(d)=\varnothing$ olduğundan $(d)=A(G)$'dir. Gerçekten $Z(d)=\varnothing$ olduğundan $\frac{1}{d}\in A(G)$ dir. Dolayısıyla $\mathbf{1}=d\frac{1}{d}\in(d)$ dir. $\mathbf{1}\in(d)$ olduğundan $\forall g\in A(G)$ için $g=\mathbf{1}g\in(d)$ dir. O halde $(d)=A(G)$ dir. Diğer taraftan kolayca gösterilir ki $J=(d)$ dir. O halde $J=A(G)$ dir. $J=A(G)$ olduğundan $I=\varphi\cdot A(G)$ dir. O halde I ideali φ tarafından doğrulan bir esas idealdir ve ispat tamamlanır.

2.2. Analitik Fonksiyonlar Cebirlerinde Bölgelerin Konform Denkliğinin Cebirsel Karakterizasyonu

Teorem 2.2.1 : $\varnothing\neq A\subset\mathbb{C}$ açık bir alt küme ise G üzerinde tanımlı tüm analitik fonksiyonların $A(G)$ ailesi fonksiyonların toplama ve çarpma işlemlerine göre bir kompleks cebirdir.

İspat: Analitik bir fonksiyonun bir kompleks sabit ile çarpımı, iki analitik fonksiyonun toplamı ve çarpımı yine analitik bir fonksiyon, fonksiyonlar arasındaki toplama işlemi ve çarpma işlemi değişme özellikli bir işlem ve ayrıca fonksiyonlar arasındaki çarpma işlemi toplama işlemi üzerine dağılma özellikli bir işlem olduğundan; cebir tanımından hemen görülür.

Teorem 2.2.2 : $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ açık bir alt küme ve χ, $A(G)$ üzerinde tanımlı bir çarpım lineer fonksiyoneli olsun Bu taktirde ya $\chi\equiv 0$ yada her $f\in A(G)$ için $\chi(f)=f(a)$ olacak şekilde bir tek $a\in G$ noktası vardır.

İspat: $\mathbf{1}\in A(G)$ sabit fonksiyonu için $\chi(\mathbf{1})\in\mathbb{C}$, $\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}$ ve $\chi:A(G)\to\mathbb{C}$ bir çarpım lineer fonksiyoneli olduğundan; $\chi(\mathbf{1})=(\chi(\mathbf{1}))^2$ dir. Dolayısıyla ya $\chi(\mathbf{1})=0$ ya da $\chi(\mathbf{1})=1$ dir.

i. $\chi(\mathbf{1})=0$ ise $\forall f\in A(G)$ için $f=f\cdot 1$ ve $\chi:A(G)\to\mathbb{C}$ bir çarpım lineer fonksiyoneli olduğundan $\forall f\in A(G)$ için $\chi(f)=\chi(f\cdot\mathbf{1})=\chi(f)\cdot\chi(\mathbf{1})=\chi(f)\cdot 0=0$ dolayısıyla $\chi\equiv 0$ olur.

ii. $\chi(\mathbf{1})=1$ olması hali. Bu halde $I_G:G\to G$, $I_G(z):=z$ özdeş fonksiyonu için $I_G\in A(G)$ olduğundan $a:=\chi(I_G)\in\mathbb{C}$ dir. $a\in G$, her $f\in A(G)$için $\chi(f)=f(a)$ ve $a\in G$'nin tek olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Farz edelim ki $a\notin G$ olsun. Bu taktirde $(I_G-\boldsymbol{a})\in A(G)$ fonksiyonu her $z\in G$ için $(I_G-\boldsymbol{a})(z)\neq 0$ şartını sağladığından $\dfrac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\in A(G)$ olup; $\mathbf{1}=(I_G-\boldsymbol{a})\dfrac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\in A(G)$ ve $\chi:A(G)\to\mathbb{C}$ çarpım lineer fonksiyoneli için $1=\chi(\mathbf{1})$ olduğundan

$$1=\chi\left((I_G-\boldsymbol{a})\frac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\right),$$

$$1=\chi(I_G-\boldsymbol{a})\chi\left(\frac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\right),$$

$$1=(\chi(I_G)-\chi(\boldsymbol{a}))\chi\left(\frac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\right),$$

$$1=(a-\chi(a\mathbf{1}))\chi\left(\frac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\right),$$

$$1=(a-a\chi(\mathbf{1}))\chi\left(\frac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\right),$$

$$1=(a-a1)\chi\left(\frac{\mathbf{1}}{I_G-\boldsymbol{a}}\right),$$

$$1=0$$

elde edilir ki; bu bir çelişkidir. O halde $\chi(\mathbf{1})=1$ ve $a:=\chi(I_G)\in\mathbb{C}$ ise $a\in G$ dir . Şimdi her $f\in A(G)$için $\chi(f)=f(a)$ olduğunu gösterelim. $f=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ yani $\forall z\in G$ için

$f(z)=f(a)$ ise; $\chi(f)=\chi(f(a))=\chi(f(a)\cdot\mathbf{1})=f(a)\chi(\mathbf{1})=f(a)$ olur. $f\neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ ise; $(f-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))(a)=0$ olduğundan, $a\in G$ noktası $f-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\neq\mathbf{0}$ fonksiyonunun bir sıfır yeridir. $m\equiv m(f-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),a)$ olarak alınırsa; $f-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})=(I_G-\boldsymbol{a})^m g$ ve $g(a)\neq 0$ şartını sağlayan bir $g\in A(G)$ analitik fonksiyonu vardır. $\chi:A(G)\to\mathbb{C}$, çarpım lineer fonksiyoneli için $\chi(\mathbf{1})=1$ olduğundan

$$\chi(f-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))=\chi\left((I_G-\boldsymbol{a})^m g\right),$$

$$\chi(f-f(a)\mathbf{1})=\chi\left((I_G-\boldsymbol{a})^m\right)\chi(g),$$

$$\chi(f)-f(a)1=\left(\chi(I_G-a\mathbf{1})\right)^m\chi(g),$$

$$\chi(f)-f(a)=\left(\chi(I_G)-a\chi(\mathbf{1})\right)^m\chi(g),$$

$$\chi(f)-f(a)=(a-a1)^m\chi(g),$$

$$\chi(f)-f(a)=0$$

dolayısıyla $\chi(f)=f(a)$ dir. Son olarak $a\in G$ noktasının tek olduğunu gösterelim. $a,b\in G$; $\forall f\in A(G)$ için $\chi(f)=f(a)$ ve $\chi(f)=f(b)$ olan iki nokta olsun. $I_G\in A(G)$ özdeş fonksiyonu için $a=\chi(I_G)\in\mathbb{C}$ ve $b=\chi(I_G)\in\mathbb{C}$ olduğundan $a=b$ dir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.3 : G,G^* iki bölge ve $\Phi:A(G^*)\to A(G)$ olsun. Φ' nin bir cebir homomorfizması olması için gerek ve yeter şart $\forall f\in A(G^*)$ için $\Phi(f)=fo\varphi$ koşulunu sağlayan bir tek $\varphi:G\to G^*$ analitik fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. ***i.*** $\varphi:G\to G^*$ bir analitik fonksiyon olsun. $\Phi:A(G^*)\to A(G)$ dönüşümü, $\forall f\in A(G^*)$ için $\Phi(f)=fo\varphi$ şeklinde tanımlanırsa; iki analitik fonksiyonun bileşkesi analitik olduğundan $\forall f \in A\left(G^*\right)$ için $\Phi(f) \in A(G)$ olup; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\forall f, g \in A\left(G^*\right)$ için

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) o \varphi,$$

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f) o \varphi + (\beta g) o \varphi,$$

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha(f o \varphi) + \beta(g o \varphi),$$

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g)$$

ve

$$\Phi(fg) = (fg) o \varphi \ ,$$

$$\Phi(fg) = (f o \varphi)(g o \varphi),$$

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$$

olduğundan $\Phi : A\left(G^*\right) \to A(G)$ bir cebir homomorfizmasıdır.

ii. Tersine olarak $\Phi : A\left(G^*\right) \to A(G)$ bir cebir homomorfizması ise her $f \in A\left(G^*\right)$ için $\Phi(f) = f o \varphi$ olacak şekilde bir tek $\varphi : G \to G^*$ analitik fonksiyonu vardır.

$z \in G$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $\chi_z : A\left(G^*\right) \to \mathbb{C}$ dönüşümü her $f \in A\left(G^*\right)$ için $\chi_z(f) := \Phi(f)(z)$ şeklinde tanımlanırsa; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\forall f, g \in A\left(G^*\right)$ için $\chi_z(\alpha f + \beta g) = \alpha \chi_z(f) + \beta \chi_z(g)$ ve $\chi_z(fg) = \chi_z(f)\chi_z(g)$ olduğundan, $\chi_z : A\left(G^*\right) \to \mathbb{C}$, $A\left(G^*\right)$ üzerinde bir çarpım lineer fonksiyonelidir. O halde $\forall f \in A\left(G^*\right)$ için $\chi_z(f) = f(w_z)$ olan bir tek $w_z \in G^*$ noktası vardır. $\varphi : G \to G^*$ dönüşümü $\varphi(z) := w_z$ şeklinde tanımlanırsa; $\varphi : G \to G^*$ fonksiyonu $\forall f \in A\left(G^*\right)$

ve $\forall z\in G$ için $\chi_z(f)=f(\varphi(z))$ yani $\Phi(f)(z)=f(\varphi(z))$ koşulunu sağlar. $\varphi:G\to G^*$ fonksiyonunun analitik ve tek olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$\forall f\in A(G^*)$ için $\Phi(f)=fo\varphi$ olduğundan $I_{G^*}\in A(G^*)$ için $\Phi(I_{G^*})=I_{G^*}o\varphi$ yani $\varphi=\Phi(I_{G^*})\in A(G)$ olup ; $\varphi:G\to G^*$ fonksiyonu analitiktir. Son olarak $\forall f\in A(G^*)$ için $\Phi(f)=fo\varphi$ koşulunu sağlayan $\varphi:G\to G^*$ analitik fonksiyonunun tek olduğunu gösterelim. $\varphi,\psi:G\to G^*$ fonksiyonları $\forall f\in A(G^*)$ için $\Phi(f)=fo\varphi$ ve $\Phi(f)=fo\psi$ olan iki analitik fonksiyon olsun. $I_{G^*}\in A(G^*)$ analitik fonksiyonu için $\Phi(I_{G^*})=I_{G^*}o\varphi$, $\Phi(I_{G^*})=I_{G^*}o\psi$, $I_{G^*}o\varphi=\varphi$ ve $I_{G^*}o\psi=\psi$ olduğundan $\varphi=\psi$ olduğu görülür.

Netice 2.2.4: $\varnothing\neq G,G^*\subset\mathbb{C}$ iki bölge ve $\Phi:A(G^*)\to A(G)$ bir cebir homomorfizması ise Φ süreklidir.

İspat: $\{f_n\}\subset A(G^*)$**,** $f\in A(G)$**'** ye yakınsak bir dizi ve $K\subset G$ kompakt olsun. Φ bir cebir homomorfizması olduğundan Teorem 2.2.3'e göre $\Phi(f)=fo\varphi$ koşulunu sağlayan bir tek $\varphi:G\to G^*$ analitik fonksiyonu vardır. O halde;

$$\|\Phi(f_n)-\Phi(f)\|_K=\|f_n o\varphi-fo\varphi\|_K \qquad (18)$$

dir. $\varphi:K\subset G\to G^*$, φ analitik ve K kompakt olduğundan $\varphi(K)\subset G^\star$ kompakttır. O halde (18)' dan ; $\|\Phi(f_n)-\Phi(f)\|_K=\|f_n-f\|_{\varphi(K)}\to 0$ dır. Dolayısıyla $\Phi:A(G^*)\to A(G)$ cebir homomorfizması süreklidir.

Tanım 2.2.5 : G,G^* iki açık küme olsun. G'den G^*'a tanımlı bire-bir ve örten bir $\varphi:G\to G^*$ analitik fonksiyonu varsa G açık kümesi G^* açık kümesine konform olarak denktir denir.

Kompleks analizin iyi bilinen teoremlerinden birine göre; (*Freitag ve Busam*, 2005) $\varnothing\neq G\subset\mathbb{C}$ açık bir alt küme, $f:G\to\mathbb{C}$ bire-bir ve analitik bir fonksiyon ise $\forall z\in G$ için $f'(z)\neq 0$ dır. Bu nedenle G,G^* açık alt kümeleri için G

açık alt kümesi G^* açık alt kümesine konform olarak denk ise bire-bir ve örten $\varphi : G \to G^*$ fonksiyonu $\forall z \in G$ için $\varphi'(z) \neq 0$ koşulunu sağladığından $\varphi^{-1} : G^* \to G$ ters fonksiyonu bire-bir, örten ve analitik bir fonksiyondur (*Freitag ve Busam*, 2005). Bu nedenle G açık alt kümesi G^* açık alt kümesine konform olarak denk ise G^* açık alt kümesi de G açık alt kümesine konform olarak denktir.

Teorem 2.2.6 : G, G^* kompleks düzlemde iki bölge ve $\Phi : A(G^*) \to A(G)$ olsun. Φ' nin bir cebir izomorfizması olması için gerek ve yeter şart $\forall f \in A(G^*)$ için $\Phi(f) = fo\varphi$ koşulunu sağlayan bir tek $\varphi : G \to G^*$ konform dönüşümünün mevcut olmasıdır.

İspat. ***i.*** $\varphi : G \to G^*$ bir konform dönüşüm olsun. $\Phi : A(G^*) \to A(G)$ dönüşümü, $\forall f \in A(G^*)$ için $\Phi(f) = fo\varphi$ şeklinde tanımlanırsa; iki analitik fonksiyonun bileşkesi analitik olduğundan $\forall f \in A(G^*)$ için $\Phi(f) \in A(G)$ olup; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\forall f, g \in A(G^*)$ için

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) o\varphi,$$

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f) o\varphi + (\beta g) o\varphi,$$

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha (fo\varphi) + \beta (go\varphi),$$

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g)$$

ve

$$\Phi(fg) = (fg) o\varphi \ ,$$

$$\Phi(fg) = (fo\varphi)(go\varphi),$$

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$$

olduğundan $\Phi : A\left(G^{*}\right) \to A(G)$ bir cebir homomorfizmasıdır. $\Phi : A\left(G^{*}\right) \to A(G)$ 'nin bire-bir ve örten olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $\varphi : G \to G^{*}$ dönüşümü konform olduğundan $\varphi^{-1} : G^{*} \to G$ ters fonksiyonu da konformdur. Dolayısıyla $\forall h \in A(G)$ için $ho\varphi^{-1} \in A\left(G^{*}\right)$ olup $\Phi\left(ho\varphi^{-1}\right) = \left(ho\varphi^{-1}\right)o\varphi = h$ koşulunu sağlar. O halde $\Phi : A\left(G^{*}\right) \to A(G)$, $\Phi(f) = fo\varphi$, homomorfizması örtendir. $f, g \in A\left(G^{*}\right)$, $\Phi(f) = \Phi(g)$ yani $fo\varphi = go\varphi$ koşulunu sağlayan iki fonksiyon olsun. O halde $(fo\varphi)o\varphi^{-1} = (go\varphi)o\varphi^{-1}$ eşitliğinden $f = g$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\varphi : G \to G^{*}$ dönüşümü konform bir dönüşüm ise $\Phi : A\left(G^{*}\right) \to A(G)$, $\Phi(f) = fo\varphi$ koşulunu sağlayan bir cebir izomorfizmasıdır.

ii. Tersine olarak $\Phi : A\left(G^{*}\right) \to A(G)$ bir cebir izomorfizması ise her $f \in A\left(G^{*}\right)$ için $\Phi(f) = fo\varphi$ olacak şekilde bir tek $\varphi : G \to G^{*}$ konform dönüşümünün mevcuttur.

$\Phi : A\left(G^{*}\right) \to A(G)$ bir cebir izomorfizması olduğundan bir cebir homomorfizmasıdır. O halde yukarıdaki teoreme göre $\forall f \in A\left(G^{*}\right)$ için $\Phi(f) = fo\varphi$ koşulunu sağlayan bir tek $\varphi : G \to G^{*}$ analitik fonksiyonu vardır ve $\varphi = \Phi\left(I_{G^{*}}\right) \in A(G)$ dir. $\varphi : G \to G^{*}$ dönüşümünün bire-bir, örten olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$w \in G^{*}$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $\Phi : A\left(G^{*}\right) \to A(G)$ bir cebir izomorfizması olduğundan $\Phi^{-1} : A(G) \to A\left(G^{*}\right)$ ters dönüşümü de bir cebir izomorfizmasıdır. O halde $\chi_w : A(G) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\chi_w(h) := \Phi^{-1}(h)(w)$, dönüşümü $A(G)$ cebiri üzerinde tanımlı bir çarpım lineer fonksiyonelidir. Dolayısıyla Teorem 2.2.2' ye göre $\forall h \in A(G)$ için $\chi_w(h) := \Phi^{-1}(h)(w) = h(z)$ olacak şekilde bir tek $z \in G$ noktası vardır. O halde $\Phi^{-1}(h)(w) = h(z)$ eşitliğinin sağ tarafında h fonksiyonu yerine $\varphi \in A(G)$, sol tarafında h fonksiyonu yerine $\Phi\left(I_{G^{*}}\right) = \varphi$ yazılırsa

$\Phi^{-1}\left(\Phi\left(I_{G^*}\right)\right)(w)=\varphi(z)$ den $\varphi(z)=w$ olduğu görülür. O halde $\varphi: G \to G^*$ dönüşümü örtendir. Son olarak $\varphi: G \to G^*$ dönüşümünün bire-bir olduğunu gösterelim. $z_1, z_2 \in G$, $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ koşulunu sağlayan iki nokta olsun. $\forall f \in A\left(G^*\right)$ için $\Phi(f)= fo\varphi$ olduğundan özel olarak $\Phi^{-1}(I_G)$ için $\Phi\left(\Phi^{-1}(I_G)\right)=\Phi^{-1}(I_G)o\varphi$ dir. $z_1, z_2 \in G$ için;

$\Phi\left(\Phi^{-1}(I_G)\right)(z_1)=\left(\Phi^{-1}(I_G)o\varphi\right)(z_1)$, $\Phi\left(\Phi^{-1}(I_G)\right)(z_2)=\left(\Phi^{-1}(I_G)o\varphi\right)(z_2)$ olup $I_G(z_1)=I_G(z_2)$ olduğundan $z_1=z_2$ elde edilir. $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ olan $\forall z_1, z_2 \in G$ için $z_1=z_2$ olduğundan $\varphi: G \to G^*$ dönüşümü bire-birdir.

SONUÇLAR

1. Bu tez çalışmasında analitik fonksiyonlar halkasında kapalı ideallerin esas ideal olduğu gösterilmiştir.

2. Kompleks düzlemde bir bölge üzerinde tanımlı analitik fonksiyon cebiri üzerinde tanımlı çarpım lineer fonksiyonellerinin bir noktasal lineer fonksiyonel olduğu gösterilmiştir. Bu teorem kullanılarak kompleks düzlemde iki bölge üzerinde tanımlı analitik fonksiyon cebir homomorfizmalarının ve cebir izomorfizmalarının karakterizasyon problemleri verilmiştir.

ÖNERİLER

Bu tezde kapalı ideallerin esas ideal olduğu gösterilmiştir. Kapalı olmayan ideallerin esas ideal olup olmadığı da incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Alpay, Ş. ve Karakaş, H.İ., An Intoduction to Number System and Algebraic Structures, Matematik Vakfı Yayınları, Ankara, 1996.

2. Ahlfors, L.V., Complex Analysıs, Third Edition, McGraw-Hill Book Co., United States of America, 1979.

3. Ash, R.B. ve Novinger W.P., Complexs Variables, Dover Publications Book Co., USA, 2007.

4. Freitag, E. ve Busam, R., Complex Analysıs, Netherlands, 2005.

5. Hungerford, T.W., Algebra, Springer Verlag Book Co., United States of America, 1974.

6. Luecking, D.H. ve Rubel, L.A., Complex Analysıs, Springer Vella Book Co., United States of America, 1984.

7. Munkers, J.R., Topology, Second Edition, Prentice Hall Book Co., United States of America, 1975.

8. Narasimhan, R. ve Nievergelt, Y., Complex Analysıs in one Variable, Second Edition, Birkhöuser Book Co., United States of America, 2001.

9. Rudin, W., Principles of Mathematical Analysıs, Third Edition, McGraw Hill Book Co., United States of America, 1976.

ÖZGEÇMİŞ

Melek YAYLA, 15.09.1984 tarihinde Giresun'un Tirebolu ilçesinde doğdu. İlköğretimini Giresun Karakaya İlkokulu'nda, ortaöğretimini ise Giresun Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi'nde tamamladı.

2003–2004 Eğitim-Öğretim yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2007 yılında Matematik Bölümü Lisans eğitimini birincilikle bitirdi.

2007–2008 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Tezli Yüksek Lisans programına kabul edildi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesinin yüksek lisans İngilizce hazırlık programını tamamladı. 2008–2009 Eğitim-Öğretim yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı.