KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KUATERNİONLAR UZAYINDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Duygu MOLLAVEİSOĞLU

HAZİRAN 2011

TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KUATERNİONLAR UZAYINDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI

Duygu MOLLAVEİSOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	**:**	**16.05.2011**
Tezin Savunma Tarihi	**:**	**08.06.2011**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Duygu MOLLAVEİSOĞLU tarafından hazırlanan

KUATERNİONLAR UZAYINDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 17 / 05 / 2011 gün ve 1405 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 08 / 06 / 2011 tarihinde yapılan sınavda
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof.Dr. Djavvat KHADJİEV ....

Üye : Prof. Dr. Ziya YAPAR ....

Üye : Doç.Dr. Murat EKİNCİ ....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

“Kuaternionlar Uzayında Dönüşüm Grupları” adlı bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında “Yüksek Lisans Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJIEV(Cevat HACİEV)’e, çalışmalarımın gelişimi aşamasında sunularıma katılarak yardımlarını esirgemeyen Sayın Hüsnü Anıl ÇOBAN’a saygılarımı sunar, emekleri için teşekkür ederim.

Bugüne kadar hep yanımda olup desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Duygu MOLLAVEİSOĞLU
Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kuaternionlar Uzayında Dönüşüm Grupları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV ‘in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 16/05/2011.

Duygu MOLLAVEİSOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans

ÖZET

KUATENİONLAR UZAYINDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI

Duygu MOLLAVEİSOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman:Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
2011, 65 Sayfa

Bu çalışmada, kuaternionlar uzayında kuaternionlara ait bazı sonuçlar bulundu. $\mathbb{C}^2$- uzayında noktalar sisteminin SU(2) - denklik problemi ve Kuaternionlar uzayında $\mathcal{K}_1$- denklik problemi tanımlandı. Kuaternionlar uzayından $\mathbb{C}^2$- uzayına tanımlanan $\mathbb{C}$ - izomorfizma yardımıyla her kuaterniona karşılık $\mathbb{C}^2$- uzayında bir vektör karşılık getirildi. Normu bir olan kuaternionlar grubu ile $\mathbb{C}^2$- uzayında determinantı bir olan üniter matrisler grubu arasında tanımlanan dönüşümün grup izomorfizması olduğu gösterildi. Bu sonuç kullanılarak $\mathbb{C}^2$- uzayında noktaların $SU(2)$ $-$denklik problemi ile kuaternionlar uzayında normu bir olan kuaternionların denklik problemi arasında bağlantı bulundu. $\mathcal{K}_1$- denklik problemi çözüldü. Bulunan bağlantı kullanılarak, kuaternionlar yardımıyla $\mathbb{C}^2$ - uzayında noktalar sisteminin SU(2) - denklik problemi çözüldü.

Anahtar Kelimeler: Kuaternion**,** Invaryant, Denklik Problemi.

Master Thesis

SUMMARY

TRANSFORMATION GROUPS İN QUATERNİONS SPACE

Duygu MOLLAVEİSOĞLU

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program

Supervisor: Assoc. Prof. Djavvat KHADJİEV

2011, 65 pages

In this study, in quaternions space the results for quaternions have been found. SU(2) – equivalence problem of points system in $\mathbb{C}^2$- space and $\mathcal{K}_1$- equivalence problem of points system in quaternions space were defined. From quaternion space to vector space a transformation was defined. This transformation was shown to be a $\mathbb{C}$ - isomorphism. Also this transformation was shown to be a group isomorphism. Using this result, correlations between SU(2) – equivalence problem and $\mathcal{K}_1$- equivalence problem has been studied. Further, $\mathcal{K}_1$- equivalence problem has been solved. SU(2) – equivalence problem has been solved in $\mathbb{C}^2$- space by using this connection with the help of quaternions.

Key Words: **:** Quaternion, Invariant, Equivalence Problem.

SEMBOLLER DİZİNİ

$(a_{ij});\ i,j = 1,2,\dots,n;\ a_{ij} \in \mathbb{R}$	$n \times n$ tipindeki reel katsayılı bir matris
$G(x)$	x noktasının G – yörüngesi
$G : K$	G grubunun K kümesi üzerindeki etkisi
$GL(n, \mathbb{R})$	$n \times n$ tipindeki determinantı sıfır olmayan tüm matrislerin oluşturduğu grup
$boy\ E$	E reel vektör uzayının boyutu
$boy\ E'$	E' kompleks vektör uzayının boyutu
$\mathbb{C}^n$	n boyutlu kompleks vektör uzayı
$\mathbb{C} -$ lineer	Kompleks lineer
$[x\ y]$	$= det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
$M(n \times n, \mathbb{C})$	$n \times n$ tipindeki tüm kompleks matrisler kümesi
$O(n)$	n boyutlu reel ortogonal dönüşümler grubu
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$	$= \{(x,y): x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n\}$
$\mathbb{R}[x]$	x bilinmeyenli reel polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x)$	x bilinmeyenli reel rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[x]^G$	G – invaryant reel polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x)^G$	G – invaryant reel rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\right)^G$	m tane noktalar sisteminin reel katsayılı G – invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}$ - lineer	Reel lineer
$\mathbb{R}$ - cebir	Reel sayılar üzerinde cebir
$SU(n)$	n boyutlu özel üniter dönüşümler grubu
$U(n)$	n boyutlu üniter dönüşümler grubu

$\langle\, , \rangle_{\mathbb{C}}$	Kompleks vektör uzayında skaler (iç) çarpım
$\langle\, , \rangle_{\mathbb{R}}$	Reel vektör uzayında skaler (iç) çarpım
e_0	Kuaternionların skaler bileşenine ilişkin baz elemanı
e_1	Kuaternionların birinci imajiner baz elemanı
e_2	Kuaternionların ikinci imajiner baz elemanı
e_3	Kuaternionların üçüncü imajiner baz elemanı
S_q	Reel kuaternionların skaler kısmı
V_q	Reel kuaternionların vektörel kısmı
$\mathcal{K}$	Reel kuaternion uzayı
q^{-1}	q Reel kuaternionun tersi
$\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$	$=\left\{\mathrm{a}_0 1+\mathrm{a}_1 \overrightarrow{\mathrm{e}_1}:\ \mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1 \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{e}_1}^2=-1\right\}$
$\mathcal{K}^n$	$=\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{K}, 1 \leq i \leq n\}$
$M(\mathcal{K}, \mathbb{C})$	$\mathcal{K}$- Kuaternionlar uzayında tüm $\mathbb{C}$- lineer operatörlerin $\mathbb{C}$- cebiri
$M(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2$- Kompleks vektör uzayında tüm $\mathbb{C}$- lineer operatörlerin $\mathbb{C}$- cebiri
♦	İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kuaternionlar 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından kompleks sayıları üç boyutlu uzaya taşımak amacıyla geliştirilmiştir[8]. Çalışmalarını başta iki kompleks ve bir reel bileşene sahip $a + e_1b + e_2c$ üçlü sayı sistemi üzerinde yoğunlaştıran Hamilton bu sayı sistemi ile üç boyutlu reel uzaydaki bir noktayı temsil etmeyi amaçlıyordu. Burada $a + e_1b$ ile verilen kısım kompleks düzlemdeki yönleri yansıtırken e_2 ile verilen bileşen ise bu iki yöne dik üçüncü yönelimi temsil etmekteydi. Bu yolla cebirsel bir sistem kurmaya çalışan Hamilton bu sistem üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabildiği halde bölme işlemi için ise bir metot geliştirememiştir. Bunun üzerine bu üçlü sistemden vazgeçerek bu sisteme üçüncü bir imajiner bileşen eklemiştir. Üçüncü imajiner birim e_3'ü eklemesinin ardından yukarıdaki yorumunu değiştirerek, $a + e_1b + e_2c + e_3d$ kuaternionunda reel bileşenin artık geometrik bir anlamı kalmamış, bunun yerine diğer imajiner üç birim birbirine dik üç yönü göstermek için kullanılmıştır. Böylece Hamilton, Kuaternion ismini verdiği 4-boyutlu olan sözde hiper-kompleks sayıyı keşfetmiştir [17, 18, 20].

Kuaternionlar aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Reel sayılar bir, kompleks sayılar iki bileşen içerirken kuaternionlar dört bileşene sahiptir. Kompleks sayılar reel sayıların bir kombinasyonudur. Dolayısıyla da reel sayılar, kompleks sayıların bir alt kümesidir. Diğer taraftan kuaternionlar da iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılar da kuaternionların bir alt kümesidir. Bu sonuç, kuaternionların hem reel sayılar hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir.

Kuaternionlar, uzaysal dönmelerde ve fiziksel büyüklüklerin karakterlerinin belirlenmesinde çok işe yaramaktadır. Ayrıca kuaternionlar grup teorisinde ve elemanter parçacıkların sınıflandırılmasında kullanılmaktadır. Uzaysal dönmeler, grup teori uygulamaları, kontrol sistemleri ve robotik uygulamalarında birçok araştırmacı için ilginç bir araçtır. M. Tanışlı tarafından hazırlanan doktora tezinde endüstriyel robot kollarının hareketi kuaternionlar yardımıyla tanımlanmaktadır[22].

Kuaternionlar fiziksel büyüklükleri ifade etmek için de kullanılabilmektedir[19]. 1989'da K. Özdaş tarafından skaler ve vektörel büyüklüklerin kuaternion uzayına taşınarak birer kuaternion olarak nasıl ifade edileceği gösterilmiştir. Kuaternion çarpımından farklı olarak kuaternionlar için skaler(iç) ve vektörel(dış) çarpma işlemleri tanımlanmıştır. Bu işlemler yardımıyla "iş" ve "tork" gibi büyüklüklerin nasıl ifade edileceği gösterilmiştir [20, 22].

Son yıllarda ise kuaternionların uygulama alanları bilimin tüm dallarına dağılmaktadır. Kimyada molekül yapılarının incelenmesinden[3, 6], tıbbi bilimlerde DNA ve protein yapıları, göz hareketlerinin tanımlanması[15, 23], hidrodinamik ve elastik[7, 13], astronomi ve optikteki uygulamalara[2, 24] kadar geniş bir spektrumda kullanılmaya başlandığı görülmektedir.

Bugüne kadar birçok denklem çeşitli bilim adamları tarafından kuaternionlarla yeniden ifade edilmiştir. Bunlardan bazıları şöyledir: J. C. K. Chou kinematik ve dinamik diferansiyel denklemleri[4], Adler kuantum mekaniği[1], M. Tanışlı ve K. Özdaş robotik manipülatörlerin pozisyonunun kuaternion dönüşümü, M. Tanışlı akustik enerji korunum denklemini, yine Tanışlı ve Özgür açısal momentum ve Dirac denklemlerini[21], Negi ve arkadaşları tek kutup dynonslar gibi teorik varlıkları anlatmak için bu sayı cebrini kullanmışlardır [14].

Tezde kuaternionlar uzayında aşağıdaki konular incelendi:

1. Kuaternionlar uzayında kuaternionlara ait bazı sonuçlar bulundu.

2. $\mathbb{C}^2$- uzayında noktalar sisteminin SU(2) - denklik problemi ve Kuaternionlar uzayında $\mathcal{K}_1$-denklik problemi tanımlandı.

3. SU(2) denklik problemi ve $\mathcal{K}_1$ - denklik problemi arasındaki bağlantılar incelendi.

4. $\mathcal{K}_1$- denklik problemi çözüldü. ($\mathcal{K}_1$, normu bir olan kuaternionlar grubu)

5. SU(2) – denklik problemi çözüldü. (SU(2) determinantı bir olan 2×2 - tipindeki üniter matrislerin oluşturduğu gruptur)

1.2. Kümeler Üzerinde Grup Hareketi

Tanım 1: G bir grup ve K bir küme olsun. Bir $\phi: G \times K \to K$ dönüşümü verilsin. $g \in G, x \in K$ için $\phi(g, x) = g \cdot x$ şeklinde yazalım.$\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in K$ için:

a) $(g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$;

b) e, G'nin birimi olmak üzere, $e \cdot x = x$

koşulları sağlanıyorsa, ϕ'ye G'nin K üzerindeki hareketi (etkisi) denir. G'nin K üzerindeki hareketi G: K şeklinde gösterilir.

Örnek 1: $GL(n, \mathbb{R}), n \times n$ tipindeki determinantı sıfır olmayan tüm matrislerin oluşturduğu küme olsun. $GL(n, \mathbb{R})$ matrislerin çarpımına göre bir gruptur.

$GL(n, \mathbb{R})$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki hareketi g=$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$ ve

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $g \cdot x = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ olarak verilir. Gerçekten,

$g, h \in GL(n, \mathbb{R})$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için,

a) $(g.h).x = \left(\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \right) . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} \cdot h_{11} + \cdots + g_{1n} h_{n1} & \cdots & g_{11} \cdot h_{1n} + \cdots + g_{1n} \cdot h_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} \cdot h_{11} + \cdots + g_{nn} \cdot h_{n1} & \cdots & g_{n1} \cdot h_{1n} + \cdots + g_{nn} \cdot h_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (g_{11} \cdot h_{11} + \cdots + g_{1n} \cdot h_{n1}) \cdot x_1 + \cdots + (g_{11} \cdot h_{1n} + \cdots + g_{1n} \cdot h_{nn}) \cdot x_n \\ \vdots \\ (g_{n1} h_{11} + \cdots + g_{nn} \cdot h_{n1}) \cdot x_1 + \cdots + (g_{n1} \cdot h_{1n} + \cdots + g_{nn} \cdot h_{nn}) \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} \cdot (h_{11} \cdot x_1 + \cdots + h_{1n} \cdot x_n + \cdots + g_{1n} \cdot (h_{n1} \cdot x_1 + \cdots + h_{nn} \cdot x_n) \\ \vdots \\ (g_{n1} \cdot (h_{11} \cdot x_1 + \cdots + h_{1n} \cdot x_n) + \cdots + (g_{nn} \cdot (h_{n1} \cdot x_1 + \cdots + h_{nn} \cdot x_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (h_{11} \cdot x_1 + \cdots + h_{1n} \cdot x_n) \\ \vdots \\ (h_{n1} \cdot x_1 + \cdots + h_{nn} \cdot x_n) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = g \cdot (h \cdot x)$$

b) I= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{R})$ birim elemanını alalım.

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$için;

$$I \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 1 \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

olacağından $I \cdot x = x$ elde edilir.

Örnek 2: n× n boyutlu ortogonal matrisler $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki hareketi $g = \|a_{ij}\| \in O(n)$ ve $x = \|x_j\| \in \mathbb{R}^n$ (i,j=1,2,…n) olmak üzere;

$g \cdot x = \|a_{ij}\| \cdot \|x_j\| = \left\|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j\right\|$ olarak verilir.

Gerçekten;

$g = \|a_{ij}\|, h = \|b_{jk}\| \in O(n)$ ve $x = \|x_k\| \in \mathbb{R}^n$ için;

a) $(g,h) \cdot x = \left(\|a_{ij}\| \cdot \|b_{jk}\|\right) \cdot \|x_k\|$

$= \left\|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}\right\| \cdot \|x_k\|$

$= \left\|\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk}) \cdot x_k\right\|$

$= \left\|\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} \cdot (b_{jk} \cdot x_k)\right\|$

$= \|a_{ij}\| \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n} b_{jk} \cdot x_k\right\| = \|a_{ij}\| \cdot \left(\|b_{jk}\| \cdot \|x_k\|\right)$

$= g \cdot (h \cdot x)$

elde edilir.

b) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$ birim elemanını alalım.

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ için,

$$I.x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 0.x_n \\ 0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 0.x_n \\ \vdots \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \cdots + 1.x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

olacağından $I \cdot x = x$ elde edilir.

Örnek 3: $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerindeki hareketi$g \in O(n), (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ olmak üzere; $g \cdot (x, y) = (g \cdot x, g \cdot y)$ olarak verilir. Gerçekten,

a) $\forall g_1, g_2 \in O(n)$ ve $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için $g_1 \cdot g_2 \in O(n)$ olacağından;

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot g_2)(x, y) &= \big((g_1 \cdot g_2) \cdot x, (g_1 \cdot g_2) \cdot y\big) \\ &= \big(g_1 \cdot (g_2 \cdot x), g_1 \cdot (g_2 \cdot y)\big) \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot x, g_2 \cdot y) = g_1 \cdot \big(g_2 \cdot (x, y)\big) \end{aligned}$$

elde edilir.

b) $I \in O(n)$ birim eleman olmak üzere, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için;

$I \cdot (x, y) = (I \cdot x, I \cdot y) = (x, y)$ olur.

1.3. Noktalar Sisteminin G- Denkliği ve G- Yörünge

Tanım 2: G bir grup olmak üzere, G'nin X kümesi üzerindeki etkisi verilsin. $x, y \in X$ olmak üzere, $\exists g \in G$ için $y = g \cdot x$ ise x, y'ye $G-$denk'tir denir ve bu durum $x \sim y(G)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1: G grubunun bir X kümesi üzerindeki etkisi verilsin. Bu taktirde $\forall x, y \in X$ için $x \sim y$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: "$\sim$" bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermek gerekir.

i) $\forall x \in X$ için $x \sim x$'dir. $x \in X$ ve $g = e \in G$ alalım.

$x = g \cdot x = e \cdot x = x$ olup, $x \sim x$'dir.

ii) $\forall x, y \in X$ için $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$'dir.

$\forall x, y \in X$ için $x \sim y \Rightarrow \exists g \in G$ öyle ki $y = g \cdot x$'dir. Burada eşitliğin her iki tarafını soldan $g^{-1} \in G$ ile çarparsak;

$y = g \cdot x \Rightarrow g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot g \cdot x$

$\Rightarrow g^{-1} \cdot y = e \cdot x = x$ olup, $y \sim x$'dir.

iii) $\forall x, y \in X$ için $x \sim y$ ve $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ 'dir.

$\forall x, y, z \in X$ için $x \sim y \Rightarrow \exists g_1 \in G$ öyle ki $y = g_1 \cdot x$'dir. ….(1)

$y \sim z \Rightarrow \exists g_2 \in G$ öyle ki $y = g_2 \cdot x$'dir. ….(2)

(2)'de y yerine (1)'deki eşiti yazılırsa $z = g_2 \cdot g_1 \cdot x$ elde edilir. $g_2 \cdot g_1 \in G$ olduğundan;

$x \sim z$ elde edilir.

$\Rightarrow$ "$\sim$" bağıntısı denklik bağıntısıdır. ♦

Örnek 4: $G = O(1) = \{-1,1\}$ olsun. $O(1)$ grubunun $\mathbb{R}$ üzerindeki etkisini alalım. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $y = \mp x$ ise $x \sim y$ $O(1)$'dir.

Örnek 5: $G = \left\{ \begin{pmatrix} cosa & sina \\ -sina & cosa \end{pmatrix}, a \in [0,2\pi] \right\}$ olsun. G grubunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki etkisini alalım. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ için $\exists g \in G$ öyle ki $y = g \cdot x$ ise $x \sim y$ G'dir.

Örnek 6: $G = O(n)$ olsun. $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ için $\exists A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in O(n)$ öyle ki,

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ise $x \sim y$ $O(n)$ 'dir.

Tanım 3: $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. $\exists g \in G$ olmak üzere $y_\tau = g \cdot x_\tau$, $\forall \tau \in T$ ise bu vektör ailelerine G- denk'tir denir. İki vektör ailesinin denkliği $\{x_\tau, \tau \in T\} \sim \{y_\tau, \tau \in T\}(G)$ ile gösterilir.

Önerme 2: $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$ iki vektör ailesi olsun. Bu taktirde;

$\{x_\tau, \tau \in T\} \sim \{y_\tau, \tau \in T\}(G)$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Önerme 1'deki gibi benzer şekilde yapılır.

Tanım 4: Bir Ggrubunun bir X kümesi üzerindeki etkisi verilsin ve $x \in X$ olsun.$G(x) = \{g \cdot x: g \in G\}$ kümesine x noktasının G-yörünge'si denir.

Örnek 7: $G = O(1) = \{-1,1\}$ ve $X = \mathbb{R}$ alalım. Bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının $O(1)$-yörünge'si $O(1)(x) = \{\mp, x \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Örnek 8: $G = \left\{\begin{pmatrix} cosa & sina \\ -sina & cosa \end{pmatrix}, a \in [0,2\pi]\right\}$ ve $X = \mathbb{R}^2$ alalım.$x, y \in \mathbb{R}^2$ noktalarının G-yörünge'si $G(x) = \{y \in \mathbb{R}^2: \|y\| = \|x\|\}$ şeklindedir.

Not : Yörüngeler G- denklik bağıntısının denklik sınıflarıdır.

1.4. G- İnvaryant Fonksiyonlar

Tanım 5: Bir G grubunun X kümesi üzerindeki etkisini alalım. $f: X \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall g \in G$ için $f(g \cdot x) = f(x)$, $\forall x \in X$ ise f reel fonksiyonuna G - invaryant denir.

Örnek 9: $G = \{-1,1\}$, $\{G, \cdot\}$ ve $f(x) = x^2$ olsun. $X = \mathbb{R}$. G'nin X'teki etkisi $\phi(g, x)$' i g ve x reel sayılarının çarpımı şeklinde alalım.

$f(x)$, G - invaryanttır.

$1 \cdot x = x \Rightarrow f(1 \cdot x) = f(x)$

$(-1) \cdot x = -x \Rightarrow f\big((-1) \cdot x\big) = f(-x) = f(x)$

Örnek 10: Örnek 9'daki etkiye göre $f(x) = x^4 = (-x)^4$ de $f(x)$, G- invaryanttır.

Not: Tüm G- invaryant polinomlar kümesi $\mathbb{R}[x]^G$ ve tüm G- invaryant rasyonel fonksiyonlar kümesi ise $\mathbb{R}(x)^G$ şeklinde gösterilir.

Önerme 3: $x \sim y\ G$ olsun. Bu taktirde $\forall f \in \mathbb{R}[x]^G$ için $f(x) = f(y)$'dir.

İspat : $x \sim y\ G$ olduğundan $\exists g \in G$ için $y = g \cdot x$'dir. keyfi f G- invaryant polinomu için $f(y) = f(g \cdot x) = f(x)$ olduğundan $f(x) = f(y)$'dir. ♦

Not : Keyfi f G- invaryant polinomu için $f(y) = f(x)$ ise $y \sim x$ G olmayabilir.

Örnek 11: $G = O(n)$ olsun. $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım.

$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}$,…, $x_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $|[x_1 \dots x_n]| = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$ için $f(x_1, \dots x_n) = |[x_1 \dots x_n]|^2$ alınırsa, bu $O(n)$- invaryant'tır. Gerçekten, $\forall g \in O(n)$ için, det $G = \mp 1$ olduğundan,

$|[g.x_1 \dots g.x_n]|^2 = |[g] \cdot [x_1 \dots x_n]|^2 = |[g]|^2 \cdot |[x_1 \dots x_n]|^2 = |[x_1 \dots x_n]|^2$ elde edilir.

Örnek 12: $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım. x_1 ,…,$x_n \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $detG(x_1 ,\dots, x_n) = det\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$ alınırsa bu $O(n)$-invaryant'tır.

Gerçekten, $\forall g \in O(n)$ için;

$$\begin{aligned} detG(x_1 ,\dots, x_n) &= det\begin{pmatrix} \langle g.x_1, g.x_1 \rangle & \cdots & \langle g.x_1, g.x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g.x_n, g.x_1 \rangle & \cdots & \langle g.x_n, g.x_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= det\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix} \\ &= detG(x_1 ,\dots, x_n) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4: $\mathbb{R}[x]^G$ ve $\mathbb{R}[x]$ polinomlar $\mathbb{R}$-cebir'inin birimli $\mathbb{R}$-altcebir' idir.

İspat : $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x]^G$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall g \in G$ için;

$(f_1 + f_2)(g \cdot x) = f_1(g \cdot x) + f_2(g \cdot x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$

$(f_1 \cdot f_2)(g \cdot x) = f_1(g \cdot x) \cdot f_2(g \cdot x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(\lambda \cdot f_1)(g \cdot x) = \lambda \cdot f_1(g \cdot x) = \lambda \cdot f_1(x) = (\lambda \cdot f_1)(x)$

$1(x) = 1 \in \mathbb{R}[x]$ birim elemanı için, $1 \in \mathbb{R}[x]^G$ olduğundan

$(1 \cdot f_1)(g \cdot x) = 1 \cdot (g \cdot x) \cdot f_1(g.x) = 1 \cdot f_1(x) = f_1(x)$

olup, $f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2, \lambda.f_1, 1 \in \mathbb{R}[x]^G$' dir. Yani $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$'in birimli $\mathbb{R}$-altcebir' idir.

1.5. Üniter Uzay

Tanım 6,[16]: E', $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $\varphi': E' \times E' \to \mathbb{C}$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

$\forall x, y, z \in E'$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için;

1) $\varphi'(x+y,z) = \varphi'(x,z) + \varphi'(y,z)$

2) $\varphi'(\lambda x, y) = \lambda.\varphi'(x,y)$

3) $\varphi'(x,y)=\overline{\varphi'(y,x)}$

4) $\varphi'(x,x) \geq 0$

5) $\varphi'(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bu şekilde tanımlanan φ' dönüşümüne E' kompleks vektör uzayında skaler (iç) çarpım denir. (E', φ') ikilisine de iç çarpımlı kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 7: Sonlu boyutlu kompleks iç çarpımlı vektör uzayına üniter uzay denir.

Örnek 13: $E' = \mathbb{C}$ alalım. $\varphi': \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\varphi'(x,y) = x\bar{y}$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{C}, \varphi')$'nin üniter uzay olduğunu gösterelim:

$\forall x, y, z, \lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

1) $\varphi'(x+y,z) = (x+y)\bar{z} = x\bar{y} + y\bar{z} = \varphi'(x,z) + \varphi'(y,z)$

2) $\varphi'(\lambda x, y) = (\lambda x)\bar{y} = \lambda(x\bar{y}) = \lambda\varphi'(x,y)$

3) $\varphi'(x,y) = x\bar{y} = \overline{y\bar{x}} = \overline{\varphi'(y,x)}$

4) $\varphi'(x,x) = x\bar{x} = |x|^2 \geq 0$

5) $\varphi'(x,x) \Rightarrow x\bar{x} = 0 \Rightarrow |x|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \varphi'(x,x) = 0$$

olduğu açıktır.

Örnek 14: $E' = \mathbb{C}^2$ alalım. $\varphi': C^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in C^2$ olmak üzere $\varphi'(x,y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$ dönüşümünü tanımlayalım.$(\mathbb{C}^2, \varphi')$'nin üniter uzay olduğunu gösterelim:

1) $\varphi'(x+y,z) = (x_1+y_1)\overline{z_1} + (x_2+y_2)\overline{z_2} = x_1\overline{z_1} + y_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + y_2\overline{z_2}$

$$= (x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2}) + (y_1\overline{z_1} + y_2\overline{z_2}) = \varphi'(x,z) + \varphi'(y,z)$$

2) $\varphi'(\lambda x, y) = \lambda x_1\overline{y_1} + \lambda x_2\overline{y_2} = \lambda(x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}) = \lambda\varphi'(x,y)$

3) $\varphi'(x,y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = \overline{y_1\overline{x_1}} + \overline{y_2\overline{x_2}} = \overline{\varphi'(y,x)}$

4) $\varphi'(x,x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$

5) $\varphi'(x,x) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

olduğundan $(\mathbb{C}^2, \varphi')$ üniter uzaydır.

Örnek 15: $E' = \mathbb{C}^n$ alalım. $\varphi': C^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in C^n$ olmak üzere $\varphi'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{C}^n, \varphi')$ üniter uzaydır.

Örnek 16: $E' = \mathbb{C}$ alalım. $\varphi': \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\varphi'(x,y) = x^2\overline{y}$ tanımlayalım. $(\mathbb{C}, \varphi')$' nin üniter uzay olmadığını gösterelim:

Gerçekten $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$\varphi'(x+y,z) = (x+y)^2\overline{z} = x^2\overline{z} + y^2\overline{z} + 2xy\overline{z}$ olur. Ama iç çarpım tanımına göre $\varphi'(x+y,z) = x^2\overline{z} + y^2\overline{z}$ olmalıdır. Bunun için $2xy\overline{z} = 0$ olması gerekir. Buradan $x = 0$ veya $y = 0$ veya $z = 0$'dır. Fakat bu şart tüm x, y, z'ler için sağlanmadığından, $\varphi'(x+y,z) \neq x^2\overline{z} + y^2\overline{z}$ olup, φ' iç çarpım değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{C}^n, \varphi')$ üniter uzay değildir.

Tanım 8: V ve W, $\mathbb{C}$ üzerinde lineer uzaylar olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $F: V \to W$ dönüşümüne lineer operatör denir.

i) $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$

ii) $F(\lambda z) = \lambda F(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}, z \in C^n$

Not : $F: V \to W$ lineer dönüşümler kümesini Hom(V,W) şeklinde gösterelim.

Tanım 9: $({E_1}', {\varphi_1}')$ ve $({E_2}', {\varphi_2}')$ üniter uzaylar olmak üzere, $F: {E_1}' \to {E_2}'$ dönüşümü için;

i) F , birebir ve örten

ii) F , lineer

iii) ${\varphi_2}'(F(x), F(y)) = {\varphi_1}'(x,y)$

ise $({E_1}', {\varphi_1}')$ ve $({E_2}', {\varphi_2}')$ üniter uzaylarına izomorf denir.

Sonuç : (E', φ_1') üniter uzay ve $boyE' = n$ olsun. O halde (E', φ_1') üniter uzayı,$(\mathbb{C}^n, \sigma')$ üniter uzayına izomorftur. Burada $\sigma'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overline{y_i}$'dir.

Not : Bundan sonra $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overline{y_i}$ şeklinde alınacaktır.

Tanım 10: $\mathbb{C}^n$ üniter uzayında $x \in \mathbb{C}^n$ için $\sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}}}$ sayısına x vektörünün normu denir ve $\|x\|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 11: $\|x\| = 1$ ise, x vektörüne birim vektör denir.

Lemma : $\mathbb{C}^n$'de tanımlanan norm aşağıdaki aksiyomları sağlar:

$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

İspat :

i) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}}} = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|} \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}}} = 0 \Rightarrow \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = 0$

$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ olduğu açıktır.

iii) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle_{\mathbb{C}}} = \sqrt{|\lambda x_1|^2 + |\lambda x_2|^2 + \cdots + |\lambda x_n|^2}$

$= \sqrt{|\lambda|^2 |x_1|^2 + |\lambda|^2 |x_2|^2 + \cdots + |\lambda|^2 |x_n|^2}$

$= \sqrt{|\lambda|^2 (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)}$

$= |\lambda| \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$

$= |\lambda| \|x\|.$

Tanım 12: $\langle x_i, x_j \rangle_{\mathbb{C}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, $i, j = 1,2, \dots m$ ise $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ vektörler sistemine ortonormal sistem denir.

Örnek 17: $x, y \in \mathbb{C}^2$ alalım. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ seçelim. Bu taktirde,

$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$ olduğundan $\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} = 1$, $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = 0$, $\langle y, y \rangle_{\mathbb{C}} = 1$ olarak bulunur. Burada $\{x, y\}$ ortonormal bir sistem oluşturur.

Teorem 1: E bir üniter uzay, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sistemi E'de bir ortonormal taban ve $x \in E$ olsun. Bu taktirde; $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ öyle ki $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle_{\mathbb{C}}$ $i = 1,2, \dots, n$'dir.

İspat : $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, E' de bir taban olduğundan $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ için $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle x, e_i \rangle_{\mathbb{C}}$ iç çarpımını alalım.

$\langle x, e_i \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_i \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle_{\mathbb{C}}}_{1} = \lambda_i, i = 1,2, \dots, n$ olur. ♦

Teorem 2: $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $|\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)'dir.

İspat : $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$;

$$\|ax - by\|^2 = \langle ax - by, ax - by \rangle_{\mathbb{C}} = \langle ax, ax - by \rangle_{\mathbb{C}} - \langle by, ax - by \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \langle ax, ax \rangle_{\mathbb{C}} - \langle ax, by \rangle_{\mathbb{C}} - \langle by, ax \rangle_{\mathbb{C}} + \langle by, by \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= |a|^2 \|x\|^2 - a\bar{b} \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} - b\bar{a} \langle y, x \rangle_{\mathbb{C}} + |b|^2 \|y\|^2$$

$$= |a|^2 \|x\|^2 - 2Re\{a\bar{b} \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}\} + |b|^2 \|y\|^2$$

Burada $a = \|y\|^2$ ve $b = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}$ alırsak;

$$= \|x\|^2 \|y\|^4 - 2|\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}|^2 \|y\|^2 + |\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}|^2 \|y\|^2$$

$= \|y\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}|^2)$ elde edilir.

$\|ax - by\|^2 \geq 0$ olduğundan, $\|y\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}|^2) \geq 0$ 'dır. Dolayısıyla $\|y\| \neq 0$ ise $\|x\|^2 \|y\|^2 \geq |\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}|^2$'dir. Her iki tarafın karekökünü alırsak $\|x\| \|y\| \geq |\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}|$ elde ederiz. $\|y\| = 0$ yani $y = 0$ ise $|\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}| = 0$ ve $\|x\| \|y\| = 0$ olduğundan $|\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}| = \|x\| \|y\|$'dir. ♦

Teorem 3: Keyfi $x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Minkowski Eşitsizliği)'dir.

İspat : $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} + \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, x \rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, y \rangle_{\mathbb{C}}$

$$= \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} + \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}} + \langle y, y \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\leq \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} + |\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}| + |\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}| + \langle y, y \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}}| + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

$=(\|x\| + \|y\|)^2$

$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ♦

1.6. Üniter Dönüşümler, Üniter Matrisler ve $U(n), SU(n)$ Grupları

Önerme 5: $\{e_1, \dots, e_n\}$, V kompleks iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı olsun. Herhangi $u \in V$ için,

$u = \langle u, e_1\rangle_{\mathbb{C}} e_1 + \cdots + \langle u, e_n\rangle_{\mathbb{C}} e_n$'dir.

İspat : $\forall u \in V$; $u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n,\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$'dir.

$\langle u, e_1\rangle_{\mathbb{C}} = \langle a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, e_1\rangle_{\mathbb{C}} = a_1\langle e_1, e_1\rangle_{\mathbb{C}} + \cdots + a_n\langle e_n, e_n\rangle_{\mathbb{C}}$

$\{e_1, \dots, e_n\}$, V kompleks iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı olduğundan,

$= a_1 1 + \cdots + a_n 0 = a_1$ bulunur.

$i = 1, \dots, n$ için benzer şekilde,

$\langle u, e_i\rangle_{\mathbb{C}} = \langle a_1 e_1 + \cdots + a_i e_i + \cdots + a_n e_n, e_i\rangle_{\mathbb{C}}$

$= a_1\langle e_1, e_1\rangle_{\mathbb{C}} + \cdots + a_i\langle e_i, e_i\rangle_{\mathbb{C}} + \cdots + a_n\langle e_n, e_n\rangle_{\mathbb{C}}$

$= a_1 0 + \cdots + a_i 1 + \cdots + a_n 0 = a_i$ bulunur.

Dolayısıyla, $i = 1, \dots, n$ için a_i'ler yerine $\langle u, e_i\rangle_{\mathbb{C}}$'ler konulduğunda,

$u = \langle u, e_1\rangle_{\mathbb{C}} e_1 + \cdots + \langle u, e_n\rangle_{\mathbb{C}} e_n$ elde edilir. ♦

Tanım 13: V sonlu boyutlu bir kompleks iç çarpım uzayı olsun. Bir $A \in Hom(V, V)$ dönüşümü ve $\forall x, y \in V$,

$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ ise A dönüşümüne üniterdir denir.

Örnek 18: $A :\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3} x_1 - \frac{\sqrt{7}}{3} x_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3} x_1 + \frac{1+i}{3} x_2 \end{pmatrix}$$

dönüşümü üniterdir.

Çözüm : $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$;

$$\langle A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}), A(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix})\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3}x_1 - \frac{\sqrt{7}}{3}x_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3}x_1 + \frac{1+i}{3}x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3}y_1 - \frac{\sqrt{7}}{3}y_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3}y_1 + \frac{1+i}{3}y_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3}x_1 - \frac{\sqrt{7}}{3}x_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3}x_1 + \frac{1+i}{3}x_2 \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} \frac{1+i}{3}y_1 - \frac{\sqrt{7}}{3}y_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3}y_1 + \frac{1+i}{3}y_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3}x_1 - \frac{\sqrt{7}}{3}x_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3}x_1 + \frac{1+i}{3}x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1-i}{3}\overline{y_1} - \frac{\sqrt{7}}{3}\overline{y}_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3}\overline{y_1} + \frac{1-i}{3}\overline{y_2} \end{pmatrix}$$

$$= (\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{7}{9})x_1\overline{y_1} + (\frac{7}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9})x_2\overline{y_2}$$

$$= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

$$= \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$\Rightarrow A$ dönüşümü üniterdir.

Not: $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ - boyutlu kompleks matris olsun. A' nın tranpozesini A^T şeklinde gösterelim. Bu durumda $\bar{A} = [\overline{a}_{ij}]$ olsun. $\overline{A}^T$ matrisini A^* şeklinde gösterelim.

Tanım 14: $\mathrm{AA^*} = \mathrm{A^*A} = \mathrm{I_n}$ şartını sağlayan A matrisine üniter matris denir.

Örnek 19: $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3}x_1 - \frac{\sqrt{7}}{3}x_2 \\ \frac{\sqrt{7}}{3}x_1 + \frac{1+i}{3}x_2 \end{pmatrix}$$

üniter dönüşümünün matrisi,

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1+i}{3} & -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1+i}{3} \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ elde edilir. A matrisi üniterdir.

Gerçekten,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3} & -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1+i}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{3} & -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1-i}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{3} & \frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{-\sqrt{7}}{3} & \frac{1-i}{3} \end{pmatrix} \text{ olacağından}$$

$$A\overline{A}^T = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{3} & -\frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1+i}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1-i}{3} & \frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{-\sqrt{7}}{3} & \frac{1-i}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+7}{9} & 0 \\ 0 & \frac{7+2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ ve}$$

benzer şekilde $\overline{A}^T A = I$ olduğu görülür.

$\Rightarrow A$ matrisi üniterdir.

Not: Tüm $n \times n$ - boyutlu üniter matrisler kümesini $U(n)$ ile gösterelim.

Önerme 6: Tüm üniter matrisler kümesi çarpım işlemine göre gruptur.

İspat: $\forall A, B \in U(n)$ için $A \cdot B \in U(n)$ olduğunu gösterelim:

$A \in U(n) \Rightarrow A \cdot \bar{A}^T = I$ ve $B \in U(n) \Rightarrow B \cdot \bar{B}^T = I$ olur.

$$(AB) \cdot (\overline{AB})^T = (AB) \cdot (\bar{A}\bar{B})^T = A\left(\underbrace{B\bar{B}^T}_{I}\right)\bar{A}^T = A \cdot \bar{A}^T = I$$

$\Rightarrow A \cdot B \in U(n)$'dir.

$\forall A, B, C \in U(n)$ için $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ olduğunu gösterelim:

Bütün matrisler için geçerli olduğundan özel olarak üniter matrisler için de geçerlidir.

$\forall A \in U(n)$ için $A \cdot I = I \cdot A = A$ olacak şekilde $I \in U(n)$ vardır. Çünkü $I \cdot \bar{I}^T = I$'dir.

$\forall A \in U(n)$ için $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ olacak şekilde $A^{-1} \in U(n)$ vardır. Gerçekten, $A \cdot \bar{A}^T = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \bar{A}^T = A^{-1} \Rightarrow \bar{A}^T = A^{-1}$

$$A^{-1} \cdot \overline{A^{-1}}^T = \bar{A}^T \cdot \overline{A^{-1}}^T = (\underbrace{\overline{A^{-1}A}}_{I})^T = \bar{I}^T = I \text{ olacağından } A^{-1} \in U(n)\text{' dir.}$$

$\Rightarrow U(n)$ kümesi çarpım işlemine göre gruptur. ♦

Tanım 15,[10]: Determinantı 1 olan bütün üniter matrislerin oluşturduğu gruba özel üniter grup denir ve $SU(n)$ ile gösterilir.

Önerme 7: $SU(n)$, $U(n)$'nin bir alt grubudur.

İspat : $U(n)$ kümesinin çarpım işlemine göre grup olduğu önerme 6'da ispat edildi. $SU(n)$ kümesinin tanımından $\forall A \in SU(n) \Rightarrow A \in U(n)$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $SU(n) \subset U(n)$'dir. Buradan $U(n)$'deki matrislerde çarpım işlemine göre $SU(n)$'nin $U(n)$ 'nin bir alt grubu olduğu açıktır. ♦

Örnek 20: $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2)$' dir.

1.7. Cebirler

Tanım 16,[10]: C kümesinde " $+, \cdot, \lambda \cdot$ " işlemleri verilsin ve C kümesi aşağıdaki şartları sağlasın:

i) $(C, +, \cdot)$ halka,

ii) $(C, +, \lambda \cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı,

iii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y), \forall x, y \in C$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\{C, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ sistemine $\mathbb{R}$ - cebir denir.

Örnek 21: $\{\mathbb{R}, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$ - cebir'dir.

Örnek 22: Katsayıları $\mathbb{R}$' den olan tüm polinomlar kümesini $\mathbb{R}[x]$ ile gösterelim.

$\{\mathbb{R}[x], +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$ - cebir'dir.

Örnek 23: Tüm rasyonel fonksiyonlar kümesini $\mathbb{R}(x)$ ile gösterelim.
$\{\mathbb{R}(x), +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$ - cebir'dir.

1.8. Reel Kuaternionlar

Tanım 17,[12]: Bir reel kuaternion sıralı dört sayının +1, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada birinci birim +1 bir reel sayıdır, diğer üç birim ise,

i) $\overrightarrow{e_1}^2 = \overrightarrow{e_2}^2 = \overrightarrow{e_3}^2 = -1$

ii) $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$

iii) $\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_2}=-\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_3}=-\overrightarrow{e_2}$
özelliklerine sahiptir.

Böylece bir kuaternion:

$q=d+a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}+c\overrightarrow{e_3}$

biçiminde ifade edilir. Burada $d,a,b,c\in\mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaternionunun bileşenleri denir.

Tanım18 : Kuaternionlar için eşitlik bağıntısı:

$\forall q_1,q_2\in\mathcal{K}$ için $q_1=q_2\Leftrightarrow S_{q_1}=S_{q_2}$ ve $\vec{V}_{q_1}=\vec{V}_{q_2}$

şeklinde tanımlanır.

$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ birimleri 3- boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin taban vektörleri olarak alınabilir.

Bir q kuterniyonu S_q ile gösterilen skaler kısım ve $\overrightarrow{V_q}$ ile gösterilen vektörel kısımdan oluşur.

$S_q=d$, $\overrightarrow{V_q}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}+c\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere;

$q=S_q+\overrightarrow{V_q}$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 24: $q=5-1\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+6\overrightarrow{e_3}$ kuternionu için;

$S_q=5$, $\overrightarrow{V_q}=-1\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}+6\overrightarrow{e_3}$ şeklindedir.

Not : Reel kuternionlar kümesini $\mathcal{K}$ ile gösterelim. Dolayısıyla $\mathcal{K}$ kümesinden özel olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ve $\mathbb{R}^3$ üç- boyutlu vektörler kümesi elde edilir.

Örnek 25: $q=10$ ise $a=b=c=0$ olduğundan $q\in\mathbb{R}$'dir.

Örnek 26: $q=4+\overrightarrow{e_1}$ ise $d=4, a=1, b=c=0$ olduğundan $q\in\mathbb{C}$'dir.

Örnek 27: $q=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+9\overrightarrow{e_3}$ ise $q=\overrightarrow{V_q}$ olduğundan $q\in\mathbb{R}^3$'tür.

Tanım 19,[9]: $\oplus : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1 \oplus q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

dönüşümü verilsin.

$q_1 = d_1 + a_1 \overrightarrow{e_1} + b_1 \overrightarrow{e_2} + c_1 \overrightarrow{e_3}$,

$q_2 = d_2 + a_2 \overrightarrow{e_1} + b_2 \overrightarrow{e_2} + c_2 \overrightarrow{e_3}$

olmak üzere,

$q_1 \oplus q_2 = (d_1 + d_2) + (a_1 + a_2)\overrightarrow{e_1} + (b_1 + b_2)\overrightarrow{e_2} + (c_1 + c_2)\overrightarrow{e_3}$

şeklinde tanımlanan işleme $\mathcal{K}$-kuternionlar kümesi üzerinde toplama işlemi denir.

Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi $\mathbb{R}$'deki toplama işlemidir. $\vec{V}_{q_1}, \vec{V}_{q_2}$'de birer vektör olup $\oplus$ işlemi $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır.

Not : $(\mathcal{K}, \oplus)$ ikilisi bir abel grubudur. Etkisiz eleman sıfır kuterniyonu adını alır ve $(0,0,0,0)$ sıralı dörtlüsüdür.

Örnek 28: $q_1 = 1 + \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}$, $q_2 = 3 + 4\overrightarrow{e_1} - 6\overrightarrow{e_2}$ kuternionları verilsin. Buna göre;

$q_1 \oplus q_2 = 4 + 5\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}$ şeklinde bulunur.

Tanım 20,[9]: $\odot : \mathbb{R} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q$$

dönüşümü verilsin.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere;

$\lambda \odot q = \lambda d + \lambda a\overrightarrow{e_1} + \lambda b\overrightarrow{e_2} + \lambda c\overrightarrow{e_3}$

şeklinde tanımlanan işleme $\mathcal{K}$-kuternionlar kümesi üzerinde skalerle çarpma işlemi denir.

Örnek 29: $\lambda = 5 \in \mathbb{R}$ ve $q = -6 + \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere;

$\lambda \odot q = 5(-6 + \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_3})$

$= -30 + 5\overrightarrow{e_1} + 10\overrightarrow{e_2} - 20\overrightarrow{e_3}$ olur.

Önerme 8: Kuaternionlar üzerinde tanımlanan skalerle çarpım işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = (\lambda \odot q_1) \oplus (\lambda \odot q_2)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$.

ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall q \in \mathcal{K}$

iii) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$

iv) $1 \odot q = q$

Böylece $\{\mathcal{K}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı $\mathcal{K}$ ile gösterelim. $\mathcal{K}$'daki toplama $\oplus$ işlemini de + ile gösterelim.

Tanım 21,[9]: $\times : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \times q_2$$

işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır:

$\times$	$+1$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$+1$	$+1$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_1}$	-1	$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_3}$	-1	$\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_1}$	-1

buna göre;

$$q_1 = d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}$$

$q_2 = d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere;

$$q_1 \times q_2 = d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

$$+ (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\overrightarrow{e_1}$$

$$+ (b_1d_2 + d_1b_2 - a_1c_2 + c_1a_2)\overrightarrow{e_2}$$

$$+ (c_1d_2 + d_1c_2 + a_1b_2 - b_1a_2)\overrightarrow{e_3}$$

şeklinde tanımlanan işleme iki kuaternionunun kuaternion çarpımı denir.

Örnek 30: $q_1 = 3 + 2\overrightarrow{e_1} - 1\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}$ ve $q_2 = 1 + 2\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere;

$$q_1 \times q_2 = 3 - (2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-5) + 4 \cdot (-3))$$

$$+(3\cdot2+2\cdot1+(-1)\cdot(-3)-4\cdot(-5))\,\overrightarrow{e_1}$$

$$+((-1)\cdot1+3\cdot(-5)-2\cdot(-3)+4\cdot2)\,\overrightarrow{e_2}$$

+(4·1+3·(-3)+2·(-5)-(-1)·2) $\overrightarrow{e_3}$

= 6+31$\overrightarrow{e_1} - 2\,\overrightarrow{e_2} - 13\,\overrightarrow{e_3}$

şeklinde bulunur.

Önerme 9: Kuaternion çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) İki kuaternionun çarpımı bir kuaterniondur.

ii) Kuaternion çarpımı birleşimlidir.

iii) Kuaternion çarpımı dağılımlıdır.

iv) Kuaternion çarpımı değişimli değildir.

İspat : i) $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için $q_1 \times q_2 \in \mathcal{K}$ olduğunu gösterelim:

$q_1 = d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}$,

$q_2 = d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3}$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 &= (d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}) \times (d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3}) \\ &= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) \\ &\quad + (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\overrightarrow{e_1} \\ &\quad + (b_1d_2 + d_1b_2 - a_1c_2 + c_1a_2)\overrightarrow{e_2} \\ &\quad + (c_1d_2 + d_1c_2 + a_1b_2 - b_1a_2)\overrightarrow{e_3} \text{ ‘dir.} \end{aligned}$$

Burada $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$’den $d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) \in \mathbb{R}$ olur.

$$S_{q_1 \times q_2} = d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) \,,$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{q_1 \times q_2} &= (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\overrightarrow{e_1} \\ &\quad + (b_1d_2 + d_1b_2 - a_1c_2 + c_1a_2)\overrightarrow{e_2} \\ &\quad + (c_1d_2 + d_1c_2 + a_1b_2 - b_1a_2)\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

şeklinde olduğundan $q_1 \times q_2 = S_{q_1 \times q_2} + \vec{V}_{q_1 \times q_2} \in \mathcal{K}$’dır.

ii) $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{K}$ için $q_1 \times (q_2 \times q_3) = (q_1 \times q_2) \times q_3$ olduğunu gösterelim:

$q_1 = d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}$

$q_2 = d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3}$

$q_3 = d_3 + a_3\overrightarrow{e_1} + b_3\overrightarrow{e_2} + c_3\overrightarrow{e_3}$

olmak üzere;

$q_2 \times q_3 = (d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3}) \times (d_3 + a_3\overrightarrow{e_1} + b_3\overrightarrow{e_2} + c_3\overrightarrow{e_3})$

$= d_2d_3 - (a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)$

$+(d_2a_3 + a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3)\overrightarrow{e_1}$

$+(d_2b_3 + b_2d_3 + c_2a_3 - a_2c_3)\overrightarrow{e_2}$

$+(d_2c_3 + c_2d_3 + a_2b_3 - b_2a_3)\overrightarrow{e_3}$

$q_1 \times (q_2 \times q_3) = (d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}) \times \ d_2d_3 - (a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)$

$+(d_2a_3 + a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3)\overrightarrow{e_1}$

$+(d_2b_3 + b_2d_3 + c_2a_3 - a_2c_3)\overrightarrow{e_2}$

$+(d_2c_3 + c_2d_3 + a_2b_3 - b_2a_3)\overrightarrow{e_3}$

$= \mathrm{d}_1\mathrm{d}_2\mathrm{d}_3 - \mathrm{d}_1(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3) - a_1(d_2a_3 + a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(d_2b_3 + b_2d_3 + c_2a_3 - a_2c_3) - c_1(d_2c_3 + c_2d_3 + a_2b_3 - b_2a_3)$

$+[d_1(d_2a_3 + a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3) + a_1d_2d_3 - a_1(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)$

$+b_1(d_2c_3 + c_2d_3 + a_2b_3 - b_2a_3) - c_1(d_2b_3 + b_2d_3 + c_2a_3 - a_2c_3)]\,\overrightarrow{e_1}$

$+[b_1\big(d_2d_3 - (a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)\big) + d_1(d_2b_3 + b_2d_3 + c_2a_3 - a_2c_3)$

$+c_1(d_2a_3 + a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3) - a_1(d_2c_3 + c_2d_3 + a_2b_3 - b_2a_3)]\overrightarrow{e_2}$

$+[c_1\big(d_2d_3 - (a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3)\big) + d_1(d_2c_3 + c_2d_3 + a_2b_3 - b_2a_3)$

$+a_1(d_2b_3 + b_2d_3 + c_2a_3 - a_2c_3) - b_1(d_2a_3 + a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3)]\overrightarrow{e_3}$

$=\big(d_1d_2-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\big)d_3-(d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2)a_3-(d_1b_2-a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2)b_3-(d_1c_2+a_1b_2-b_1a_2+c_1d_2)c_3$

$+[\big(d_1d_2-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\big)a_3+(d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2)d_3$

$+(d_1b_2-a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2)c_3+(-d_1c_2-a_1b_2+b_1a_2-c_1d_2)b_3]\overrightarrow{e_1}$

$+[(d_1b_2-a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2)d_3+(d_1c_2+a_1b_2-b_1a_2+c_1d_2)a_3$

$+(-b_1b_2+d_1d_2-c_1c_2-a_1a_2)b_3+(-d_1a_2-a_1d_2-b_1c_2+c_1b_2)c_3]\overrightarrow{e_2}$

$+[(d_1c_2+a_1b_2-b_1a_2+c_1d_2)d_3+(-d_1b_2+a_1c_2-b_1d_2-c_1a_2)a_3$

$+(d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2)b_3+(-b_1b_2+d_1d_2-c_1c_2-a_1a_2)c_3]\overrightarrow{e_3}$

$=\ d_1d_2-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\ \times\ (d_3+a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3})$

$+(d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_1}$

$+(b_1d_2+d_1b_2-a_1c_2+c_1a_2)\overrightarrow{e_2}$

$+(c_1d_2+d_1c_2+a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_3}$

$=(q_1\times q_2)\times q_3$

Böylece $q_1\times(q_2\times q_3)=(q_1\times q_2)\times q_3$ olduğu elde edilir.

iii) $\forall q_1,q_2,q_3\in\mathcal{K}$ için $q_1\times(q_2+q_3)=(q_1\times q_2)+(q_1\times q_3)$ olduğunu gösterelim:

$q_1=d_1+a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3}$

$q_2=d_2+a_2\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+c_2\overrightarrow{e_3}$

$q_3=d_3+a_3\overrightarrow{e_1}+b_3\overrightarrow{e_2}+c_3\overrightarrow{e_3}$

olmak üzere;

$(q_2+q_3)=d_2+d_3+(a_2+a_3)\overrightarrow{e_1}+(b_2+b_3)\overrightarrow{e_2}+(c_2+c_3)\overrightarrow{e_3}$

$q_1\times(q_2+q_3)=(d_1+a_1\overrightarrow{e_1}+b_1\overrightarrow{e_2}+c_1\overrightarrow{e_3})\times$

$$(d_2+d_3+(a_2+a_3)\overrightarrow{e_1}+(b_2+b_3)\overrightarrow{e_2}+(c_2+c_3)\overrightarrow{e_3})$$

$=d_1(d_2+d_3)-a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)-c_1(c_2+c_3)$

$+\big(d_1(a_2+a_3)+a_1(d_2+d_3)+b_1(c_2+c_3)-c_1(b_2+b_3)\big)\overrightarrow{e_1}$

$+\big(d_1(b_2+b_3)+b_1(d_2+d_3)+c_1(a_2+a_3)-a_1(c_2+c_3)\big)\overrightarrow{e_2}$

$+\big(d_1(c_2+c_3)+c_1(d_2+d_3)+a_1(b_2+b_3)-b_1(a_2+a_3)\big)\overrightarrow{e_3}$

$=d_1d_2+d_1d_3-a_1a_2-a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3-c_1c_2-c_1c_3$

$+(d_1a_2+d_1a_3+a_1d_2+a_1d_3+b_1c_2+b_1c_3-c_1b_2-c_1b_3)\overrightarrow{e_1}$

$+(d_1b_2+d_1b_3+b_1d_2+b_1d_3+c_1a_2+c_1a_3-a_1c_2-a_1c_3)\overrightarrow{e_2}$

$+(d_1c_2+d_1c_3+c_1d_2+c_1d_3+a_1b_2+a_1b_3-b_1a_2-b_1a_3)\overrightarrow{e_3}$

$=d_1d_2-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)+d_1d_3-(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)$

$+(d_1a_2+a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2)\overrightarrow{e_1}+(d_1b_2+b_1d_2+c_1a_2-a_1c_2)\overrightarrow{e_2}$

$+(d_1c_2+c_1d_2+a_1b_2-b_1a_2)\overrightarrow{e_3}+$

$+(d_1a_3+a_1d_3+b_1c_3-c_1b_3)\overrightarrow{e_1}+(d_1b_3+b_1d_3+c_1a_3-a_1c_3)\overrightarrow{e_2}$

$+(d_1c_3+c_1d_3+a_1b_3-b_1a_3)\overrightarrow{e_3}$

$=(q_1\times q_2)+(q_1\times q_3)$

Böylece $q_1\times(q_2+q_3)=(q_1\times q_2)+(q_1\times q_3)$ olduğu elde edilir.

iv) $\forall q_1,q_2\in\mathcal{K}$ için $q_1\times q_2\neq q_2\times q_1$ olduğunu gösterelim:

$q_1=4+3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$, $q_2=2+\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere;

$q_1\times q_2=(4+3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2})\times(2+\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3})$

$= 8-(3-6)+(4+6+2)\overrightarrow{e_1}+(-12+4-3)\overrightarrow{e_2}+(4-9-2)\overrightarrow{e_3}$

$q_1\times q_2 = 11+12\overrightarrow{e_1}-11\overrightarrow{e_2}-7\overrightarrow{e_3}$ …(1)

$q_2\times q_1=(2+\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3})\times(4+3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2})$

$= 8-(3-6)+(6+4-2)\overrightarrow{e_1}+(4-12+3)\overrightarrow{e_2}+(4+2+9)\overrightarrow{e_3}$

$q_2\times q_1 = 11+8\overrightarrow{e_1}-5\overrightarrow{e_2}+15\overrightarrow{e_3}$ …(2)

(1) ve (2)'den $q_1 \times q_2 \neq q_2 \times q_1$ olduğu görülür. ♦

Not : Özel olarak q_1 ve q_2 bir skaler, vektör kısımları orantılı ise veya $\mathbb{C}$- kompleks sayılar kümesinin elemanı ise;

$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1$ olur.

Tanım 22: Yukarıda gösterdiğimiz özellikleriyle $\{\mathcal{K}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot, \times\}$ sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir. Bu cebire kuaternion cebiri denir ve kısaca $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

Kuaternion cebirinin bir tabanı $\{+1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ 'dir ve boyutu 4'tür.

1.9. Reel Kuaternionlar Üzerinde Diğer Temel İşlemler

Tanım 23,[9]: Kuaternionlar için fark;

$\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için $q_1 - q_2 = \left(S_{q_1} - S_{q_2}\right) + \left(\vec{V}_{q_1} - \vec{V}_{q_2}\right)$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 31: $q_1 = \frac{1}{3} + 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + \frac{5}{2}\overrightarrow{e_3}$ ve $q_2 = 7 - 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - \frac{2}{3}\overrightarrow{e_3}$

olmak üzere;

$$q_1 - q_2 = \left(\frac{1}{3} + 4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + \frac{5}{2}\overrightarrow{e_3}\right) - \left(7 - 2\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - \frac{2}{3}\overrightarrow{e_3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 7\right) + (4 - (-2))\overrightarrow{e_1} + (-3 - 5)\overrightarrow{e_2} + \left(\frac{5}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)\overrightarrow{e_3}$$

$$= \frac{-20}{3} + 6\overrightarrow{e_1} - 8\overrightarrow{e_2} + \frac{19}{6}\overrightarrow{e_3}$$

Tanım 24,[9]: Kuaternionlar için eşlenik;

$$\overline{(,)} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$$

$$q \to \overline{(q)} = \bar{q}$$

$$q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \to \bar{q} = d - a\overrightarrow{e_1} - b\overrightarrow{e_2} - c\overrightarrow{e_3}$$

şeklinde tanımlanır ve $\bar{q}$ kuaternionuna q kuaternionunun eşleniği denir.

Örnek 32: $q = -3 + 6\overrightarrow{e_1} + 8\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere; $\bar{q} = -3 - 6\overrightarrow{e_1} - 8\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$ şeklindedir.

Önerme 10: $\forall q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \in \mathcal{K}$ için;

i) $q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$'dir.

ii) $q \times \bar{q} = \bar{q} \times q \geq 0$'dır.

iii) $q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = 0 \Leftrightarrow q = 0$'dır.

İspat : i) $\forall q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \in \mathcal{K}$ için;

$$
\begin{aligned}
q \times \bar{q} &= (d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}) \times (d - a\overrightarrow{e_1} - b\overrightarrow{e_2} - c\overrightarrow{e_3}) \\
&= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\
&\quad + (-ad + ad - bc + bc)\overrightarrow{e_1} \\
&\quad + (-db + bd - ac + ac)\overrightarrow{e_2} \\
&\quad + (-cd + cd - ab + ab)\overrightarrow{e_3} \\
&= d^2 + a^2 + b^2 + c^2
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Diğer taraftan;

$$
\begin{aligned}
\bar{q} \times q &= (d - a\overrightarrow{e_1} - b\overrightarrow{e_2} - c\overrightarrow{e_3}) \times (d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}) \\
&= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\
&\quad + (ad - ad - bc + bc)\overrightarrow{e_1} \\
&\quad + (db - db - ac + ac)\overrightarrow{e_2} \\
&\quad + (cd - cd - ab + ab)\overrightarrow{e_3} \\
&= d^2 + a^2 + b^2 + c^2
\end{aligned}
$$

'dir.

ii) $\forall q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \in \mathcal{K}$ için;

$q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$'den $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olduğundan $d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$ olur.

iii) $\forall q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \in \mathcal{K}$ için;

$q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olduğundan

$d^2 = a^2 = b^2 = c^2 = 0 \Leftrightarrow d = a = b = c = 0 \Leftrightarrow q = 0$ olmalıdır. ♦

Önerme 11: Kuaternionlar üzerinde eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $\overline{aq_1 + bq_2} = a\overline{q_1}$+b$\overline{q_1}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$.

ii) $\overline{q_1 \times q_2} = \overline{q_2} \times \overline{\mathrm{q}_1}$, $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$.

iii) $\overline{\overline{q}} = q$, $\forall q \in \mathcal{K}$.

İspat : i) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için,

$$\overline{aq_1 + bq_2} = \overline{a(d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}) + b(d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3})}$$

$$= ad_1 + bd_2 - aa_1\overrightarrow{e_1} - ab_1\overrightarrow{e_2} - ac_1\overrightarrow{e_3} - ba_2\overrightarrow{e_1} - bb_2\overrightarrow{e_2} - bc_2\overrightarrow{e_3}$$

$$= ad_1 - aa_1\overrightarrow{e_1} - ab_1\overrightarrow{e_2} - ac_1\overrightarrow{e_3} + bd_2 - ba_2\overrightarrow{e_1} - bb_2\overrightarrow{e_2} - bc_2\overrightarrow{e_3}$$

$$= a(d_1 - a_1\overrightarrow{e_1} - b_1\overrightarrow{e_2} - c_1\overrightarrow{e_3}) + b(d_2 - a_2\overrightarrow{e_1} - b_2\overrightarrow{e_2} - c_2\overrightarrow{e_3})$$

$$= a\overline{q_1} + \mathrm{b}\overline{q_1}$$

elde edilir.

ii) $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için,

$\overline{q_1 \times q_2} = \overline{q_2} \times \overline{\mathrm{q}_1}$ olduğunu gösterelim:

$$q_1 \times q_2 = (d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}) \times (d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3})$$

$$= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

$$+ (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\overrightarrow{e_1}$$

$$+ (b_1d_2 + d_1b_2 - a_1c_2 + c_1a_2)\overrightarrow{e_2}$$

$$+ (c_1d_2 + d_1c_2 + a_1b_2 - b_1a_2)\overrightarrow{e_3}$$

$$\overline{q_1 \times q_2} = \overline{(d_1 + a_1\overrightarrow{e_1} + b_1\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_3}) \times (d_2 + a_2\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + c_2\overrightarrow{e_3})}$$

$$= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

$$- (d_1a_2 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\overrightarrow{e_1}$$

$$-(b_1d_2 + d_1b_2 - a_1c_2 + c_1a_2)\overrightarrow{e_2}$$

$$- (c_1d_2 + d_1c_2 + a_1b_2 - b_1a_2)\overrightarrow{e_3}$$

$$= d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$$

$$+ (-d_1a_2 - a_1d_2 - b_1c_2 + c_1b_2)\overrightarrow{e_1}$$

$$+ (-b_1d_2 - d_1b_2 + a_1c_2 - c_1a_2)\overrightarrow{e_2}$$

$+(-c_1d_2 - d_1c_2 - a_1b_2 + b_1a_2)\overrightarrow{e_3}$ …(1)

$\overline{q_2} \times \overline{q_1} = (d_2 - a_2\overrightarrow{e_1} - b_2\overrightarrow{e_2} - c_2\overrightarrow{e_3}) \times (d_1 - a_1\overrightarrow{e_1} - b_1\overrightarrow{e_2} - c_1\overrightarrow{e_3})$

$= \ d_1d_2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)$

$+(-a_1d_2 - d_1a_2 + c_1b_2 - b_1c_2)\overrightarrow{e_1}$

$+(-b_1d_2 - d_1b_2 + a_1c_2 - c_1a_2)\overrightarrow{e_2}$

$+(-c_1d_2 - d_1c_2 + b_1a_2 - a_1b_2)\overrightarrow{e_3}$ …(2)

(1) ve (2) eşitliklerinden $\overline{q_1 \times q_2} = \overline{q_2} \times \overline{q_1}$ eşitliği elde edilir.

iii) $\forall q \in \mathcal{K}$ için,

$q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$

$\Rightarrow \ \bar{q} = d_1 - a_1\overrightarrow{e_1} - b_1\overrightarrow{e_2} - c_1\overrightarrow{e_3}$

$\bar{\bar{q}} = \overline{(d_1 - a_1\overrightarrow{e_1} - b_1\overrightarrow{e_2} - c_1\overrightarrow{e_3})} = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} = q$ olur. ♦

Tanım 25,[9]: Kuaternionlar için norm:

$\| \ \| : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$

$q \to \|q\| = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q$

olmak üzere $\forall q \in \mathcal{K}$ için;

$q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$

$\Rightarrow \ \|q\| = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q$

$\Rightarrow \|q\| = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$

pozitif reel sayısına q'nun normu denir ve $\|q\|$ şeklinde gösterilir.

Önerme 12: $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için;

$\|q_1 \times q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\|$ 'dir.

İspat : $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için;

$\|q_1 \times q_2\| = (q_1 \times q_2) \times \overline{q_1 \times q_2}$

$= (q_1 \times q_2) \times (\overline{q_2} \times \overline{q_1})$

$=q_1 \times (q_2 \times \overline{q_2}) \times \overline{q_1}$

$=q_1 \times \|q_2\| \times \overline{q_1}$, $\|q_2\| \in \mathbb{R}$ olduğundan;

$=\|q_2\| \cdot (q_1 \times \overline{q_1})$

$=\|q_2\| \cdot \|q_1\|$, $\|q_1\|, \|q_2\| \in \mathbb{R}$ olduğundan;

$=\|q_1\| \cdot \|q_2\|$ elde edilir. ♦

Tanım 26,[9]: $(\quad)^{-1}: \mathcal{K} - \{0\} \to \mathcal{K} - \{0\}$

$$q \to q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$$

şeklinde q^{-1} elemanını tanımlayalım.

Önerme 13: $\forall q \in \mathcal{K} - \{0\}$ için $\mathrm{q} \times \mathrm{q}^{-1} = \mathrm{q}^{-1} \times \mathrm{q} = 1'\mathrm{dir}$. Yani q^{-1} elemanı q elemanının $\mathcal{K}$'daki çarpım işlemine göre tersidir.

İspat : $\mathrm{q} \times \mathrm{q}^{-1} = \mathrm{q}^{-1} \times \mathrm{q} = 1$ olduğunu göstermeliyiz:

$q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\,\overrightarrow{e_2} + c\,\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere

$\bar{q} = d - a\overrightarrow{e_1} - b\,\overrightarrow{e_2} - c\,\overrightarrow{e_3}$ ve $\|q\| = d^2 + a^2 + b^2 + c^2$ 'dir.

$q \times q^{-1} = (\,d + a\overrightarrow{e_1} + b\,\overrightarrow{e_2} + c\,\overrightarrow{e_3}) \times \left(\frac{d - a\overrightarrow{e_1} - b\,\overrightarrow{e_2} - c\,\overrightarrow{e_3}}{d^2+a^2+b^2+c^2}\right)$

$= \frac{d^2+a^2+b^2+c^2}{d^2+a^2+b^2+c^2} +$

$+(-da + ad - bc + bc)\overrightarrow{e_1}$

$+(bd - bd + ac - ac)\,\overrightarrow{e_2}$

$+(cd - cd - ab + ab)\,\overrightarrow{e_3}$

=1'dir.

Diğer taraftan;

$\mathrm{q}^{-1} \times \mathrm{q} = \left(\frac{d - a\overrightarrow{e_1} - b\,\overrightarrow{e_2} - c\,\overrightarrow{e_3}}{d^2+a^2+b^2+c^2}\right) \times (\,d + a\overrightarrow{e_1} + b\,\overrightarrow{e_2} + c\,\overrightarrow{e_3})$

$= \frac{d^2+a^2+b^2+c^2}{d^2+a^2+b^2+c^2}$

$+(\,da - ad - bc + cb)\overrightarrow{e_1}$

$+(db - bd - ca + ca)\,\overrightarrow{e_2}$

$+(dc - cd - ab + ab)\,\overrightarrow{e_3}$

=1 bulunur.

Böylece q'nun çarpma işlemine göre tersi,

$q^{-1} = \frac{d - a\overrightarrow{e_1} - b\,\overrightarrow{e_2} - c\,\overrightarrow{e_3}}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$ şeklindedir. ♦

Önerme 14: $\forall q \in \mathcal{K} - \{0\}$ için çarpma işlemine göre tersi tektir.

İspat : Kabul edelim ki $q \in \mathcal{K} - \{0\}$ kuaternionunun q_1 ve q_2 şeklinde iki tane tersi var olsun. O halde;

$q \times q_1 = q_1 \times \mathrm{q} = 1$ …(1)

$q \times q_2 = q_2 \times \mathrm{q} = 1$ 'dir…(2)

(1)'deki eşitliği soldan q_2 ile çarparsak;

$$\underbrace{q_2 \times q}_{1} \times q_1 = q_2 \times \underbrace{q_1 \times \mathrm{q}}_{1}$$

$$1 \times q_1 = q_2 \times 1$$

$\Rightarrow q_1 = q_2$ elde edilir.

Dolayısıyla $q \in \mathcal{K} - \{0\}$ kuaternionunun çarpım işlemine göre tersi tektir. ♦

Not : $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in \mathcal{K} - \{0\}$ elemanının bir q^{-1} tersine sahip olması $\mathcal{K}$ cebrini bir bölüm cebiri yapar.

Tanım 27,[9]: $q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaternionunu bir q kuaternionu ile bölmek için p'yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaternion çarpımı değişimli olmadığı için bu çarpma işlemi iki türlüdür.

$r_1 = p \times q^{-1}$

$r_2 = q^{-1} \times \mathrm{p}$

Burada r_1 kuaternionuna p'nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna p'nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ve r_2 farklıdır. Bundan dolayı $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılmaz.

Örnek 33: $p = 2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ ve $q = 1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ olmak üzere

$$p \cdot q^{-1} = (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot (1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})^{-1}$$

$$= (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot \frac{\overline{1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}}}{\|1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\|}$$

$$= (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) \cdot \frac{1 - \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}}{3}$$

$= \frac{2-(3-2)+(-2-3+1)\overrightarrow{e_1}+(-2+2-1)\overrightarrow{e_2}+(1+3+2)\overrightarrow{e_3}}{3}$

$= \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{e_2} + \frac{6}{3}\overrightarrow{e_3}$ şeklinde bulunur.

Şimdi $q^{-1}.p$ çarpımını hesaplayalım:

$q^{-1} \cdot p = (1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})^{-1} \cdot \ (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$

$= \frac{\overline{1+\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}}}{\|1+\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}\|} \cdot (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$

$= \frac{1-\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}}{3} \cdot (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})$

$= \frac{2-(3-2)+(-3-2-1)\overrightarrow{e_1}+(-2+2+1)\overrightarrow{e_2}+(1-2-3)\overrightarrow{e_3}}{3}$

$= \frac{1}{3} - 2\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{e_2} - \frac{4}{3}\overrightarrow{e_3}$ olur.

Dolayısıyla $p \cdot q^{-1} \neq q^{-1} \cdot p$ 'dir.

Önerme 15: $\forall q_{\mathbf{1}}, q_2, \dots, q_{\mathrm{n}} \in \mathcal{K}$ için,

i) $\overline{q_{\mathbf{1}} + q_2 + \cdots + q_{\mathrm{n}}} = \overline{q_{\mathbf{1}}} + \overline{q_2} + \cdots + \overline{q_{\mathrm{n}}}$

ii) $\overline{q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \dots \times q_{\mathrm{n}}} = \overline{q_{\mathrm{n}}} \times \overline{q_{n-1}} \times \dots \times \overline{q_{\mathbf{1}}}$

iii) $\|q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \dots \times q_{\mathrm{n}}\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\| \dots \cdot \|q_n\|$

iv) $(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \dots \times q_{\mathrm{n}})^{-1} = q_{\mathrm{n}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times \dots \times q_{\mathbf{1}}{}^{\mathbf{-1}}$ 'dir.

İspat : i) $\mathrm{n} = 1$ için $\overline{q_{\mathbf{1}}} = \overline{q_{\mathbf{1}}}$ 'dir.

$n = 2$ için $\overline{q_{\mathbf{1}} + q_2} = \overline{q_{\mathbf{1}}} + \overline{q_2}$ olduğu önerme 11'in (i) şıkkında a=1 ve b=1 durumunda gösterildi.

$n - 1$ için doğru olsun.

n için $\overline{q_{\mathbf{1}} + q_2 + \cdots + q_{\mathrm{n}}} = \overline{q_{\mathbf{1}}} + \overline{q_2} + \cdots + \overline{q_{\mathrm{n}}}$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim:

$\overline{q_{\mathbf{1}} + \underbrace{q_2 + \cdots + q_{\mathrm{n}}}_{\mathrm{q_k}}}$ $n = 2$ için doğru olduğundan; $(\mathrm{q_k} = q_2 + \cdots + q_{\mathrm{n}})$

$= \overline{q_{\mathbf{1}}} + \overline{q_{\mathrm{k}}}$

$= \overline{q_{\mathbf{1}}} + \overline{q_2 + \cdots + q_{\mathrm{n}}}$ $n - 1$ için doğru olduğundan;

$= \overline{q_{\mathbf{1}}} + \overline{q_2} + \cdots + \overline{q_{\mathrm{n}}}$ olduğu elde edilir.

ii) $n = 2$ için $\overline{q_1 \times q_2} = \overline{q_2} \times \overline{q_1}$ doğru olduğu önerme 11, (ii)'de gösterildi.

$n - 1$ için doğru olsun.

n için,

$\overline{q_1 \times q_2 \times ... \times q_n} = \overline{q_n} \times \overline{q_{n-1}} \times ... \times \overline{q_1}$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim:

$\overline{q_1 \times q_2 \times ... \times q_n}$ ifadesinde $q_k = q_2 \times ... \times q_n$ olarak kabul edelim. O halde

$\overline{q_1 \times q_k}$ $n = 2$ için doğru olduğundan,

$\overline{q_1 \times q_k} = \overline{q_k} \times \overline{q_1}$ olur.

$n - 1$ için doğru olduğundan; ($\overline{q_k} = \overline{q_2 \times ... \times q_n} = \overline{q_n} \times \overline{q_{n-1}} \times ... \overline{q_2}$)

$= \overline{q_n} \times \overline{q_{n-1}} \times ... \overline{q_2} \times \overline{q_1}$

elde edilir.

iii) $\|q_1 \times q_2 \times ... \times q_n\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\| ... \cdot \|q_n\|$

eşitliğinin varlığını gösterelim: Bunun için,

$n = 1$ için $\|q_1\| = \|q_1\|$ 'dir.

$n = 2$ için $\|q_1 \times q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\|$

olduğu önerme 12'de ispat edildi.

$n - 1$ için doğru olsun.

n için doğru olduğunu gösterelim:

$\|q_1 \times q_2 \times ... \times q_n\|$ ifadesinde $q_k = q_2 \times ... \times q_n$ olarak kabul edelim. O halde

$n = 2$ için doğru olduğundan,

$\|q_1 \times q_k\| = \|q_1\| \cdot \|q_k\|$ olur.

$n - 1$ için eşitlik doğru olduğundan,

$\|q_1\| \cdot \|q_k\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\| ... \cdot \|q_n\|$ olduğu elde edilir.

iv) $\forall q_1, q_2, ..., q_n \in \mathcal{K}$ için,

$(q_1 \times q_2 \times ... \times q_n)^{-1} = {q_n}^{-1} \times {q_{n-1}}^{-1} \times ... \times {q_1}^{-1}$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim:

$n = 1$ için,

$q_{\mathbf{1}} \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}} = 1$’dir

$n = 2$ için,

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2) \times (q_{\mathbf{2}}{}^{-\mathbf{1}} \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}})$

$= q_{\mathbf{1}} \times \underbrace{(q_2 \times q_{\mathbf{2}}{}^{-\mathbf{1}})}_{=\mathbf{1}} \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}$

$= q_{\mathbf{1}} \times 1 \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}$

$= q_{\mathbf{1}} \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}$

$=1$

elde edilir. O halde;

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2)^{-1} = q_{\mathbf{2}}{}^{-\mathbf{1}} \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}$’dir.

$n - 1$ için doğru olsun.

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n-1}})^{-1} = q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-2}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}$

n için,

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n}})^{-1} = q_{\mathrm{n}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}$ yani

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n}}) \times (q_{\mathrm{n}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}) = 1$ olduğunu göstermeliyiz.

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n}}) \times (q_{\mathrm{n}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}})$

$=(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n-1}}) \times \underbrace{q_{\mathrm{n}} \times q_{\mathrm{n}}{}^{-1}}_{=1} \times (q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-2}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}})$

$=(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n-1}}) \times (q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-2}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}})$

tümevarım hipotezine göre $n - 1$ için doğru olduğundan,

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n-1}}) \times (q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-2}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}})=1$’dir. Dolayısıyla

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n}}) \times (q_{\mathrm{n}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}) = 1$ olur.

Benzer şekilde gösterilebilir ki;

$(q_{\mathrm{n}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}) \times (q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n}}) = 1$’dir.

Böylece,

$(q_{\mathbf{1}} \times q_2 \times \ldots \times q_{\mathrm{n}})^{-1} = q_{\mathrm{n}}{}^{-1} \times q_{\mathrm{n-1}}{}^{-1} \times \ldots \times q_{\mathbf{1}}{}^{-\mathbf{1}}$

eşitliği elde edilir. ♦

Tanım 28: Normu bir olan kuaterniona birim kuaternion denir.

Eğer $q = d + a\overrightarrow{e_1} + b\,\overrightarrow{e_2} + c\,\overrightarrow{e_3}$ bir kuaternion ise $\frac{q}{\sqrt{\|q\|}} = \frac{d+a\overrightarrow{e_1}+b\,\overrightarrow{e_2}+c\,\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$ ifadesi birim kuaterniondur.

Bir q_0 birim kuaternionu olmak üzere,

$q_0 = cos\theta + \overrightarrow{S_0}sin\theta$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

formunda yazılabilir.

Burada $cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$, $sin\theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}}$ ‘dir.

$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman;

$\overrightarrow{S_0} = \frac{a\overrightarrow{e_1}+b\,\overrightarrow{e_2}+c\,\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ birim vektörüne q_0 birim kuaternionunun ekseni denir.

Not : Normu 1 olan kuaternionlar kümesini $\mathcal{K}_1 = \{q \in \mathcal{K}: \|q\| = 1\}$ ile gösterelim.

Önerme 16: $\mathcal{K}_1$ kümesi bileşke işlemine göre gruptur.

İspat: $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}_1$ için $q_1 \cdot q_2 \in \mathcal{K}_1$ olduğunu gösterelim:

$q_1, q_2 \in \mathcal{K}_1 \Rightarrow \|q_1\| = 1$ ve $\|q_2\| = 1$ ‘dir.

$\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\| = 1 \cdot 1 = 1$ olacağından $q_1 \cdot q_2 \in \mathcal{K}_1$ olur.

$\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{K}_1$ için $(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3)$ olduğunu gösterelim:

Önerme 9’dan $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{K}$ için $q_1 \times (q_2 \times q_3) = (q_1 \times q_2) \times q_3$ eşitliği var olduğundan özel olarak normu bir olan kuaternionlar için de bu eşitlik geçerlidir.

Şimdi $q_0 = 1$ için $\|q_0\| = \|1\| = 1$ olduğundan $1 \in \mathcal{K}_1$’ dir. Dolayısıyla $\forall q \in \mathcal{K}_1$ için $q \cdot 1 = 1 \cdot q = q$’dur.

$\forall q \in \mathcal{K}_1$ için $q^{-1} \in \mathcal{K}_1$ vardır öyleki $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$’dir. Buradan $\|q \cdot q^{-1}\| = \|q\| \cdot \|q^{-1}\| = 1$ ve $\|q\| = 1$ olduğundan $\|q^{-1}\| = 1$ olur. Dolayısıyla $q^{-1} \in \mathcal{K}_1$ ‘dir. ♦

1.10. Reel Kuaternionların Matris Gösterimi

$$\mathcal{K}_{\mathbb{C}} = \left\{a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} : \ a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \overrightarrow{e_1}^2 = -1\right\}$$

kümesi verilsin.

$\{\mathcal{K}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$ kümesi verilen işlemlerle bir cebir olduğundan $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ kümesi $\mathcal{K}$ kümesinin bir alt cebirine izomorf olur.

$\forall(\mathrm{a}_0 1 + \mathrm{a}_1 \overrightarrow{\mathrm{e}_1}) \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ kuaternionu için $\left(\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\sqrt{-1}\right) \in \mathbb{C}$ sayısına eşlenirse bu eşlemeye göre $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$'ye izomorf olur. $\mathcal{K}$ kümesi $\mathbb{C}$'ye izomorf olan bir cisim kapsadığından $\mathcal{K}$'yı $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olarak alabiliriz.

Tanım 29: $\forall q \in \mathcal{K}$ ve $\forall x = \left(\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\sqrt{-1}\right) \in \mathbb{C}$ için;

$qx = q \cdot \left(\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1\sqrt{-1}\right) \in \mathcal{K}$ olmak üzere;

i) $(q_1 + q_2) \cdot x = q_1 x + q_2 x \quad \forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbb{C}$

ii) $q \cdot (x_1 + x_2) = q x_1 + q x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}$

iii) $q \cdot (x_1 x_2) = (q x_1) x_2 = (q x_2) x_1$

iv) $q \cdot (1 + 0\overrightarrow{\mathrm{e}_1}) = q$

işlemleri ile $\mathcal{K}$ kümesine $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Önerme 17: $\mathcal{K}$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde iki boyutludur.

İspat : $\forall q \in \mathcal{K}$ için $e_0 = +1$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
q &= a_0 e_0 + a_1 \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3} \\
&= e_0(a_0 + a_1 \overrightarrow{\mathrm{e}_1}) + \overrightarrow{e_2}(a_2 - a_3 \overrightarrow{\mathrm{e}_1}) \\
&= e_0\left(a_0 + a_1\sqrt{-1}\right) + \overrightarrow{e_2}\left(a_2 - a_3\sqrt{-1}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazarsak

$q = e_0 \underbrace{\left(a_0 + a_1\sqrt{-1}\right)}_{\in\mathbb{C}} + \overrightarrow{e_2} \underbrace{\left(a_2 - a_3\sqrt{-1}\right)}_{\in\mathbb{C}}$ olacağından

$\mathcal{K} = \mathrm{sp}\{e_0, \overrightarrow{e_2}\}$ olur. Yani $\{e_0, \overrightarrow{e_2}\}$ $\mathcal{K}$'nın bir tabanıdır.

Böylece $\mathcal{K}$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde iki boyutlu olur. ♦

Önerme 18: $\forall q, q' \in \mathcal{K}$ için;

$$
\begin{aligned}
T_q &: \mathcal{K} \to \mathcal{K} \\
q' &\to T_q(q') = qq'
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $\mathbb{C} -$ lineer dönüşümdür.

İspat: $\forall q, q_1', q_2' \in \mathcal{K}$ ve $\forall x \in \mathbb{C}$ için;

$$
\begin{aligned}
T_q(q_1' + q_2') &= q(q_1' + q_2') = q q_1' + q q_2' \\
&= T_q(q_1') + T_q(q_2')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_q(q_1' x) &= q(q_1' x) = q q_1' x \\
&= T_q(q_1') x
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ T_q lineer dönüşümdür. ♦

Not : $Hom(\mathcal{K},\mathcal{K}) = \{T_q : q \in \mathcal{K}\}$ kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır ve bu uzayı kısaca $\mathbb{K}$ ile gösterelim.

Tanım 30,[9]: $\mathbb{K}$- uzayında $\forall q \in \mathcal{K}$ için T_q dönüşümüne karşılık 2×2 boyutunda bir matris karşılık gelir bu matrise reel kuaternionun matris gösterimi denir ve

$T_q(e_0) = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$

$T_q(\overrightarrow{e_2}) = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22}$ olmak üzere ;

$T_q \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ şeklinde gösterilir.

Önerme 19 : $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için $T_{q_1 q_2} = T_{q_1} \circ T_{q_1}$'dir.

İspat: $\forall q \in K$ için; $T_{q_1 q_2}(q) = q_1 q_2(q)$

$= q_1(q) q_2(q)$

$= T_{q_1} \circ T_{q_2}$

$T_{q_1 q_2} = T_{q_1} \circ T_{q_2}$

olarak bulunur. ♦

1.11. Simplektik Geometri

Kuaternionlar cebiri $\mathcal{K}$ olmak üzere,

$$\mathcal{K}^n = \underbrace{\mathcal{K} \times \mathcal{K} \times \ldots \times \mathcal{K}}_{n}$$

alalım.

Tanım 31,[9]: $\mathcal{K}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathcal{K}, 1 \le i \le n\}$ kümesinin elemanlarına birer vektör ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{K}$ kuaternionlarına da bu vektörün bileşenleri denir.

Tanım 32,[9]: $\oplus : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$

$(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} \oplus \vec{b}$

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{K}^n$ için $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ olmak üzere;

$\vec{a} \oplus \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

işlemi ile $(\mathcal{K}^n, \oplus)$ ikilisi bir abel grubudur.

$\odot : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K} \to \mathcal{K}^n$

$(\vec{a}, q) \rightarrow \vec{a}q = (a_1 q, a_2 q, \dots, a_n q)$

şeklindeki dış işlemin aşağıdaki özellikleri vardır:

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{K}^n$ ve $\forall q, q_1, q_2 \in \mathcal{K}$ için

i) $(\vec{a} + \vec{b})q = \vec{a}q + \vec{b}q$

ii) $\vec{a}(q_1 + q_2) = \vec{a}q_1 + \vec{a}q_2$

iii) $\vec{a}(q_1 q_2) = (\vec{a}q_1)q_2$

iv) $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$

Böylece $\{\mathcal{K}^n, \oplus, \mathcal{K}, +, \cdot, \odot\}$ sistemine $\mathcal{K}$ kuaternionlar cismi üzerinde vektör uzayı denir.

Simplektik Çarpım

Tanım 33,[9]: $< , > : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow < \vec{a}, \vec{b} > = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\, b_i$$

şeklinde tanımlanan işlem aşağıdaki özelliklere sahip olur:

i) $< \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \vec{b} > = < \overrightarrow{a_1}, \vec{b} > + < \overrightarrow{a_2}, \vec{b} >$

ii) $< \vec{a}, \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2} > = < \vec{a}, \overrightarrow{b_1} > + < \vec{a}, \overrightarrow{b_2} >$

iii) $< \vec{a}, \vec{b}q > = < \vec{a}, \vec{b} > q$

iv) $< \vec{a}q, \vec{b} > = \bar{q} < \vec{a}, \vec{b} >$

v) $< \vec{a}, \vec{b} > = \overline{< \vec{b}, \vec{a} >}$

vi) $< \vec{a}, \vec{a} > \geq 0$

vii) $< \vec{a}, \vec{a} > = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

bu durumda yukarıda tanımlanan çarpıma simplektik çarpım denir.

Tanım 34: $\forall \vec{a} \in \mathcal{K}^n$ için $< \vec{a}, \vec{a} > = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i}\, a_i = \|\vec{a}\|$ reel sayısına $\vec{a}$ vektörünün uzunluğu denir.

Örnek 34: $\vec{a} = (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, 1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}) \in \mathcal{K}^2$ olmak üzere,

$\|\vec{a}\| = \sum_{i=1}^{2} \overline{a_i}\, a_i$

$= < (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, 1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}), (2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, 1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}) >$

$= (2 + 3\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}).(2 - 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}) + (1 - \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}).(1 + \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3})$

$= 4 + 9 + 4 + 1 + 1 + 1$

$= 20$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Reel Kuaternionlara Ait Bazı Sonuçlar

Önerme 20: $\mathbb{K}$- uzayında $T_{e_0} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$'dir.

İspat : $q = e_0$ için T_{e_0} dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım:

$T_q(e_0) = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$ olmak üzere; $e_0 = +1$ olduğundan

$T_{e_0}(e_0) = e_0 \cdot e_0 = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21} = 1$

$\Rightarrow x_{11} = 1 \, , x_{21} = 0$ olur.

$T_q(\overrightarrow{e_2}) = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22}$ olmak üzere;

$T_{e_0}(\overrightarrow{e_2}) = e_0 \cdot \overrightarrow{e_2} = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22} = \overrightarrow{e_2}$

$\Rightarrow x_{12} = 0 \, , x_{22} = 1$ olur.

Böylece

$T_{e_0} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

şeklinde bulunur. ♦

Önerme 21: $\mathbb{K}$- uzayında $T_{\overrightarrow{e_1}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$'dir.

İspat : $q = \overrightarrow{e_1}$ için $T_{\overrightarrow{e_1}}$ dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım:

$T_q(e_0) = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$ olmak üzere; $e_0 = +1$ olduğundan;

$T_{\overrightarrow{e_1}}(e_0) = \overrightarrow{e_1} \cdot e_0 = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21} = \overrightarrow{e_1}$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını soldan $\overrightarrow{e_1}$ ile çarparsak,

$\overrightarrow{e_1}(e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}) = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{e_1} x_{11} + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} x_{21} = -1$

$x_{11} = a_{11} + \overrightarrow{e_1} b_{11}$ ve $x_{21} = a_{21} + \overrightarrow{e_1} b_{21}$ olarak alalım. Burada $a_{11}, b_{11}, a_{21}, b_{21} \in \mathbb{R}$'dir.

$\Rightarrow \overrightarrow{e_1}(a_{11} + \overrightarrow{e_1} b_{11}) + \overrightarrow{e_3}(a_{21} + \overrightarrow{e_1} b_{21}) = -1$

$\overrightarrow{e_1} a_{11} - b_{11} + \overrightarrow{e_3} a_{21} + \overrightarrow{e_2} b_{21} = -1$

$\Rightarrow a_{11} = 0, \; b_{11} = 1, a_{21} = 0, b_{21} = 0$

$\Rightarrow x_{11} = \sqrt{-1} \, , x_{21} = 0$ olur.

$T_{\mathrm{q}}(\overrightarrow{e_2}) = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22}$ olmak üzere,

$T_{\overrightarrow{\mathrm{e}_1}}(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{\mathrm{e}_1}.\overrightarrow{e_2} = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22} = \overrightarrow{e_3}$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını soldan $\overrightarrow{e_3}$ ile çarparsak;

$\overrightarrow{e_3}(e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22}) = \overrightarrow{e_3}.\overrightarrow{e_3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{e_3} x_{12} + \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2} x_{22} = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{e_3} x_{12} - \overrightarrow{\mathrm{e}_1} x_{22} = -1$

$x_{12} = a_{12} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{12}$ ve $x_{22} = a_{22} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{22}$ olarak alalım. Burada $a_{12}, b_{12}, a_{22}, b_{22} \in \mathbb{R}$'dir.

$\overrightarrow{e_3}(a_{12} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{12}) - \overrightarrow{\mathrm{e}_1}(a_{22} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{22}) = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{e_3} a_{12} + \overrightarrow{e_2} b_{12} - \overrightarrow{\mathrm{e}_1} a_{22} + b_{22} = -1$

$\Rightarrow a_{12} = 0, b_{12} = 0, a_{22} = 0, b_{22} = -1$

$\Rightarrow x_{12} = 0\,, x_{22} = -\sqrt{-1}$ olur.

Böylece

$$T_{\overrightarrow{\mathrm{e}_1}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. ♦

Önerme 22: $\mathbb{K}$- uzayında $T_{\overrightarrow{e_2}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$'dir.

İspat : $q = \overrightarrow{e_2}$ için $T_{\overrightarrow{e_2}}$ dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım:

$T_q(e_0) = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$ olmak üzere; $e_0 = +1$ olduğundan;

$T_{\overrightarrow{e_2}}(e_0) = \overrightarrow{e_2} \cdot e_0 = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21} = \overrightarrow{e_2}$

$\Rightarrow x_{11} = 0\,, x_{21} = 1$ olur.

$T_q(\overrightarrow{e_2}) = e_0 x_{21} + \overrightarrow{e_2} x_{22}$ olmak üzere;

$T_{\overrightarrow{e_2}}(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2} = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22} = -1$

$\Rightarrow x_{12} = -1\,, x_{22} = 0$

Böylece

$$T_{\overrightarrow{e_2}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. ♦

Önerme 23: $\mathbb{K}$- uzayında $T_{\overrightarrow{e_3}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$'dir.

İspat : $q = \overrightarrow{e_3}$ için $T_{\overrightarrow{e_3}}$ dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım:

$T_q(e_0) = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$ olmak üzere; $e_0 = +1$ olduğundan;

$T_{\overrightarrow{e_3}}(e_0) = \overrightarrow{e_3} \cdot e_0 = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21} = \overrightarrow{e_3}$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını soldan $\overrightarrow{e_3}$ ile çarparsak;

$\overrightarrow{e_3}(e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}) = \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{e_3} x_{11} + \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_2} x_{21} = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{e_3} x_{11} - \overrightarrow{\mathrm{e}_1} x_{21} = -1$

$x_{11} = a_{11} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{11}$ ve $x_{21} = a_{21} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{21}$ olarak alalım. Burada $a_{11}, b_{11}, a_{21}, b_{21} \in \mathbb{R}$'dir.

$\overrightarrow{e_3}(a_{11} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{11}) - \overrightarrow{\mathrm{e}_1}(a_{21} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{21}\ ) = -1$

$\Rightarrow \overrightarrow{e_3} a_{11} + \overrightarrow{e_2} b_{11} - \overrightarrow{\mathrm{e}_1} a_{21} + b_{21} = -1$

$a_{11} = 0, b_{11} = 0, a_{21} = 0, b_{21} = -1$

$\Rightarrow x_{11} = 0\ , x_{21} = -\sqrt{-1}$ olur.

$T_q(\overrightarrow{e_2}) = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22}$ olmak üzere,

$T_{\overrightarrow{e_3}}(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_2} = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22} = -\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını soldan $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$ ile çarparsak;

$\overrightarrow{\mathrm{e}_1}(e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22}) = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{e}_1} x_{12} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1}\,\overrightarrow{e_2} x_{22} = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{e}_1} x_{12} + \overrightarrow{e_3} x_{22} = 1$

$x_{12} = a_{12} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{12}$ ve $x_{22} = a_{22} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{22}$ olarak alalım. Burada $a_{12}, b_{12}, a_{22}, b_{22} \in \mathbb{R}$'dir.

$\overrightarrow{\mathrm{e}_1}(a_{12} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{12}) + \overrightarrow{e_3}(a_{22} + \overrightarrow{\mathrm{e}_1} b_{22}) = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{e}_1} a_{12} - b_{12} + \overrightarrow{e_3} a_{22} + \overrightarrow{e_2} b_{22} = 1$

$\Rightarrow a_{12} = 0, b_{12} = -1, a_{22} = 0, b_{22} = 0$ olur.

$\Rightarrow x_{12} = -\sqrt{-1}\ , x_{22} = 0$ olur.

Böylece

$$T_{\overrightarrow{e_3}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. ♦

Önerme24: $\mathbb{K}$-uzayında $x, y \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ olmak üzere $T_{e_0 x + \overrightarrow{e_2} y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{x} & -\bar{\mathrm{y}} \\ \mathrm{y} & \bar{\mathrm{x}} \end{pmatrix}$'dir

İspat: $T_{e_0 x + \overrightarrow{e_2} y}(e_0) = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$

$\Rightarrow (e_0 x + \overrightarrow{e_2} y) e_0 = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$

$\Rightarrow\ \ x + \overrightarrow{e_2} y = e_0 x_{11} + \overrightarrow{e_2} x_{21}$

$\Rightarrow x_{11} = x\ , x_{21} = y$ olur.

$T_{e_0 x + \overrightarrow{e_2} y}(\overrightarrow{e_2}) = e_0 x_{12} + \overrightarrow{e_2} x_{22}$

$\Rightarrow\ (e_0x+\overrightarrow{e_2}y)\overrightarrow{e_2}=e_0x_{12}+\overrightarrow{e_2}x_{22}$ x,y $\in K_1$ $x=a+\overrightarrow{e_1}b$, y=c+$\overrightarrow{e_1}d$

a,b,c,d $\in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{e_1}^2=-1$

$\Rightarrow (e_0(\mathrm{a}+\overrightarrow{e_1}b)+\overrightarrow{e_2}(\mathrm{c}+\overrightarrow{e_1}d))\overrightarrow{e_2}=e_0x_{12}+\overrightarrow{e_2}x_{22}$

$\Rightarrow e_0a\overrightarrow{e_2}+e_0\overrightarrow{e_1}b\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}\mathrm{c}\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}d\overrightarrow{e_2}=e_0x_{12}+\overrightarrow{e_2}x_{22}$

$\Rightarrow a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}-c+d\overrightarrow{e_1}=\ e_0x_{12}+\overrightarrow{e_2}x_{22}$

$\Rightarrow e_0(-c+\overrightarrow{e_1}d)+\overrightarrow{e_2}(a-\overrightarrow{e_1}b)=\ e_0x_{12}+\overrightarrow{e_2}x_{22}$

$\Rightarrow x_{12}=-c+\overrightarrow{e_1}d\ ,\ x_{22}=a-\overrightarrow{e_1}b$

$\Rightarrow\ x_{12}=-\bar{y}\ ,\ x_{22}=\ \bar{x}$ olur.

Böylece

$$T_{e_0x+\overrightarrow{e_2}y}\leftrightarrow\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -\bar{y}\\ y & \bar{x}\end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. ♦

Önerme 25 : $\forall\, x\in\ \mathbb{C}$, $\overrightarrow{e_2}^2=-1$ olmak üzere $x\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}\bar{x}$ ‘dir.

İspat: $\forall\, x\in\ \mathbb{C}$ için $x=a+\overrightarrow{e_1}b$ a,b $\in \mathbb{R}$ olarak alalım.

$x\overrightarrow{e_2}=(a+\overrightarrow{e_1}b\,)\overrightarrow{e_2}=a\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_1}b\overrightarrow{e_2}$

$=a\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}b$

$=a\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}b$

$=\overrightarrow{e_2}(a-\overrightarrow{e_1}b)$

$=\overrightarrow{e_2}\bar{x}$

$\Rightarrow\ x\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}\bar{x}$ $(\forall\, x\in\ \mathbb{C}\,,\ \overrightarrow{e_2}^2=-1)$

şeklinde bulunur**.** ♦

Önerme 26: $\forall$q $\in\mathcal{K}$ için $q=e_0x+\overrightarrow{e_2}y$ $(x,y\in\mathbb{C})$ olmak üzere; $\|q\|=\|e_0x+\overrightarrow{e_2}y\|=|x|^2+|y|^2$ şeklindedir.

İspat: $\forall$q $\in\mathcal{K}$ için $\|q\|=q\times\bar{q}$ olduğundan,

$\|q\|=\|e_0x+\overrightarrow{e_2}y\|=(e_0x+\overrightarrow{e_2}y\,)\times\overline{(e_0x+\overrightarrow{e_2}y)}$

$=(e_0x+\overrightarrow{e_2}y\,)\times(e_0\bar{x}-\overrightarrow{e_2}y\,)$

$=x\bar{x}-x\overrightarrow{e_2}y+\overrightarrow{e_2}y\bar{x}-\overrightarrow{e_2}y\overrightarrow{e_2}y$

$=x\bar{x}-\overrightarrow{e_2}\bar{x}y+\overrightarrow{e_2}y\bar{x}-\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2}\bar{y}y$

$=x\bar{x}-\overrightarrow{e_2}\bar{x}y+\overrightarrow{e_2}y\bar{x}+\bar{y}y$

$=|x|^2+|y|^2$ olarak bulunur. ♦

Önerme 27: A= $\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ matrisi üniter matristir.⟺

$x, y \in \mathbb{C}$ öyleki $|x|^2 + |y|^2 = 1$'dir.

İspat (⟺:) $A = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ matrisi üniter matris olsun. O halde A$\overline{A}^T = I$ 'dir.

$\overline{A} = \begin{pmatrix} \bar{x} & -y \\ \bar{y} & x \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ -y & x \end{pmatrix}$ olur.

$$A\overline{A}^T = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \\ -y & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x\bar{x} + \bar{y}y & x\bar{y} - \bar{y}x \\ y\bar{x} - \bar{x}y & y\bar{y} + \bar{x}x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} |x|^2 + |y|^2 & 0 \\ 0 & |x|^2 + |y|^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 = 1$ elde edilir.

Buradan A$\overline{A}^T = I \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$'dir. ♦

Sonuç: q $= e_0 x + \overrightarrow{e_2} y \in \mathcal{K}_1 \;\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$ 'dir.

Kuaternionlar Uzayında ℂ- Lineer Operatörler

Tanım 35: Aşağıdaki özellikleri sağlayan F : $\mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ dönüşümüne ℂ- lineer operatör denir.

i) F$(q_1 + q_2)$ = F$(q_1) + F(q_2)$, $q_1, q_2 \in \mathcal{K}^n$

ii) F(qλ) = F(q)λ, λ∈ $\mathbb{C}$, q $\in \mathcal{K}^n$

Önerme 28: Keyfi $\mathcal{K}$- lineer operatör ℂ- lineerdir.

İspat : F keyfi $\mathcal{K}$- lineer operatör olsun.

i) F$(q_1 + q_2)$ = F$(q_1) + F(q_2)$, $q_1, q_2 \in \mathcal{K}^n$

ii) F(qλ) = F(q)λ, λ∈ $\mathcal{K}$, q $\in \mathcal{K}^n$

∀λ ∈ $\mathcal{K}$ için geçerli olduğundan λ =d + a$\overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2} + 0\overrightarrow{e_3}$, λ ∈ ℂ için de geçerlidir.

⇒ F(qλ) = F(q) λ, λ ∈ ℂ

$\Rightarrow$ F, $\mathbb{C}$- lineerdir. ♦

2.2. $\mathbb{C}^2$- Uzayında Noktalar Sisteminin SU(2) - Denklik Problemi ve K- Uzayında $\mathcal{K}_1$- Denklik Problemi

Tanım 36: $\{\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \ldots, \widetilde{u_m}\} \subseteq \mathbb{C}^2$, $\{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \ldots, \widetilde{v_m}\} \subseteq \mathbb{C}^2$ öyle ki $\widetilde{v_i}= F\widetilde{u_i}$, i=1,2,…,m olacak şekilde F$\in$ SU(2) varsa $\{\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \ldots, \widetilde{u_m}\}$, $\{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \ldots, \widetilde{v_m}\}$ −m'lileri SU(2) denk denir ve $\{\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \ldots, \widetilde{u_m}\} \sim \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \ldots, \widetilde{v_m}\}$(SU(2)) şeklinde gösterilir.

Örnek 35: $\widetilde{u_1} = \binom{1+i}{1-i}$, $\widetilde{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ olmak üzere ;

$\binom{1+i}{1-i} \sim \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix}$ (SU(2)) 'dir.

Çözüm : $\binom{1+i}{1-i} \sim \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix}$ (SU(2)) $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix} = \mathrm{F}.\binom{1+i}{1-i}$ olacak şekilde $\exists F \in SU(2)$ vardır.

Eğer $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}i & \frac{-\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i \end{pmatrix}$ olarak alınırsa,

$$\mathrm{F}.\binom{1+i}{1-i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}i & \frac{-\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i \end{pmatrix}.\binom{1+i}{1-i} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{7}}{3}+i\left(\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}\right) \end{pmatrix}$$ bulunur.

Burada $F \in SU(2)$'dir.

Gerçekten, det(F) = $\begin{vmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}i & \frac{-\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i \end{vmatrix}$ = 1'dir. Ayrıca,

$$F.\bar{F}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}i & \frac{-\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i & \frac{-\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}i \end{pmatrix}^T$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}i & \frac{-\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{3}i & \frac{\sqrt{7}}{3} \\ \frac{-\sqrt{7}}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}i \end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ olduğu görülür.

Tanım 37: $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subseteq \mathcal{K}$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq \mathcal{K}$öyle ki $v_i = gu_i, i = 1,2, \ldots, m$ olacak şekilde $g \in \mathcal{K}_1$ varsa $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} -$ m'lileri $\mathcal{K}_1$ denk denir ve $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \sim \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$ ile gösterilir.

Örnek 36 : $q_1 = 3 + 2\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$ ve $q_2 = \frac{7}{3} + \frac{10}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{11}{3}\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere $q_1 \sim q_2(\mathcal{K}_1)$ 'dir.

Çözüm: $q_1 \sim q_2(\mathcal{K}_1) \Rightarrow q_2 = qq_1$ olacak şekilde $\exists q \in \mathcal{K}_1$ vardır. O halde son eşitliğin her iki tarafını ${q_1}^{-1}$ ile çarparsak,

$q_2 \cdot {q_1}^{-1} = qq_1 \cdot {q_1}^{-1}$

$\Rightarrow q_2 \cdot {q_1}^{-1} = q$ olur.

$q \in \mathcal{K}_1$ olup olmadığını inceleyelim:

$q_2 . {q_1}^{-1} = (\frac{7}{3} + \frac{10}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{11}{3}\overrightarrow{e_3}) . (3 + 2\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3})^{-1}$

$= (\frac{7}{3} + \frac{10}{3}\overrightarrow{e_1} + \frac{11}{3}\overrightarrow{e_3}) . \frac{(3-2\overrightarrow{e_1}-4\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3})}{30}$

$= \frac{1}{30}\left[\left(7 + \frac{20}{3} - \frac{11}{3}\right) + \left(\frac{-14}{3} + 10 + \frac{44}{3}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\frac{-28}{3} - \frac{10}{3} - \frac{22}{3}\right)\overrightarrow{e_2} + (\frac{7}{3} - \frac{40}{3} + 11)\overrightarrow{e_3}\right]$

$= \frac{1}{30}\left[\frac{30}{3} + \frac{60}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{60}{3}\overrightarrow{e_2}\right]$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{e_2}$ şeklinde bulunur.

Dolayısıyla $q = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\overrightarrow{e_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{e_2}$

$\Rightarrow \|q\| = (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{-2}{3})^2$

$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}$

$= 1$ olur.

Böylece $q_2 = qq_1$ olacak şekilde $\exists q \in \mathcal{K}_1$ vardır.

$\Rightarrow q_1 \sim q_2(\mathcal{K}_1)$ 'dir.

Örnek 37: $q_1 = 1 + \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ ve $q_2 = \frac{-1}{5} + \frac{8}{5}\overrightarrow{e_1} + \frac{3}{5}\overrightarrow{e_2} + \frac{8}{5}\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere $q_1 \sim q_2(\mathcal{K}_1)$ değildir.

Çözüm: $q_1 \sim q_2(\mathcal{K}_1) \Rightarrow q_2 = qq_1$ olacak şekilde $\exists q \in \mathcal{K}_1$ vardır. O halde son eşitliğin her iki tarafını ${q_1}^{-1}$ ile çarparsak,

$q_2 \cdot {q_1}^{-1} = qq_1 \cdot {q_1}^{-1}$

$\Rightarrow q_2 \cdot {q_1}^{-1} = q$ olur.

$q \in \mathcal{K}_1$ olup olmadığını inceleyelim:

$$q_2 \cdot {q_1}^{-1} = \left(\frac{-1}{5} + \frac{8}{5}\overrightarrow{e_1} + \frac{3}{5}\overrightarrow{e_2} + \frac{8}{5}\overrightarrow{e_3}\right) \cdot (1 + \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2})^{-1}$$

$$= \left(\frac{-1}{5} + \frac{8}{5}\overrightarrow{e_1} + \frac{3}{5}\overrightarrow{e_2} + \frac{8}{5}\overrightarrow{e_3}\right) \cdot \frac{(1-\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2})}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{-1}{5} + \frac{8}{5} + \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{8}{5} + \frac{16}{5}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{8}{5}\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\frac{-16}{5} + \frac{3}{5} + \frac{8}{5}\right)\overrightarrow{e_3}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{13}{5} + 5\overrightarrow{e_1} - \frac{3}{5}\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}\right)$$

$= \frac{13}{30} + \frac{5}{6}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{10}\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{6}\overrightarrow{e_3}$ bulunur.

$$q = \frac{13}{30} + \frac{5}{6}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{10}\overrightarrow{e_2} - \frac{1}{6}\overrightarrow{e_3}$$

$$\Rightarrow \|q\| = \left(\frac{13}{30}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1}{10}\right)^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)^2 \neq 1$$

olduğundan $q_1 \sim q_2(\mathcal{K}_1)$ değildir.

2.3. SU(2) – Denklik Problemi ve $\mathcal{K}_1$ −Denklik Problemi Arasındaki Bağlantı

Önerme 29: $F_1 : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2$

$$(e_0 a + \overrightarrow{e_2}\mathrm{b}) \to \binom{a}{b}$$

şeklinde tanımlanan F_1 dönüşümü $\mathbb{C}$ üzerindeki lineer uzayların $\mathbb{C}$ - izomorfizmadır.

İspat: $\forall\, a + \overrightarrow{e_2}\mathrm{b}\,,\, c + \overrightarrow{e_2}d \in \mathcal{K}$;

$F_1(a + \overrightarrow{e_2}\mathrm{b}) = F_1(c + \overrightarrow{e_2}d) \Rightarrow a + \overrightarrow{e_2}\mathrm{b} = c + \overrightarrow{e_2}d$ olduğunu gösterelim:

$F_1(a + \overrightarrow{e_2}\mathrm{b}) = F_1(c + \overrightarrow{e_2}d)$

$\Rightarrow \binom{a}{b} = \binom{c}{d}$

$\Rightarrow a = c \; ve \; b = d$ ‘dir.

$\Rightarrow \;\; a + \overrightarrow{e_2}\text{b} = \; c + \overrightarrow{e_2}d$

$\Rightarrow F_1$ – birebirdir.

$\forall\binom{a}{b} \in \mathbb{C}^2$; $F_1(a + \overrightarrow{e_2}\text{b}) = \binom{a}{b}$ olacak şekilde $a + \overrightarrow{e_2}\text{b} \in \mathcal{K}$ vardır.

$\Rightarrow F_1$ - örtendir.

$$F_1((a + \overrightarrow{e_2}\text{b}) + (c + \overrightarrow{e_2}d)) = F_1\big((a + c) + \overrightarrow{e_2}(b + d)\big) = \binom{a+c}{b+d}$$

$$= \binom{a}{b} + \binom{c}{d}$$

$$= F_1(a + \overrightarrow{e_2}\text{b}) + F_1(c + \overrightarrow{e_2}d)$$

$\forall\lambda \in \mathbb{C}$;

$$F_1\big((a + \overrightarrow{e_2}\text{b})\lambda\big) = F_1(a\lambda + \overrightarrow{e_2}\text{b}\lambda) = \binom{a\lambda}{b\lambda} = \binom{a}{b}\lambda = F_1(a + \overrightarrow{e_2}\text{b})\lambda$$

$\Rightarrow F_1\big((a + \overrightarrow{e_2}\text{b})\lambda\big) = F_1(a + \overrightarrow{e_2}\text{b})\lambda$

$\Rightarrow F_1$, $\mathbb{C}$- lineerdir.

$\Rightarrow F_1$, $\mathbb{C}$ -izomorfizmadır. ♦

Önerme 30: $F_1^{\;-1}: \mathbb{C}^2 \to \mathcal{K}$

$$\binom{a}{b} \to (e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b})$$

şeklinde tanımlanan $F_1^{\;-1}$ dönüşümü $\mathbb{C}$ üzerindeki lineer uzayların $\mathbb{C}$ - izomorfizmadır.

İspat : Önerme 29 gereği $F_1: \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2$ dönüşümü birebir, örten olduğundan $F_1^{\;-1}: \mathbb{C}^2 \to \mathcal{K}$ dönüşümü vardır.

$\forall \binom{a}{b}, \binom{c}{d} \in \mathbb{C}^2$;

$F_1^{\;-1}\left(\binom{a}{b}\right) = F_1^{\;-1}\left(\binom{c}{d}\right) \Rightarrow \binom{a}{b} = \binom{c}{d}$ olduğunu gösterelim:

$F_1^{\;-1}\left(\binom{a}{b}\right) = F_1^{\;-1}\left(\binom{c}{d}\right)$ eşitliğine F_1 ile soldan bileşke işlemi uygularsak,

$$F_1\left(F_1^{\;-1}\left(\binom{a}{b}\right)\right) = F_1\left(F_1^{\;-1}\left(\binom{c}{d}\right)\right) \Rightarrow \binom{a}{b} = \binom{c}{d}$$

$\Rightarrow F_1^{\;-1}$ −birebirdir.

$\forall(e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b}) \in K$; $F_1^{\;-1}\left(\binom{a}{b}\right) = (e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b})$ olacak şekilde $\binom{a}{b} \in \mathbb{C}^2$ var mıdır?

${F_1}^{-1}\left(\binom{a}{b}\right) = (e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b})$ eşitliğine soldan F_1 ile bileşke işlemi uygularsak,

$F_1\left({F_1}^{-1}\left(\binom{a}{b}\right)\right) = F_1(e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b})$

$\binom{a}{b} = F_1(e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b})$ elde edilir.

F_1 örten olduğundan $\binom{a}{b} \in \mathbb{C}^2$'dir.

$\Rightarrow {F_1}^{-1} -$ örtendir.

$$\begin{aligned}{F_1}^{-1}\left(\binom{a}{b} + \binom{c}{d}\right) = {F_1}^{-1}\left(\binom{a+c}{b+d}\right) &= (e_0(a+c) + \overrightarrow{e_2}(b+d)) \\ &= (e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b} + e_0 c + \overrightarrow{e_2}\text{d}) \\ &= (e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b}) + (e_0 c + \overrightarrow{e_2}\text{d}) \\ &= {F_1}^{-1}\left(\binom{a}{b}\right) + {F_1}^{-1}\left(\binom{c}{d}\right)\end{aligned}$$

$\forall\lambda \in \mathbb{C}$;

$${F_1}^{-1}\left(\binom{a}{b}\lambda\right) = {F_1}^{-1}\left(\binom{a\lambda}{b\lambda}\right) = (e_0 a\lambda + \overrightarrow{e_2}\text{b}\lambda) = (e_0 a + \overrightarrow{e_2}\text{b})\lambda = {F_1}^{-1}\left(\binom{a}{b}\right)\lambda$$

$\Rightarrow {F_1}^{-1}$, $\mathbb{C}$ $-$lineerdir.

$\Rightarrow {F_1}^{-1}$, $\mathbb{C}$ $-$izomorfizmadır. ♦

Teorem 4: $F_1 : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2$

$$a_1 + \overrightarrow{e_2}b_1 \to \binom{a_1}{b_1} \quad a_1, b_1 \in \mathbb{C}$$

olsun. Bu taktirde $H : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ $\mathbb{C}$- lineerdir.$\Leftrightarrow$ $F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$ -lineerdir.

İspat: ($\Rightarrow$): $H : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ dönüşümü $\mathbb{C}$- lineer olsun.

$\forall \binom{a_1}{b_1}, \binom{c_1}{d_1} \in \mathbb{C}^2$;

$$(F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1})\left(\binom{a_1}{b_1} + \binom{c_1}{d_1}\right) = (F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1})\binom{a_1}{b_1} + (F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1})\binom{c_1}{d_1} \ ?$$

$$(F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1})\left(\binom{a_1}{b_1} + \binom{c_1}{d_1}\right) = (F_1 \circ H)\left({F_1}^{-1}\left(\binom{a_1}{b_1} + \binom{c_1}{d_1}\right)\right)$$

${F_1}^{-1}$ $\mathbb{C}$ - lineer olduğundan;

$$(F_1 \circ H)\left({F_1}^{-1}\binom{a_1}{b_1} + {F_1}^{-1}\binom{c_1}{d_1}\right) = \left(F_1\left(H\left({F_1}^{-1}\binom{a_1}{b_1} + {F_1}^{-1}\binom{c_1}{d_1}\right)\right)\right)$$

H $\mathbb{C}$ - lineer olduğundan;

$$= F_1\left(H\left({F_1}^{-1}\binom{a_1}{b_1}\right) + H\left({F_1}^{-1}\binom{c_1}{d_1}\right)\right)$$

F_1 $\mathbb{C}$ - lineer olduğundan;

$=F_1\left(H\left(F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\right)\right)+F_1\left(H\left(F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}c_1\\d_1\end{pmatrix}\right)\right)$

$=\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\begin{pmatrix}c_1\\d_1\end{pmatrix}$ ‘dir.

$\forall\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$;

$\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\lambda\right)=\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\lambda$?

$\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\lambda\right)=(F_1\circ H)\left(F_1{}^{-1}\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\lambda\right)\right)$

$F_1{}^{-1}$ $\mathbb{C}$ -lineer olduğundan;

$=(F_1\circ H)\left(F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\lambda\right)$

$=F_1\left(H\left(F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\lambda\right)\right)$

H $\mathbb{C}$ -lineer olduğundan;

$=F_1\left(H\left(F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\right)\lambda\right)$

F_1 $\mathbb{C}$ -lineer olduğundan;

$=F_1\left(H\left(F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\right)\right)\lambda$

$=\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\lambda$

$\Rightarrow F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$ -lineerdir.

($\Leftarrow$): $F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$ -lineer olsun.

$\forall\ a_1+\overrightarrow{e_2}b_1,\ c_1+\overrightarrow{e_2}d_1\in\mathcal{K}$ alalım. Bu taktirde,

$a_1+\overrightarrow{e_2}b_1=F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix},\ c_1+\overrightarrow{e_2}d_1=F_1{}^{-1}\begin{pmatrix}c_1\\d_1\end{pmatrix}\ ve\ \begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\d_1\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$’dir.

$\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\d_1\end{pmatrix}\right)=\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\begin{pmatrix}c_1\\d_1\end{pmatrix}$’dir.

Yukarıdaki eşitliğe soldan $F_1{}^{-1}$ uygulandığında;

$F_1{}^{-1}\left(\left(F_1\circ H\circ F_1{}^{-1}\right)\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\d_1\end{pmatrix}\right)\right)$

$$=F_1^{-1}\left(\left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\binom{a_1}{b_1} + \left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\binom{c_1}{d_1}\right)$$

$$= F_1^{-1}\left(F_1\left(H \circ F_1^{-1}\right)\left(\binom{a_1}{b_1} + \binom{c_1}{d_1}\right)\right)$$

$$=F_1^{-1}\left(F_1\left(H \circ F_1^{-1}\right)\binom{a_1}{b_1} + F_1\left(H \circ F_1^{-1}\right)\binom{c_1}{d_1}\right)$$

${F_1}^{-1}$ $\mathbb{C}$ -lineer olduğundan;

$$\left(H \circ F_1^{-1}\right)\left(\binom{a_1}{b_1} + \binom{c_1}{d_1}\right) = F_1^{-1}\left(F_1\left(H \circ F_1^{-1}\right)\binom{a_1}{b_1}\right) + F_1^{-1}\left(F_1\left(H \circ F_1^{-1}\right)\binom{c_1}{d_1}\right)$$

$$H\left(F_1^{-1}\left(\binom{a_1}{b_1} + \binom{c_1}{d_1}\right)\right)=H\left(F_1^{-1}\binom{a_1}{b_1}\right) + H\left(F_1^{-1}\binom{c_1}{d_1}\right)$$

$H\left((a_1 + \overrightarrow{e_2}b_1) + (c_1 + \overrightarrow{e_2}d_1)\right) = H(a_1 + \overrightarrow{e_2}b_1) + H(c_1 + \overrightarrow{e_2}d_1)$ ....(1)

Şimdi $\forall\, a_1 + \overrightarrow{e_2}b_1 \in \mathcal{K}$ ve $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ alalım. Buradan $a_1 + \overrightarrow{e_2}b_1 = F_1^{-1}\binom{a_1}{b_1}$, $\binom{a_1}{b_1} \in \mathbb{C}^2$'dir.

$F_1 \circ H \circ F_1^{-1}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$ -lineer olduğundan;

$\left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\left(\binom{a_1}{b_1}\lambda\right) = \left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\binom{a_1}{b_1}\lambda$ ' dir.

Yukarıdaki eşitliğe soldan ${F_1}^{-1}$ uygulandığında

$$F_1^{-1}\left(\left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\left(\binom{a_1}{b_1}\lambda\right)\right) = F_1^{-1}\left(\left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\binom{a_1}{b_1}\lambda\right)$$

${F_1}^{-1}$ $\mathbb{C}$ -lineer olduğundan;

$$F_1^{-1}\left(\left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\left(\binom{a_1}{b_1}\lambda\right)\right)=F_1^{-1}\left(\left(F_1 \circ H \circ F_1^{-1}\right)\binom{a_1}{b_1}\right)\lambda$$

$$\left(H \circ F_1^{-1}\right)\left(\binom{a_1}{b_1}\lambda\right)=\left(H \circ F_1^{-1}\right)\left(\binom{a_1}{b_1}\right)\lambda$$

$$H\left(F_1^{-1}\left(\binom{a_1}{b_1}\lambda\right)\right) = H\left(F_1^{-1}\left(\binom{a_1}{b_1}\right)\right)\lambda$$

${F_1}^{-1}$ $\mathbb{C}$ -lineer olduğundan;

$$H\left(F_1^{-1}\left(\binom{a_1}{b_1}\right)\lambda\right)= H\left(F_1^{-1}\left(\binom{a_1}{b_1}\right)\right)\lambda$$

$H\left((a_1 + \overrightarrow{e_2}b_1)\lambda\right)= H\left((a_1 + \overrightarrow{e_2}b_1)\right)\lambda$….(2)

(1) ve (2) eşitliklerinden $H: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ dönüşümü $\mathbb{C}$- lineerdir. ♦

Tanım 38: $\{F:\mathcal{K} \to \mathcal{K}, F - \mathbb{C} - \text{ lineer operatör}\}$ kümesine kuaternionlar uzayında tüm $\mathbb{C}$- lineer operatörlerin kümesi denir ve $\mathrm{M}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ ile gösterilir.

Tanım 39: $\{F:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, F - \mathbb{C} - \text{ lineer operatör}\}$ kümesine $\mathbb{C}^2$- kompleks vektör uzayında tüm $\mathbb{C}$- lineer operatörlerin kümesi denir ve $\mathrm{M}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ ile gösterilir.

Not: $\mathrm{M}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ ve $\mathrm{M}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ kümeleri $\mathbb{C}$ üzerinde birer lineer uzaydır.

Teorem 5: $\mathrm{W} : \mathrm{M}(\mathcal{K}, \mathbb{C}) \to \mathrm{M}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$

$$\mathrm{H} \to \mathrm{W}(\mathrm{H}) = F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1}$$

dönüşümü $\mathbb{C}$-izomorfizmadır.

İspat: $\forall\, H_1, H_2 \in \mathrm{M}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$;

$\mathrm{W}(H_1) = W(H_2) \Rightarrow H_1 = H_2$?

$\mathrm{W}(H_1) = W(H_2) \Rightarrow F_1 \circ H_1 \circ {F_1}^{-1} = F_1 \circ H_2 \circ {F_1}^{-1}$

Eşitliğin soldan ${F_1}^{-1}$,sağdan F_1 ile bileşkesini alırsak;

$${F_1}^{-1} \circ \left(F_1 \circ H_1 \circ {F_1}^{-1}\right) \circ F_1 = {F_1}^{-1} \circ \left(F_1 \circ H_2 \circ {F_1}^{-1}\right) \circ F_1$$

$$\left({F_1}^{-1} \circ F_1\right) \circ H_1 \circ \left({F_1}^{-1} \circ F_1\right) = \left({F_1}^{-1} \circ F_1\right) \circ H_2 \circ \left({F_1}^{-1} \circ F_1\right)$$

$\Rightarrow H_1 = H_2$

$\Rightarrow$ W-birebirdir.

Keyfi $A \in M(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ için $A = W(H)$ olacak şekilde bir $\mathrm{H} \in \mathrm{M}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ var mıdır?

Keyfi $A \in M(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ alalım. A'nın soldan ${F_1}^{-1}$,sağdan F_1 ile bileşkesini alırsak, ${F_1}^{-1} \circ \mathrm{A} \circ F_1$ elde edilir. ${F_1}^{-1} \circ \mathrm{A} \circ F_1 : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ bir dönüşümdür. Burada ${F_1}^{-1} \circ \mathrm{A} \circ F_1$ elemanını H ile gösterelim. Bu taktirde $H: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ 'dır.

$\Rightarrow W$ −örtendir.

$\Rightarrow W$ −birebir ve örtendir.

Şimdi H'nin $\mathbb{C}$- lineer dönüşüm olduğunu gösterelim:

Önerme 29 ve önerme 30'e göre sırasıyla F_1 ve ${F_1}^{-1}$ dönüşümleri $\mathbb{C}$- lineerdir. Diğer taraftan A dönüşümü $\mathbb{C}$- lineer olduğundan bileşke ${F_1}^{-1} \circ \mathrm{A} \circ F_1 = H$ dönüşümü $\mathbb{C}$-lineerdir. Dolayısıyla $H \in \mathrm{M}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ 'dir.

$W(H_1 + H_2) = W(H_1) + W(H_2)$?

$W(H_1 + H_2) = F_1 \circ (H_1 + H_2) \circ {F_1}^{-1} = \big(F_1(H_1) + F_1(H_2)\big) \circ {F_1}^{-1}$

$= F_1(H_1) \circ {F_1}^{-1} + F_1(H_2) \circ {F_1}^{-1}$

$= W(H_1) + W(H_2)$

elde edilir.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$;

$W(H_1\lambda) = W(H_1)\,\lambda$?

$W(H_1\lambda) = F_1 \circ (H_1\lambda) \circ {F_1}^{-1}$

$F_1, {F_1}^{-1}$ - $\mathbb{C}$- lineer olduğundan ,

$= \left(F_1 \circ H_1 \circ {F_1}^{-1}\right)\lambda$

$= W(H_1)\,\lambda$

$\Rightarrow$ W- $\mathbb{C}$- lineerdir.

$\Rightarrow$ W- $\mathbb{C}$ - izomorfizmadır. ♦

Teorem 6: W : $M(\mathcal{K}, \mathbb{C}) \to M(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$

$$H \to W(H) = F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1}$$

dönüşümü $\mathbb{C}$ - cebir izomorfizmasıdır.

İspat: Teorem 5'ten W $\mathbb{C}$-lineerdir.

$\forall H_1, H_2 \in M(\mathcal{K}, \mathbb{C})$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;

i) $W(H_1 + H_2) = W(H_1) + W(H_2)$

ii) $W(H_1\lambda) = W(H_1)\,\lambda$ 'dir.

$W(H_1 \circ H_2) = W(H_1) \circ W(H_2)$?

$W(H_1 \circ H_2) = F_1 \circ (H_1 \circ H_2) \circ {F_1}^{-1} = F_1 \circ H_1 \circ {F_1}^{-1} \circ F_1 \circ H_2 \circ {F_1}^{-1}$

$= W(H_1) \circ W(H_2)$

$\Rightarrow$ W dönüşümü $\mathbb{C}$-cebir izomorfizmasıdır. ♦

Önerme 31: Ψ: $\mathcal{K}_1 \to SU(2)$

$$q = e_0 x + \overrightarrow{e_2} y \to \Psi(q) = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$$

dönüşümü grup izomorfizmasıdır.

İspat: $\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}_1; \Psi(q_1) = \Psi(q_2) \Rightarrow q_1 = q_2 \ldots ?$

$q_1 = e_0 x_1 + \overrightarrow{e_2} y_1$

$q_2 = e_0 x_2 + \overrightarrow{e_2} y_2$ olmak üzere;

$\Psi(q_1) = \Psi(q_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -\overline{y_1} \\ y_1 & \overline{x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -\overline{y_2} \\ y_2 & \overline{x_2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ 'dir.

O halde $q_1 = q_2$ olur.

$\Rightarrow$ Ψ - birebirdir.

$\forall \begin{pmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ için $\Psi(\mathrm{q}) = \begin{pmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $q \in \mathcal{K}_1$ mevcuttur olduğu Önerme 27'de gösterildi.

$\Rightarrow$ Ψ - örtendir.

$\forall q_1, q_2 \in \mathcal{K}_1; \Psi(q_1 \cdot q_2) = \Psi(q_1) \cdot \Psi(q_2) \ldots ?$

$q_1 \cdot q_2 = (e_0 x_1 + \overrightarrow{e_2} y_1) \cdot (e_0 x_2 + \overrightarrow{e_2} y_2)$

$= x_1 x_2 + x_1 \overrightarrow{e_2} y_2 + \overrightarrow{e_2} y_1 x_2 + \overrightarrow{e_2} y_1 \overrightarrow{e_2} y_2$

$= x_1 x_2 + \overrightarrow{e_2}\overline{x_1} y_2 + \overrightarrow{e_2} y_1 x_2 - \overline{y_1} y_2$

$= x_1 x_2 - \overline{y_1} y_2 + \overrightarrow{e_2}(\overline{x_1} y_2 + y_1 x_2)$

$\Psi(q_1 \cdot q_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - \overline{y_1} y_2 & -\overline{(\overline{x_1} y_2 + y_1 x_2)} \\ \overline{x_1} y_2 + y_1 x_2 & \overline{x_1 x_2 - \overline{y_1} y_2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 x_2 - \overline{y_1} y_2 & -(x_1 \overline{y_2} + \overline{y_1}\,\overline{x_2}) \\ \overline{x_1} y_2 + y_1 x_2 & \overline{x_1 x_2 - \overline{y_1} y_2} \end{pmatrix} \ldots (1)$

$\Psi(q_1) = \Psi(e_0 x_1 + \overrightarrow{e_2} y_1) = \begin{pmatrix} x_1 & -\overline{y_1} \\ y_1 & \overline{x_1} \end{pmatrix}$

$\Psi(q_2) = \Psi(e_0 x_2 + \overrightarrow{e_2} y_2) = \begin{pmatrix} x_2 & -\overline{y_2} \\ y_2 & \overline{x_2} \end{pmatrix}$ olmak üzere;

$$\Psi(q_1)\cdot\Psi(q_2)=\begin{pmatrix} x_1 & -\overline{y_1} \\ y_1 & \overline{x_1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_2 & -\overline{y_2} \\ y_2 & \overline{x_2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1x_2-\overline{y_1}y_2 & -x_1\overline{y_2}-\overline{y_1}\overline{x_2} \\ \overline{x_1}y_2+y_1x_2 & -y_1\overline{y_2}+\overline{x_1}\overline{x_2} \end{pmatrix}\ldots(2)$$

(1) ve (2) ‘den $\Psi(q_1\cdot q_2)=\Psi(q_1)\cdot\Psi(q_2)$ eşitliği elde edilir.

$\Rightarrow \Psi -$ grup izomorfizmasıdır. ♦

Teorem 7: $\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\ldots,\mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_1,v_2,\ldots,v_\mathrm{m}\}(\mathcal{K}_1)$. $\Leftrightarrow$

$\{\tilde{\mathrm{u}}_1,\tilde{\mathrm{u}}_2\ldots,\tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\}\sim\{\tilde{v}_1,\tilde{v}_2\ldots,\tilde{v}_\mathrm{m}\}(\mathrm{SU}(2))$.

İspat : $(\Rightarrow:)$ $\{\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\ldots,\mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_1,v_2,\ldots,v_\mathrm{m}\}(\mathcal{K}_1)$ olsun. O halde $v_i=gu_i$, $i=1,2,\ldots,m$ olacak şekilde bir $g\in\mathcal{K}_1$ vardır.

$\{\tilde{\mathrm{u}}_1,\tilde{\mathrm{u}}_2\ldots,\tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\}\sim\{\tilde{v}_1,\tilde{v}_2\ldots,\tilde{v}_\mathrm{m}\}\big(\mathrm{SU}(2)\big)$ olduğunu göstermek için $\tilde{v}_\mathrm{i}=F\ \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}$,

$i=1,2,\ldots,m$ olacak şekilde bir $F\in\mathrm{SU}(2)$ olduğunu göstermeliyiz:

$F_1\colon K\ \to\mathbb{C}^2$

$(e_0a+\overrightarrow{e_2}\mathrm{b})\to\binom{a}{b}$ dönüşümü $\mathbb{C}$ - izomorfizma olduğundan;

$v_i\in K\Rightarrow F_1(v_i)=\tilde{v}_\mathrm{i}\in\mathbb{C}^2$ olur.

$v_i=gu_i\quad i=1,2,\ldots,m$ eşitliğine F_1 dönüşümünü uygularsak;

$F_1(v_i)=F_1(gu_i)$ olur.

W : M$(\mathcal{K},\mathbb{C})\to$M$(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$

H $\to$ W(H)$=F_1\circ H\circ {F_1}^{-1}$ şeklinde tanımlanan W- dönüşümü $\mathbb{C}$-izomorfizma olduğundan,

$$F_1(v_i)=F_1(gu_i)$$

$$=F_1(g)(u_i)$$

$$=F_1(g){F_1}^{-1}F_1(u_i)$$

$$F_1(v_i)=(\,F_1g{F_1}^{-1})F_1(u_i)$$

$\tilde{v}_i = (F_1 g F_1^{-1})\tilde{u}_i$ bulunur.

Burada $F_1 g F_1^{-1} = F$ olarak alırsak, Önerme 31' den $F \in SU(2)$' dir.
Böylece $\tilde{v}_i = F\tilde{u}_i \quad i = 1,2,\dots,m$ olacak şekilde bir $F \in SU(2)$ vardır.
Dolayısıyla $\{\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \dots, \widetilde{u_m}\} \sim \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \dots, \widetilde{v_m}\}(SU(2))$ olur.

(:⇐) $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \dots, \tilde{u}_m\} \sim \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots, \tilde{v}_m\}(SU(2))$ olsun.
O halde $\tilde{v}_i = F\tilde{u}_i$, $i = 1,2,\dots,m$ olacak şekilde bir $F \in SU(2)$ vardır.
$\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$ olduğunu göstermek için $v_i = g u_i$ $i = 1,2,\dots,m$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{K}_1$ olduğunu göstermeliyiz:

$F_1^{-1} : \mathbb{C}^2 \to K$

$\binom{a}{b} \to (e_0 a + \overrightarrow{e_2} b)$ dönüşümü $\mathbb{C}$- izomorfizma olduğundan

$F_1^{-1}(\tilde{v}_i) = v_i \in \mathcal{K}$ ve $F_1^{-1}(\tilde{u}_i) = u_i \in \mathcal{K}$ 'dır.

$\tilde{v}_i = F\tilde{u}_i, i = 1,2,\dots,m$ eşitliğine F_1^{-1} $\mathbb{C}$- izomorfizma dönüşümünü uygularsak;

$F_1^{-1}(\tilde{v}_i) = F_1^{-1}(F\tilde{u}_i)$

$F_1^{-1}(\tilde{v}_i) = F_1^{-1}(F)F_1^{-1}(\tilde{u}_i)$, $F \in SU(2)$

$v_i = F_1^{-1} F F_1 F_1^{-1}(\tilde{u}_i)$, $F_1^{-1} F F_1 = g$ olarak alırsak, Önerme 31' den $g \in \mathcal{K}_1$ olur.

Böylece $v_i = g u_i$, $i = 1,2,\dots,m$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{K}_1$ vardır.
Dolayısıyla $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$ bulunur. ♦

2.4. $\mathcal{K}_1$- Denklik Probleminin Çözümü

Teorem 8: $u, v \in \mathcal{K}$ olmak üzere; $u \sim v(\mathcal{K}_1)$'dir ⟺ $\|u\|=\|v\|$'dir.

İspat: (⇒:) $u \sim v(\mathcal{K}_1) \Rightarrow v = gu$ olacak şekilde $\exists g \in \mathcal{K}_1$ vardır.

$\|v\| = \|gu\| \Rightarrow \|v\| = \|g\|\|u\|$, $g \in \mathcal{K}_1$ olduğundan $\|g\| = 1$ olacağından $\|v\| = \|u\|$ elde edilir.

(:⇐)$\|u\|=\|v\|$ olsun. Gösterelim ki $u \sim v(\mathcal{K}_1)$' dir.
$u = 0 \Rightarrow \|u\|=\|v\|$ olduğundan $v = 0$ olur ki bu da $u \sim v(\mathcal{K}_1)$'dir.

$u \neq 0 \Rightarrow \|u\|=\|v\|$ olduğundan $v \neq 0$' dır.

$u \sim v(\mathcal{K}_1)$ olduğunu göstermek için $v = gu$ olacak şekilde $\exists g \in \mathcal{K}_1$ olduğunu göstermeliyiz:

$v = gu \Rightarrow u \in \mathcal{K} \Rightarrow u^{-1} \in \mathcal{K}$ mevcuttur.

Eşitliğin her iki tarafını sağdan u^{-1} ile çarparsak;

$v \cdot u^{-1} = g \Rightarrow \|g\| = \| \ v \cdot u^{-1}\| = \|v\| \cdot \ \|u^{-1}\| = \frac{\|v\|}{\|u\|}$,

$\|u\|=\|v\|$ olduğundan;

$$\|g\| = \| \ v \cdot u^{-1}\|$$

$$= \|v\| \cdot \ \|u^{-1}\| = \frac{\|v\|}{\|u\|} = 1$$

$\Rightarrow \|g\| = 1 \Rightarrow g \in \mathcal{K}_1$

$\Rightarrow u \sim v(\mathcal{K}_1)$ olur. ♦

Önerme 32: $\mathcal{K}$'da $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ve $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$- m'liler sistemleri verilsin öyle ki

$\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$ olsun. Bu taktirde $u_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$'dır.

İspat: $(\Rightarrow:)\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$ olduğundan $v_i = gu_i$, $i = 1,2, \dots, m$ olacak şekilde $\exists g \in \mathcal{K}_1$. $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = gu_1$'de $v_1 = g.0$, $g \in \mathcal{K}_1$ olduğundan $v_1 = 0$ olur.

$(:\Leftarrow)$ $v_1 = 0$ olsun. O halde $v_i = gu_i$, $i = 1,2, \dots, m$ eşitliğinde $0 = gu_1$ 'den $g \in \mathcal{K}_1$ olduğundan $g^{-1} \in \mathcal{K}_1$ mevcuttur. $0 = gu_1$ eşitliğinin her iki tarafını soldan g^{-1} ile çarparsak ;

$g^{-1} \cdot 0 = g^{-1} \cdot gu_1 \Rightarrow g^{-1} \cdot 0 = u_1 \Rightarrow u_1 = 0$ olduğu elde edilir. ♦

Önerme 33: $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in \mathcal{K}^m$ sistemleri verilsin öyle ki $u_1 = v_1 = 0$ olsun. Bu taktirde;

$u \sim v(\mathcal{K}_1) \Leftrightarrow \{u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$'dir.

İspat: $(\Rightarrow:)\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$ ve $u_1 = v_1 = 0$ olsun. Bu taktirde $v_i = gu_i$, $i = 1,2, \dots, m$ olacak şekilde $g \in \mathcal{K}_1$ vardır. Buradan $v_i = gu_i$, $i = 2, \dots, m$ olacak şekilde $g \in \mathcal{K}_1$ vardır yani;

$\{u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$'dir.

(:⇐) $\{u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1) \Rightarrow v_i = g u_i \quad , \quad i = 2, \dots, m$ olacak şekilde $\exists g \in \mathcal{K}_1$ vardır. Diğer taraftan $u_1 = v_1 = 0$ olduğundan $v_1 = g u_1$ eşitliğinde $v_1 = 0 = g.0$ olacağından $\exists g \in \mathcal{K}_1$ mevcuttur. O halde $u_1 \sim v_1(\mathcal{K}_1)$'dır. Dolayısıyla $v_i = g u_i$, $i = 1, \dots, m$ olacak şekilde $\exists g \in \mathcal{K}_1$ var olduğundan;

$\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_m\}(\mathcal{K}_1)$'dır. ♦

Sonuç: Eğer $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in \mathcal{K}^m$ öyleki $u_1 = 0$ ve $v_1 \neq 0$ ise u ve v sistemler $\mathcal{K}_1$ −denk olamaz. Benzer şekilde $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in \mathcal{K}^m$ öyleki $u_1 \neq 0$ ve $v_1 = 0$ ise u ve v sistemler $\mathcal{K}_1$ −denk olamaz.

İspat: Önerme 32 yardımıyla ispatlanır.

Önerme 33 gösterdi ki eğer, $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ve $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistemlerinde $u_1 = v_1 = 0$ ise bu sistemlerin $\mathcal{K}_1$- denklik problemi m-1- lilerin $\mathcal{K}_1$- denklik problemine iniyor. Bu ise tümevarım yöntemiyle incelenebilir. Böyle sistemlerin $\mathcal{K}_1$- denklik probleminin incelenmesi $u_1 \neq 0$ ve $v_1 \neq 0$ durumuna iniyor. Şimdi böyle özellikli sistemlerin $\mathcal{K}_1$- denklik problemini inceleyelim:

Teorem 9: $m \geq 2$ olsun. $u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \in \mathcal{K}^m$ sistemleri verilsin öyle ki $u_1 \neq 0$ ve $v_1 \neq 0$ olsun. Bu taktirde;

$u \sim v(\mathcal{K}_1) \Leftrightarrow \|u_1\| = \|v_1\|, {u_1}^{-1} \cdot u_i = {v_1}^{-1} \cdot v_i$ i=2,3,…,m.

İspat : (⇒:) $u \sim v(\mathcal{K}_1)$ olsun. O halde

$v_i = g u_i$, i=1,2,…,m …(1)

olacak şekilde $\exists g \in \mathcal{K}_1$ vardır. (1)'den;

$v_1 = g u_1$…(2)

$\Rightarrow \|v_1\| = \|g u_1\| = \|g\| \cdot \|u_1\|$, $g \in \mathcal{K}_1$ olduğundan $\|g\| = 1$'den

$\Rightarrow \|v_1\| = \|u_1\|$ olur.

(2)'den $u_1 \neq 0$ olduğundan ${u_1}^{-1} \in \mathcal{K}$ mevcuttur. (2) eşitliğinin her iki tarafını sağdan ${u_1}^{-1}$ ile çarparsak;

$v_1 \cdot {u_1}^{-1} = g u_1 \cdot {u_1}^{-1} \Rightarrow g = v_1 \cdot {u_1}^{-1}$ olur.

(1)'den $v_i = g u_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ olduğundan;

$v_i = v_1 \cdot {u_1}^{-1} u_i$, i=2,3,…,m….(3) olur.

$v_1 \neq 0$ olduğundan ${v_1}^{-1} \in \mathcal{K}$ mevcuttur.

(3)'ün her iki tarafını soldan v_1^{-1} ile çarparsak;

$v_1^{-1} \cdot v_i = v_1^{-1} \cdot v_1 \cdot u_1^{-1} u_i$

$\Rightarrow v_1^{-1} \cdot \ v_i = u_1^{-1} u_i$, i=2,3,…,m elde edilir.

(:⇐) $u = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ öyle ki $\|u_1\| = \|v_1\|$, $u_1^{-1} \cdot u_i \ = v_1^{-1} \cdot v_i$, , i=2,3,…,m …(4) olsun.

$\|u_1\| = \|v_1\|$ olduğundan Teorem 8'den $v_1 = g u_1$ olacak şekilde $\exists g \in \mathcal{K}_1$. Bu eşitlikten ve (4)'ten;

$(g u_1)^{-1} \cdot v_i = u_1^{-1} \cdot u_i$, $\ \mathrm{i} = 2,3, \dots, \mathrm{m}$.

$\Rightarrow u_1^{-1} \cdot g^{-1} \cdot v_i = u_1^{-1} \cdot u_i$, $\ \mathrm{i} = 2,3, \dots, \mathrm{m}$…(5)

$\mathrm{u}_1 \neq 0$ olduğundan (5) eşitliğinin her iki tarafını soldan u_1 ile çarparsak;

$g^{-1} \cdot v_i = u_i$, $\ \mathrm{i} = 2,3, \dots, \mathrm{m}$…(6)

(6) eşitliğinin her iki tarafını soldan $g \in \mathcal{K}_1$ ile çarparsak;

$v_i = g\, u_i$, $\ \mathrm{i} = 2,3, \dots, \mathrm{m}$.

$\Rightarrow u \sim v(\mathcal{K}_1)$ elde edilir. ♦

2.5. SU(2) – Probleminin Çözümü

Teorem 10: $\mathbb{C}^2$'deki $\{\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_2 \dots, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\}$ ve $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots, \tilde{v}_\mathrm{m}\}$ vektör sistemleri öyleki $\tilde{\mathrm{u}}_1 \neq 0$ ve $\tilde{v}_1 \neq 0$ olsun. Bu taktirde,

$\{\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_2 \dots, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\} \sim \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots, \tilde{v}_\mathrm{m}\}(\mathrm{SU}(2)) \quad \Leftrightarrow (\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}) = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i})$ ve $[\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}] = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i}]$ $i = 2,3, \dots m$'dir.

İspat :(⇔) $\tilde{\mathrm{u}}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathrm{u}}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m} = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}$

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}, \dots, \tilde{v}_\mathrm{m} = \begin{pmatrix} z_m \\ w_m \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$u_1 = e_0 x_1 + e_2 y_1, u_2 = e_0 x_2 + e_2 y_2, \dots, u_m = e_0 x_m + e_2 y_m$ ve

$v_1 = e_0 z_1 + e_2 w_1,\ v_2 = e_0 z_2 + e_2 w_2, \dots, v_m = e_0 z_m + e_2 w_m$

şeklinde yazılır ki;

teorem 7'e göre, $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\}(\mathcal{K}_1) \Leftrightarrow$

$\{\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_2 \dots, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\} \sim \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots, \tilde{v}_\mathrm{m}\}(\mathrm{SU}(2))$.

Önerme 29'daki $F_1: K \to \mathbb{C}^2$ dönüşümü izomorfizma olduğundan, $\tilde{\mathrm{u}}_1 \neq 0$ ve $\tilde{v}_1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{u}_1 \neq 0$ ve $v_1 \neq 0$ 'dır. Teorem 9'dan, $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\}(K_1) \Leftrightarrow \|u_1\| = \|v_1\|$ ve ${v_1}^{-1} \cdot v_i = {u_1}^{-1} \cdot u_i$ i=2,3,…,m olduğundan;
$\{\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_2 \dots, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\} \sim \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots, \tilde{v}_\mathrm{m}\}(\mathrm{SU}(2)) \Leftrightarrow \|u_1\| = \|v_1\|$ ve ${v_1}^{-1} \cdot v_i = {u_1}^{-1} \cdot u_i$ i=2,3,…,m'dir.

Şimdi gösterelim ki,

$\|u_1\| = \|v_1\|$ ve ${v_1}^{-1} \cdot v_i = {u_1}^{-1} \cdot u_i$ i=2,3,…,m $\Leftrightarrow$

$(\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}) = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i})$ ve $[\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}] = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i}]$ $i = 2,3, \dots m$'dir.

$\|u_1\| = \|v_1\| \Leftrightarrow \|u_1\| = |x_1|^2 + |y_1|^2 = (\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_1)$

$\|v_1\| = |z_1|^2 + |w_1|^2 = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_1)$

$\|u_1\| = \|v_1\| \Leftrightarrow (\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_1) = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_1)$' dir.

${v_1}^{-1} \cdot v_i = {u_1}^{-1} \cdot u_i$ i=2,3,…,m eşitliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned}
{u_1}^{-1} \cdot u_i &= (e_0 x_1 + e_2 y_1)^{-1} . (e_0 x_i + e_2 y_i) \\
&= \frac{\overline{(e_0 x_1 + e_2 y_1)}}{|x_1|^2 + |y_1|^2} . (e_0 x_i + e_2 y_i) \\
&= \frac{(e_0 \overline{x_1} - e_2 y_1).(e_0 x_i + e_2 y_i)}{|x_1|^2 + |y_1|^2} \\
&= \frac{\overline{x_1} x_i - e_2 y_1 x_i + \overline{x_1} e_2 y_i - e_2 y_1 e_2 y_i}{|x_1|^2 + |y_1|^2} \\
&= \frac{\overline{x_1} x_i + \overline{y_1} y_i - e_2 y_1 x_i + e_2 x_1 y_i}{|x_1|^2 + |y_1|^2} \\
&= \frac{(\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}) + e_2 [\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}]}{\|u_1\|} \quad \dots(1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
{v_1}^{-1} \cdot v_i &= (e_0 z_1 + e_2 w_1)^{-1} \cdot (e_0 z_i + e_2 w_i) \\
&= \frac{\overline{(e_0 z_1 + e_2 w_1)}}{|z_1|^2 + |w_1|^2} \cdot (e_0 z_i + e_2 w_i) \\
&= \frac{(e_0 \overline{z_1} - e_2 w_1).(e_0 z_i + e_2 w_i)}{|z_1|^2 + |w_1|^2} \\
&= \frac{\overline{z_1} z_i + \overline{w_1} w_i - e_2 w_1 z_i + \overline{z_1} e_2 w_i}{|z_1|^2 + |w_1|^2} \\
&= \frac{(\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i}) + e_2 (z_1 w_i - w_1 z_i)}{|z_1|^2 + |w_1|^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}})+e_2[\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}}]}{\|v_1\|} \quad \ldots(2)$$

${v_1}^{-1} \cdot v_i = {u_1}^{-1} \cdot u_i$, i=2,3,…,m ve $\|u_1\| = \|v_1\|$ eşitliklerinden

$\frac{(\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}})+e_2[\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}}]}{\|u_1\|} = \frac{(\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}})+e_2[\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}}]}{\|v_1\|}$ olur.

$\frac{(\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}})+e_2[\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}}]}{\|u_1\|} = \frac{(\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}})+e_2[\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}}]}{\|v_1\|} \Leftrightarrow (\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}}) = (\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}})$ ve $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}}] = [\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}}]$ i=2,3,…,m

olduğu elde edilir.

Böylece,

$\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2 \ldots,\tilde{u}_{\mathrm{m}}\} \sim \{\tilde{v}_1,\tilde{v}_2 \ldots,\tilde{v}_{\mathrm{m}}\}(\mathrm{SU}(2)) \quad \Leftrightarrow (\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}}) = (\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}})$ ve $[\tilde{u}_1,\tilde{u}_{\mathrm{i}}] = [\tilde{v}_1,\tilde{v}_{\mathrm{i}}]$
$i = 2,3, \ldots m$’dir. ♦

3. BULGULAR

Tezde elde edilen bulguları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

1. $\mathbb{K}$-uzayında $x, y \in \mathcal{K}_1$ olmak üzere $T_{e_0 x+\overrightarrow{e_2} y} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{x} & -\bar{\mathrm{y}} \\ \mathrm{y} & \bar{\mathrm{x}} \end{pmatrix}$ olduğu önerme 24 ile gösterilmiştir.

2. $\forall\, x \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{e_2}^2 = -1$ olmak üzere $x\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}\bar{x}$ olduğu önerme 25 ile gösterilmiştir.

3. $\forall \mathrm{q} \in \mathcal{K}$ için $q = e_0 x + \overrightarrow{e_2} y$ $(x, y \in \mathbb{C})$ olmak üzere $\|q\| = \|e_0 x + \overrightarrow{e_2} y\| = |x|^2 + |y|^2$ şeklinde olduğu önerme 26 ile gösterilmiştir.

4. A= $\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ matrisi üniter matristir.$\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{C}$ öyle ki $|x|^2 + |y|^2 = 1$ olduğu önerme 27 ile gösterilmiştir.

5. $F_1 : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2$ dönüşümünün $\mathbb{C}$ - izomorfizma olduğu önerme 29 ile gösterilmiştir.

6. ${F_1}^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \mathcal{K}$ dönüşümünün $\mathbb{C}$ - izomorfizma olduğu önerme 30 ile gösterilmiştir.

7. $F_1 : \mathcal{K} \to \mathbb{C}^2$ dönüşümü $\mathbb{C}$ - izomorfizma olmak üzere; $H : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ $\mathbb{C}$- lineerdir.$\Leftrightarrow$ $F_1 \circ H \circ {F_1}^{-1} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$ -lineerdir olduğu teorem 4 ile gösterilmiştir.

8. W : M($\mathcal{K}$, $\mathbb{C}$) →M($\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$) dönüşümünün $\mathbb{C}$ - izomorfizma olduğu teorem 5 ile gösterilmiştir.

9. W : M($\mathcal{K}$, $\mathbb{C}$) →M($\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$) dönüşümünün $\mathbb{C}$ -cebir izomorfizması olduğu teorem 6 ile gösterilmiştir.

10. Ψ: $\mathcal{K}_1$→SU(2)

$$q = e_0 x + \overrightarrow{e_2} y \to \Psi(\mathrm{q}) = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$$

dönüşümü grup izomorfizması olduğu önerme 31 ile gösterilmiştir.

11. $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\}(\mathcal{K}_1)$. $\Leftrightarrow$ $\{\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \dots, \widetilde{u_m}\} \sim \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \dots, \widetilde{v_m}\}$(SU(2)) olduğu teorem 7 ile gösterilmiştir.

12. $\mathcal{K}$'da $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\}$ ve $\{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\}$- m'liler sistemleri verilsin öyle ki $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\}(\mathcal{K}_1)$ olsun. Bu taktirde $\mathrm{u}_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$ olduğu önerme 32 ile gösterilmiştir.

13. $u, v \in \mathcal{K}$ olmak üzere; $u \sim v(\mathcal{K}_1)'\mathrm{dir.} \Leftrightarrow$ $\|u\|=\|v\|$ olduğu teorem 8 ile gösterilmiştir.

14. $u = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ sistemleri verilsin öyle ki $\mathrm{u}_1 = v_1 = 0$ olsun. Bu taktirde;

$u \sim v(\mathcal{K}_1) \Leftrightarrow \{\mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_2, \dots, v_\mathrm{m}\}(\mathcal{K}_1)$ olduğu önerme 33 ile gösterilmiştir.

15. $\mathrm{m} \geq 2$ olsun. $u = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \dots, v_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ sistemleri verilsin öyle ki $\mathrm{u}_1 \neq 0$ ve $v_1 \neq 0$ olsun. Bu taktirde;
$u \sim v(\mathcal{K}_1) \Leftrightarrow \|u_1\| = \|v_1\|$, ${u_1}^{-1}.u_i = {v_1}^{-1}.v_i$ i=2,3,…,m. olduğu teorem 9 ile gösterilmiştir.

16. $\mathbb{C}^2$'deki $\{\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_2 \dots, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\}$ ve $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots, \tilde{v}_\mathrm{m}\}$ vektör sistemleri öyleki $\tilde{\mathrm{u}}_1 \neq 0$ ve $\tilde{v}_1 \neq 0$ olsun. Bu taktirde;
$\{\widetilde{\mathrm{u}_1}, \widetilde{\mathrm{u}_2}, \dots, \widetilde{\mathrm{u}_\mathrm{m}}\} \sim \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \dots, \widetilde{v_m}\}(\mathrm{SU}(2)) \Leftrightarrow (\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}) = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i})$ ve $[\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}] = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i}]$ $i = 2,3, \dots m.$ olduğu teorem 10 ile gösterilmiştir.

4. İRDELEME

H. H. Hacısalihoğlu'nun 1983'te yayınladığı kitabında [9] reel kuaternionlar üzerinde temel işlemler tanımlanmış, dört birimle oluşturulan kuaternion sayısının kompleks sayılar yardımıyla iki boyutta yazılabileceği gösterilmiştir. İki vektörün kuaternion çarpımı vektörlerin iç çarpımı ve vektörel çarpımı yardımıyla ifade edilmiştir. Kuaternion vektör uzayında tanımlanan bir dönüşüm yardımıyla her kuaterniona kompleks sayılar cismi üzerinde 2×2- tipindeki matrisler karşılık getirilmiştir. Bu tezin genel bilgiler kısmında kuaternion cebirine ait tüm temel işlemler genelleştirilerek ispatları ayrıntılı olarak verildi. Ayrıca kompleks sayılar yardımıyla iki boyutta yazılan her kuaterniona karşılık gelen 2×2- tipindeki matrisin genel ifadesi önerme şeklinde ifade edilip ispatlandı.

Gülistan Kaya'nın yüksek lisans tezinde [11] $O(n), SO(n), Iz(n)$ ve $SIz(n)$ grupları için G −denklik tanımları verilmiştir ve denklik problemleri önerme ve teoremlerle çözülmüştür. Hazırlanan bu tezde ise $\mathbb{C}^2$- uzayında noktalar sisteminin $SU(2)$ −denklik problemi ve kuaternion vektör uzayında $\mathcal{K}_1$- denklik problemi tanımları verildi. $SU(2)$ −denklik problemi ve $\mathcal{K}_1$- denklik problemi çözüldü.

Hüsnü Anıl Çoban'nın yüksek lisans tezinde [5] üniter uzaydaki izometriler ve reel uzaydaki izometriler arasındaki bağlantılar incelenmiştir. Hazırlanan bu tezde ise $\mathbb{C}^2$- uzayında noktalar sisteminin determinantı bir olan bütün üniter matrislerin oluşturduğu gruba göre denklik problemi ile kuaternion vektör uzayında normu bir olan kuaternionların oluşturduğu gruba göre denklik problemi arasındaki bağlantılar incelendi.

Yapılan bu çalışmayla kuaternionlar uzayından $\mathbb{C}^2$- uzayına tanımlanan $\mathbb{C}$ -izomorfizma yardımıyla her kuaterniona karşılık $\mathbb{C}^2$- uzayında bir vektör karşılık getirildi. Normu bir olan kuaternionlar grubu ile $\mathbb{C}^2$- uzayında deteminantı bir olan üniter matrisler grubu arasında tanımlanan dönüşümün grup izomorfizması olduğu gösterildi. Bu sonuç kullanılarak $\mathbb{C}^2$- uzayında noktaların $SU(2)$ −denklik problemi ile kuaternionlar uzayında normu bir olan kuaternionların denklik problemi arasında bağlantılar bulundu. Böylece çözümü zor ve zaman alan $\mathbb{C}^2$- uzayında noktalar sisteminin $SU(2)$ −denklik probleminin kuaternionlar uzayında normu bir olan kuaternionlar grubu yardımıyla kolaylıkla çözülebileceği görüldü.

5. SONUÇLAR

1. $\forall\, x \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{e_2}^2 = -1$ olmak üzere $x\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}\bar{x}$ olduğu önerme 25 ile gösterilmiştir.

2. A= $\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ matrisi üniter matristir.⇔$x, y \in \mathbb{C}$ öyle ki $|x|^2 + |y|^2 = 1$ olduğu önerme 27 ile gösterilmiştir.

3. Ψ: $\mathcal{K}_1$→SU(2)

$$q = e_0 x + \overrightarrow{e_2} y \rightarrow \Psi(\mathrm{q}) = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$$

dönüşümü grup izomorfizması olduğu önerme 31 ile gösterilmiştir.

4. $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \sim \{v_1, v_2, \ldots, v_\mathrm{m}\}(K_1)$. ⇔ $\{\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \ldots, \widetilde{u_m}\} \sim \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \ldots, \widetilde{v_m}\}$(SU(2)) olduğu teorem 7 ile gösterilmiştir.

5. $u, v \in \mathcal{K}$ olmak üzere; $u \sim v(\mathcal{K}_1)'\mathrm{dir.}$ ⇔ $\|\mathrm{u}\| = \|v\|$ olduğu teorem 8 ile gösterilmiştir.

6. $\mathrm{m} \geq 2$ olsun. $u = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ ve $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_\mathrm{m}\} \in \mathcal{K}^m$ sistemleri verilsin öyle ki $\mathrm{u}_1 \neq 0$ ve $v_1 \neq 0$ olsun. Bu taktirde;

$u \sim v(\mathcal{K}_1) \Leftrightarrow \|u_1\| = \|v_1\|$, $u_1{}^{-1} \cdot u_i = v_1{}^{-1} \cdot v_i$ i=2,3,…,m olduğu teorem 9 ile gösterilmiştir.

7. $\mathbb{C}^2$'deki $\{\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_2 \ldots, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{m}\}$ ve $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \ldots, \tilde{v}_\mathrm{m}\}$ vektör sistemleri öyleki $\tilde{\mathrm{u}}_1 \neq 0$ ve $\tilde{v}_1 \neq 0$ olsun. Bu taktirde;

$\{\widetilde{\mathbf{u_1}}, \widetilde{\mathbf{u_2}}, \ldots, \widetilde{\mathrm{u_m}}\} \sim \{\widetilde{v_1}, \widetilde{v_2}, \ldots, \widetilde{v_m}\}(\mathrm{SU}(2)) \Leftrightarrow (\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}) = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i})$ ve $[\tilde{\mathrm{u}}_1, \tilde{\mathrm{u}}_\mathrm{i}] = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_\mathrm{i}]$ $i = 2,3, \ldots m$. olduğu teorem 10 ile gösterilmiştir.

6. ÖNERİLER

Tezde kuaternionlar uzayında $\mathcal{K}_1$- denklik problemi basit bir yöntemle çözüldü. $\mathbb{C}^2$ - uzayında noktalar sisteminin SU(2) - denklik problemi ile kuaternionlar uzayında $\mathcal{K}_1$- denklik problemi arasında bağlantı bulundu. Bu bağlantı kullanılarak, kuaternionlar yardımıyla çözümü zor olan $\mathbb{C}^2$ - uzayında noktalar sisteminin SU(2) - denklik problemi kolaylıkla çözüldü.

Benzer şekilde $\mathbb{R}^{4n}$ ve $\mathbb{C}^{2n}$ uzaylarındaki farklı cebirsel ve geometriksel problemler $\mathcal{K}^n$- uzayındaki kuaternionların problemlerine indirgenip çözülebilir.

Kuaternion sayılarının özellikleri $\mathcal{K}^n$- uzayındaki bazı problemleri kolaylıkla çözmeye imkan vermektedir. Örneğin; $\mathbb{C}^2$ – uzayında reel homotetiler ve SU(2) ile üretilen grubu $H \times \mathrm{SU}(2)$, kuaternion uzayında normu sıfırdan farklı kuaternionlar grubunu $\mathcal{K}_2$ ile gösterelim. Tezde geliştirilen yöntemle $\mathbb{C}^2$ – uzayında noktalar sisteminin $H \times \mathrm{SU}(2)$- denklik probleminin çözümü kuaternionlar uzayında $\mathcal{K}_2$- denklik probleminin çözümüne indirgenebilir. Böylece kuaternionlar yardımıyla problem kolayca tam şekilde incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

1. Adler, S. L., Qaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press, New York, USA, 1995.

2. Ainola, L. ve Aben, H., Transformation Equations in Polarization Optics of Inhomogeneous Birefringent Media, J. Opt. Soc. Am. A., 18, 9 (2001) 2164-2170.

3. Boyle, L. L., Quaternionic Wawefunctions for Triply Degenerate States, Chemical Physics Letters, 13, 2 (1972) 331-333.

4. Chou, J. C. K., Quaternion Kinematic and Dynamic Differantial Equations, IEEE Transaction on Robotics and Automation, 8, 1(1992) 53-64.

5. Çoban, H. A., 1 ve 2 boyutlu Üniter Uzaylarda Dönüşüm Grupları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

6. Fritzer, H. P., Moleculer Symmetry with Quaternions, Spectrochimica Acta Part A, 57 (2001) 1919-1930.

7. Gibbon, J. D., Quaternionic Structure in the Three- Dimensional Euler and Ideal Magneto- Hydrodynamics Equations, Physica D, 166 (2002) 17-28.

8. Hamilton, W. R., Elements of Quaternions I, II and III. Chelsea, New York, USA, 1899.

9. Hacısalihoğlu, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 1983.

10. Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir, 3. Baskı, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 1985.

11. Kaya, G., N-boyutlu Öklid ve Ortogonal Geometrilerde Noktalar Sisteminin Denklik Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

12. Kula, L., Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2003.

13. Kutrunov, V. N., The Quaternionic Method of Regularizing Integral Equations of The Theory of Elasticity, J. Appl. Maths. Mechs., 56, 5 (1992) 765-770.

14. Negi, O. P. S. ve Bisht P. S., Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism, II Nuovo Cimento 113B, 12 (1998) 1449-1467.

15. Quine, J. R., Helix Parameters and Protein Structure Using Quaternions, Journal of Molecular Structure, 460 (1999) 53-66.

16. Sabuncuoğlu, A., Lineer Cebir, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.

17. Silva, C. C. ve Martins, R. A. , Polar and Axial Vectors Versus Quaternions, American Journal of Physics, 70, 9 (2002) 958-964.

18. Soydaş, M., Bikuaterniyonların Modern Fiziğe Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2003.

19. Şahin, N., Clifford Cebirleri ve Fiziksel Uygulamaları, Dönem Projesi, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü, Eskişehir, 2003.

20. Tanışlı, M., Özdaş K. ve Özdaş A., An Application of General Quaternion Transformation for a Robotic Position, Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dergisi, 3 (1997) 55-68.

21. Tanışlı, M., The Quaternionic Energy Conservation Equation for Acustic, Acta Physiva Slovaca, 53 (2003) 253-258.

22. Tanışlı, M., Uzaysal Dönmelerin ve Robot kollarının Pozisyonunun Kuateniyon Dönüşümleri ile İncelenmesi, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1995.

23. Tweed, D. ve Tutis, V., Implication of Rotational Kinematics for the Oculomotor System in Three Dimensions, Journal of Neurophsiology, 58, 4 (1987) 832-849.

24. Vrbik, J., Celestial Mechanics via Quaternions, Canadian Journal of Physics, 72, 3-4 (1991) 141-146.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Trabzon’da doğdu. İlköğrenimini Trabzon Pelitli Mareşal Fevzi Çakmak İlkokulu’nda, orta öğrenimini Trabzon Kanuni Ortaokulu’nda, lise öğrenimini ise Trabzon Tevfik Serdar Anadolu Lisesi’nde tamamladı.

2003-2004 eğitim-öğretim yılında Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği programında lisans eğitimine başladı. 2005-2006 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği programına yatay geçiş yaparak lisans eğitimini burada tamamladı. 2008 yılında lisans eğitiminden matematik öğretmeni unvanıyla birincilikle mezun oldu.

2008-2009 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek lisans (matematik) programına başladı. İyi derecede İngilizce bilmektedir.