KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KÜRESEL EĞRİLER VE BERTRAND EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gül GÜNER

HAZİRAN 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KÜRESEL EĞRİLER VE BERTRAND EĞRİLERİ

Matematikçi Gül GÜNER

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20/05/2011
Tezin Savunma Tarihi : 13/06/2011

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Gül GÜNER Tarafından Hazırlanan

KÜRESEL EĞRİLER VE BERTRAND EĞRİLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 24/05/2011 gün ve 1406 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/06/2011 tarihinde yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ziya YAPAR

Üye : Doç Dr. Nejat EKMEKCİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Lisans eğitimim ve sonrası süresince benden desteğini esirgemeyen, ayrıca bu çalışmanın konusu, her türlü hazırlanışı ve tamamlanmasında, şüphesiz en büyük emeğe sahip olan değerli hocam Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ'ye saygılarımı sunar, yardımları için teşekkür ederim.

Ayrıca başta Prof. Dr. Hilmi HACISALİHOĞLU, Prof. Dr. Yusuf YAYLI ve Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU olmak üzere, Ankara Üniversitesi ve Karadeniz Teknik Üniversitesi'ndeki tüm Matematik Bölümü hocalarımla Araştırma Görevlisi arkadaşlarıma, aileme ve özellikle bana daima destek olan anneme, teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Gül GÜNER

Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Küresel Eğriler ve Bertrand Eğrileri" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'nun sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 13/06/2011

Gül GÜNER

İÇİNDEKİLER

ÖZET

KÜRESEL EĞRİLER VE BERTRAND EĞRİLERİ

Gül GÜNER

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
2011, 54 Sayfa

Bu çalışmada, öncelikle 3 boyutlu Öklid uzayında düzlemsel eğrilerden silindirik helisler ve küresel eğrilerden Bertrand eğrileri elde edilebildiği gösterilmiş, burada verilen metod kullanılarak, bir eğrinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri araştırılmıştır. Ayrıca bir silindirik helisin düzlemsel evolütü ve bir küresel eğrinin küresel evolütü incelenmiştir. Öklid uzayında kullanılan metod Minkowski uzayına taşınmıştır ve 3 boyutlu Minkowski uzayında da küresel eğrilerden Bertrand eğrilerinin elde edilebildiği gösterilmiştir. Ayrıca E_1^3 uzayında bir küresel eğrinin hiperbolik evolütü incelenmiştir. Son olarak, spacelike ve timelike uzay eğrilerinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bertrand Eğrisi, Minkowski Uzayı, Küresel Evolüt, Küresel Göstergeler, Hiperbolik Evolüt.

SUMMARY

SPHERICAL CURVES AND BERTRAND CURVES

Gül GÜNER

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Yasemin SAĞIROĞLU

2010, 54 Pages

In this thesis, it is firstly shown that it can be constructed cylindrical helices from the planar curves and Bertrand curves from the spherical curves in 3 dimensional Euclidean space. By using this method, the Bertrand curves corresponding to the spherical indicatrices of a space curve, are investigated. Also, the planar evolute of a cylindrical helice and the spherical evolute of a spherical curve, are studied. The method in Euclidean space is carried to the Minkowski space and it's shown that it can be constructed Bertrand curves from the spherical curves in 3 dimensional Minkowski space, too. Also, the hyperbolic evolute of a spherical curve in E_1^3 is studied. Finally, the Bertrand curves corresponding to the spherical indicatrices of spacelike and timelike curves, are investigated.

Key Words: Bertrand Curve, Minkowski Spacetime, Spherical Evolute, Spherical Indicatrices, Hyperbolic Evolute.

SEMBOLLER DİZİNİ

E^3	: 3 boyutlu Öklid Uzayı
E_1^3	: 3 boyutlu Lorentz – Minkowski uzayı
$\langle u,u \rangle$	: Öklid İç Çarpımı
$\langle u,u \rangle_L$	: Lorentz İç Çarpımı
S_1^2	: De Sitter Uzayı
H_1^2	: Hiperbolik Uzay
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma
κ_g	: Geodezik Eğrilik
$E_{\tilde{\gamma}}(s)$	: Düzlemsel Evolüt
$e_\gamma(\sigma)$	: Küresel Evolüt
$HE_\gamma(\sigma)$	: Hiperbolik Evolüt
h_u^T	: Hiperbolik Timelike Yükseklik Fonksiyonu
h_u^S	: Hiperbolik Spacelike Yükseklik Fonksiyonu
$PS^1(u_0,r)$	: Pseudo Çember

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Klasik geometride özel eğriler olarak bilinen silindirik helisler ve Bertrand eğrileri, dairesel helislerin farklı genelleştirmeleridir. Bu eğriler, her ne kadar özel eğriler olarak adlandırılsalar da, uzay eğrilerinin büyük bir sınıfını oluştururlar. S. Izumiya'nın [1] ile verilen çalışmasında, üç boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısı ve bir eğrinin eğrilik ve burulması kullanılarak, düzlemsel bir eğriden silindirik helis ve küresel bir eğriden Bertrand eğrisi elde edilebildiği gösterilmiştir. Bu çalışmaya göre, Öklid uzayında, tüm silindirik helisler ve tüm Bertrand eğrileri bu metodla üretilebilmektedir. Ayrıca bir silindirik helisin düzlemsel evolütü ve bir küresel eğrinin küresel evolütü kavramları tanımlanarak, bir küresel eğriye karşılık gelen Bertrand eğrisinin küresel Darboux göstergesi ile bu eğrinin küresel evolütünün eşit olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada, öncelikle üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri hesaplanmış, daha sonra Izumiya'nın vermiş olduğu metod, üç boyutlu Minkowski uzayına taşınmıştır. Spacelike ve timelike eğrilerin Hiperbolik Evolütü'nden bahsedilmiş, ayrıca bu eğrilerin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri de hesaplanmıştır.

Ünlü matematikçi Hermann Minkowski'den sonra Minkowski Uzay – Zamanı diye anılan uzay – zaman (spacetime) kavramı , temelinde Albert Einstein'ın 1905 yılında ortaya koyduğu Özel Görelilik teorisine dayanmaktadır. Buna göre, uzay – zamanı tanımlamak için, uzayın üç boyutu ile zamanın tek boyutu birleşerek dört boyutlu bir manifold oluşturmaktadır. Minkowski 1908 yılında, dört boyutlu bir afin koordinat sisteminde uzay ve zamanı dört değişken (x,y,z,t) ile ifade etmiştir ve eski öğrencisi Albert Einstein'ın sınırlı görelilik kavramına, bugün klasikleşmiş bir geometrik yorum getirmiştir. Bununla ilgili olarak Minkowski'nin şu sözleri tarihte yerini almıştır:

"Bundan sonra, kendi başına uzay ve kendi başına zaman gölgelerde yitmeye mahkumdur; yalnızca, ikisinin bir cins birliği bağımsız bir gerçeği koruyacaktır."

1.2. E^3 de Temel Tanımlar

Tanım 1.2.1. $x, y \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\langle x, y\rangle$ Öklid iç çarpımını göstersin. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için, $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ ve $\gamma'(t) \neq 0$ olmak üzere $t_0 \in I$ için γ eğrisinin *yay uzunluğu*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t)\| dt$$

ile verilir. Bu durumda s parametresi *yay parametresi* olup, $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$ olmak üzere, $\|\gamma'(s)\| = 1$ olacak şekilde tanımlanır ve γ eğrisi *yay parametresi ile parametrelendirilmiştir* denir. $T(s) = \gamma'(s)$ vektörüne γ eğrisinin s noktasındaki *birim teğet vektörü* denir. γ eğrisinin eğriliği ise $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ şeklinde tanımlanır. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ ise γ eğrisinin *asli normal vektörü* $N(s)$, $\gamma''(s) = \kappa(s)N(s)$ ifadesi ile verilir. $B(s) = T(s) \times N(s)$ birim vektörü de γ eğrisinin s noktasındaki *binormal vektörü* olarak adlandırılır. Bu durumda, $\tau(s)$ γ eğrisinin s noktasındaki burulması olmak üzere Frenet formülleri

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$
$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$
$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

ile verilir [1].

Tanım 1.2.2. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

vektörüne *Darboux* vektörü denir. $d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$ vektörüne ise γ eğrisinin *Darboux Göstergesi* denir. Bu vektör aslında $\{T, N, B\}$ üç ayaklısının her s anında bir ani helis hareketi yaptığı eksendir [2].

Tanım 1.2.3. $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin her s noktasında teğet doğruları sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyor ise, γ eğrisine *silindirik helis* denir.

Teorem 1.2.1. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi bir silindirik helistir $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ değeri sabit ise $[2]$.

Tanım 1.2.4. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ifadelerinin her ikisi de sabitse γ eğrisine *dairesel helis* denir $[2]$.

Tanım 1.2.5. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ve $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ eğrileri verilsin. α eğrisinin Frenet üç ayaklısı $\{T, N, B\}$ ve β eğrisinin Frenet üç ayaklısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\{N, N^*\}$ ikilisi lineer bağımlı oluyorsa (α, β) ikilisine *Bertrand* eğri çifti denir $[2]$.

Teorem 1.2.2. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir *Bertrand* eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart, $\exists A, B \in \mathbb{R}$ için $A\kappa + B\tau = 1$ olmasıdır $[2]$.

Tanım 1.2.6. E^{n+1} de

$$S^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{\,2} = r^2 \right\}$$

kümesine *n boyutlu hiperküre* denir $[2]$.

Tanım 1.2.7. S^n hiperküresi için bir γ eğrisi $\gamma : I \to S^n$ olacak şekilde tanımlanıyorsa, γ eğrisine *küresel eğri* denir $[2]$.

Teorem 1.2.3. Bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. $s_0 \in I$ ve $\kappa(s) > 0$ için

$$\alpha(0) = \gamma(s_0), \alpha'(0) = \gamma'(s_0), \alpha''(0) = \gamma''(s_0)$$

olacak şekilde γ eğrisine ikinci basamaktan değen bir tek α çemberi vardır ve bu çembere γ eğrisinin *eğrilik çemberi* denir. Bu çemberin merkezi ve yarıçapı

$$c = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} N(s_0)$$

$$r = \frac{1}{\kappa(s_0)}$$

dır $[2]$.

Tanım 1.2.8. Bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile $\gamma(s)$ noktasında sonsuz yakın 4 ortak noktası bulunan küreye *oskülatör küre* veya *eğrilik küresi* denir $[2]$.

Tanım 1.2.9. E^3 de bir γ eğrisinin teğetleri, γ^* ile verilen bir başka eğrinin normalleri oluyorsa , γ^* eğrisine γ eğrisinin *involütü*, γ eğrisine de γ^* eğrisinin *evolütü* denir $[2]$.

Teorem 1.2.4. Bir γ düzlem eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri, γ eğrisinin evolütünü verir ve

$$e_\gamma(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s)$$

ile tanımlanır $[2]$.

1.3. 3-Boyutlu Lorentz - Minkowski Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 1.3.1. E^3 3 boyutlu Öklid uzayı olmak üzere, $\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ için Lorentz anlamında iç çarpım, $\langle u, v \rangle_L = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$ ile tanımlanır. Bu durumda $\left(E^3, \langle , \rangle_L\right)$ ikilisine 3 boyutlu *Lorentz - Minkowski* uzayı denir ve E_1^3 ile gösterilir $[3]$.

Tanım 1.3.2. $u \in E_1^3$ olmak üzere eğer, $\langle u, u \rangle_L > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörüne *spacelike vektör*, $\langle u, u \rangle_L < 0$ ise *timelike* vektör ve $u \neq 0$ olmak üzere $\langle u, u \rangle_L = 0$ ise *lightlike* (*null*) vektör denir. E_1^3 uzayının tüm lightlike vektörlerinin kümesi,

$$C_1 = \left\{(u_1, u_2, u_3) \in E_1^3 \mid u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0\right\} - \left\{(0,0,0)\right\}$$

konisidir. Bütün timelike vektörlerin kümesi ise C_1 konisinin içini gösterir. Benzer şekilde C_1 konisinin dışı ve $(0,0,0)$ noktası da tüm spacelike vektörlerin kümesini gösterir $[4]$.

Önerme 1.3.1. $u, v \in E_1^3$ vektörleri için,

1. Her ikisi de lightlike vektör ise, bu vektörlerin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart $\langle u, v \rangle_L = 0$ olmasıdır.

2. $u, v \in E_1^3$ vektörlerinin her ikisi de timelike vektör ise $\langle u, v \rangle_L \neq 0$ dır $[4]$.

Tanım 1.3.3. Bir $u \in E_1^3$ vektörünün Lorentz anlamında normu, $\|u\| = \sqrt{\left|\langle u, u \rangle_L\right|}$ olarak tanımlanır $[4]$.

Tanım 1.3.4. $u,v \in E_1^3$ vektörleri için Lorentz anlamında vektörel çarpım,

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ile verilir $[4]$.

Teorem 1.3.1. $u,v \in E_1^3$ aynı timelike koni üzerinde iki vektör olsun. Bu durumda

$$\langle u,v \rangle_L = -\|u\|\|v\| \cosh\varphi$$

olacak şekilde bir tek $\varphi > 0$ sayısı vardır ve bu sayıya u ile v arasındaki *hiperbolik açı* denir $[4]$.

Önerme 1.3.2. $U \subset E_1^3$ bir altuzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özelikler mevcuttur;

1. U spacelike bir altuzay ise buradaki tüm vektörler spacelike olmalıdır.

2. U timelike bir altuzay ise içinde en az bir timelike vektör bulunmalıdır.

3. U lightlike bir altuzay ise içinde timelike vektör yoktur $[4]$.

Önerme 1.3.3. $U \subset E_1^3$ bir altuzay olsun. $U^\perp$ uzayı aşağıdaki özelikleri sağlar;

1. U spacelike bir altuzay ise $U^\perp$ timelike altuzaydır.

2. U timelike bir altuzay ise $U^\perp$ spacelike altuzaydır.

3. U lightlike bir altuzay ise $U^\perp$ lightlike altuzaydır $[4]$.

Tanım 1.3.5. $m = (m_1, m_2, m_3)$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, E_1^3 de bir hiperboloid ve bir küre sırasıyla

$$H_1^2(r)_m = \left\{ u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u-m, u-m \rangle_L = -r^2 \right\}$$

$$S_1^2(r)_m = \left\{ u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u-m, u-m \rangle_L = r^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda orjin merkezli birimküre için kısaca $S_1^2 = S_1^2(1)_0$ ve $H_1^2 = H_1^2(1)_0$ gösterimleri kullanılacaktır $[3]$.

1.4. E_1^3 Uzayında Eğriler

Tanım 1.4.1. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisi için üç durum mevcuttur. $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ hız vektörleri spacelike, timelike ya da null vektörler ise $\alpha = \alpha(t)$ eğrisine sırasıyla, spacelike, timelike ya da null(lightlike) eğri denir. Ancak α eğrisi I aralığının her yerinde aynı karakteri taşımayabilir $[4]$.

Örnek 1.4.1. $\alpha(t) = (\cosh t, t^2, \sinh t)$ eğrisi göz önüne alındığında, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 4t^2 - 1$ olur. Bu durumda α eğrisi $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ aralığında spacelike, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aralığında timelike ve $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ noktalarında null (lightlike) olur $[4]$.

Örnek 1.4.2. $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$ eğrisi spacelike düzlem içerisinde yatan spacelike bir eğridir. Gerçekten, $\alpha(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0)$ olduğundan $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = r^2 > 0$ olur. Ayrıca $z = 0$ düzleminin normali olan $N = (0,0,1)$ vektörü timelike olduğundan, bu düzlem spacelike düzlemdir. Dolayısıyla α eğrisi spacelike düzlem içerisinde yatan spacelike bir eğridir $[4]$.

Örnek 1.4.3. $\alpha(t) = (0, r\sinh t, r\cosh t)$ eğrisi timelike düzlem içerisinde yatan spacelike bir eğridir. Gerçekten, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = r^2 > 0$ olduğundan α eğrisi spacelike bir eğri ve $x = 0$ düzleminin normali olan $N = (1,0,0)$ vektörü spacelike olduğundan, bu düzlem timelike düzlemdir. Dolayısıyla α eğrisi timelike düzlem içerisinde yatan spacelike bir eğridir $[4]$.

Örnek 1.4.4. $\alpha(t) = (0, r\cosh t, r\sinh t)$ eğrisi timelike düzlem içerisinde yatan timelike bir eğridir. Gerçekten, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = -r^2 < 0$ olduğundan α eğrisi timelike bir eğri ve $x = 0$ düzleminin normali olan $N = (1,0,0)$ vektörü spacelike olduğundan, bu düzlem timelike düzlemdir $[4]$.

Örnek 1.4.5. $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$ eğrisi lightlike düzlem içerisinde yatan spacelike bir eğridir.

Gerçekten, $\alpha(t) = (1, 2t, 2t)$ olduğundan $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 1 > 0$ dır ve dolayısıyla α eğrisi spacelike bir eğridir. Ayrıca $y = z$ düzlemi lightlike düzlem olduğundan, α eğrisi lightlike düzlem içerisinde yatan spacelike bir eğridir [4].

Tanım 1.4.2. $t_0 \in I$ için $\alpha'(t_0) \neq 0$ ise α eğrisi t_0 da *regülerdir* denir. Eğer bu şart $\forall t \in I$ için sağlanıyorsa α ya *regüler eğri* denir [4].

Önerme 1.4.1. Herhangi bir timelike veya lightlike eğri regülerdir [4].

İspat. $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ timelike bir eğri olsun. $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ve $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L < 0$ olacağından $(x')^2(t) + (y')^2(t) - (z')^2(t) < 0$ olur. Burada $z'(t) \neq 0$ olmalıdır aksi halde $(x')^2(t) + (y')^2(t) < 0$ olur ki bu bir çelişkidir. $z'(t) \neq 0$ olduğundan $\alpha'(t) \neq 0$ olur ve bu da α eğrisinin regüler olduğunu gösterir.

Benzer şekilde $\alpha(t)$ eğrisinin lightlike bir eğri olması durumunda yine $z'(t) \neq 0$ olmak zorundadır. Gerçekten $z'(t) = 0$ olması durumunda, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L = 0$ olduğundan $(x')^2(t) + (y')^2(t) - (z')^2(t) = 0$ ve dolayısıyla $(x')^2(t) + (y')^2(t) = 0$ olur ki bu da $x'(t) = y'(t) = 0$ olması demektir. O halde $\alpha'(t) = (0,0,0)$ olacaktır. Bu ise α eğrisinin lightlike olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $z'(t) \neq 0$ olduğundan $\alpha'(t) \neq 0$ olur [4].

Tanım 1.4.2. Bir lightlike olmayan α eğrisi için $\|\alpha'(s)\| = 1$ oluyorsa, s ye α eğrisinin yay parametresi denir ve

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt$$

ile verilir [4].

Tanım 1.4.3. Yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı,

$T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ ve $B(s) = T(s) \times N(s)$ olmak üzere, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ dir [4].

Teorem 1.4.1. $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisinin timelike bir eğri olması durumunda Frenet formülleri

$$T'(s) = \kappa(s) N(s)$$

$$N'(s) = \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

ile verilir. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ifadeleri sırasıyla, α eğrisinin eğrilik ve burulmasını göstermektedir ve $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ve $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$ olarak tanımlanır $[4]$.

İspat. α eğrisi timelike bir eğri ise T birim teğet vektörü timelike vektör olur ve Frenet çatısının tanımından,

$$\langle T,T\rangle_L = -1, \langle N,N\rangle_L = \langle B,B\rangle_L = 1$$

$$\langle T,N\rangle_L = \langle T,B\rangle_L = \langle N,B\rangle_L = 0$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu durumda $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ve $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$ olduğundan,

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$= \frac{T(s)}{\kappa(s)}$$

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

dir. Ayrıca $\langle N,N\rangle_L = 1$ ve dolayısıyla $\langle N',N\rangle_L = 0$ olduğundan, N' vektörü $sp\{T,B\}$ düzlemine aittir. O halde $u_1, v_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$N'(s) = u_1 T(s) + v_1 B(s)$$

olarak yazılabilir.

$$\langle N'(s), B(s)\rangle_L = u_1 \underbrace{\langle T(s), B(s)\rangle_L}_{0} + v_1 \underbrace{\langle B(s), B(s)\rangle_L}_{1}$$

$$= v_1 = \tau(s)$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle N'(s), T(s)\rangle_L = u_1 \underbrace{\langle T(s), T(s)\rangle_L}_{-1} + v_1 \underbrace{\langle B(s), T(s)\rangle_L}_{0}$$

$$= -u_1$$

$$\langle N(s), T(s)\rangle_L = 0$$

$$\langle N'(s), T(s)\rangle_L + \underbrace{\langle N(s), T'(s)\rangle_L}_{\kappa(s)} = 0$$

$$\langle N'(s), T(s)\rangle_L = -\kappa(s)$$

$$u_1 = \kappa(s)$$

dir. Bu değerler yerine yazıldığında,

$$N'(s) = \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $\langle B, B\rangle_L = 1$ ve dolayısıyla $\langle B', B\rangle_L = 0$ olduğundan B' vektörü $sp\{T, N\}$ düzlemine aittir. O halde $u_2, v_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$B'(s) = u_2 T(s) + v_2 N(s)$$

olarak yazılabilir.

$$\langle B'(s), T(s)\rangle_L = u_2 \underbrace{\langle T(s), T(s)\rangle_L}_{-1} + v_2 \underbrace{\langle N(s), T(s)\rangle_L}_{0} = -u_2$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle B(s), T(s)\rangle_L = 0$$

$$\langle B'(s), T(s)\rangle_L + \langle B(s), T'(s)\rangle_L = 0$$

$$\langle B'(s), T(s)\rangle_L + \kappa(s)\underbrace{\langle B(s), N(s)\rangle_L}_{0} = 0$$

$$\langle B'(s), T(s)\rangle_L = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = 0$$

$$\langle B'(s), N(s)\rangle_L = u_2 \underbrace{\langle T(s), N(s)\rangle_L}_{0} + v_2 \underbrace{\langle N(s), N(s)\rangle_L}_{1} = v_2$$

$$\langle B(s), N(s)\rangle_L = 0$$

$$\langle B'(s), N(s)\rangle_L + \underbrace{\langle B(s), N'(s)\rangle_L}_{\tau(s)} = 0$$

$$\langle B'(s), N(s)\rangle_L = -\tau(s)$$

$$\Rightarrow v_2 = -\tau(s)$$

dir. Bu değerler yerine yazıldığında $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ elde edilir.

Teorem 1.4.2. $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisinin spacelike bir eğri olması durumunda Frenet formülleri için üç durum mevcuttur:

1. T' nün spacelike vektör olması durumunda Frenet formülleri

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

şeklindedir. α eğrisinin eğriliği $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ve burulması $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s)\rangle_L$ ile tanımlanır.

2. T' nün timelike vektör olması durumunda Frenet formülleri

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = \kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

şeklindedir. α eğrisinin eğriliği $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ve burulması $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$ ile tanımlanır.

3. T' nün lightlike (null) vektör olması durumunda, asli normal vektörü T ile lineer bağımsızdır ve $N(s) = T'(s)$ ile tanımlanır. B lightlike vektörü, $\langle N, B\rangle = 1$ ve T vektörüne dik olacak şekilde tek olarak belirlidir. Bu vetöre α eğrisinin s noktasındaki binormal vektörü denir. Bu durumda Frenet formülleri

$$T'(s) = N(s)$$

$$N'(s) = \tau(s)N(s)$$

$$B'(s) = -T(s) - \tau(s)B(s)$$

şeklindedir. $\tau(s)$ ifadesi α eğrisinin burulmasını göstermektedir. α eğrisinin eğriliği ise tanımsızdır $[4]$.

Teorem 1.4.3. $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisinin lightlike (null) bir eğri olması durumunda Frenet formülleri,

$$T'(s) = N(s)$$
$$N'(s) = \tau(s)T(s) - B(s)$$
$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

şeklindedir. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ifadeleri sırasıyla, α eğrisinin eğrilik ve burulmasını göstermektedir $[4]$.

Teorem 1.4.4. Genel parametre ile parametrelendirilmiş bir $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisi için eğrilik ve burulma formülleri aşağıdaki gibidir;

$$\kappa^2(t) = \delta \frac{\|\alpha'(t)\|^2 \|\alpha''(t)\|^2 - \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle^2}{\|\alpha'(t)\|^6}$$

$$\tau(t) = -\delta \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\kappa^2(t)\|\alpha'(t)\|^6}$$

Burada $\alpha''(t)$ spacelike ise $\delta = 1$ ve $\alpha''(t)$ timelike ise $\delta = -1$ dir $[6]$. Bunun bir uygulaması olarak, α eğrisi timelike eğri iken eğrilik ve burulma formülleri Öklid uzayındakine benzerdir $[4]$.

Tanım 1.4.5. $\alpha : I \to E_1^3$ ve $\beta : I \to E_1^3$ eğrileri verilsin. α eğrisinin Frenet üçlüsü $\{T, N, B\}$ ve β eğrisinin Frenet üçlüsü $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere, $\forall s \in I$ için $\{N, N^*\}$ ikilisi lineer bağımlı oluyorsa (α, β) ikilisine *Bertrand* eğri çifti denir $[4]$.

Teorem 1.4.6. Bir $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisinin *Bertrand* eğrisi olabilmesi için gerek ve yeter şart, $\exists A, B \in \mathbb{R}$ için $A\kappa + B\tau = 1$ olmasıdır $[4]$.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. E^3 de Düzlemsel Eğriler ve Silindirik Helisler

Bilindiği gibi, E^3 de bir düzlem eğrisinden bir uzay eğrisi elde edilebilir ve bu uzay eğrisi bir silindirik helis olacaktır. $\gamma(s_1)$ birim hızlı düzlem eğrisi ve s_1 de yay parametresi olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisi de γ eğrisine karşılık gelen uzay eğrisi olmak üzere, bu eğrinin yay parametresi de s ile gösterilsin. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Frenet üçlüsü $\{T, N, B\}$ olmak üzere, a vektörü γ eğrisine dik ve $\langle T, a\rangle = \cos\theta$ olacak şekilde bir vektör olsun. Bu durumda

$$\gamma(s_1) = \tilde{\gamma}(s_1) + \lambda a(s_1)$$

$$\langle \gamma(s_1), a(s_1)\rangle = \langle \tilde{\gamma}(s_1), a(s_1)\rangle + \lambda \langle a(s_1), a(s_1)\rangle$$

$$\lambda = -\langle \tilde{\gamma}(s_1), a(s_1)\rangle$$

olacaktır. Dolayısıyla γ eğrisi $\gamma(s_1) = \tilde{\gamma}(s_1) - \langle \tilde{\gamma}(s_1), a(s_1)\rangle a(s_1)$ olarak yazılabilir. O halde

$$\frac{d\gamma}{ds_1} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}\frac{ds}{ds_1} - \left\langle \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}\frac{ds}{ds_1}, a \right\rangle a$$

$$= T.\frac{ds}{ds_1} - \langle T, a\rangle a \frac{ds}{ds_1}$$

$$= T.\frac{ds}{ds_1} - a\cos\theta \frac{ds}{ds_1}$$

dır. Burada norm alınırsa

$$\left\| \frac{d\gamma}{ds_1} \right\| = \sqrt{\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 - 2\cos^2\theta \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \cos^2\theta \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2}$$

$$= \frac{ds}{ds_1}\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{ds}{ds_1}\sin\theta$$

dır. $\left\| \frac{d\gamma}{ds_1} \right\| = 1$ olduğundan $\frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{\sin\theta}$ ve $\frac{d\tilde{\gamma}}{ds_1} = \frac{d\gamma}{ds_1} + a\cos\theta \frac{ds}{ds_1}$

$$= \frac{d\gamma}{ds_1} + a\cot\theta$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma + a\cot\theta \int \left\| \dot{\gamma}(\tau) \right\| d\tau + c$$

dir $[5]$.

Teorem 2.1.1. Bir $\gamma(t)$ birim hızlı düzlem eğrisi verildiğinde,

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \left(\cot\theta \int_{t_0}^{t} \left\| \dot{\gamma}(t) \right\| dt \right) a + c \qquad (1)$$

ile tanımlanan $\tilde{\gamma}(t)$ uzay eğrisi bir silindirik helistir, ayrıca tüm silindirik helisler bu metodla inşa edilebilir. Burada θ sabit sayı, a ve c de $\|a\| = 1$, $\langle a, \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ olacak şekilde sabit vektörlerdir $[1]$.

İspat. $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisinin $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ değerlerini hesaplayalım. Genel parametre için eğrilik ve burulma formülleri

$$\kappa(t) = \frac{\left\| \dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t) \right\|}{\left\langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t) \right\rangle^{3/2}}$$

$$\tau(t) = \frac{\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \dddot{\tilde{\gamma}}(t) \right)}{\left\| \dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t) \right\|^2}$$

ile verilir. O halde, κ_p γ eğrisinin eğriliği olmak üzere,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}(t) + \cot\theta \left(\left\| \dot{\gamma}(t) \right\| .1 + \left\| \dot{\gamma}(t_0) \right\| .0 \right) a$$

$$= \dot{\gamma}(t) + a\cot\theta$$

elde edilir. Buradan

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(t) = \ddot{\gamma}(t) = \kappa_p(t) n(t)$$

$$\dddot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\kappa}_p(t)n(t) + \kappa_p(t)\dot{n}(t)$$
$$= \dot{\kappa}_p(t)n(t) + \kappa_p(t)\left(-\kappa_p(t)t(t)\right)$$
$$= \dot{\kappa}_p(t)n(t) - \kappa_p^{\,2}(t)t(t)$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t) = \kappa_p\left(b(t) - \cot\theta t(t)\right)$$
$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\right\| = \sqrt{\left\langle \kappa_p\left(b(t) - \cot\theta t(t)\right), \kappa_p\left(b(t) - \cot\theta t(t)\right)\right\rangle}$$
$$= \sqrt{\kappa_p^{\,2}(t)\left(1 + \cot^2\theta\right)}$$
$$= \frac{\left|\kappa_p(t)\right|}{\sin\theta}$$
$$\left\langle \dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\right\rangle = \frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \dddot{\tilde{\gamma}}(t)\right) = \left\langle \dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t), \dddot{\tilde{\gamma}}(t)\right\rangle$$
$$= \left\langle \kappa_p\left(b(t) - \cot\theta t(t)\right), \dot{\kappa}_p(t)n(t) - \kappa_p^{\,2}(t)t(t)\right\rangle$$
$$= \cot\theta\kappa_p^{\,3}(t)$$

ifadeleri hesaplanır. Bu durumda

$$\kappa(t) = \left|\kappa_p(t)\right|\sin^2\theta$$
$$\tau(t) = \kappa_p(t)\cot\theta\sin^2\theta$$

elde edilir. O halde

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(t) = \cot\theta\left(sabit\right)$$

olduğundan $\tilde{\gamma}(t)$ eğrisi bir silindirik helistir.

Tersine $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisi birim hızlı silindirik helis olsun, bu durumda $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ oranı sabit olacaktır. Bu silindirik helise ait Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere, küresel Darboux göstergesi sabittir. Gerçekten;

$$d(s)=\frac{D(s)}{\|D(s)\|}=\frac{B(s)+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)T(s)}{\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(s)}}$$

$$d'(s)=\frac{B'(s)+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)T('s)}{\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(s)}}$$

$$=\frac{-\tau(s)N(s)+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)\kappa(s)N(s)}{\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(s)}}$$

$$=0$$

elde edilir ki bu da $d(s)$ nin sabit olması demektir. $a=d(s)$ ile tanımlayalım, $\|a\|=1$ olacaktır. $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisi silindirik helis olduğundan $\tau(s)=c\kappa(s)$ olacak şekilde $c\in\mathbb{R}$ vardır ve θ yı $\cot\theta=c$ olacak şekilde seçelim.

$$\gamma(s)=\tilde{\gamma}(s)-\langle\tilde{\gamma}(s),a\rangle a$$

eğrisi, $\tilde{\gamma}(s)$ silindirik helisine karşılık gelen düzlemsel eğridir. Gerçekten;

$$\langle\gamma(s),a\rangle=\langle\tilde{\gamma}(s)-\langle\tilde{\gamma}(s),a\rangle a,a\rangle$$

$$=0$$

olduğundan γ düzlemsel bir eğridir, ayrıca

$$\langle\tilde{\gamma}(s),a\rangle=\|\tilde{\gamma}(s)\|\|a\|\cos\theta$$

$$=\cos\theta$$

$$\|\gamma(s)\|=\sqrt{\langle\tilde{\gamma}(s)-\langle\tilde{\gamma}(s),a\rangle a,\tilde{\gamma}(s)-\langle\tilde{\gamma}(s),a\rangle a\rangle}$$

$$=\sqrt{\langle T(s),T(s)\rangle+\cos^2\theta\langle a,a\rangle-2\langle\tilde{\gamma}(s),\cos\theta a\rangle}$$

$$=\sqrt{1+\cos^2\theta-2\cos\theta\left\langle\tilde{\gamma}(s),a\right\rangle}$$

$$=\sin\theta$$

Bu değerler (1) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\gamma(s)+\left(\cot\theta\int_{s_0}^{s}\left\|\dot{\gamma}(s)\right\|ds\right)a=\tilde{\gamma}(s)-s\cos\theta a+s\cot\theta\sin\theta a$$

$$=\tilde{\gamma}(s)$$

elde edilir.

Sonuç 2.1.1. Bir düzlemsel eğrinin çember olması durumunda, bu eğriye karşılık gelen silindirik helisler dairesel helislerdir $[1]$.

İspat. Teorem 2.1.1. de düzlemsel bir γ eğrisine karşılık gelen $\tilde{\gamma}$ silindirik helisi için eğrilik ve burulma değerleri

$$\kappa(t)=\left|\kappa_p(t)\right|\sin^2\theta$$

$$\tau(t)=\kappa_p(t)\cot\theta\sin^2\theta$$

olarak hesaplanmıştı. γ eğrisinin çember olması durumunda κ_p eğriliği sabit olacağından κ ve τ ifadeleri de sabit olacaktır. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ eğrisi dairesel helistir.

2.2. $\mathbf{E}^3$ de Bir Silindirik Helisin Düzlemsel Evolütü

Tanım 2.2.1. $\tilde{\gamma}_i : I \to \mathbb{R}^3$, $(i=1,2)$ uzay eğrileri için eğer, $\tilde{\gamma}_1^{(p)}(t_0)=\tilde{\gamma}_2^{(p)}(t_0)$ $0\le p\le k$ koşulu sağlanıyorsa , $\tilde{\gamma}_1$ ve $\tilde{\gamma}_2$ en az $(k+1)$ değme noktasına sahiptir denir. Ayrıca eğer $\tilde{\gamma}_1$ ve $\tilde{\gamma}_2$ en az $(k+1)$ değme noktasına sahip ve $\tilde{\gamma}_1^{(k+1)}(t_0)\neq\tilde{\gamma}_2^{(k+1)}(t_0)$ ise $\tilde{\gamma}_1$ ve $\tilde{\gamma}_2$ $(k+1)$ değme noktasına sahiptir denir $[1]$.

Önerme 2.2.1. $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$, $\kappa\neq 0$ olacak biçimde regüler eğri olsun. Bu durumda bir $t_0\in J\subset I$ açık aralığı ve bir tek $\tilde{\delta} : J\to\mathbb{R}^3$ dairesel helisi vardır öyleki $\tilde{\delta}(t_0)=\tilde{\gamma}(t_0)$ ve t_0 noktasında $\tilde{\gamma}$ ile $\tilde{\delta}$ en az 3 değme noktasına sahiptir $[1]$.

$\tilde{\delta}$ dairesel helisine $s_0 = s(t_0)$ da $\tilde{\gamma}$ eğrisinin *oskülatör dairesel helisi* denir. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin silindirik helis olması durumunda, bu iki eğrinin küresel Darboux göstergeleri sabit bir a vektörüdür. Teorem 2.1.1. in ispatına göre $\delta(s) = \tilde{\delta}(s) - \langle \tilde{\delta}(s), a \rangle a$ eğ risi $\tilde{\delta}$ eğrisine karşılık gelen düzlemsel eğridir ve $\tilde{\delta}$ eğrisi dairesel helis olduğundan δ bir çemberdir. $\tilde{\delta}$ ve $\tilde{\gamma}$ eğrilerinin $s_0 = s(t_0)$ da en az 3 ortak noktası bulunduğundan $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a$ eğrisi ile δ eğrisinin de en az 3 ortak noktası bulunmaktadır. Bu ise, δ eğrisinin s_0 da γ eğrisinin eğrilik çemberi olduğunu gösterir. γ düzlem eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri γ nın *evolütü* olarak adlandırılır ve $e_\gamma(s) = \gamma(s) + (1/\kappa_p(s))n(s)$ ile verilir. $\tilde{\gamma}$ silindirik helisi için

$$E_{\tilde{\gamma}}(s) = \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a + \frac{\kappa(s)}{\tau^2(s) + \kappa^2(s)} N(s)$$

ifadesine $\tilde{\gamma}$ silindirik helisinin *düzlemsel evolütü* denir $[1]$.

Teorem 2.2.1. $E_{\tilde{\gamma}}(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğridir ve $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a$ eğrisinin evolütüne eşittir $[1]$.

İspat. $\langle E_{\tilde{\gamma}}(s), a \rangle = 0$ dır. Gerçekten

$$\langle E_{\tilde{\gamma}}(s), a \rangle = \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle - \langle \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a, a \rangle + \frac{\kappa(s)}{\tau^2(s) + \kappa^2(s)} \langle N(s), a \rangle$$

dır. Burada $N \perp a$ olduğundan $\langle N(s), a \rangle = 0$ dir. Bu durumda $\langle E_{\tilde{\gamma}}(s), a \rangle = \langle E'_{\tilde{\gamma}}(s), a \rangle = 0$ olduğu görülür, dolayısıyla $E_{\tilde{\gamma}}(s)$ düzlemsel bir eğridir. $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a$ eğrisinin evolütünün

$$e_\gamma(s) = \gamma(s) + (1/\kappa_p(s))n(s)$$

olduğunu biliyoruz $E_{\tilde{\gamma}}(s) = \underbrace{\tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a}_{\gamma(s)} + \frac{\kappa(s)}{\tau^2(s) + \kappa^2(s)} N(s)$ ifadesinde

$(\frac{1}{\kappa_p(s)})n(s) = \frac{\kappa(s)}{\tau^2(s) + \kappa^2(s)} N(s)$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Burada hatırlanmalıdır ki, bir helisin eksenine dik bir düzlem üzerine izdüşümünün asli normali, helisin asli normaline paraleldir ve karşılık gelen eğrilik $\kappa_p = \dfrac{\kappa}{\sin^2\theta}$ dır $[5]$.

$\dfrac{\tau}{\kappa} = \cot\theta$ olduğundan $\sin\theta = \dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$ dir.

$$\kappa_p = \frac{\kappa}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa_p} = \frac{\sin^2\theta}{\kappa} = \frac{\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}}{\kappa}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\kappa_p} = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$$

$n\,//\,N$ ve $\dfrac{1}{\kappa_p} = \dfrac{\kappa}{\tau^2+\kappa^2}$ olduğundan $E_{\tilde{\gamma}}(s) = e_{\gamma}(s)$ elde edilir.

2.3. E^3 de Küresel Eğriler ve Bertrand Eğrileri

Tanım 2.3.1. Bir $\gamma : I \to S^2$ birim küresel eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. $\dot{\gamma} = \dfrac{d\gamma}{d\sigma}$ olmak üzere, γ nın σ daki birim teğet vektörü $t(\sigma) = \dot{\gamma}(\sigma)$ ile verilir. $s(\sigma) = \gamma(\sigma) \times t(\sigma)$ şeklinde tanımlanan $s(\sigma)$ vektörü ile birlikte γ boyunca ortonormal bir $\{\gamma(\sigma), t(\sigma), s(\sigma)\}$ çatısı elde edilir. Bu çatıya γ eğrisinin *Sabban* çatısı denir $[1]$.

Teorem 2.3.1. $\gamma : I \to S^2$ birim küresel eğrisi için *küresel Frenet formülleri* aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\sigma) &= t(\sigma) \\ \dot{t}(\sigma) &= -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma) s(\sigma) \\ \dot{s}(\sigma) &= -\kappa_g(\sigma) t(\sigma) \end{aligned} \tag{2}$$

Burada $\kappa_g(\sigma)$, γ nın S^2 deki *geodezik eğriliği* olup $\kappa_g(\sigma) = \det(\gamma(\sigma), t(\sigma), \dot{t}(\sigma))$ ile verilir $[1]$.

İspat. $\{\gamma(\sigma), t(\sigma), s(\sigma)\}$ ortonormal bir çatı olduğundan

$$\langle \gamma(\sigma), t(\sigma) \rangle = 0$$

$$\langle \dot{\gamma}(\sigma), t(\sigma) \rangle + \langle \gamma(\sigma), \dot{t}(\sigma) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \gamma(\sigma), \dot{t}(\sigma) \rangle &= -\langle \dot{\gamma}(\sigma), t(\sigma) \rangle \\ &= -\langle \dot{\gamma}(\sigma), \dot{\gamma}(\sigma) \rangle \\ &= -1 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\kappa_g(\sigma) = \langle \gamma(\sigma) \times t(\sigma), \dot{t}(\sigma) \rangle$ olduğundan

$$\langle s(\sigma), t(\sigma) \rangle = 0$$

$$\langle \dot{s}(\sigma), t(\sigma) \rangle + \underbrace{\langle s(\sigma), \dot{t}(\sigma) \rangle}_{\kappa_g(\sigma)} = 0$$

$$\langle \dot{s}(\sigma), t(\sigma) \rangle = -\kappa_g(\sigma)$$

bulunur.

Teorem 2.3.2. Bir $\gamma(\sigma)$ birim hızlı küresel eğrisi verildiğinde,

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(\upsilon) d\upsilon + a \cot\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} s(\upsilon) d\upsilon + c \tag{3}$$

ile tanımlanan $\tilde{\gamma}(\sigma)$ uzay eğrisi bir Bertrand eğrisidir, ayrıca tüm Bertrand eğrileri bu metodla inşa edilebilir. Burada a ve θ sabit sayılar, c sabit vektördür $[1]$.

İspat. Genel parametre için eğrilik ve burulma formülleri

$$\kappa(\sigma) = \frac{\left\| \dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) \right\|}{\left\| \dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) \right\|^3}$$

$$\tau(\sigma) = \frac{\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \dddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) \right)}{\left\| \dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) \right\|^2}$$

olduğundan, $\tilde{\gamma}$ eğrisine ait κ ve τ değerleri hesaplanılabilir.

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a\gamma(\sigma) + a \cot\theta s(\sigma)$$

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)=at(\sigma)+a\cot\theta\left(-\kappa_g(\sigma)t(\sigma)\right)$$
$$=a(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma))t(\sigma)$$

$$\dddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)=-a\cot\theta\dot{\kappa}_g(\sigma)t(\sigma)+a(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma))(-\gamma(\sigma)+\kappa_g(\sigma)s(\sigma))$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\times\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)=-a^2\cot\theta\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)\gamma(\sigma)+a^2\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)s(\sigma)$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\times\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|=\sqrt{\left\langle\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\times\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma),\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\times\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\rangle}$$
$$=\sqrt{a^4\cot^2\theta\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2+a^4\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2}$$
$$=\sqrt{a^4\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\left(1+\cot^2\theta\right)}$$
$$=a^2\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\times\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^2=a^4\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\varepsilon=\pm1$ olmak üzere

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|=\sqrt{\left\langle\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma),\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\rangle}$$
$$=\sqrt{a^2+a^2\cot^2\theta}$$
$$=\varepsilon a\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^3=\varepsilon a^3\frac{1}{\sin^3\theta}$$

$$\det(\dot{\tilde{\gamma}},\ddot{\tilde{\gamma}},\dddot{\tilde{\gamma}})=\begin{vmatrix} a & 0 & a\cot\theta \\ 0 & a(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)) & 0 \\ -a(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)) & -a\cot\theta\dot{\kappa}_g(\sigma) & \kappa_g(\sigma)a(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)) \end{vmatrix}$$
$$=a^3\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\left(\kappa_g(\sigma)+\cot\theta\right)$$

Bulunan değerler yerlerine yazılırsa

$$\kappa(\sigma)=\frac{a^2\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)\frac{1}{\sin\theta}}{\varepsilon a^3\frac{1}{\sin^3\theta}}$$

$$=\varepsilon\frac{\sin^2\theta\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)}{a}$$

$$\tau(\sigma)=\frac{a^3\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\left(\kappa_g(\sigma)+\cot\theta\right)}{a^4\left(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{\sin^2\theta\left(\kappa_g(\sigma)+\cot\theta\right)}{a}$$

elde edilir. Teorem 1.2.2. gereğince, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir Bertrand eğrisi olabilmesi için $A\kappa(\sigma)+B\tau(\sigma)=1$ olacak şekilde $\exists A\neq 0, B\neq 0\in\mathbb{R}$ bulunabilmelidir. Bu durumda $A=\varepsilon a$ ve $B=a\cot\theta$ alındığında

$$A\kappa(\sigma)+B\tau(\sigma)=\varepsilon a\kappa(\sigma)+a\cot\theta\tau(\sigma)=1$$

olduğu görülür.

Tersine, $\tilde{\gamma}(s)$ bir Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda

$$\gamma(s)=\varepsilon\left(\sin\theta T(s)-\cos\theta B(s)\right) \tag{4}$$

küresel eğrisi düşünüldüğünde

$$\gamma'(s)=\varepsilon\left(\sin\theta T'(s)-\cos\theta B'(s)\right)$$

$$=\varepsilon\left(\sin\theta\kappa(s)+\cos\theta\tau(s)\right)N(s)$$

$$=\varepsilon\sin\theta\underbrace{\left(\kappa(s)+\cot\theta\tau(s)\right)}_{1/a}N(s)$$

$$=\frac{\varepsilon\sin\theta}{a}N(s)$$

dir. γ eğrisinin yay parametresi σ olmak üzere, $d\sigma=\int_{s_0}^{s}\left\|\gamma'(s)\right\|ds$ olduğundan $\frac{d\sigma}{ds}=\frac{\varepsilon\sin\theta}{a}$

olacaktır. Bu durumda (4) ile verilen γ eğrisi (3) denkleminde yerine yazıldığında,

$$a\int_{\sigma_0}^{\sigma}\gamma(\upsilon)d\upsilon+a\cot\theta\int_{\sigma_0}^{\sigma}s(\upsilon)d\upsilon=a\int_{s_0}^{s}\frac{\varepsilon\sin\theta}{a}\gamma(\upsilon)d\upsilon+a\cot\theta\int_{s_0}^{s}\frac{\varepsilon\sin\theta}{a}s(\upsilon)d\upsilon$$

$$=\int_{s_0}^{s}\sin\theta\big(\sin\theta T(\upsilon)-\cos\theta B(\upsilon)\big)d\upsilon+\int_{s_0}^{s}\cos\theta\big(\cos\theta T(\upsilon)+\sin\theta B(\upsilon)\big)d\upsilon$$

$$=\int_{s_0}^{s}T(\upsilon)d\upsilon=\tilde{\gamma}(s)$$

bulunur. O halde γ eğrisi $\tilde{\gamma}$ Bertrand eğrisine karşılık gelen küresel eğridir.

Sonuç 2.3.1. $\gamma:I\to S^2$ birim hızlı küresel eğrisinin bir çember olabilmesi için gerek ve yeter şart, karşılık gelen Bertrand eğrilerinin dairesel helisler olmasıdır $[1]$.

İspat. Teorem 2.3.2. nin ispatından, γ eğrisine karşılık gelen $\tilde{\gamma}$ Bertrand eğrisinin eğrilik ve burulmasının

$$\kappa(\sigma)=\varepsilon\frac{\sin^2\theta\big(1-\cot\theta\kappa_g(\sigma)\big)}{a}$$

$$\tau(\sigma)=\frac{\sin^2\theta\big(\kappa_g(\sigma)+\cot\theta\big)}{a}$$

olduğu bilinmektedir. Bu ifadelerin türevleri alındığında

$$\dot{\kappa}(\sigma)=-\varepsilon\frac{\cos\theta\dot{\kappa}_g(\sigma)}{a}\quad\text{ve}\quad\dot{\tau}(\sigma)=\frac{\sin^2\theta\dot{\kappa}_g(\sigma)}{a}$$

elde edilir.

γ küresel eğrisi bir çember olduğundan $\dot{\kappa}_g(\sigma)\equiv 0$ dır. Dolayısıyla $\dot{\kappa}(\sigma)=0$ ve $\dot{\tau}(\sigma)=0$ olmalıdır. Bu durumda $\kappa(\sigma)$ ve $\tau(\sigma)$ ifadeleri sabittirler yani $\tilde{\gamma}$ eğrisi bir dairesel helistir.

Benzer şekilde $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir dairesel helis olması durumunda $\kappa(\sigma)$ ve $\tau(\sigma)$ ifadeleri sabit olacağından κ_g sabittir, dolayısıyla γ küresel eğrisi bir çember olur.

2.4. E^3 de Bir Küresel Eğrinin Küresel Evolütü

$\kappa_g \neq 0$ olmak üzere $\gamma : I \to S^2$ küresel eğrisi verildiğinde, $\forall\ \sigma_0 \in I$ olmak üzere

$$e_0(\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma_0)^2 + 1}}\left(\kappa_g(\sigma_0)\gamma(\sigma_0) + s(\sigma_0)\right)$$

vektörü düşünülsün.

$$c_0 = \frac{\kappa_g(\sigma_0)}{\sqrt{\kappa_g^{\,2}(\sigma_0) + 1}}$$

olmak üzere,

$$S^1(e_0, c_0) = \left\{x \in S^2 \mid \langle x, e_0 \rangle = c_0\right\}$$

çemberi için yükseklik fonksiyonu; $h_{e_0} : S^2 \to \mathbb{R}$ öyleki $h_{e_0}(x) = \langle x, e_0 \rangle - c_0$ ile tanımlanır. Bu durumda

$$\left(h_{e_0} \circ \gamma\right)(\sigma_0) = \frac{d}{d\sigma}\left(h_{e_0} \circ \gamma\right)(\sigma_0) = \frac{d^2}{d\sigma^2}\left(h_{e_0} \circ \gamma\right)(\sigma_0) = 0$$

dır. $S^1(e_0, c_0)$ çemberine γ eğrisinin $\gamma(\sigma_0)$ daki geodezik eğrilik çemberi denir. γ eğrisinin $\gamma(\sigma_0)$ daki geodezik eğrilik çemberinin merkezi e_0 dır. Bu eğrilik merkezlerinin geometrik yerine, γ eğrisinin küresel evolütü denir ve

$$e_\gamma(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma)^2 + 1}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma) + s(\sigma)\right)$$

ile verilir $[1]$.

Önerme 2.4.1. $\gamma : I \to S^2$ bir küresel eğri ve $\tilde{\gamma} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi de γ eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi olsun. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ eğrisinin küresel Darboux göstergesi, γ eğrisinin küresel evolütüne eşittir $[1]$.

İspat. Teorem 2.3.2. nin ispatından, γ eğrisine karşılık gelen $\tilde{\gamma}$ Bertrand eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon \frac{\sin^2\theta\left(1 - \cot\theta\,\kappa_g(\sigma)\right)}{a}$$

$$\tau(\sigma) = \frac{\sin^2\theta\left(\kappa_g(\sigma) + \cot\theta\right)}{a}$$

dır. Ayrıca $\dfrac{d\sigma}{ds} = \dfrac{\varepsilon \sin\theta}{a}$ olduğundan

$$\begin{aligned} a\gamma(\sigma)\frac{d\sigma}{ds} &= a\varepsilon\left(\sin\theta T(\sigma) - \cos\theta B(\sigma)\right)\frac{\varepsilon}{a}\sin\theta \\ &= \sin^2\theta T(\sigma) + \cos\theta\sin\theta B(\sigma) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a\cot\theta s(\sigma)\frac{d\sigma}{ds} &= a\cot\theta\gamma \times \frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} \\ &= a\cot\theta\varepsilon\left(\sin\theta T(\sigma) - \cos\theta B(\sigma)\right) \times \frac{\varepsilon\sin\theta}{a}N(\sigma) \\ &= \cos\theta\sin\theta B(\sigma) + \cos^2\theta T(\sigma) \end{aligned} \tag{6}$$

(5) ve (6) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$T(\sigma) = a\left(\gamma(\sigma) + \cot\theta s(\sigma)\right)\frac{d\sigma}{ds} \tag{7}$$

elde edilir. $\dot{\gamma}(\sigma) = \dfrac{\varepsilon\sin\theta}{a}N(\sigma)$ olduğundan

$$N(\sigma) = \varepsilon t(\sigma) \tag{8}$$

dır ve benzer şekilde

$$B(\sigma) = \varepsilon a\left(s(\sigma) - \cot\theta\gamma(\sigma)\right)\frac{d\sigma}{ds} \tag{9}$$

elde edilir.

(7), (8), (9) ifadeleri yerine yazılırsa, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin Darboux vektörü

$$D(\sigma) = \tau(\sigma)T(\sigma) + \kappa(\sigma)B(\sigma) = \frac{d\sigma}{ds}\left(s(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)\right)$$

dır ve dolayısıyla küresel Darboux göstergesinin

$$\begin{aligned} d(\sigma) &= \frac{D(\sigma)}{\left\|D(\sigma)\right\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_g^{\,2}(\sigma) + 1}}\left(s(\sigma) + \kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)\right) = e_\gamma(\sigma) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

2.5. E^3 de Bir Eğrinin Küresel Göstergelerine Karşılık Gelen Bertrand Eğrileri

Tanım 2.5.1. Bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = t$ olacak şekilde P noktası γ eğrisini çizerken, Q noktasının birimküre üzerinde çizdiği eğriye γ eğrisinin *birinci küresel göstergesi* veya *teğetler göstergesi* denir. Bu eğri (t) ile gösterilecek olursa, (t) eğrisinin denklemi $\gamma(\sigma_t) = t$ ile verilir. Bu ifadede σ_t ile (t) eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir [2].

Teorem 2.5.1. γ eğrisinin teğetler göstergesinin σ_t yay parametresi için $\dfrac{d\sigma_t}{d\sigma} = \kappa(\sigma)$ dır [2].

İspat.

$$\sigma_t(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\dot{t}(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\kappa(\upsilon) n(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \kappa(\upsilon) d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_t}{d\sigma} = \kappa(\sigma)$$

olarak hesaplanır.

Teorem 2.5.2. Teğetler göstergesine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\widetilde{\gamma}(\sigma_t) = a\gamma(\sigma_t) + a\cot\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} b(\upsilon) d\upsilon + c$$

dir.

İspat. Tanım 2.3.1. gereğince (t) eğrisinin Sabban çatısı $\{t, t_t, s_t\}$ olur. Burda $t_t = \dfrac{dt}{d\sigma_t}$

ifadesi (t) eğrisinin teğet vektörü ve $s_t = t \times t_t$ dir. Bu durumda Teorem 2.3.2. gereğince (t) eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t) = a \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} t(\upsilon)\, d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} s_t(\upsilon)\, d\upsilon + c$$

$$= a\gamma(\sigma_t) + a\cot\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} t(\upsilon) \times t_t(\upsilon)\, d\upsilon + c$$

olacaktır. Burada $t_t = \dfrac{dt}{d\sigma_t} = \dfrac{dt}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_t}$ olduğundan, Frenet formülleri kullanılarak

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t) = a\gamma(\sigma_t) + a\cot\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} t(\upsilon) \times \kappa(\upsilon) n(\upsilon) \frac{1}{\kappa(\upsilon)}\, d\upsilon + c$$

$$= a\gamma(\sigma_t) + a\cot\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} b(\upsilon)\, d\upsilon + c$$

elde edilir.

Tanım 2.5.2. Bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = n$ olacak şekilde P noktası γ eğrisini çizerken, Q noktasının birimküre üzerinde çizdiği eğriye γ eğrisinin *ikinci küresel göstergesi* veya *asli normaller göstergesi* denir. Bu eğri (n) ile gösterilecek olursa, (n) eğrisinin denklemi $\gamma(\sigma_n) = n$ ile verilir. Bu ifadede σ_n ile (n) eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir [2].

Teorem 2.5.3. γ eğrisinin asli normaller göstergesinin σ_n yay parametresi için $\dfrac{d\sigma_n}{d\sigma} = \|D(\sigma)\|$ dir. Burada $D(\sigma) = \tau(\sigma)t(\sigma) + \kappa(\sigma)b(\sigma)$ olup, Darboux vektörünü göstermektedir [2].

İspat.
$$\sigma_n(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\dot{n}(\upsilon)\|\, d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|-\kappa(\upsilon)t(\upsilon) + \tau(\upsilon)b(\upsilon)\|\, d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{\kappa^2(\upsilon)+\tau^2(\upsilon)}\,d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_n}{d\sigma} = \|D(\sigma)\|$$

dır.

Teorem 2.5.4. Asli normaller göstergesine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)\,d\upsilon + c$$

dir.

İspat. Tanım 2.3.1. gereğince (n) eğrisinin Sabban çatısı $\{n, t_n, s_n\}$ olur. Burda $t_n = \dfrac{dn}{d\sigma_n}$ ifadesi (n) eğrisinin teğet vektörü ve $s_n = n \times t_n$ dir. Bu durumda Teorem 2.3.2. gereğince (n) eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} s_n(\upsilon)\,d\upsilon + c$$

$$= a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\times t_n(\upsilon)\,d\upsilon + c$$

olacaktır. Burada $t_n = \dfrac{dn}{d\sigma_n} = \dfrac{dn}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_n}$ olduğundan, Frenet formülleri kullanılarak

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\times\left[-\kappa(\upsilon)t(\upsilon)+\tau(\upsilon)b(\upsilon)\right]\frac{1}{\sqrt{\kappa^2(\upsilon)+\tau^2(\upsilon)}}\,d\upsilon + c$$

$$= a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} \left[\kappa(\upsilon)b(\upsilon)+\tau(\upsilon)t(\upsilon)\right]\frac{1}{\sqrt{\kappa^2(\upsilon)+\tau^2(\upsilon)}}\,d\upsilon + c$$

elde edilir. α eğrisinin Darboux vektörü $D(\sigma) = \tau(\sigma)t(\sigma) + \kappa(\sigma)b(\sigma)$ olduğundan

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\, d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} \frac{D(\upsilon)}{\left\|D(\upsilon)\right\|}\, d\upsilon + c$$

$$= a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\, d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)\, d\upsilon + c$$

bulunur.

Tanım 2.5.3. Bir $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = b$ olacak şekilde P noktası γ eğrisini çizerken, Q noktasının birimküre üzerinde çizdiği eğriye γ eğrisinin *üçüncü küresel göstergesi* veya *binormaller göstergesi* denir. Bu eğri (b) ile gösterilecek olursa, (b) eğrisinin denklemi $\gamma(\sigma_b) = b$ ile verilir. Bu ifadede σ_b ile (b) eğrisinin yay parametresi gösterilmektedir $[2]$.

Teorem 2.5.5 γ eğrisinin binormaller göstergesinin σ_b yay parametresi için $\dfrac{d\sigma_b}{d\sigma} = \tau(\sigma)$ dır $[2]$.

İspat.

$$\sigma_b(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\|\dot{b}(\upsilon)\right\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\|-\tau(\upsilon)\, n(\upsilon)\right\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \tau(\upsilon)\, d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_b}{d\sigma} = \tau(\sigma)$$

Teorem 2.5.6. Binormaller göstergesine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_b) = a \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\, d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon)\, d\upsilon + c$$

dir.

İspat. Teorem 2.5.4. ün ispatına benzer şekilde ispatlanır.

2.6. E_1^3 de Küresel Eğriler ve Bertrand Eğrileri

$[6]$ ve $[7]$ ile verilen çalışmalarda yazarlar, Minkowski-3 uzayında küresel spacelike, timelike ve lightlike eğrilerin özeliklerini incelemişlerdir. Minkowski uzayında da Öklid uzayındaki küresel eğri tanımına benzer olarak denilebilir ki, Lorentz küreleri olan H_1^2 veya S_1^2 üzerine tanımlanabilen eğri küresel eğridir.

Teorem 2.6.1. E_1^3 uzayında küre üzerinde lightlike (null) eğri yoktur $[6]$.

E_1^3 de lightlike (null) olmayan γ eğrisi, birim hızlı küresel bir eğri olsun. σ yay parametresi olmak üzere, γ eğrisinin σ noktasındaki birim teğet vektörü, $\dot{\gamma}=\dfrac{d\gamma}{d\sigma}$ olmak üzere, $t(\sigma)=\dot{\gamma}(\sigma)$ ile verilir. Bu durumda, $s(\sigma)=\gamma(\sigma)\times t(\sigma)$ olmak üzere, $\{\gamma(\sigma),t(\sigma),s(\sigma)\}$ üçlüsü γ boyunca pseudo-ortonormal bir çatıdır $[8]$.

γ eğrisinin spacelike bir eğri olması durumunda, Tanım 1.4.1. dolayısıyla t birim teğet vektörü spacelike vektördür. Bu durumda, eğer γ vektörü spacelike ise yani eğri S_1^2 de tanımlıysa, s timelike vektör ve eğer γ vektörü timelike ise yani eğri H_1^2 de tanımlıysa, s spacelike vektördür. Benzer şekilde γ eğrisinin timelike bir eğri olması durumunda t timelike vektör ve $t(\sigma)=\dot{\gamma}(\sigma)$ olduğundan, γ ve s spacelike vektörlerdir. Bu durumda γ eğrisi S_1^2 de tanımlıdır.

Teorem 2.6.2. γ eğrisi, E_1^3 de birim hızlı küresel bir eğri olsun. γ nın hiperbolik Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibidir;

i. γ spacelike eğrisi H_1^2 de tanımlıysa (s spacelike vektör ise)

$$\dot{\gamma}(\sigma)=t(\sigma)$$
$$\dot{t}(\sigma)=\gamma(\sigma)+\kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$
$$\dot{s}(\sigma)=-\kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

ii. γ spacelike eğrisi S_1^2 de tanımlıysa (s timelike vektör ise)

$$\dot{\gamma}(\sigma)=t(\sigma)$$

$$\dot{t}(\sigma) = -\gamma(\sigma) - \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

$$\dot{s}(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

iii. γ timelike bir eğri ise

$$\dot{\gamma}(\sigma) = t(\sigma)$$

$$\dot{t}(\sigma) = \gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

$$\dot{s}(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

biçimindedir. Burada κ_g ifadesi γ nın geodezik eğriliği olup, $\kappa_g = \det(\gamma, t, \dot{t})$ ile verilir [8].

Teorem 2.6.3. γ eğrisi E_1^3 de birim hızlı küresel bir eğri olsun. Bu durumda, a ve θ sabit sayılar, c sabit vektör ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(\upsilon)d\upsilon + \varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} s(\upsilon)d\upsilon\right] + c \tag{10}$$

ile verilen $\tilde{\gamma}$ eğrisi bir Bertrand eğrisidir. γ spacelike eğri ise $\varepsilon = 1$, timelike eğri ise $\varepsilon = -1$ alınır. Ayrıca asli normal vektörü lightlike (null) olmayan tüm Bertrand eğrileri bu metodla üretilebilir.

İspat.

1. γ eğrisi birim hızlı küresel spacelike bir eğri olsun. Bu durumda, tanımdan t spacelike vektör olacaktır. $\{\gamma, t, s\}$ çatısına göre $\tilde{\gamma}$ eğrisinin karakteri için iki durum mevcuttur:

i. γ vektörü timelike olduğunda s spacelike vektördür. Bu durumda Teorem 2.6.2. de verilen hiperbolik Frenet-Serret formülleri kullanılarak

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a(\gamma(\sigma) + \coth\theta s(\sigma))$$

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a(1 - \coth\theta\kappa_g(\sigma))t(\sigma)$$

$$\dddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = -a\coth\theta\dot{\kappa}_g(\sigma)t(\sigma) + a(1 - \coth\theta\kappa_g(\sigma))(\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma))$$

hesaplanır. Burada $\left\langle \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}} \right\rangle_L = a^2 \dfrac{1}{\sinh^2\theta} > 0$ olduğundan $\tilde{\gamma}$ eğrisi spacelike bir eğridir. Ayrıca

$$\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^2 = a^2\left(\coth^2\theta - 1\right) = \frac{a^2}{\sinh^2\theta}$$

$$\left\|\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^2 = a^2(1-\coth\theta\kappa_g(\sigma))^2$$

$$\left\langle \dot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\rangle_L = 0$$

$$\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \dddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right) = a^3\left(1-\coth\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\left(\kappa_g(\sigma) - \coth\theta\right)$$

eşitlikleri elde edilir. $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, Teorem 1.4.4. de verilen eğrilik ve burulma formüllerinde $\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)$ spacelike olduğundan $\delta = 1$ olur ve

$$\kappa^2(\sigma) = \frac{\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^2\left\|\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^2 - \left\langle \dot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\rangle^2}{\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^6} = \frac{\sinh^4\theta(1-\coth\theta\kappa_g(\sigma))^2}{a^2}$$

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon\frac{\sinh^2\theta\left(1-\coth\theta\kappa_g(\sigma)\right)}{a}$$

$$\tau(\sigma) = -\frac{\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma), \dddot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right)}{\kappa^2(\sigma)\left\|\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma)\right\|^6} = -\frac{a^3\left(1-\coth\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\left(\kappa_g(\sigma)-\coth\theta\right)}{\dfrac{a^4(1-\coth\theta\kappa_g(\sigma))^2}{\sinh^2\theta}}$$

$$\tau(\sigma) = -\frac{\sinh^2\theta\left(\kappa_g(\sigma)-\coth\theta\right)}{a}$$

elde edilir. Teorem 1.4.7. gereğince $\tilde{\gamma}$ eğrisinin bir Bertrand eğrisi olabilmesi için $A\kappa(\sigma) + B\tau(\sigma) = 1$ olacak şekilde A ve B sayıları bulunabilmelidir. Bu durumda

$$-a(\varepsilon\kappa(\sigma) - \coth\theta\tau(\sigma)) = 1$$

olduğundan $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisidir.

ii. γ vektörü spacelike olduğunda s timelike vektördür. Bu durumda Teorem 2.6.2. de verilen hiperbolik Frenet-Serret formülleri kullanılarak

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a(\gamma(\sigma) + \coth\theta s(\sigma))$$

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a(1 - \coth\theta \kappa_g(\sigma))t(\sigma)$$

$$\dddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = -a\coth\theta \dot{\kappa}_g(\sigma)t(\sigma) + a(1 - \coth\theta\kappa_g(\sigma))(-\gamma(\sigma) - \kappa_g(\sigma)s(\sigma))$$

hesaplanır. Burada $\left\langle \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}} \right\rangle_L = -a^2 \dfrac{1}{\sinh^2\theta} < 0$ olduğundan $\tilde{\gamma}$ eğrisi timelike bir eğridir. Ayrıca

$$\det\left(\dot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}}, \dddot{\tilde{\gamma}}\right) = a^3\left(1 - \coth\theta\kappa_g(\sigma)\right)^2\left(\coth\theta - \kappa_g(\sigma)\right)$$

olduğundan, Teorem 1.4.4. de verilen eğrilik ve burulma formüllerinden, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon\frac{\sinh^2\theta\left(1 - \coth\theta\kappa_g(\sigma)\right)}{a}$$

$$\tau(\sigma) = \frac{\sinh^2\theta\left(\coth\theta - \kappa_g(\sigma)\right)}{a}$$

olarak hesaplanır. Teorem 1.4.7. gereğince, $A = -a\varepsilon$ ve $B = a\coth\theta$ seçildiğinde

$$-a(\varepsilon\kappa(\sigma) - \coth\theta\tau(\sigma)) = 1$$

olduğundan $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisidir.

2. γ eğrisinin küresel timelike bir eğri olması durumunda, tanımdan t birim teğet vektörü timelike vektör olacaktır. Bu durumda $\{\gamma, t, s\}$ çatısına göre γ ve s vektörleri spacelike vektörlerdir. Teorem 2.6.2. de verilen Frenet-Serret formülleri kullanılarak

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a(\gamma(\sigma) - \coth\theta s(\sigma))$$

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a(1 + \coth\theta\kappa_g(\sigma))t(\sigma)$$

$$\dddot{\tilde{\gamma}}(\sigma) = a\coth\theta\dot{\kappa}_g(\sigma)t(\sigma) + a(1 + \coth\theta\kappa_g(\sigma))(\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma))$$

hesaplanır. Bu durumda $\left\langle \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}} \right\rangle_L = -\dfrac{a^2}{\sinh^2\theta} < 0$ olduğundan $\tilde{\gamma}$ eğrisi timelike eğridir. Ayrıca

$$\det\left(\dot{\tilde{\gamma}},\ddot{\tilde{\gamma}},\dddot{\tilde{\gamma}}\right)=a^3\left(1+\coth\theta\kappa_g\left(\sigma\right)\right)^2\left(\kappa_g\left(\sigma\right)+\coth\theta\right)$$

olduğundan, $\varepsilon=\pm1$ olmak üzere, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin eğrilik ve burulması

$$\kappa\left(\sigma\right)=\varepsilon\frac{\sinh^2\theta\left(1+\coth\theta\kappa_g\left(\sigma\right)\right)}{a}$$

$$\tau\left(\sigma\right)=\frac{\sinh^2\theta\left(\kappa_g\left(\sigma\right)+\coth\theta\right)}{a}$$

olarak hesaplanır. Teorem 1.4.7. gereğince, $A=-a\varepsilon$ ve $B=a\coth\theta$ seçildiğinde

$$-a(\varepsilon\kappa\left(\sigma\right)-\coth\theta\tau(\sigma))=1 \tag{11}$$

olduğundan $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisidir.

Tersine, $\tilde{\gamma}$ eğrisi normali null olmayan bir Bertrand eğrisi ve $\{T,N,B\}$ üçlüsü $\tilde{\gamma}$ nın Frenet çatısı olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisi spacelike eğri ise, yani T vektörü spacelike ise, T' vektörünün karakterine göre üç durum mevcuttur.

T' nün spacelike vektör olması durumunda

$$\gamma(\sigma)=\varepsilon\left(\sinh\theta T\left(\sigma\right)+\cosh\theta B\left(\sigma\right)\right)$$

eğrisi tanımlansın. Bu durumda $\gamma'(\sigma)=\varepsilon\sinh\theta(\kappa(\sigma)+\coth\theta\tau(\sigma))N(\sigma)$ dir. N vektörü spacelike olduğundan, γ eğrisi spacelike eğridir. (11) eşitliği kullanılarak $\gamma'(\sigma)=\dfrac{\varepsilon\sinh\theta N(\sigma)}{a}$ elde edilir. σ_1 γ eğrisinin yay parametresi olmak üzere, $\dfrac{d\sigma_1}{d\sigma}=\dfrac{\varepsilon\sinh\theta}{a}$ olduğundan

$$a\gamma\left(\sigma\right)\frac{d\sigma_1}{d\sigma}=\sinh\theta\left(\sinh\theta T\left(\sigma\right)+\cosh\theta B\left(\sigma\right)\right) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}a\coth\theta s\left(\sigma\right)\frac{d\sigma_1}{d\sigma}&=a\coth\theta\gamma\left(\sigma\right)\times\frac{d\gamma}{d\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{d\sigma}\\&=-\cosh\theta\left(\cosh\theta T\left(\sigma\right)+\sinh\theta B\left(\sigma\right)\right)\end{aligned} \tag{13}$$

eşitlikleri vardır. (12) ve (13) eşitlikleri (10) ifadesinde yerine yazılırsa

$$a\int_0^{\sigma_1}\gamma(\upsilon)d\upsilon + a\coth\theta\int_0^{\sigma_1}s(\upsilon)d\upsilon = \int_{\sigma_0}^{\sigma}\sinh\theta(\sinh\theta T(\upsilon)+\cosh\theta B(\upsilon))d\upsilon$$

$$-\int_{\sigma_0}^{\sigma}\cosh\theta(\cosh\theta T(\upsilon)+\sinh\theta B(\upsilon))d\upsilon$$

$$=-\int_{\sigma_0}^{\sigma}T(\upsilon)d\upsilon = -\widetilde{\gamma}(\sigma)+c$$

olduğu görülür. Burada $\tilde{\gamma}$ eğrisi negatif yönlendirilmiştir.

T' nün timelike vektör olması durumunda

$$\gamma(\sigma) = -\varepsilon\left(\sinh\theta T(\sigma)+\cosh\theta B(\sigma)\right)$$

eğrisi tanımlansın. Bu durumda $\gamma'(\sigma) = -\varepsilon\sinh\theta(\kappa(\sigma)+\coth\theta\tau(\sigma))N(\sigma)$ dir. N vektörü timelike olduğundan, γ eğrisi timelike eğridir. (11) eşitliği kullanılarak $\gamma'(\sigma) = -\dfrac{\varepsilon\sinh\theta}{a}N(\sigma)$ elde edilir. σ_1 γ eğrisinin yay parametresi olmak üzere, $\dfrac{d\sigma_1}{d\sigma} = \dfrac{\varepsilon\sinh\theta}{a}$ olduğundan

$$a\gamma(\sigma)\frac{d\sigma_1}{d\sigma} = -\sinh\theta\left(\sinh\theta T(\sigma)+\cosh\theta B(\sigma)\right) \tag{14}$$

$$a\coth\theta s(\sigma)\frac{d\sigma_1}{d\sigma} = a\coth\theta\gamma(\sigma)\times\frac{d\gamma}{d\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$$

$$= -\cosh\theta\left(\cosh\theta T(\sigma)+\sinh\theta B(\sigma)\right) \tag{15}$$

eşitlikleri vardır. (14) ve (15) eşitlikleri (10) ifadesinde yerine yazılırsa

$$a\int_0^{\sigma_1}\gamma(\upsilon)d\upsilon - a\coth\theta\int_0^{\sigma_1}s(\upsilon)d\upsilon = -\int_{\sigma_0}^{\sigma}\sinh\theta(\sinh\theta T(\upsilon)+\cosh\theta B(\upsilon))d\upsilon$$

$$+\int_{\sigma_0}^{\sigma}\cosh\theta(\cosh\theta T(\upsilon)+\sinh\theta B(\upsilon))d\upsilon$$

$$=\int_{\sigma_0}^{\sigma}T(\upsilon)d\upsilon = \widetilde{\gamma}(\sigma)+c$$

olduğu görülür. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin tanımından T vektörü lightlike olamaz.

Şimdi $\tilde{\gamma}$ eğrisi timelike eğri olsun. Bu durumda

$$\gamma(\sigma) = -\varepsilon\left(\sinh\theta T(\sigma) + \cosh\theta B(\sigma)\right)$$

eğrisi tanımlansın. $\gamma'(\sigma) = -\varepsilon\sinh\theta(\kappa(\sigma) - \coth\theta\tau(\sigma))N(\sigma)$ ve N vektörü spacelike olduğundan, γ eğrisi spacelike eğridir. (11) eşitliği kullanılarak $\gamma'(\sigma) = \dfrac{\varepsilon\sinh\theta N(\sigma)}{a}$ elde edilir. σ_1 γ eğrisinin yay parametresi olmak üzere, $\dfrac{d\sigma_1}{d\sigma} = \dfrac{\varepsilon\sinh\theta}{a}$ olduğundan

$$a\gamma(\sigma)\frac{d\sigma_1}{d\sigma} = -\sinh\theta\left(\sinh\theta T(\sigma) + \cosh\theta B(\sigma)\right) \quad (16)$$

$$a\coth\theta s(\sigma)\frac{d\sigma_1}{d\sigma} = a\coth\theta\gamma(\sigma)\times\frac{d\gamma}{d\sigma_1}\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$$
$$= \cosh\theta\left(\cosh\theta T(\sigma) + \sinh\theta B(\sigma)\right) \quad (17)$$

eşitlikleri vardır. (16) ve (17) eşitlikleri (10) ifadesinde yerine yazılırsa

$$a\int_0^{\sigma_1}\gamma(\upsilon)d\upsilon + a\coth\theta\int_0^{\sigma_1}s(\upsilon)d\upsilon = -\int_{\sigma_0}^{\sigma}\sinh\theta(\sinh\theta T(\upsilon) + \cosh\theta B(\upsilon))d\upsilon$$
$$+\int_{\sigma_0}^{\sigma}\cosh\theta(\cosh\theta T(\upsilon) + \sinh\theta B(\upsilon))d\upsilon$$
$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma}T(\upsilon)d\upsilon = \tilde{\gamma}(\sigma) + c$$

olduğu görülür. $\tilde{\gamma}$ eğrisi, tanımı gereğince, null eğri olamaz. O halde bir küresel γ eğrisi verildiğinde, ona karşılık bir $\tilde{\gamma}$ Bertrand eğrisi ve tersine normali null olmayan bir $\tilde{\gamma}$ Bertrand eğrisi verildiğinde, ona karşılık bir küresel γ eğrisi bulunabilmektedir.

2.7. E_1^3 de Bir Küresel Eğrinin Hiperbolik Evolütü

Bu bölümde, birim küreler üzerine tanımlı regüler bir eğrinin evolütü tanımlanacak ve hiperbolik evolüt eğrisinin geometrik anlamı araştırılacaktır.

E_1^3 uzayındaki birim küreler

$$H_+^2=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \langle x,x\rangle_L=-1, x_3\geq 1\right\}$$

$$H_-^2=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \langle x,x\rangle_L=-1, x_3\leq -1\right\}$$

$$S_1^2=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \langle x,x\rangle_L=1\right\}$$

ile verilir. Bu durumda, bir $\gamma: I\to H_+^2$ ($\gamma: I\to H_-^2$ veya $\gamma: I\to S_1^2$) regüler eğrisi verildiğinde, $\kappa_g(\sigma)\neq\pm1$ olmak üzere

$$HE_\gamma(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\left|\kappa_g(\sigma)^2-1\right|}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$$

ile tanımlanan eğriye γ eğrisinin *hiperbolik evolütü* denir. Burada eğer $\kappa_g(\sigma)>1$ ise HE_γ eğrisi $H_+^2\cup H_-^2$ de ve eğer $\kappa_g(\sigma)<1$ ise HE_γ eğrisi S_1^2 de bulunmaktadır HE_γ eğrisi H_-^2 üzerinde olduğu durumda, HE_γ eğrisi yerine $-HE_\gamma$ eğrisi düşünülebilir [8].

Tanım 2.7.1. $\gamma: I\to H_+^2$ veya $\gamma: I\to S_1^2$ küresel eğrisi verildiğinde

$$H^T: I\times H_+^2\to\mathbb{R}, H^T(\sigma,u)=\langle\gamma(\sigma),u\rangle_L$$

$$H^S: I\times S_1^2\to\mathbb{R}, H^S(\sigma,u)=\langle\gamma(\sigma),u\rangle_L$$

fonksiyonlarına sırasıyla, γ eğrisi üzerinde *hiperbolik timelike yükseklik fonksiyonu* ve *hiperbolik spacelike yükseklik fonksiyonu* denir. Bu fonksiyonlar sırasıyla $h_u^T(\sigma)$ ve $h_u^S(\sigma)$ ile gösterilecektir [8].

Önerme 2.7.1. γ küresel eğrisi verilsin.

1. $\forall(\sigma,u)\in I\times H_+^2$ için;

i. $\left(h_u^T\right)(\sigma)=0\Leftrightarrow u\in\langle\gamma(\sigma),s(\sigma)\rangle_L$

ii. $\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left(h_u^T\right)(\sigma)=0\Leftrightarrow u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma)^2-1}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$ ve $\kappa_g{}^2(\sigma)>1$

iii. $\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left(h_u^T\right)^{(3)}=0\Leftrightarrow u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma)^2-1}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$, $\kappa_g{}^2(\sigma)>1$

ve $\kappa_g(\sigma)=0$

iv. $\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left(h_u^T\right)^{(3)}=\left(h_u^T\right)^{(4)}=0 \Leftrightarrow u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma)^2-1}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$

$\kappa_g{}^2(\sigma)>1$ ve $\kappa_g(\sigma)=\kappa_g(\sigma)=0$ dır.

2. $\forall(\sigma,u)\in I\times S_1^2$ için;

i. $\left(h_u^S\right)(\sigma)=0 \Leftrightarrow u\in\left\langle \gamma(\sigma),s(\sigma)\right\rangle$

ii. $\left(h_u^S\right)(\sigma)=\left(h_u^S\right)(\sigma)=0 \Leftrightarrow u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\kappa_g(\sigma)^2}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$ ve $\kappa_g{}^2(\sigma)<1$

iii. $\left(h_u^S\right)(\sigma)=\left(h_u^S\right)(\sigma)=\left(h_u^S\right)^{(3)}=0 \Leftrightarrow u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\kappa_g(\sigma)^2}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$, $\kappa_g{}^2(\sigma)<1$

ve $\kappa_g(\sigma)=0$

iv. $\left(h_u^S\right)(\sigma)=\left(h_u^S\right)(\sigma)=\left(h_u^S\right)^{(3)}=\left(h_u^S\right)^{(4)}=0 \Leftrightarrow u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\kappa_g(\sigma)^2}}\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$

$\kappa_g{}^2(\sigma)<1$ ve $\kappa_g(\sigma)=\kappa_g(\sigma)=0$ dır [8].

İspat. Teorem 2.6.2. de verilen hiperbolik Frenet-Serret formülleri kullanıldığında;

i. Tanım gereğince $\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left\langle \gamma(\sigma),u\right\rangle_L$ olduğundan $\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left\langle t(\sigma),u\right\rangle$ dur. Bu durumda $\left(h_u^T\right)(\sigma)=0 \Leftrightarrow \left\langle t(\sigma),u\right\rangle_L=0$ olduğu görülür. O halde $u\in\left\langle \gamma(\sigma),s(\sigma)\right\rangle_L$ dir.

ii. i. özeliğinden, $u(\sigma)=\lambda\gamma(\sigma)+\mu s(\sigma)$ olacak şekilde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ vardır. $\left(h_u^T\right)(\sigma)=\left\langle \gamma(\sigma)+\kappa_g(\sigma)s(\sigma),u\right\rangle$ ve $\left(h_u^T\right)(\sigma)=0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
0&=\left\langle \gamma(\sigma)+\kappa_g(\sigma)s(\sigma),\lambda\gamma(\sigma)+\mu s(\sigma)\right\rangle_L\\
&=\lambda\left\langle \gamma(\sigma),\gamma(\sigma)\right\rangle+\mu\kappa_g(\sigma)\left\langle s(\sigma),s(\sigma)\right\rangle_L\\
&=-\lambda+\mu\kappa_g(\sigma)
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $\lambda=\mu\kappa_g(\sigma)$ olacağından $u(\sigma)=\mu\left(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\right)$ dır. Ayrıca

$\langle u,u\rangle_L = -1$ olduğundan $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma)^2-1}}$ elde edilir.

iii. ve **iv.** özelikleri ve **2.** özelik, benzer şekilde ispatlanır [8].

Tanım 2.7.2. $\forall r\in\mathbb{R}$ ve $u_0\in H_+^2$ (veya $u_0\in S_1^2$) için, $PS^1(u_0,r)=\{u\in H_+^2 \mid \langle u,u_0\rangle_L = r\}$ kümesine H_+^2 de u_0 merkezli r yarıçaplı *pseudo çember* denir [8].

Önerme 2.7.2. $\gamma: I\to H_+^2$ birim hızlı eğrisi verilsin. $\kappa_g^2(\sigma)\neq 1$ olmak üzere, $\kappa_g'(\sigma)\equiv 0$ olması için gerek ve yeter şart $u_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\left|\kappa_g(\sigma)^2-1\right|}}\big(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\big)$ sabit olmasıdır. Bu şart altında, γ eğrisi u_0 merkezli çemberin bir parçasıdır [8].

İspat.

$$u_0=\pm\frac{1}{\sqrt{\left|\kappa_g(\sigma)^2-1\right|}}\big(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\big)\Rightarrow u_0' = \pm\frac{\kappa_g'(\sigma)}{\left(\left|\kappa_g(\sigma)^2-1\right|\right)^{3/2}}\gamma(\sigma)\pm\frac{\kappa_g(\sigma)\kappa_g'(\sigma)}{\left(\left|\kappa_g(\sigma)^2-1\right|\right)^{3/2}}s(\sigma)$$

dır. Bu durumda $u_0'\equiv 0\Leftrightarrow \kappa_g'(\sigma)\equiv 0$ dir. Bu şartlar altında γ eğrisi, yarıçapı $r=\pm\dfrac{\kappa_g(\sigma)}{\sqrt{\left|\kappa_g(\sigma)^2-1\right|}}$ ve merkezi $u_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\left|\kappa_g(\sigma)^2-1\right|}}\big(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma)+s(\sigma)\big)$ olan $PS^1(u_0,r)$ çemberinin bir parçasıdır [8].

Önerme 2.7.3. $\kappa_g^2(\sigma)\neq 1$ olmak üzere $\gamma: I\to H_+^2$ birim hızlı eğrisi verilsin. $\forall\sigma_0\in I$ için, $u_0=HE_\gamma(\sigma_0)$ ve $r_0=\pm\dfrac{\kappa_g(\sigma_0)}{\sqrt{\left|\kappa_g(\sigma_0)^2-1\right|}}$ olmak üzere, $PS^1(u_0,r_0)$ çemberi ile γ eğrisi, $\gamma(\sigma_0)$ da en az üç değme noktasına sahiptir [8].

İspat. $PS^1(u_0,r_0)\subset H_+^2$ olsun. Bu durumda tanımdan, $\left(h_{u_0}^T\right)^{-1}(r_0)=PS^1(u_0,r_0)$ olur. Önerme 2.7.1. de 1/iii. özeliği gereğince, $PS^1(u_0,r_0)$ çemberi ile γ eğrisi, $\gamma(\sigma_0)$ da en az üç değme noktasına sahiptir. $PS^1(u_0,r_0)\subset S_1^2$ olduğunda ise $h_{u_0}^S(r_0)$ hiperbolik yükseklik fonksiyonu düşünülerek benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.7.3. de verilen $PS^1(u_0, r_0)$ çemberine *oskülatör çember* veya *geodezik eğrilik çemberi* denir. Bu çemberin merkezi olan u_0, *geodezik eğrilik merkezi* olarak adlandırılır. Dolayısıyla γ eğrisinin hiperbolik evolütü $HE_\gamma(\sigma)$, geodezik eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir [8].

2.8. E_1^3 de Spacelike ve Timelike Eğrilerin Küresel Göstergelerine Karşılık Gelen Bertrand Eğrileri

Tanım 2.8.1. Bir $\gamma : I \to E_1^3$ timelike eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ ve eğriliği $\kappa(\sigma) \neq 0$ olmak üzere, $\gamma_t : I \to H_1^2$ öyleki $\gamma_t(s) = t(s)$ şeklinde tanımlanan eğriye γ eğrisinin *birinci küresel göstergesi* veya *teğetler göstergesi* denir.

Teorem 2.8.1. γ_t eğrisinin yay parametresi σ_t ile verilsin. Bu durumda $\dfrac{d\sigma_t}{d\sigma} = \kappa(\sigma)$ dir.

İspat. γ eğrisi timelike eğri olduğundan n vektörü spacelike vektördür. O halde

$$\sigma_t(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\dot{t}(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\kappa(\upsilon) n(\upsilon)\| d\upsilon = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \kappa(\upsilon) d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_t}{d\sigma} = \kappa(\sigma)$$

elde edilir.

Teorem 2.8.2. E_1^3 de timelike bir eğrinin teğetler göstergesi olan γ_t eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t) = a\gamma(\sigma_t) + a \coth\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} b(\upsilon) d\upsilon + c$$

dir.

İspat. γ eğrisi timelike bir eğri olduğundan teğet vektörü t timelike vektördür. Bu durumda γ_t eğrisi, teğet vektörü $t_t = \dfrac{dt}{d\sigma_t}$ spacelike vektör olduğundan, spacelike bir eğridir. $s_t = t \times t_t$ olmak üzere, γ_t eğrisinin $\{t, t_t, s_t\}$ çatısına göre hiperbolik Frenet formülleri Teorem 2.6.2. de verildiği gibidir. Bu durumda Teorem 2.6.3. gereğince γ_t eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\sigma_t) &= a \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} t(\upsilon)\, d\upsilon + a \coth\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} s_t(\upsilon)\, d\upsilon + c \\ &= a\gamma(\sigma_t) + a \coth\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} t(\upsilon) \times t_t(\upsilon)\, d\upsilon + c\end{aligned}$$

olacaktır. Burada $t_t = \dfrac{dt}{d\sigma_t} = \dfrac{dt}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_t}$ olduğundan, Teorem 1.4.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\sigma_t) &= a\gamma(\sigma_t) + a \coth\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} t(\upsilon) \times \kappa(\upsilon) n(\upsilon) \frac{1}{\kappa(\upsilon)}\, d\upsilon + c \\ &= a\gamma(\sigma_t) + a \coth\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} b(\upsilon)\, d\upsilon + c\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.8.2. Bir γ timelike eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ ve γ eğrisinin eğriliği $\kappa(\sigma) \neq 0$ olmak üzere, $\gamma_n : I \to S_1^2$ öyleki $\gamma_n(s) = n(s)$ şeklinde tanımlanan eğriye γ eğrisinin *ikinci küresel göstergesi* veya *asli normaller göstergesi* denir.

Teorem 2.8.3. γ_n eğrisinin yay parametresi σ_n ile verilsin.Bu durumda $\dfrac{d\sigma_n}{d\sigma} = \|w(\sigma)\|$ dir. Burada $w(\sigma) = \tau(\sigma) t(\sigma) + \kappa(\sigma) b(\sigma)$ olup, Darboux vektörünü göstermektedir.

İspat. $$w = n \times n' = \begin{vmatrix} t & n & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \end{vmatrix} \Rightarrow w = \tau t + \kappa b$$

$$\sigma_n(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\dot{n}(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\kappa(\upsilon)t(\upsilon) + \tau(\upsilon)b(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{\kappa^2(\upsilon) + \tau^2(\upsilon)} d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_n}{d\sigma} = \sqrt{\kappa^2(\sigma) + \tau^2(\sigma)} = \|w(\sigma)\|$$

elde edilir.

Teorem 2.8.4. E_1^3 de timelike bir eğrinin asli normaller göstergesi olan γ_n eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\left[\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + \varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)d\upsilon\right] + c$$

dir. γ_n eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = -1$ değerini alır. Burada $d(\upsilon) = \dfrac{w(\sigma)}{\|w(\sigma)\|}$ dir.

İspat. γ eğrisi timelike bir eğri olduğundan asli normal vektörü n spacelike vektördür. Bu durumda γ_n eğrisinin teğet vektörü olan $t_n = \dfrac{dn}{d\sigma_n}$ spacelike veya timelike vektör olduğundan, γ_n eğrisi sırasıyla, spacelike veya timelike bir eğridir. $s_n = t \times t_n$ olmak üzere, γ_n eğrisinin $\{n, t_n, s_n\}$ çatısına göre hiperbolik Frenet formülleri Teorem 2.6.2. de verildiği gibidir. Bu durumda Teorem 2.6.3. gereğince γ_n eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} s_n(\upsilon)d\upsilon + c$$

$$= a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon) \times t_n(\upsilon)d\upsilon + c$$

olacaktır. Burada $t_n = \dfrac{dn}{d\sigma_n} = \dfrac{dn}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_n}$ olduğundan

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\times\frac{dn}{d\sigma}\frac{1}{\|w(\upsilon)\|}\,d\upsilon + c$$

elde edilir. Burada Teorem 1.4.1. gereğince $\dfrac{dn}{d\sigma} = n(\sigma) = \kappa(\sigma)t(\sigma) + \tau(\sigma)b(\sigma)$ olup, $n\times\dot{n}$ Lorentz vektörel çarpımı yapıldığında

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} \frac{w(\upsilon)}{\|w(\upsilon)\|}\,d\upsilon + c$$

$$= a\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)\,d\upsilon + c$$

elde edilir.

Tanım 2.8.3. Bir γ timelike eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t,n,b\}$ ve eğriliği $\kappa(\sigma)\neq 0$ olmak üzere, $\gamma_b : I \to S_1^2$ öyleki $\gamma_b(s) = b(s)$ şeklinde tanımlanan eğriye γ eğrisinin *üçüncü küresel göstergesi* veya *binormaller göstergesi* denir $[3]$.

Teorem 2.8.5 γ_b eğrisinin yay parametresi σ_b ile verilsin. Bu durumda $\dfrac{d\sigma_b}{d\sigma} = \tau(\sigma)$ dir.

İspat. γ eğrisi timelike eğri olduğundan n vektörü spacelike vektördür. O halde

$$\sigma_b(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\dot{b}(\upsilon)\|\,d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|-\tau(\upsilon)n(\upsilon)\|\,d\upsilon = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \tau(\upsilon)\,d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_b}{d\sigma} = \tau(\sigma)$$

dır.

Teorem 2.8.6. E_1^3 de timelike bir eğrinin binormaller göstergesi olan γ_b eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_b) = a\left[\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\,d\upsilon + \varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon)\,d\upsilon\right] + c$$

dir. γ_b eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = -1$ değerini alır.

İspat. γ eğrisi timelike bir eğri olduğundan binormal vektörü b spacelike vektördür. Bu durumda γ_b eğrisinin teğet vektörü olan $t_b = \dfrac{db}{d\sigma_b}$ spacelike veya timelike vektör olduğundan, γ_b eğrisi sırasıyla, spacelike veya timelike bir eğridir. $s_b = t \times t_b$ olmak üzere, γ_b eğrisinin $\{n, t_b, s_b\}$ çatısına göre hiperbolik Frenet formülleri Teorem 2.6.2. de verildiği gibidir. Bu durumda Teorem 2.6.3. gereğince γ_b eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\sigma_b) &= a\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} s_b(\upsilon)\,d\upsilon + c \\ &= a\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\times t_b(\upsilon)\,d\upsilon + c\end{aligned}$$

olacaktır. Burada $t_b = \dfrac{db}{d\sigma_b} = \dfrac{db}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_b}$ olduğundan Teorem 1.4.1. kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\sigma_b) &= a\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\times\left[-\tau(\upsilon)n(\upsilon)\right]\frac{1}{\tau(\upsilon)}\,d\upsilon + c \\ &= a\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon)\,d\upsilon + c\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.8.4. Bir γ spacelike eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ ve eğriliği $\kappa(\sigma) \neq 0$ olmak üzere, $\gamma_t : I \to S_1^2$ öyleki $\gamma_t(s) = t(s)$ şeklinde tanımlanan eğriye γ eğrisinin *birinci küresel göstergesi* veya *teğetler göstergesi* denir.

Teorem 2.8.7. γ_t eğrisinin yay parametresi σ_t ile verilsin. Bu durumda $\dfrac{d\sigma_t}{d\sigma}=\kappa(\sigma)$ dir.

İspat. Frenet formülleri kullanılarak

$$\sigma_t(\sigma)=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\|\dot{t}(\upsilon)\|d\upsilon$$

$$=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\|\kappa(\upsilon)n(\upsilon)\|d\upsilon=\int_{\sigma_0}^{\sigma}\kappa(\upsilon)d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_t}{d\sigma}=\kappa(\sigma)$$

elde edilir.

Teorem 2.8.8. E_1^3 de spacelike bir eğrinin teğetler göstergesi olan γ_t eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t)=a\left[\gamma(\sigma_t)+\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t}b(\upsilon)d\upsilon\right]+c$$

dir. γ_t eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon=1$ ve $\varepsilon=-1$ değerini alır.

İspat. γ eğrisi spacelike bir eğri olduğundan teğet vektörü t spacelike vektördür. Bu durumda, teğet vektörü $t_t=\dfrac{dt}{d\sigma_t}$ spacelike veya timelike vektör olduğundan, γ_t eğrisi sırasıyla spacelike veya timelike bir eğridir. $s_t=t\times t_t$ olmak üzere, γ_t eğrisinin $\{t,t_t,s_t\}$ çatısına göre hiperbolik Frenet formülleri Teorem 2.6.2. de verildiği gibidir. Bu durumda Teorem 2.6.3. gereğince γ_t eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t)=a\int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t}t(\upsilon)d\upsilon+a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t}s_t(\upsilon)d\upsilon+c$$

$$=a\gamma(\sigma_t)+a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t}t(\upsilon)\times t_t(\upsilon)d\upsilon+c$$

olacaktır. Burada $t_t = \dfrac{dt}{d\sigma_t} = \dfrac{dt}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_t}$ olduğundan, Teorem 1.4.1. kullanılarak

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t) = a\gamma(\sigma_t) + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} t(\upsilon)\times\kappa(\upsilon)n(\upsilon)\frac{1}{\kappa(\upsilon)}d\upsilon + c$$

$$= a\left[\gamma(\sigma_t) + \varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} b(\upsilon)d\upsilon\right] + c$$

elde edilir.

Tanım 2.8.5. Bir γ spacelike eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t,n,b\}$ ve γ eğrisinin eğriliği $\kappa(\sigma)\neq 0$ olmak üzere, $\gamma_n(s) = n(s)$ şeklinde tanımlanan eğriye γ eğrisinin *ikinci küresel göstergesi* veya *asli normaller göstergesi* denir. Burada γ eğrisi spacelike olduğundan n vektörü spacelike veya timelike olabilir, bu durumda, γ_n eğrisi sırasıyla S_1^2 veya H_1^2 üzerine tanımlıdır.

Teorem 2.8.9. γ_n eğrisinin yay parametresi σ_n ile verilsin.Bu durumda $\dfrac{d\sigma_n}{d\sigma} = \|w(\sigma)\|$ dır. Burada, n vektörü timelike iken Darboux vektörü $w(\sigma) = \tau(\sigma)t(\sigma) + \kappa(\sigma)b(\sigma)$ ve n vektörü spacelike iken Darboux vektörü $w(\sigma) = \tau(\sigma)t(\sigma) - \kappa(\sigma)b(\sigma)$ dır.

İspat. γ eğrisi spacelike bir eğri ve n timelike bir vektör olmak üzere, Frenet formülleri kullanılarak

$$w = n\times\dot{n} = \begin{vmatrix} t & n & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \end{vmatrix} \Rightarrow w = \tau t + \kappa b$$

olduğu görülür ve $\|w(\sigma)\| = \sqrt{\kappa^2(\sigma) + \tau^2(\sigma)}$ dir. Benzer şekilde n spacelike bir vektör ise

$$w = n\times\dot{n} = \begin{vmatrix} t & n & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \end{vmatrix} \Rightarrow w = \tau t - \kappa b$$

elde edilir ve $\|w(\sigma)\| = \sqrt{\kappa^2(\sigma) - \tau^2(\sigma)}$ dır. O halde n nin timelike bir vektör olması durumunda

$$\sigma_n(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\dot{n}(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\kappa(\upsilon)t(\upsilon) + \tau(\upsilon)b(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{\kappa^2(\upsilon) + \tau^2(\upsilon)} d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_n}{d\sigma} = \sqrt{\kappa^2(\upsilon) + \tau^2(\upsilon)} = \|w(\sigma)\|$$

ve n nin spacelike bir vektör olması durumunda, b timelike vektör olduğundan

$$\sigma_n(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|\dot{n}(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \|-\kappa(\upsilon)t(\upsilon) + \tau(\upsilon)b(\upsilon)\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sqrt{\kappa^2(\upsilon) - \tau^2(\upsilon)} d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_n}{d\sigma} = \sqrt{\kappa^2(\sigma) - \tau^2(\sigma)} = \|w(\sigma)\|$$

olduğu görülür.

Teorem 2.8.10. E_1^3 de spacelike bir eğrinin asli normaller göstergesi olan γ_n eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\left[\int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + \varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)d\upsilon\right] + c$$

dir. γ_n eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = -1$ değerini alır. Burada $d(\upsilon) = \dfrac{w(\sigma)}{\|w(\sigma)\|}$ dır.

İspat. γ eğrisi spacelike bir eğri olduğundan asli normal vektörü n spacelike veya timelike vektör olabilir. n spacelike vektör olduğunda, γ_n eğrisinin teğet vektörü olan $t_n = \dfrac{dn}{d\sigma_n}$

spacelike veya timelike vektör olacağından, γ_n eğrisi sırasıyla, spacelike veya timelike bir eğridir. Benzer şekilde n timelike vektör olduğunda, γ_n eğrisinin teğet vektörü olan $t_n = \dfrac{dn}{d\sigma_n}$ spacelike vektör olacağından, γ_n eğrisi spacelike bir eğridir. Her iki durumda da $s_n = t \times t_n$ olmak üzere, γ_n eğrisinin $\{n, t_n, s_n\}$ çatısına göre hiperbolik Frenet formülleri ve Teorem 2.6.3. gereğince γ_n eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\sigma_n) &= a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} s_n(\upsilon)d\upsilon + c \\ &= a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\times t_n(\upsilon)d\upsilon + c\end{aligned}$$

olacaktır. Burada $t_n = \dfrac{dn}{d\sigma_n} = \dfrac{dn}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_n}$ olduğundan

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)\times \frac{dn}{d\sigma}\frac{1}{\|w(\upsilon)\|}d\upsilon + c$$

elde edilir. Burada Teorem 1.4.1. gereğince $\dfrac{dn}{d\sigma} = n(\sigma) = \kappa(\sigma)t(\sigma) + \tau(\sigma)b(\sigma)$ olup, $n \times \dot{n}$ Lorentz vektörel çarpımı yapıldığında

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\sigma_n) &= a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} \frac{w(\upsilon)}{\|w(\upsilon)\|}d\upsilon + c \\ &= a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)d\upsilon + c\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.8.6. Bir γ spacelike eğrisi σ yay parametresi ile verilmiş olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, n, b\}$ ve eğriliği $\kappa(\sigma) \neq 0$ olmak üzere, $\gamma_b : I \to S_1^2$ öyleki $\gamma_b(s) = b(s)$ şeklinde tanımlanan eğriye γ eğrisinin *üçüncü küresel göstergesi* veya *binormaller göstergesi* denir $[3]$.

Teorem 2.8.11 γ_b eğrisinin yay parametresi σ_b ile verilsin. Bu durumda $\dfrac{d\sigma_b}{d\sigma} = \tau(\sigma)$ dir.

İspat. γ eğrisi spacelike eğri olduğundan n vektörü spacelike veya timelike vektör olabilir. Her iki durumda da, Frenet formülleri gereğince $\dot{b} = \tau n$ olduğundan

$$\sigma_b(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\|\dot{b}(\upsilon)\right\| d\upsilon$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\|\tau(\upsilon) n(\upsilon)\right\| d\upsilon = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \tau(\upsilon)\, d\upsilon$$

$$\frac{d\sigma_b}{d\sigma} = \tau(\sigma)$$

elde edilir.

Teorem 2.8.12. E_1^3 de spacelike bir eğrinin binormaller göstergesi olan γ_b eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_b) = a\left[\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon) d\upsilon - \varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon) d\upsilon\right] + c$$

dir. γ_b eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon = -1$ değerini alır.

İspat. γ eğrisi spacelike bir eğri olduğundan binormal vektörü b spacelike veya timelike vektör olabilir. Bu durumda γ_b eğrisinin teğet vektörü olan $t_b = \dfrac{db}{d\sigma_b}$ de spacelike veya timelike vektör olduğundan, γ_b eğrisi sırasıyla, spacelike veya timelike bir eğridir. $s_b = t \times t_b$ olmak üzere, γ_b eğrisinin $\{n, t_b, s_b\}$ çatısına göre küresel Frenet formülleri Teorem 2.6.2. de verildiği gibidir. Bu durumda Teorem 2.6.3. gereğince γ_b eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_b) = a \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon) d\upsilon + a\varepsilon \coth\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} s_b(\upsilon) d\upsilon + c$$

$$= a\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\,d\upsilon + a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\times t_b(\upsilon)\,d\upsilon + c$$

olacaktır. Burada $t_b = \dfrac{db}{d\sigma_b} = \dfrac{db}{d\sigma}\dfrac{d\sigma}{d\sigma_b}$ olduğundan Teorem 1.4.1. kullanılarak

$$\widetilde{\gamma}(\sigma_b) = a\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)d\upsilon + a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)\times[\tau(\upsilon)n(\upsilon)]\frac{1}{\tau(\upsilon)}\,d\upsilon + c$$

$$= a\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)d\upsilon - a\varepsilon\coth\theta\int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon)d\upsilon + c$$

elde edilir.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın literatüre katkıları aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. Bu çalışmada ilk olarak 3 boyutlu Öklid uzayında, küresel eğrilerden Bertrand eğrisi elde edilişini veren metod kullanılarak, bir eğrinin küresel göstergelerine karşılık gelen Bertrand eğrileri hesaplanmıştır.

   Teğetler göstergesine karşılık gelen Bertrand eğrisi,

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t) = a\gamma(\sigma_t) + a\cot\theta \int_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} b(\upsilon)d\upsilon + c$$

   Asli normaller göstergesine karşılık gelen Bertrand eğrisi,

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)d\upsilon + c$$

   Binormaller göstergesine karşılık gelen Bertrand eğrisi,

$$\tilde{\gamma}(\sigma_b) = a \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)d\upsilon + a\cot\theta \int_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon)d\upsilon + c$$

   olarak hesaplanmıştır.

2. Bu çalışmada ayrıca, Öklid uzayındaki metod 3 boyutlu Minkowski uzayına genişletilmiş ve bir küresel eğriye karşılık gelen Bertrand eğrisinin, a ve θ sabit sayılar, c sabit vektör ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere,

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a\left[\int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(\upsilon)d\upsilon + \varepsilon\coth\theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} s(\upsilon)d\upsilon\right] + c$$

   olduğu görülmüştür.

3. Lorentz – Minkowski uzayında da spacelike ve timelike eğrilerin küresel göstergeleri tanımlanmış ve onlara karşılık gelen Bertrand eğrileri hesaplanmıştır.

   E_1^3 de timelike veya spacelike bir eğrinin teğetler göstergesi olan γ_t eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi

$$\tilde{\gamma}(\sigma_t) = a\left[\gamma(\sigma_t) + \varepsilon \coth\theta \int\limits_{\sigma_{t_0}}^{\sigma_t} b(\upsilon)d\upsilon\right] + c\ \gamma_t$$

dir. γ_t eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ değerini alır.

E_1^3 de timelike veya spacelike bir eğrinin asli normaller göstergesi olan γ_n eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi,

$$\tilde{\gamma}(\sigma_n) = a\left[\int\limits_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} n(\upsilon)d\upsilon + \varepsilon \coth\theta \int\limits_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_n} d(\upsilon)d\upsilon\right] + c$$

dir. γ_n eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ değerini alır.

E_1^3 de spacelike bir eğrinin binormaller göstergesi olan γ_b eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi,

$$\tilde{\gamma}(\sigma_b) = a\left[\int\limits_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)d\upsilon - \varepsilon \coth\theta \int\limits_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon)d\upsilon\right] + c$$

dir. γ_b eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ değerini alır.

E_1^3 de timelike bir eğrinin binormaller göstergesi olan γ_b eğrisine karşılık gelen Bertrand eğrisi,

$$\tilde{\gamma}(\sigma_b) = a\left[\int\limits_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} b(\upsilon)d\upsilon + \varepsilon \coth\theta \int\limits_{\sigma_{b_0}}^{\sigma_b} t(\upsilon)d\upsilon\right] + c$$

dir. γ_b eğrisinin spacelike veya timelike olmasına göre sırasıyla $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ değerini alır.

4. ÖNERİLER

1. Verilen bu yöntem null eğriler için farklı bir çatı ile oluşturulabilir.
2. 3 boyutlu Minkowski uzayında yapılan bu hesaplamalar, 4 boyuta taşınabilir.
3. Bishop Küresel Göstergeler için aynı yöntemle Bertrand eğrileri hesaplanabilir.
4. Null eğriler için hiperbolik evolüt kavramı çalışılabilir. Burada eğrilik çemberleri yerine horocycle'lar düşünülebilir. Bir horocycle kısaca, belirli bir noktada aynı teğete sahip, sonsuz yarıçaplı çemberlerin limiti olarak tanımlanabilir. Öklid uzayında "sonsuz yarıçaplı çember" bir doğru iken, hiperbolik geometride bu bir eğridir.

5. KAYNAKLAR

1. Izumiya S., Takeuchi N., Generic properties of helices and Bertrand curves, J.geom., (2002) 97-109.

2. Hacısalihoğlu H.H., Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 2000.

3. Pei D. and Sano T., The Focal Developable and The Binormal Indicatrix of a Nonlightlike curve in Minkowski 3-Space, (English summary) Tokyo J. Math., 23, 1 (2000) 211-225.

4. Lopez R., Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, arXiv:0810.3351v1 [math.DG] 2008.

5. Struik D.J., Lectures on Classical Differential Geometry, Dover Publications, second edition 1961.

6. Petrovic M. and Sucurovic E., Some characterizations of the Lorentzian spherical timelike and null curves , Matematicki Vesnik, 53, 1-2 (2001) 21-27.

7. Pekmen U. and Pasali S., Some characterizations of Lorentzian spherical space-like curves, Mathematica Moravica, 3 (1999) 33-37.

8. Izumiya S., Pei D.H., Sano T. and Torii E., Evolutes of Hyperbolic Plane Curves, Acta Mathematica Sinica, English Series, 20, 3 (2004) 543-550.

9. Ali A.T. and Lopez R., Slant Helices in Minkowski Space E_1^3, J. Korean Math. Soc., 1 (2011) 159-167.

10. Yilmaz S., Spherical Indicators of Curves and Characterizations of Some Special Curves in four dimensional Lorentzian Space L^4 , Dissertation, Dokuz Eylül University 2001.

11. Ali A.T., New special curves and their spherical indicatrices, arXiv:0909.2390v1 [math.DG] 2009.

12. İlarslan K., Camcı C., Kocayiğit H. and Hacısalihoğlu H.H., On the explicit characterization of spherical curves in 3 dimensional Lorentzian space, J. InvIII-Posed Problems, 11, 4 (2003) 389-397

13. Bükücü B. and Karacan M.K., On the Involute and Evolute curves of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski-3 Space, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 2, 5 (2007) 221-232.

14. Izumiya S., Pei D.H. and Takahashi M., Curves and Surfaces in Hyperbolic Space, Banach center Publications, 65 (2004) 511-530.

15. Yücesan A., Çöken A.C. and Ayyıldız N., On the Darboux rotation axis of Lorentz space curve, Applied Mathematics and Computation, 155 (2004) 345-351.

16. Bektaş M., Ergüt M. and Soylu D., The Characterization of the Spherical Timelike Curves in 3-Dimensional Lorentzian Space, Bull of the Malaysian Math. Soc., 21 (1998) 117-125.

17. Ekmekci N. and Ilarslan K., On Bertrand curves and their characterizations, Geometry Balkan Press, 3, 2 (2001) 17-24.

ÖZGEÇMİŞ

Gül GÜNER, 1987 yılında Gümüşhane'nin Şiran ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara Tevfik İleri İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini ise Kurtuluş Lisesi'nde tamamladı.

2004-2005 Eğitim-Öğretim yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. Aralık 2010 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.