KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK SAYILAR VE HİPERBOLİK SAYILARIN 2-BOYUTLU HİPERBOLİK GEOMETRİYE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yavuz GÖKSAL

MAYIS 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK SAYILAR VE HİPERBOLİK SAYILARIN 2-BOYUTLU HİPERBOLİK GEOMETRİYE UYGULAMALARI

Yavuz GÖKSAL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik) "
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14.04.2011
Tezin Savunma Tarihi : 11.05.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ziya YAPAR
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Sami KARADENİZ

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Trabzon 2011

ÖNSÖZ

"Hiperbolik Sayılar ve Hiperbolik Sayıların 2-Boyutlu Hiperbolik Geometriye uygulamaları" adlı bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında "Yüksek Lisans Tezi" olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV'e (Cevat HACIEV'e) en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Çalışmalarımın yönlendirmesinde ve çalışmalarım sırasında yapıcı eleştirilerini aldığım, her konuda hiçbir yardımını esirgemeyen hocam Öğr. Gör. Dr. İdris ÖREN'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayrıca diğer tüm konularda yardımını esirgemeyen Öğr. Gör. Hüsnü Anıl ÇOBAN'a, tükenmeyen ilgi ve destekleriyle yaşamıma güç katan aileme ve diğer tüm arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Yavuz GÖKSAL
Trabzon, 2011

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa No</u>

ÖNSÖZ II
İÇİNDEKİLER III
ÖZET V
SUMMARY VI
SEMBOLLER DİZİNİ VII
1. GENEL BİLGİLER 1
1.1. Giriş 1
1.2. Hiperbolik Sayıların Temel Özellikleri 2
1.3. Hiperbolik Sayının Matris Gösterimi 6
1.4. $O(1,1,\mathbb{R})$, $SO(1,1,\mathbb{R})$ Grupları 9
1.5. Küme Üzerinde Grup Hareketi 16
1.6. G-Denk Vektörler Sistemi ve G-Yörünge 17
1.7. $O(1,1,\mathbb{R})$, $SO(1,1,\mathbb{R})$ ve L Gruplarının yörüngeleri 19
1.8. G-İnvaryant Fonksiyon 19
1.9. $SO(1,1,\mathbb{R})$ Grup Elemanlarının Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımıyla İfadesi 21
1.10. Lorentz Grubu 24
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 28
2.1. Hiperbolik Sayıların Bazı Özellikleri 28
2.2. Hiperbolik Sayılarda 1. tip ve 2. tip Mutlak değerler 34
2.3. $B(H)_1$ -Denklik Problemi 39
2.4. $L(H)$ -Denklik Problemi 45
2.5. $B(H)_2$ -Denklik Problemi 51
2.6. $L(H), L, B(H)_1, SO(1,1,\mathbb{R}), O(1,1,\mathbb{R}), B(H)_2$ Grupları arasındaki bağlantılar 60
2.7. $SO(1,1,\mathbb{R})$ Grubun Denklik Probleminin Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımı ile Çözümü 63
2.8. Lorentz Grubun Denklik Probleminin Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımı ile Çözümü 66

2.9. $O(1,1,\mathbb{R})$ Grubun Denklik Probleminin Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımı ile Çözümü 68
3. BULGULAR 74
4. İRDELEME 76
5. SONUÇLAR 77
6. ÖNERİLER 78
7. KAYNAKLAR 79
ÖZGEÇMİŞ

ÖZET

Bu çalışmada Hiperbolik sayılar ve Hiperbolik sayıların 2-boyutlu Hiperbolik geometriye uygulamaları yapıldı. Hiperbolik sayılara ait bazı özellikler gösterildi. $B(H)_1, B(H)_2$ ve $L(H)$ gruplarına göre denklik problemleri çözüldü. Bu sonuçları kullanarak $O(1,1,\mathbb{R}), SO(1,1,\mathbb{R})$ ve Lorentz gruplarının denklik problemleri çözüldü. Ayrıca $L(H), L, B(H)_1, SO(1,1,\mathbb{R}), O(1,1,\mathbb{R}), B(H)_2$ gruplar arasındaki bağlantılar incelendi.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik geometri, Hiperbolik Sayı, İnvaryant, Lorentz grubu

SUMMARY

Hyperbolic Numbers and The Applications of Hyperbolic Numbers In 2-Dimensional Hyperbolic Geometry

In this study Hyperbolic numbers and the applications of Hyperbolic numbers to the 2-dimensional Hyperbolic geometry were applied. Some properties of Hyperbolic numbers were shown. Equality problems for groups $B(H)_1, B(H)_2$, and $L(H)$ were solved. Using these results, equality problems for $O(1,1,\mathbb{R}), SO(1,1,\mathbb{R})$ and Lorentz groups were solved. Also the haks among the groups $L(H), L, B(H)_1, SO(1,1,\mathbb{R}), B(H)_2, O(1,1,\mathbb{R})$ were examined.

Key Words: Hyperbolic geometry, Hyperbolic numbers, İnvariant, Lorentz group

SEMBOLLER DİZİNİ

$\lVert a_{ij} \rVert, i,j = 1,\dots,n, a_{ij} \in \mathbb{R}$	:$n \times n$ tipinde reel katsayılı bir matris
$\mathbb{H}$	:Hiperbolik Sayılar Halkası
δ	:Karesi 1 olan Hiperbolik sayı
$B(H)_1$	$:= \{ A = a + \delta b \in \mathbb{H}: \lvert A\rvert_1 = a^2 - b^2 = 1, a,b \in \mathbb{R}\}$ grup
$B(H)_2$	$:= \{A = a + \delta b \in \mathbb{H}: \lvert A\rvert_2 = \sqrt{\lvert a^2 - b^2\rvert} = 1, a,b \in \mathbb{R}\}$ grup
$L(H)$	$:= \{ A = a + \delta b \in \mathbb{H}: \lvert A\rvert_1 = a^2 - b^2 = 1, a \geq 1, a,b \in \mathbb{R}\}$ grup
H^*	$:= \{A = (a,b) \in \mathbb{H}: a^2 - b^2 \neq 0\}$ grup
$Gr(x_1,x_2)$	$:= \begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2;$ olan Gram matrisi
L	:Lorentz Grubu
N	:Doğal Sayılar Kümesi
N^+	:Sayma Sayıları Kümesi
$O(1,1,\mathbb{R})$	:(1,1)-Ortogonal Matrisler Grubu
$SO(1,1,\mathbb{R})$	:Özel Ortogonal Grup
$x \overset{G}{\sim} y$	:x elemanı y elemanına G-denktir
$\{x_\tau, \tau \in T\}$	:T kümesiyle indekslenen noktalar ailesi
$\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$	:$\{x_\tau, \tau \in T\}$ ailesi $\{y_\tau, \tau \in T\}$ ailesine G-denktir
η	$:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}$	:Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{R}^{1+1}$	:İç çarpım indeksi 1 olan 2-Boyutlu $\mathbb{R}^2$ Reel Vektör Uzayı
$\mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$	$:= \{(x,y): x \in \mathbb{R}^{1+1}, y \in \mathbb{R}^{1+1}\}$
$\mathbb{R}^{1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{1+1}$ (m-tane)	$:= \{(x_1,\cdots,x_m): x_i \in \mathbb{R}^{1+1}, i = 1,2,\cdots,m\}$
Q	:Rasyonel Sayılar Cismi
Z	:Tam Sayılar Halkası
■	:İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Hiperbolik sayı olarak adlandırılan sayılar çeşitli kaynaklarda Split karmaşık sayı veya Double karmaşık sayı olarak adlandırılır.

Split karmaşık sayıların kullanımı James Cockle' nın 1848 tarihli çalışmasına [1] kadar gider. Willam Kingdom Clifford split karmaşık sayıları çalışmalarında [2] kullanmıştır.

1935' de J.C.Vignaux ve A. Duranonay Vedia çalışmada [4] split karmaşık geometri, cebir ve fonksiyon teorisini geliştirdiler. Bu açıklayıcı ve pedagojik çalışmalarla konuyu umumi değerlendirmelerle sundular.

1995' de G. Sobczyk yaptığı çalışmada [5] Hiperbolik sayılar için modül, iç-çarpım, matris gösterimi ve grafikleri hakkında bilgi sundu. Hiperbolik sayıların hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla gösteriminin ifadesini yaptı.

2003' de F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni, P. Zampetti yaptıkları çalışmada [6] Hiperbolik sayıların Hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla ifadesini verdiler. Hiperbolik sayının grafiksel gösterimini sundular.

2008' de D. Boccaletti, E. Nichelatti, F. Catoni, R. Cannata, V. Catoni and P. Zampetti yazdıkları kitapta [3] Hiperbolik sayılar hakkında geniş bilgi sundular.

Hiperbolik sayılar ile ilgili bilgi [8] ve [9] çalışmalarında da verilmektedir.

Tezin amacı 2- boyutlu hiperbolik geometrideki temel gruplar için G- denklik problemlerini hiperbolik sayılar kullanılarak incelemektir. Bu yöntem hiperbolik geometrideki temel $SO(1,1,\mathbb{R})$, L gruplarına karşılık gelen ve hiperbolik sayılardan oluşan $B(H)_1, L(H)$ gruplarını ortaya çıkardı. Bu yöntemin önemli bir özelliği şu oldu ki, doğal olarak hiperbolik sayıların önemli yeni bir grubunu ($B(H)_2$ grubunu) da ortaya çıkardı.

Tezde aşağıdaki konular incelendi:

1) $SO(1,1,\mathbb{R})$ ve L gruplarına karşılık gelen $B(H)_1$ ve $L(H)$ hiperbolik sayılar gruplarının tanımları ve özellikleri;

2) $B(H)_2$ grubunun tanımı ve özellikleri;

3) $B(H)_1, B(H)_2, L(H)$ gruplarına göre G- denklik problemleri;

4) $O(1,1,\mathbb{R}), SO(1,1,\mathbb{R}), L$ gruplarına göre G- denklik problemleri;

5) $L(H), L, B(H)_1, SO(1,1,\mathbb{R}), B(H)_2, O(1,1,\mathbb{R})$ gruplar arasındaki bağlantılar.

Bu problemlerin çözümleri hiperbolik sayılara ait bazı problemleri ortaya çıkardı. Tezde bu şekilde ortaya çıkmış olan problemler de incelendi.

1.2. Hiperbolik Sayıların Temel Özellikleri

Tanım 1: $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = (a, b)$ ikilisine sıralı ikili denir. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b): a, \mathrm{b} \in \mathbb{R}\}$ olmak üzere, $\forall h, k \in \mathbb{R}^2, h = (x, y), k = (z, w)$ ve $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ için $x = z, y = w \Leftrightarrow h = k$ dır.

Şimdide $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$ üzerinde toplam ve çarpım tanımlayalım.

Tanım 2: $\oplus: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ iç işlemi $h = (x, y), k = (z, w) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $h \oplus k = (x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w)$ şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{R}^2$' deki toplama olarak adlandırılır.

Tanım 3: $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ iç işlemi $h = (x, y), k = (z, w) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $h \odot k = (x, y) \odot (z, w) = (xz + yw, xw + yz)$ şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{R}^2$' deki çarpma olarak adlandırılır.

Tanım 4: $\mathbb{R}$ Reel sayılar cümlesi olmak üzere $\mathbb{R}^2$ cümlesi üzerinde Tanım 2 ve Tanım 3' deki gibi toplama ve çarpma işlemleri tanımlanmış ise ($\mathbb{R}^2$,$\oplus$,$\odot$) cümlesine Hiperbolik sayılar cümlesi denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilir.

Teorem 1: $\mathbb{H}$ cümlesi birimli ve değişmeli halkadır.

İspat: $\mathbb{H}$ cümlesinin değişmeli halka olduğunu gösterelim.

1) ($\mathbb{H}$,$\oplus$) ikilisi birimli ve değişmeli halkadır.

1.1) $\forall A, B, C \in \mathbb{H}$ ve $A = (a, b), B = (c, d), C = (e, f)$ için;

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ ise birleşimlidir.

$$A \oplus (B \oplus C) = (a, b) \oplus \big((c, d) \oplus (e, f)\big) = (a, b) \oplus (c + e, d + f)$$

$$= \big(a + (c + e), b + (d + f)\big) = (a + c + d, b + d + f)$$

$$(A \oplus B) \oplus C = \big((a, b) \oplus (c, d)\big) \oplus (e, f) = (a + c, b + d) \oplus (e, f)$$

$$= \big((a+c)+e,(b+d)+f\big) = (a+c+d, b+d+f)$$

Bu eşitliklerden $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ olduğu görülür.

1.2) $\forall A, B \in \mathbb{H}$ ve $A = (a,b), B = (c,d)$ için $A \oplus B = B \oplus A$ ise $\mathbb{H}$ değişimlidir.

$A \oplus B = (a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

$B \oplus A = (c,d) \oplus (a,b) = (c+a, d+b)$

eşitliklerinden $A \oplus B = B \oplus A$ olduğu görülür.

1.3) $\exists 0 \in \mathbb{H}$ öyle ki keyfi $A \in \mathbb{H}$ için $A \oplus 0 = 0 \oplus A = A$ dır. $0 = (0,0)$ olarak alalım ve keyfi $A = (a,b)$ eleman olsun. $A \oplus 0 = (a,b) \oplus (0,0) = (a,b) = A$ bulunur.

1.4) Keyfi $A \in \mathbb{H}$ için $A \oplus X = X \oplus A = 0$ olacak şekilde $X \in \mathbb{H}$' ın var olduğunu göstermeliyiz.

$A \oplus X = (a,b) \oplus (x,y) = 0 \Longrightarrow (a+x, b+y) = (0,0)$ buradan $x + a = 0 \Longrightarrow x = -a$ ve $y + b = 0 \Longrightarrow y = -b$ dir. Dolayısıyla $X = (-a,-b) \in \mathbb{H}$ dır.

2) $(\mathbb{H},\odot)$ ikilisi birimli ve değişmeli halkadır.

2.1) $\forall A, B, C \in \mathbb{H}$ ve $A = (a,b), B = (c,d), C = (e,f)$ için;

$A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$ ise $\mathbb{H}$ birleşimlidir.

$$A \odot (B \odot C) = (a,b) \odot \big((c,d) \odot (e,f)\big) = (a,b) \odot (ce+df, cf+de) =$$
$$= (a(ce+df) + b(cf+de), a(cf+de) + b(ce+df)) =$$
$$= (ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)$$
$$(A \odot B) \odot C = \big((a,b) \odot (c,d)\big) \odot (e,f) = (ac+bd, ad+bc) \odot (e,f) =$$
$$= \big((ac+bd)e + (ad+bc)f, (ac+bd)f + (ad+bc)e\big) =$$
$$= (ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)$$

Bu eşitlikten $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$ olduğu sonucu çıkar.

2.2) $\forall A, B \in \mathbb{H}$ ve $A = (a,b), B = (c,d)$ için $A \odot B = B \odot A$ ise $\mathbb{H}$ değişimlidir.

$A \odot B = (a,b) \odot (c,d) = (ac+bd, ad+bc)$

$B \odot A = (c,d) \odot (a,b) = (ca+bd, cb+da)$;

bu eşitliklerden $A \odot B = B \odot A$ olduğu sonucu çıkar.

2.3) $\exists \mathcal{E} \in \mathbb{H}$ öyle ki keyfi $A \in \mathbb{H}$ için $A \odot \mathcal{E} = \mathcal{E} \odot A = A$ dır. $\mathcal{E} = (1,0)$ olarak alalım ve $A = (a,b)$ keyfi eleman olsun.

$A \odot \mathcal{E} = (a,b) \odot (1,0) = (a1 + b0, b1 + a0) = (a,b) = A$ buradan çarpımın değişme özelliğinden $A \odot \mathcal{E} = \mathcal{E} \odot A = A$ bulunur.

3) $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerinin dağılma özelliği;

3.1) $\forall A, B, C \in \mathbb{H}$ için $A \odot (B \oplus C) = (A \odot B) \oplus (A \odot C)$ ise soldan dağılma özelliği vardır.

$$A \odot (B \oplus C) = (a,b) \odot \big((c,d) \oplus (e,f)\big) = (a,b) \odot (c+e, d+f) =$$
$$= \big(a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e)\big) =$$
$$= (ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)$$
$$(A \odot B) \oplus (A \odot C) = \big((a,b) \odot (c,d)\big) \oplus \big((a,b) \odot (e,f)\big) =$$
$$= (ac + bd, ad + bc) \oplus (ae + bf, af + be) =$$
$$= (ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be)$$

bu eşitlikten $A \odot (B \oplus C) = (A \odot B) \oplus (A \odot C)$ sonucu çıkar.

3.2) $\forall A, B, C \in \mathbb{H}$ için $(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ ise sağdan dağılma özelliği vardır. Çarpımın değişme özelliğinde bu eşitlikte sağlanır. ■

Teorem 2: $\mathbb{H}$ cümlesi bir cisim değildir.

İspat: Eğer $\mathbb{H}$ cisim olsaydı $\forall 0 \neq A \in \mathbb{H}$ için $A \odot B = B \odot A = (1,0)$ olacak şekilde $B = (x,y) \in \mathbb{H}$ mevcut olması gereklidir. Bu durumda $A = (a,a) \in \mathbb{H}$ için böyle özellikli $B \in \mathbb{H}$ mevcut olmadığını gösterelim.

$$A \odot B = (1,0) \Longrightarrow (a,a) \odot (x,y) = (1,0) \Longrightarrow (ax + ay, ax + ay) = (1,0)$$

$\Longrightarrow \begin{cases} ax + ay = 1 \\ ax + ay = 0 \end{cases}$, bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $B \in \mathbb{H}$ mevcut değildir. ■

Not: $\oplus$ işlemi yerine ‘ + ‘ , $\odot$ işlemi yerine ‘.’ kullanılacak.

Teorem 3: $\mathbb{H}$ hiperbolik sayılar halkası $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar.

İspat: $M = \{(a,0), a \in \mathbb{R}\}, M \subseteq \mathbb{H}$ ve $f: M \longrightarrow \mathbb{R}\,; f(a,0) = a$ olarak tanımlayalım. $\oplus: M \times M \longrightarrow M$ $\forall A, B \in M$, için $A \oplus B = (a,0) \oplus (b,0) = (a+b,0) \in M$ kapalıdır. $\odot: M \times M \longrightarrow M$ $\forall A, B \in M$, için $A \odot B = (a,0) \odot (b,0) = (ab,0) \in M$ kapalıdır. $\oplus$, işlemine göre M abel grubudur.

1) $\forall A, B, C \in \mathbb{H}$ İçin birleşme özelliği olduğundan M’ deki keyfi üç eleman içinde birleşme özelliği vardır.

2) $\forall A, B \in \mathbb{H}$ İçin değişme özelliği olduğundan M’ deki keyfi iki eleman içinde değişme özelliği vardır.

3) M’deki $(0,0) \in M$ ve $A \in M$ için$A \oplus (0,0) = (a,0) \oplus (0,0) = (a,0) = A$ olduğundan $(0,0) \in M$, $\oplus$ işlemine göre birim elemandır.

4) Keyfi $X \in M$ için $Y \in M$ vardır. Öyle ki $X \oplus Y = (0,0)$, dır.

$X = (a, 0)$ için $Y \in M$' nin var olduğunu gösterelim;

$$X \oplus Y = (0,0)$$

$$(a, 0) \oplus (y, 0) = (0,0)$$

$(a + y, 0) = (0,0) \Longrightarrow y = -a$ olur ve $(-a, 0) \in M$ olduğundan $Y \in M$ mevcuttur.

$\odot$ İşleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılma özelliği tüm $\mathbb{H}$'de var olduğundan M'de de vardır.

$\odot$ İşleminin özelliği;

1) $\forall A, B, C \in \mathbb{H}$ için birleşme özelliği olduğundan M' deki keyfi üç eleman içinde birleşme özelliği vardır.

2) $A, B \in \mathbb{H}$ için değişme özelliği olduğundan M' deki keyfi iki eleman içinde değişme özelliği vardır.

3) $(1,0) \in M$ ve $A \in \mathbb{H}$ için $A \odot (1,0) = A$ dır. Tüm $\mathbb{H}$' de birim eleman özelliği olduğundan M'de de vardır.

4) Keyfi $0 \neq X \in M$ için $A \in M$ vardır, öyle ki $A \odot X = (1,0)$' dır.

$X = (x, 0)$ ve $X \neq 0$ olduğundan $x \neq 0'$ dır.

$$A \odot X = (1,0)$$

$$(a, 0) \odot (x, 0) = (1,0)$$

$$(ax + a0, x0 + a0) = (1,0)$$

$(ax, 0) = (1,0) \Longrightarrow ax = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{x}$ bulunur. $A^{-1} = (\frac{1}{x}, 0) \in M$dir.

Dolayısıyla M cisimdir. Şimdi de f' nin izomorfizm olduğunu gösterelim.

f, $\oplus$ işlemine göre homomorfizmdir:

$A = (a, 0), B = (b, 0) \in M \subset \mathbb{H}$ olmak üzere $f(A \oplus B) = f\big((a, 0) \oplus (b, 0)\big) = f(a + b, 0) = a + b = f(a, 0) \oplus f(b, 0) = f(A) \oplus f(B)$ dır.

f, $\odot$ işlemine göre homomorfizmdir:

$A = (a, 0), B = (b, 0) \in M \subset \mathbb{H}$ olmak üzere $f(A \odot B) = f\big((a, 0) \odot (b, 0)\big) = f(ab, 0) = ab = f(a, 0) \odot f(b, 0) = f(A) \odot f(B)$ dir.

f bire birdir:

$A = (a, 0) \neq B = (b, 0) \in M \subset \mathbb{H}$ için $f(A) \neq f(B)$ dir.

$A \neq B \Longrightarrow (a, 0) \neq (b, 0) \Longrightarrow a \neq b \Longrightarrow f(a, 0) \neq f(b, 0) \Longrightarrow f(A) \neq f(B)$

f örtendir:

$\forall b \in \mathbb{R}$ için $b = f(B)$ olacak şekilde $B \in M \subset \mathbb{H}$ vardır. B' yi $B = (b, 0)$ olarak seçelim. $f(b, 0) = b$ dir. ■

Tanım 5: Teorem 3' ün sonucu olarak $(a, 0)$ hiperbolik sayısının izomorfu olan a reel sayısı olarak gösterilecek yani; $(a, 0) = a$ alınacaktır.

Tanım 6: Bir $A = (a, b) \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayısında "a" reel sayısına A' nın reel kısmı, "b" reel sayısına A' nın hiperbolik kısmı denir ve $Re(A) = a, Hp(A) = b$ şeklinde yazılır.

Tanım 7: $(0,1)$ hiperbolik sayısı δ ile gösterilecektir yani; $(0,1) = \delta$ alınacak ve hiperbolik birim olarak adlandırılacak.

Sonuç 1: $\delta^2 = 1$'dir.
İspat: $\delta^2 = \delta\delta = (0,1)(0,1) = (0 + 1, 0 + 0) = (1,0) = 1$ elde edilir. ■

Teorem 4: $A = (a, b) \in \mathbb{H}$ için $A = a + \delta b$ şeklinde tektürlü yazılabilir yani; $(a, b) = a + \delta b$' ye eşittir.
İspat: $A = (a, b) = (a, 0) + (b, 0) = (a, 0) + (0,1)(0, b) = a + \delta b$ elde edilir. ■

Tanım 8: $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ ile $A \in \mathbb{H}$ sayısının çarpımı $\mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$ şeklindeki sayıya bir hiperbolik sayının bir reel skaler ile çarpımı denir.

1.3. Hiperbolik Sayının Matris Gösterimi

Teorem 5: $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $M, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ formundaki matrisler cümlesi olsun. M' de matrislerdeki $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemlerini göz önüne alalım. $(M, +, \cdot)$ işlemlerine göre M birimli değişmeli bir halkadır ve bu halka $\mathbb{H}$' ye izomorftur.

İspat: $f: \mathbb{H} \longrightarrow M$, $f(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, olarak tanımlayalım ve f' in bir izomorfizm olduğunu gösterelim. Öncelikle M' nin $(M, +, \cdot)$ işlemine göre birimli ve değişmeli bir halka olduğunu gösterelim.

$+: M \times M \longrightarrow M, \forall A, B \in M$ İçin

$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \in M$ olduğundan M kapalıdır.

$\cdot: M \times M \longrightarrow M, \forall A, B \in M$ İçin;

$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} \in M$ olduğundan M kapalıdır.

$(M, +)$, İkilisi birimli ve değişmeli bir halkadır.

1) $\forall A, B, C$ matrisleri için birleşme özelliği olduğundan M' deki keyfi üç matris için de birleşme özelliği vardır.

2) Keyfi A, B matrisleri için değişme özelliği olduğundan M' deki keyfi iki matris için de değişme özelliği vardır.

3) $\exists \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$, $A \in M$ keyfi bir matris olsun.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = A \in M$ olduğundan M birimlidir.

4) Keyfi $0 \neq X \in M$ için $A \in M$ vardır öyle ki $A + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0, y \neq 0$ dır.

$A + X = (0,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ b+y & a+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

buradan $a + x = 0 \Longrightarrow x = -a$ ve $b + y = 0 \Longrightarrow y = -b$ dir.

Dolayısıyla $X = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in M$ bulunur.

$(\cdot)$ işleminin $(+)$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$\forall A, B, C \in M$ İçin $A(B + C) = AB + AC$ olduğunu gösterelim

$$A(B+C) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c+e & d+f \\ d+f & c+e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ac+ae+bd+bf & ad+af+bc+be \\ ad+af+bc+be & ac+ae+bd+bf \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ae+bf & af+be \\ af+be & ae+bf \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ac+ae+bd+bf & ad+af+bc+be \\ ad+af+bc+be & ac+ae+bd+bf \end{pmatrix}$$

Buradan gözüküyor ki $A(B + C) = AB + AC$ ‘ dir.

$(\cdot)$ işleminin özelliği:

1) $\forall A, B, C$ matrisleri için birleşme özelliği olduğundan M' deki keyfi üç matris için de birleşme özelliği vardır.

2) Keyfi A, B matrisleri için değişme özelliği olduğundan M' deki keyfi iki matris için de değişme özelliği vardır.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M, A \in M$ keyfi bir matris olsun.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = A \ \in M$, tüm matrisler için birim eleman özelliği var olduğundan M için de var.

4) Keyfi $0 \neq X \in M$ için $A \in M$ vardır öyle ki $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dır.

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0, y \neq 0$ dır.

$$AX = (1,0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} ax+by & ay+bx \\ ay+bx & ax+by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \begin{cases} ax+by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$' bulunur. $a=b$ için $\begin{cases} ax+ay=1 \\ ay+ax=0 \end{cases}$' olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $(M, +, \cdot)$ işlemlerine göre M birimli ve değişmeli bir halkadır.

$f, +$, işlemine göre homomorfizmdir:

$\forall A, B \in \mathbb{H}$ için $f(A+B) = f(A) + f(B)$ olduğunu gösterelim.

$$f(A+B) = f(a+\delta b+c+\delta d) = f((a+c)+\delta(b+d)) = f(a+c, b+d) =$$
$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = f(A) + f(B)$$

$f, \cdot$, işlemine göre homomorfizmdir:

$\forall A, B \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ için $f(\lambda AB) = \lambda f(A) f(B)$ olduğunu gösterelim.

$$f(\lambda AB) = f\big(\lambda(a+\delta b)(c+\delta d)\big) = f(\lambda\big(ac+bd+\delta(ad+bc)\big)) =$$
$$= f(\lambda(ac+bd, ad+bc)) = \lambda\begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda f(A) f(B),$$

Sonuç olarak $f(\lambda AB) = \lambda f(A) f(B)$' dir.

f, bire birdir:

$\forall A, B \in \mathbb{H}$ için $A \neq B \Longrightarrow f(A) \neq f(B)$ olduğunu gösterelim. Gerçek den; $A = (a,b), B = (c,d) \in \mathbb{H}$ için $A \neq B \Longrightarrow a \neq c$ veya $b \neq d$' dir. Dolayısıyla $f(A) \neq f(B)$' dir.

f, Örtendir:

M' deki her bir $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ matrisi $\mathbb{H}'$ deki bir tek $A = (a,b)$ hiperbolik sayısının f ile elde edilmiş görüntüsüdür. ■

1.4. $\boldsymbol{O(1,1,\mathbb{R}), SO(1,1,\mathbb{R})}$ Grupları

Bu kısımda $\mathbb{R}^{1+1}$ reel vektör uzayında, $g: \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \langle x,y \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$ ile verilen indeksi bir olan lorentz iç çarpımını ve $\langle e_{i,}e_i \rangle = \pm 1, i = 1,2$ ve $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i \neq j, i,j = 1,2$ olan $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ ortonormal tabanını ele alacağız. Buna göre,

$O(1,1,\mathbb{R}) = \{F: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1}: \langle F(x), F(y) \rangle = \langle x,y \rangle\}$ kümesi bir grup oluşturur. Bu aşağıda ispat edilecek. Burada kısaca $O(1,1,\mathbb{R}) := O(1,1)$ olarak yazacağız.

Tanım 9: $\mathbb{R}^{1+1}$ reel vektör uzayı olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x,y \rangle$ olan $F: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1}$ dönüşümüne ortogonal dönüşüm denir.

Önerme 1: $F: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1}$ keyfi ortogonal dönüşüm ise, F lineerdir.

İspat: $\mathbb{R}^{1+1}$' de $\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \langle e_2, e_2 \rangle = -1, \langle e_1, e_2 \rangle = 0$ olan $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ ortonormal taban olsun. Buna F' yi kullanırsak, $\langle F(e_1), F(e_1) \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1, \langle F(e_2), F(e_2) \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = -1$, $\langle F(e_1), F(e_2) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$ olup, $\{e_1, e_2\}$ ortonormal taban ve F ortogonal olduğundan $\{F(e_1), F(e_2)\}$ ortonormal tabandır.

Şimdi, $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $x = ae_1 + be_2, a, b \in \mathbb{R}$ ise $a = \langle x, e_1 \rangle, b = -\langle y, e_2 \rangle$ yazabiliriz. $\{F(e_1), F(e_2)\}$ tabanı için, $F(x) = cF(e_1) + dF(e_2), c, d \in \mathbb{R}$ ise $c = \langle F(x), F(e_1) \rangle, d = -\langle F(x), F(x_2) \rangle$ yazabiliriz ve $c = \langle F(x), F(e_1) \rangle = \langle x, e_1 \rangle = a$, $d = -\langle F(x), F(x_2) \rangle = -\langle x, e_2 \rangle = b$ olduğundan $F(x) = aF(e_1) + bF(e_2)'$ dir.

Benzer şekilde $y \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $y = \alpha e_1 + \beta e_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $F(y) = \alpha F(e_1) + \beta F(e_2)'$ dir. Buradan, $x + y = (a + \alpha)e_1 + (b + \beta)e_2$ yazılabilir.

Buna F' yi kullanırsak

$$F(x+y) = (a+\alpha)F(e_1) + (b+\beta)F(e_2) =$$
$$= aF(e_1) + bF(e_2) + \alpha F(e_1) + \beta F(e_2) =$$
$$= F(x) + F(y)\text{' dir.}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ alalım $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $x = ae_1 + be_2, a, b \in \mathbb{R}$ için $\lambda x = \lambda a e_1 + \lambda b e_2$ elde edilir. Buradan,

$F(\lambda x) = F(\lambda ae_1) + F(\lambda be_2) = \lambda\big(F(ae_1) + F(be_2)\big) = \lambda\big(aF(e_1) + bF(e_2)\big) = \lambda F(x)$ elde edilir. Böylece F lineerdir.■

Tanım 10: $g: \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ indeksi bir olan lorentz iç çarpım olsun. $\varphi: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(v) = g(v,v) = \langle v,v\rangle = v_1^2 - v_2^2$ ile tanımlanan dönüşüme $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerinde g- iç çarpımıyla verilen kuadratik form denir.

Lemma 1: $F: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1}$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denkdir:

i) F, ortogonal dönüşümdür.

ii) F, kuadratik formu korur, yani keyfi $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $\varphi\big(F(x)\big) = \varphi(x)$' dir.

iii) F, $\mathbb{R}^{1+1}$' nin her ortonormal tabanını $\mathbb{R}^{1+1}$' nin başka ortonormal tabanına taşır.

İspat:

"**i)** $\Longrightarrow$ **ii)**" F, ortogonal dönüşüm olsun. Bu taktirde tanım10' dan $\forall x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle'$ dir. $\mathbb{R}^{1+1}$' de $\{e_1, e_2\}$ ortonormal tabanını alalım. F, ortogonal olduğundan $\{F(e_1), F(e_2)\}$' de ortonormaldir. Yani, $\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \pm 1$, $i = j = 1,2$, $\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = 0, i \neq j$' dir.

$x \in \mathbb{R}^{1+1}$ alalım buradan $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$' dir. Böylece $F(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i)$' dir.

$\langle F(x), F(x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i), \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i)\rangle =$

$= \langle F(e_1), F(e_1)\rangle + 2x_1x_2\langle F(e_1), F(e_2)\rangle + x_2^2\langle F(e_2), F(e_2)\rangle =$

$= x_1^2 - x_2^2 = \langle x, x\rangle$ olup kuadratik formu korur.

"**ii)** $\Longrightarrow$ **iii)**" Keyfi $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ elemanı için $\varphi\big(F(x)\big) = \varphi(x)$ olsun. $\mathbb{R}^{1+1}$' de $\{e_1, e_2\}$ ortonormal tabanını alalım. Keyfi $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ elemanı $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ şeklinde ifade edilebilir. F, lineer olduğundan $F(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i)$' dir. F, kuadratik formu koruduğundan keyfi $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $\langle F(x), F(x)\rangle = \langle x, x\rangle$' dir. Buradan, $\langle F(x), F(x)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i), \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i)\rangle =$

$= x_1^2\langle F(e_1), F(e_1)\rangle + 2x_1x_2\langle F(e_1), F(e_2)\rangle + x_2^2\langle F(e_2), F(e_2)\rangle$' dir. Diğer tarafdan,

$\langle x, x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{i=1}^{2} x_i e_i\rangle = x_1^2\langle e_1, e_1\rangle + 2x_1x_2\langle e_1, e_2\rangle + x_2^2\langle e_2, e_2\rangle$' dir.

$\langle F(x), F(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ olduğundan

$x_1^2\langle F(e_1), F(e_1)\rangle + 2x_1x_2\langle F(e_1), F(e_2)\rangle + x_2^2\langle F(e_2), F(e_2)\rangle =$

$x_1^2\langle e_1,e_1\rangle+2x_1x_2\langle e_1,e_2\rangle+x_2^2\langle e_2,e_2\rangle$ olup eşitliğin sağlanabilmesi için $\langle F(e_1),F(e_1)\rangle=\langle e_1,e_1\rangle,\langle F(e_1),F(e_2)\rangle=\langle e_1,e_2\rangle,\langle F(e_2),F(e_2)\rangle=\langle e_2,e_2\rangle$ olmalıdır. Buradan $\mathbb{R}^{1+1}$' de $\{e_1,e_2\}$ ortonormal taban olup $\{F(e_1),F(e_2)\}$' de ortonormal tabandır.

"**iii)** $\Longrightarrow$ **i)**" F' nin ortogonal olduğunu göstermek istiyoruz. $\mathbb{R}^{1+1}$' de $\{e_1,e_2\}$ ortonormal tabanını alalım. $F,\mathbb{R}^{1+1}$' nin her ortonormal tabanını $\mathbb{R}^{1+1}$' nin başka ortonormal tabanına taşıdığından $\{F(e_1),F(e_2)\}$' de ortonormal tabandır. $x\in\mathbb{R}^{1+1}$ alalım. $\mathbb{R}^{1+1}$' de $\{e_1,e_2\}$ ortonormal taban olduğundan $x=\sum_{i=1}^{2}x_ie_i$ şeklinde ifade edilir. F, lineer olduğundan $F(x)=\sum_{i=1}^{2}x_iF(e_i)$' dir. Benzer şekilde $y\in\mathbb{R}^{1+1}$ alalım. $\mathbb{R}^{1+1}$' de $\{e_1,e_2\}$ ortonormal taban olduğundan $y=\sum_{i=1}^{2}y_ie_i$ şeklinde ifade edilir. F, lineer olduğundan $F(y)=\sum_{i=1}^{2}y_iF(e_i)$' dir.

$$\begin{aligned}\langle F(x),F(y)\rangle&=\left\langle\sum_{i=1}^{2}x_iF(e_i),\sum_{j=1}^{2}y_jF(e_j)\right\rangle=\sum_{i,j=1}^{2}x_iy_j\langle F(e_i),F(e_j)\rangle\\&=\sum_{i,j=1}^{2}x_iy_j\langle e_i,e_j\rangle=\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

olup F, ortogonaldir.■

Tanım 11: A, 2×2 tipinde bir matris olsun. A' nın satırlarının ve sütünlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen matrise A' nın transpozesi denir ve A^t ile gösterilir.

Önerme 2: $O(1,1,\mathbb{R})=\{F:\mathbb{R}^{1+1}\longrightarrow\mathbb{R}^{1+1}:\langle F(x),F(y)\rangle=\langle x,y\rangle\}$, $F\in O(1,1,\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow\{F'$in $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ve $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ tabana göre matrisi $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}:a,b,c,d\in\mathbb{R},A^t\eta A=\eta,\eta=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\}$ şeklindedir.

İspat: $\mathbb{R}^{1+1\prime}$ de $g:\mathbb{R}^{1+1}\times\mathbb{R}^{1+1}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g(x,y)=\langle x,y\rangle=x_1y_1-x_2y_2$ indeksi bir olan lorentz iç çarpımı olmak üzere $\langle e_i,e_j\rangle=\pm1,i=1,2$ ve $\langle e_i,e_j\rangle=0,i\neq j,i,j=1,2$ olan $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ şeklindeki ortonormal taban olsun. $F:\mathbb{R}^{1+1}\longrightarrow\mathbb{R}^{1+1}$ bir ortogonal dönüşüm ve $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ bir ortonormal taban olmak üzere, $F(e_1)=(a,b)$ ve $F(e_2)=(c,d)$ olarak tanımlayalım. Bu dönüşüme karşılık gelen matris $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$' dir. F, ortogonal dönüşümünün özelliklerini kullanarak,

$\langle e_1,e_1\rangle=1$ olup $\langle F(e_1),F(e_1)\rangle=\langle e_1,e_1\rangle$ olduğundan $\langle F(e_1),F(e_1)\rangle=1\Longrightarrow$ $\Longrightarrow\langle(a,b),(a,b)\rangle=1\Longrightarrow a^2-b^2=1$ …… (*).

$\langle e_1,e_2\rangle=0$ olup $\langle F(e_1),F(e_2)\rangle=\langle e_1,e_2\rangle$ olduğundan $\langle F(e_1),F(e_2)\rangle=0\Longrightarrow$ $\Longrightarrow\langle(a,b),(c,d)\rangle=0\Longrightarrow ac-bd=0$ …… (**).

$\langle e_2, e_2\rangle = -1$ olup $\langle F(e_2), F(e_2)\rangle = \langle e_2, e_2\rangle$ olduğundan $\langle F(e_2), F(e_2)\rangle = -1 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \langle (c,d),(c,d)\rangle = -1 \Rightarrow c^2 - d^2 = -1$ …… (***).

Ancak ortogonal dönüşüm matris formunda, $\begin{pmatrix} \langle F(e_1), F(e_1)\rangle & \langle F(e_1), F(e_2)\rangle \\ \langle F(e_2), F(e_1)\rangle & \langle F(e_2), F(e_2)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{pmatrix}$ olduğundan (*),(**),(***)' ı kullanarak bu matris $\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şeklinde ifade edilir.

$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olduğundan $A\eta A^t = A^t\eta A = \eta$ olup F, ortogonal dönüşümü bu matris ile ifade edilebilir.

Şimdi tersini gösterelim. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, A^t\eta A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olan matrise karşılık gelen dönüşümün ortogonal olduğunu gösterelim.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, A^t\eta A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. Bu matrise karşılık gelen dönüşüm $F: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1}$ olsun. Biz F' nin ortogonal olduğunu göstermek istiyoruz. O zaman $\mathbb{R}^{1+1\prime}$ de $g: \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \langle x,y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$, indeksi bir olan lorentz iç çarpımı olmak üzere $\langle e_i, e_j\rangle = \pm 1, i = 1,2$ ve $\langle e_i, e_j\rangle = 0, i \neq j, i,j = 1,2$ olan $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ şeklindeki ortonormal taban alalım. Buradan $F(e_1) = (a,b)$ ve $F(e_2) = (c,d)$ olarak yazabiliriz. A matrisinin özelliğinden $\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ yazabiliriz.

$\langle F(e_1), F(e_1)\rangle = \langle (a,b),(a,b)\rangle = a^2 - b^2 = \langle e_1, e_1\rangle$,

$\langle F(e_1), F(e_2)\rangle = \langle (a,b),(c,d)\rangle = ac - bd = \langle e_1, e_2\rangle$,

$\langle F(e_2), F(e_2)\rangle = \langle (c,d),(c,d)\rangle = c^2 - d^2 = \langle e_2, e_2\rangle'$ dir. Buradan $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $x = ae_1 + be_2$ alırsak, bunu $F(x) = aF(e_1) + bF(e_2)$ ile ifade edebiliriz. Benzer şekilde $y \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $y = ce_1 + de_2$ için $F(y) = cF(e_1) + dF(e_2)'$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}\langle F(x), F(y)\rangle &= \langle aF(e_1) + bF(e_2), cF(e_1) + dF(e_2)\rangle = \\ &= ac\langle F(e_1), F(e_1)\rangle + (ad + bc)\langle F(e_1), F(e_2)\rangle + bd\langle F(e_2), F(e_2)\rangle = \\ &= ac\langle e_1, e_1\rangle + (ad + bc)\langle e_1, e_2\rangle + bd\langle e_2, e_2\rangle = ac - bd = \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

olup F, ortogonaldir. Böylece, $O(1,1,\mathbb{R}) = \{F: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1} : \langle F(x), F(y)\rangle = \langle x,y\rangle\} =$ $= \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, A^t\eta A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}'$ dır. ■

Önerme 3: Keyfi $F \in O(1,1)$ ve $\{e_1, e_2\}$, indeksi bir olan ortonormal taban ise,

$\{F(e_1), F(e_2)\}'$ de indeksi bir olan ortonormal tabandır.

İspat: Keyfi $F \in O(1,1)$ ve $\{e_1, e_2\}$, indeksi bir olan ortonormal taban olsun. $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ alalım.F lineer olduğundan $F(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i)'$ dir. $y = \sum_{i=1}^{2} y_i e_i$ alalım.F lineer olduğundan $F(y) = \sum_{i=1}^{2} y_i F(e_i)$' dir. F ortogonal olduğundan $\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle$' dir. Buradan,

$\langle F(x), F(y)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i), \sum_{j=1}^{2} y_j F(e_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \langle F(e_i), F(e_j)\rangle$

$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2} x_i e_i, \sum_{i=1}^{2} y_j e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle$ olup $\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ olduğundan $\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ olmalıdır. Ancak $\{e_1, e_2\}$, indeksi bir olan ortonormal taban olduğundan $\langle e_1, e_1\rangle = 1, \langle e_2, e_2\rangle = -1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$ veya $\langle e_1, e_1\rangle = -1, \langle e_2, e_2\rangle = 1$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ şeklindedir.

Eğer $\langle e_1, e_1\rangle = 1, \langle e_2, e_2\rangle = -1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$ ise, $\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ olduğundan $\langle F(e_1), F(e_1)\rangle = 1, \langle F(e_2), F(e_2)\rangle = -1, \langle F(e_1), F(e_2)\rangle = 0$' dır.

Eğer $\langle e_1, e_1\rangle = -1, \langle e_2, e_2\rangle = 1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$ ise, $\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ olduğundan $\langle F(e_1), F(e_1)\rangle = -1, \langle F(e_2), F(e_2)\rangle = 1, \langle F(e_1), F(e_2)\rangle = 0$' dır.

Böylece $\{F(e_1), F(e_2)\}$, indeksi bir olan ortonormal tabandır. ■

Önerme 4: $\{e_1, e_2\}$ ve $\{f_1, f_2\}$ indeksi bir olan ortonormal tabanlar olmak üzere $F(e_i) = f_i, i, j = 1,2$ olacak şekilde tek $F \in O(1,1)$ vardır.

İspat: $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ ve $y = \sum_{i=1}^{2} y_i e_i$ olmak üzere $F(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i)$, $F(y) = \sum_{i=1}^{2} y_i F(e_i)$ alalım. $\{e_1, e_2\}$ indeksi bir olan ortonormal taban olduğundan $\langle e_1, e_1\rangle = 1, \langle e_2, e_2\rangle = -1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$ olarak alalım. $\{f_1, f_2\}$ indeksi bir olan ortonormal taban olduğundan $\langle f_1, f_1\rangle = 1, \langle f_2, f_2\rangle = -1, \langle f_1, f_2\rangle = 0$ veya $\langle f_1, f_1\rangle = -1$, $\langle f_2, f_2\rangle = 1, \langle f_1, f_2\rangle = 0$ şeklindedir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = 1, \langle e_2, e_2\rangle = -1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$ olmak üzere $\langle f_1, f_1\rangle = 1, \langle f_2, f_2\rangle = -1, \langle f_1, f_2\rangle = 0$ olsun. $F(e_1) = f_1, F(e_2) = f_2$ olan lineer dönüşümünü alalım.

$$\langle F(x), F(y)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i), \sum_{j=1}^{2} y_j F(e_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \langle F(e_i), F(e_j)\rangle =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \langle f_i, f_j\rangle = \langle x, y\rangle$$

olup $F \in O(1,1)$' dir.

Şimdi $\langle e_1, e_1\rangle = 1, \langle e_2, e_2\rangle = -1, \langle e_1, e_2\rangle = 0$ olmak üzere

$\langle f_1, f_1\rangle = -1, \langle f_2, f_2\rangle = 1, \langle f_1, f_2\rangle = 0$ olsun.

$F(e_1) = f_1, F(e_2) = f_2$ olan lineer dönüşümünü alalım.

$\langle F(x), F(y)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{2} x_i F(e_i), \sum_{j=1}^{2} y_j F(e_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \langle F(e_i), F(e_j)\rangle =$

$= x_1 y_1 \langle F(e_1), F(e_1)\rangle + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\langle F(e_1), F(e_2)\rangle + x_2 y_2 \langle F(e_2), F(e_2)\rangle$

$= x_1 y_1 \langle f_2, f_2\rangle + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\langle f_1, f_2\rangle + x_2 y_2 \langle f_1, f_1\rangle =$

$= \sum_{i,j=1}^{2} x_i y_j \langle f_i, f_j\rangle = \langle x, y\rangle$

olup $F \in O(1,1)$' dir.

Şimdi ise, $F \in O(1,1)$' in tekliğini gösterelim. Farz edelim $F_1(e_1) = f_1, F_1(e_2) = f_2$ $F_2(e_1) = f_1, F_2(e_2) = f_2$ veya $F_1(e_1) = f_2, F_1(e_2) = f_1, F_2(e_1) = f_2, F_2(e_2) = f_1$ olacak şekilde $F_1 F_2 \in O(1,1,)$ olsun. Keyfi $x = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ olmak üzere, $F_1(e_1) = f_1, F_1(e_2) = f_2$, $F_2(e_1) = f_1, F_2(e_2) = f_2$ için $F_1(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F_1(e_i) = \sum_{i=1}^{2} x_i f_i$, $F_2(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F_2(e_i) = \sum_{i=1}^{2} x_i f_i{}'$ dir. Böylece $F_1(x) = F_2(x)$ olup $F_1 = F_2{}'$ dir. Şimdi, $F_1(e_1) = f_2, F_1(e_2) = f_1, F_2(e_1) = f_2, F_2(e_2) = f_1$ için

$F_1(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F_1(e_i) = x_1 F_1(e_1) + x_2 F_1(e_2) = x_1 f_2 + x_2 f_1$,

$F_2(x) = \sum_{i=1}^{2} x_i F_2(e_i) = x_1 F_2(e_1) + x_2 F_2(e_2) = x_1 f_2 + x_2 f_1$' dir. Böylece $F_1(x) = F_2(x)$ olup $F_1 = F_2$' dir.

Sonuç olarak, bu önermedeki şartı sağlayan tek $F \in O(1,1)$ vardır. ■

Sonuç 2: Keyfi $A \in O(1,1)$ için $\det A = \pm 1$' dir.

İspat: $A \in O(1,1)$ alalım. $A \in O(1,1)$ olduğundan $A^t \eta A = \eta$' dir. Her iki tarafın determinantı alınırsa $\det A^t \eta A = \det \eta \Longrightarrow \det A^t \det \eta \det A = \det \eta \Longrightarrow (\det A)^2 = 1$' dir. Ancak $\det A^t = \det A$ olup, buradan $(\det A)^2 = 1 \Longrightarrow \det A = \pm 1$' dir. ■

Önerme 5: $\mathrm{O}(1,1) = \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} : \mathrm{a, b, c, d} \in \mathbb{R}, \mathrm{A^t \eta A} = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

İspat: $A, B \in O(1,1)$ olsun,

$A \in O(1,1)$ olduğu için $A^t \eta A = \eta$ …… (*),

$B \in O(1,1)$ olduğu için $B^t \eta B = \eta$ …… (**) dır.

$AB \in O(1,1)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için; $(AB)^t \eta (AB) = \eta$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(AB)^t \eta (AB) = \eta \Longrightarrow B^t \underbrace{A^t \eta A}_{(*)} B = \eta \Longrightarrow \underbrace{B^t \eta B}_{(**)} = \eta$ olup $AB \in O(1,1)$' dir.

Şimdi grup aksiyomlarını gösterelim:

1) $A, B, C \in O(1,1)$ olsun. $(AB)C = A(BC)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in O(1,1)$ alalım. Bu durumda

$$(AB)C = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{11} + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{12} + (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{11} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})c_{12} + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right) = A(BC) \text{ olur.}$$

2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. $I^t \eta I = \eta$ ve $\det I = 1 \neq 0$ olduğundan $I \in O(1,1)$' dir. $A = I \in O(1,1)$ olarak alınırsa $\forall B \in O(1,1)$ için $IB = BI = B$ olup $I \in O(1,1)$ birim elemanıdır.

3) $A \in O(1,1)$ alalım. Sonuç 1' e göre $\det A = \pm 1$ olup $\det A \neq 0$ olduğundan A matrisinin tersi vardır ve A^{-1} ile gösterilir. Biz $A^{-1} \in O(1,1)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$A \in O(1,1)$ olduğundan $A^t \eta A = \eta \Longrightarrow A^t \eta = \eta A^{-1} \Longrightarrow (A^t)^{-1} \eta A^{-1} = \eta$' dir. Ancak A^{-1}, A matrisinin tersi olduğundan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ dır. Burada transpoze işlemi uygulanırsa $(AA^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t \Longrightarrow (A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I$ dir. Burada A^t' nin tersi $(A^{-1})^t$' dir. Aynı zamanda A^t' nin tersi$(A^t)^{-1}$ olup $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$' dir. Böylece $(A^{-1})^t \eta A^{-1} = \eta$ olup $A^{-1} \in O(1,1)$' dir.

Böylece $O(1,1)$ matrislerdeki çarpma işlemine göre gruptur. ■

Not: $SO(1,1,\mathbb{R}) = \{A \in O(1,1,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ kümesini kısaca $SO(1,1)$ olarak alacağız.

Önerme 6: $SO(1,1) = \{A \in O(1,1,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ kümesi matrislerde çarpma işlemine göre gruptur.

İspat: $A, B \in SO(1,1)$ olsun.

$A \in SO(1,1)$ olduğu için tanımdan $A^t \eta A = \eta, \det A = 1$ ……(*)

$B \in SO(1,1)$ olduğu için tanımdan $B^t \eta B = \eta, \det B = 1$ ……(**)

$AB \in SO(1,1)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için; $(AB)^t \eta (AB) = \eta$ ve

$\det(AB) = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(AB)^t\eta(AB) = \eta \Longrightarrow B^t\underbrace{A^t\eta A}_{(*)}B = \eta \Longrightarrow$ $\underbrace{B^t\eta B}_{(**)} = \eta$ olup $AB \in O(1,1)$ dir. Şimdi determinantına bakalım.
$\det(AB) = \det A \det B = 1$ olduğundan $AB \in SO(1,1)$' dir.

Şimdi grup aksiyomlarını gösterelim:

1) $A, B, C \in SO(1,1)$ olsun. $(AB)C = A(BC)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Ancak $SO(1,1) \subset O(1,1)$ olduğundan bu özellik özel olarak sağlanır.

2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. $I \in O(1,1)$ ve $\det I = 1$ olduğundan $I \in SO(1,1)$' dir. $A = I \in SO(1,1)$ olarak alınırsa $\forall B \in SO(1,1)$ için $IB = BI = B$ olup $I \in SO(1,1)$ birim elemanıdır.

3) $A \in SO(1,1))$ alalım. $A \in SO(1,1)$olduğundan $A \in O(1,1), \det A = 1$' dir. $\det A \neq 0$ olduğundan A matrisinin tersi vardır ve A^{-1} ile gösterilir. Biz $A^{-1} \in SO(1,1)$ olduğunu göstermek istiyoruz. $A \in O(1,1), \det A = 1$ olduğundan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\det A = a^2 - b^2 = 1$ alalım. $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \in O(1,1), \det A = a^2 - b^2 = 1$ olduğundan $A^{-1} \in SO(1,1)$' dir.

Böylece $SO(1,1)$ matrisler de çarpma işlemine göre gruptur. ■

Tanım 12: $SO(1,1) = \{A \in O(1,1,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$ grubuna özel ortogonal grup denir.

1.5. Küme Üzerinde Grup Hareketi

Tanım 13: G bir grup ve E bir küme olsun. Bir $\varphi: G \times E \longrightarrow E$ dönüşümü verilsin. $g \in G, x \in E$ için $\varphi(g, x) = gx$ şeklinde yazalım. $\forall g_1, g_2 \in G, x \in E$ için:

i) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$,

ii) e, G' nin birimi olmak üzere $ex = x$

koşulları sağlanıyorsa φ ye G' nin E üzerindeki hareketi(etkisi) denir.

Örnek 1: $O(1,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerindeki hareketi $g = \|a_{ij}\| \in O(1,1)$ ve $x = \|x_j\| \in \mathbb{R}^{1+1}, (i, j = 1,2)$ ve $\|x_j\| -$ sutun şeklinde olmak üzere

$gx = \|a_{ij}\| \|x_j\| = \|\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j\|$ olarak verilir.

i) $g = \|a_{ij}\|, h = \|b_{jk}\| \in O(1,1)$ ve $x = \|x_k\| \in \mathbb{R}^{1+1}$ için;

$(gh)x = (\|a_{ij}\|\|b_{ij}\|)\|x_k\| = \|\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk}\|\|x_k\| = \|\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(a_{ij}b_{jk})x_k\| =$

$= \|\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{ij}(b_{jk}x_k)\| = \|a_{ij}\|\|\sum_{k=1}^{2} b_{jk}x_k\| = \|a_{ij}\|(\|b_{ij}\|\|x_k\|) = g(hx)$

elde edilir.

ii) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(1,1)$ birim elemanını alalım. $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$ için;

$Ix = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ olduğundan $Ix = x$ elde edilir.

Örnek 2: $SO(1,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{1+1}$ hareketi örnek 1' deki gibidir.

Örnek 3: $O(1,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$ hareketi $g \in O(1,1)$ ve $(x,y) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $g(x,y) = (gx, gy)$ olarak verilir. Gerçekten;

a) $\forall g_1, g_2 \in O(1,1)$ ve $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$ için $g_1 g_2 \in O(1,1)$ olacağından;

$(g_1g_2)(x,y) = ((g_1g_2)x, (g_1g_2)y) = (g_1(g_2x), g_1(g_2y)) = g_1(g_2x, g_2y) =$

$= g_1(g_2(x,y))$ elde edilir.

b) $I \in O(1,1)$ birim eleman olmak üzere $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$ için

$I(x,y) = (Ix, Iy) = (x,y)$ olup istenen sağlanır.

Benzer şekilde $H \subset O(1,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{1+1}$ (m tane) hareketi $g \in H \subset O(1,1), x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$ için;

$g(x_1, \cdots, x_m) = (gx_1, \cdots, gx_m) \in \mathbb{R}^{1+1} \times \mathbb{R}^{1+1}$ ile verilir.

1.6. G-Denk Vektörler Sistemi ve G-Yörünge

Tanım 14: G bir grup olmak üzere, G' nin $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerindeki etkisi verilsin. $x \in \mathbb{R}^{1+1}, y \in \mathbb{R}^{1+1}$ olsun. $\exists g \in G$ öyle ki $y = gx$ ise x eleman y' ye G-denktir denir ve bu durum $x \overset{G}{\sim} y$ ile gösterilir.

İki vektör ailesinin denkliği ise şu şekilde verilir. $\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}$, $\mathbb{R}^{1+1}$ de iki vektör ailesi olsun. $\exists g \in G$ için $y_\tau = gx_\tau, \forall \tau \in T$ ise bu vektör ailelerine G-denktir denir ve $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ ile gösterilir.

$K \subset O(1,1)$ alt grup olsun. $x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $\exists g \in K$ öyle ki $y = gx$ ise x eleman y' ye K-denktir denir ve $x \overset{K}{\sim} y$ ile gösterilir.

$\{x_\tau, \tau \in T\}$ ve $\{y_\tau, \tau \in T\}, \mathbb{R}^{1+1}$ de iki vektör ailesi olsun. $\exists g \in K$ için $y_\tau = gx_\tau, \forall \tau \in T$ ise bu vektör ailelerine K-denktir denir ve $\{x_\tau, \tau \in T\} \overset{K}{\sim} \{y_\tau, \tau \in T\}$ ile gösterilir.

Önerme 7: G grubunun $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerindeki etkisi verilmek üzere, $x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $x \overset{G}{\sim} y$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: "$\sim$" bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetrik ve geçişli özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekir. Bunları gösterelim.

i) $\forall x \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $x \sim x$' dir. $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ ve $g = I \in G$ alalım. $x = gx = Ix$ olup $x \sim x$' dir.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$' dir. $x, y \in \mathbb{R}^{1+1}$ alalım. $x \sim y \Longrightarrow \exists g \in G$ öyle ki $y = gx$' dir. Burada eşitliğin her iki tarafı $g^{-1} \in G$ ile çarpılırsa $y = gx \Longrightarrow g^{-1}y = g^{-1}gx \Longrightarrow g^{-1}y = Ix = x$ olup $y \sim x$' dir.

iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^{1+1}$ için $x \sim y$ ve $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$' dir. $x, y, z \in \mathbb{R}^{1+1}$ alalım. $x \sim y$ olduğundan $\exists g_1 \in G$ öyle ki $y = g_1 x$' dir.$\cdots$ (1),
$y \sim z$ olduğundan $\exists g_2 \in G$ öyle ki $z = g_2 y$' dir.$\cdots$ (2),
(2)' de y yerine (1) deki eşiti yazılırsa $z = g_2 g_1 x$' dir. Ancak $g_2 g_1 \in G$ olduğundan $x \sim z$' dir.

Böylece "$\sim$" bağıntısı yansıma, simetrik ve geçişli özelliklerini sağladığından denklik bağıntısıdır. ■

Örnek 4: $G = SO(1,1)$ alalım. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$ için

$\exists A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ öyle ki $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ise x, y' ye $SO(1,1)$-denktir.

Tanım 15: Bir G grubunun bir E kümesi üzerinde etkisi verilsin. Bir $x \in E$ noktasının G yörüngesi $Gx = \{gx : g \in G\}$ olarak verilir.

Örnek 5: $G = O(1,1)$ ve $E = \mathbb{R}^{1+1}$ alalım. Bir $x \in \mathbb{R}^{1+1}$ noktasının $O(1,1)$ yörüngesi $O(1,1)(x) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, |a| \neq |b|, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ şeklindedir.

Not: 1) Yörüngeler, G-denklik bağıntısının denklik sınıflarıdır.

2) iki yörüngenin arakesiti boş küme değilse yörüngeler çakışır. Arakesiti boş küme ise farklı yörüngelerdir.

1.7. $\mathbf{O(1,1,\mathbb{R})}, \boldsymbol{SO(1,1,\mathbb{R})}$ ve $\boldsymbol{L}$ Gruplarının Yörüngeleri

Verilen $k \in \mathbb{R}$ için $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1+1}: x_1^2 - x_2^2 = k\}$ kümesini Y_k ile gösterelim.

Önerme 8 [11]: i) Keyfi $k \neq 0$ için Y_k kümesi $O(1,1)$ grubunun yörüngesidir.

ii) $k = 0$ için $Y_0 \setminus \{(0,0)\}$ kümesi $O(1,1)$ grubunun yörüngesidir.

iii) $\{(0,0)\}$ noktası $O(1,1)$ grubunun yörüngesidir.

iv) $O(1,1)$ grubunun i),ii) ve iii)' de verilen yörüngelerinden farklı yörüngesi yoktur.

k = 0 için $\{x = (x_1, x_2) \in Y_0 \setminus \{(0,0)\}: x_1 = x_2\}$ kümesini Y_{00} ve $\{x = (x_1, x_2) \in Y_0 \setminus \{(0,0)\}: x_1 = -x_2\}$ kümesini Y_{01} ile gösterelim

Önerme 9 [11]: i) Keyfi $k \neq 0$ için Y_k kümesi $SO(1,1)$ grubunun yörüngesidir.

ii) $k = 0$ için Y_{00} kümesi $SO(1,1)$ grubunun yörüngesidir.

iii) $k = 0$ için Y_{01} kümesi $SO(1,1)$ grubunun yörüngesidir.

iv) $\{(0,0)\}$ noktası $SO(1,1)$ grubunun yörüngesidir.

v) $SO(1,1)$ grubunun i),ii), iii) ve iv)' de verilen yörüngelerinden farklı yörüngesi yoktur.

$k > 0$ için; $Y_{k0} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_1 > 0\}$ ve $Y_{k1} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_1 < 0\}$

$k < 0$ için; $Y_{k0} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_2 > 0\}$ ve $Y_{k1} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_k: x_2 < 0\}$

$k = 0$ için; $Y_{000} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{00}: x_1 > 0\}$, $Y_{001} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{00}: x_1 < 0\}$

$Y_{010} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{01}: x_2 > 0\}$, $Y_{011} = \{x = (x_1, x_2) \in Y_{01}: x_2 < 0\}$

kümelerini gösterelim.

Önerme 10 [11]: i) Keyfi $k \neq 0$ için Y_{k0} ve Y_{k1} kümeleri L grubunun yörüngeleridir.

ii) $k = 0$ için $Y_{000}, Y_{001}, Y_{010}, Y_{011}$ kümeleri L grubunun yörüngeleridir.

iii) $\{(0,0)\}$ noktası L grubunun yörüngesidir.

iv) L grubunun i),ii) ve iii)' de verilen yörüngelerinden farklı yörüngesi yoktur.

1.8. G-İnvaryant Fonksiyon

Tanım 16: G bir grup olmak üzere, G' nin $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerindeki etkisini alalım. $f, \mathbb{R}^{1+1}$ üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir reel fonksiyon olsun. $\forall g \in G$ için $f(gx) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^{1+1}$ ise f, fonksiyona G-invaryant denir.

Tüm G-invaryant polinomlar kümesi $\mathbb{R}[x]^G$ ile, tüm G-invaryant rasyonel fonksiyonlar kümesi $\mathbb{R}(x)^G$ ile gösterilir.

$x \overset{G}{\sim} y$ olsun. Bu durumda $\exists g \in G$ için $y = gx$ tir. $\forall f, G$-invaryant polinomu için $f(y) = f(gx) = f(x)$ olduğundan $f(y) = f(x)$' dir. Tersine , $\forall f, G$-invaryant polinomu için $f(y) = f(x)$ ise y, x' e G-denk olmayabilir.

Örnek 6: $O(1,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerindeki etkisini alalım. $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $|\det(x_1, x_2)| = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{Vmatrix}$ alınırsa bu $O(1,1)$ invaryanttır. Gerçekten, $\forall g \in O(1,1)$ için,

$|\det(gx_1, gx_2)| = |\det g \det(x_1, x_2)| = \ |\det g||\det(x_1, x_2)| = |\det(x_1, x_2)|$ elde edilip istenen sağlanır.

Örnek 7: $G = O(1,1)$ olsun. $O(1,1)$ grubunun $\mathbb{R}$ üzerindeki etkisini alalım. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \langle x, x \rangle$ alınırsa bu $O(1,1)$ invaryanttır. Gerçekten, $\forall g \in O(1,1)$ için: $f(gx) = \langle gx, gx \rangle = \langle x, x \rangle = f(x)$ olup istenen sağlanır.

Tanım 17: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V- $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $x_1, x_2, \cdots, x_n \in V$ olmak üzere $Gr(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$ matrisine Gram matrisi denir.

Örnek 8: $O(1,1)$ grubunun $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerindeki hareketini alalım. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $\det Gr(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix}$ alınırsa bu $O(1,1)$ invaryanttır. Gerçekten, $\forall g \in O(1,1)$:

$$\det Gr(gx_1, gx_2) = \det \begin{pmatrix} \langle gx_1, gx_1 \rangle & \langle gx_1, gx_2 \rangle \\ \langle gx_2, gx_1 \rangle & \langle gx_2, gx_2 \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \det Gr(x_1, x_2)$$

elde edilip istenen sağlanır.

Önerme 11: $\mathbb{R}[x]^G$ kümesi $\mathbb{R}[x]$ polinomlar $\mathbb{R}$-cebirinin birimli alt $\mathbb{R}$-cebiridir.

İspat: $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x]^G$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall g \in G$ için;

$(f_1 + f_2)(gx) = f_1(gx) + f_2(gx) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$,

$(f_1 f_2)(gx) = f_1(gx) f_2(gx) = f_1(x) f_2(x) = (f_1 f_2)(x)$,

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\lambda f_1)(gx) = \lambda f_1(gx) = \lambda f_1(x) = (\lambda f_1)(x)$ dir.
$1(x) = 1 \in \mathbb{R}[x]$ birim elemanı için $(1f_1)(gx) = 1(gx)f_1(gx) = 1f_1(x) = f_1(x)$ olup $f_1 - f_2, f_1f_2, \lambda f_1, 1 \in \mathbb{R}[x]^G$' dir. Yani, $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$' in bir birimli alt $\mathbb{R}$-cebiridir. ■

Tanım 18: $G \subset O(1,1)$ bir alt grup ve $f, \mathbb{R}^{1+1}$ üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun. $\exists \lambda(h)(h \in G)$ fonksiyonu için $f(hx) = \lambda(h)f(x), \forall h \in G, \forall x \in \mathbb{R}^{1+1}$ ise f' ye nispi invaryant denir. Burada $\lambda(h)$ fonksiyonuna ise f' nin çarpanı denir.

$x \in \mathbb{R}^{1+1}, h_1, h_2 \in G$ olmak üzere f, λ çarpanına sahip, sıfırdan farklı bir nispi invaryant fonksiyon olsun. Bu durumda;
$f\big((h_1h_2)x\big) = f\big(h_1(h_2x)\big) = \lambda(h_1)f(h_2x) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)f(x)$
$f\big((h_1h_2)x\big) = \lambda(h_1h_2)f(x),$
ve f sıfırdan farklı olduğundan $\lambda(h_1)\lambda(h_2) = \lambda(h_1h_2), \forall h_1h_2 \in \mathbb{H}$ elde edilir. Yani çarpan bu özelliği sağlar.

Örnek 9: $G = O(1,1)$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1+1}$ olsun. $O(1,1)'$ in $\mathbb{R}^{1+1}$ üzerindeki etkisi örnek 6'deki gibi olmak üzere $f(x_1, x_2) = \det(x_1, x_2)$ polinomunu örnek 6'deki gibi alalım. $\forall g \in G$ için $f(gx_1, gx_2) = \det(gx_1, gx_2) = \det g \det(x_1, x_2)$ olup $\lambda(g) = \det g$ olur. $\det(g_1g_2) = \det g_1 \det g_2$ olduğundan; determinant, $O(1,1)$ grubuna göre nispi invaryanttır.

1.9. $\boldsymbol{SO(1,1,\mathbb{R})}$ Grup Elemanlarının Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımıyla İfadesi

Önerme 12 [11]: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(1,1) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = 1$ veya
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = -1$'dir.

İspat: " $\Leftarrow$ " $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = 1$ veya $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = -1$ olsun. Amacımız $A \in O(1,1)$ olduğunu göstermektir. Bunun için $A^t\eta A = \eta, \det A \neq 0$ olduğunu gösterelim.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ olduğundan $A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$' dır.

$A^t\eta A = \eta \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & -(a^2 - b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta$ elde edilir. Aynı zamanda $\det A = 1 \neq 0$ olup $A \in O(1,1)$' dir.

Şimdi, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ alalım. $A^t = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$' dır.

$$A^t \eta A = \eta \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & -(a^2 - b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta$$

elde edilir. Aynı zamanda $\det A = -1 \neq 0$ olup $A \in O(1,1)$' dir.

" $\Longrightarrow$ " $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olsun. Amacımız, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = 1$ veya $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = -(a^2 - b^2) = -1$ olduğunu göstermektir. Vektörler $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^{1+1}$ olmak üzere $g(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ lorentz iç çarpımını alalım. $F: \mathbb{R}^{1+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+1}$ bir ortogonal dönüşüm ve $\{e_i\}, i = 1,2, \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, $i = 1,2$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0, i,j = 1,2$ olan $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ şeklindeki ortonormal taban olmak üzere, $F(e_1) = (a,b)$ ve $F(e_2) = (c,d)$ olarak tanımlayalım. F ortogonal dönüşümünün özelliğini kullanarak,

$\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ olup $\langle F(e_1), F(e_1) \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle$ olduğundan $\langle F(e_1), F(e_1) \rangle = 1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \langle (a,b), (a,b) \rangle = 1 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 1$ …… (*)

$\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ olup $\langle F(e_1), F(e_2) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$ olduğundan $\langle F(e_1), F(e_2) \rangle = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \langle (a,b), (c,d) \rangle = 0 \Longrightarrow ac - bd = 0$ …… (**)

$\langle e_2, e_2 \rangle = -1$ olup $\langle F(e_2), F(e_2) \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle$ olduğundan $\langle F(e_2), F(e_2) \rangle = -1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \langle (c,d), (c,d) \rangle = -1 \Longrightarrow c^2 - d^2 = -1$ …… (***)

Şimdi (**), $ac - bd = 0$ ifadesini alalım. $a \neq 0$ durumunda $c = \frac{cd}{a}$ yazabiliriz. Burada a' nın değerine göre birkaç durum inceleyelim.

1) $a \neq 0$ olsun. (***) ifadesinden $c^2 - d^2 = -1$ ve $c = \frac{cd}{a} \Longrightarrow (\frac{cd}{a})^2 - d^2 = -1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \frac{b^2 d^2}{a^2} - d^2 = -1 \Longrightarrow d^2(b^2 - a^2) = -a^2 \Longrightarrow d^2(-1) = -a^2 \Longrightarrow d^2 = a^2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \sqrt{d^2} = \sqrt{a^2} \Longrightarrow |d| = |a| \Longrightarrow d = a$ veya $d = -a$' dır. Burada:

1.1) $d = a$ olsun. $a \neq 0$ olduğundan $c = \frac{cd}{a} = \frac{ca}{a} = b$ olup $c = b$' dir. Böylece, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ elde edilir ve $\det A = a^2 - b^2 = 1$ olup (*)' dan istenen özelliği sağlar.

1.2) $d=-a$ olsun. $a\neq 0$ olduğundan $c=\frac{cd}{a}=\frac{c(-a)}{a}=-b$ olup $c=-b$' dir. Böylece, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}$ elde edilir ve $\det A=-(a^2-b^2)=-1$ olur. Bu ise istenen özelliği sağlar.

2) $a=0$ olsun. $ac-bd=0$ denkleminden $-bd=0$ elde edilir. Buradan $b=0$ veya $d=0$' dır.

2.1) $b=0$ olsun. $a=0$ olduğundan , (*) ifadesinden $a^2-b^2=1 \Rightarrow 0^2-0^2=1$ $\Rightarrow 0=1$ olup çelişkidir. Bu istenen özelliği sağlamaz.

2.2) $d=0$ olsun. $a=0$ olduğundan, (***) ifadesinden $c^2-d^2=-1 \Rightarrow c^2-0^2=-1 \Rightarrow c^2=-1$ olup c'nin reel kökü yoktur. Bu ise $c\in\mathbb{R}$ ile çelişir.

Sonuç olarak $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in O(1,1) \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}, \det A=1$ veya $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}, \det A=-1$ olarak yazılabilir. ■

Not: Yukarıda ispat edildi ki : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\in O(1,1)$ için $a=0$ olamaz.

Önerme 13 [11]: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SO(1,1) \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}, \det A=a^2-b^2=1$' dir.

İspat: " $\Leftarrow$ " $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}, \det A=a^2-b^2=1$ olsun. Gösterilmeli ki $A\in SO(1,1)$ dir. Bunun için $A\in O(1,1)$ ve $\det A=1$ olduğunun gösterilmesi gereklidir. Öncelikle $A\in O(1,1)$ olduğunu gösterelim. $A^t\eta A=\eta, \eta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ olduğu önerme 12' in ispatında olduğu gibi gösterilir.

" $\Rightarrow$ " $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SO(1,1)$ olsun. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}, \det A=a^2-b^2=1$ olduğu önerme 12' in ispatında olduğu gibi gösterilir. ■

Önerme 14: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\in SO(1,1)$ ise $|a|\geq 1$' dir.

İspat: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\in SO(1,1)$ alalım. Ancak

$\det A=a^2-b^2=1 \Rightarrow a^2=b^2+1 \Rightarrow a^2\geq 1$' dir. Buradan

$a^2\geq 1 \Rightarrow \sqrt{a^2}\geq\sqrt{1} \Rightarrow |a|\geq 1 \Rightarrow a\geq 1$ veya $a\leq -1$' dir. ■

1.10. Lorentz Grubu

Önerme 15 [11]: $A \in SO(1,1)$ olsun.

1) Eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\det A = a^2 - b^2 = 1$ ve $a \geq 1$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır, öyle ki, $a = \cosh\alpha\,, b = \sinh\alpha$ olup $A = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}'$ dir.

2) Eğer $A = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ şeklinde bir matris ise $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ ve $\cosh\alpha \geq 1$' dir.

İspat: 1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\det A = a^2 - b^2 = 1, a \geq 1$ olsun. Göstermek isteniyor ki, tek $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır, öyle ki $A = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$' dir.

Farz edelim $a = \cosh\alpha\,, b = \sinh\alpha$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}$' yi alalım.

Buradan, $a = \cosh\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} \Longrightarrow 2a = e^{\alpha} + e^{-\alpha}$' dir. Eşitliğin her iki tarafı e^{α} ile çarpılırsa, $e^{2\alpha} - 2ae^{\alpha} + 1 = 0$ elde edilir. Bu denklemi çözdüğümüzde $e^{\alpha} = a \pm \sqrt{a^2-1}$ olup $\alpha = \alpha_{1,2} = \ln(a \pm \sqrt{a^2-1})$' dir. Buradan denklemin köklerini $\alpha_1 = \ln(a + \sqrt{a^2-1})$ ve $\alpha_2 = \ln(a - \sqrt{a^2-1})$ elde edilir.

$a^2 - b^2 = 1 \Longrightarrow a^2 = b^2 + 1 \Longrightarrow a^2 \geq 1$' dir. Buradan $a^2 \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{1} \Longrightarrow |a| \geq 1 \Longrightarrow a \geq 1$ veya $a \leq -1$' dir. Burada $\alpha_1 = \ln(a + \sqrt{a^2-1})$ kökünü inceleyelim.

i) $a \geq 1$ olsun. Bu durumda α_1 kökünün varlığını göstermek istiyoruz. Burada $a + \sqrt{a^2-1} > 0$ olduğu gösterilirse iş biter. Ancak $a \geq 1$ olduğundan $\sqrt{a^2-1} \geq 0$ olup $a + \sqrt{a^2-1} > 0$' dır.

Böylece $\alpha_1 = \ln(a + \sqrt{a^2-1}), a \geq 1$ olmalıdır.

ii) $a \geq 1$ olsun. Bu durumda α_2 kökünün varlığını göstermek istiyoruz. Burada Analizden fonksiyonların monotonluk tanımına göre $0 < x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ ise fonksiyon monoton artandır. $0 < x_1 < x_2$ ise $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ yazılabilir. Burada $x_1 = a^2 - 1$ ve $x_2 = a^2$ seçilirse $\sqrt{a^2-1} < \sqrt{a^2}$' dir. Burada $a \geq 1$ olduğundan $\sqrt{a^2-1} < a \Longrightarrow 0 < a - \sqrt{a^2-1}$' dir. Böylece durum sağlanır.

Buradan $\alpha_2 = \ln(a - \sqrt{a^2-1}), a \geq 1$ olmalıdır. Sonuç olarak, $\alpha = \alpha_{1,2} = \ln(a \pm \sqrt{a^2-1}), a \geq 1$ olmalıdır. Şimdi $a = \cosh\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $b = \sinh\alpha$,

$\alpha \in \mathbb{R}$ olan denklemleri inceleyelim. Bunun için, $a^2 - b^2 = 1 \Longrightarrow a^2 - 1 = b^2$' dir.

$a \geq 1$ için $\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 - 1} \Longrightarrow |b| = \sqrt{a^2 - 1} \Longrightarrow b = \pm\sqrt{a^2 - 1}$' dir. Bu durumları inceleyelim.

a) $\alpha_1 = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$, $a \geq 1$ ve $b = \sqrt{a^2 - 1}$ olsun. Buradan,

$$\cosh \alpha_1 = \frac{e^{\alpha_1} + e^{-\alpha_1}}{2} = \frac{e^{\ln(a+\sqrt{a^2-1})} + e^{-\ln(a+\sqrt{a^2-1})}}{2} = \frac{(a+\sqrt{a^2-1})^2 + 1}{2(a+\sqrt{a^2-1})} = \frac{2a(a+\sqrt{a^2-1})}{2(a+\sqrt{a^2-1})} = a$$

$$\sinh \alpha_1 = \frac{e^{\alpha_1} - e^{-\alpha_1}}{2} = \frac{e^{\ln(a+\sqrt{a^2-1})} - e^{-\ln(a+\sqrt{a^2-1})}}{2} = \frac{(a+\sqrt{a^2-1})^2 - 1}{2(a+\sqrt{a^2-1})} = \frac{2(a^2 + a\sqrt{a^2-1} - 1)}{2(a+\sqrt{a^2-1})} =$$

$$= \frac{(a^2 - 1 + a\sqrt{a^2-1})}{(a+\sqrt{a^2-1})} = \frac{b^2 + ab}{a+b} = \frac{b(a+b)}{(a+b)} = b$$ olup istenen özellik sağlanır.

Böylece $\alpha_1 = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$, $a \geq 1$ için $b = \sqrt{a^2 - 1}$ için $a = \cosh \alpha_1, b = \sinh \alpha_1$ olur.

Şimdi benzer şekilde $\alpha_2 = \ln(a - \sqrt{a^2 - 1})$, $a \geq 1$ için $b = -\sqrt{a^2 - 1}$ değerlerini inceleyelim.

b) $\alpha_2 = \ln(a - \sqrt{a^2 - 1})$, $a \geq 1$ için $b = -\sqrt{a^2 - 1}$ olsun. Buradan

$$\cosh \alpha_2 = \frac{e^{\alpha_2} + e^{-\alpha_2}}{2} = \frac{e^{\ln(a-\sqrt{a^2-1})} + e^{-\ln(a-\sqrt{a^2-1})}}{2} = \frac{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^2 + 1}{2\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)} = \frac{2a\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)}{2\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)} = a,$$

$$\sinh \alpha_2 = \frac{e^{\alpha_2} - e^{-\alpha_1}}{2} = \frac{e^{\ln(a-\sqrt{a^2-1})} - e^{-\ln(a-\sqrt{a^2-1})}}{2} = \frac{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^2 - 1}{2\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)} = \frac{2\left(a^2 - a\sqrt{a^2-1} - 1\right)}{2\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)} =$$

$$= \frac{\left(a^2 - 1 - a\sqrt{a^2-1}\right)}{\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)} = \frac{b^2 + ab}{a+b} = \frac{b(a+b)}{(a+b)} = b$$ olup istenen özellik sağlanır.

Böylece $\alpha_2 = \ln(a - \sqrt{a^2 - 1})$, $a \geq 1$ için $b = -\sqrt{a^2 - 1}$ için $a = \cosh \alpha_2, b = \sinh \alpha_2$ olur.

Şimdi ise $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = 1, a \geq 1$ için $a = \cosh \alpha, b = \sinh \alpha$ olan $\alpha \in \mathbb{R}$' nin tekliğini gösterelim. Farz edelim ki, $\alpha \in \mathbb{R}$ tek olmasın. Buradan $\exists \beta \in \mathbb{R}$ öyle ki $a = \cosh \alpha = \cosh \beta$ ve $b = \sinh \alpha = \sinh \beta$' dir. Buradan,

$$\begin{cases} a = \cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \\ b = \sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \end{cases} \Longrightarrow a + b = e^{\alpha} \ldots\ldots.(*)$$

$$\begin{cases} a = \cosh \beta = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \\ b = \sinh \beta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \end{cases} \Longrightarrow a + b = e^{\beta} \ldots\ldots(**)$$

Böylece (*) ve (**)' in eşitliğinden $e^{\alpha} = e^{\beta}$ olup $\alpha = \beta$' dir.

Böylece tek $\alpha \in \mathbb{R}$ için $a = \cosh\alpha\,, b = \sinh\alpha$ olup $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ olarak yazılabilir.

2) $A = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ olsun.

$\mathrm{Det}A = \cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = (\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2})^2 - (\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2})^2 = \left(\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}+2}{4}\right) - \left(\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}-2}{4}\right) = 1$

$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{2\alpha}+1}{2e^{\alpha}}$' dır. Ancak

$e^{2\alpha} + 1 \geq 2e^{\alpha} \Longrightarrow e^{2\alpha} - 2e^{\alpha} + 1 \geq 0 \Longrightarrow (e^{\alpha} - 1)^2 \geq 0$ olup $\cosh\alpha \geq 1$' dir. ■

$L = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in O(1,1), \mathrm{det}A = 1, a \geq 1\}$ alt kümesi $O(1,1)$ grubunun alt kümesidir. Bu alt kümenin $O(1,1) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \mathrm{det}A = \pm 1\}$ grubunun alt grubu olduğunu ispatlayalım. L' ye Lorentz grubu denir.

Önerme 16 [11]: L alt kümesi $O(1,1)$ grubu altında matrislerde çarpma işlemine göre alt gruptur.

İspat: Bunun ispatı için $\forall A, B \in L$ için $AB, A^{-1} \in L$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan,

1) $\forall A, B \in L$ alalım öyle ki, $A = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ olsunlar. $AB \in L$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $AB = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha+\beta) & \sinh(\alpha+\beta) \\ \sinh(\alpha+\beta) & \cosh(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \in L$ olduğunu göstermemiz gerekli. Buradan

$$AB = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} & \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \\ \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} & \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2} & \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2} \\ \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2} & \frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{(\alpha+\beta)}+e^{-(\alpha+\beta)}}{2} & \frac{e^{(\alpha+\beta)}-e^{-(\alpha+\beta)}}{2} \\ \frac{e^{(\alpha+\beta)}-e^{-(\alpha+\beta)}}{2} & \frac{e^{(\alpha+\beta)}+e^{-(\alpha+\beta)}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha+\beta) & \sinh(\alpha+\beta) \\ \sinh(\alpha+\beta) & \cosh(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

olup $\mathrm{det}AB = 1$' dir.

Şimdi ise, $\cosh(\alpha+\beta) \geq 1$ olduğunu gösterelim.

$\cosh(\alpha+\beta) = \frac{e^{(\alpha+\beta)}+e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \frac{e^{2(\alpha+\beta)}+1}{e^{\alpha+\beta}}$' dir. Ancak

$e^{2(\alpha+\beta)}+1 \geq 2e^{\alpha+\beta} \Longrightarrow e^{2(\alpha+\beta)}-2e^{\alpha+\beta}+1 \geq 0 \Longrightarrow (e^{\alpha+\beta}-1)^2 \geq 0$ olup $\cosh(\alpha+\beta) \geq 1$'dir. Böylece $AB \in L$' dir.

2) $\forall A \in L$ alalım öyle ki $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in L$ olsun. $A^{-1} \in L$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \in L$ olduğunu göstermemiz gerekli. Buradan, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in L \Longrightarrow \det A=1, a \geq 1$' dir. Buradan $A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ile gösterirsek, buradan

$$AA^{-1}=I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

olup $\det A^{-1}=1, a \geq 1$ olduğundan $A^{-1} \in L$' dir. Böylece L lorentz grubu, $O(1,1)$ grubu altında matrislerde çarpma işlemine göre alt gruptur. ■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Hiperbolik Sayıların Bazı Özellikleri

Teorem 6: $A=(a,b), B=(c,d)\in\mathbb{H}$ olsun. Bu taktirde;

$AX=B$,$X=(x,y)\in\mathbb{H}$ denkleminin $\mathbb{H}$'da çözümü vardır $\Leftrightarrow$ aşağıdaki dört şarttan herhangi biri sağlanırsa:

1) $|a|\neq|b|$ ve $\forall c,d\in\mathbb{R}$;

2) $a=b, c=d, a\neq 0$;

3) $a=-b, c=-d, a\neq 0$;

4) $a=b=c=d=0$.

İspat: $(\Leftrightarrow) AX=B \Leftrightarrow (a,b)(x,y)=(c,d) \Leftrightarrow (ax+by, ay+bx)=(c,d)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=c \\ ay+bx=d \end{cases}$ bulunur.

1) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow a^2-b^2\neq 0 \Leftrightarrow |a|\neq|b|$. Bu durumda $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\neq 0$ olduğundan çözümü vardır.

Şimdi $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=0$ olsun. Bu takdirde $a^2-b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=0 \Leftrightarrow$ $a=b$ veya $a=-b$ dir.

2) Şimdi $a=b$ olsun. $\begin{cases} ax+ay=c \\ ay+ax=d \end{cases}$ sol taraflar eşit olduğundan $c=d$ bulunur.

Eğer $a=b$ ve $c\neq d$, ise çözüm yok.

$a=b, c=d$, ve $a\neq 0$ olsun. Bu durumda denklem sistemi $x+y=\frac{c}{a}$ denkleme gelir. Bu denklemin ise çözümü her zaman mevcuttur.

$a=b=0, c=d\neq 0$ ise bu denklem sisteminin çözümü yoktur.

3) $a=-b$ olsun. Bu taktirde $\begin{cases} ax+by=c \\ ay+bx=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(x-y)=c \\ a(x-y)=-d \end{cases}$ sol taraflar eşit olduğundan $c=-d$ bulunur.

Eğer $a=-b$ ve $c\neq -d$, ise çözüm yok.

$a=-b, c=-d$ ve $a\neq 0$ olsun. Bu durumda denklem sistemi $x+y=\frac{c}{a}$ denkleme gelir. Bu denklemin ise çözümü her zaman mevcuttur.

$a=-b=0, c=-d\neq 0$ ise bu denklem sisteminin çözümü yoktur.

4) $a = b = c = d = 0$ olsun. Bu durumda denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

Önerme 17: $A = a + \delta b \in \mathbb{H}, a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde $A^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcuttur $\Leftrightarrow |a| \neq |b|$' dir.

İspat: Teorem 6' ya göre $AX = B = (1,0)$ denkleminin çözümü vardır $\Leftrightarrow |a| \neq |b|$' dir. ■

Önerme 18: Hiperbolik sayılar halkasının sadece dört ideali vardır ve onlar şunlardır:

1) $A = \{0\}$;

2) $A = \mathbb{H}$;

3) $A = \{r(1+\delta) : r \in \mathbb{R}\}$;

4) $A = \{r(1-\delta) : r \in \mathbb{R}\}$' dir.

İspat: 1) $\{0\}$ ve **2)** $\mathbb{H}$' ın idealler olduğu açıktır.

Gösterelim ki $A = \{r(1+\delta) : r \in \mathbb{R}\}$ ve $A = \{r(1-\delta) : r \in \mathbb{R}\}$ kümeleri ideallerdir.

3) $A = \{r(1+\delta) : r \in \mathbb{R}\}$ olsun. Önce gösterelim ki $(A, +)$ alt grubtur.

i) $\forall r_1(1+\delta), r_2(1+\delta) \in A$ için $r_1(1+\delta) + r_2(1+\delta) \in A$ ise kapalıdır. $r_1(1+\delta) + r_2(1+\delta) = (r_1 + r_2)(1+\delta)$ olur ve $r_1 + r_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan $(r_1 + r_2)(1+\delta) \in A$'dır.

ii) $\mathbb{H}$ için birleşme özelliği var olduğundan $A = \{r(1+\delta) : r \in \mathbb{R}\}$ içinde vardır.

iii) $\exists 0 = 0(1+\delta) \in A$ öyle ki $\forall r(1+\delta) \in A$ için,
$r(1+\delta) + 0(1+\delta) = 0(1+\delta) + r(1+\delta) = r(1+\delta) \in A$ olduğundan birimlidir.

iv) $\forall r(1+\delta) \in A$ için $r(1+\delta) + X = 0(1+\delta)$ olacak şekilde $X \in A$ ise tersi mevcuttur:

$r(1+\delta) + X = 0(1+\delta) \Rightarrow X = (0 - r)(1+\delta) = -r(1+\delta)$ olur ve $-r \in \mathbb{R}$ olduğundan $-r(1+\delta) = X \in A$' dır.

Şimdi $(c + \delta d) \in \mathbb{H}$ keyfi olsun. Gösterelim ki $(c + \delta d)(r(1+\delta)) \in A$' dır. $(c + \delta d)\big(r(1+\delta)\big) = r\big((c+d) + \delta(c+d)\big) = r(c+d)(1+\delta) \in A$ dır. Yani keyfi $(c + \delta d) \in \mathbb{H}$ ve $r(1+\delta) \in A$ için $(c + \delta d)(r(1+\delta)) \in A$' dır. Dolayısıyla A bir idealdir.

4) $A = \{r(1-\delta) : r \in \mathbb{R}\}$ olsun. Önce gösterelim ki $(A, +)$ alt grubtur.

i) $\forall r_1(1-\delta), r_2(1-\delta) \in A$ için $r_1(1-\delta) + r_2(1-\delta) \in A$ ise kapalıdır.

$r_1(1-\delta) + r_2(1-\delta) = (r_1 + r_2)(1-\delta)$ olur ve $r_1 + r_2 \in \mathbb{R}$ olduğundan $(r_1 + r_2)(1-\delta) \in A$'dır.

ii) $\mathbb{H}$ için birleşme özelliği var olduğundan $A = \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ için de vardır.

iii) $\exists 0 = 0(1-\delta) \in A$ öyle ki $\forall r(1-\delta) \in A$ için,

$r(1-\delta) + 0(1-\delta) = 0(1-\delta) + r(1-\delta) = r(1-\delta) \in A$ olduğundan birimlidir.

iv) $\forall r(1-\delta) \in A$ için $r(1-\delta) + X = 0(1-\delta)$ olacak şekilde $X \in A$ ise tersi mevcuttur:

$r(1-\delta) + X = 0(1-\delta) \Longrightarrow X = (0-r)(1-\delta) = -r(1-\delta)$ olur ve $-r \in \mathbb{R}$ olduğundan $-r(1-\delta) = X \in A$' dır.

Şimdi $(c+\delta d) \in \mathbb{H}$ keyfi olsun. Gösterelim ki $(c+\delta d)(r(1-\delta)) \in A$' dır.

$(c+\delta d)\big(r(1-\delta)\big) = r\big((c+d) + \delta(c+d)\big) = r(c+d)(1-\delta) \in A$ dır. Yani keyfi $(c+\delta d) \in \mathbb{H}$ ve $r(1-\delta) \in A$ için $(c+\delta d)(r(1-\delta)) \in A$' dır. Dolayısıyla A bir idealdir.

Gösterelim ki bu dört idealden başka ideal yoktur.

$A, \mathbb{H}$' ın bir ideali olsun. $A, \mathbb{H}$' ın ideali olduğundan $A, \mathbb{H}$' ın bir lineer alt uzayıdır. $\mathbb{H}'$ ın boyutu 2 olduğundan A için şu üç durum vardır: boy$A = 0$, boy$A = 1$, boy$A = 2$ dir.

Eğer boy$A = 0$ ise, $A = \{0\}$ dır ve boy$A = 2$ ise, $A = \mathbb{H}$ dır.

boy$A = 1$ olsun. Bu takdirde $x_0 + \delta y_0 \in A$ mevcut öyle ki $A = \{r(x_0 + \delta y_0); r \in \mathbb{R}\}$ dir. $\forall h = c + \delta d \in \mathbb{H}$ ve $x_0 + \delta y_0 \in A$, A ideal olduğundan $h(x_0 + \delta y_0) \in A$ dır. Buradan

$(c+\delta d)(x_0 + \delta y_0) = r_1(x_0 + \delta y_0) \Longrightarrow (cx_0 + dy_0) + \delta(dx_0 + cy_0) = r_1(x_0 + \delta y_0)$.

Dolayısıyla $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ve keyfi $c, d \in \mathbb{R}$ için

$$\Longrightarrow \begin{cases} cx_0 + dy_0 = r_1 x_0 \\ dx_0 + cy_0 = r_1 y_0 \end{cases}$$

olacak şekilde $r_1 \in \mathbb{R}$ mevcut olması lazım.

Önce $x_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda

$cx_0 + dy_0 = r_1 x_0 \Longrightarrow c + d\frac{y_0}{x_0} = r_1$ bulunur. Bu r_1 değerini $dx_0 + cy_0 = r_1 y_0$ denkleminde yerine yazarsak $dx_0 + cy_0 = \left(c + d\frac{y_0}{x_0}\right) y_0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow dx_0 + cy_0 = cy_0 + d\frac{y_0^2}{x_0} \Longrightarrow dx_0 = d\frac{y_0^2}{x_0} \Longrightarrow dx_0^2 = dy_0^2$ bulunur. Burada $c + \delta d$ keyfi olduğundan $d \neq 0$ alınabilir. Dolayısıyla $dx_0^2 = dy_0^2 \Longrightarrow x_0^2 = y_0^2 \Longrightarrow x_0 = y_0$ veya

$x_0 = -y_0$ bulunur.

İlk olarak $x_0 = y_0$ olsun. Bu durumda $x_0 + \delta y_0 = x_0(1+\delta)$ şeklinde yazılır. $A = \{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ olur. Yani $x_0 = y_0$ durumunda A ideali $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealle çakışır.

İkinci olarak$x_0 = -y_0$ olsun. Bu durumda $x_0 + \delta y_0 = x_0(1-\delta)$ şeklinde yazılır. $A = \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ olur. Yani $x_0 = y_0$ durumunda A ideali $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealle çakışır.

Eğer $x_0 = 0$ ise, $x_0 \neq 0$ olduğunu gösterelim:

$A = \{r(x_0 + \delta y_0): r \in \mathbb{R}\} = \{r(\delta y_0): r \in \mathbb{R}\} = \{(r y_0)\delta: r \in \mathbb{R}\}$ ideal midir?

$\forall c + \delta d$ için $(c + \delta d)(r\delta) \in A$ mıdır?

$(c + \delta d)(r\delta) = r(c\delta + d) \notin A$' dır çünkü $c = 0$ için $\forall \delta d \in A, \delta d r \delta = rd \notin A$. Dolayısıyla A ideal olamaz.

Şimdi $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ve $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ideallerinin farklı olduğunu gösterelim.

$\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\} = \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ olduğunu farz edelim. Bu takdirde $1 + \delta = r_1(1-\delta)$ olacak şekilde $r_1 \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan $1 + \delta = r_1 - r_1\delta$ olduğundan $r_1 = 1, r_1 = -1$ dir. Bu bir çelişkidir dolayısıyla bu idealler farklıdır. ■

Lemma 2: $A \in \mathbb{H}, A = a + \delta b$ için $a^2 - b^2 = c^2, c > 0$ ise $|a| \geq c$ dir.

İspat: $A = a + \delta b, a^2 - b^2 = -c^2$ ve $c > 0$ olsun.

$a^2 - b^2 = c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 \geq c^2 \Longrightarrow \sqrt{b^2} \geq \sqrt{c^2} \Longrightarrow |b| \geq c$' dir. ■

Teorem 7: $A = a + \delta b, a^2 - b^2 \neq 0$ hiperbolik sayı olsun. Bu takdirde bu hiperbolik sayının hiperbolik fonksiyonlar yardımı ile ifadesi şöyledir:

1) $a^2 - b^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $a \geq c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

2) $a^2 - b^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $a \leq -c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = -c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

3) $a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $b \geq c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = \delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

4) $a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $b \leq -c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

İspat: 1) Önce $c = 1$ için gösterelim.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = 1, a \geq 1$ ise önerme 15'den

$A = \cosh\alpha + \delta \sinh\alpha$ dir.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = c^2, c > 0, a \geq c$ olsun.

$A = c\left(\frac{a}{c} + \delta\frac{b}{c}\right), \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \frac{a}{c} \geq 1$ olduğundan $A = c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ şeklinde yazılabilir.

2) Önce $c = 1$ için gösterelim.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = 1, a \leq -1$ ise

$A = -\big((-a) + \delta(-b)\big), (-a)^2 - (-b)^2 = 1, -a \geq 1$ önerme 15'den

$A = -(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = c^2, c > 0, a \leq -c$ olsun.

$A = -c\left((-\frac{a}{c}) + \delta(-\frac{b}{c})\right), \left(-\frac{a}{c}\right)^2 - \left(-\frac{b}{c}\right)^2 = 1, -\frac{a}{c} \geq 1$ olduğundan

$A = -c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ şeklinde yazılabilir.

3) Önce $c = 1$ için gösterelim.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = -1, b \geq 1$ ise $A = \delta(b + \delta a), b^2 - a^2 = 1, b \geq 1$önerme 15'den

$A = \delta(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$dir.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, b \geq c$ olsun.

$A = \delta c\left(\frac{b}{c} + \delta\frac{a}{c}\right), \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1, \frac{b}{c} \geq 1$ olduğundan $A = \delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ şeklinde yazılabilir.

4) Önce $c = 1$ için gösterelim.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = -1, b \leq -1$ ise

$A = -\delta\big((-b) + \delta(-a)\big), (-b)^2 - (-a)^2 = 1, -b \geq 1$ önerme 15'den

$A = -\delta(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$A = a + \delta b, a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, b \leq -c$ olsun.

$A = -\delta c\left((-\frac{b}{c}) + \delta(-\frac{a}{c})\right), \left(-\frac{b}{c}\right)^2 - \left(-\frac{a}{c}\right)^2 = 1, -\frac{b}{c} \geq 1$ olduğundan

$A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ şeklinde yazılabilir. ■

Not: Teorem 7' de verilen hiperbolik sayıların hiperbolik fonksiyonlar yardımıyla ifadesi kompleks sayıların Euler formülünün benzeridir.

Önerme 19: $A = a + \delta b$ hiperbolik sayı $a^2 - b^2 = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde bu sayı için $a + \delta b = c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ veya $a + \delta b = c\delta(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ olacak şekil de $c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayılar mevcut değildir. Yani bu hiperbolik sayı için Euler formülünün benzeri mevcut değildir.

İspat: $A = a + \delta b, a^2 - b^2 = 0$ olsun.

$a^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Longrightarrow a - b = 0$ veya $a + b = 0$ dır. $a - b = 0 \Longrightarrow a = b$ dir. $A = a + \delta b = a + \delta a = a(1+\delta)$ veya $a + b = 0 \Longrightarrow a = -b$ dir. $A = a + \delta b = a - \delta a = a(1-\delta)$ dır.

1) $a(1+\delta)$ için ispatı verelim. Farz edelim ki $a(1+\delta) \neq 0$ ve $a(1+\delta) =$ c$(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ olacak şekilde $c, \alpha \in \mathbb{R}$ mevcut olsun. Bu takdirde $c \neq 0$ dır. Buradan

$$\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha = \frac{a}{c}(1+\delta) \Longrightarrow \begin{cases} \cosh\alpha = \frac{a}{c} \\ \sinh\alpha = \frac{a}{c} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \frac{a}{c} \\ \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \frac{a}{c} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2\frac{a}{c} \\ e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2\frac{a}{c} \end{cases}$$

Bu iki ifade taraf tarafa çıkarılırsa $2e^{-\alpha} = 0 \Longrightarrow e^{-\alpha} = 0$ bulunur bu ise çelişkidir.

$a(1+\delta) =$ cδ$(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ olacak şekilde $c, \alpha \in \mathbb{R}$ mevcut olmadığı benzer şekilde gösteriliyor.

2) $a(1-\delta)$ için ispatı verelim. Farz edelim ki $a(1-\delta) \neq 0$ ve $a(1-\delta) =$ c$(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ olacak şekilde $c, \alpha \in \mathbb{R}$ mevcut olsun. Bu takdirde $c \neq 0$ dır.Buradan

$$\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha = \frac{a}{c}(1-\delta), \begin{cases} \cosh\alpha = \frac{a}{c} \\ \sinh\alpha = -\frac{a}{c} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \frac{a}{c} \\ \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = -\frac{a}{c} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{\alpha} + e^{-\alpha} = 2\frac{a}{c} \\ e^{\alpha} - e^{-\alpha} = -2\frac{a}{c} \end{cases}$$

Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa $2e^{\alpha} = 0 \Longrightarrow e^{\alpha} = 0$ bulunur bu ise çelişkidir.

$a(1-\delta) =$ cδ$(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ olacak şekilde $c, \alpha \in \mathbb{R}$ mevcut olmadığı benzer şekilde gösterilir. ■

Önerme 20: $L(H) = \{A = a + \delta b \in \mathbb{H}, |A|_1 = a^2 - b^2 = 1, a \geq 1\}$ olmak üzere

1) $\forall A, B \in L(H)$ için $AB \in L(H)$' dır.

2) $\forall A \in L(H)$ için $A^{-1} \in L(H)$' dır.

İspat: 1) $\forall A, B \in L(H)$ alalım öyle ki,

$A = \cosh\alpha + \delta\sinh\alpha, B = \cosh\beta + \delta\sinh\beta$ olsunlar. Biz $AB \in L(H)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $AB = \cosh(\alpha+\beta) + \delta\sinh(\alpha+\beta) \in L(H)$ olduğunu göstermek yeter. Buradan

$$AB = (\cosh\alpha + \delta \sinh\alpha)(\cosh\beta + \delta\sinh\beta) =$$
$$= \left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} + \delta\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\right)\left(\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2} + \delta\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\right) =$$
$$= \frac{e^{(\alpha+\beta)}+e^{-(\alpha+\beta)}}{2} + \delta\frac{e^{(\alpha+\beta)}-e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \cosh(\alpha+\beta) + \delta\sinh(\alpha+\beta)$$

olup $|AB|_1 = 1$' dir.

Şimdi ise, $\cosh(\alpha+\beta) \geq 1$ olduğunu gösterelim.

$\cosh(\alpha+\beta) = \frac{e^{(\alpha+\beta)}+e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \frac{e^{2(\alpha+\beta)}+1}{e^{\alpha+\beta}}$' dir. Ancak

$e^{2(\alpha+\beta)} + 1 \geq 2e^{\alpha+\beta} \Rightarrow e^{2(\alpha+\beta)} - 2e^{\alpha+\beta} + 1 \geq 0 \Rightarrow (e^{\alpha+\beta}-1)^2 \geq 0$ olup $\cosh(\alpha+\beta) \geq 1$'dir. Böylece $AB \in L(H)$' dir.

2) $\forall A \in L(H)$ alalım öyle ki $A = a + \delta b \in L(H)$ olsun. $A^{-1} \in L(H)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $A^{-1} \in L(H)$ olduğunu göstermek yeter. Buradan, $A = a + \delta b \in L(H) \Rightarrow |A|_1 = 1, a \geq 1$' dir. $A^{-1} = x + \delta y$ ile gösterirsek, buradan, $AA^{-1} = I \Rightarrow (a+\delta b)(x+\delta y) = 1 \Rightarrow (ax + by + \delta(ay+bx) = 1$ hiperbolik sayıların eşitliğinden $ax + by = 1$ veya $ay + bx = 0$ bulunur. Bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa $x(a+b) + y(a+b) = 1 \Rightarrow (a+b)(x+y) = 1 \Rightarrow x + y = \frac{1}{a+b}$ bulunur ve $a^2 - b^2 = 1$ olduğundan $|a| \neq |b|$ dir. Dolayısıyla $A^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcuttur. $|A^{-1}|_1 = 1, x \geq 1$ olduğunu gösterirsek $A^{-1} \in L(H)$ olur.

$(a+\delta b)(x+\delta y) = 1$ her iki tarafın mutlak değeri alınırsa $|(a+\delta b)(x+\delta y)|_1 = |1|_1 \Rightarrow |a+\delta b|_1|x+\delta y|_1 = 1 \Rightarrow (a^2-b^2)(x^2-y^2) = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$ olur. Dolayısıyla $|A^{-1}|_1 = 1$ dir. $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = y^2 + 1$ olduğundan $x \geq 1$dir. Buradan $A^{-1} \in L(H)$ dır.■

Not: Bu Önermenin ispatı [11]' de hiperbolik fonksiyonların matris gösterimi ifadesi kullanılarak verildi.

2.2. Hiperbolik Sayılarda 1. tip ve 2. tip Mutlak Değerler

Tanım 19 [3,5,6,7,10]: $A = (a,b) \in \mathbb{H}$ hiperbolik sayıların bütününe hiperbolik düzlem denir. Her bir (a,b) ikilisine hiperbolik düzlemin bir noktası veya hiperbolik sayı denir.

Tanım 20 [3,6,7]: $a^2 - b^2$ reel sayısına $A = a + \delta b$ hiperbolik sayısının 1. Tip mutlak değeri denir ve $|A|_1 = |a+\delta b|_1$ şeklinde gösterilir. Şu halde $|A|_1 = |a+\delta b|_1 = a^2 - b^2$ olur.

Teorem 8: $\forall A \in \mathbb{H}$ için $|A|_1 = |a+\delta b|_1 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$' dir.

İspat: $(\Longrightarrow)$ $|A|_1 = 0 \Longrightarrow |a+\delta b|_1 = 0 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow |a| = |b|$
$(\Longleftarrow)$ $|a| = |b| \Longrightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow |a+\delta b|_1 = 0 \Longrightarrow |A|_1 = 0$ dır. ■

Teorem 9: $\forall A, B \in \mathbb{H}$ için $|AB|_1 = |A|_1|B|_1$ eşitliği sağlanır.

İspat: $A = a+\delta b, B = c+\delta d$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun

$$|AB|_1 = |(a+\delta b)(c+\delta d)|_1 = |ac+bd+\delta(ad+bd)|_1 =$$
$$= (ac+bd)^2 - (ad+bc)^2 =$$
$$= (ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 - (ad)^2 - 2adbc - (bc)^2 =$$
$$= (ac)^2 + (bd)^2 - (ad)^2 - (bc)^2$$
$$|A|_1|B|_1 = |a+\delta b|_1|c+\delta d|_1 = (a^2-b^2)(c^2-d^2) =$$
$$= (ac)^2 + (bd)^2 - (ad)^2 - (bc)^2,$$

Bu eşitlik den gözüküyor ki $|AB|_1 = |A|_1|B|_1$ eşitliği mevcuttur. ■

Teorem 10: $\forall A, B \in \mathbb{H}$, $B = c+\delta d$ ve $|c| \neq |d|$ için $\left|\frac{A}{B}\right|_1 = \frac{|A|_1}{|B|_1}$ eşitliği sağlanır.

İspat: $\left|\frac{A}{B}\right|_1 |B|_1 = \left|\frac{AB}{B}\right|_1 = |AB^{-1}B|_1 = |A|_1 \Longrightarrow$ $\left|\frac{A}{B}\right|_1 |B|_1 = |A|_1$ her iki tarafı $|B|_1$'e bölersek $\left|\frac{A}{B}\right|_1 = \frac{|A|_1}{|B|_1}$ eşitliği bulunur. ■

Tanım 21 [3,6,7]: $\sqrt{|a^2-b^2|}$ reel sayısına $A = a+\delta b$ hiperbolik sayısının 2. tip mutlak değeri denir ve $|A|_2 = |a+\delta b|_2$ şeklinde gösterilir. Şu halde $|A|_2 = |a+\delta b|_2 = \sqrt{|a^2-b^2|}$ olur.

Teorem 11: $\forall A \in \mathbb{H}$ için $|A|_2 = |a+\delta b|_2 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$' dir.

İspat: $(\Longrightarrow)|A|_2 = 0 \Longrightarrow |a+\delta b|_2 = 0 \Longrightarrow \sqrt{|a^2-b^2|} = 0 \Longrightarrow |a^2-b^2| = 0 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow |a| = |b|$

$(\Longleftarrow)$ $|a| = |b| \Longrightarrow a^2 = b^2 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow |a^2-b^2| = 0 \Longrightarrow \sqrt{|a^2-b^2|} = 0 \Longrightarrow |a+\delta b|_2 = 0 \Longrightarrow |A|_2 = 0$ dır. ■

Teorem 12: $\forall A, B \in \mathbb{H}$ için $|AB|_2 = |A|_2 |B|_2$ eşitliği sağlanır.

İspat: $A = a + \delta b, B = c + \delta d$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun.

$$|AB|_2 = |(a + \delta b)(c + \delta d)|_2 = |ac + bd + \delta(ad + bd)|_2 =$$
$$= \sqrt{|(ac + bd)^2 - (ad + bc)^2|} =$$
$$= \sqrt{|(ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 - (ad)^2 - 2adbc - (bc)^2|} =$$
$$= \sqrt{|(ac)^2 + (bd)^2 - (ad)^2 - (bc)^2|}$$
$$|A|_2 |B|_2 = \sqrt{|(a^2 - b^2)|}\sqrt{|(c^2 - d^2)|} = \sqrt{|(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)|} =$$
$$= \sqrt{|(ac)^2 + (bd)^2 - (ad)^2 - (bc)^2|}$$

Bu eşitlik den gözüküyor ki $|AB|_2 = |A|_2 |B|_2$ eşitliği mevcuttur. ■

Teorem 13: $\forall A, B \in \mathbb{H}$, $B = c + \delta d$ ve $|c| \neq |d|$ için $\left|\frac{A}{B}\right|_2 = \frac{|A|_2}{|B|_2}$ eşitliği sağlanır.

İspat: $\left|\frac{A}{B}\right|_2 |B|_2 = \left|\frac{AB}{B}\right|_2 = |AB^{-1}B|_2 = |A|_2 \Longrightarrow \left|\frac{A}{B}\right|_2 |B|_2 = |A|_2$ her iki tarafı $|B|_2$'e bölersek $\left|\frac{A}{B}\right|_2 = \frac{|A|_2}{|B|_2}$ eşitliği bulunur. ■

$A \in \mathbb{H}$ ve $|A|_1 = 1$ koşulunu sağlayan elemanların kümesini $B(H)_1$ ile gösterelim.

Teorem 14: $B(H)_\mathbf{1} = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: |A|_1 = a^2 - b^2 = 1\}$, $\cdot$, işlemine göre değişmeli gruptur.

İspat: 1) Kapalılık:

$\forall A, B \in \mathbb{H}, |A|_1 = 1, |B|_1 = 1$ için $AB \in B(H)_1$ olduğunu gösterelim. $|AB|_1 = |A|_1 |B|_1 = 1$ olduğundan $AB \in B(H)_1$ dir.

2) Birleşme özelliği:

$\mathbb{H}$' ın tüm elemanları için birleşme özelliği var olduğundan $B(H)_1$ için de birleşme özelliği vardır.

3) Değişme özelliği:

$\mathbb{H}$' ın tüm elemanları için değişme özelliği var olduğundan $B(H)_1$ için de değişme özelliği vardır.

4) Birim eleman:

$\exists 1 \in \mathbb{H}$ öyle ki $|1 + \delta 0|_1 = 1^2 - 0^2 = 1$ olduğundan $1 \in B(H)_1$ dir.

5) Ters eleman:

$A \in B(H)_1, |A|_1 = 1$ için $AX = 1$ olacak şekilde $X \in B(H)_1$' nin var olduğunu gösterelim. $A \in B(H)_1$ olduğundan $|A|_1 = 1 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 1 \Longrightarrow a^2 \neq b^2 \Longrightarrow |a| \neq |b|$ dir. Dolayısıyla $AX = 1$ olacak şekilde $X \in \mathbb{H}$ vardır. Şimdide $X \in B(H)_1$ olması için $|X|_1 = 1$ olduğunu gösterelim.

$AX = 1$ ise her iki tarafın mutlak değeri alınırsa$|AX|_1 = |1|_1 \Longrightarrow |A|_1|X|_1 = 1$ ve $|A|_1 = 1$ olduğundan $|X|_1 = 1$ bulunur. Dolayısıyla $X \in B(H)_1$ dir. ■

$A \in \mathbb{H}$ ve $|A|_2 = 1$ koşulunu sağlayan elemanların kümesini $B(H)_2$ ile gösterelim.

Teorem 15: $B(H)_\mathbf{2} = \left\{A = (a, b) \in \mathbb{H}\colon |A|_2 = \sqrt{|a^2 - b^2|} = 1\right\}$, $\cdot$, işlemine göre değişmeli gruptur.

İspat: 1) Kapalılık:

$\forall A, B \in \mathbb{H}, |A|_2 = 1, |B|_2 = 1$ için $AB \in B(H)_2$ olduğunu gösterelim. $|AB|_2 = |A|_2|B|_2 = 1$ olduğundan $AB \in B(H)_2$ dir.

2) Birleşme özelliği:

$\mathbb{H}$' ın tüm elemanları için birleşme özelliği var olduğundan $B(H)_2$ için de birleşme özelliği vardır.

3) Değişme özelliği:

$\mathbb{H}$' ın tüm elemanları için değişme özelliği var olduğundan $B(H)_2$ için de değişme özelliği vardır.

4) Birim eleman:

$\exists 1 \in \mathbb{H}$ öyle ki $|1 + \delta 0|_2 = \sqrt{|1^2 - 0^2|} = 1$ olduğundan $1 \in B(H)_2$ dir.

5) Ters eleman:

$A \in B(H)_2, |A|_2 = 1$ için $AX = 1$ olacak şekilde $X \in B(H)_2$' nın var olduğunu gösterelim. $A \in B(H)_2$ olduğundan $|A|_2 = 1 \Longrightarrow \sqrt{|a^2 - b^2|} = 1 \Longrightarrow a^2 \neq b^2 \Longrightarrow |a| \neq |b|$ dir. Önerme 20' ye göre $AX = 1$ olacak şekilde $X \in \mathbb{H}$ vardır. Şimdide $X \in B(H)_2$ olması için $|X|_2 = 1$ olduğunu gösterelim.

$AX = 1$ ise her iki tarafın mutlak değeri alınırsa$|AX|_2 = |1|_2 \Longrightarrow |A|_2|X|_2 = 1$ ve $|A|_2 = 1$ olduğundan $|X|_2 = 1$ bulunur. Dolayısıyla $X \in B(H)_2$ dir. ■

Önerme 21: $B(H)_1 \subset B(H)_2$, $B(H)_1, B(H)_2$' nin alt grubudur ve $B(H)_1 \neq B(H)_2$ dir.

İspat: $\forall A \in B(H)_1$ için $A \in B(H)_2$ olduğunu gösterelim.

$A \in B(H)_1$ olduğundan $A = a + \delta b$ için $|A|_1 = 1 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 1$ her iki tarafın mutlak değeri alınırsa $|a^2 - b^2| = |1| \Longrightarrow |a^2 - b^2| = 1 \Longrightarrow \sqrt{|a^2 - b^2|} = 1 \Longrightarrow |A|_2 = 1$ bulunur. Dolayısıyla $\forall A \in B(H)_1$ için $A \in B(H)_2$ olur. $B(H)_1, B(H)_2$'nin alt grubu olur.

$B(H)_1 \neq B(H)_2$ olduğunu bir örnekle gösterelim $A = 2 + \sqrt{5}\delta$ olarak alalım $2^2 - \sqrt{5}^2 = 4 - 5 = -1$ bulunur. Tanımlardan $A \in B(H)_2$, $A \notin B(H)_1$ dir. Buradan görülüyor ki $B(H)_1 \neq B(H)_2$ dir. ■

Önerme 22: $H^* = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: a^2 - b^2 \neq 0\}$, $\cdot$, işlemine göre değişmeli gruptur.

İspat: 1) Kapalılık:

$\forall A = (a, b), B = (c, d) \in \mathbb{H}, a^2 - b^2 \neq 0, c^2 - d^2 \neq 0$ için $AB \in H^*$ olduğunu gösterelim.

$AB = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \neq 0$ olduğundan $AB \in H^*$ dır.

2) Birleşme özelliği:

$\mathbb{H}$' ın tüm elemanları için birleşme özelliği var olduğundan H^* için de birleşme özelliği vardır.

3) Değişme özelliği:

$\mathbb{H}$' ın tüm elemanları için değişme özelliği var olduğundan H^* için de değişme özelliği vardır.

4) Birim eleman:

$\exists 1 \in \mathbb{H}$ öyle ki $1^2 - 0^2 \neq 0$ olduğundan $1 \in H^*$ dır.

5) Ters eleman:

$A \in H^*, a^2 - b^2 \neq 0$ için $AX = 1$ olacak şekilde $X \in H^*$' nın var olduğunu gösterelim. $A \in H^*$ olduğundan $a^2 - b^2 \neq 0 \Longrightarrow a^2 \neq b^2 \Longrightarrow |a| \neq |b|$ dir. Önerme 20' ye göre $AX = 1$ olacak şekilde $X \in \mathbb{H}$ vardır. Şimdide $X = (x, y) \in H^*$ olması için $x^2 - y^2 \neq 0$ olduğunu gösterelim.

$AX = 1$ ise her iki tarafın mutlak değeri alınırsa$(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = 1$ ve $a^2 - b^2 \neq 0$ olduğundan $x^2 - y^2 \neq 0$ bulunur. Dolayısıyla $X \in H^*$ dir. ■

Not: $B(H)_{\mathbf{1}} \subset H^*, B(H)_{\mathbf{2}} \subset H^*, L(H) \subset H^*$ dır.

2.3. $B(H)_1$ -Denklik Problemi

Tanım 22: $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$ olsun. Eğer $h_2 = gh_1$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ varsa $h_1$ve h_2 elemanları $B(H)_1$' e göre denk denir ve $h_1 \overset{B(H)_1}{\sim} h_2$ şeklinde gösterilir.

Önerme 23: $x \overset{B(H)_1}{\sim} y$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıyan, simetri ve geçişmenin var olduğunu göstermeliyiz.

i) Yansıyan:

$x \overset{B(H)_1}{\sim} x$ olması için $x = gx$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ olduğu gösterilmeli. $g = 1$ için $x = 1x$ ve $|1|_1 = 1$ olduğundan $g \in B(H)_1$ dir. Buradan görülüyor ki $x \overset{B(H)_1}{\sim} x$ dir.

ii) Simetri:

$x \overset{B(H)_1}{\sim} y$ olsun. Göstermeliyiz ki $y \overset{B(H)_1}{\sim} x$ dir.

$x \overset{B(H)_1}{\sim} y$ olduğundan $y = gx$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$vardır. $\exists g_1 \in B(H)_1$ öyle ki $x = g_1 y$ dir. Bu ifadeyi $y = gx$' de yerine yazarsak $y = g(g_1 y)$ bulunur i)' den $gg_1 = 1 \Longrightarrow g_1 = g^{-1} \in B(H)_1$ olduğundan $y \overset{B(H)_1}{\sim} x$ dir.

iii) Geçişme:

$x \overset{B(H)_1}{\sim} y$ ve $y \overset{B(H)_1}{\sim} z$ olsun. Göstermeliyiz ki $x \overset{B(H)_1}{\sim} z$ dir.

$x \overset{B(H)_1}{\sim} y$ olduğundan $y = gx$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ ve $y \overset{B(H)_1}{\sim} z$ olduğundan $z = g_1 y$ olacak şekilde $g_1 \in B(H)_1$vardır. $z = g_1 y$'de y' nin yerine $y = gx$ yazılırsa $z = g_1(gx)$ elde edilir ve $g, g_1 \in B(H)_1$ olduğundan $gg_1 \in B(H)_1$ dir. Dolayısıyla $x \overset{B(H)_1}{\sim} z$ dir. ■

Önerme 24: $A, B \in \mathbb{H}$ ve $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ ise $|A|_1 = |B|_1$ dir.

İspat: $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ olsun. Bu taktirde $\exists g \in B(H)_1$ öyle ki $B = gA$ dır. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa $|B|_1 = |gA|_1 \Longrightarrow |B|_1 = |g|_1 |A|_1$ ve $g \in B(H)_1$ olduğundan $|g|_1 = 1$ dir. Buradan $|A|_1 = |B|_1$ dir. ■

Önerme 25: $A, B \in \mathbb{H}, |A|_1 \neq 0, |B|_1 \neq 0$ ve $|A|_1 = |B|_1$ ise $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

İspat: $|A|_1 = |B|_1$ olsun. Gösterilmeli ki $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

$A, B \in \mathbb{H}$ olduğundan $A = x + \delta y, B = z + \delta w$ dir. $|A|_1 = |B|_1$ olduğundan $x^2 - y^2 = z^2 - w^2$ dir.

$x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ alalım. $x \geq c, x \leq -c,\ z \geq c, z \leq -c$ durumları oluşur.

$x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ alalım. $y \geq c, y \leq -c, w \geq c, w \leq -c$ durumları oluşur.

1) $x \geq c, z \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \geq c$ için $A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \geq c$ için $B = \mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

2) $x \geq c, z \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \geq c$ için $A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \leq -c$ için $B = -\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$-\,(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

3) $x \leq -c, z \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \leq -c$ için $A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \geq c$ için $B = \mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow -\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow -\,(\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Rightarrow -\,(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

4) $x \leq -c, z \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \leq -c$ için $A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \leq -c$ için $B = -\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow (\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Rightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

5) $y \geq c, w \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \geq c$ için $A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \geq c$ için $B = \delta\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow (\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Rightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

6) $y \geq c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \geq c$ için $A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \leq -c$ için $B = -\delta\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow -(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow -(\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Rightarrow -(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

7) $y \leq -c, w \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \leq -c$ için $A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \geq c$ için $B = \delta\,c(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow -\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow -\,(\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Rightarrow -\,(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-\,(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

8) $y \leq -c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \leq -c$ için $A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \leq -c$ için $B = -\delta\,c(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ vardır.

$A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow (\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Rightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_1$ olduğundan $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir. ■

Şimdi $A = x + \delta y, B = z + \delta w$ ve $|A|_1 = |B|_1 = 0$ olsun. $|A|_1 = 0$ olduğundan $x^2 - y^2 = 0$ dır. Buradan $x = y$ veya $x = -y$ dir. Benzer şekilde $|B|_1 = 0$ olduğundan $z = w$ veya $z = -w$ dur. Dolayısıyla $|A|_1 = |B|_1 = 0$ için şöyle dört durum vardır:

1) $x = y$ ve $z = w$ dir;

2) $x = -y$ ve $z = -w$ dir;

3) $x = -y$ ve $z = w$ dir;

4) $x = y$ ve $z = -w$ dir.

Eğer $A = x + \delta y = 0$ ve $B = z + \delta w \neq 0$ ise, A eleman B' ye $B(H)_1$ denk olamaz. Benzer şekilde $A = x + \delta y \neq 0$ ve $B = z + \delta w = 0$ ise, A eleman B' ye $B(H)_1$ denk olamaz.

Önerme 26: $A = x + \delta y \neq 0, B = z + \delta w \neq 0 \in \mathbb{H}, |A|_1 = |B|_1 = 0$ olsun. Bu taktirde:

1) $x = y$ ve $z = w$ ise $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

2) $x = -y$ ve $z = -w$ ise $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

3) $x = -y$ ve $z = w$ ise A eleman B' ye $B(H)_1$ denk değildir.

4) $x = y$ ve $z = -w$ ise A eleman B' ye $B(H)_1$ denk değildir.

İspat: $|A|_1 = |B|_1 = 0$ olduğundan $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = 0$ dir. Buradan $x = y$ veya $x = -y$ ve $z = w$ veya $z = -w$ dır.

1) $x = y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x + \delta x = x(1 + \delta)$ ve $B = z + \delta w = z + \delta z = z(1 + \delta)$ olur. Göstermeliyiz ki $B = gA$ olacak şekilde $g = c + \delta d \in B(H)_1$ vardır.

$B = gA \Rightarrow z(1 + \delta) = (c + \delta d)\big(x(1 + \delta)\big) \Rightarrow z(1 + \delta) = x((c + \delta d)(1 + \delta))$

$\Rightarrow z(1 + \delta) = x\big((c + d) + \delta(c + d)\big) \Rightarrow z(1 + \delta) = x(c + d)(1 + \delta)$ eşitliğinden $z = x(c + d)$ ve $g = c + \delta d \in B(H)_1$ olduğundan $c^2 - d^2 = 1$ dir. $c = \pm\sqrt{1 + d^2}$ olur ve bunu denklemde yazarsak $z = x\big(\pm\sqrt{1 + d^2} + d\big) \Rightarrow \pm\sqrt{1 + d^2} + d = \frac{z}{x}$ dir.

$\frac{z}{x} = k$ alalım. $\pm\sqrt{1 + d^2} = k - d$' da her iki tarafın karesi alınır ise

$1 + d^2 = k^2 - 2kd + d^2 \Rightarrow 2kd = k^2 - 1 \Rightarrow d = \frac{k^2 - 1}{2k}$ bulunur.

Dolayısıyla $g = c + \delta d \in B(H)_1$ vardır ve $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

2) $x = -y, z = -w$ ise;

$A = x + \delta y = x - \delta x = x(1 - \delta)$ ve $B = z + \delta w = z - \delta z = z(1 - \delta)$ olur. Göstermeliyiz ki $B = gA$ olacak şekilde $g = c + \delta d \in B(H)_1$ vardır.

$B = gA \Rightarrow z(1 - \delta) = (c + \delta d)\big(x(1 - \delta)\big) \Rightarrow z(1 - \delta) = x((c + \delta d)(1 - \delta))$

$\Rightarrow z(1 - \delta) = x\big((c + d) - \delta(c + d)\big) \Rightarrow z(1 - \delta) = x(c + d)(1 - \delta)$ eşitliğinden $z = x(c + d)$ ve $g = c + \delta d \in B(H)_1$ olduğundan $c^2 - d^2 = 1$ dir. $c = \pm\sqrt{1 + d^2}$ olur ve bunu denklemde yazarsak $z = x\big(\pm\sqrt{1 + d^2} + d\big) \Rightarrow \pm\sqrt{1 + d^2} + d = \frac{z}{x}$ dir.

$\frac{z}{x} = k$ alalım. $\pm\sqrt{1+d^2} = k - d$' da her iki tarafın karesi alınır ise $1 + d^2 = k^2 - 2kd + d^2 \Longrightarrow 2kd = k^2 - 1 \Longrightarrow d = \frac{k^2-1}{2k}$ bulunur.

Dolayısıyla $g = c + \delta d \in B(H)_1$ vardır ve $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir.

3) $x = -y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x - \delta x = x(1-\delta)$ ve $B = z + \delta w = z + \delta z = z(1+\delta)$ olur. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ dır. $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ve $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealler ve $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\} \cap \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\} = \{0\}$ olduğundan $z(1+\delta) = h(x(1-\delta))$ olacak şekilde $h \in B(H)_1$ mevcut değildir. Dolayısıyla A eleman B' ye $B(H)_1$ denk değildir.

4) $x = -y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x + \delta x = x(1+\delta)$ ve $B = z + \delta w = z - \delta z = z(1-\delta)$ olur. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ dır. $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ve $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealler ve $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\} \cap \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\} = \{0\}$ olduğundan $z(1-\delta) = h(x(1+\delta))$ olacak şekilde $h \in B(H)_1$ mevcut değildir. Dolayısıyla A eleman B' ye $B(H)_1$ denk değildir. ■

Lemma 4: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $c \overset{B(H)_1}{\sim} c$ denktir.

İspat: Önerme 23' den çıkıyor. ■

Lemma 5: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $c \overset{B(H)_1}{\sim} -c$ denktir.

İspat: $c \overset{B(H)_1}{\sim} -c$ olması için $-c = gc$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ olduğu gösterilmeli. $g = -1$ için $-c = (-1)c$ ve $|-1|_1 = 1$ olduğundan $g \in B(H)_1$ dir. Buradan görülüyor ki $c \overset{B(H)_1}{\sim} -c$ dir. ■

Önerme 27: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k > 0, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A \overset{B(H)_1}{\sim} \sqrt{k}$ dır.

İspat: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k > 0, k \in \mathbb{R}$ ve $B = \sqrt{k} \in \mathbb{H}$ elemanları için $|A|_1 = |B|_1 = k \neq 0$ olduğundan, Önerme 25' e göre $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir. ■

Lemma 6: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $\delta c \overset{B(H)_1}{\sim} \delta c$ denktir.

İspat: Önerme 23' den çıkıyor. ■

Lemma 7: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $\delta c \overset{B(H)_1}{\sim} -\delta c$ denktir.

İspat: $\delta c \overset{B(H)_1}{\sim} -\delta c$ olması için $-\delta c = g(\delta c)$ olacak şekilde $g \in B(H)_1$ olduğu gösterilmeli. $g=-1$ için $-\delta c=(-1)(\delta c)$ ve $|-1|_1=1$ olduğundan $g\in B(H)_1$ dir. Buradan görülüyor ki $\delta c \overset{B(H)_1}{\sim} -\delta c$ dir. ■

Önerme 28: $A=x+\delta y\in\mathbb{H}, x^2-y^2=k, k<0, k\in\mathbb{R}$ olmak üzere $A \overset{B(H)_1}{\sim} \delta\sqrt{|k|}$ dir.

İspat: $A=x+\delta y\in\mathbb{H}, x^2-y^2=k, k<0,\ k\in\mathbb{R}$ ve $B=\delta\sqrt{|k|}\in\mathbb{H}$ elemanları için $|A|_1=|B|_1=k\neq 0$ olduğundan, Önerme 25' e göre $A \overset{B(H)_1}{\sim} B$ dir. ■

Lemma 8: Keyfi $c\neq 0\in\mathbb{R}$ için c eleman δc' ye $B(H)_1$ denk değildir.

İspat: $|c|_1=c^2$, $|\delta c|_1=-c^2, c\neq 0$ için $c^2\neq -c^2$ olduğundan Önerme 25' e göre c eleman δc' ye $B(H)_1$ denk değildir. ■

Not: Bu denklik problemlerinin çözümü [11]' de $B(H)_1$' in izomorf olduğu $SO(1,1)$' in yörüngeleri kullanılarak verildi. Burada ise hiperbolik sayılar kullanıldı.

Sonuç olarak $B(H)_1$ tüm yörüngelerini şu şekilde verebiliriz:

1) Keyfi $k\neq 0, k>0$ için $\{\,x+\delta y\in\mathbb{H}: x^2-y^2=k\}$;

2) Keyfi $k\neq 0, k<0$ için $\{\,x+\delta y\in\mathbb{H}: x^2-y^2=k\}$;

3) $k=0$ için $\{\,x+\delta y\in\mathbb{H}: x^2-y^2=k\}\Longrightarrow\{x+\delta y\in\mathbb{H}: x=y, x=y\neq 0\}$;

4) $k=0$ için $\{\,x+\delta y\in\mathbb{H}: x^2-y^2=k\}\Longrightarrow\{x+\delta y\in\mathbb{H}: x=-y, x=-y\neq 0\}$;

5) $\{(0,0)\}$;

2.4. $L(H)$ -Denklik Problemi

Tanım 23: $h_1,h_2\in\mathbb{H}$ olsun. Eğer $h_2=gh_1$ olacak şekilde $g\in L(H)$ varsa $h_1$ve h_2 elemanları $L(H)$' e göre denk denir ve $h_1 \overset{L(H)}{\sim} h_2$ şeklinde gösterilir.

Önerme 29: $x \overset{L(H)}{\sim} y$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıyan, simetri ve geçişmenin var olduğunu göstermeliyiz.

i) Yansıyan:

$x \overset{L(H)}{\sim} x$ olması için $x=gx$ olacak şekilde $g\in L(H)$ vardır. $g=1$ için $x=1x$,

$|1|_1 = 1$ ve $1 \geq 1$ olduğundan $g \in L(H)$ dir. Buradan görülüyor ki $x \underset{\sim}{^{L(H)}} x$ dir.

ii) Simetri:

$x \underset{\sim}{^{L(H)}} y$ olsun. Göstermeliyiz ki $y \underset{\sim}{^{L(H)}} x$ dir.

$x \underset{\sim}{^{L(H)}} y$ olduğundan $y = gx$ olacak şekilde $g \in L(H)$vardır. $\exists g_1 \in L(H)$ öyle ki $x = g_1 y$ dir. Bu ifadeyi $y = gx$' de yerine yazarsak $y = g(g_1 y)$ bulunur i)' den $gg_1 = 1 \Longrightarrow g_1 = g^{-1} \in L(H)$ olduğundan $y \underset{\sim}{^{L(H)}} x$ dir.

iii) Geçişme:

$x \underset{\sim}{^{L(H)}} y$ ve $y \underset{\sim}{^{L(H)}} z$ olsun. Göstermeliyiz ki $x \underset{\sim}{^{L(H)}} z$ dir.

$x \underset{\sim}{^{L(H)}} y$ olduğundan $y = gx$ olacak şekilde $g \in L(H)$ ve $y \underset{\sim}{^{L(H)}} z$ olduğundan $z = g_1 y$ olacak şekilde $g_1 \in L(H)$ vardır. $z = g_1 y$'de y' nin yerine $y = gx$ yazılırsa $z = g_1(gx)$ elde edilir ve $g, g_1 \in L(H)$ olduğundan $gg_1 \in L(H)$ dir. Dolayısıyla $x \underset{\sim}{^{L(H)}} z$ dir. ■

Önerme 30: $A, B \in \mathbb{H}$ ve $A \underset{\sim}{^{L(H)}} B$ ise $|A|_1 = |B|_1$ dir.

İspat: $A \underset{\sim}{^{L(H)}} B$ olsun. Bu taktirde $\exists g \in L(H)$ öyle ki $B = gA$ dır. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa $|B|_1 = |gA|_1 \Longrightarrow |B|_1 = |g|_1 |A|_1$ ve $g \in L(H)$ olduğundan $|g|_1 = 1$ dir. Buradan $|A|_1 = |B|_1$ dir. ■

$A = x + \delta y, B = z + \delta w \in \mathbb{H}, |A|_1 \neq 0, |B|_1 \neq 0$ ve $|A|_1 = |B|_1$ olsun. Eğer $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ise dört durum vardır.

1) $x \geq c, z \geq c$, **2)** $x \leq -c, z \leq -c$, **3)** $x \geq c, z \leq -c$, **4)** $x \leq -c, z \geq c$

Eğer $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ise dört durumda burada vardır.

5) $y \geq c, w \geq c$, **6)** $y \leq -c, w \leq -c$, **7)** $y \geq c, w \leq -c$, **8)** $y \leq -c, w \geq c$

Bu sekiz durumun sadece dört tanesinde $L(H)$ denklik vardır. Diğer dört durumda $L(H)$ denklik yoktur.

Önerme 31: $A = x + \delta y, B = z + \delta w \in \mathbb{H}, |A|_1 \neq 0, |B|_1 \neq 0$ olsun. Bu taktirde:

1)$|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}, x \geq c, z \geq c$ ise, $A \underset{\sim}{^{L(H)}} B$ dir.

2)$|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}, x \leq -c, z \leq -c$ ise, $A \underset{\sim}{^{L(H)}} B$ dir.

3)$|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R},\ y \geq c, w \geq c$ ise, $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir.

4)$|A|_1 = |B|_1, x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R},\quad y \leq -c, w \leq -c$ ise, $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir.

İspat: 1) $x \geq c, z \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \geq c$ için $A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \geq c$ için $B = \mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in L(H)$ vardır.

$A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$|\cosh\theta + \delta\sinh\theta\,|_1 = 1$ ve $\cosh\theta \geq 1$ olacak şekilde $(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in L(H)$ olduğundan $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir.

2) $x \leq -c, z \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \leq -c$ için $A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \leq -c$ için $B = -\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in L(H)$ vardır.

$A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$|\cosh\theta + \delta\sinh\theta\,|_1 = 1$ ve $\cosh\theta \geq 1$ olacak şekilde $(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in L(H)$ olduğundan $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir.

3) $y \geq c, w \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \geq c$ için $A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \geq c$ için $B = \delta\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in L(H)$ vardır.

$A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = \delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$|\cosh\theta + \delta\sinh\theta\,|_1 = 1$ ve $\cosh\theta \geq 1$ olacak şekilde $(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in L(H)$ olduğundan $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir.

4) $y \leq -c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \leq -c$ için $A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \leq -c$ için $B = -\delta\, c(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in L(H)$ vardır.

$A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$|\cosh\theta + \delta\sinh\theta\,|_1 = 1$ ve $\cosh\theta \geq 1$ olacak şekilde $(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in L(H)$ olduğundan $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir. ∎

Eğer $A = x + \delta y = 0$ ve $B = z + \delta w \neq 0$ ise, A eleman B' ye $L(H)$ denk olamaz. Benzer şekilde $A = x + \delta y \neq 0$ ve $B = z + \delta w = 0$ ise, A eleman B' ye $L(H)$ denk olamaz.

Önerme 32: $A = x + \delta y \neq 0, B = z + \delta w \neq 0 \in \mathbb{H}, |A|_1 = |B|_1 = 0$ olsun. Bu takdirde:

1) $x = y$ ve $z = w$ ise $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir.

2) $x = -y$ ve $z = -w$ ise $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir.

3) $x = -y$ ve $z = w$ ise A eleman B' ye $L(H)$ denk değildir.

4) $x = y$ ve $z = -w$ ise A eleman B' ye $L(H)$ denk değildir.

İspat: $|A|_1 = |B|_1 = 0$ olduğundan $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = 0$ dir. Buradan $x = y$ veya $x = -y$ ve $z = w$ veya $z = -w$ dır.

1) $x = y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x + \delta x = x(1 + \delta)$ ve $B = z + \delta w = z + \delta z = z(1 + \delta)$ olur.

Göstermeliyiz ki $B = gA$ olacak şekilde $g = c + \delta d \in L(H)$ vardır.

$B = gA \Longrightarrow z(1+\delta) = (c+\delta d)\big(x(1+\delta)\big) \Longrightarrow z(1+\delta) = x((c+\delta d)(1+\delta))$

$\Longrightarrow z(1+\delta) = x\big((c+d)+\delta(c+d)\big) \Longrightarrow z(1+\delta) = x(c+d)(1+\delta)$ eşitliğinden $z = x(c+d)$ ve $g = c+\delta d \in L(H)$ olduğundan $c^2 - d^2 = 1$ ve $c \geq 1$ dir. Buradan $c = \sqrt{1+d^2}$ olur ve bunu denklemde yazarsak $z = x\big(\sqrt{1+d^2}+d\big) \Longrightarrow \sqrt{1+d^2}+d = \frac{z}{x}$ dir. $\frac{z}{x} = k$ alalım. $\sqrt{1+d^2} = k - d$' da her iki tarafın karesi alınır ise $1 + d^2 = k^2 - 2kd + d^2 \Longrightarrow 2kd = k^2 - 1 \Longrightarrow d = \frac{k^2-1}{2k}$ bulunur.

Dolayısıyla $g = c + \delta d \in L(H)$ vardır ve $A \underset{\sim}{^{L(H)}} B$ dir.

2) $x = -y, z = -w$ ise;

$A = x + \delta y = x - \delta x = x(1-\delta)$ ve $B = z + \delta w = z - \delta z = z(1-\delta)$ olur. Göstermeliyiz ki $B = gA$ olacak şekilde $g = c + \delta d \in L(H)$ vardır.

$B = gA \Longrightarrow z(1-\delta) = (c+\delta d)\big(x(1-\delta)\big) \Longrightarrow z(1-\delta) = x((c+\delta d)(1-\delta))$

$\Longrightarrow z(1-\delta) = x\big((c+d)-\delta(c+d)\big) \Longrightarrow z(1-\delta) = x(c+d)(1-\delta)$ eşitliğinden $z = x(c+d)$ ve $g = c+\delta d \in L(H)$ olduğundan $c^2 - d^2 = 1$ ve $c \geq 1$ dir. Buradan $c = \sqrt{1+d^2}$ olur ve bunu denklemde yazarsak $z = x\big(\sqrt{1+d^2}+d\big) \Longrightarrow \sqrt{1+d^2}+d = \frac{z}{x}$ dir. $\frac{z}{x} = k$ alalım. $\sqrt{1+d^2} = k - d'$ da her iki tarafın karesi alınır ise $1 + d^2 = k^2 - 2kd + d^2 \Longrightarrow 2kd = k^2 - 1 \Longrightarrow d = \frac{k^2-1}{2k}$ bulunur.

Dolayısıyla $g = c + \delta d \in L(H)$ vardır ve $A \underset{\sim}{^{L(H)}} B$ dir.

3) $x = -y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x - \delta x = x(1-\delta)$ ve $B = z + \delta w = z + \delta z = z(1+\delta)$ olur. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ dır. $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ve $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealler ve $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\} \cap \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\} = \{0\}$ olduğundan $z(1+\delta) = h(x(1-\delta))$ olacak şekilde $h \in L(H)$ mevcut değildir. Dolayısıyla A eleman B' ye $L(H)$ denk değildir.

4) $x = -y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x + \delta x = x(1+\delta)$ ve $B = z + \delta w = z - \delta z = z(1-\delta)$ olur. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ dır. $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ve $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealler ve $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\} \cap \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\} = \{0\}$ olduğundan $z(1-\delta) = h(x(1+\delta))$ olacak şekilde $h \in L(H)$ mevcut değildir. Dolayısıyla A eleman B' ye $L(H)$

denk değildir.

Lemma 9: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $c \overset{L(H)}{\sim} c$ denktir.

İspat: Önerme 29’ dan çıkıyor. ■

Lemma 10: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için c eleman $-c$’ ye $L(H)$ denk değildir.

İspat: Farz edelim ki $c \overset{L(H)}{\sim} -c$ olsun. $c \overset{L(H)}{\sim} -c$ olduğundan $-c = gc$ olacak şekilde $g \in L(H)$ vardır. $-c = gc \Longrightarrow g = -1$ dir. $|-1|_1 = 1$ ve $-1 \ngeq 1$ olduğundan $g \notin L(H)$ dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla c eleman $-c$’ ye $L(H)$ denk değildir. ■

Önerme 33: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k > 0, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A \overset{L(H)}{\sim} \sqrt{k}$ dir.

İspat: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k > 0, k \in \mathbb{R}$ ve $B = \sqrt{k} \in \mathbb{H}$ elemanları için $|A|_1 = |B|_1 = k \neq 0$ olduğundan, Önerme 30’ a göre $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir. ■

Lemma 11: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $\delta c \overset{L(H)}{\sim} \delta c$ denktir.

İspat: Önerme 29’ dan çıkıyor. ■

Lemma 12: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için δc eleman $-\delta c$’ ye $L(H)$ denk değildir.

İspat: Farz edelim ki $\delta c \overset{L(H)}{\sim} -\delta c$ olsun. $\delta c \overset{L(H)}{\sim} -\delta c$ olduğundan $-\delta c = g(\delta c)$ olacak şekilde $g \in L(H)$ vardır. $-\delta c = g(\delta c) \Longrightarrow g = -1$ dir. $|-1|_1 = 1$ ve $-1 \ngeq 1$ olduğundan $g \notin L(H)$ dir. Bu bir çelişkidir. δc eleman $-\delta c$’ ye $L(H)$ denk değildir. ■

Lemma 13: Keyfi $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ için c eleman δc’ ye $L(H)$ denk değildir.

İspat: $|c|_1 = c^2$, $|\delta c|_1 = -c^2, c \neq 0$ için $c^2 \neq -c^2$ olduğundan Önerme 30’ a göre c eleman δc’ ye $L(H)$ denk değildir. ■

Önerme 34: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k < 0, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A \overset{L(H)}{\sim} \delta\sqrt{|k|}$ dir.

İspat: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k < 0,\ k \in \mathbb{R}$ ve $B = \delta\sqrt{|k|} \in \mathbb{H}$ elemanları için $|A|_1 = |B|_1 = k \neq 0$ olduğundan, Önerme 30’ a göre $A \overset{L(H)}{\sim} B$ dir. ■

Not: Bu denklik problemlerinin çözümü [11]’ de $L(H)$’ in izomorf olduğu L’ in yörüngeleri kullanılarak verildi. Burada ise hiperbolik sayılar kullanıldı.

Sonuç olarak $L(H)$ tüm yörüngelerini şu şekilde verebiliriz:

1) Keyfi $k \neq 0, k > 0$ için $\{\, x + \delta y \in \mathbb{H}\colon x^2 - y^2 = k, x > 0\}$;

2) Keyfi $k \neq 0, k > 0$ için $\{ x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y > 0\}$;

3) Keyfi $k \neq 0, k < 0$ için $\{ x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, x < 0\}$;

4) Keyfi $k \neq 0, k < 0$ için $\{ x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y < 0\}$;

5) $k = 0$ için $\{ x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, x > 0\} \Longrightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H}: x = y, x > 0\}$;

6) $k = 0$ için $\{ x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, x < 0\} \Longrightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H}: x = y, x < 0\}$;

7) $k = 0$ için $\{ x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y > 0\} \Longrightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H}: x = -y, y > 0\}$;

8) $k = 0$ için $\{ x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k, y < 0\} \Longrightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H}: x = -y, y < 0\}$;

9) $\{(0,0)\}$;

2.5. $B(H)_2$ -Denklik Problemi

Tanım 24: $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$ olsun. Eğer $h_2 = gh_1$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ varsa $h_1$ve h_2 elemanları $B(H)_2$' e göre denk denir ve $h_1 \overset{B(H)_2}{\sim} h_2$ şeklinde gösterilir.

Önerme 35: $x \overset{B(H)_2}{\sim} y$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıyan, simetri ve geçişmenin var olduğunu göstermeliyiz.

i) Yansıyan:

$x \overset{B(H)_2}{\sim} x$ olması için $x = gx$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ olduğu gösterilmeli. $g = 1$ için $x = 1x$ ve $|1|_2 = 1$ olduğundan $g \in B(H)_2$ dir. Buradan görülüyor ki $x \overset{B(H)_2}{\sim} x$ dir.

ii) Simetri:

$x \overset{B(H)_2}{\sim} y$ olsun. Göstermeliyiz ki $y \overset{B(H)_2}{\sim} x$ dir.

$x \overset{B(H)_2}{\sim} y$ olduğundan $y = gx$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$vardır. $\exists g_1 \in B(H)_2$ öyle ki $x = g_1 y$ dir. Bu ifadeyi $y = gx$' de yerine yazarsak $y = g(g_1 y)$ bulunur i)' den $gg_1 = 1 \Longrightarrow g_1 = g^{-1} \in B(H)_2$ olduğundan $y \overset{B(H)_2}{\sim} x$ dir.

iii) Geçişme:

$x \overset{B(H)_2}{\sim} y$ ve $y \overset{B(H)_2}{\sim} z$ olsun. Göstermeliyiz ki $x \overset{B(H)_2}{\sim} z$ dir.

$x \overset{B(H)_2}{\sim} y$ olduğundan $y = gx$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ ve $y \overset{B(H)_2}{\sim} z$ olduğundan $z = g_1 y$ olacak şekilde $g_1 \in B(H)_2$vardır. $z = g_1 y$'de y' nin yerine $y = gx$ yazılırsa $z = g_1(gx)$ elde edilir ve $g, g_1 \in B(H)_2$ olduğundan $gg_1 \in B(H)_2$ dir.

Dolayısıyla $x \overset{B(H)_2}{\sim} z$ dir. ■

Önerme 36: $A, B \in \mathbb{H}$ ve $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ ise $|A|_2 = |B|_2$ dir.

İspat: $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ olsun. Bu taktirde $\exists g \in B(H)_2$ öyle ki $B = gA$ dır. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa $|B|_2 = |gA|_2 \Rightarrow |B|_2 = |g|_2|A|_2$ ve $g \in B(H)_2$ olduğundan $|g|_2 = 1$ dir. Buradan $|A|_2 = |B|_2$ dir. ■

Önerme 37: $A, B \in \mathbb{H}, |A|_2 \neq 0, |B|_2 \neq 0$ ve $|A|_2 = |B|_2$ ise $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

İspat: $|A|_2 = |B|_2$ olsun. Gösterilmeli ki $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

$A, B \in \mathbb{H}$ olduğundan $A = x + \delta y, B = z + \delta w$ dir. $|A|_2 = |B|_2$ olduğundan $|x^2 - y^2| = |z^2 - w^2|$ dir.

$|x^2 - y^2| = |z^2 - w^2| = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ alalım. $x \geq c, x \leq -c,\ z \geq c, z \leq -c,$ $y \geq c, y \leq -c, w \geq c, w \leq -c$ durumları oluşur.

1) $x \geq c, z \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \geq c$ için $A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \geq c$ için $B = \mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow (\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Rightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

2) $x \geq c, z \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \geq c$ için $A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \leq -c$ için $B = -\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Rightarrow -\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Rightarrow -(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

3) $x \le -c, z \ge c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \le -c$ için $A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \ge c$ için $B = \mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -(\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

4) $x \le -c, z \le -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \le -c$ için $A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \le -c$ için $B = -\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

5) $y \ge c, w \ge c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \ge c$ için $A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \ge c$ için $B = \delta\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

6) $y \geq c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \geq c$ için $A = \delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \leq -c$ için $B = -\delta c(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -\,(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$-(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

7) $y \leq -c, w \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \leq -c$ için $A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \geq c$ için $B = \delta\, c(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = \delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -\,(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -\,(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$-\,(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

8) $y \leq -c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \leq -c$ için $A = -\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \leq -c$ için $B = -\delta\, c(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = -\,\delta c(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow (\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\, A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow (\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\, A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow (\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\, A = B$ bulunur.

$(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

9) $x \geq c, w \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \geq c$ için $A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \geq c$ için $B = \delta\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $\delta\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow \delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

10) $x \geq c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \geq c$ için $A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = -c^2, w \leq -c$ için $B = -\delta\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -\delta\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -\delta(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-\delta\,(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

11) $x \leq -c, w \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \leq -c$ için $A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, w \geq c$ için $B = \delta\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -\delta\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -\,\delta(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -\,\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

12) $x \leq -c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = c^2, x \leq -c$ için $A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \leq -c$ için $B = -\,\delta\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow \delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \underset{\sim}{\overset{B(H)_2}{}} B$ dir.

13) $y \geq c, z \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \geq c$ için $A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \geq c$ için $B = \mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow \delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \underset{\sim}{\overset{B(H)_2}{}} B$ dir.

14) $y \geq c, z \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \geq c$ için $A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \leq -c$ için $B = -\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = \delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -\,\delta(\cosh(\beta-\alpha) + \delta\sinh(\beta-\alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \underset{\sim}{\overset{B(H)_2}{}} B$ dir.

15) $y \leq -c, z \geq c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \leq -c$ için $A = -\delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \geq c$ için $B = \mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\,\delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$-\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = \mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow -\,\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow -\,\delta(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow -\,\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$-\,\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

16) $y \leq -c, w \leq -c$ ise;

$A = x + \delta y, x^2 - y^2 = -c^2, y \leq -c$ için $A = -\delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ dir.

$B = z + \delta w, z^2 - w^2 = c^2, z \leq -c$ için $B = -\,\mathrm{c}(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ dır. Gösterilmeli ki $B = gA$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ vardır.

$A = -\,\delta\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$ her iki tarafı $\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$ çarpalım.

$\delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = -\,\mathrm{c}(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)\,(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh\beta + \delta\sinh\beta)\,A = B\,(\cosh\alpha + \delta\sinh\alpha)$

$\Longrightarrow \delta(\cosh(\beta - \alpha) + \delta\sinh(\beta - \alpha))\,A = B$ ve $\beta - \alpha = \theta$ alırsak

$\Longrightarrow \delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta)\,A = B$ bulunur.

$\delta(\cosh\theta + \delta\sinh\theta) \in B(H)_2$ olduğundan $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir. ■

Şimdi $A = x + \delta y, B = z + \delta w$ ve $|A|_2 = |B|_2 = 0$ olsun. $|A|_2 = 0$ olduğundan $\sqrt{|x^2 - y^2|} = 0 \Longrightarrow x^2 - y^2 = 0$ dır. Buradan $x = y$ veya $x = -y$ dir. Benzer şekilde $|B|_2 = 0$ olduğundan $z = w$ veya $z = -w$ dur. Dolayısıyla $|A|_2 = |B|_2 = 0$ için şöyle dört durum vardır:

1) $x = y$ ve $z = w$ dir;

2) $x = -y$ ve $z = -w$ dir;

3) $x = -y$ ve $z = w$ dir;

4) $x = y$ ve $z = -w$ dir.

Eğer $A = x + \delta y = 0$ ve $B = z + \delta w \neq 0$ ise, A eleman B' ye $B(H)_2$ denk olamaz. Benzer şekilde $A = x + \delta y \neq 0$ ve $B = z + \delta w = 0$ ise, A eleman B' ye $B(H)_2$ denk olamaz.

Önerme 38: $A = x + \delta y \neq 0, B = z + \delta w \neq 0 \in \mathbb{H}, |A|_2 = |B|_2 = 0$ olsun. Bu taktirde:

1) $x = y$ ve $z = w$ ise $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

2) $x = -y$ ve $z = -w$ ise $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

3) $x = -y$ ve $z = w$ ise A eleman B' ye $B(H)_2$ denk değildir.

4) $x = y$ ve $z = -w$ ise A eleman B' ye $B(H)_2$ denk değildir.

İspat: $|A|_2 = |B|_2 = 0$ olduğundan $\sqrt{|x^2 - y^2|} = \sqrt{|z^2 - w^2|} = 0$ dir. Buradan $x = y$ veya $x = -y$ ve $z = w$ veya $z = -w$ dır.

1) $x = y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x + \delta x = x(1 + \delta)$ ve $B = z + \delta w = z + \delta z = z(1 + \delta)$ olur. Göstermeliyiz ki $B = gA$ olacak şekilde $g = c + \delta d \in B(H)_2$ vardır. $B = gA \Longrightarrow z(1 + \delta) = (c + \delta d)\big(x(1 + \delta)\big) \Longrightarrow z(1 + \delta) = x((c + \delta d)(1 + \delta))$

$\Longrightarrow z(1 + \delta) = x\big((c + d) + \delta(c + d)\big) \Longrightarrow z(1 + \delta) = x(c + d)(1 + \delta)$ eşitliğinden $z = x(c + d)$ ve $g = c + \delta d \in B(H)_2$ olduğundan $\sqrt{|c^2 - d^2|} = 1 \Longrightarrow c^2 - d^2 = 1$ veya $c^2 - d^2 = -1$ dir. $c = \pm\sqrt{1 + d^2}$' yi alırsak ve bunu denklemde yazarsak $z = x\big(\pm\sqrt{1 + d^2} + d\big) \Longrightarrow \pm\sqrt{1 + d^2} + d = \frac{z}{x}$ dir. $\frac{z}{x} = k$ alalım. $\pm\sqrt{1 + d^2} = k - d$' da her iki tarafın karesi alınır ise

$1 + d^2 = k^2 - 2kd + d^2 \Longrightarrow 2kd = k^2 - 1 \Longrightarrow d = \frac{k^2-1}{2k}$ bulunur.

Dolayısıyla $g = c + \delta d \in B(H)_2$ vardır ve $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

2) $x = -y, z = -w$ ise;

$A = x + \delta y = x - \delta x = x(1 - \delta)$ ve $B = z + \delta w = z - \delta z = z(1 - \delta)$ olur. Göstermeliyiz ki $B = gA$ olacak şekilde $g = c + \delta d \in B(H)_1$ vardır. $B = gA \Longrightarrow z(1 - \delta) = (c + \delta d)\big(x(1 - \delta)\big) \Longrightarrow z(1 - \delta) = x((c + \delta d)(1 - \delta))$

$\Longrightarrow z(1 - \delta) = x\big((c + d) - \delta(c + d)\big) \Longrightarrow z(1 - \delta) = x(c + d)(1 - \delta)$ eşitliğinden $z = x(c + d)$ ve $g = c + \delta d \in B(H)_2$ olduğundan $\sqrt{|c^2 - d^2|} = 1 \Longrightarrow c^2 - d^2 = 1$ veya $c^2 - d^2 = -1$ dir. $c = \pm\sqrt{1 + d^2}$' yi alırsak ve bunu denklemde yazarsak $z = x\big(\pm\sqrt{1 + d^2} + d\big) \Longrightarrow \pm\sqrt{1 + d^2} + d = \frac{z}{x}$ dir. $\frac{z}{x} = k$ alalım. $\pm\sqrt{1 + d^2} = k - d$' da her iki tarafın karesi alınır ise

$1 + d^2 = k^2 - 2kd + d^2 \Longrightarrow 2kd = k^2 - 1 \Longrightarrow d = \frac{k^2-1}{2k}$

Dolayısıyla $g = c + \delta d \in B(H)_2$ vardır ve $A \stackrel{B(H)_2}{\sim} B$ dir.

3) $x = -y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x - \delta x = x(1 - \delta)$ ve $B = z + \delta w = z + \delta z = z(1 + \delta)$ olur. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ dır. $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ve $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealler ve $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\} \cap \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\} = \{0\}$ olduğundan $z(1+\delta) = h(x(1-\delta))$ olacak şekilde $h \in B(H)_2$ mevcut değildir. Dolayısıyla A eleman B’ ye $B(H)_2$ denk değildir.

4) $x = -y, z = w$ ise;

$A = x + \delta y = x + \delta x = x(1 + \delta)$ ve $B = z + \delta w = z - \delta z = z(1 - \delta)$ olur. $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olduğundan $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ dır. $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\}$ ve $\{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\}$ idealler ve $\{r(1+\delta): r \in \mathbb{R}\} \cap \{r(1-\delta): r \in \mathbb{R}\} = \{0\}$ olduğundan $z(1-\delta) = h(x(1+\delta))$ olacak şekilde $h \in B(H)_2$ mevcut değildir. Dolayısıyla A eleman B’ ye $B(H)_2$ denk değildir. ■

Lemma 14: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $c \stackrel{B(H)_2}{\sim} c$ denktir.

İspat: Önerme 35’ den çıkıyor. ■

Lemma 15: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $c \stackrel{B(H)_2}{\sim} -c$ denktir.

İspat: $c \stackrel{B(H)_2}{\sim} -c$ olması için $-c = gc$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ olduğu gösterilmeli. $g = -1$ için $-c = (-1)c$ ve $|-1|_2 = 1$ olduğundan $g \in B(H)_2$ dir. Buradan görülüyor ki $c \stackrel{B(H)_2}{\sim} -c$ dir. ■

Önerme 39: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k > 0, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A \stackrel{B(H)_2}{\sim} \sqrt{k}$ dır.

İspat: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k > 0, k \in \mathbb{R}$ ve $B = \sqrt{k} \in \mathbb{H}$ elemanları için $|A|_2 = |B|_2 = \sqrt{k} \neq 0$ olduğundan, Önerme 37’ ye göre $A \stackrel{B(H)_2}{\sim} B$ dir. ■

Lemma 16: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $\delta c \stackrel{B(H)_2}{\sim} \delta c$ denktir.

İspat: Önerme 30’ dan çıkıyor. ■

Lemma 17: Keyfi $c \in \mathbb{R}$ için $\delta c \stackrel{B(H)_2}{\sim} -\delta c$ denktir.

İspat: $\delta c \stackrel{B(H)_2}{\sim} -\delta c$ olması için $-\delta c = g(\delta c)$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ olduğu gösterilmeli. $g = -1$ için $-\delta c = (-1)\delta c$ ve $|-1|_2 = 1$ olduğundan $g \in B(H)_2$ dir.

Buradan görülüyor ki $\delta c \overset{B(H)_2}{\sim} -\delta c$ dir. ■

Lemma 18: $c \in \mathbb{R}$ için $c \overset{B(H)_2}{\sim} \delta c$ denktir.

İspat: $c \overset{B(H)_2}{\sim} \delta c$ olması için $\delta c = gc$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ olduğu gösterilmeli. $g = \delta$ için $\delta c = \delta c$ ve $|\delta|_2 = 1$ olduğundan $g \in B(H)_2$ dir. Buradan görülüyor ki $c \overset{B(H)_2}{\sim} \delta c$ dir. ■

Lemma 19: $c \in \mathbb{R}$ için $c \overset{B(H)_2}{\sim} -\delta c$ denktir.

İspat: $c \overset{B(H)_2}{\sim} -\delta c$ olması için $-\delta c = gc$ olacak şekilde $g \in B(H)_2$ olduğu gösterilmeli. $g = -\delta$ için $-\delta c = -\delta c$ ve $|-\delta|_2 = 1$ olduğundan $g \in B(H)_2$ dir. Buradan görülüyor ki $c \overset{B(H)_2}{\sim} -\delta c$ dir. ■

Önerme 40: $A = x + \delta y \in \mathbb{H},\ \ x^2 - y^2 = k,\ \ k < 0,\ \ k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A \overset{B(H)_2}{\sim} \delta\sqrt{|k|}$ dir.

İspat: $A = x + \delta y \in \mathbb{H}, x^2 - y^2 = k, k < 0,\ k \in \mathbb{R}$ ve $B = \delta\sqrt{|k|} \in \mathbb{H}$ elemanları için $|A|_2 = |B|_2 = \sqrt{|k|} \neq 0$ olduğundan, Önerme 37' ye göre $A \overset{B(H)_2}{\sim} B$ dir. ■

Sonuç olarak $B(H)_2$ tüm yörüngelerini şu şekilde verebiliriz:

1) Keyfi $k \neq 0, k > 0$ için $\{\, x + \delta y \in \mathbb{H}: |x^2 - y^2| = k\}$;

2) $k = 0$ için $\{\, x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k\} \Longrightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H}: x = y, x = y \neq 0\}$;

3) $k = 0$ için $\{\, x + \delta y \in \mathbb{H}: x^2 - y^2 = k\} \Longrightarrow \{x + \delta y \in \mathbb{H}: x = -y, x = -y \neq 0\}$;

4) $\{(0,0)\}$;

2.6. $\boldsymbol{L, L(H), B(H)_1, SO(1,1), B(H)_2, O(1,1)}$ Grupları Arasındaki Bağlantılar

Önerme 41: $f: B(H)_1 \longrightarrow SO(1{,}1)$ dönüşümü $A = (a + \delta b) \in B(H)_1$ için $f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ olarak tanımlansın. Bu takdirde f, $B(H)_1$' den $SO(1{,}1)$' e grup izomorfizmasıdır.

İspat: $B(H)_1 = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: |A|_1 = a^2 - b^2 = 1\}$ grubu ve $SO(1{,}1) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A = a^2 - b^2 = 1\right\}$grubu verilsin. f' nin izomorfizma olduğunu göstermek için 1-1, örten ve $(+), (\cdot)$ işlemlerine göre homomorfizma olduğunu göstermeliyiz.

f,+, işlemine göre homomorfizimdir:

$\forall A,B \in B(H)_{\mathbf{1}}$ için $f(A+B)=f(A)+f(B)$ olduğunu gösterelim.

$f(A+B)=f(a+\delta b+c+\delta d)=f((a+c)+\delta(b+d)=f(a+c,b+d)=$

$$=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}=f(A)+f(B)$$

f,$\cdot$, işlemine göre homomorfizmdir:

$\forall A,B \in B(H)_{\mathbf{1}}, \lambda \in \mathbb{R}$ için $f(\lambda AB)=\lambda f(A)f(B)$ olduğunu gösterelim.

$f(\lambda AB)=f\big(\lambda(a+\delta b)(c+\delta d)\big)=f\big(\lambda\big(ac+bd+\delta(ad+bc)\big)\big)=$

$$=f(\lambda(ac+bd,ad+bc))=\lambda\begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}=$$

$$=\lambda f(A)f(B),$$

Sonuç olarak $f(\lambda AB)=\lambda f(A)f(B)$' dir.

f, bire birdir:

$\forall A,B \in B(H)_{\mathbf{1}}$ için $A\neq B \Longrightarrow f(A)\neq f(B)$ olduğunu gösterelim. Gerçek den; $A=(a,b), B=(c,d)\in B(H)_{\mathbf{1}}$için $A\neq B \Longrightarrow a\neq c$ veya $b\neq d$' dir. Dolayısıyla $f(A)\neq f(B)$' dir.

f, örtendir:

$SO(1,1)$' deki her bir $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ matrisi $B(H)_{\mathbf{1}}{}'$ deki bir tek $A=(a,b)$ hiperbolik sayısının f ile elde edilmiş görüntüsüdür. ■

Önerme 42: $f\colon L(H)\subset B(H)_1 \longrightarrow L\subset SO(1,1)$ tanımlansın. f, $L(H)$' den L' ye grup izomorfizmadır.

İspat: $L(H)=\{A=(a,b)\in \mathbb{H}\colon |A|_1=a^2-b^2=1, a\geq 1\}$ grubu ve $L=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \det A=a^2-b^2=1, a\geq 1\right\}$ grubu verilsin. f' nin izomorfizma olduğunu göstermek için 1-1, örten ve $(+),(\cdot)$ işlemlerine göre homomorfizma olduğunu göstermeliyiz.

f,+, işlemine göre homomorfizimdir:

$\forall A,B \in L(H)$ için $f(A+B)=f(A)+f(B)$ olduğunu gösterelim.

$f(A+B)=f(a+\delta b+c+\delta d)=f((a+c)+\delta(b+d)=f(a+c,b+d)=$

$$=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}=f(A)+f(B)$$

f,$\cdot$, işlemine göre homomorfizmdir:

$\forall A, B \in L(H), \lambda \in \mathbb{R}$ için $f(\lambda AB) = \lambda f(A)f(B)$ olduğunu gösterelim.

$f(\lambda AB) = f\big(\lambda(a+\delta b)(c+\delta d)\big) = f\big(\lambda\big(ac+bd+\delta(ad+bc)\big)\big) =$

$= f(\lambda(ac+bd, ad+bc)) = \lambda\begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} =$

$= \lambda f(A)f(B),$

Sonuç olarak $f(\lambda AB) = \lambda f(A)f(B)$' dir.

f, bire birdir:

$\forall A, B \in L(H)$ için $A \neq B \Longrightarrow f(A) \neq f(B)$ olduğunu gösterelim. Gerçek den; $A = (a,b), B = (c,d) \in L(H)$için $A \neq B \Longrightarrow a \neq c$ veya $b \neq d$' dir. Dolayısıyla $f(A) \neq f(B)$' dir.

f, örtendir:

L' deki her bir $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ matrisi $L(H)$' deki bir tek $A = (a,b)$ hiperbolik sayısının f ile elde edilmiş görüntüsüdür. ■

Önerme 43: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\det A = a^2 - b^2 = -1$ ise $A \notin O(1,1)$' dir.

İspat: $A^t \eta A = \eta, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ise $A \in O(1,1)$' dir.

$$A^t \eta A = \eta \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2-b^2 & ab-ba \\ ba-ab & b^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & b^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ olduğundan

$A \notin O(1,1)$' dir. ■

Sonuç 3: $M(2,\mathbb{R})$, 2×2 tipindeki tüm matrislerin kümesi olarak tanımlansın. $f: B(H)_2 \longrightarrow M(2,\mathbb{R})$ dönüşümü $A = (a+\delta b) \in B(H)_2$ için $f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$olsun. $f(B(H)_2) \subset M(2,\mathbb{R})$ alt grubudur. $f(B(H)_2) \nsubseteq SO(1,1)$ ve $f(B(H)_2) \nsubseteq O(1,1)$' dir.

İspat: $A = (a,b) \in B(H)_2$ ve $|A|_2 = \sqrt{|a^2-b^2|} = 1$ dir. Buradan $a^2 - b^2 = 1$ ve $a^2 - b^2 = -1$ dir. Önermeye göre $A \notin O(1,1)$ dir. Dolayısıyla $f(B(H)_2) \nsubseteq O(1,1)$dir. Ayrıca $A \notin SO(1,1)$ olduğundan $f(B(H)_2) \nsubseteq SO(1,1)$ dir. ■

2.7. $SO(1,1,\mathbb{R})$ Grubun Denklik Probleminin Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımı İle Çözümü

Önerme 44: $h,k \in \mathbb{R}^2,\ h = \binom{x}{y},\ k = \binom{z}{w},\ x,y,z,w \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h \underset{\sim}{^{SO(1,1)}} k \iff$ aşağıdaki dört şartın biri sağlanır:

1) $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $x \geq c, z \geq c$ ise;

2) $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $x \geq c, z \leq -c$ ise;

3) $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $x \leq -c, z \geq c$ ise;

4) $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $x \leq -c, z \leq -c$ ise;

İspat: "$\Longrightarrow$" $h \underset{\sim}{^{SO(1,1)}} k$ olsun. O halde $\exists g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ öyle ki $k = gh$ dır.

$$k = gh \Rightarrow \det\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow z^2 - w^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2),\qquad a^2 - b^2 = 1$ olduğundan,

$\Rightarrow z^2 - w^2 = x^2 - y^2$ bulunur.

"$\Longleftarrow$" $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $(x \geq c, z \geq c, x \leq -c, z \leq -c)$ olsun. Göstermeliyiz ki $h \underset{\sim}{^{SO(1,1)}} k$ dır.

1) $x \geq c, z \geq c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \geq c$ ise $\left(\frac{x}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{c}\right)^2 = 1, \frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{x}{c} & \frac{y}{c} \\ \frac{y}{c} & \frac{x}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in SO(1,1) \text{ dir.}$$

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \geq c$ ise $\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 1, \frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{z}{c} & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & \frac{z}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in SO(1,1) \text{ dir.}$$

Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in SO(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta-\alpha=\theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ olduğundan $h \overset{SO(1,1)}{\sim} k$ dır.

2) $x \geq c, z \leq -c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \geq c$ ise $\left(\frac{x}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{c}\right)^2 = 1, \frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{x}{c} & \frac{y}{c} \\ \frac{y}{c} & \frac{x}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \leq -c$ ise $\left(-\frac{z}{c}\right)^2 - \left(-\frac{w}{c}\right)^2 = 1, -\frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} -\frac{z}{c} & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & -\frac{z}{c} \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$

dir. Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in SO(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta-\alpha=\theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$\begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ olduğundan $h \overset{SO(1,1)}{\sim} k$ dır.

3) $x \leq -c, z \geq c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \leq -c$ ise $\left(-\frac{x}{c}\right)^2 - \left(-\frac{y}{c}\right)^2 = 1, -\frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} -\frac{x}{c} & -\frac{y}{c} \\ -\frac{y}{c} & -\frac{x}{c} \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \geq c$ ise $\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 1, \frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{z}{c} & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & \frac{z}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ dir.

Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in SO(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $-\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$-\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$ alalım,

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix}$ bulunur.

$\begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ olduğundan $h \underset{\sim}{^{SO(1,1)}} k$ dır.

4) $x \leq -c, z \leq -c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \leq -c$ ise $\left(-\frac{x}{c}\right)^2 - \left(-\frac{y}{c}\right)^2 = 1, -\frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} -\frac{x}{c} & -\frac{y}{c} \\ -\frac{y}{c} & -\frac{x}{c} \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \leq -c$ ise $\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 1, \frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} -\frac{z}{c} & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & -\frac{z}{c} \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$

dir. Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in SO(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$ alalım,

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ bulunur.

$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \in SO(1,1)$ olduğundan $h \underset{\sim}{^{SO(1,1)}} k$ dır. ■

Not: $SO(1,1)$'in denklik probleminin çözümü [11]' de yörüngeler dilinde verildi. Burada ise hiperbolik fonksiyonların matris gösterimi ile $SO(1,1)$'in denkliği verildi.

2.8. Lorentz Grubun Denklik Probleminin Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımı ile Çözümü

Önerme 45: $h,k \in \mathbb{R}^2,\ h = \binom{x}{y}, k = \binom{z}{w},\ x,y,z,w \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h \overset{L}{\sim} k$ $\Leftrightarrow$aşağıdaki iki şartın biri sağlanır:

1) $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $x \geq c, z \geq c$ ise;

2) $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $x \leq -c, z \leq -c$ ise;

İspat: "$\Rightarrow$" $h \overset{L}{\sim} k$ olsun. O halde $\exists g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in L$ öyle ki $k = gh$ dır.

$$k = gh \Rightarrow \det\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow z^2 - w^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2),$ $\quad a^2 - b^2 = 1$ olduğundan,

$\Rightarrow z^2 - w^2 = x^2 - y^2$ bulunur.

"$\Leftarrow$" $x^2 - y^2 = z^2 - w^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $(x \geq c, z \geq c, x \leq -c, z \leq -c)$ olsun. Göstermeliyiz ki $h \overset{L}{\sim} k$ dır.

1) $x \geq c, z \geq c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \geq c$ ise $\left(\frac{x}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{c}\right)^2 = 1, \frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{x}{c} & \frac{y}{c} \\ \frac{y}{c} & \frac{x}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in L$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \geq c$ ise $\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 1, \frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{z}{c} & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & \frac{z}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in L$ dir. Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in L$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \in L$ olduğundan $h \overset{L}{\sim} k$ dır.

2) $x \leq -c, z \leq -c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \leq -c$ ise $\left(-\frac{x}{c}\right)^2 - \left(-\frac{y}{c}\right)^2 = 1, -\frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} -\frac{x}{c} & -\frac{y}{c} \\ -\frac{y}{c} & -\frac{x}{c} \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in L$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \leq -c$ ise $\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 1, \frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} -\frac{z}{c} & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & -\frac{z}{c} \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in L$ dir.

Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in L$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \in L$olduğundan $h \overset{L}{\sim} k$ dır. ■

Not: L'nin denklik probleminin çözümü [11] de yörüngeler dilinde verildi. Burada ise hiperbolik fonksiyonların matris gösterimi ile L'nin denkliği verildi.

2.9. $O(1,1,\mathbb{R})$ Grubun Denklik Probleminin Hiperbolik Fonksiyonlar Yardımı İle Çözümü

Önerme 46: $h,k \in \mathbb{R}^2, h=\binom{x}{y}, k=\binom{z}{w}, x,y,z,w \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h \underset{\sim}{^{O(1,1)}} k$ $\Leftrightarrow$ aşağıdaki sekiz şartın biri sağlanır:

1) $x^2-y^2=z^2-w^2=c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $x\geq c, z\geq c$ ise;

2) $x^2-y^2=z^2-w^2=c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $x\geq c, z\leq -c$ ise;

3) $x^2-y^2=z^2-w^2=c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $x\leq -c, z\geq c$ ise;

4) $x^2-y^2=z^2-w^2=c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $x\leq -c, z\leq -c$ ise;

5) $x^2-y^2=z^2-w^2=-c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $y\geq c, w\geq c$ ise;

6) $x^2-y^2=z^2-w^2=-c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $y\geq c, w\leq -c$ ise;

7) $x^2-y^2=z^2-w^2=-c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $y\leq -c, w\geq c$ ise;

8) $x^2-y^2=z^2-w^2=-c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ ve $y\leq -c, w\leq -c$ ise;

İspat: "$\Longrightarrow$" $h \underset{\sim}{^{O(1,1)}} k$ olsun. O halde $\exists g=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} \in O(1,1)$ öyle ki $k=gh$ dır.

$$k=gh \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} z & w \\ w & z\end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x\end{pmatrix}\right)$$

$$\Longrightarrow \det\begin{pmatrix} z & w \\ w & z\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} x & y \\ y & x\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow z^2-w^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2),\ a^2-b^2=\pm 1$ olduğundan,

$\Longrightarrow |x^2-y^2|=|z^2-w^2|$ bulunur.

"$\Longleftarrow$" $|x^2-y^2|=|z^2-w^2|=c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$ alınırsa;

$x^2-y^2=z^2-w^2=c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$,$(x\geq c, z\geq c, x\leq -c, z\leq -c)$ ve $x^2-y^2=z^2-w^2=-c^2, c>0, c\in\mathbb{R}$, $(y\geq c, w\geq c, y\leq -c, w\leq -c)$ olsun.

Göstermeliyiz ki $h \underset{\sim}{^{O(1,1)}} k$ dir.

1) $x\geq c, z\geq c$ ise;

$h=\binom{x}{y}, x^2-y^2=c^2$ ve $x\geq c$ ise $\left(\frac{x}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{c}\right)^2=1, \frac{x}{c}\geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{x}{c} & \frac{y}{c} \\ \frac{y}{c} & \frac{x}{c}\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha\end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

$k=\binom{z}{w}, z^2-w^2=c^2$ ve $z\geq c$ ise $\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{w}{c}\right)^2=1, \frac{z}{c}\geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{z}{c} & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & \frac{z}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$ alalım,

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ bulunur.

$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \overset{O(1,1)}{\sim} k$ dır.

2) $x \geq c, z \leq -c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \geq c$ ise $\left(\frac{x}{c}\right)^2 - \left(\frac{y}{c}\right)^2 = 1, \frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{x}{c} & \frac{y}{c} \\ \frac{y}{c} & \frac{x}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \leq -c$ ise $\left(-\frac{z}{c}\right)^2 - \frac{w}{c}2 = 1, -\frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} -\frac{z}{c} & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & -\frac{z}{c} \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $-\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1)$

dir. Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$ alalım,

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ bulunur.

$\begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \overset{O(1,1)}{\sim} k$ dır.

3) $x \leq -c, z \geq c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \leq -c$ ise $\left(-\frac{x}{c}\right)^2 - \left(-\frac{y}{c}\right)^2 = 1, -\frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} -\frac{x}{c} & -\frac{y}{c} \\ -\frac{y}{c} & -\frac{x}{c} \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $-\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \geq c$ ise $\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 1, \frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{z}{c} & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & \frac{z}{c} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $-\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$-\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$ alalım,

$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix}$ bulunur.

$\begin{pmatrix} -\cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \overset{O(1,1)}{\sim} k$ dır.

4) $x \leq -c, z \leq -c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = c^2$ ve $x \leq -c$ ise $\left(-\frac{x}{c}\right)^2 - \left(-\frac{y}{c}\right)^2 = 1, -\frac{x}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} -\frac{x}{c} & -\frac{y}{c} \\ -\frac{y}{c} & -\frac{x}{c} \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ ve $-\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = c^2$ ve $z \leq -c$ ise $\left(-\frac{z}{c}\right)^2 - \left(-\frac{w}{c}\right)^2 = 1, -\frac{z}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} -\frac{z}{c} & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & -\frac{z}{c} \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ ve $-\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1)$

dir. Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \\ \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta-\alpha=\theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \overset{O(1,1)}{\sim} k$ dır.

5) $y \geq c, w \geq c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = -c^2$ ve $y \geq c$ ise $\left(\frac{y}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = 1, \frac{y}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{x}{c} & \frac{y}{c} \\ \frac{y}{c} & \frac{x}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = -c^2$ ve $w \geq c$ ise $\left(\frac{w}{c}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \frac{w}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{z}{c} & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & \frac{z}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \\ \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta-\alpha=\theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$\begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \overset{O(1,1)}{\sim} k$ dır.

6) $y \geq c, w \leq -c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = -c^2$ ve $x \geq c$ ise $\left(\frac{y}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = 1, \frac{y}{c} \geq 1$ olduğundan

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{x}{c} & \frac{y}{c} \\ \frac{y}{c} & \frac{x}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \in O(1,1)$ dir.

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = -c^2$ ve $w \leq -c$ ise $\left(-\frac{w}{c}\right)^2 - \left(-\frac{z}{c}\right)^2 = 1, -\frac{w}{c} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} -\frac{z}{c} & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & -\frac{z}{c} \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix} \text{ ve } -\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1)$$

dir. Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \\ \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$-\begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \underset{\sim}{^{O(1,1)}} k$ dır.

7) $y \le -c, w \ge c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = -c^2$ ve $y \le -c$ ise $\left(-\frac{y}{c}\right)^2 - \left(-\frac{x}{c}\right)^2 = 1, -\frac{y}{c} \ge 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} -\frac{x}{c} & -\frac{y}{c} \\ -\frac{y}{c} & -\frac{x}{c} \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \text{ ve } -\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \in O(1,1) \text{ dir.}$$

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = -c^2$ ve $w \ge c$ ise $\left(\frac{w}{c}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \frac{w}{c} \ge 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{z}{c} & \frac{w}{c} \\ \frac{w}{c} & \frac{z}{c} \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1) \text{ dir.}$$

Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $-\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$-\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \\ \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta$$ alalım,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix}$$ bulunur.

$-\begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \underset{\sim}{^{O(1,1)}} k$ dır.

8) $y \leq -c, w \leq -c$ ise;

$h = \binom{x}{y}, x^2 - y^2 = -c^2$ ve $y \leq -c$ ise $\left(-\frac{y}{c}\right)^2 - \left(-\frac{x}{c}\right)^2 = 1, -\frac{y}{c} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} -\frac{x}{c} & -\frac{y}{c} \\ -\frac{y}{c} & -\frac{x}{c} \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \text{ ve } -\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \in O(1,1) \text{ dir.}$$

$k = \binom{z}{w}, z^2 - w^2 = -c^2$ ve $w \leq -c$ ise $\left(-\frac{w}{c}\right)^2 - \left(-\frac{z}{c}\right)^2 = 1, -\frac{w}{c} \geq 1$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} -\frac{z}{c} & -\frac{w}{c} \\ -\frac{w}{c} & -\frac{z}{c} \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix} \text{ ve } -\begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix} \in O(1,1)$$

dir. Gösterelim ki $k = gh$ olacak şekilde $g \in O(1,1)$ mevcuttur.

$\begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$ alalım. Her ikitarafı $\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix}$ çarpalım.

$$\begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = -c \begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sinh\alpha & \cosh\alpha \\ \cosh\alpha & \sinh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh\beta & \cosh\beta \\ \cosh\beta & \sinh\beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh(\beta-\alpha) & \cosh(\beta-\alpha) \\ \cosh(\beta-\alpha) & \sinh(\beta-\alpha) \end{pmatrix}, \beta - \alpha = \theta \quad \text{alalım,}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix} \text{ bulunur.}$$

$\begin{pmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix} \in O(1,1)$ olduğundan $h \overset{O(1,1)}{\sim} k$ dır. ■

Not: $O(1,1)$'in denklik probleminin çözümü [11] de yörüngeler dilinde verildi. Burada ise hiperbolik fonksiyonların matris gösterimi ile $O(1,1)$'in denkliği verildi.

3. BULGULAR

Tezde elde edilen bulguları şu şekilde sıralayabiliriz.

1. $A = (a, b), B = (c, d) \in \mathbb{H}$ olsun. Bu taktirde; $AX = B, X = (x, y) \in \mathbb{H}$ denkleminin $\mathbb{H}$'da çözümü vardır $\Leftrightarrow$ aşağıdaki dört şarttan herhangi biri sağlanırsa:

i) $|a| \neq |b|$ ve $\forall c, d \in \mathbb{R}$;

ii) $a = b, c = d, a \neq 0$;

iii) $a = -b, c = -d, a \neq 0$;

iv) $a = b = c = d = 0$.

Teorem 6' da gösterilmiştir.

2. $A = a + \delta b \in \mathbb{H}$ olsun. Bu takdirde $A^{-1} \in \mathbb{H}$ mevcut $\Leftrightarrow |a| \neq |b|$ şeklinde olduğu Önerme 17' de gösterilmiştir.

3. Hiperbolik sayılar halkasının sadece dört ideali vardır ve onlar şunlardır:

i) $A = \{0\}$;

ii) $A = \mathbb{H}$;

iii) $A = \{r(1 + \delta) : r \in \mathbb{R}\}$;

iv) $A = \{r(1 - \delta) : r \in \mathbb{R}\}$.

Önerme 18'de gösterilmiştir.

4. $A = a + \delta b, a^2 - b^2 \neq 0$ hiperbolik sayı olsun. Bu takdirde bu hiperbolik sayının hiperbolik fonksiyonlar yardımı ile ifadesi şöyledir:

i) $a^2 - b^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $a \geq c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$ dir.

ii) $a^2 - b^2 = c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $a \leq -c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = -c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$ dir.

iii) $a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $b \geq c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = \delta c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$ dir.

iv) $a^2 - b^2 = -c^2, c > 0, c \in \mathbb{R}$ ve $b \leq -c$ ise tek $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut öyle ki $A = -\delta c(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$ dir.

Teorem 7' de gösterilmiştir.

6. $A = a + \delta b$ hiperbolik sayı $a^2 - b^2 = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde bu sayı için $a + \delta b =$ c$(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$ veya $a + \delta b =$ cδ$(\cosh \alpha + \delta \sinh \alpha)$ olacak şekilde

$c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ sayılar mevcut değildir. Yani bu hiperbolik sayı için Euler formülünün benzeri mevcut değildir. Önerme 19'da gösterilmiştir.

7. $\forall A \in \mathbb{H}$ için $|A|_1 = |a + \delta b|_1 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$ olduğu Teorem 8' de gösterilmiştir.

8. $\forall A, B \in \mathbb{H}$ için $|AB|_1 = |A|_1 |B|_1$ eşitliği sağlandığı Teorem 9' da gösterilmiştir.

9. $\forall A, B \in \mathbb{H}$, $B = c + \delta d$ ve $|c| \neq |d|$ için $\left|\frac{A}{B}\right|_1 = \frac{|A|_1}{|B|_1}$ eşitliği sağlandığı Teorem 10' da gösterilmiştir.

10. $\forall A \in \mathbb{H}$ için $|A|_2 = |a + \delta b|_2 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b|$ olduğu Teorem 11' de gösterilmiştir.

11. $\forall A, B \in \mathbb{H}$ için $|AB|_2 = |A|_2 |B|_2$ eşitliği sağlandığı Teorem 12' de gösterilmiştir.

12. $\forall A, B \in \mathbb{H}$, $B = c + \delta d$ ve $|c| \neq |d|$ için $\left|\frac{A}{B}\right|_2 = \frac{|A|_2}{|B|_2}$ eşitliği sağlandığı Teorem 13' de gösterilmiştir.

13. $B(H)_{\mathbf{1}} = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: |A|_1 = a^2 - b^2 = 1\}$, $\cdot$, işlemine göre değişmeli grup olduğu Teorem 14' de gösterilmiştir.

14. $B(H)_{\mathbf{2}} = \left\{A = (a, b) \in \mathbb{H}: |A|_2 = \sqrt{|a^2 - b^2|} = 1\right\}$, $\cdot$, işlemine göre değişmeli grup olduğu Teorem 15' de gösterilmiştir.

15. $B(H)_1 \subset B(H)_2$, $B(H)_1, B(H)_2$' nin alt grubudur ve $B(H)_1 \neq B(H)_2$ olduğu Önerme 21' de gösterilmiştir.

16. $H^* = \{A = (a, b) \in \mathbb{H}: a^2 - b^2 \neq 0\}$, $\cdot$, işlemine göre değişmeli grup olduğu Önerme 22' de gösterilmiştir.

17. $B(H)_1, L(H), B(H)_2$' ın denklik tanımları, Tanım 22, Tanım 23, Tanım 24' da gösterilmiştir.

18. $B(H)_1$ denklik problemi Önerme 24, Önerme 25, Önerme 26, Önerme 27, Önerme 28, Lemma 4, Lemma 5, Lemma 6, Lemma 7, Lemme 8' de çözülmüştür.

19. $L(H)$ denklik problemi Önerme 30, Önerme 31, Önerme 32, Önerme 33, Önerme 34, Lemma 9, Lemma 10, Lemma 11, Lemma 12, Lemma 13' de çözülmüştür.

20. $B(H)_2$ denklik problemi Önerme 36, Önerme 37, Önerme 38, Önerme 39, Önerme 40, Lemma 14, Lemma 15, Lemma 16, Lemma 17, Lemma 18, Lemma 19' da çözülmüştür.

4. İRDELEME

Tezin amacı hiperbolik geometri problemlerini cebirsel yöntemlerle, özel olarak, hiperbolik sayılar teorisi yardımı ile incelemek oldu. Bu yöntemi kullanmak için hiperbolik sayılara ait bazı yeni bulgular elde edildi. Tezin temel amacı $O(1,1), SO(1,1)$ ve L grupları için G- denklik problemlerini incelemek idi. İnceleme devamında $SO(1,1)$ ve L gruplarının farklı cebirsel tanımı ortaya çıktı ($B(H)_1$ ve $L(H)$ grubu). Bu yöntem $O(1,1), SO(1,1)$ ve L gruplarından farklı olan ve hiperbolik geometri için önemli olan yeni bir grubu ($B(H)_2$ grubunu) ortaya çıkardı. Hiperbolik sayılar yöntemi hiperbolik geometride hiperbolik fonksiyonların kullanımına da geniş bir imkan veriyor.

5. SONUÇLAR

Tezde elde edilen sonuçları şu şekilde sıralayabiliriz.

1. Hiperbolik sayılara ait bazı özellikler Teorem 6, Önerme 17’ de gösterilmiştir.

2. Hiperbolik sayılar halkasının tüm idealleri Önerme 18’de gösterilmiştir.

3. $A = a + \delta b, a^2 - b^2 \neq 0$ hiperbolik sayı olsun. Bu takdirde bu hiperbolik sayının hiperbolik fonksiyonlar yardımı ile ifadesi Teorem 7’ de gösterilmiştir.

4. $A = a + \delta b$ hiperbolik sayı $a^2 - b^2 = 0$ şartını sağlasın. Bu takdirde bu sayı için Euler formülünün benzeri mevcut değildir. Önerme 19’da gösterilmiştir.

5. $B(H)_1$ denklik problemi Önerme 24, Önerme 25, Önerme 26, Önerme 27, Önerme 28, Lemma 4, Lemma 5, Lemma 6, Lemma 7, Lemma 8’ de çözülmüştür.

6. $L(H)$ denklik problemi Önerme 30, Önerme 31, Önerme 32, Önerme 33, Önerme 34, Lemma 9, Lemma 10, Lemma 11, Lemma 12, Lemma 13’ de çözülmüştür.

7. $B(H)_2$ denklik problemi Önerme 36, Önerme 37, Önerme 38, Önerme 39, Önerme 40, Lemma 14, Lemma 15, Lemma 16, Lemma 17, Lemma 18, Lemma 19’ da çözülmüştür.

6. ÖNERİLER

Hiperbolik sayıların iki boyutlu hiperbolik düzlemde belirtilmesi bu sayıları çok önemli yapar. Hiperbolik sayılar üzerine pek fazla kitap ve makale yazılmadığından araştırılması gereken konular mevcuttur. Bunlardan bazıları iki hiperbolik noktanın ve n-tane hiperbolik noktanın $B(H)_1, B(H)_2, L(H)$ denklik şartları nelerdir? Fiziksel anlamları nelerdir?

Bu soruların cevapları araştırılmış ancak tam olarak sonuçlara ulaşılamamıştır. Bu soruların cevaplarını bulmak için tezde bu sayıları 2-boyutta inceleyerek, bu soruların cevaplarını kısmi olarak bulmaya çalışılmıştır.

Tez çalışmasının önemi:

1. Hiperbolik sayıları anlamak ve önemli olduklarını göstermek.

2. Tezde kullanılan yöntemler Hiperbolik sayılarda yeni yapılacak çalışmalara yardımcı olma niteliğindedir.

3. Tezde kullanılan yöntemler Hiperbolik sayılarda noktalar sisteminin denklik probleminde, hiperbolik geometrideki eğrilerin denklik probleminde önemlidir.

4. Hiperbolik sayılarda noktalar sisteminin denklik problemleri, hiperbolik geometrideki eğrilerin denklik problemleri araştırılması bazı fiziksel (Özel relativity) problemlerin çözümünde önemli olabilir.

7. KAYNAKLAR

1. Cockle, J., " On A New Imaginary in Algebra", Phil. Mag. 3, 34 (1847) 37-47.
2. Clifford, W.K., "Further Notes on Biquaternions", in Mathematical Works edited by A.W. Tucker, (1882) 392.
3. Boccaletti, D., Nichelatti, E., Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V. and Zampetti, P., The Mathematics of Minkowski Space-Time, With Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2008.
4. Vignaux, J.C. and Duranona, V. A., On the theory of functions of Heyperbolic Complex variable (Spanish), Univ. Nac. La Palata (Argentina), Publ. Fac.Ci. Fisicomat. Contrib, 104 (1935) 139-183.
5. Sobczyk, G., The Hyperbolic Number Plane, The College Math,J., 26, 4 (1995) 268-280.
6. Catoni, F., Cannata R., Catoni, V. and Zampetti P., Hyperbolic Trigonometry in Two-Dimensional Space-Time Geometry. N. Cim. B 118 B (2003) 475-491.
7. Catoni, F. and Zampetti, P., Two-Dimensional Space-Time Symmetry in Hyperbolic Functions, N. Cim. B 115 B 12 (2000) 1433-1440.
8. Fjelestad, P. and Gal S.G., N-Dimensional Hyperbolic Complex Numbers. Adv Appl. Clifford Algebr. 8, 1 (1998) 47-68.
9. Hazewinkle, M., "Double and dual numbers", Encyclopaedia of Mathematics, Soviet/AMS/Kluwer, Dordrect. 1994.
10. Borota, N.A., Osler, T.J., Spacetime Numbers The Easy Way, Mathematic and Computer Education, 34, 2 (2000) 159-168.
11. Ören, İ. Minkoski Uzayzaman Geometrisinde noktaların invaryantları, Yüksek lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

Yavuz GÖKSAL, 01.01.1981 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlkokulu Trabzon da, ortaokulu ve liseyi Samsun da tamamladı. O.M.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2004 yılında bu bölümden mezun oldu, aynı yıl özel dershanede öğretmenliğe başladı.2008 yılı ara dönemde K.T.Ü. Yüksek lisansa kabul edildi. İzinli olarak 2008 Ağustos ayında Askerlik görevini kısa dönem er olarak tamamladı. Askerlik dönüşü yüksek lisansına başladı. Halen özel bir dershanede çalışmaktadır. İyi derecede İngilizce bilmektedir.