KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BLACK & SCHOLES OPSİYON MODELİ İÇİN LİNEER REGRESYON YAKLAŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Devran YAZIR

OCAK 2011
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BLACK & SCHOLES OPSİYON MODELİ İÇİN LİNEER REGRESYON YAKLAŞIMI

Devran YAZIR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31.12.2010
Tezin Savunma Tarihi : 19.01.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erhan COŞKUN
Jüri Üyesi : Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Trabzon 2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmada opsiyon değerini bağımlı değişken ve opsiyona dayanak teşkil eden varlık değerini ise bağımsız değişken kabul eden Black&Scholes modeli, modelde mevcut parametrelerin değişimine göre analiz edilmiştir. Volatilite ve faiz oranı değişimine göre genellikle lineer değişim gösteren opsiyon değerleri için lineer bir regresyon modeli önerilmiş ve önerilen model ile opsiyon değerinin parametre bağımlılıkları açıkça gözlemlenebilmiştir.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın bu hale getirilmesinde yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca KTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e, KTÜ İstatistik ve Bilgisayar Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN'e ve Yrd. Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN'a yardımlarından ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Devran YAZIR

Trabzon 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada satın alma(Call) ve satma(Put) opsiyonlarının fiyatlarını hesaplayan Black&Scholes modelinde hisse senedi fiyatı, uygulama fiyatı, risksiz faiz oranı, volatilite ve vadeye kalan zamanın satın alma ve satma opsiyonu fiyatlarına etkileri incelenmiş, satış opsiyonu ve özellikle uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları göz önüne alınarak alış opsiyonu için lineer regresyon modelleri elde edilmiştir. Elde edilen lineer regresyon modelleri ile volatilite ve faiz oranının satış ve alış opsiyonları üzerindeki etkileri gözlemlenmiş ve bu modellerin Black & Scholes modeli ile uygunluğu geliştirilen MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü (GUI) aracılığıyla interaktif olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Black&Scholes Modeli, Opsiyon, Satın Alma Opsiyonu, Satma Opsiyonu, Oynaklık, Hisse Senedi Fiyatı, Uygulama Fiyatı, Faiz Oranı, Vadeye Kalan Zaman.

SUMMARY

The Linear Regression Approach For The Black&Scholes Option Model

In this study, the effects of underlying price, exercise price, interest rate, volatility and expiry date on call and put option prices are analyzed in Black&Scholes model of option pricing. Linear regression models are obtained for the put option and the call option in the neighborhood of exercise price. The compatibility of the linear regression models with Black&Scholes model is analyzed interactively using Matlab Graphical User Interface (GUI).

Key Words: Black-Scholes Model, Option, Call Option, Put Option, volatility, Underlying Price, Exercise Price, Interest Rate, Expiry Date.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLER DİZİNİ

S	: Opsiyona esas teşkil eden varlık fiyatı
T	: Uygulama zamanı
$C(S,T)$	: Alış opsiyonu değeri
$P(S,T)$	: Satış opsiyonu değeri
P_L	: Satış opsiyonu için lineer regresyon yaklaşımı
C_L	: Alış opsiyonu için lineer regresyon yaklaşımı
E	: Uygulama (Kullanım) fiyatı
r	: Risksiz faiz oranı
σ	: Opsiyona konu olan varlığın fiyatındaki değişkenlik (volatilite)
T-t	: Vadeye kalan zaman
ρ_C	: Alış opsiyonu *rho* katsayısı
ρ_P	: Satış opsiyonu *rho* katsayısı
V_C	: Alış opsiyonu *vega* katsayısı
V_P	: Satış opsiyonu *vega* katsayısı
Δ_C	: Alış opsiyonu *delta* katsayısı
Δ_P	: Satış opsiyonu *delta* katsayısı
X=a:dx:b	: X’in değeri a’dan başlayarak dx aralıklarla b’ye kadar arttırılmıştır

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Klasik finansal ürünlerin işlem gördüğü para ve sermaye piyasalarında, 1970'li yılların başında yaşanan ekonomik krizler nedeniyle, finansal risklerden korunma ve bu riskleri kontrol altına alabilecek yeni finansal ürünlerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu finansal ürünlerden biri olan opsiyonlar ise ilk defa 1973 yılında Amerika Birleşik Devletleri'nde işlem görmüştür. Küresel finans piyasalarındaki hareketliliğin artması ile birlikte gelişmekte olan ülkeler, gerekli yatırımları ülkelerine çekebilmek için gelişmiş ülkelerin finasal piyasalarını ve tekniklerini model alarak, türev piyasalarının dünya üzerinde hızla yayılmasını sağlamışlardır[22].

Gelişmekte olan ülke statüsünde yer alan Türkiye, 1999 yılında Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsası'nın (VOB) temellerini atmıştır, 2005 yılında vadeli işlemler piyasasını açarak VOB'u fiili olarak hayata geçirmiştir. VOB'un kuruluşunda, öncelik olarak vadeli işlem sözleşmelerinin (futures) alım satımına yer verilmiştir, opsiyon sözleşmeleriyle ilgili işlemlerin ise sonraki aşamada devreye alınması planlanmıştır[26].

Gelişmiş bir finansal teknik olan **opsiyon**, sözleşmeye konu olan bir malı belli bir fiyattan belirli bir vade içinde veya vade sonunda alma veya satma hakkı veren sözleşmedir.

Bu çalışmada amacımız Black&Scholes modelindeki parametrelerin değişmesi ile alış ve satış opsiyonlarının fiyatlarında meydana gelen değişiklikleri incelemek ve uygun koşullarda alış ve satış opsiyonu fiyatını hesaplayan lineer regresyon modellerini elde ederek belirtilen değişim analizini daha basite indirgemektir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Black&Scholes modeli 1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından yazılan ‘‘ the pricing of options and corporate liabilities’’ adlı makalede ilk defa bahsedilen opsiyon fiyatlama tekniğidir[22]. Black&Scholes modeli, aslında rassal hareketler izleyen sıvı moleküllerini ortaya koyan Brownian Motion’ın hisse fiyatlarına ve finansal hareketlere uyarlanması sonucu ortaya çıkmıştır. Robert C. Merton’un Black&Scholes modeli üzerindeki çalışmasından sonra, model Black-Scholes-Merton Modeli olarak anılmaya başlamıştır[22].

Farklı opsiyon değerleri belirleme modelleri mevcuttur. Bu çalışmada, opsiyon değerini bağımlı değişken, opsiyona dayanak teşkil eden varlık değerini bağımsız değişken kabul ederek formüle edilen Kısmi Diferensiyel Denklem’den ve uygun başlangıç ve sınır şartlarından oluşan Black&Scholes modelini inceleyeceğiz.

Güncel çalışmalarda daha çok benzerlik dönüşümleri ile daha basit bir kısmi diferensiyel denkleme dönüştürüldükten sonra elde edilen analitik çözümler kullanılmak suretiyle opsiyon değerleri belirlenmeye çalışılmaktadır. Ancak analitik çözüm yarı sonsuz bölgede integraller içerdiği için modelin parametre bağımlılığını analitik çözümlerden hareketle inceleyebilmek mümkün olmamaktadır. Bununla birlikte Black&Scholes modelinin analitik çözümleri bir çok çalışmaya konu olmuştur:

Merton [16] sürekli ve kesikli süreçlerden oluşan hisse senedi getirilerinin daha genel durumu için bir opsiyon fiyatlama formülü genelleştirmiştir. Bu çalışma futures anlaşmaları için Black&Scholes formülünden daha etkilidir. Üstelik bu formülün şirket yükümlülükleri fiyatlandırma opsiyonları içinde genişletilebilir olduğunu göstermiştir.

Geske [11] opsiyon üzerine opsiyon (bileşik opsiyon) teorisi üzerine çalışma yapmıştır. Çalışmasında bileşik opsiyon formülünü, borsada firmaların hisseleri üzerine yazılmış opsiyonlar içinde uygulamıştır. Black&Scholes modelinin, bileşik opsiyon formülünün özel bir durumu olarak gösterilebilir olduğunu belirtmiştir. Alış ve satış opsiyonları için oluşturulan bu yeni modelin Black&Scholes modelindeki bazı ön yrgıları ortadan kaldırdığını göstermiştir.

Scott [20] rasgele değişen varyansa sahip Avrupa alış opsiyonlarını fiyatlandırmak için çalışma yapmıştır. Genel olarak opsiyon fiyatlamanın, risk priminin rasgele standart normal dağılım ile ilişkisine bağlı olduğunu incelemiştir. Getiri sürecinin zamana yayılımı sürekli kabul etmiş ve risklere karşı korunmak için iki seçenekli opsiyon kullanılması gerektiğini belirtmiştir.

Turnbull ve Wakeman [23] Black&Scholes algoritmasından daha hızlı, Avrupa ortalama opsiyonlarını fiyatlandıran bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma, Monte Carlo tahminlerine göre test edilmiş ve doğruluğu gösterilmiştir.

Demir [7] sonlu fark modellerini inceleyerek IMKB için ampirik test yapmıştır. IMKB 100 endeksi üzerine düzenlenen (varsayımsal olarak) üç tür Avrupa tipi alım opsiyonu sözleşmesinin değerlerini, Black&Scholes opsiyon fiyatlama formülü, Binom modeli, Monte Carlo Simülasyonu ve Sonlu fark modeli ile bulmuştur. Daha sonra sayısal modellerle elde edilen sonuçları, Black&Scholes opsiyon fiyatlama formülü ile bulunan opsiyon değerleri ile karşılaştırmış ve bu modellerin analitik sonuçlara yakınlığı ile doğruluk derecelerini saptamıştır. Bulunan sonuçların ışığında, Sonlu fark modelinin diğer modellerden üstün yada zayıf yanlarının olup olmadığını ortaya çıkarmaya çalışmıştır.

Polat [19] sözleşmeye konu olan varlıkları fiyatlandırıp değerlendirmek için opsiyonları ve Black&Scholes modelini analiz edip özellikle Amerikan tipi opsiyonlar için sayısal çözüm tekniklerini inceleyerek bu tekniklerden elde edilen sonuçları karşılaştırmak suretiyle en etkili yöntemi belirlemeye çalışmıştır.

Diğer opsiyon değeri belirleme modelleri için [3], [6], [8], [9], [10], [13], [14], [15] çalışmaları incelenebilir.

Bu çalışmada ise yukarda bahsedilen çalışmalarda incelenen Black&Scholes modeli göz önüne alınmış ve aşağıdaki belirtilen açılardan mevcut çalışmalar yapılmıştır.

Black&Scholes opsiyon fiyatlama modelindeki parametrelerin satış ve alış opsiyonu fiyatlarına etkileri Matlab GUI (Grafik Kullanıcı Arayüzü) arıcılığı ile incelenmiştir. Hisse senedi fiyatının, uygulama fiyatından küçük olduğu durumlarda satış opsiyonu için lineer regresyon modeli elde edilmiş ve bu modelin sonuçları ile Black&choles modelinden elde edilen sonuçlar, Matlab GUI (Grafik Kullanıcı Arayüzü) arıcılığı ile karşılaştırılmıştır. Satış opsiyonu için elde edilen lineer regresyon modelindeki *rho* ve *vega* katsayılarının satış opsiyonunun fiyatına etkileri incelenmiştir. Hisse senedi fiyatı, uygulama fiyatının komşuluğunda olduğu durumlarda alış opsiyonu için lineer regresyon modeli elde edilmiş ve bu modelden elde edilen sonuçlarla Black&Scholes modelinden elde edilen sonuçlar, Matlab GUI (Grafik Kullanıcı Arayüzü) arıcılığı ile karşılaştırılmıştır. Uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için elde edilen alış opsiyonu lineer regresyon modelindeki *rho* ve *vega* katsayılarının alış opsiyonu fiyatına etkileri incelenmiştir.

Bu çalışma aşağıdaki gibi organize edilmiştir:

Kesim 3'te opsiyonlarla ilgili temel kavramlar hakkında bilgi verilmiştir. Kesim 4'te Black&Scholes modeli hakkında bilgi verilmiş, örneklerle benzerlik çözümleri verilerek Black&Scholes denklemi için benzerlik çözümü yapılmıştır. Kesim 5'te alış opsiyonu değerinin tek değişkenli ve iki değişkenli parametrelere göre değişimi incelenmiştir. Kesim 6'da uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu lineer regresyon modeli elde edilmiştir. Alış opsiyonu için elde edilen lineer regresyon modelindeki faiz oranı ve volatilitenin alış opsiyonu fiyatına etkileri ve katsayılarındaki değişimler incelenmiştir. Kesim 7'de satış opsiyonu değerinin parametrelere göre değişimi incelenmiştir. Satış opsiyonu için lineer regresyon modeli elde edilmiştir. Satış opsiyonu için elde edilen lineer regresyon modelindeki risksiz faiz oranı ve volatilitenin, satış opsiyonu fiyatına etkisi, değişen hisse senedi fiyatları, değişen vade tarihi ve değişen uygulama fiyatlarına göre incelenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Opsiyonun Tanımı

Opsiyon (option) kavramı, ‘‘hür seçim’’ , ‘‘hür irade’’ anlamına gelen latince ‘‘optio’’ kelimesinden gelmektedir. Bu bölüm [1, 2, 12, 22] çalışmalarından derlenmiştir.

Opsiyon sözleşmesi, miktar ve niteliği belli standartlara göre belirlenen bir değerin, belirli bir tarihte veya belirli bir süre içinde, önceden belirlenen fiyattan satma ve satın alma hakkını tanıyan, ancak kullanılması konusunda zorunluluk içermeyen bir tür sözleşmedir.

Tanımdan da anlaşıldığı üzere opsiyonların en önemli özelliği alıcısını sözleşmeyi uygulama yükümlülüğü altına sokmamasıdır. Burada hak sahibi her zaman opsiyon sözleşmesinin alıcısıdır. Alıcının opsiyon sözleşmesini alması esnasında ödediği fiyat ya da diğer bir değişle opsiyon pirimi dışında hiç bir yükümlülüğü yoktur, buna karşın satıcının sözleşme şartlarını yerine getirme yükümlülüğü vardır. Sözleşmeye konu olan varlık (hisse senedi) hak sahibi tarafından şartlar uygun olduğu sürece kullanılacaktır. Finansal varlık olarak opsiyon sözleşmeleri; hisse senetleri, hisse senedi endeksleri, döviz ve faiz bazlı araçlar için uygulanabilmektedir. İşlem hacmi olarak bakıldığı zaman, opsiyon sözleşmelerinin ağırlıklı olarak hisse senetleri üzerine yapıldığı görülmektedir. opsiyon işlemi, iki taraf arasında yapılmış bir anlaşmadır. Bir opsiyon alıcısı, ödediği opsiyon fiyatı karşılığında,

- Belirli bir finansal üründen → Sözleşmeye konu olan ürün
- Belirli bir miktarda → Sözleşme büyüklüğü
- İlerde belirlenmiş bir tarihte veya öncesinde → Vade sonu tarihi
- Daha önceden belirlenmiş bir fiyattan → Kullanım fiyatı
- Almak veya satmak → Alım veya satım opsiyonu (call-put) hakkını almaktadır.

Opsiyon satıcısı (opsiyonu yazan kişi) ise, opsiyon alıcısının hakkını kullanmak istemesi durumunda, sözleşmeye konu olan ürünü belli bir fiyattan satma veya alma yükümlülüğünü üstlenmekte, bunun karşılığında ise opsiyonu alan kişiden opsiyon fiyatı olan pirim miktarını almaktadır. Opsiyonun, Amerikan veya Avrupa tipi opsiyon olmasına bağlı olarak, opsiyon alan kişi hakkını vade bitiminden önce (Amerikan) veya vade sonunda (Avrupa) , kullanabilir.

Opsiyonu satın alan taraf (uzun pozisyon), opsiyon sözleşmesinden doğan haklarını kullanmak zorunda değildir. Diğer bir değişle opsiyonun alıcısı ancak opsiyon kârda olduğu sürece sözleşmesini işleme sokacaktır. Buna karşılık opsiyonu satan taraf ise (kısa pozisyon), alıcının kararına uymak ve sözleşmenin hükmünü yerine getirmek zorundadır.

3.2. Temel Opsiyon Türleri

Opsiyon sözleşmeleri, yatırımcıların kullanım amacına göre ya alış (call) ya da satış (put) opsiyonlarından oluşmaktadır.

- Alış Opsiyonları: Sözleşmeyi alan tarafa, alım hakkını tanıyan opsiyon sözleşmelerine alış opsiyonu denilmektedir. Alış opsiyonu alıcısının beklentisi, ilgili menkul kıymet fiyatının artması yönündedir. Alış opsiyonu alıcısı, sözleşmeyle elde ettiği belirli bir fiyattan alma hakkını, vade süresince vaya vade sonunda, menkul kıymet fiyatının artması ile birlikte kullanacaktır. Tersi durumunda yani menkul kıymetin değerinin azalması durumunda opsiyon sözleşmesi geçersiz olacak ve ödediği pirim kadar zarar edecektir. Alış opsiyonun satıcısının tahmini ise, ilgili menkul kıymetin fiyatının gelecekte düşmesidir. Bu nedenle düşüşten zararı minimize etmek veya kâr elde etmek adına, alış opsiyonu satarak pirim elde edecektir.
- Satış Opsiyonları: Sözleşmeyi alan tarafa satış hakkını tanıyan opsiyon sözleşmelerine satış opsiyonu denilmektedir. Satış opsiyonu alıcısının beklentisi sözleşmeye konu olan menkul kıymetin fiyatının düşmesi yönündedir. Satış opsiyonu alıcısı sözleşmeyle elde ettiği belirli bir fiyattan satma hakkını ya vade süresince ya da vade sonunda ilgili menkul kıymetin fiyatının düşmesi ile birlikte kullanacaktır. Tersi durumda yani ilgili menkul kıymetin değerinin artması durumunda opsiyon sözleşmesi geçersiz olacak ve ödediği pirim kadar zarar edecektir. Satış opsiyonu satıcısının beklentisi ise sözleşmeye konu olan menkul kıymetin fiyatının artması yönündedir. Bu artıştan kâr elde edebilmek için, opsiyon sözleşmesini pirim karşılığında satmaktadır.

3.3. Vade Yapısına Göre Opsiyon Türleri

- Avrupa tipi opsiyon (European Options): Opsiyonu alan tarafın, sözleşmeye konu olan mal veya menkul kıymeti satın alma (call) veya satma (put) hakkını sadece vade sonunda kullanmasını sağlayan sözleşmedir.
- Amerikan tipi opsiyon (American Options): Vade sonu da dahil olmak üzere opsiyon alıcısına istediği zaman hakkını kullanma imkanı sağlayan opsiyonlardır. Tüm dünyada opsiyon sözleşmelerinin alım-satımının yapıldığı organize piyasalarda ağırlık Amerikan tipi opsiyonlarda olmasına rağmen, tezgah üstü piyasalarda alım-satımı yapılan sözleşmelerin büyük çoğunluğu Avrupa tipi opsiyon sözleşmeleridir.

3.4. Sözleşmede Yer Alan Temel Unsurlar

- Hisse Senedi (Underlying Share) : Opsiyon anlaşmasında sözkonusu edilen menkul kıymettir. Üzerine satın alma vaya satma opsiyonu yazılan menkul kıymettir.
- Kullanım Fiyatı (Exercise/Strike Price): Vade süresince veya vade sonunda sözleşmeye konu olan varlığın opsiyon anlaşmasında belirtilen satın alma veya satma fiyatıdır. Opsiyon sahibi, opsiyonu vade sonunda veya daha önce yürürleğe koymaya, diğer bir değişle üzerinde daha önceden anlaşılmış fiyattan, ürünleri almaya veya satmaya karar verebilir. Opsiyon kontratı yazılırken kararlaştırılan ve üzerinde işlem yapılan fiyata ‘‘ kullanım fiyatı’’ denir.
- Opsiyon Primi (Option Premium) : Opsiyon sözleşmesini alan taraf, opsiyon sözleşmesini satan tarafa, sözleşmede yer alan haklar karşılığında opsiyon primi öder. Opsiyonu satan taraf, sözleşmede yazılı olan varlığın fiyatındaki olası olumsuz değişikliklere karşı sigorta ettirmekte ve bu değişikliklerin getireceği tüm zararları kabullenmektedir. Dolayısıyla bir risk üstlenmektedir. Bu riskin karşılığında opsiyonu alan taraftan belli bir ücret talep edecektir. Talep edilen bu ücrete opsiyonun primi adı verilir. Opsiyon primi, opsiyon sözleşmesinde standart olmayan ve pazarlıklarla belirlenen tek unsur olma özelliğine sahiptir.
- Vade Tarihi (The Experation Date) : Opsiyon alıcısının opsiyonu uygulayabileceği son tarihtir. Avrupa tipi opsiyonlar, alıcının yalnız vade gününde uygulayabileceği

opsiyonlardır. Amerikan tipi opsiyonlar ise alıcı tarafından opsiyon süresi içinde (vadeye kadar) herhangi bir günde veya vade tarihinde uygulanabilen opsiyonlardır.

3.5. Kârlılık Açısından Temel Opsiyon Terimleri

Kârlılık açısından opsiyonların tanımlanabilmesi için ‘‘ Piyasa Fiyatı’’ , ‘‘İçsel/Gerçek Değer (Intrinsic Value)’’ ve ‘‘Zaman Değeri (Time Value)’’ kavramlarının tanımlanması gerekir;

- Piyasa Fiyatı : Opsiyon sözleşmesinde yer alan hisse senedinin, o an itibariyle piyasada oluşmuş cari fiyatıdır. Piyasa fiyatı, uygulama fiyatıyla vadenin her devresinde karşılaştırılacağından önemli bir göstergedir.
- İçsel/Gerçek Değer (Instrinsic Value) : Opsiyon alındıktan sonra uygulandığı taktirde, elde edilen kârı belirtir. Diğer bir değişle, opsiyon türüne göre, piyasa fiyatı ile uygulama fiyatı arasındaki ilişkidir.

Alım opsiyonları için, içsel değer, opsiyon anlaşmasının yapıldığı tarihte üzerine alış opsiyonu yazılan hisse senedinin borsada işlem gördüğü kapanış fiyatı (piyasa fiyatı) ile kullanım fiyatı arasındaki farktır. Bu fark pozitif ise aradaki fark içsel değer olarak alınır, aksi taktirde fark negatif ise içsel değer sıfır olarak alınır.

Özet olarak;

Alış opsiyonları için içsel değer = max(Piyasa Fiyatı-Uygulama Fiyatı,0)

Satış opsiyonları için içsel değer =max(Uygulama Fiyatı-Piyasa Fiyatı,0)’dır.

- Zaman Değeri (Time value) : Opsiyonun fiyatı, opsiyonun içsel değeri ve zaman değeri toplamına eşittir. Gerçek değerin opsiyon priminden çıkarılması, zaman değerini verir.
- Kârda Opsiyonlar (In the money Options) : Uygulandığında kâr elde edilecek opsiyonlardır.
- Zararda Opsiyonlar (Out of money Options) : Uygulandığında zarar elde edilecek opsiyonlardır.
- Başabaş Opsiyonlar (At the money Options) : Uygulandığında ne kâr ne de zarar edilen opsiyonlardır. Uygulama fiyatı ile piyasa fiyatının aynı olduğu opsiyonlardır.

4. BLACK & SCHOLES MODELİ VE BENZERLİK ÇÖZÜMLERİ

4.1. Black & Scholes Modeli

Bu fiyatlama modeli, kâr payı ödemesi yapmayan Avrupa tipi opsiyonların fiyatlarını hesaplamak üzere 1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından geliştirilmiştir. Modelin temel dayanağı, ürünün nakit hesabında kısa pozisyon, alım opsiyonu hesabında ise uzun pozisyon tutarak risksiz faiz oranında getiri elde eden bir potrföy kurma düşüncesidir. Bir başka değişle kısaca arbitraj teoremidir. Black&Scholes, opsiyon fiyatlama modelini aşağıdaki bazı temel varsayımlar altında oluşturmuşlardır:

- Mali piyasaların düzgün işlediği varsayılmaktadır. İşlem maliyetlerinin ve vergi ödemelerinin olmadığı düşünülmektedir. Mali piyasalardaki yatırımcılar, her türlü bilgiye rahatlıkla ulaşabilmektedir. Piyasaları yönlendiren tek bir alıcı veya satıcının olmadığı varsayılmaktadır.
- Risksiz getiri oranı sabittir. Opsiyon kontratının miktarı bilinmektedir. Yatırımcılar istenilen miktarda parayı borç alabilirler. Kısa vadeli faiz oranında borçlanmak mümkündür.
- Üzerine opsiyon yazılan finansal varlık temettü ödemez.
- Üzerine opsiyon yazılan finansal varlığın getirilerinin birikimli oranı normal dağılıma uymaktadır. Opsiyonun ömrü boyunca finansal varlığın birikimli getiri oranının sabit bir değer olduğu ve bu değerin varyansının bilindiği varsayılmaktadır.
- Opsiyonun vade tarihinde kullanıldığı varsayılmaktadır.
- Finansal varlığın kısa satışına diğer bir değişle açığa satılmasına izin verilmektedir. Açığa satış, yatırımcının sahip olmadığı finansal varlığı (menkul kıymeti) satmasıdır.

Black&Scholes modeli, alma hakkı veren opsiyonların fiyatlandırılması için tasarlanmıştır. Modelde, hisse senedi fiyatlarının zaman içinde belirli bir seyir izlediği kabul edilmekte ve buna stokastik süreç adı verilmektedir. Black&Scholes tarafından kullanılan süreç ‘‘Wiener Process’’ olarak adlandırılmaktadır. Bu sürecin özelliği, söz konusu değişkenin (fiyat) zaman içerisinde sürekli değişmesi ve bu değişimlerin ‘‘Normal Dağılım’’ özelliği göstermesidir[1, 2].

Avrupa alış opsiyonu için Black&Scholes denklemi ve sınır şartları aşağıdaki gibidir,

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0$$

$C(0,t)=0$, $S\to\infty$ iken $C(S,t)\sim S$ ve $C(S,T)=\max(S-E,0)$ dir[25].

S: varlık dayanak fiyatı, T: vade tarihi, r: risksiz faiz oranı, σ: volatilite ve C(S,T): alış opsiyonu değeri.

Modelin uygun sınır şartlarında bir kısmi diferensiyel denklem olarak C(S,T) değeri bilindiği için t < T anında C(S,T)'yi belirleme problemi bir ‘‘ Geri Parabolik Problem’’ (backward) oluşturmaktadır. Ancak uygun değişken dönüşümü ile problem ileri (forward) probleme dönüştürülebilir[25].

Bu denklemin analitik çözümü, benzerlik çözümleri ile elde edilmektedir. Bu amaçla öncelikle benzerlik çözümlerini kısaca hatırlayalım.

4.2. Örneklerle Benzerlik Çözümleri

Örnek 4.2.1:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\qquad -\infty<x<+\infty\ ,\qquad t>0 \tag{1}$$

denklemine benzerlik çözümü uygulayalım.

$$\eta=\frac{x}{2\sqrt{t}} \tag{2}$$

dönüşümünü uygulayarak

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{x}{2}(-\frac{1}{2})t^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2t}\frac{x}{2\sqrt{t}}\frac{\partial u}{\partial \eta}=-\eta\frac{1}{2t}\frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{3}$$

kısmi türevi elde edilir. Ayrıca

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{2\sqrt{t}} \tag{4}$$

olarak elde edilir.

(3) ve (4), (1)'de yerine yazılarak

$$-\frac{1}{2t}\eta\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

denklemi veya

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{5}$$

elde edilir. Şimdi elde edilen

$$U_{\eta\eta} + 2\eta U_\eta = 0 \tag{6}$$

denklemini çözelim.

$U_\eta = V$ olsun. Bu durumda (6) denklemi $V_\eta + 2\eta V = 0$

şeklinde olur.

$V_\eta + 2\eta V = 0$ denkleminin çözümü $V = v_0 e^{-\eta^2}$ dir.

Buradan devam edilirse

$U_\eta = V$ olduğundan $U = v_0 \int_0^\eta e^{-s^2}\, ds + c$ dir.

Sonuç olarak (6) denkleminin çözümü

$$U(\eta) = v_0 \int_0^\eta e^{-s^2}\, ds + c$$

elde edilir

Örnek 4.2.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x), \quad x > 0 \text{ ve } t > 0 \tag{7}$$

denklemine benzerlik çözümü uygulayalım.

$F(x) = x$ için denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

olur.

$$u(x,t) = xt + v(x,t)$$

çözümünü araştıralım.

$$u_t = x + v_t \tag{8}$$

ve

$$u_x = t + v_x \quad \text{ise} \quad u_{xx} = v_{xx} \tag{9}$$

elde edilir.

(8) ve (9) , (7)'de yerine yazılarak

$$v_t = v_{xx}$$

difüzyon denklemi elde edilir.

Difüzyon denkleminin $v(x,0) = v_0(x)$ için genel çözümü

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(s) e^{-(x-s)^2/4t}\, ds$$

şeklindedir.

$u(x,t) = xt + v(x,t)$ olduğundan

$v(x,t)$ difüzyon denkleminin çözümü, $u(x,t)$' de yerine yazılarak,

$$u(x,t) = xt + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(s) e^{-(x-s)^2/4t}\, ds$$

elde edilir.

Örnek 4.2.3:

a ve b sabitler olmak üzere (10) ile verilen parabolik denklemine benzerlik çözümü uygulayarak difüzyon denklemine dönüşeceğini gösterelim.

$$v_t = v_{xx} + av_x + bv \tag{10}$$

denklemi için;

$$v(x,t) = e^{bt}u(\xi,t), \qquad \xi = x + at$$

dönüşümü uygulanırsa

$$v_t = be^{bt}u(\ \xi,t) + e^{bt}\left(au_\xi + u_t\ \right) \tag{11}$$

$$v_x = e^{bt}u_{\ \xi}\ \xi_x = e^{bt}u_\xi \tag{12}$$

ve

$$v_{xx} = e^{bt}u_{\ \xi\ \xi} \tag{13}$$

kısmi türevleri elde edilir.

(11),(12) ve (13), (10)'da yerine yazılarak

$$u_t = u_{\xi\xi}$$

difüzyon denklemi elde edilir.

$$u_t = u_{\xi\xi}$$

difüzyon denkleminin $u(t,0) = u_0(t)$ için genel çözümü

$$u(\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-(\xi-s)^2/4t}\, ds$$

şeklindedir.

$$v(x,t) = e^{bt}u(\xi,t), \qquad \xi = x + at$$

olduğundan

$$v(x,t) = e^{bt}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-(\xi-s)^2/4t}\, ds \tag{14}$$

burada ξ'nin degeri (14)'de yerine yazılarak

$$v(x,t) = e^{bt}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)e^{-(x+at-s)^2/4t}\,ds$$

$v(x,t)$ denkleminin çözümü elde edilir.

4.3. Black & Scholes Modeli İçin Benzerlik Çözümü

Alış opsiyonu için Black&Scholes modeli,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \qquad (15)$$

$$C(0,t) = 0, \qquad S \to \infty \ için\ C(S,t) \to S, C(S,T) = \max(S-E,0)$$

ile verilir. S=0 için alış opsiyonunun değeri olmayacağından $C(0,t) = 0$ alınması uygundur. Ayrıca artan S (opsiyona esas teşkil eden varlık dayanak fiyatı) değeri için $C(S,t) \to S$ olduğu kabul edilebilir. Öteyandan t=T uygulama anında opsiyonun değeri $C(S,T) = \max(S-E,0)$ dir. O halde problem $T < t$ için $(t \geq 0)$ $C(S,t)$ opsiyonun alış değerini belirlemektedir. Böylece vadesinden önce opsiyonun değeri tahmin edilerek Amerikan tipi opsiyon olarak işlem görmesi mümkün olur.

Denklemi S ve S^2'li terimlerden kurtarmak ve denklemi boyutsuzlaştırmak için

$$S = Ee^x, t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \qquad C = Ev\,(x,\tau), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \qquad (16)$$

dönüşümü uygulanır[25]. Yeni değişkenler cinsinden ilgili kısmi türevler hesaplanarak,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial(Ev)}{\partial t} = \frac{\partial(Ev)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = E\frac{\partial v}{\partial \tau}(-\frac{1}{2}\sigma^2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial(Ev)}{\partial S} = \frac{\partial(Ev)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = E\frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial(Ev)}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{E}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{E}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{E}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki kısmi türevler (15)'de yerine yazılarak

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC$$

$$=-\frac{1}{2}\sigma^2 E\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\sigma^2\left(E\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-E\frac{\partial v}{\partial x}\right)+r\,E\frac{\partial v}{\partial x}-rEv=0$$

veya

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\,(\frac{\partial v}{\partial x}-v)$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(k+1)\frac{\partial v}{\partial x}-kv \qquad (17)$$

elde edilir.

Burada;

$$k=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Başlangıç şartları ise

$$v(x,0)=\max(e^x-1,0)\,,v(0,\tau)=0, \qquad x\to\infty\ için\ \ v(x,\tau)\to e^x$$

olarak elde edilir. Öte yandan (17) denkleminde

$$v=e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

dönüşümü yapılarak daha basit hale dönüştürülebilir.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u+\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}+e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

olup, (17)'den

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 u + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku$$

elde edilir. u'lu terimleri yok etmek için

$$\beta = \alpha^2 + \alpha(k-1) - k$$

ve

$\frac{\partial u}{\partial x}$ teriminide yok etmek için $2\alpha + (k-1) = 0$ seçilir.

Buradan

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$$

ve

$$\beta = \frac{1}{4}(k-1)^2 - \frac{1}{2}(k-1)^2 - k$$

$$= -\tfrac{1}{4}(k-1)^2 - k$$

$$= -\frac{1}{4}(k^2 - 2k + 1) - k$$

$$= -\tfrac{1}{4}(k+1)^2$$

elde edilir.

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x,\tau)$$

şeklinde olur. u ise

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , -\infty < x < \infty\ , \tau > 0 \qquad (18)$$

denklemini sağlar. u için yeni şartlar v'den elde edilir.

$$v(x,0) = \max(e^x - 1,0) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x} u(x,0)$$

olup,

$$u(x,0) = \max\left(e^{x+\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right)$$

$$= \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) = u_0(x) \tag{19}$$

olur. (18) denkleminin çözümü

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)\, e^{-(x-s)^2/4\tau}\, ds$$

olarak verilir.

Sabit x değeri için,

$\hat{x} = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$, $s = \sqrt{2\tau}\hat{x} + x$ dönüşümü ile $ds = \sqrt{2\tau}d\hat{x}$ elde edilir.

Böylece,

$$u(x,\tau) = \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\hat{x}\sqrt{2\tau} + x)e^{-\frac{1}{2}\hat{x}^2}\, d\hat{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0\left(\hat{x}\sqrt{2\tau} + x\right)e^{-\frac{1}{2}\hat{x}^2} d\hat{x}$$

olur.

$$u(x,0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) = u_0(x)$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, x > 0 \\ 0, \qquad x < 0 \end{cases}$$

$$u_0\left(\hat{x}\sqrt{2\tau} + x\right) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(k+1)\left(x+\hat{x}\sqrt{2\tau}\right)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)\left(x+\hat{x}\sqrt{2\tau}\right)}, & \hat{x} > -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}1 \\ 0, & di\breve{g}erlerinde \end{cases}$$

buradan

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+\hat{x}\sqrt{2\tau})}\, e^{-\frac{1}{2}\hat{x}^2} d\hat{x}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+\hat{x}\sqrt{2\tau})}\, e^{-\frac{1}{2}x^{\wedge 2}} d\hat{x}$$

$$=I_1-I_2$$

elde edilir. Burada;

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)\left(x+\hat{x}\sqrt{2\tau}\right)-\frac{1}{2}\hat{x}^2}\, d\hat{x}$$

ve

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+\hat{x}\sqrt{2\tau})}\, e^{-\frac{1}{2}x^{\wedge 2}} d\hat{x}$$

şeklindedir.

Şimdi I_1' i aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)\left(x+\hat{x}\sqrt{2\tau}\right)-\frac{1}{2}\hat{x}^2}\, d\hat{x}$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}\left(\hat{x}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right)^2} d\hat{x}$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}p^2} dp$$

$$=e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)\ dir.$$

Burada;

$$d_1=\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

ve

$$N(d_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

şeklindedir.

$N(d_1)$ ise standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur.

I_1'de (k+1) yerine (k-1) yazılarak I_2 elde edilir.

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)$$

ve

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

olur.

$u(x,\tau) = I_1 - I_2$ olduğundan

$$u(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)$$

olarak ifade edilir.

$$v(x,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} v(x,\tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}\left[e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)\right] \\ &= e^{x}N(d_1) - e^{-k\tau}N(d_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

$x = \ln(\frac{S}{E})$ olduğundan $e^x = \frac{S}{E}$ dir. $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$

ifadesi ile

$$\begin{aligned} v(x,\tau) &= \frac{S}{E}N(d_1) - e^{-k\tau}N(d_2) \\ &= \frac{S}{E}N(d_1) - e^{-\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}N(d_2) \\ &= \frac{S}{E}N(d_1) - e^{-r(T-t)}N(d_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{S}{E} N(d_1) - e^{-\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\tau} N(d_2)$$

$C(S,t) = Ev(x,\tau)$ olduğundan

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2)$$

alış opsiyonunun fiyatını hesaplayan bağıntı elde edilir.

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

$$= \frac{\ln(\frac{S}{E})}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)\sqrt{\sigma^2(T-t)}$$

$$= \frac{ln(\frac{S}{E}) + \frac{1}{2}(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1)\sigma^2(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}$$

$$= \frac{ln(\frac{S}{E}) + \frac{1}{2}(\frac{r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2})\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

buradan

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

ve

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

elde edilir.

$$S + P - C = Ee^{-r(T-t)}$$

alım-satım (put-call parity) paritesinden

$$P = C - S + Ee^{-r(T-t)}$$

eşitliği elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$P = S(N(d_1) - 1) + Ee^{-r(T-t)}\big(1 - N(d_2)\big) \tag{20}$$

bağıntısı elde edilir.

$N(d) + N(-d) = 1$ özdeşliği kullanılırsa

$$N(d_1) - 1 = -N(-d_1), \quad 1 - N(d_2) = N(-d_2)$$

elde edilir ve bu sonuçlar (20) bağıntısında yerine yazılarak

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

satış opsiyonunun fiyatını hesaplayan bağıntı elde edilir.

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)\,, \quad \Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

$N(d_1)$: alış opsiyonunun delta katsayısıdır.

$N(d_1) - 1$: satış opsiyonunun delta katsayısıdır.

5. ALIŞ OPSİYONU DEĞERİNİN PARAMETRELERE GÖRE DEĞİŞİMİ

5.1. Black & Scholes (B & S) Modeli

Satın alma opsiyonunun fiyatı daha önceden çözümü yapılan,

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

bağıntısı ile elde edilir. Bu bağıntıya satın alma opsiyonu için B&S formülü de denir. Bu bölümde opsiyona dayanak teşkil eden varlığı hisse senedi olarak kabul ediyoruz.

S : hisse senedinin piyasa fiyatıdır.

$Ee^{-r(T-t)}$: vade tarihinden geriye opsiyon kullanım fiyatının iskonto ettirilmiş değeridir.

$N(d_j)$: standart normal dağılımdan elde edilien olasılık değeri, j=1,2.

$C(S,t)$: satın alma opsiyonunun değeridir.

Black&Scholes (B&S) Formülü,

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ yani

$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$ dir.

Alış opsiyonunun fiyatını hesaplayan Black&Scholes formülünde bulunan parametreler, S hisse senedi değerine bağlı olarak aşağıdaki anlamları kazanır:

$N(d_1), N(d_2)$: Kümülatif Normal Olasılık Dağılım Değerleri (d_1, d_2 için)

$N(d_1)$: Portföyde Bulunan Hisse senedi Oranı

$N(d_2)$: Hisse Senedi Opsiyonunun Kullanım Olasılığı

S : Cari Hisse Senedi Fiyatı

E : Opsiyonun Kullanım Fiyatı(Exercise veya Striking Price)

r : Risksiz faiz Oranı

σ : Hisse Senedinin Getiri Oranlarının Yıllık Standart Sapması

T-t : Opsiyonun Bitimine Kadar Kalan Zaman

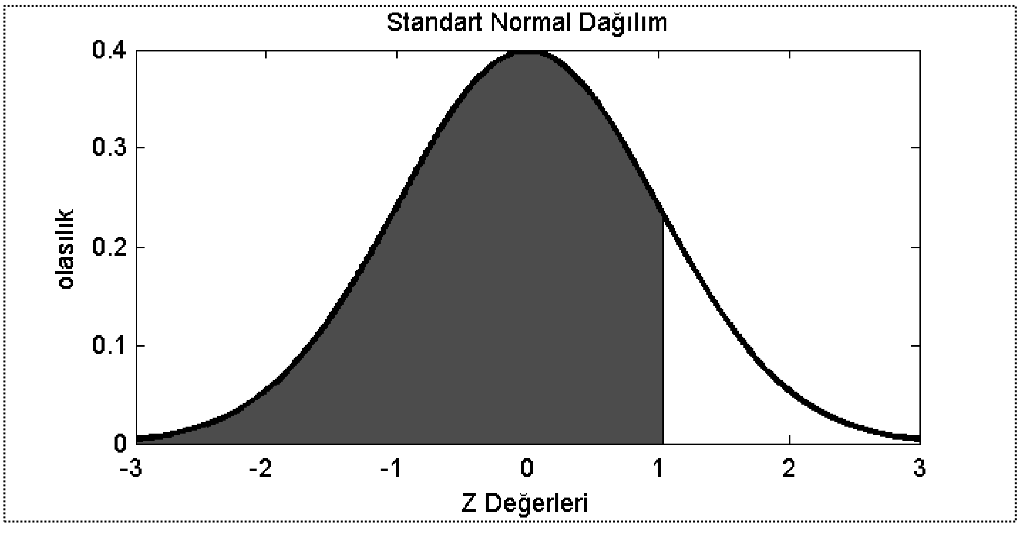
$e^{-r(T-t)}$: İskonto Oranı

ln : Doğal Logaritma Sembolü

5.2. $N(d_j)$, B&S Modelindeki Katsayılar

Standart normal dağılım eğrisindeki değerlerin ortalaması sıfır, standart sapması 1' dir ve standart normal dağılım $N(0,1)$ ile ifade edilir. Burada ki d_1 , d_2 değerleri, satandart normal dağılımın ortalama değerinden olan sapmanın değerleridir[2].

Kümülatif standart normal dağılım $z = d$ olasılığı ile standart normal dağılım eğrisi üzerinde, standart normal değişkenin verilen $f(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ değerine kadar olan değerlerin olasılıklarının toplanması ile bulunan bir değer ile ifade edilmektedir.



Şekil 1. $N(d_1)$ olasılık değerinin standart normal dağılım eğrisi üzerinde gösterilmesi

Şekil 1'deki d_1=1,0318 ifadesi ile d_1'in ortalama sıfır değerinden 1,0318 değeri kadar saptığını gösterir.

$N(1{,}0318)$ ile satandart normal dağılımın ortalamasından 1,0318 değeri kadar olan sapmanın kümülatif olasılığı ifade edilir. Yani $N(1{,}0318)$ değeri, grafik üzerinde çizilen dik çizginin sol tarafında kalan alandaki olasılık değerlerinin kümülatif toplamına eşittir. Normal dağılım eğrisinde sol taraftan ortalama sıfır değerine kadar olan alanın değeri 0,5'e eşit olmaktadır.

d_2=0,9516 değeri de standart normal dağılım için benzer şekilde yorumlanır. $N(0{,}9516)$ ile standart normal dağılımın ortalamasından 0,9516 değeri kadar olan sapmanın ortaya çıkma sıklığı , olasılığı ifade edilmektedir.

d_1 ve d_2 diğerleri pozitif olduğu zaman bu değerlerin olasılık değerleri diğer bir ifade ile bu değerlere kadar olan eğrinin altındaki alan değeri aşağıdaki gibi hesaplanır. $N(d_j)$ (j=1,2), d_j 'nin olasılık değeridir.

$N(d_j)$ =(Normal dağılım eğrisinin sol kuyruğu altında ki alanın değeri=0,5)+(d_j değerinin, ortalama sıfırdan olan sapmanın değerinin olasılık değeri=normal dağılım tablo değeri)

d_1 ve d_2 değerleri negatif olduğu zaman bu değerlerin olasılık değerleri, $N(-d_j)$=1- $N(d_j)$, (j=1,2) formülüyle hesaplanır[2].

5.3. Alış Opsiyonu Değerinin Tek Değişkenli Parametrelere Göre Değişimi

Bu bölümde parametrelerin etkisinin açıkça görülemediği karışık bir formül ile elde edilen alış opsiyonu fiyatının, parametrelere göre nasıl değiştiğini araştırmak istiyoruz. Bunun için basit bir senaryo üzerinde geliştirdiğimiz örnek ile parametrelerin değişimine göre alış opsiyonu fiyatındaki değişimi inceleyelim.

Örnek 5.1: Günün tarihinin 20 Nisan 1990 olduğunu varsayalım. Bu tarihteki Bir Jimnastik Kulübü (BJK) hisse senedi fiyatı borsada 192 TL olarak işlem görmektedir. Yıllık birikimli faiz oranı % 15,20 değerine eşittir. BJK hisse senetleri üzerine yazılmış Mayıs 1990 vadeli satın alma opsiyonunun kullanım fiyatı 180 TL olarak belirlenmiştir. Hisse senedinin günler itibariyle hesaplanan getiri oranlarının yıllık varyansı 0,0652 olarak bulunmuştur. Opsiyonun vadesine kalan süre 36 gündür. Bunlara göre vadeye 36 gün kala opsiyon anlaşmasının satıldığı tarihte alış opsiyonunun fiyatını B&S modeli ile hesaplayalım.

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{192}{180}\right) + (0.1520 + \frac{0.0652}{2})\left(\frac{36}{365}\right)}{\sqrt{0.0652}\sqrt{36/365}} = 1.0319$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = 1.0319 - 0.255\sqrt{\frac{36}{365}} = 0.9517$$

$$\sigma^2 = 0.0652 \text{ ise } \quad \sigma = \sqrt{0.0652} = 0.25534$$

$$N(d_1) = N(1{,}0318) = 0{,}8489$$

$$N(d_2) = N(0.9516) = 0.8294$$

$$T - t = \frac{36}{365} = 0.0986 \text{ yıl}$$

$$Ee^{-r(T-t)} = 180e^{-(0{,}1520)(0{,}0986)} = 177.32 \text{ TL}$$

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \text{ olduğundan}$$

$$C(S,t) = (192)(0.8489) - (177.32)(0.8284) = 15.93 \text{ TL}$$

Şimdi alış opsiyonu fiyatını hesaplayan Black&Scholes modelindeki parametrelerin değişimi ile alış opsiyonu fiyatındaki değişimi inceleyelim.

5.4. Hisse Senedi Fiyatının Alış Opsiyonunun Değerine Etkisi

Amacımız örnek 5.1’de alış opsiyonunun değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerinin hisse senedi fiyatına bağımlılığını araştırmaktır.

Bu amaçla artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonunun fiyatındaki değişimi inceleyelim. Örnek 5.1'de alış opsiyonu değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedinin fiyatı 178 TL'den başlayarak 2 TL aralıklarla 200 TL'ye kadar yükseltilirse hesaplanan alış opsiyonu değerleri Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. Artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerleri

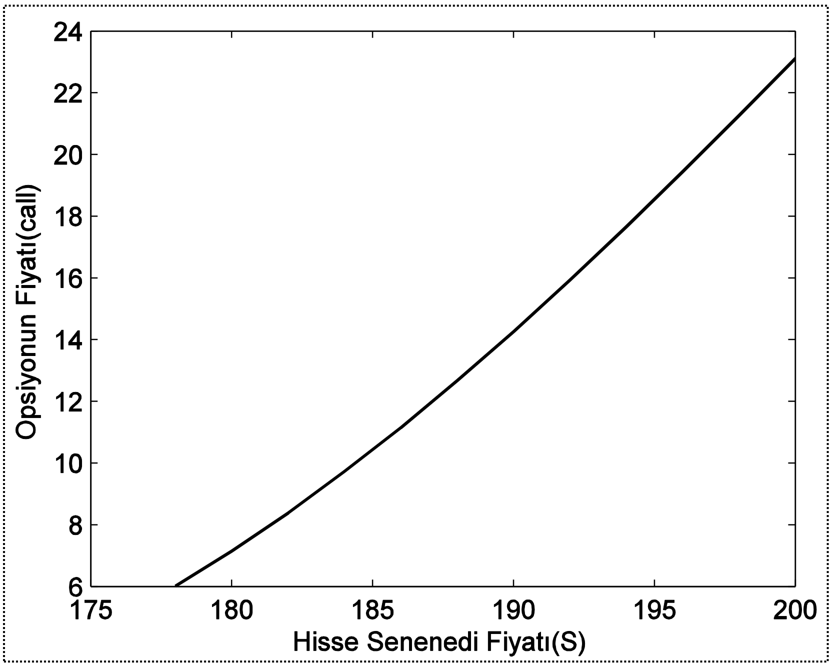
Hisse Senedi Fiyatı	Alış Opsiyonu Değeri
192 TL	15.9300 TL
194 TL	17.6568 TL
196 TL	19.4360 TL
198 TL	21.2594 TL
200 TL	23.1199 TL

Tablo 1'den görüldüğü gibi örnek 5.1 için alış opsiyonunun değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedinin piyasa fiyatının artması alış opsiyonunun değerini arttırmıştır. Şekil 2 incelenirse BJK hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonunun değeri, hisse senedinin fiyatına bağlı olarak artış göstermektedir. Hisse senedinin fiyatı 192 TL için alış opsiyonunun değeri 15.9300 TL'den başlayarak hisse senedinin fiyatına bağlı olarak artış göstermiştir.

Black&Scholes modeline göre alış opsiyonunun değeri,

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{21}$$

bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Bağıntıda S hisse senedinin piyasa fiyatı olmak üzere d_1, S'nin artan fonksiyonu ve $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ olup S'nin artan fonksiyonudur. Dolayısı ile hem $SN(d_1)$ hem de $N(d_2)$, S'nin artan fonksiyonlarıdır. Artan iki fonksiyonun farkının S arttıkça arttığı söylenemez. Sonuç olarak B&S modelinden hisse senedi fiyatının alış opsiyonu değerine etkisi açıkça görülemez.



Şekil 2. Hisse senedi piyasa fiyatının alış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 2'de S=178:2:200 TL, E=180 TL, r=0.1520, σ=0.2534, T=36 gün olarak alınmıştır.

Sonuç olarak, alış opsiyonu değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedi fiyatı arttıkça alış opsiyonu değeri de artmaktadır.

5.5. Kullanım Fiyatının Alış Opsiyonunun Değerine Etkisi

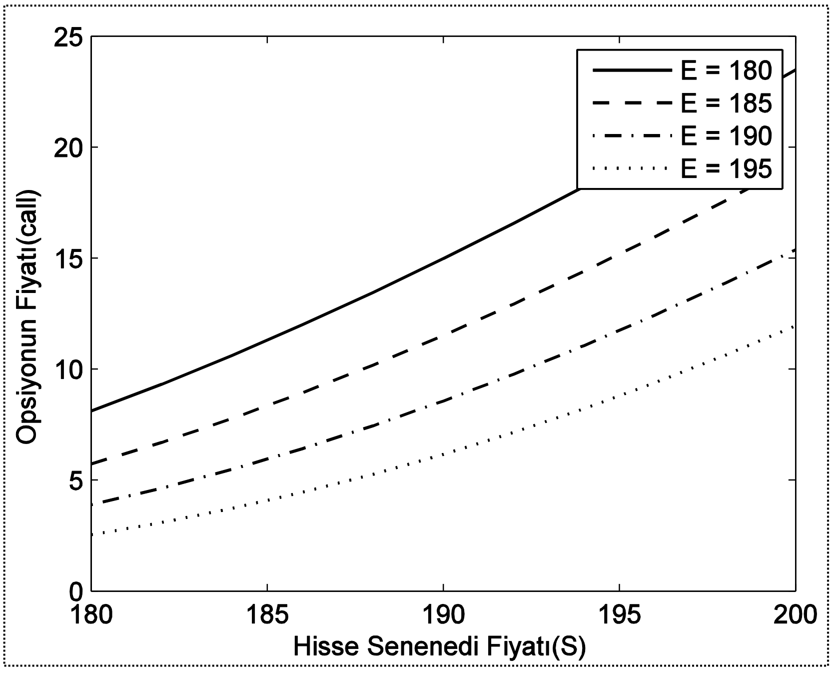
Amacımız örnek 5.1'de alış opsiyonunun değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile kullanım fiyatının değişmesinin alış opsiyonunun değerine etkisini incelemektir.

Bu amaçla örnek 5.1'de alış opsiyonu değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile alış opsiyonunun kullanım fiyatı 170 TL'den başlayarak 10 TL aralıklarla 200 TL'ye kadar yükseltilirse hesaplanan alış opsiyonu değerleri Tablo 2'de verilmektedir.

Tablo 2. Artan kullanım fiyatları için alış opsiyonu değerleri

Kullanım Fiyatı	Alış Opsiyonu Değeri
170 TL	24.7895 TL
180 TL	15.9300 TL
190 TL	8.7801 TL
200	4.0288 TL

Tablo 2'den görüldüğü gibi diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile kullanım fiyatı arttıkça alış opsiyonu değeri azalmaktadır. Şekil 3'te 192 TL piyasa fiyatına sahip hisse senedinin farklı kullanım fiyatlarına göre alış opsiyonunun değerleri verilmiştir. Grafiğin en alt kısmı kullanım fiyatı 195 TL olan 180 TL piyasa fiyatına sahip hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonunun değerini göstermekte ve bu değer 2.9684 TL dir. Grafikte kullanım fiyatı azaldıkça 192 TL fiyata sahip olan hisse senedinin alış opsiyonunun değerinin arttığı görülmektedir. Yani kullanım fiyatı küçüldükçe alış opsiyonunun değeri artar.



Şekil 3. Kullanım fiyatının alış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 3’te S=180:2:200 TL, E=180:5:195 TL, r=0.1520, σ=0.25534, T=36 gün olarak alınmıştır.

Black&Scholes modeline göre alış opsiyonunun değeri (21) bağıntısına göre hesaplanmaktadır. (21) bağıntısından da görüldüğü gibi E kullanım fiyatı olmak üzere alış opsiyonunun değeri, kullanım fiyatının artması ile azalacaktır.

Sonuç olarak, iki hisse senedi opsiyonu aynı vade tarihine ve aynı hisse senedi piyasa fiyatına sahip olsun. Bu iki opsiyonun kullanım fiyatı farklı olsun. Eğer hisse senedinin fiyatı artarsa küçük kullanım fiyatlı alış opsiyonundan elde edilecek kazanç yüksek kullanım fiyatlı olan alış opsiyonunun kazancından büyüktür. Bu karşılaştırmadan alış opsiyonundan elde edilecek kazancın, opsiyonun kullanım fiyatı arttıkça azalacağı anlaşılmaktadır. Eğer alış opsiyonundan daha fazla kazanç elde etmek istiyorsak üzerine alış opsiyonu yazılan hisse senedinin kullanım fiyatının düşük olması gerekmektedir.

5.6. Risksiz Faiz Oranının Alış Opsiyonunun Fiyatına Etkisi

Amacımız örnek 5.1’de diğer parametrelerin sabit kalması koşuluyla risksiz faiz oranının değişiminin, BJK hisse senedi üzerine yazılmış 15.9300 TL fiyata sahip olan alış opsiyonunun değeri üzerindeki etkisini incelemektir.

Bu amaçla örnek 5.1’de alış opsiyonu değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile risksiz faiz oranı % 14’den başlayarak % 20 değerine kadar arttırılırsa hesaplanan alış opsiyonu değerleri Tablo 3’te verilmektedir.

Tablo 3. Artan risksiz faiz oranları için alış opsiyonu değerleri

Risksiz Faiz Oranı	Alış Opsiyonunun Değeri
% 14	15.7562 TL
% 15.20	15.9300 TL
% 16	16.0461 TL
% 20	16.6307 TL

Tablo 3'ten görüldüğü gibi diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile risksiz faiz oranının artması alış opsiyonunun değerini arttırmıştır. Şekil 4'te 192 TL fiyata sahip olan hisse senedinin alış opsiyonunun değeri diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile risksiz faiz oranının artması, alış opsiyonunun değerini arttıracaktır. Şekil 4'ten hisse senedinin piyasa fiyatı ile risksiz faiz haddinin birlikte artması alış opsiyonunun değerinin artışını fazla etkilemediği görülyor yani hisse senedi piyasa fiyatı 192 TL ve risksiz faiz oranı 0.1520 iken alış opsiyonunun değeri 15.9300 TL, hisse senedi piyasa fiyatı 192 TL ve risksiz faiz oranı 0.2 iken alış opsiyonunun değeri 16.6307 TL dir. Hisse senedi fiyatı 200 TL olan ve risksiz faiz haddi 0.1520 olan alış opsiyonunun değeri 23.1199 TL, hisse senedi piyasa fiyatı 200 TL risksiz faiz haddi 0.2 iken alış opsiyonunun değeri 23.9003 TL dir. Yani opsiyon değerlerindeki artışlar arasındaki farklar birbirlerine yakındır. Black&Scholes modeline göre alış opsiyonunun değeri (21) bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Bağıntıdan da görüldüğü gibi r risksiz faiz haddi olmak üzere alış opsiyonunun değeri, risksiz faiz haddinin artması ile artacaktır. Alış opsiyonu ve faiz hadleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi de açıklanabilir.

Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile eğer,

$r_1 > r_2$ ise

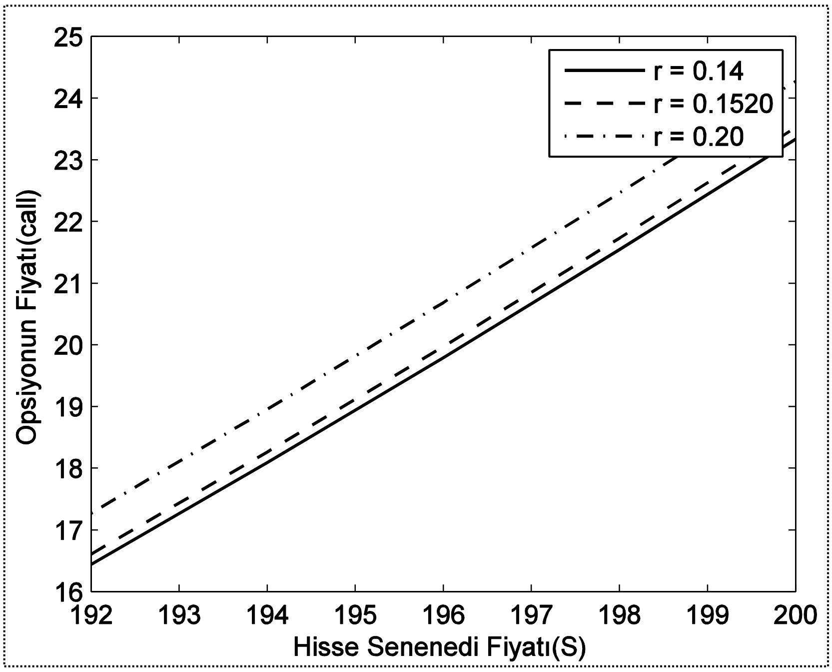
$C(S, E, T, r_1) \geq C(S, E, T, r_2)$ dir.

Çünkü

$\frac{\partial C}{\partial r} = Ee^{-r(T-t)}N(d_2) > 0$ dir.

Sonuç olarak, risksiz faiz oranı alış opsiyonunun fiyatını olumlu yönde etkiler. Yani risksiz faiz oranı ne denli yüksek olursa alış opsiyonunun değeri de o denli yüksek olur.

Şekil 4'te S=192:2:200 TL, E=180 TL, sigma=0.25534, T=36 gün olarak alınmıştır.



Şekil 4. Risksiz faiz oranının alış opsiyonunun değerine etkisi

5.7. Hisse Senedi Fiyatının Volatilitesinin Alış Opsiyonunun Değerine Etkisi

Bu bölümde amaç örnek 5.1'de diğer parametrelerin sabit kalması koşuluyla hisse senedi fiyatının volatilitesinin alış opsiyonunun değerine etkisini incelemektir.

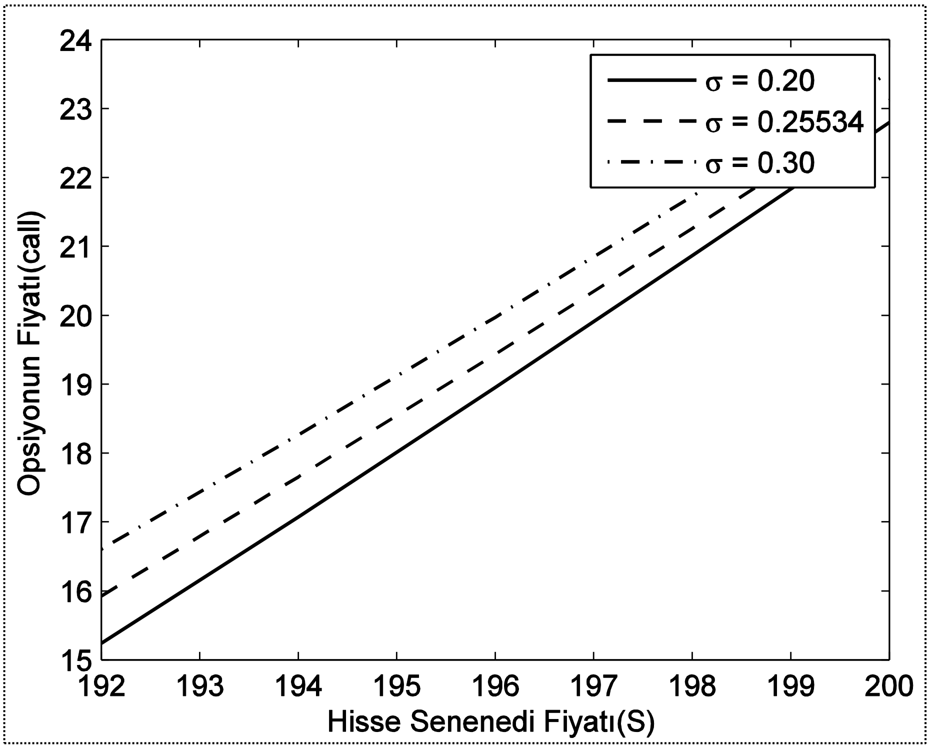
Bu amaçla örnek 5.1'de diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile volatilitenin değeri 0.2'den başlayarak 0.05 aralıklarla 0.3 değerine kadar arttırılırsa hesaplanan alış opsiyonu değerleri Tablo 4'te verilmektedir.

Tablo 4. Artan volatilite değerleri için alış opsiyonu değerleri

Volatilitenin Değeri	Alış Opsiyonunun Değeri
0.2	15.2449 TL
0.25	15.8553 TL
0.25534	15.9300 TL
0.3	16.6092 TL

Tablo 4'ten görüldüğü gibi örnek 5.1 için diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile artan volatilite değerlerine göre alış opsiyonu değeri artmaktadır.

Şekil 5 incelendiğinde fiyatı 192 TL olan hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonunun değeri volatilite arttıkça artmaktadır. Hisse senedinin fiyatı volatilite ile birlikte arttırıldığı zaman alış opsiyonunun değerindeki artışın daha az olduğu görülmektedir. Yani 192 TL piyasa fiyatına sahip hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonunun değeri, 198 TL piyasa fiyatına sahip hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonunun değerinden, diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile volatilite arttıkça daha hızlı artmaktadır. Farklı iki hisse senedi üzerine yazılmış aynı vade tarihli ve aynı kullanım fiyatlı iki alış opsiyonu ele alalım. Üzerine alış opsiyonu yazılan iki hisse senedinden birincisinin fiyatı yatay seyretmektedir yani bu hisse senedinin fiyatında değişim olmamaktadır. Ancak ikinci hisse senedinin fiyatı gözle görülür şekilde çok değişmekte aşırı dalgalanırlık göstermekte olsun. İkinci hisse senedi üzerine yazılan alış opsiyonunun değeri, hisse senedinin piyasa fiyatı, opsiyonun kullanım fiyatını aştığı zaman artmakta ve büyük kazanç sağlamaktadır. Bu nedenle ikinci hisse senedi opsiyonuna olan yatırım cazip olmakta ve bu opsiyona olan talep opsiyonun değerini arttırmaktadır.



Şekil 5. Hisse senedi fiyatının volatilitesinin alış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 5’te S=192:2:200 TL, E=180 TL, r=0.1520, T=36 gün olarak alınmıştır.

Sonuç olarak, sözleşme konusu olan finansal varlığın (hisse senedinin) fiyatlarındaki değişkenlik (volatilite) artıkça, opsiyon sözleşmelerinin fiyatları yükselmektedir. Yani volatilite arttıkça alış opsiyonunun değeri de artmaktadır.

Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile eğer,

$\sigma_1 > \sigma_2$ ise

$$C(S,E,T,r,\sigma_1) \geq C(S,E,t,r,\sigma_2)$$

dir.

Daha riskli bir hisse senedi üzerine yazılan alış opsiyonu, en az daha riskli bir hisse senedinin alış opsiyonunun fiyatına eşit veya daha büyük değerde olmalıdır.

5.8. Vadeye Kalan Zamanın Alış Opsiyonunun Değerine Etkisi

Bu bölümde amaç örnek 5.1’de diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile vadeye kalan zamanın alış opsiyonunun değerine etkisini incelemektir.

Bu amaçla örnek 5.1’de diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile vadeye kalan zaman 30 günden başlayarak 90 güne kadar arttırılırsa hesaplanan alış opsiyonu değerleri Tablo 5’te verilmektedir.

Tablo 5. Artan vade süreleri için alış opsiyonu değerleri

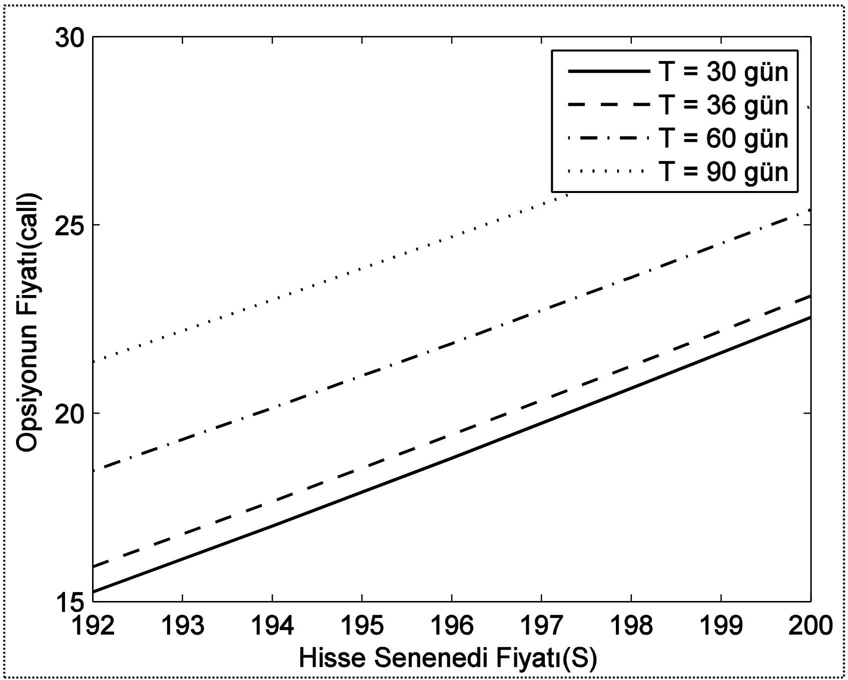
Vadeye Kalan Zaman	Alış Opsiyonunun Değeri
30 gün	15.2533 TL
36 gün	15.9300 TL
60 gün	18.4755 TL
90 gün	21.3765 TL

Tablo 5'ten görüldüğü gibi 192 TL piyasa fiyatına sahip hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonunun değeri 15.2533 TL'den başlayarak vadeye kalan süre uzadıkça artarak vadeye 90 gün kala 21.3765 TL olmaktadır. Hisse senedi getirilerinin dağılımının varyansı zamanla artış göstermektedir. Diğer bir ifade ile hisse senedinin getirilerinin standart sapması vadeye kalan zamanın karesi ile doğru orantılı olarak artış gösterir. Opsiyonun değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalaması koşulu ile vadeye kalan zaman arttıkça hisse senedinin volatilitesi (standart sapması) artmaktadır. Volatilitenin artması opsiyonun değerini arttırmaktadır.Yani opsiyonun ömrü uzadıkça değeri de artmaktadır.

Black&Scholes modeline göre alış opsiyonunun değeri (21) bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Bağıntıdan da görüldüğü gibi (T-t) vadeye kalan zaman olmak üzere alış opsiyonunun değeri,

$$\frac{\partial C}{\partial (T-t)} = rEe^{-r(T-T)}N(d_2) > 0$$

olup vadeye kalan zamanın artması ile artacaktır.



Şekil 6. Vadeye kalan zamanın alış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 6'da S=192:2:200 TL, E=180 TL, r=0.1520, σ=0.25534 olarak alınmıştır.

Sonuç olarak, opsiyon sözleşmesinin vadesi opsiyonun değerinin belirlenmesinde önemli bir faktördür. Opsiyon sözleşmeleri süreleri kısa süreli menkul değerlerdir. Opsiyon sözleşmeleri vadesinde kullanılmadığı zaman değersiz hale gelmektedir. Opsiyon sözleşmesinde vade kısa ise veya vade bitimine yaklaştıkça, sözleşmenin zaman değeri giderek azalmakta vade gününde sıfır olmaktadır. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile eğer,

$T_1 > T_2$ ise

$C(S, T_1, E) \geq C(S, T_2, E)$ dir.

Yani diğer tüm açılardan birbirinin aynı olan iki opsiyondan, daha uzun vadesi olan opsiyon, daha kısa vadesi olan opsiyondan daha yüksek değere satılır.

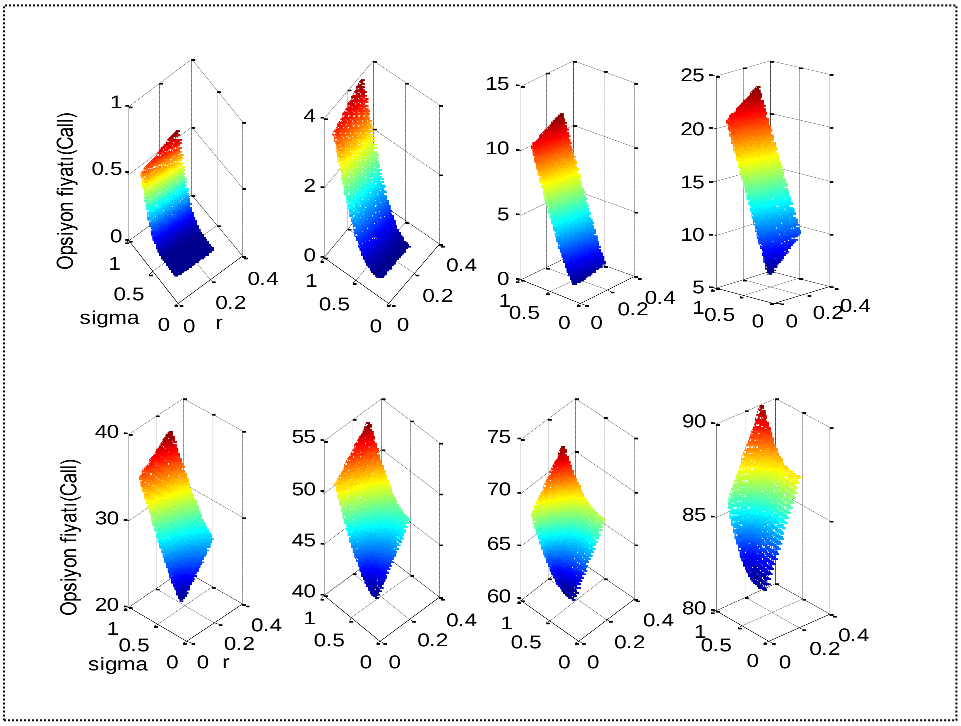
5.9. Alış Opsiyonu Değerinin İki Değişkenli Parametrelere Göre Değişimi

Belirli aralıkta verilen volatilite ve risksiz faiz oranı değerleri için değişen parametrelere göre alış opsiyonu fiyatınındaki değişimi inceleyelim.

5.10. Artan Hisse Senedi Fiyatına Göre Alış Opsiyonu Değerinin İncelenmesi

Değişen volatilite ve değişen risksiz faiz oranına göre artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu fiyatındaki değişimi incelemek istiyoruz.

Bu amaçla, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, E=100 TL ve S=40:20:180 TL olan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerlerinin, faiz oranı ve volatiliteye göre değişimini inceleyelim.

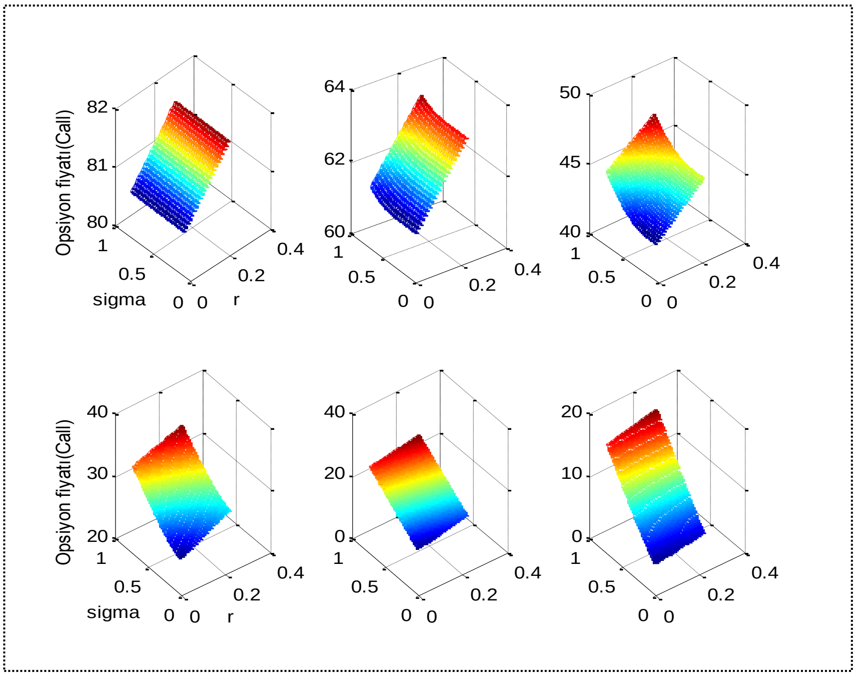


Şekil 7. Artan hisse senedi fiyatına göre alış opsiyonu değerleri (S=40:20:180)

Şekil 7'de E=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, T=0.25 yıl olmak üzere S=40:20:180 TL için alış opsiyonu fiyat grafikleri soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru sırayla verilmiştir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedi fiyatı arttıkça alış opsiyonu değeri daha hızlı artmaktadır. Grafiklerden görüldüğü üzere alış opsiyonunun değeri risksiz faiz oranı ve volatilitenin maksimum olduğu değerde en büyüktür. Buradan alış opsiyonu değerinin faiz oranı ve volatiliteyle doğru orantılı olduğu ortaya çıkar. Küçük fiyatlı hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonunun değeri, büyük fiyatlı hisse senedi üzerine yazılmış alış opsiyonu değerine göre σ ve r'nin daha büyük değerleri için sıfırdan büyüktür. Yani S=20 TL için alış opsiyonu değeri σ=0.8 ve r=0.3'ten itibaren sıfırdan büyükse, S=40 TL için σ=0.6 ve r=0.25'ten itibaren alış opsiyonu değeri sıfırdan büyüktür. Alış opsiyonu değerindeki değişim küçük hisse senedi fiyatları için non-lineer olmakta, hisse senedi fiyatı uygulama fiyatına yaklaştıkça alış opsiyonu değerindeki değişim lineer olmakta, hisse sendi fiyatı uygulama fiyatından büyük oldukça alış opsiyonu değeri non-lineer olarak değişmektedir. Yani hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda ise alış opsiyonu değeri lineer değişmektedir.

5.11. Artan Uygulama Fiyatına Göre Alış Opsiyonu Değerinin İncelenmesi

Bu bölümde değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatilite değerleri için artan uygulama fiyatına göre alış opsiyonu değerindeki değişimi incelemek istiyoruz. Bu amaçla S=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 ve T=0.25 yıl için artan uygulama fiyatına göre alış opsiyonu değerindeki değişimi inceleyelim.



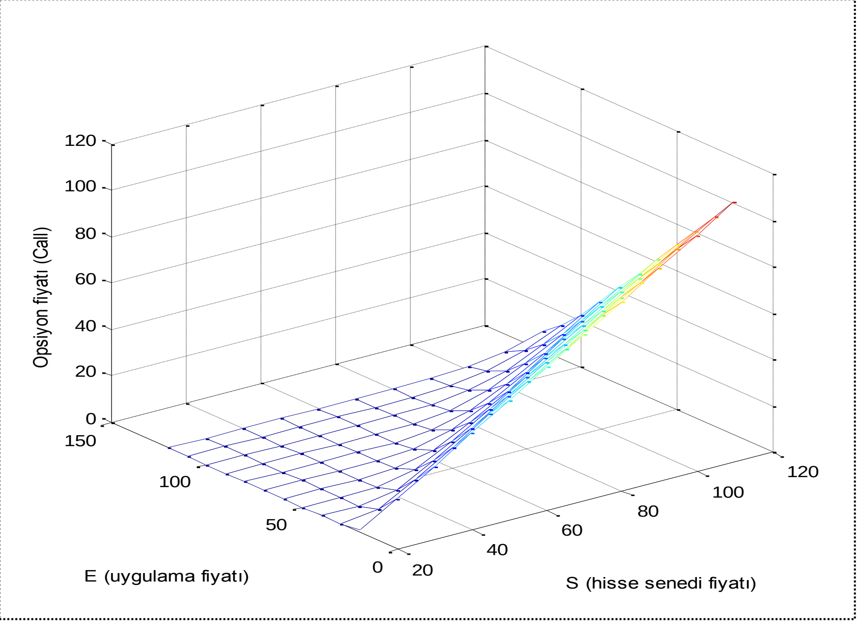
Şekil 8. E'nin artan değerleri için alış opsiyonu değerleri (E=20:20:120)

Şekil 8'de S=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, T=0.25 yıl olmak üzere E=20:20:120 TL için alış opsiyonu fiyat grafikleri soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru sırayla verilmiştir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile uygulama fiyatı arttıkça alış opsiyonu değeri azalmaktadır. Buradan uygulama fiyatının alış opsiyonu değeri ile ters orantılı olduğu görülmektedir. Grafiklerden alış opsiyonu değerlerinin maksimum olduğu değer risksiz faiz oranı ve volatilitenin en büyük olduğu değerler olarak görülmektedir. Alış opsiyonu değerindeki değişim, uygulama fiyatı hisse senedi fiyatından küçük iken non-lineer , uygulama fiyatı hisse senedi fiyatına yaklaştıkça lineer, uygulama fiyatı hisse senedi fiyatından büyük oldukça alış opsiyonu değerindeki değişim non-lineer olmaktadır.

Yani buradan uygulama fiyatı hisse senedi fiyatından ne kadar küçülürse, alış opsiyonu değerinin o denli hızlı bir şekilde artacağı anlaşılmaktadır.

5.12. Artan Hisse Senedi Fiyatı ve Uygulama Fiyatına Göre Alış Opsiyonu Değeri

Sabit faiz oranı, sabit volatilte ve sabit vade tarihine göre artan hisse senedi fiyatı ve artan uygulama fiyatı için alış opsiyonu fiyatındaki değişimi inceleyelim.



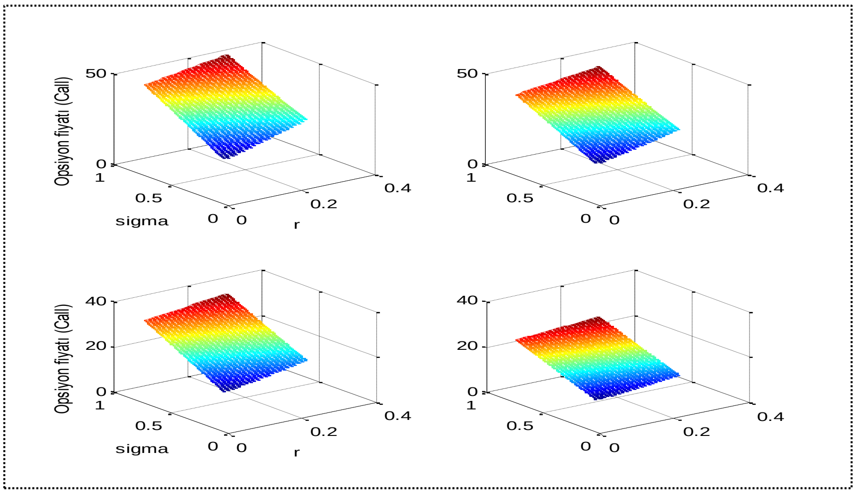
Şekil 9. Artan hisse senedi fiyatı ve artan uygulama fiyatına göre alış opsiyonu değeri

Şekil 9'da r=0.08, σ=0.3, T=0.25 yıl olmak üzere S=20 TL'den başlayarak 10 TL aralıklarla 120 TL'ye kadar arttırılmıştır. Benzer şekilde E=20 TL'den başlayarak 10 TL aralıklarla 120 TL'ye kadar arttırılmıştır. Şekil 9'da alış opsiyonu değeri, hisse senedi fiyatı arttıkça artmış ve alış opsiyonu maksimum değerini uygulama fiyatının en küçük olduğu hisse senedi fiyatının en büyük olduğu değerlerde almıştır. Alış opsiyonu değeri, vade tarihinde uygulama fiyatının hisse senedi fiyatından büyük olduğu yerlerde sıfırdır . Hisse senedi fiyatı ile uygulama fiyatının değerleri birbirine eşit olduğu durumlarda alış opsiyonu değeri $C > 0$ dir. Diğer parametreler sabit iken hisse senedi fiyatı ile uygulama fiyatı aynı değerde alınıp ve aynı miktarda arttırılırsa alış opsiyonunun değeri de artmaktadır. Yani S=40 TL ve E=40 TL için C=2.7847 TL iken S=60 TL ve E=60 TL için C=4.1771 TL dir.

5.13. Vadeye Kalan Zamanın Alış Opsiyonu Değerine Etkisi

Amacımız, değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatilite değerleri için vadeye kalan zaman değiştikçe alış opsiyonunun fiyatındaki değişimi incelemektir.

Bu amaçla, S=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, E=100 TL için değişik vade tarihlerine göre alış opsiyonu fiyatındaki değişimi inceliyelim.



Şekil 10. Vadeye kalan zamanın alış opsiyonu değerine etkisi

Şekil 10'da S=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, E=100 TL olmak üzere , T=1 yıl, T=0.75 yıl, T=0.5 yıl ve T=0.25 yıl için alış opsiyonu fiyat grafikleri soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru sırayla verilmiştir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile vadeye kalan zaman arttıkça alış opsiyonu değerinin arttığı görülmektedir. Buradan alış opsiyonu değeri ile vadeye kalan zamanın doğru orantılı olduğu anlaşılmaktadır. Uygulama fiyatı, hisse senedi fiyatına eşit iken vadeye kalan zamanın artması alış opsiyonu değerindeki değişimi lineerleştirmektedir. Vadeye kalan zaman uzadıkça opsiyonunun volatilitesi artacak ve opsiyona olan talep yoğunlaşacaktır dolayısıyla opsiyonun değeri artacaktır. Şekil 10 incelendiğinde her vade süresi için alış opsiyonu maksimum değerini risksiz faiz oranı ve volatilitenin en büyük olduğu değerde almaktadır. Dolayısıyla kazanç elde etmek isteyen yatırımcı vadesi uzun, risksiz faiz oranı ve volatilitesi büyük olan alış opsiyonu almayı tercih edecektir.

5.14. Opsiyonun Delta Katsayısı

Delta katsayısı, Black&Scholes opsiyon fiyatlandırma denkleminin, ürün fiyatına göre alınmış birinci türevi bulunarak hesaplanır. Üzerine opsiyon yazılmış ürünün piyasa fiyatının değişmesi, opsiyon fiyatını aynı miktarda değiştirmez. Delta katsayısı, ürünün fiyatındaki değişimin, opsiyon fiyatını ne oranda değişeceğini verir. Alış opsiyonunun deltası 0 ile 1 arasında değişmektedir. Bir alış opsiyonunun deltası 0.4 olması demek, ürünün fiyatı 1 birim artarsa opsiyonun fiyatı 0.4 birim artar demektir. Δ=0 olan opsiyonlar zarardadır ve opsiyon ürünün fiyatından etkilenmez. Δ=1 olduğunda opsiyon fiyatı, ürün fiyatı ile bire bir değişme gösterir. Δ=0.5 olan opsiyonlar, ne kârda nede zarardadır, sıfır kâr noktasındadır. Alış opsiyonunun deltası, opsiyon kârda olduğu oranda yükselir[2].

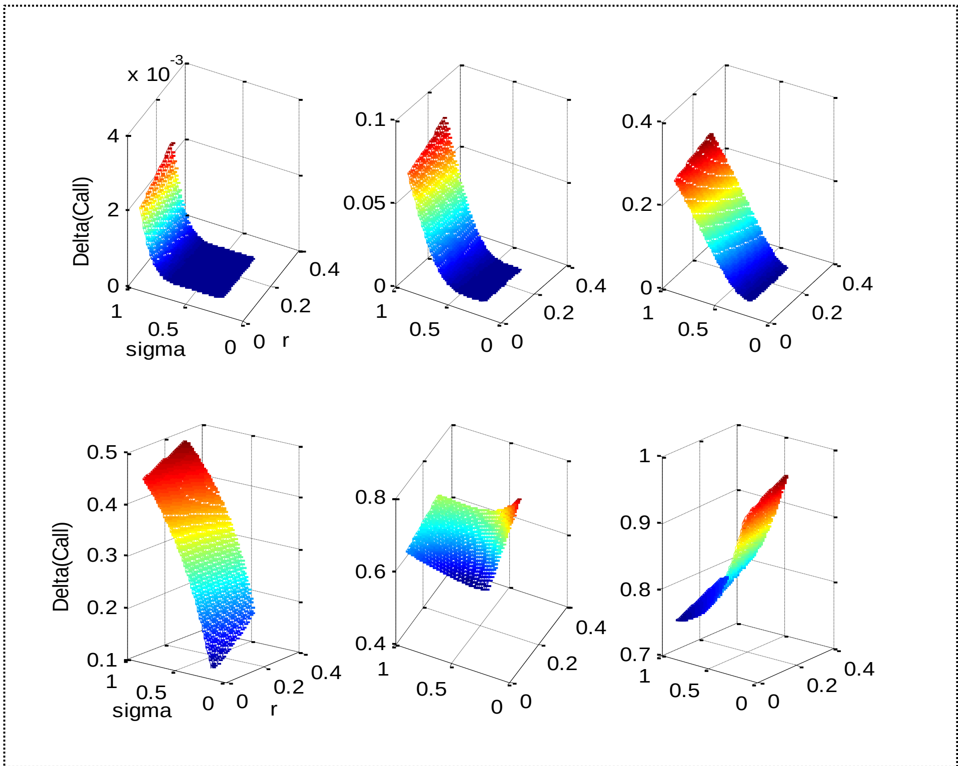
$$\Delta_c = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

alış opsiyonunun delta katsayısıdır.

5.15. Artan Hisse Senedi Fiyatına Göre Alış Opsiyonu Delta Katsayısı

Amacımız, değişen faiz oranı ve değişen volatilite değerlerine göre artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonunun delta katsayısındaki değişimi incelemektir.

Bu amaçla, E=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 ve T=0.25 yıl olmak üzere S=20:20:120 TL hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu delta katsayısındaki değişimi inceleyelim.



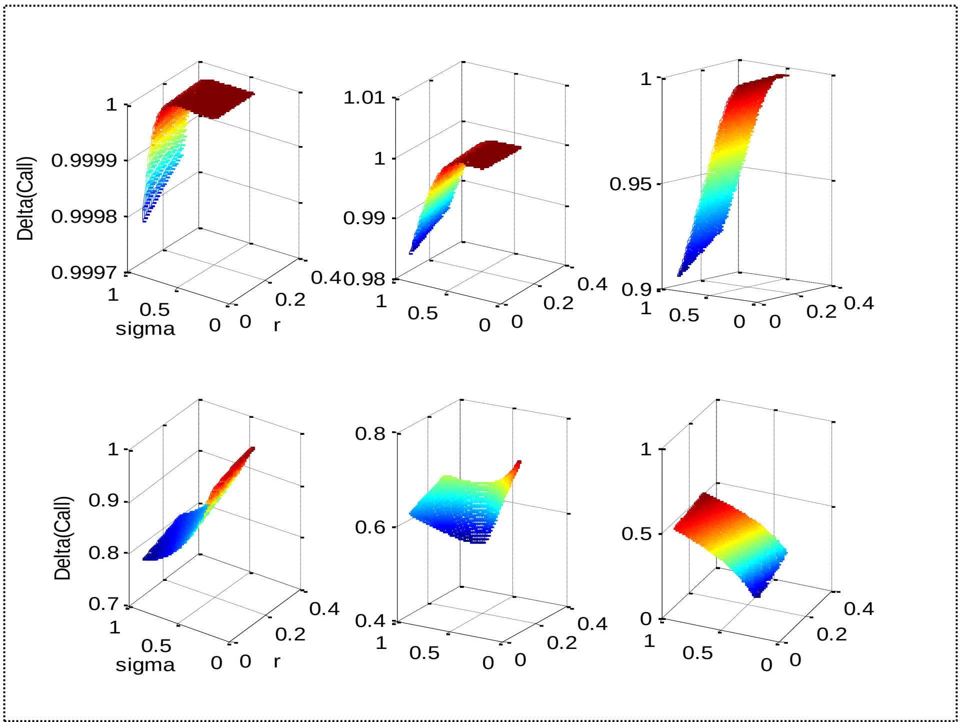
Şekil 11. Artan hisse senedi fiyatına göre alış opsiyonu delta katsayısı

Şekil 11'de E=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, T=0.25 yıl olmak üzere S=20:20:120 TL için alış opsiyonu delta katsayı grafikleri soldan sağa ve yukardan aşağıya doğru sırayla verilmiştir. Alış opsiyonunun kârda olması için $\Delta_c > 0.5$ olmalıdır. Şekil 11'de S=20 TL, S=40 TL, S=60 ve S=80 TL için alış opsiyonunun delta katsayıları 0.5'ten küçük, dolayısı ile bu opsiyonlar zarardadır. S=100 TL ve S=120 TL için $\Delta_c > 0.5$ dir. Dolayısı ile bu opsiyonlar kârdadır. Alış opsiyonunun deltası, opsiyon kârda olduğu oranda yükseldiğinden ve S=120 TL için delta katsayısı S=100 TL'ye göre daha büyük olduğundan en fazla kazanç S=120 TL için elde edilir. Buradan görülüyor ki diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile alış opsiyonunda hisse senedi fiyatı uygulama fiyatından ne kadar büyükse elde edilecek kâr o denli büyük olmaktadır. Şekil 11 incelendiğinde eğer $S \geq E$ ise, alış opsiyonunun delta katsayısı maksimum değerini, faiz oranının en büyük olduğu değerde almaktadır. Yani risksiz faiz oranı, alış opsiyonunun kazanç elde etmesi için pozitif yönde etki eder.

5.16. Artan Uygulama Fiyatına Göre Alış Opsiyonu Delta Katsayısı

Bu bölümde değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatilite değerlerine göre artan uygulama fiyatları için alış opsiyonu delta katsayısının değişimini incelemek istiyoruz.

Bu amaçla, S=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 ve T=0.25 yıl olmak üzere E=20:20:120 TL uygulama fiyatları için alış opsiyonu delta katsayısındaki değişimi inceleyelim.



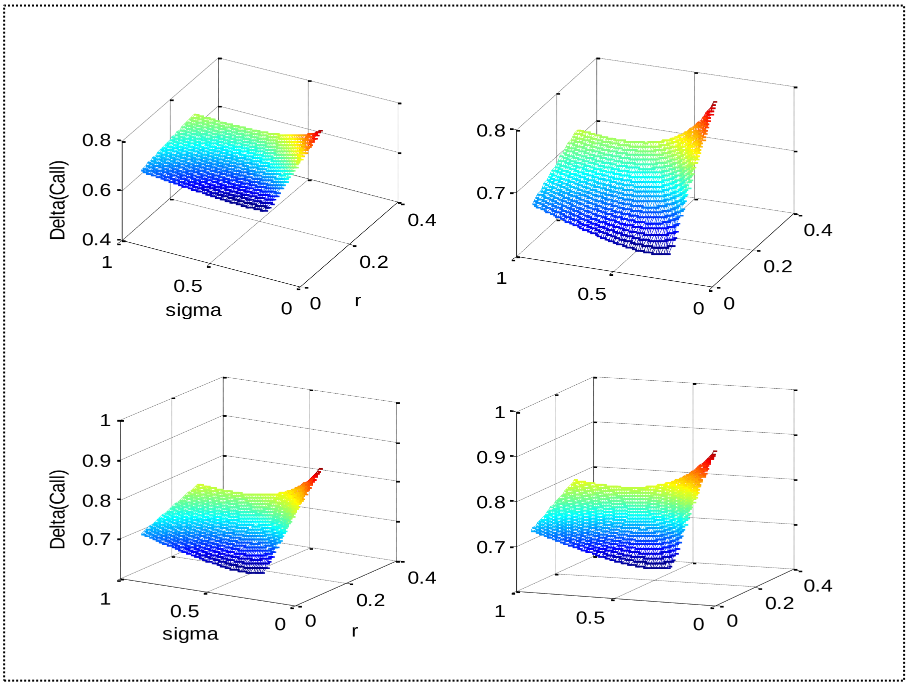
Şekil 12. Artan uygulama fiyatına göre alış opsiyonu delta katsayısı

Şekil 12'de S=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, T=0.25 yıl olmak üzere E=20:20:120 TL için alış opsiyonu delta katsayı grafikleri soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru sırayla verilmiştir. Alış opsiyonunun kârda olması için $\Delta_c > 0.5$ olmalıdır. Şekil 12'de E=20 TL, E=40 TL, E=60, E=80 TL ve E=100 TL için alış opsiyonunun delta katsayıları 0.5'ten büyüktür dolayısıyla bu opsiyonlar kârdadır. Uygulama fiyatı arttıkça alış opsiyonunun delta katsayısı azalmaktadır yani uygulama fiyatı ile alış opsiyonu değeri arasında ters orantı vardır. E=120 TL için alış opsiyonunun delta katsayısı $\Delta_c \leq 0.5$ dir. Yani alış opsiyonu r ve σ'nın büyük değerleri için başabaş ve r ve σ'nın küçük değerleri için zarardadır. Alış opsiyonunun deltası, opsiyon kârda olduğu oranda yükseldiğinden ve E=20 TL için delta katsayısı diğerlerine göre daha büyük olduğundan en fazla kazanç E=20 TL için elde edilir. Buradan görülüyor ki diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile uygulama fiyatı hisse senedi fiyatından nedenli küçük olursa alış opsiyonundan elde edilecek kazanç o denli büyük olur.

5.17. Vadeye Kalan Zamana Göre Alış Opsiyonu Delta Katsayısı

Amacımız, değişen faiz oranı ve değişen volatilite değerleri için vadeye kalan zamanın alış opsiyonunun delta katsayısını nasıl etkilediğini incelemektir.

Bu amaçla, S=100 TL, E=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 olmak üzere T=0.25:0.25:1 yıl için alış opsiyonunun delta katsayısındaki değişimi inceleyelim.



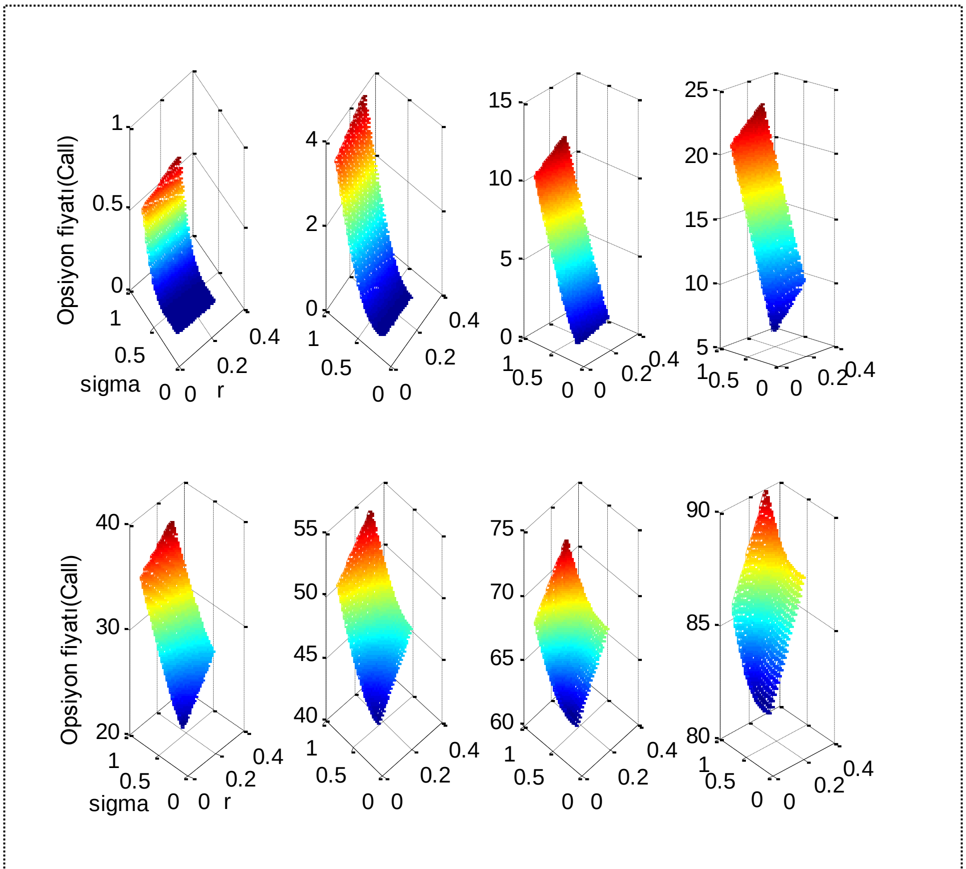
Şekil 13. Vadeye kalan zamana göre alış opsiyonu delta katsayısı

Şekil 13'te S=100 TL, E=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 olmak üzere T=0.25 yıl, T=0.5 yıl, T=0.75 yıl ve T=1 yıl için alış opsiyonunun delta katsayı grafikleri soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru sırayla verilmiştir. Şekil 13'ten görüldüğü gibi vadeye kalan zaman uzadıkça alış opsiyonunun delta katsayısı artmaktadır. Alış opsiyonunun delta katsayısı, opsiyon kârda olduğu oranda yükseldiğinden vadeye kalan zaman uzadıkça alış opsiyonundan daha fazla kazanç elde edilir. Buradan vadeye kalan zaman ile alış opsiyonu arasında pozitif ilişki olduğu görülür. Eğer alış opsiyonu kârda yani $\Delta_c > 0.5$ ise vadeye kalan zaman uzadıkça alış opsiyonu delta katsayısı maksimum değerini risksiz faiz oranının en büyük olduğu değerde alır. Kazanç elde etmek isteyen yatırımcı uzun vadeli ve risksiz faiz oranı yüksek olan alış opsiyonlarını almayı tercih eder.

6. ALIŞ OPSİYONU İÇİN LİNEER REGRESYON MODELİ

Bu bölümde değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatilite değerleri için artan hisse senedi fiyatlarına göre alış opsiyonu fiyatındaki değişimin, hangi hisse senedi fiyatları için lineer olduğunu incelemek istiyoruz.

Bu amaçla E=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, T=0.25 yıl olmak üzere S=40:20:180 TL için alış opsiyonu fiyatındaki değişimi grafikler üzerinde inceleyelim.



Şekil 14. Alış opsiyonu fiyatının değişen hisse senedi fiyatı, değişen volatilite ve değişen faiz oranına göre grafikleri

Şekil 14'te E=100 TL, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, T=0.25 yıl olmak üzere S=40:20:180 TL için alış opsiyonu fiyat grafikleri soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru sırayla verilmiştir. Alış opsiyonu değerindeki değişim küçük hisse senedi fiyatları için non-lineer olmakta, hisse senedi fiyatı uygulama fiyatına yaklaştıkça alış opsiyonu değerindeki değişim lineer olmaktadır. Hisse sendi fiyatı uygulama fiyatından büyük oldukça alış opsiyonu değeri non-lineer olarak değişmektedir.

Sonuç olarak, Şekil 14'ten hisse senedi fiyatının uygulama fiyatının komşuluğundaki değerleri için $C(r,\sigma)$'nin lineer bir davranış sergilediği görülmektedir. Bu lineer davranış gözleminden hareketle, bu bölümde amacımız, Black&Scholes modelinden açıkça görülemeyen $C(r,\sigma)$ davranışını elde edilen,

$$C_L = \alpha r + \beta\sigma + c$$

lineer regresyon modeli ile α, β, c katsayılarının ve bunlara bağlı olarak faiz oranı ve volatilitenin alış opsiyonu değerini nasıl etkilediğini görmek istiyoruz.

Black&Scholes modeline göre alış opsiyonunun değeri,

$$C_{B\&S} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Ancak $N(d_1)$ ve $N(d_2)$ yarı sonsuz integrallerini hesaplamak zor olduğundan alış opsiyonu değerini, r ve σ'nın değişimine göre regresyon yöntemini kullanarak uygun α, β ve c sabitlerini bularak, hisse sendi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda iken C_L lineer bağıntıya dönüştürelim. Burada, $C(r,\sigma)$ =alış opsiyonu fiyatı, r : risksiz faiz oranı, σ : volatilite, c : sabit.

6.1. $\boldsymbol{C(r,\sigma)}$ İçin Lineer Regresyon Yaklaşımı

Şekil 14'ten hareketle $C_L = \alpha r + \beta\sigma + c$ yaklaşımının uygun olacağını görüyoruz. Bu amaçla En Küçük Kareler Yöntemi ile

$$E = \sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - C(r_i,\sigma_i))^2$$

ifadesini minimize eden α, β ve c değerlerini bulmaya çalışalım.

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

denklemlerinden

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - C(r_i,\sigma_i))r_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = 2\sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - C(r_i,\sigma_i))\sigma_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - C(r_i,\sigma_i)) = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\sum_{i=1}^{N}(c + \alpha r_i + \beta\sigma_i) = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(c r_i + \alpha r_i^2 + \beta\sigma_i r_i) = \sum_{i=1}^{N} C_i r_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(c\sigma_i + \alpha r_i\sigma_i + \beta\sigma_i^2) = \sum_{i=1}^{N} C_i\sigma_i$$

elde edilir. Buradan en uygun α, β, c katsayılarının seçimi için, hata kareleri toplamı minumum yapılarak,

$$\begin{bmatrix} N & \sum r_i & \sum \sigma_i \\ \sum r_i & \sum r_i^{2} & \sum r_i\sigma_i \\ \sum \sigma_i & \sum r_i\sigma_i & \sum \sigma_i^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum C_i \\ \sum C_i r_i \\ \sum C_i\sigma_i \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir.

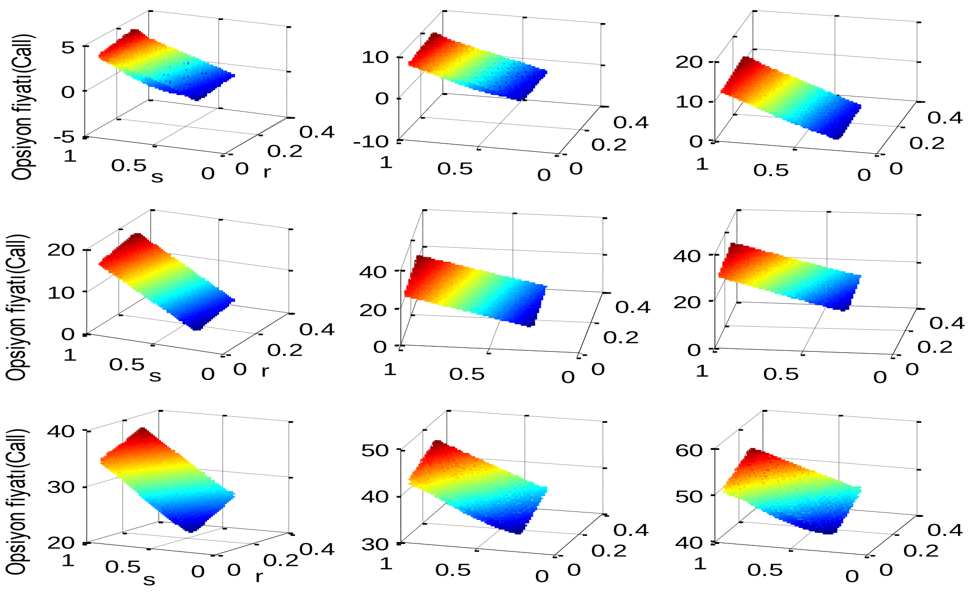
6.2. Değişen Varlık Dayanak Fiyatı İçin Lineer Regresyon Modeli

Bu bölümde amacımız değişen varlık dayanak fiyatı, değişen volatilite ve değişen risksiz faiz oranı değerleri için alış opsiyonu fiyatındaki değişimi incelemektir.

Bu amaçla basit bir senaryo üzerinden geliştirilen örnek ile değişen varlık dayanak fiyatı, değişen faiz oranı ve değişen volatilite değerleri için alış opsiyonu değerlerini $C_{B\&S}$ ve C_L bağıntılarından elde edip grafiklerini üst üste çizdirelim.

Örnek 6.1: Bir Jimnastik Kulübü (BJK) hisse senedi fiyatı borsada 90 TL olarak işlem görmektedir. Alış opsiyonunun kullanım fiyatı 100 TL olarak belirlenmiştir. Opsiyonun vadesine kalan süre 3 ay dır. Bunlara göre vadeye 3 ay kala opsiyon anlaşmasının satıldığı tarihte alış opsiyonunun fiyatını hesaplayalım. r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 olsun.

Örnek 6.1'de diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile değişen r ve σ değerleri ile artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerlerini $C_L$ve $C_{B\&S}$ bağıntılarından elde edip sonuçların grafiklerini üst üste çizdirelim.



Şekil 15. Artan hisse senedi fiyatları için B&S ve lineer regresyon modeli grafiklerinin üst üste çizdirilmesi

Şekil 15'te E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 için S=60:10:140 TL için $C_L$ve $C_{B\&S}$ bağıntılarına ait grafikler soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru üst üste çizdirilmiştir. Şekil 15'ten görüldüğü gibi hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda ise grafikler birbiriyle çakışmış yani alış opsiyonu fiyatındaki değişim lineer olmuştur. Eğer hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda değil ise grafikler çakışmamıştır dolayısı ile alış opsiyonu fiyatındaki değişim non-lineer olmuştur. S=60 TL, S=70 TL, S=130 ve S=140 TL için alış opsiyonu fiyatındaki değişim non-lineer, S=80 TL, S=90 TL, S=100 TL, S=110 TL ve S=120 TL için alış opsiyonu fiyatındaki değişim lineer olmaktadır.

Sonuç olarak, uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonunun değerini regresyon sonucu elde edilen C_L lineer regresyon bağıntısından kolayca hesaplayabiliriz.

6.3. Artan Hisse Senedi Fiyatları İçin Lineer Regresyon Modelindeki Katsayılar

Bu bölümde amacımız, örnek 6.1'de artan hisse senedi fiyatlarına göre r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 değerleri için regresyon sonucu elde edilen C_L lineer regresyon bağıntısındaki katsayıların değişimini incelemektir.

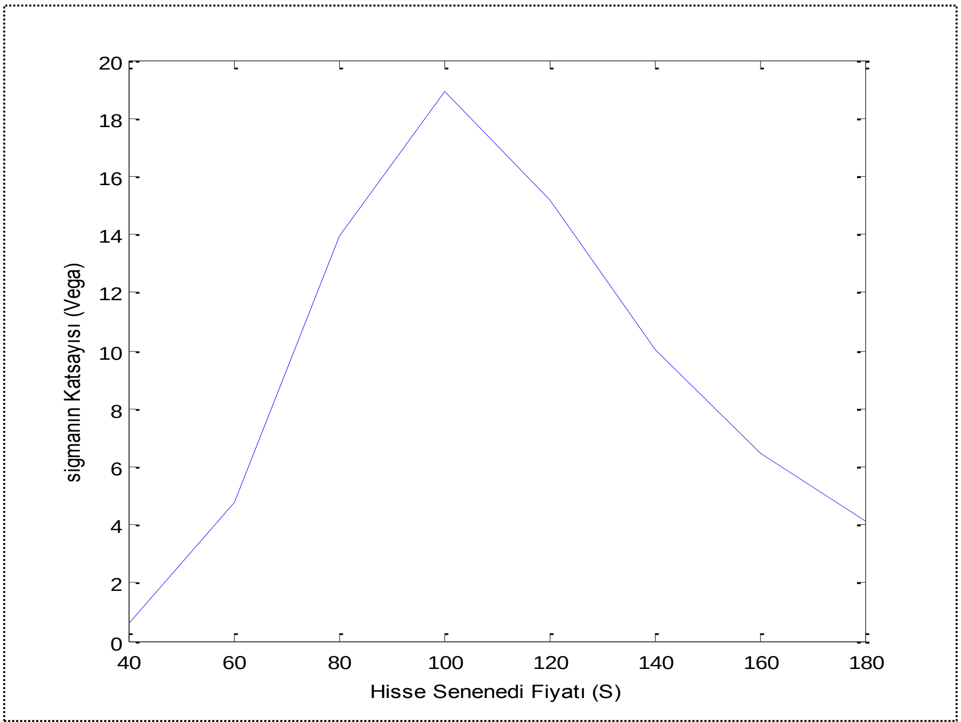
Bu amaçla artan hisse senedi fiyatları için değişen r ve σ değerlerine göre regresyon sonucu elde edilen C_L lineer regresyon bağıntısının katsayılarındaki değişimi inceleyelim. E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 için.

Tablo 6. Artan hisse senedi fiyatlarına göre c , α, β Katsayıları

Hisse Senedi Fiyatı (S)	$C_L = c + \alpha r + \beta\sigma$ Alış Opsiyonu Değeri
40 TL	C_L=-0.2864+0.3655r+0.6132σ
60 TL	C_L =-2.0010+2.2711r+4.7763σ
80 TL	C_L =-4.5381+5.5414r+13.9720σ
100 TL	C_L =0.5225+12.0162r+18.9341σ
120 TL	C_L =16.9243+18.1750r+15.1667σ
140 TL	C_L=37.3746+21.1247r+10.0553σ

Tablo 6'da hisse senedi fiyatı 40 TL'den başlayarak 20 TL aralıklarla 140 TL'ye kadar arttırılmıştır. Buna karşılık alış opsiyonu değerini hesaplayan C_L lineer bağıntısında c sabiti S=40 TL için -0.2864'den başlayarak S=80 TL'ye kadar azalmış ve S=80 TL için -4.5381 olmuştur. S=80 TL'den sonra tekrar artış göstermiş ve S=140 TL için 37.3746 olmuştur. Artan hisse senedi fiyatına karşın risksiz faiz oranının katsayısının sürekli arttığı görülmektedir. Risksiz faiz oranındaki artış non-lineer şekilde olmaktadır. Risksiz faiz oranının katsayısı herzaman pozitif işaretlidir. Bu ise risksiz faiz oranının alış opsiyonunun değeri ile doğru orantılı olduğunu gösterir. Artan hisse sendi fiyatına karşın volatitenin katsayısının önce arttığı sonra azaldığı görülmektedir. Volatilitenin katsayısı herzaman pozitif işaretlidir bu ise bize volatilitenin alış opsiyonunun değeri ile doğru orantılı olduğunu gösterir.

Şimdi artan hisse senedi fiyatları için volatilitenin katsayısındaki değişimi grafik üzerinde inceliyelim.

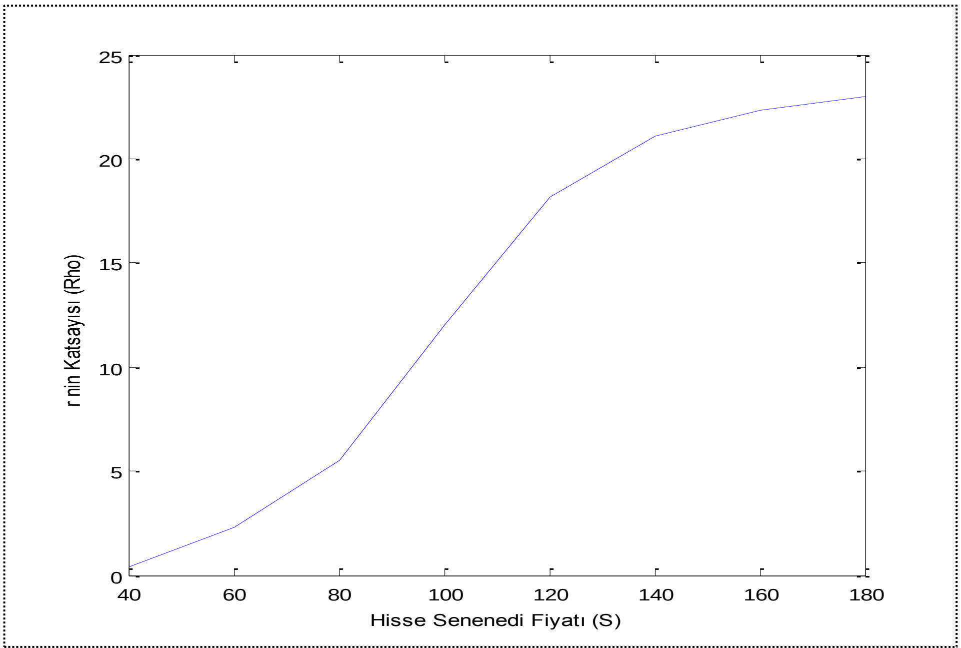


Şekil 16. Hisse senedi fiyatı artışı ile volatilitenin katsayısı (*vega*) arasındaki ilişki

Şekil 16'dan görüldüğü gibi üzerine alış opsiyonu yazılmış hisse senedinin fiyatı arttıkça, alış opsiyonunun değerini hesaplayan C_L lineer regresyon bağıntısındaki volatilitenin katsayısı S=40 TL'den başlayarak S=100 TL'ye kadar artmakta ve S=100 TL'den sonra tekrar azalmaktadır. Volatilitenin katsayısı maksimum değerini S=100 TL için almaktadır ve bu değer β=18.9341 dir. Uygulama fiyatının komşuluğunda olan hisse senedi fiyatı, uygulama fiyatına yaklaştığı zaman alış opsiyonunun değerini hesaplayan $C_{B\&S}$ bağıntısının değeri lineer değişmekte ve S=100 TL için C_L lineer regresyon bağıntısı ile tam olarak çakışmaktadır. Hisse senedi fiyatı uygulama fiyatından büyük oldukça alış opsiyonunun değerini hesaplayan $C_{B\&S}$ bağıntısnın lineerliği bozularak non-lineer hal almaktadır.

Dolayısı ile hisse senedi fiyatı, uygulama fiyatının komşuluğunda ise alış opsiyonunun değerini, değişen r ve σ değerleri için regresyon sonucu elde edilen C_L lineer regresyon bağıntısı yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz.

Artan hisse senedi fiyatları için faiz oranının katsayısındaki değişimi grafik üzerinde inceliyelim.



Şekil 17. Hisse senedi fiyatı artışı ile faiz oranı katsayısı (*rho*) arsındaki ilişki

Şekil 17'de uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerini hesaplayan C_L lineer regresyon bağıntısındaki risksiz faiz oranının katsayısı olan α ile hisse senedi fiyatı arasındaki ilişki verilmiştir. Hisse senedi fiyatı artıkça faiz oranının katsayısı sürekli artmaktadır. Bu artış ise faiz oranının alış opsiyonu değeri ile doğru orantılı olduğunu gösterir. Yani faiz oranı arttıkça alış opsiyonunun değeri artacaktır. Alış opsiyonu değerini C_L lineer regresyon bağıntısı yardımıyla hesaplamak için hisse senedi fiyatı, uygulama fiyatının komşuluğunda olması gerekmektedir. Burada uygulama fiyatı 100 TL olduğundan 100 TL'nin komşuluğunda alış opsiyonunun değerini lineer regresyon bağıntısı ile hesaplayabiliriz. 100 TL'nin komşuluğunda yani S=80 TL ile S=120 TL arasında alış opsiyonu değerini lineer regresyon bağıntısı yardımıyla hesaplayabiliriz. S= 80 TL ile S=120 TL aralığında hisse senedi fiyatı arttıkça risksiz faiz oranının katsayısı olan α değerinin lineer olarak arttığı görülmektedir. Bu artış bize hisse senedi fiyatı uygulama fiyatınının komşuluğunda olmak üzere risksiz faiz oranının alış opsiyonu değeri üzerine etkisini lineer olarak arttırdığını gösterir.

6.4. Artan Hisse Senedi Fiyatlarına Göre Regresyon Hatalarının Hesaplanması

Amacımız, değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatilite değerleri için artan hisse senedi fiyatlarına göre lineer regresyon modelindeki regresyon hatalarını incelemektir.

Bu amaçla r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, uygulama fiyatı=100 TL ve T=3 ay için artan hisse senedi fiyatlarına göre regresyon hatalarını hesaplayalım.

Tablo 7'de r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, uygulama fiyatı=100 TL, T=3 ay dir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedi fiyatı S=40 TL'den başlayarak 20 TL aralıklarla S=160 TL'ye kadar arttırılmıştır. Hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda ise yani S=80 TL için regresyon hatası=2,83989925879564e-29 ve S=120 TL için regresyon hatası=1,52723471250788e-27 dir. Hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda değilse S=60 TL için regresyon hatası=4,93038065763132e-32 ve S=140 TL için regresyon hatası=5,04870979341448e-29 dir.

Sonuç olarak, hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda ise yani uygulama fiyatınının komşuluğundaki regresyon hataları 2,83989925879564e-29 ve 1,52723471250788e-27 değerleri civarında iken lineer regresyon bağıntısı ile alış opsiyonu değerini hesaplayabiliriz.

Tablo 7. Artan hisse senedi fiyatlarına göre regresyon hataları

Hisse Senedi Fiyatı (S)	Regresyon Hatası $E = \sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - C(r_i, \sigma_i))^2$
40 TL	4,81482486096809e-31
60 TL	4,93038065763132e-32
80 TL	2,83989925879564e-29
100 TL	2,27980801608872e-28
120 TL	1,52723471250788e-27
140 TL	5,04870979341448e-29
160 TL	5,04870979341448e-29

6.5. Alış Opsiyonu İçin B&S ve Lineer Regresyon Modellerinin Uygunluğu

Amacımız, uygulama fiyatının komşuluğunda değişen hisse senedi fiyatlarına göre Black&Scholes modelinden ve lineer regresyon modelinden elde edilen alış opsiyonu değerlerinin birbirleriyle uygunluğunu incelemektir.

Bu amaçla, r=0.15, σ=0.8, E=100 TL ve T= 3 ay olmak üzere artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerlerini, B&S modelinden ve lineer regresyon modelinden ayrı ayrı hesaplayarak uygunluklarını karşılaştıralım.

Tablo 8. Değişen hisse senedi fiyatlarına göre alış opsiyonu fiyatları (TL)

Hisse Senedi Fiyatı (S)	$C_{B\&S} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$	$C_L = c + \alpha r + \beta\sigma$
90 TL	11.8170	11.8439
100 TL	17.4679	17.4722
110 TL	24.0728	24.2058
120 TL	31.4655	31.7839
130 TL	39.4876	39.9680

Tablo 8'de r=0.15, σ=0.8, E=100 TL ve T=3 ay için uygulama fiyatının komşuluğunda artan hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerleri $C_{B\&S}$ ve C_L bağıntılarından ayrı ayrı hesaplanmıştır. Lineer regresyon bağıntısı ile yapılan alış opsiyonu değerlerinin hesaplanması Tablo 7'deki herbir hisse senedi fiyatı için hesaplanan regresyon hataları ile yapılmıştır.

Sonuç olarak, farklı iki bağıntıdan uygulama fiyatının komşuluğunda farklı hisse senedi fiyatları için elde edilen alış opsiyonu değerleri birbirlerine çok yakındır. Hisse senedi fiyatı arttıkça Black&Scholes modelinin gösterdiği alış opsiyonunun değerindeki artış eğilimi lineer regresyon modelinde de görülmektedir.

6.6. Sabit Varlık Dayanak Fiyatı İçin Alış Opsiyonunun Lineer regresyon Modeli

Amacımız, örnek 6.1'de değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatilite ile sabit varlık dayanak fiyatına göre alış opsiyonu için C_L lineer regresyon bağıntısını elde etmektir.

Bu amaçla, S= 90 TL, E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 değerleri için regresyon katsayılarını bulalım.

S=90 TL, E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 değerleri için lineer regresyon bağıntısının katsayıları, c=-3.6323, α=8.3717 ve β=17.7755 olarak elde edilir. Bulunan katsayılar C_L lineer regresyon bağıntısında yerine yazılarak

$$C_L = -3.6323 + 8.3717r + 17.7755\sigma$$

elde edilir. $C_{B\&S}$ ve C_L bağıntılarının, örnek 6.1'deki verilenler doğrultusunda sonuçlarını inceleyelim.

Tablo 9. Değişen r ve σ değerleri için alış opsiyonu değerleri (TL)

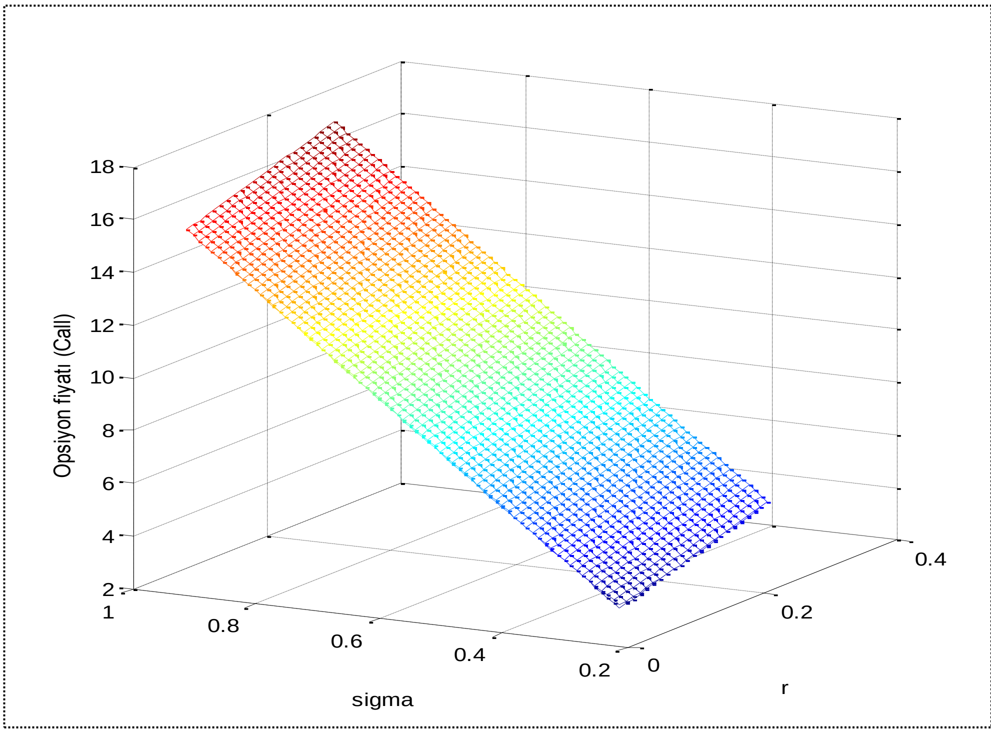
r	0.08	0.15	0.2	0.25	0.3
σ	0.3	0.5	0.8	0.9	1
$C_{B\&S} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$	2.4944	6.4449	12.2497	14.4750	16.6864
$C_L = -3.6323 + 8.3717r + 17.7755\sigma$	2.3701	6.5112	12.2624	14.4586	16.6547

Tablo 9'da görüldüğü gibi S=90 TL, E=100 TL, T=3 ay ve değişen r ve σ değerleri için alış opsiyonunun değeri $C_{B\&S}$ bağıntısına göre ve regresyon sonucu elde edilen C_L lineer regresyon bağıntısına göre hesaplanmıştır. Farklı iki bağıntıdan hesaplanan alış opsiyonu değerleri karşılaştırıldığında fiyatların birbirlerine çok yakın olduğu görülmektedir. S=90 TL için regresyon hatası hesaplanacak olursa

$$E = \sum_{i=1}^{N}(-3.6323 + 8.3717r_i + 17.7755\sigma_i - C(r_i, \sigma_i))^2 \text{ dir.}$$

Buradan regresyon hatası E= 2,01948391736579e-28 olarak elde edilir. Buradan hatanın çok küçük olduğu ve sonuç olarak iki bağıntıdan hesaplanan alış opsiyonu değerlerinin birbirlerine çok yakın olduğu görülmektedir.

Şimdi örnek 6.1'deki verilenler doğrultusunda değişen r ve σ değerleri için alış opsiyonu fiyat grafiğini Black&Scholes modeli ve regresyon sonucu bulunan lineer regresyon modeli için üst üste çizdirelim.



Şekil 18. B&S ve lineer regresyon bağıntılarına göre alış opsiyonu fiyat grafiklerinin üst üste çizdirilmesi

Şekil 18’de S=90 TL, E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 değerleri için $C_{B\&S}$ ve C_L bağıntılarından elde edilen alış opsiyonu fiyat grafikleri üst üste çizdirilmiştir. Görüldüğü gibi hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda ise farklı iki bağıntıdan elde edilen grafikler, değişen r ve σ değerleri için çakışmaktadır.

Sonuç olarak, hisse senedi fiyatı uygulama fiyatının komşuluğunda ise alış opsiyonu değeri değişen r ve σ değerleri için lineer değişmektedir dolayısı ile alış opsiyonunun değerini C_L lineer regresyon bağıntısı ile hesaplayabiliriz. Bu şekildeki lineer regresyon bağıntısı sayesinde volatilitenin ve risksiz faiz oranının alış opsiyonu değerine etkisini daha kolay görebiliriz. Örnek 6.1’de S=90 TL, E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 için alış opsiyonunun fiyatını hesaplayan lineer regresyon bağıntısı,

$$C_L = -3.6323 + 8.3717r + 17.7755\sigma \text{ dir.}$$

Buradan volatilitenin ve faiz oranının alış opsiyonu değeri ile doğru orantılı olduğu açıkça görülür.

6.7. Uygulama Fiyatının Komşuluğundaki Artan Hisse Senedi Fiyatları İçin *Rho* Ve *Vega* Katsayıları

Amacımız örnek 6.1’de uygulama fiyatı komşuluğunda farklı hisse senedi fiyatları kullanarak Black&Scholes modelinin alış opsiyonu için *rho* ve *vega* katsayıları ile lineer regresyon modelindeki *rho* ve *vega* katsayıları arsındaki ilişkiyi incelemektir.

Bu amaçla, alış opsiyonu için B&S modelinin ve lineer regresyon modelinin *rho* ve *vega* katsayılarını hesaplayalım.

Black&Scholes modeline göre alış opsiyonunun *rho* katsayısı,

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = TEe^{-rT}N(d_2) \text{ dir.}$$

Black&Scholes modeline göre alış opsiyonunun *vega* katsayısı,

$$V_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\right)$$

dir.

Tablo 10. Artan hisse senedi fiyatlarına göre *rho* katsayıları

Hiss Senedi Fiyatı	$C_L = c + \alpha r + \beta\sigma$ *Rho* Katsayısı (α)	$C_{B\&S} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$ *Rho* katsayısı
80 TL	5.5414	min(*Rho*)=1.8737 max(*Rho*)=6.7826
90 TL	8.3717	min(*Rho*)=6.3655 max(*Rho*)=9.3396
100 TL	12.0162	min(*Rho*)=10.2145 max(*Rho*)=15.4146
110TL	15.5073	min(*Rho*)=12.0630 max(*Rho*)=19.8426
120 TL	18.1750	min(*Rho*)=13.7583 max(*Rho*)=22.1109

Tablo 10’da E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:03, σ=0.3:0.01:1 ve uygulama fiyatı komşuluğunda artan hisse senedi fiyatları için her iki modelin de *rho* katsayıları hesaplanmıştır. r ve σ değerleri aralık şeklinde alındığından dolayı Black&Scholes modeli için *rho* katsayıları minumum ve maksimum şeklinde verilmiştir. Görüldüğü gibi uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonunun değerini hesaplayan C_L lineer regresyon bağıntısının *rho* katsayıları artan hisse senedi fiyatları için Black&Scholes modelindeki min(*Rho*) ve max(*Rho*) değerleri arasında değer almaktadır. Dolayısı ile uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerini hesaplayan lineer regresyon modelinden *rho* katsayısının ortalama değerini kolayca hesaplayabiliriz.

Şimdi E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:03, σ=0.3:0.01:1 ve uygulama fiyatı komşuluğunda artan hisse senedi fiyatları için her iki modelin de *vega* katsayılarını hesaplayalım.

Tablo 11. Artan hisse senedi fiyatlarına göre *vega* katsayıları

Hisse Senedi Fiyatı	$C_L = c + \alpha r + \beta\sigma$ *Vega* Katsayısı (β)	$C_{B\&S} = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$ *Vega* Katsayısı
80 TL	13.9720	min(*Vega*)=7.0403 max(*Vega*)=15.9406
90 TL	17.7755	min(*Vega*)=15.8897 max(*Vega*)=17.9524
100 TL	18.9341	min(*Vega*)=16.9077 max(*Vega*)=19.5521
110 TL	17.6622	min(*Vega*)=10.5472 max(*Vega*)=19.5521
120 TL	15.1667	min(*Vega*)=4.8187 max(*Vega*)=19.3197

Tablo 11'de E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:03, σ=0.3:0.01:1 ve uygulama fiyatı komşuluğunda artan hisse senedi fiyatları için her iki modelin de *vega* katsayıları hesaplanmıştır. r ve σ değerleri aralık şeklinde alındığından dolayı Black&Scholes modeli için *vega* katsayıları minumum ve maksimum şeklinde verilmiştir. Görüldüğü gibi uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonunun değerini hesaplayan C_L lineer regresyon bağıntısının *vega* katsayıları artan hisse senedi fiyatları için Black&Scholes modelindeki min(*Vega*) ve max(*Vega*) değerleri arasında değer almaktadır. Dolayısı ile uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerini hesaplayan lineer regresyon bağıntısından *vega* katsayısının değerini kolayca hesaplayabiliriz. Yani uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için volatilitenin alış opsiyonu değeri üzerine etkisini lineer regresyon bağıntısından daha açık bir şekilde görebiliriz.

Sonuç olarak, uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu değerini hesaplayan C_L lineer regresyon bağıntısının rho ve $vega$ katsayıları Black&Scholes modelindeki rho ve $vega$ katsayıları arasında değer almaktadır. Dolayısı ile bulunan bu rho ve $vega$ katsayıları, regresyon sonucunda bulunan lineer regresyon bağıntısı ile alış opsiyonunun değerini hesaplarken bize r ve σ nın alış opsiyonu değeri üzerine etkisini daha kolay gösterir.

7. SATIŞ OPSİYONU DEĞERİNİN PARAMETRELERE GÖRE DEĞİŞİMİ VE SATIŞ OPSİYONU İÇİN LİNEER REGRESYON YAKLAŞIMI

Bu bölümde Black&Scholes modelinden açıkça görülemeyen satış opsiyonu değerinin parametrelere göre değişimini incelemek ve faiz oranı ile volatiliteye bağlı satış opsiyonu için lineer regresyon modeli oluşturmak istiyoruz.

7.1. Satış Opsiyonu Değerinin Parametrelere Göre Değişimi

Bu bölümde parametrelerin etkisinin açıkça görülemediği karışık bir formül ile elde edilen satış opsiyonu fiyatının parametrelere göre nasıl değiştiğini araştırmak istiyoruz. Bunun için basit bir senaryo üzerinde geliştirdiğmiz örnek ile parametrelerin değişimine göre satış opsiyonu fiyatındaki değişimi inceleyelim.

Örnek 7.1: Bir Jimnastik Kulübü (BJK) hisse senedi fiyatı borsada 192 TL olarak işlem görmektedir. Yıllık birikimli faiz oranı % 15,20 değerine eşittir. Satış opsiyonunun kullanım fiyatı 180 TL olarak belirlenmiştir. Hisse senedinin günler itibariyle hesaplanan getiri oranlarının yıllık standart sapması 0,255 olarak bulunmuştur. Opsiyonun vadesine kalan süre 36 gündür. Bunlara göre vadeye 36 gün kala opsiyon anlaşmasının satıldığı tarihte opsiyonun fiyatını B&S modeli ile hesaplayalım.

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$N(d_1) - 1 = -N(-d_1), \quad 1 - N(d_2) = N(-d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{192}{180}) + (0.1520 + \frac{1}{2}(0.255)^2)(\frac{36}{365})}{(0.255)\sqrt{\frac{36}{365}}} = 1.0331$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_2 = 1.0331 - (0.255)\sqrt{\frac{36}{365}}$$

$$\mathrm{d}_2 = 0.9530$$

$$N(-d_1) = 0.1508$$

$$N(-d_2) = 0.1703$$

$$P(S,t) = 180e^{-0.152\left(\frac{36}{365}\right)}N(-d_2) - 192\,N(-d_1)$$

$$P(S,t) = 180e^{-0.152\left(\frac{36}{365}\right)}(0.1703) - 192(0.1508) = 1.2468\,TL$$

Şimdi satış opsiyonu değerini hesaplayan modeldeki parametrelerin değişimi ile satış opsiyonu değerindeki değişimi inceleyelim.

7.2. Hisse Senedi Fiyatının Satış Opsiyonunun Değerine Etkisi

Amacımız örnek 7.1’de satış opsiyonun değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile artan hisse senedi fiyatları için satış opsiyonu değerinin hisse senedi fiyatına bağımlılığını araştırmaktır.

Bu amaçla örnek 7.1’de diğer parametlerin sabit kalması koşulu ile hisse senedi fiyatı arttırılırsa satış opsiyonunun değerinin nasıl değişeceğini inceleyelim.

Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedinin fiyatı 192 TL’den başlayarak 2 TL aralıklarla 200 TL’ye kadar yükseltilirse hesaplanan satış opsiyonu değerleri Tablo 12’de verilmektedir.

Tablo 12. Artan hisse senedi fiyatları için satış opsiyonu değerleri

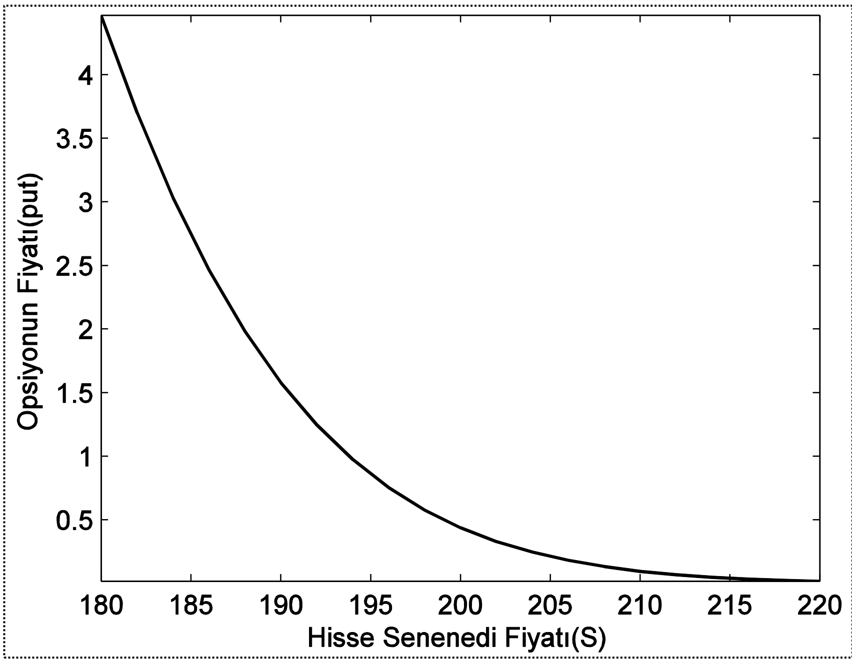
Hisse Senedi Fiyatı	Satış Opsiyonu Değeri
192 TL	1.2468 TL
194 TL	0.9742 TL
196 TL	0.7540 TL
198 TL	0.5780 TL
200 TL	0.4389 TL

Tablo 12'den görüldüğü gibi diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile üzerine satış opsiyonu yazılan hisse senedinin piyasa fiyatı arttıkça satış opsiyonunun değeri azalmaktadır. 192 TL fiyata sahip olan hisse senedinin satış opsiyonunun değeri 1.2468 TL dir ve hisse senedinin fiyatı arttıkça satış opsiyonunun değeri giderek azalmakta ve sıfıra yaklaşmaktadır. Satış opsiyonu almak isteyen yatırımcılar üzerine satış opsiyonu yazılan hisse senedinin fiyatının düşeceğini tahmin ederek almaktadırlar. Eğer üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedinin piyasa fiyatı yükselirse satış opsiyonuna olan talep azalacağından satış opsiyonunun değeri düşer.

Balack&Scholes modeline göre satış opsiyonunun değeri,

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{22}$$

bağıntısına göre hesaplanır. Burada S üzerine satış opisyonu yazılmış olan hisse senedinin piyasa fiyatı olmak üzere hisse senedinin fiyatı yükseldikçe satış opsiyonunun değerinin düşeceği bu bağıntıdan açıkça görülemez.



Şekil 19. Hisse senedi piyasa fiyatının satış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 19'da S=180:2:220 TL, E=180 TL, r=0.1520, σ=0.255, T=36 gün olarak alınmıştır.

Sonuç olarak, üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedinin piyasa fiyatı arttıkça satış opsiyonunun değeri üstel olarak düşer. Satış opsiyonu alan yatırımcı üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedinin piyasa fiyatının düşmesiyle kazanç elde eder, satış opsiyonunun yazıcısı (satıcısı) ise üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedinin piyasa fiyatının yükselmesi ile kazanç elde eder.

7.3. Kullanım Fiyatının Satış Opsiyonunun Değerine Etkisi

Amacımız örnek 7.1'de satış opsiyonunun değerini etkileyen diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile kullanım fiyatının değişmesinin satış opsiyonunun değerine etkisini incelemektir.

Bu amaçla, örnek 7.1'i farklı kullanım fiyatları için inceleyelim. Bir Jimnastik Kulübübü hisse senedi fiyatı borsada 192 TL, yıllık birikimli faiz oranı % 15,20, satış opsiyonunun kullanım fiyatı 180 TL, volatilitesi 0,255 ve vadeye 36 gün kaldığı verilmiştir. Bu durumda satış opsiyonunun dğeri 1.2468 TL dir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile kullanım fiyatı 180 TL'den başlayarak 5 TL aralıklarla 200 TL'ye kadar yükseltilirse hesaplanan satış opsiyonu değerleri Tablo 13'te verilmektedir.

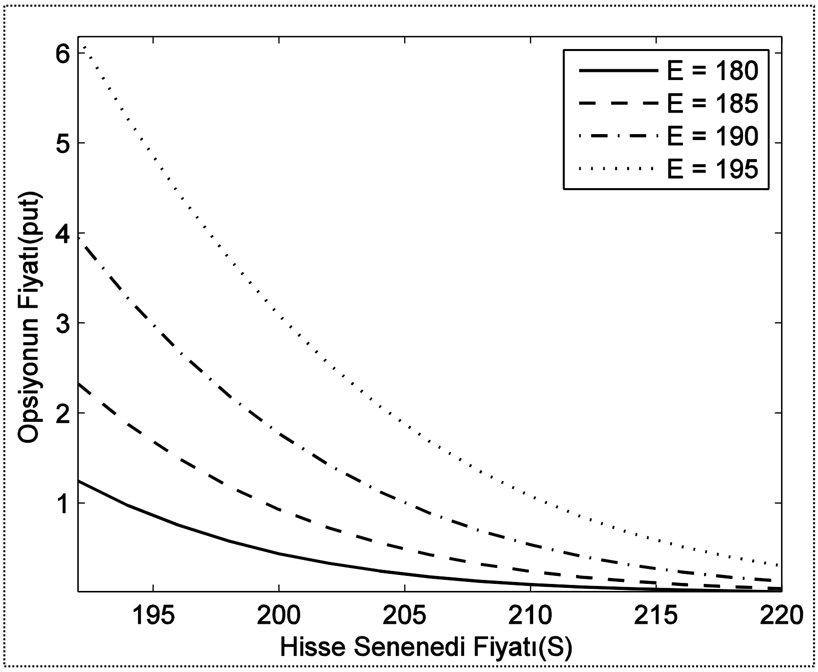
Tablo 13. Artan kullanım fiyatları için satış opsiyonu değerleri

Kullanım Fiyatı	Satış Opsiyonu Değeri
180 TL	1.2468 TL
185 TL	2.3228 TL
190TL	3.9452 TL
195 TL	6.1834 TL
200 TL	9.0450 TL

Tablo 13'ten görüldüğü gibi örnek 7.1'deki diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile kullanım fiyatının artması satış opsiyonunun değerini arttırmıştır.

Şekil 20'de piyasa fiyatı 192 TL olan hisse senedinin farklı kullanım fiyatlarına göre satış opsiyonunun değerlerini göstermektedir. Görüldüğü gibi 192 TL piyasa fiyatına sahip olan hisse senedi üzerine yazılmış satış opsiyonunun değeri kullanım fiyatı 195 TL için 6.1834 TL'den başlayarak kullanım fiyatı 180 TL için 1.2468 TL'ye azalmıştır. Ayrıca satış opsiyonunun değerinin artan hisse senedi fiyatına bağlı olarak üstel bir biçimde azaldığı görülmektedir.

Balack&Scholes modeline göre satış opsiyonunun değeri (22) bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Bağıntıda E kullanım fiyatı olmak üzere, kullanım fiyatı arttıkça satış opsiyonunun değerinin arttığı görülmektedir. Satış opsiyonu alacak olan yatırımcı kazanç elde etmek için kullanım fiyatı yüksek olan opsiyonun satma hakkını alır.



Şekil 20. Kullanım fiyatının satış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 20'de S=192:2:200 TL, r=0.1520, σ=0.255, T=36 gün olarak alınmıştır.

Sonuç olarak, iki hisse senedi opsiyonu aynı vade tarihine aynı hisse senedi piyasa fiyatına eşit olsun ve bu iki opsiyonun kullanım fiyatları farklı olsun. Eğer hisse senedinin fiyatı artarsa küçük kullanım fiyatlı satış opsiyonundan elde edilecek kazanç yüksek kullanım fiyatlı olan satış opsiyonunun kazancından küçüktür. Bu karşılaştırmadan opsiyonun kullanım fiyatı arttıkça satış opsiyonundan elde edilecek kazancın artacağı ortaya çıkar.

7.4. Risksiz Faiz Oranının Satış Opsiyonunun Değerine Etkisi

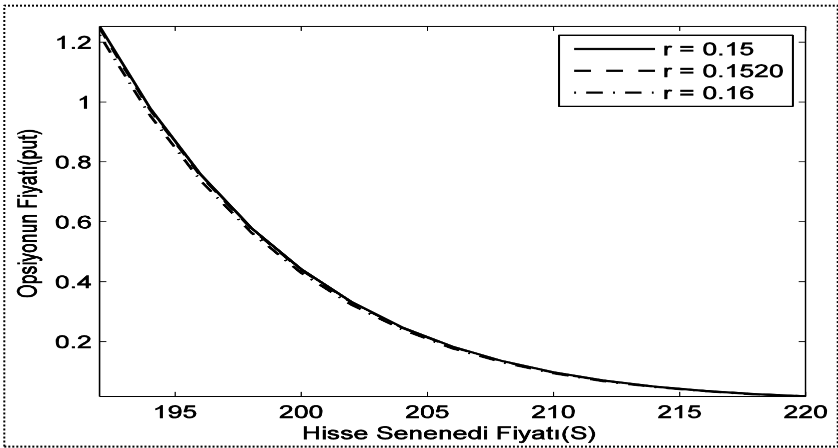
Amacımız örnek 7.1'de diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile risksiz faiz oranının değişmesinin satış opsiyonunun değerine etkisini incelemektir.

Bu amaçla örnek 7.1'i farklı risksiz faiz oranları için inceleyelim. Bir Jimnastik Kulübü hisse senedi fiyatı borsada 192 TL, yıllık birikimli faiz oranı % 15,20, satış opsiyonunun kullanım fiyatı 180 TL, volatilitesi 0,255 ve vadeye 36 gün kaldığı verilmiştir. Bu durumda satış opsiyonunun değeri 1.2468 TL dir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile risksiz faiz oranı % 14'den % 16'a kadar yükseltilirse hesaplanan satış opsiyonu değerleri Tablo 14'te verilmektedir.

Tablo 14. Artan risksiz faiz oranları için satış opsiyonu değerleri

Risksiz Faiz Oranı	Satış Opsiyonunun Değeri
% 14	1.2829 TL
% 15	1.2528 TL
% 15.20	1.2468 TL
% 16	1.2231 TL

Tablo 14'ten görüldüğü gibi diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile risksiz faiz oranının artması satış opsiyonunun değerini azaltır. Yani satış opsiyonunun değeri ile risksiz faiz oranı arasında ters orantı vardır. Şekil 21 farklı faiz oranları ile satış opsiyonunun fiyatı arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Üzerine satış opsiyonu yazılmış 192 TL piyasa fiyatına sahip olan hisse senedinin satış opsiyonunun değeri risksiz faiz oranı yükseldikçe, satış opsiyonunun değerinin azaldığı görülmektedir.



Şekil 21. Risksiz faiz oranının satış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 21'de S=192:2:220 TL, E=180 TL, σ=0.255, T=36 gün olarak alınmıştır.

Balack&Scholes modeline göre satış opsiyonunun değeri (22) bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Bu bağıntıda risksiz faiz oranının satış opsiyonu değerine etkisi açık olarak görülememektedir.

Sonuç olarak, üzerine satış opsiyonu yazılmış 192 TL piyasa fiyatına sahip olan BJK hisse senedinin satış opsiyonunun değeri risksiz faiz oranı yükseldikçe, satış opsiyonunun değerinin düştüğü görülmektedir. Satış opsiyonu ve faiz hadleri arasındaki ilişki aşağıda ki gibi açıklanabilir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile eğer,

$r_1 > r_2$ ise

$$P(S, E, T, r_1) \leq P(S, E, T, r_2)$$

dir.

Yani risksiz faiz haddi ne denli büyükse satış opsiyonunun değeri o denli küçük olur.

7.5. Volatilitenin Satış Opsiyonunun Değerine Etkisi

Amacımız örnek 7.1'de hisse senedi fiyatı 192 TL olan BJK hisse senedinde diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedi fiyatının volatilitesinin satış opsiyonunun değerine etkisini incelemektir.

Bu amaçla örnek 7.1'i farklı volatilite değerleri için inceleyelim. Bir Jimnastik Kulübü hisse senedi fiyatı borsada 192 TL, yıllık birikimli faiz oranı % 15,20, satış opsiyonunun kullanım fiyatı 180 TL, volatilitesi 0,255 ve vadeye 36 gün kaldığı verilmiştir. Bu durumda satış opsiyonunun değeri 1.2468 TL dir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedi fiyatının volatilitesi 0.2 değerinden başlayarak 0.3 değerine kadar arttırılırsa hesaplanan satış opsiyonu değerleri Tablo 15'te verilmektedir.

Tablo 15. Artan volatilite değerleri için satış opsiyonu değerleri

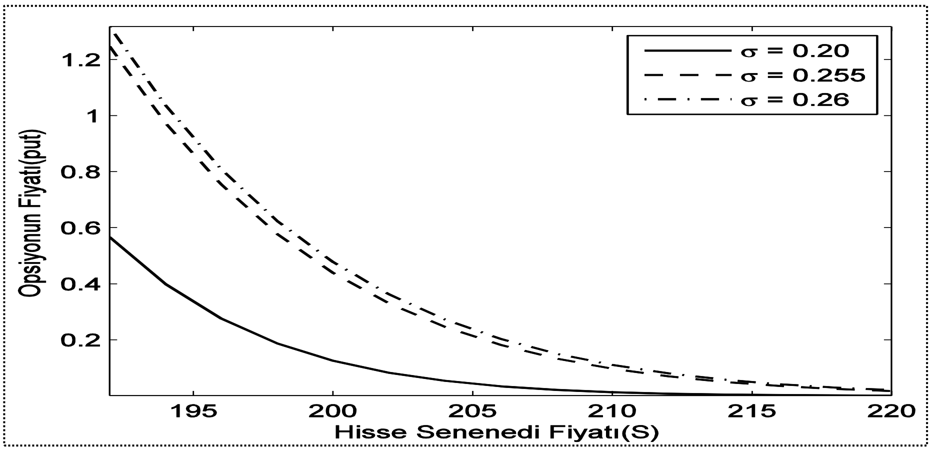
Volatilitenin Değeri	Alış Opsiyonunun Değeri
0.2	0.5665 TL
0.255	1.2468 TL
0.26	1.3180 TL
0.3	1.9308 TL

Tablo 15'ten görüldüğü gibi diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile volatilite değeri arttıkça satış opsiyonunun değeri de artmaktadır. Yani volatilite değeri ile satış opsiyonunun değeri doğru orantılıdır. Volatilite değeri ile satış opsiyonu değeri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile eğer,

$\sigma_1 > \sigma_2$ ise

$P(S,E,T,r,\sigma_1) \geq P(S,E,T,r,\sigma_2)$ dir.

Balack&Scholes modeline göre satış opsiyonunun fiyatı (22) bağıntısına göre hesaplanmaktadır. Bu bağıntıda volatilitenin satış opsiyonu değerine etkisi açıkça görülemez.



Şekil 22. Hisse senedi fiyatının volatilitesinin satış opsiyonunun değerine etkisi

Şekil 22’de S=192:2:220 TL, E=180 TL, r=0.1520, T=36 gün olarak alınmıştır.

Sonuç olarak, farklı iki hisse senedi üzerine yazılmış iki satış opsiyonu düşünelim. Bu satış opsiyonlarının vade tarihleri ve kullanım fiyatları aynıdır. Üzerine satış opsiyonu yazılmış iki hisse senedinden birincisinin fiyatı yatay seyretmekte ikincisinin fiyatı gözle görülür derecede çok değişmektedir. İkinci hisse senedi üzerine yazılan satış opsiyonunun değeri , opsiyonun kullanım fiyatı, hisse senedinin piyasa fiyatını aştığı zaman artmakta ve kazanç sağlamaktadır. Bu nedenle ikinci hisse senedi opsiyonuna yapılan yatırım cazip olmakta ve bu opsiyona olan talep opsiyonunun değerini arttırmaktadır.

7.6. Vadeye Kalan Zamanın Satış Opsiyonu Değerine Etkisi

Amacımız örnek 7.1’de diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile vadeye kalan zamanın satış opsiyonunun değerine etkisini incelemektir.

Bu amaçla örnek 7.1’i farklı vade tarihleri için inceleyelim. Bir Jimnastik Kulübübü hisse senedi fiyatı borsada 192 TL, yıllık birikimli faiz oranı % 15,20, satış opsiyonunun kullanım fiyatı 180 TL, volatilitesi 0,255 ve vadeye 36 gün kaldığı verilmiştir. Bu durumda satış opsiyonunun değeri 1.2468 TL dir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile vade tarihi 30 günden başlayarak 90 güne kadar arttırılırsa hesaplanan satış opsiyonu değerleri Tablo 16’da verilmektedir.

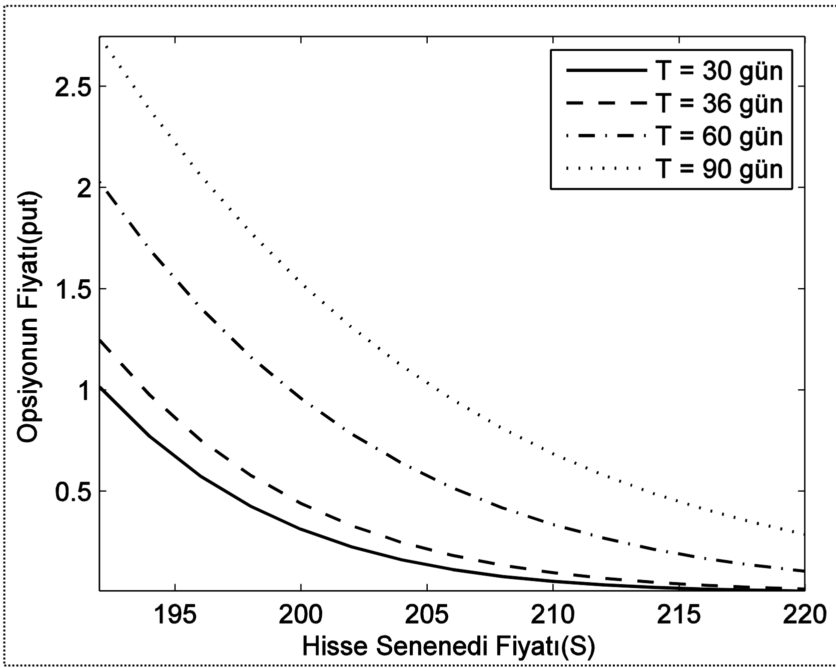
Tablo 16. Artan vade süreleri için satış opsiyonu değerleri

Vadeye Kalan Zaman	Satış Opsiyonunun Değeri
30 gün	1.0144 TL
36 gün	1.2468 TL
60 gün	2.0268 TL
90 gün	2.7462 TL

Tablo 16’dan görüldüğü gibi 192 TL piyasa fiyatına sahip hisse senedi üzerine yazılmış satış opsiyonunun değeri vade tarihi uzadıkça artmaktadır. Yani vadeye kalan zaman ile satış opsiyonunun değeri doğru orantılıdır. Şelil 23’te 192 TL piyasa fiyatına sahip olan hisse senedi üzerine yazılmış satış opsiyonunun değerinin farklı vade tarihlerine göre değişimi verilmiştir. Görüldüğü gibi vade tarihi arttıkça satış opsiyonunun değeri artmaktadır. Ayrıca artan hisse senedi fiyatları için satış opsiyonu değeri üstel olarak azalmaktadır.

Balack&Scholes modeline göre satış opsiyonunun değeri (22) bağıntısına göre hesaplanır. Bağıntıdan da görüldüğü gibi (T-t) vadeye kalan zaman olmak üzere satış opsiyonunun değeri, vadeye kalan zamanın artması ile artacaktır. Çünkü

$\frac{\partial P}{\partial (T-t)} = rEe^{-r(T-T)}N(-d_2) > 0$ dir.



Şekil 23. Vadeye kalan zamanın satış opsiyonunun değerine etkisi

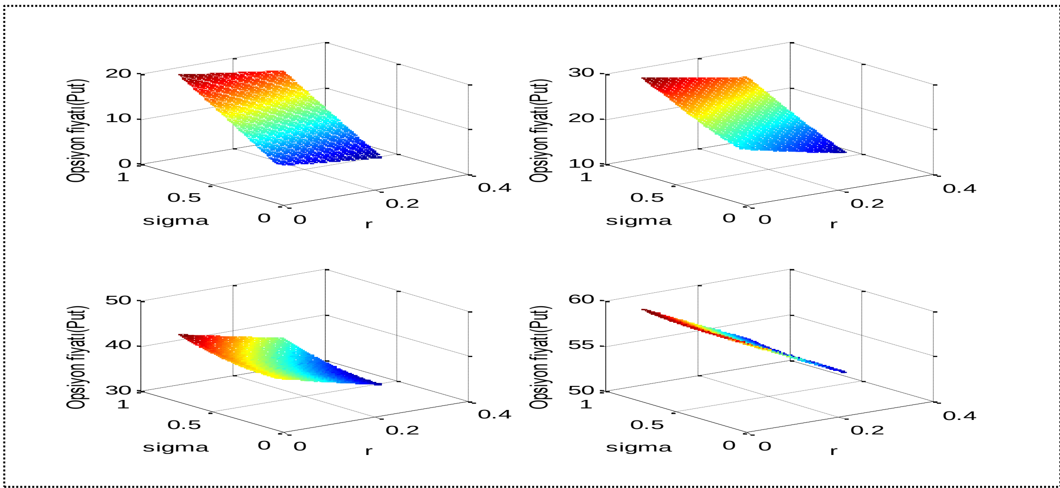
Şekil 23'te S=192:2:220 TL, E=180 TL, r=0.1520, σ=0.255 olarak alınmıştır.

Sonuç olarak, hisse senedi getirilerinin dağılımının varyansı zamanla artış göstermektedir. Diğer bir ifade ile hisse senedinin getirilerinin standart sapması vadeye kalan zamanın karesi ile doğru orantılı olarak artış gösterir. Opsiyonun fiyatını etkileyen diğer parametreler sabit kalmak koşulu ile vadeye kalan zaman arttıkça hisse senedinin volatilitesi (standart sapması) artmaktadır. Volatilitenin artması opsiyonun değerini arttırmaktadır. Yani opsiyonun ömrü uzadıkça fiyatı da artmaktadır. Opsiyon sözleşmesinin vadesi opsiyonun fiyatının belirlenmesinde önemli bir faktördür. Opsiyon sözleşmeleri süreleri kısa süreli menkul değerlerdir. Opsiyon sözleşmeleri vadesinde kullanılmadığı zaman değersiz hale gelmektedir. Opsiyon sözleşmesinde vade kısa ise veya vade bitimine yaklaştıkça, sözleşmenin zaman değeri giderek azalmakta vade gününde sıfır olmaktadır.

7.7. Satış Opsiyonu için Lineer Regresyon Modeli

Bu bölümde amacımız değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatiliteye göre satış opsiyonu değerindeki değişimin, farklı hisse senedi fiyatları için nasıl olduğunu incelemektir.

Bu amaçla, E=100 TL r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 değerlerini alarak ve S=20:20:100 TL hisse senedi fiyatları için satış opsiyonu fiyat grafiklerini inceliyelim. Şekil 24'te grafikler, S=100 TL, S=80 TL, S=60 TL, S=40 TL için soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru verilmiştir.



Şekil 24. Satış opsiyonu değerinin değişen hisse senedi fiyatı,volatilite ve faiz oranına göre grafikleri

Sonuç olarak, Şekil 24'ten $S \leq E$ değerleri için $P(r,\sigma)$'nın lineer bir davranış sergilediği görülmektedir. Bu lineer davranış gözleminden hareketle, bu bölümde amacımız, Black&Scholes modelinden açıkça görülemeyen $P(r,\sigma)$ davranışını elde edilen

$$P_L(r,\sigma) = \alpha r + \beta\sigma + c$$

lineer regresyon modeli ile α, β, c katsayılarının ve bunlara bağlı olarak faiz oranı ve volatilitenin satış opsiyonu fiyatını nasıl etkilediğini görmek istiyoruz.

$N(-d_1)$ ve $N(-d_2)$ yarı sonsuz integrallerini hesaplamak zor olduğundan satış opsiyonu fiyatını, r ve σ nın değişimine göre regresyon yöntemini kullanarak uygun α, β ve c sabitlerini bularak, $S \leq E$ değerleri için

$$P_L = \alpha r + \beta\sigma + c$$

lineer yaklaşımını araştıralım.

Burada, P_L : satış opsiyonu değeri, r : risksiz faiz oranı, σ : volatilite, c : sabit, S : hisse senedi fiyatı, E : uygulama fiyatıdır.

7.8. $P(r,\sigma)$ İçin Lineer Regresyon Yaklaşımı

Şekil 24'ten hareketle $P_L = \alpha r + \beta\sigma + c$ yaklaşımının uygun olacağını görüyoruz. Bu amaçla En Küçük Kareler Yöntemi ile

$$E = \sum_{i=1}^{N} (\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - P(r_i,\sigma_i))^2$$

ifadesini minimize eden α, β ve c değerlerini bulmaya çalışalım.

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial c} = 0$$

denklemlerinden

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{N} (\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - P(r_i,\sigma_i)) r_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = 2\sum_{i=1}^{N} (\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - P(r_i,\sigma_i)) \sigma_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - P(r_i, \sigma_i)) = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\sum_{i=1}^{N}(c + \alpha r_i + \beta\sigma_i) = \sum_{i=1}^{N} P_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(c r_i + \alpha r_i^2 + \beta\sigma_i r_i) = \sum_{i=1}^{N} P_i r_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(c\sigma_i + \alpha r_i\sigma_i + \beta\sigma_i^2) = \sum_{i=1}^{N} P_i\sigma_i$$

elde edilir. Buradan en uygun α, β, c katsayılarının seçimi için, hata kareleri toplamı minumum yapılarak,

$$\begin{bmatrix} N & \sum r_i & \sum \sigma_i \\ \sum r_i & \sum r_i^2 & \sum r_i\sigma_i \\ \sum \sigma_i & \sum r_i\sigma_i & \sum \sigma_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum P_i \\ \sum P_i r_i \\ \sum P_i\sigma_i \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir.

7.9. Sabit Varlık Dayanak Fiyatı İçin Satış Opsiyonu Lineer Regresyon Modeli

Bu bölümde amacımız, sabit varlık dayanak fiyatı için değişen volatilete ve değişen risksiz faiz oranı değerleri ile satış opsiyonu için P_L lineer yaklaşımını elde etmektir.

Bu amaçla basit bir senaryo üzerinde geliştirilen örnek ile sabit varlık dayanak fiyatı için P_L lineer yaklaşımındaki α, β ve c sabitlerini elde edelim.

Örnek 7.2: Bir Jimnastik Kulübü (BJK) hisse senedi fiyatı borsada 20 TL olarak işlem görmektedir. Satış opsiyonunun kullanım fiyatı 100 TL olarak belirlenmiştir. Opsiyonun vadesine kalan süre 3 ay dır. Bunlara göre vadeye 3 ay kala opsiyon anlaşmasının satıldığı tarihte opsiyonun fiyatını hesaplayalım. r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 olsun.

Örnek 7.2'de değişen risksiz faiz oranı ve değişen volatilite ile satış opsiyonu için P_L lineer yaklaşımını elde edelim.

Bu amaçla öncelikle regresyon katsayılarını bulalım. S=20 TL, E=100 TL, T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 için regreyon katsayıları c=79.9015 α = -23.8387, β= 0.0270 olarak bulunur. Bulunan değerler P_L lineer yaklaşımında yerine yazılarak,

$$P_L = 79.9015 - 23.8387r + 0.0270\sigma$$

elde edilir.

Black&Scholes modeline göre satış opsiyonu değeri,

$$P_{B\&S} = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

bağıntısından hesaplanmaktadır.

Şimdi bu iki modelin örnek 7.2'deki verilenler doğrultusunda sonuçlarını inceleyelim.

Tablo 17. Değişen r ve σ değerleri için satış opsiyonu fiyatları (TL)

r	0.08	0.08	0.08	0.1	0.3
σ	0.3	0.8	1	0.3	0.3
$P_{B\&S} = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$	78.0199	78.0200	78.0242	77.5310	72.7743
$P_L = 79.9015 - 23.8387r + 0.0270\sigma$	78.0029	78.0164	78.0218	77.5262	72.7795

Tablo 17'de görüldüğü gibi S=20 TL, uygulama fiyatı=100 TL, T=0.25 yıl ve değişen r ve σ değerleri için satış opsiyonunun değeri, Black&Scholes modeline göre ve regresyon sonucu elde edilen lineer yaklaşıma göre hesaplanmıştır. Farklı iki modelden hesaplanan satış opsiyonunun değerleri karşılaştırıldığında fiyatların birbirlerine çok yakın olduğu görülmektedir. S=20 TL için regresyon hatası hesaplanacak olursa

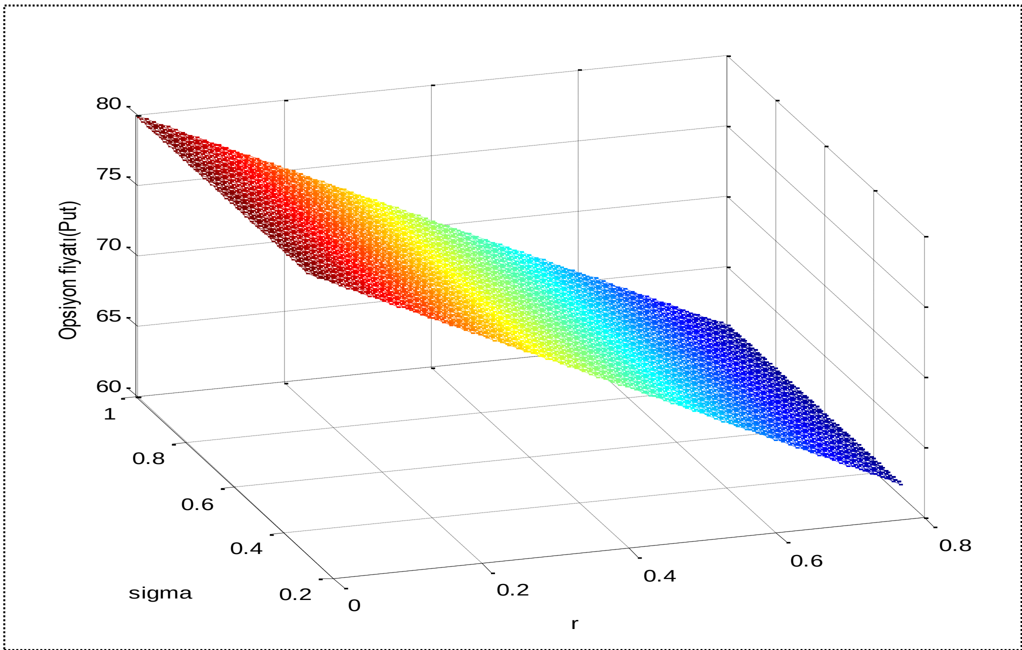
$$E = \sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - P(r_i, \sigma_i))^2$$

olduğundan

$$E = \sum_{i=1}^{N} (-23.8387r_i + \ 0.0270\sigma_i + 79.9015 - P(r_i, \sigma_i))^2$$

dir. Burada, E=2,44357554001261e-26 bulunur. Yani buradan hatanın çok küçük olduğu ve sonuç olarak bu iki farklı modelden hesaplanan satış opsiyonunun değerlerinin birbirine çok yakın değerlerde olduğu görülmektedir.

Örnek 7.2'deki senaryoyu S=20 TL, E=100 TL, T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 değerleri için satış opsiyonu değerinin grafiğini, Balck&Scholes modeli ve regresyon sonucu bulunan lineer yaklaşım için üst üste çizdirelim.



Şekil 25. B&S ve lineer regresyon bağıntılarına göre satış opsiyonu fiyat grafiklerinin üst üst çizdirilmesi

Şekil 25'ten de görüldüğü gibi S=20 TL,E=100 TL, T=0.25 yıl ve değişen r ve σ değerleri için regresyon sonucu elde edilen lineer yaklaşımdan hesaplanan satış opsiyonunun fiyatları, Black&Scholes modelinden hesaplanan satış opsiyonun fiyatlarıyla örtüşmektedir.

Sonuç olarak, satış opsiyonunun fiyatlarındaki değişim, değişen r ve σ değerleri için lineer olmaktadır dolayısı ile satış opsiyonunun fiyatı P_L lineer regresyon modeli ile hesaplana bilmektedir. Bu şekildeki lineer model sayesinde volatilitenin ve risksiz faiz oranının satış opsiyonun değerine etkisini daha kolay görebilmekteyiz. Örnek 7.2'de S=20 TL, E=100 TL, T=0.25 yıl ,r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 için satış opsiyonunun değerini hesaplayan lineer bağıntı

$$P_L = 79.9015 - 23.8387r + 0.0270\sigma$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu bağıntıdan risksiz faiz oranının satış opsiyonunun fiyatı ile ters orantılı, volatilitenin satış opsiyonunun değeri ile doğru orantılı olduğu açıkça görülmektedir.

7.10. Değişen Varlık Dayanak Fiyatı İçin Regresyon Modelinin Analizi

Amacımız, örnek 7.2'de artan hisse senedi fiyatları ile regresyon sonucu satış opsiyon için elde edilen P_L lineer bağıntısının katsayılarındaki değişimi incelemek ve artan hisse senedi fiyatları için P_L lineer bağıntısından elde edilen satış opsiyonu değerleri ile $P_{B\&S}$ bağıntısından elde edilen satış opsiyonu değerlerini karşılaştırmaktır.

Bu amaçla artan hisse senedi fiyatlarının regresyon sonucu elde edilen lineer P_L bağıntısının katsayılarına etkisini ve farklı iki bağıntıdan elde edilen satış opsiyonu değerlerini inceleyelim. E =100 TL, T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3 ve σ=0.3:0.01:1 için.

Tablo 18. Artan hisse senedi fiyatlarına göre c , α, β Katsayıları

Hisse Senedi Fiyatı(S)	$P_L = c + \alpha r + \beta\sigma$ Satış Opsiyonunun Fiyatı
20 TL	P_L =79.9015-23.8387r+0.0270σ
40 TL	P_L =59.6181-23.4773r+0.6344σ
60 TL	P_L =37.9035-21.5717r+4.7975σ
80 TL	P_L =15.3664-18.3015r+13.9932σ
100 TL	P_L =0.4269-11.8267 r+18.9553σ

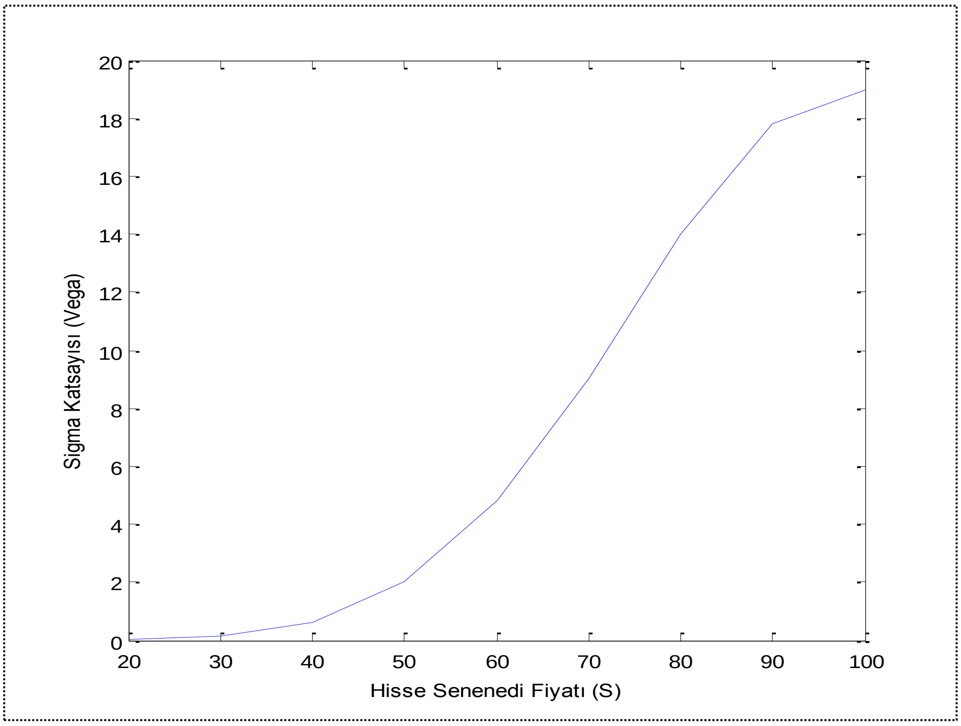
Tablo 18'de hisse senedi fiyatı 20 TL'den başlayarak 20 TL aralıklarla 100 TL'ye kadar arttırılmıştır. Buna karşılık satış opsiyonun değerini hesaplayan lineer bağıntıdaki c sabiti 79.9015 başlayarak hisse senedinin artan değerleri için azalmış ve S=100 TL için c=0.4269 olmuştur. c'nin değerindeki bu azalma hisse senedi fiyatı arttıkça sabit oranda azalmamıştır. Çok küçük r ve σ değerleri için S+c ≅ E olduğu görülmektedir. Yani çok küçük r ve σ değerleri için S≅E-c ve artan hisse senedi fiyatları için satış opsiyonunun değeri P=0 dir. Artan hisse senedi fiyatına karşın risksiz faiz oranının katsayısının arttığı görülmektedir. Faiz oranının katsayısındaki bu artış hisse senedi fiyatı arttıkça daha hızlı olmaktadır. Artan hisse senedi fiyatına karşın volatilitenin katsayısının giderek arttığı görülmektedir. Volatilitenin katsayısındaki bu artış hisse senedi fiyatı arttıkça S=80 TL'ye kadar daha hızlı artmaktadır. Yani hisse senedi fiyatı arttıkça volatilitenin satış opsiyonu değerine etkisinin arttığını görülür. S=100 TL için volatilitenin katsayısındaki artış S=80 TL'ye göre daha az miktarda artış göstermiştir. Satış opsiyonunda hisse senedi fiyatı uygulama fiyatına eşit olduğunda opsiyona olan talebin azalmasından dolayıdır.

7.11. Hisse Senedi Fiyatı ve *Vega* Katsayısı

Bu bölümde amacımız, artan hisse senedi fiyatları için P_L lineer bağıntısındaki volatilitenin katsayısı olan β'nın değişimini incelemektir.

Bu amaçla, E =100 TL, T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 ve artan hisse senedi fiyatları için P_L lineer bağıntısındaki volatilitenin katsayısı olan β'nın değişimini inceleyelim.

Şekil 26'da hisse senedi fiyatı artışı ile *vega* katsayısı arasında ki ilişki verilmiştir. Şekil 26'dan üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedinin fiyatı arttıkça, satış opsiyonunun değerini hesaplayan P_L lineer bağıntısındaki volatilitenin katsayısı olan β'nın arttığı görülmektedir. Bu artış lineer olmayıp hisse senedi fiyatınının küçük olduğu değerlerde yavaş artmakta, hisse senedi fiyatının büyük olduğu değerlerde daha hızlı artmaktadır. Hisse senedi fiyatının uygulama fiyatına yaklaştığı zaman ise volatilitenin katsayısındaki artış hızı yavaşlamaktadır. Volatilitenin katsayısındaki artış hızının yavaşlamasının sebebi ise üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedinin fiyatı uygulama fiyatına yaklaştığı zaman satış opsiyonuna olan talebin azalacağından satış opsiyonunun değerinin düşmesidir. Dolayısı ile hisse senedi fiyatının büyük olduğu durumda volatilitenin satış opsiyonu üzerine etkisi azalmaktadır.



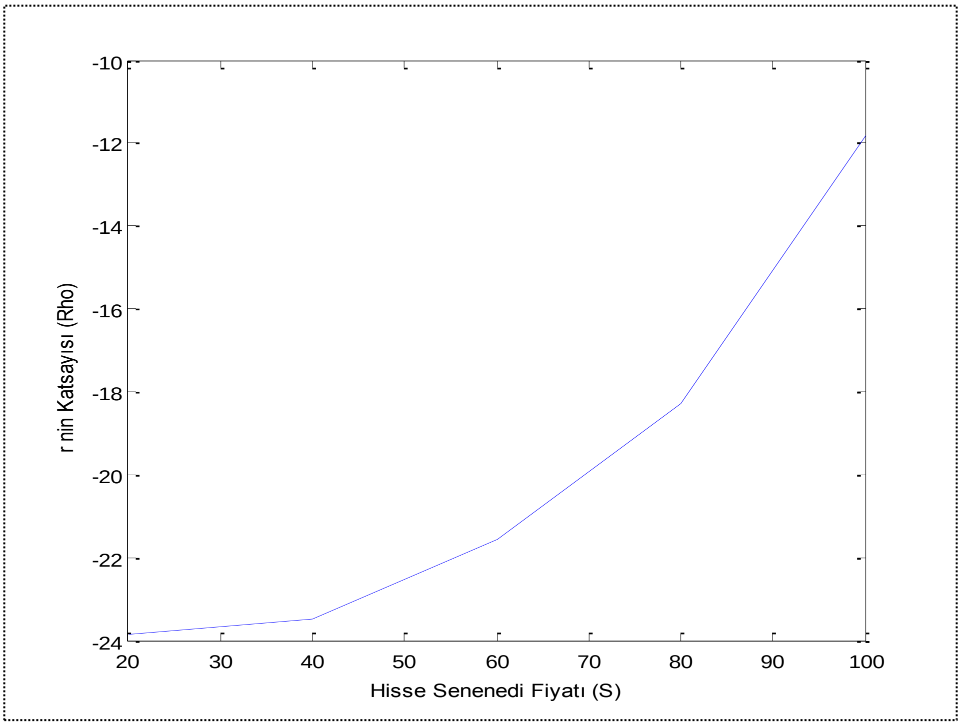
Şekil 26. Hisse senedi fiyatı artışı ile volatilitenin katsayısı (*vega*) arasındaki ilişki

7.12. Hisse Senedi Fiyatı ve *Rho* Katsayısı

Bu bölümde amacımız, artan hisse senedi fiyatları için P_L lineer bağıntısındaki risksiz faiz oranının katsayısı olan α'nın değişimini incelemektir.

Bu amaçla, E =100 TL, T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 ve artan hisse senedi fiyatları için P_L lineer bağıntısındaki faiz oranının katsayısı olan α'nın değişimini inceleyelim.

Şekil 27'de değişen hisse senedi fiyatları için satış opsiyonu değerini hesaplayan P_L lineer bağıntısındaki r'nin katsayı değerleri verilmektedir. Görüldüğü gibi üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedinin fiyatı arttıkça, satış opsiyonunun değerini hesaplayan P_L lineer bağıntısındaki faiz oranının katsayısı olan α'nın arttığı görülmektedir. Bu artış lineer olmayıp hisse senedi fiyatınının küçük olduğu değerlerde yavaş armakta, hisse senedi fiyatının büyük olduğu değerlerde daha hızlı artmaktadır.



Şekil 27. Hisse senedi fiyatı artışı ile faiz oranının katsayısı (*rho*) arasındaki ilişki

Tablo 19. Artan hisse senedi fiyatları için $\boldsymbol{r}$'nin katsayı

Hisse Senedi Fiyatı (S)	Faiz Oranının Katsayısı (α)
20 TL	-23.8387
40 TL	-23.4773
60 TL	-21.5717
80 TL	-18.2015
100 TL	-11.8267

Tablo 19'dan görüldüğü gibi hisse senedi fiyatı arttıkça P_L lineer bağıntısındaki r'nin katsayısı artmaktadır. Küçük hisse senedi fiyatları için r'nin katsayısındaki artış yavaş, büyük hisse senedi fiyatları için r'nin katsayısındaki artış hızlı olmaktadır.

Sonuç olarak, üzerine satış opsiyonu yazılmış hisse senedininin fiyatı yükseldikçe P_L lineer bağıntısındaki risksiz faiz oranının katsayıları mutlak değerce azalmakta olup buda faiz oranının artan hisse senedi fiyatları için satış opsiyonu değeri üzerine etkisinin azaldığını göstermektedir.

Şimdi artan hisse senedi fiyatları için regresyon hatalarını hesaplayalım. r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, uygulama fiyatı=100 TL, T=0.25 yıl ve S=20:20:100 TL değerleri için regresyon hatalarını inceleyelim.

Tablo 20. Artan hisse senedi fiyatlarına göre regresyon hataları

Hisse Senedi Fiyatı (S)	Regresyon Hatası $E = \sum_{i=1}^{N}(\alpha r_i + \beta\sigma_i + c - P(r_i, \sigma_i))^2$
20 TL	2,44357554001261e-26
40 TL	1,82258423542263e-26
60 TL	2,01948391736579e-26
80 TL	3,03238131966957e-27
100 TL	6,18466949693273e-28

Tablo 20'de r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1, uygulama fiyatı=100 TL, T=0.25 yıl dir. Diğer parametrelerin sabit kalması koşulu ile hisse senedi fiyatı 20 TL'den başlayarak 20 TL aralıklarla S=100 TL'ye kadar arttırılmıştır.

7.13. Satış Opsiyonu İçin B&S ve Lineer Regresyon Modellerinin Uygunluğu

Artan hisse senedi fiyatları için Black&Scholes modeli ile regresyon sonucu elde edilen satış opsiyonu fiyatını hesaplayan P_L lineer regresyon modelinin sonuçlarını, sabit faiz oranı ve sabit volatilite değerleri için karşılaştıralım.

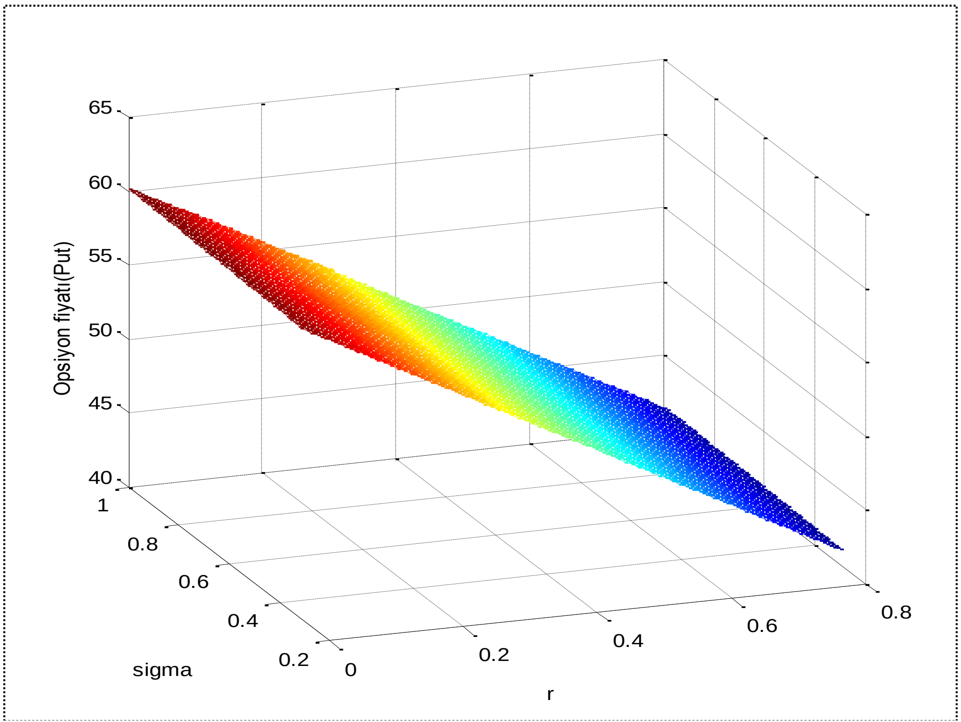
Bu amaçla, r=0.08, σ=0.3, E=100 TL ve T=0.25 yıl için artan hisse senedi fiyatlarına göre satış opsiyonu fiyatlarını, P_L ve $P_{B\&S}$ bağıntıları için inceleyelim.

Tablo 21. Artan hisse senedi fiyatlarına göre satış opsiyonu değerleri

Hisse Senedi Fiyatı (S)	$P_{B\&S} = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$	$P_L = c + \alpha r + \beta\sigma$
20 TL	78.0199 TL	78.0025 TL
40 TL	58.0199 TL	57.9015 TL
60 TL	38.0215 TL	37.6170 TL
80 TL	18.5570 TL	18.1002 TL
100 TL	4.9817 TL	5.1674 TL

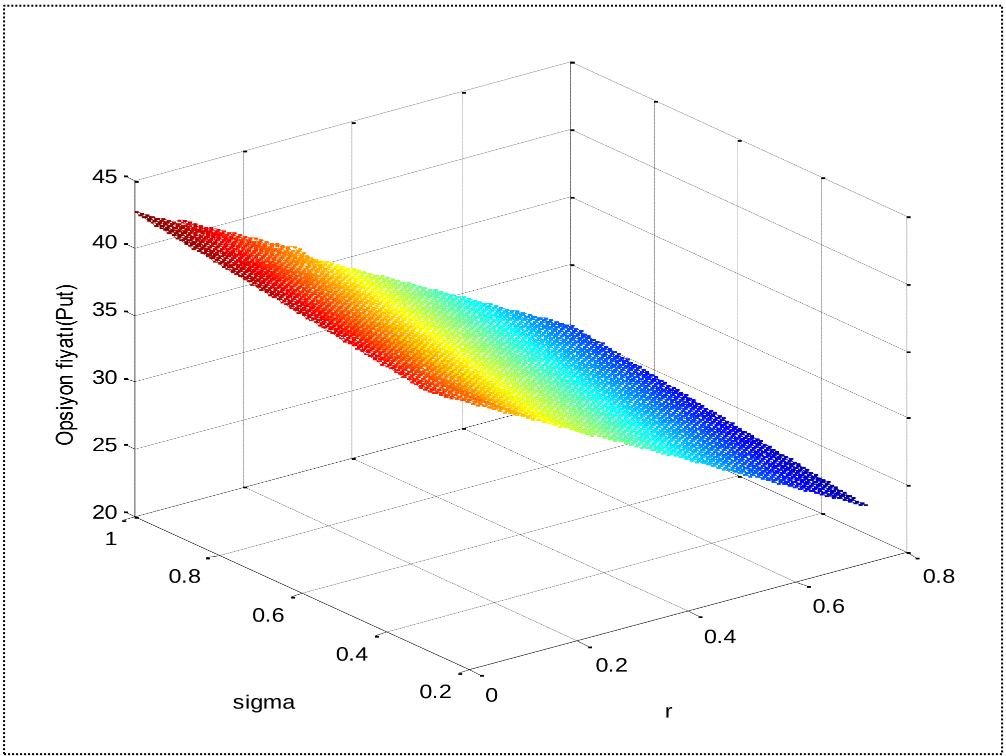
Tablo 21'de r=0.08, σ=0.3, E=100 TL ve T=0.25 yıl için artan hisse senedi fiyatlarına göre satış opsiyonu değerleri, $P_{B\&S}$ bağıntısına ve r=0.08:0.01:0.3 ile σ=0.3:0.01:1 için regresyon sonucunda elde edilen P_L bağıntısına göre ayrı ayrı hesaplanmıştır. Lineer bağıntı ile yapılan satış opsiyonlarının değerlerinin hesaplanması Tablo 20'deki her bir hisse senedi fiyatı için hesaplanan regresyon hataları ile yapılmıştır. Farklı iki bağıntıdan farklı hisse senedi fiyatları için elde edilen satış opsiyonlarının değerleri birbirlerine çok yakındır. Hisse senedi fiyatı arttıkça Black&Scholes modelinin gösterdiği satış opsiyonu değerindeki azalış eğilimi lineer regresyon bağıntısında da görülmektedir.

Şimdi artan hisse senedi fiyatları için Black&Scholes modelinden ve regresyon sonucu elde edilen P_L lineer regresyon bağıntısından çıkan sonuçların grafiklerini üst üste çizdirelim.



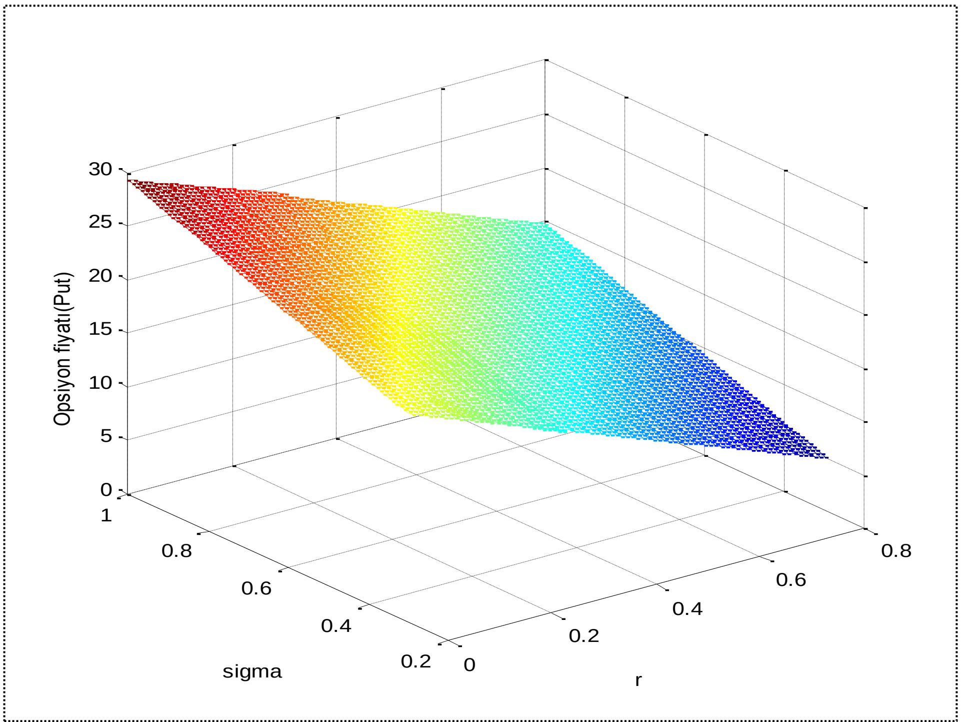
Şekil 28. S=40 TL'ye ait farklı iki bağıntı için üst üste çizdirilmiş grafikler

Şekil 28'de S=40 TL, E=100 TL , T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 için $P_{B\&S}$ ve P_L bağıntılarından elde edilen sonuçların grafikleri üst üste çizdirilmiştir. S=40 TL için P_L bağıntısının katsayıları c=59.6181, α=-23.4773, β=0.6344 dir. Görüldüğü gibi regresyon sonucu elde edilen $P_L = 59.6181 - 23.4773r + 0.6344\sigma$ lineer bağıntısından elde edilen sonuçlar 1,822584235422263e-26 regresyon hatası ile $P_{B\&S}$ bağıntısından elde edilen sonuçlarla aynıdır. Burada satış opsiyonunun en büyük değeri $P_{B\&S}$ bağıntısı için 58.4645 TL, P_L bağıntısı için 58.3743 TL dir. Şekil 28'de her iki bağıntı için faiz oranı arttıkça satış opsiyonunun değerinin azaldığı, volatilitenin değeri arttıkça satış opsiyonunun değerinin arttığı görülmektedir ve S=40 TL için satış opsiyonunun fiyatındaki değişim lineer olmaktadır.



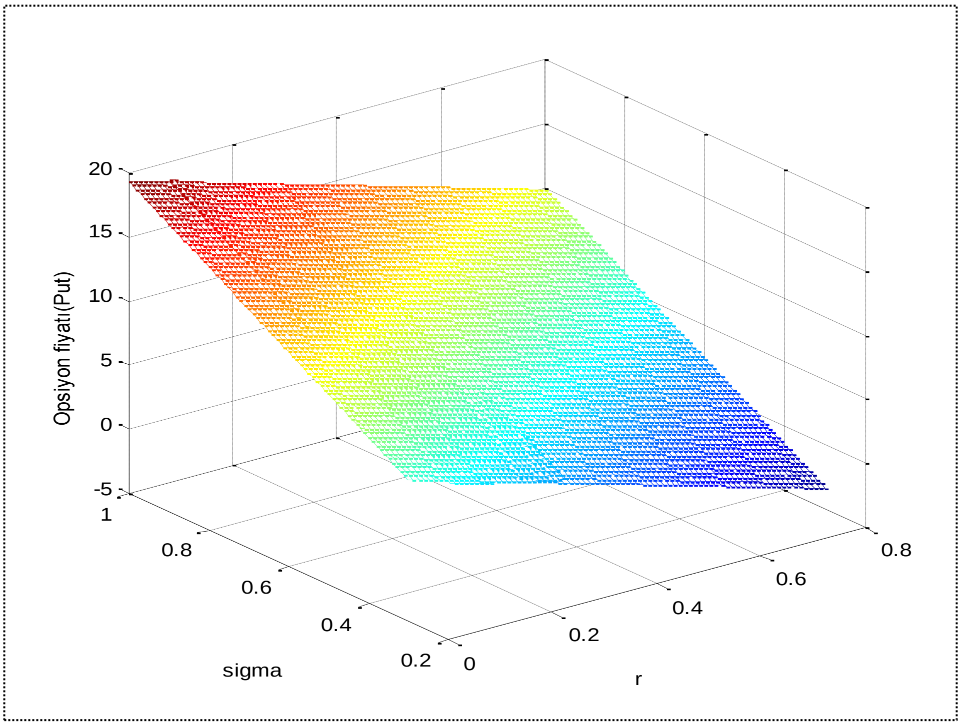
Şekil 29. S=60 TL'ye ait farklı iki bağıntı için üst üste çizdirilmiş grafikler

Şekil 29'da S=60 TL, E=100 TL , T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 için $P_{B\&S}$ ve P_L bağıntılarından elde edilen sonuçların grafikleri üst üste çizdirilmiştir. S=60 TL için P_L bağıntısının katsayıları c=37.9035, α=-21.5717, β=4.7975 dir. Görüldüğü gibi regresyon sonucu elde edilen $P_L = 37.9035 - 21.5717r + 4.7975\sigma$ lineer regresyon bağıntısından elde edilen sonuçlar 2,01948391736579e-26 regresyon hatası ile $P_{B\&S}$ bağıntısından elde edilen sonuçlarla aynıdır. Burada satış opsiyonunun en büyük değeri r=0.08, σ=1, E=100, T=0.25 olmak üzere $P_{B\&S}$ bağıntısı için 41.2633 TL, P_L bağıntısı için 40.9753 TL dir. Faiz oranı arttıkça satış opsiyonunun değeri en büyük değerinden başlayarak azalmaktadır. Faiz oranının en büyük, volatilitenin en küçük olduğu değerde satış opsiyonunun değeri en küçüktür.



Şekil 30. S=80 TL'ye ait farklı iki bağıntı için üst üste çizdirilmiş grafikler

Şekil 30'da S=80 TL, E=100 TL , T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 için $P_{B\&S}$ ve P_L bağıntılarından elde edilen sonuçların grafikleri üst üste çizdirilmiştir. S=80 TL için P_L bağıntısının katsayıları c=15.3664, α=-18.3015, β=13.9932 dir. Görüldüğü gibi regresyon sonucu ortaya çıkan $P_L = 15.3664 - 18.3015r + 13.9932\sigma$ lineer regresyon bağıntısından elde edilen sonuçlar 3,03238131966957e-27 regresyon hatası ile $P_{B\&S}$ bağıntısından elde edilen sonuçlarla aynıdır. Burada satış opsiyonunun en büyük değeri r=0.08, σ=1,E=100, T=0.25 olmak üzere $P_{B\&S}$ bağıntısı için 27.9767 TL, P_L bağıntısı için 27.8935 TL dir. Şekil 30'da satış opsiyonunun değeri volatilite arttıkça artmış, faiz oranı arttıkça azalmıştır. Çünkü faizden elde edilen gelir opsiyondan daha değerli olmaya başlamıştır. Satış opsiyonunun en büyük değeri volatilitenin en büyük, faiz oranının en küçük olduğu değerdir. Satış opsiyonunun fiyatının en küçük olduğu değer ise volatilitenin en küçük, faiz oranının en büyük olduğu değerdir.



Şekil 31. S=100 TL'ye ait farklı iki bağıntı için üst üste çizdirilmiş grafikler

Şekil 31'de S=100 TL, E=100 TL , T=0.25 yıl, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 için $P_{B\&S}$ ve P_L bağıntılarından elde edilen sonuçların grafikleri üst üste çizdirilmiştir. S=100 TL için P_L bağıntısının katsayıları c=0.4269, α=-11.8267, β=18.9553 dir. Görüldüğü gibi regresyon sonucu ortaya çıkan $P_L = 0.4269 - 11.8267r + 18.9553\sigma$ lineer regresyon bağıntısından elde edilen sonuçlar 6,18466949693273e-28 regresyon hatası ile $P_{B\&S}$ bağıntısından elde edilen sonuçlarla aynıdır. Burada satış opsiyonunun en büyük değeri r=0.08, σ=1,E=100, T=0.25 olmak üzere $P_{B\&S}$ bağıntısı için 27.9767 TL, P_L bağıntısı için 27.8935 TL dir.

Sonuç olarak, artan hisse senedi fiyatları için regresyon sonucu elde edilen P_L bağıntısındaki volatilite ve faiz oranının katsayıları artmakta sabit c değeri ise azalmaktadır. Her bir hisse senedi fiyatı için hesaplanan regresyon hatası ile P_L bağıntısından elde edilen satış opsiyonu değerleri, $P_{B\&S}$ bağıntısından elde edilen satış opsiyonu değerleri ile uygundur.

7.14. Satış Opsiyonunun *Rho* ve *Vega* Katsayıları

Rho katsayısı: Risksiz faiz oranına göre değişim oranıdır. Opsiyonun fiyatındaki değişim miktarının, risksiz faiz oranlarındaki değişim miktarına oranını veren bir katsayıdır. Opsiyon fiyatının, faiz oranlarından etkilenme derecesi üzerine opsiyon yapılan ürüne ve opsiyonun vadesine göre değişmektedir[2].

$$\rho_p = \frac{\partial p}{\partial r} = TEe^{-rT}N(d_2) - TEe^{-rT}$$

satış opsiyonu r*ho* katsayısı elde edilir.

Vega katsayısı: Opsiyon fiyatındaki değişim miktarının, üzerine opsiyon yazılan ürünün fiyatındaki yıllık standart sapma miktarındaki değişime oranı olarak ifade edilmektedir. Başabaş'ta olan ürünün fiyatı, opsiyonun kullanım fiyatına eşit olan opsiyonlarda, maksimum değere ulaşmaktadır. *Vega* katsayısının değeri, opsiyon kârda veya zararda ise düşmektedir[2].

$$V_p = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\right)$$

satış opsiyonunun *vega* katsayısı elde edilir.

Amacımız örnek 7.2'de farklı hisse senedi fiyatları kullanarak Black&Scholes modelinin satış opsiyonu için *rho* ve *vega* katsayıları ile regresyon sonucu satış opsiyonu için elde edilen lineer regresyon bağıntısındaki *rho* ve *vega* katsayıları arsındaki ilişkiyi incelemektir.

Bu amaçla satış opsiyonu için *rho* ve *vega* katsayılarını bulalım. Örnek 7.2'de S=20 TL, E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 dir. Bu değerler için P_L lineer regresyon bağıntısının katsayıları, c=79.9015, α=-23.8387, β=0.0270 dir. Bu durumda satış opsiyonu değerini hesaplayan lineer regresyon bağıntısı,

$P_L = 79.9015 - 23.8387r + 0.0270\sigma$ elde edilir.

Tablo 22. Artan hisse senedi fiyatlarına göre *rho* katsayıları

Hiss Senedi Fiyatı	$P_L = c + \alpha r + \beta\sigma$ *Rho* Katsayısı (α)	$P_{B\&S} = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$ *Rho* katsayısı
20 TL	-23.8387	min(*Rho*)=-24.5050 max(*Rho*)=-23.1831
40 TL	-23.4773	min(*Rho*)=-24.5050 max(*Rho*)=-22.5756
60 TL	-21.5717	min(*Rho*)=-24.4950 max(*Rho*)=-20.1551
80 TL	-18.3015	min(*Rho*)=-22.6313 max(*Rho*)=-16.4110
100 TL	-11.8267	min(*Rho*)=-14.2905 max(*Rho*)=-7.7796

Tablo 22'de E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 ve artan hisse senedi fiyatları üzerine her iki bağıntı için *rho* katsayıları hesaplanmıştır. r ve σ değerleri aralık şeklinde alındığından dolayı Black&Scholes modeli için *rho* katsayıları minumum ve maksimum şeklinde verilmiştir. S=20 TL için P=79.9015-23.8387r+0.0270σ, S40 TL için P=59.6181-23.4773r+0.6344σ, S=60 TL için P=37.9035-21.5717r+4.7975σ, S=80 TL için P=15.3664-18.3015r+13.9932σ, S=100 TL için P=0.4269-11.8267 r+18.9553σ dir. Görüldüğü gibi satış opsiyonu değerini hesaplayan P_L lineer regresyon bağıntısının *rho* katsayıları artan hisse senedi fiyatları için Black&Scholes modelindeki min(*Rho*) ve max(*Rho*) değerlerinin arasında değer almaktadır. Dolayısı ile satış opsiyonu değerini hesaplayan P_L lineer bağıntısının *rho* katsayısını daha kolay hesaplayabiliriz. Yani faiz oranının satış opsiyonu değeri üzerine etkisini regresyon sonucunda elde edilen bağıntıdan daha kolay görebiliriz.

Tablo 23. Artan hisse senedi fiyatlarına göre *vega* katsayıları

Hisse Senedi Fiyatı	$P_L = c + \alpha r + \beta\sigma$ $Vega$ Katsayısı (β)	$P_{B\&S} = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$ $Vega$ Katsayısı
20 TL	0.0270	min($Vega$)=0 max($Vega$)=0.0751
40 TL	0.6344	min($Vega$)=0 max($Vega$)=2.8595
60 TL	4.7975	min($Vega$)=0.0722 max($Vega$)=9.8654
80 TL	13.9932	min($Vega$)=7.0403 max($Vega$)=15.9406
100 TL	18.9553	min($Vega$)=16.9077 max($Vega$)=199.5521

Tablo 23'te E=100 TL, T=3 ay, r=0.08:0.01:0.3, σ=0.3:0.01:1 ve artan hisse senedi fiyatları üzerine her iki bağıntı içinde *vega* katsayıları hesaplanmıştır. r ve σ değerleri aralık şeklinde alındığından dolayı Black&Scholes modeli için *vega* katsayıları minumum ve maksimum şeklinde verilmiştir. S=20 TL için P=79.9015-23.8387r+0.0270σ, S40 TL için P=59.6181-23.4773r+0.6344σ, S=60 TL için P=37.9035-21.5717r+4.7975σ, S=80 TL için P=15.3664-18.3015r+13.9932σ, S=100 TL için P=0.4269-11.8267 r+18.9553σ dir. Görüldüğü gibi satış opsiyonu fiyatını hesaplayan P_L lineer bağıntısının *vega* katsayıları artan hisse senedi fiyatları için Black&Scholes modelindeki min(*Vega*) ve max(*Vega*) değerlerinin arasında değer almaktadır. Dolayısı ile satış opsiyonu değerini hesaplayan P_L lineer regresyon bağıntısının *vega* katsayısını daha kolay hesaplayabiliriz. Yani volatilitenin satış opsiyonu değeri üzerine etkisini regresyon sonucunda elde edilen bağıntıdan daha kolay görebiliriz.

Sonuç olarak, satış opsiyonu değerini hesaplayan P_L lineer regresyon bağıntısının *rho* ve *vega* katsayıları, Black&Scholes modelindeki *rho* ve *vega* katsayıları arasında yer almaktadır. Dolyısıyla bulunan *rho* ve *vega* katsayıları regresyon sonucunda elde edilen P_L baağıntısı ile satış opsiyonunun değerini hesaplarken bize r ve σ nın satış opsiyonu değeri üzerine etkisini daha kolay gösterir. Black&Scholes modeline göre satış opsiyonu değerini hesaplayan bağıntı $P_{B\&S}$ bağıntısıdır. Burada volatilitenin satış opsiyonu değerine etkisini açıkça göremeyiz. Ancak lineer regresyon modeli P_L ile volatilitenin ve risksiz faiz oranının satış opsiyonu değerine etkisi çok daha açık biçimde görülür.

8. SONUÇLAR

- Alış opsiyonu fiyatının hisse senedi fiyatı, risksiz faiz oranı, volatilite ve vadeye kalan zaman ile pozitif ilişkili, uygulama fiyatı ile negatif ilişkili olduğu görüldü.
- Satış opsiyonu fiyatının uygulama fiyatı, volatilite ve vadeye kalan zaman ile pozitif ilişkili, hisse senedi fiyatı ve risksiz faiz oranı ile negatif ilişkili olduğu görüldü.
- Hisse senedi fiyatının uygulama fiyatından küçük olduğu durumlarda satış opsiyonu fiyatını hesaplayan lineer regresyon modeli elde edildi.
- Satış opsiyonu için elde edilen lineer regresyon modelindeki volatilite ve risksiz faiz oranının katsayılarının, artan hisse senedi fiyatlarına göre sürekli arttığı Matlab GUI yardımıyla gözlemlendi.
- Uygulama fiyatının komşuluğundaki hisse senedi fiyatları için alış opsiyonu fiyatını hesaplayan lineer regresyon modeli elde edildi.
- Alış opsiyonu için elde edilen lineer regresyon modelindeki volatilitenin katsayısının, artan hisse senedi fiyatları için uygulama fiyatına kadar arttığı, hisse senedi fiyatının uygulama fiyatını geçtikten sonra tekrar azaldığı, risksiz faiz oranı katsayısının, artan hisse senedi fiyatına göre sürekli arttığı Matlab GUI yardımıyla gözlemlendi.
- VOB eğitim seminerlerinde de kullanılabilecek kullanıcı etkileşimli VOBMETRE arayüzü Matlab GUI yardımıyla tasarlandı. Uygun başlangıç paremetrelerini kabul eden arayüz, opsiyonla ilgili hesaplamaları yapıp sonuçları ve grafiklerini arayüz üzerinde göstermektedir.

9. ÖNERİLER

Black&Scholes modeli zaman bağımlı volatilite ve faiz oranları için analiz edilebilir.

Yaptığımız çalışma Türkiye'de faaliyetine henüz yeni başlamış olan Vadeli İşlem Opsiyon Borsası'nın verileri ile karşılaştırılarak borsada işlem gören opsiyonların değerlerinin belirlenmesinde kullanılabilir.

Vadesinden önce uygulama gerektiren problemlerin serbest sınır şartlarının yeri önceden bilinmeyen bir sınırda uygulanmasını gerektirir. Uygun sayısal yaklaşımlar ile yöntem Amerikan opsiyonu için incelenebilir.

10. KAYNAKLAR

1. Akalın, O. İ., Hisse senedi Üzerine Opsiyon Sözleşmeleri ve Türkiye Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü, İstanbul, 2006.

2. Alpan, F., Örneklerle Futures Anlaşmalar ve Opsiyonlar, 1. Baskı, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 1999.

3. Beckers, S., Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability, Journal of Banking &Finance, 5,3 (1981) 363-381.

4. Dağlı, H., İngilizce – Türkçe Finans Sözlüğü, 2. Baskı, Alter Yayıncılık, Ankara, 2005.

5. Damador, G., Temel Ekonometri, Ümit ve Gülay Günlük Şenesen, 1. Baskı, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 1999.

6. Davis, M. H. A. ve Panas, V. G., European Option Pricing With Transactions Costs, Proceedings of the 30th IEEE Conference, Aralık 1991, Brighton, UK, Bildiriler Kitabı, 1299-1304.

7. Demir, S., Sonlu Fark Modellerinin Opsiyon Sözleşmelerinin Fiyatlandırılmasında Kullanımı ve Diğer Sayısal Modeller ile Ampirik Bir Karşılaştırma, Dokuz Eylül Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi, 4,1 (2003) 102-115.

8. Duan, J., The Garch Option Pricing Model, Mathematical Finance, 5 (1995) 13-32.

9. Easley, D., O'Hara, M. ve Srinivas, P. S., Option Volume and Stock Prices, The Journal of Finance, 53,2 (1998) 431-465.

10. Galai, D. ve Masulis, R. W., The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock, Journal Of Financial Economics, 3,1-2 (1976) 53-81.

11. Geske, R., The Valuation Of Compound Options, Journal Of Financial Economics, 7,1 (1979) 63-81.

12. Gökçe, A. G., Opsiyon Değerlemenin Temelleri ve Temel Opsiyon Değerleme Modelleri ile Stokastik Değişkenliğin İMKB Hisse Senedi Piyasaları'nda Geçerliliklerinin Araştırılması, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 2001.

13. Johnson, H. ve Shanno, D., Option Pricing When the Variance is Changing, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22 (1987) 143-151.

14. Kemma, A. G. Z. ve Vorst, A. C. F., A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values, Journal of Banking &Finance, 14,1 (1990) 113-129.

15. Madan, D. B., Carr, P. P. ve Chang, E. C., The Variance Gamma Process and Option Pricing, Oxford Jounals, 2,1 (1998) 79-105.

16. Merton, R. C., Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous, Journal Of Financial Economics, 3,1-2 (1976) 125-144.

17. Önalan, Ö., Hisse senedi Fiyat Değişimlerinin Stokastik Süreç Olarak Analizi, Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 1996.

18. Önalan, Ö., Finans Mühendisliğinde Matematiksel Modelleme, 1. Baskı, Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 2004.

19. Polat, R., A Comparative Study of Black&Scholes Equation, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 10,1 (2009) 135-140.

20. Scott, L. O., Option Pricing When the Variance Changes Randomly, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22 (1987) 419-438.

21. Şentürk, H., An Empirical Comparison Of Interest Rate For Pricing Zero Coupon Bond Options, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2008.

22. Tural, Ö., Riskten Korunmada Opsiyon Sözleşmeleri Fiyatlandırma Modeli Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü, İstanbul, 2008.

23. Turnbull, S. M. ve Wakeman, L. M., A Quick Algorithmfor Pricing European Average Options, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26 (1991) 377-389.

24. Türker, E. ve Can, E., Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, 1. Baskı, Değişim Yayınları, Adapazarı, 1997.

25. Wilmot, P., Howıson, S. ve Dewynne, J., The Mathematics Of Financial Derivatives, New York, 1995.

26. www.vob.org.tr/Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsası. 15 Ekim 2009.

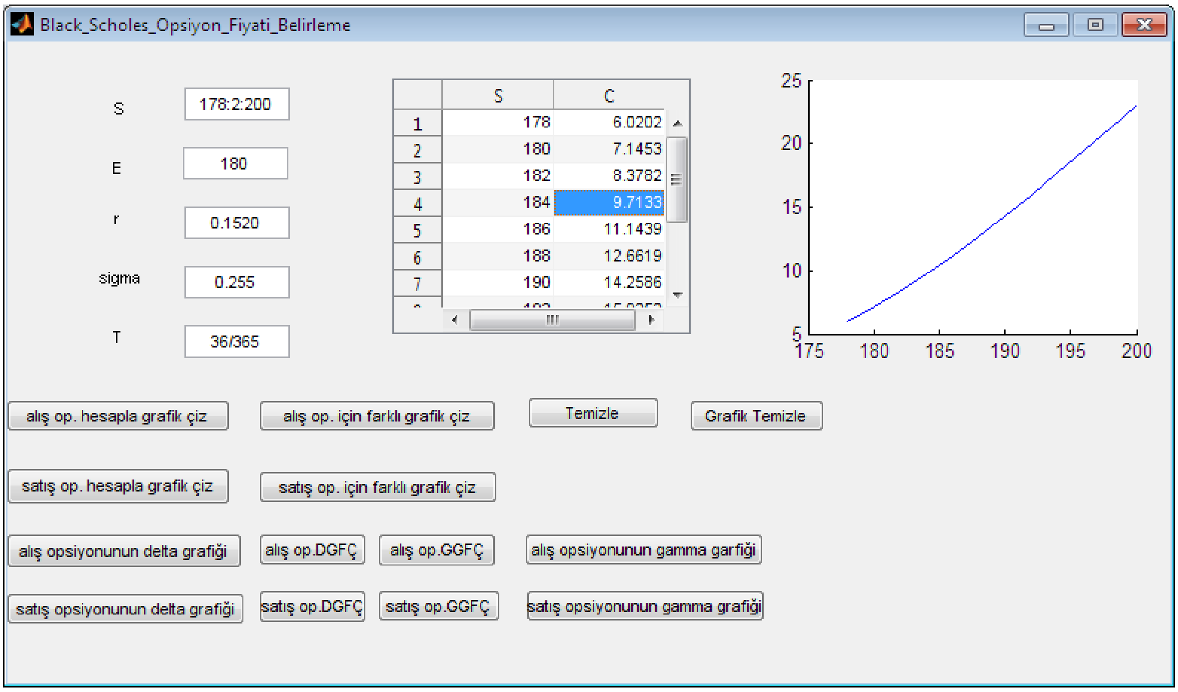
27. Yıldırak, K., Çalışkan, N. ve Çetinkaya, Ş., Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri, 1. Baskı, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2008.

11. EK

Matlab GUI Arayüzü

Bu tez çalışmasında belirtilen hesaplamaları etkin bir biçimde yürütebilmek için kullanıcı etkileşimli Matlab Grafik Kullanıcı Arayüzü(GUI) hazırlanmıştır. Matlab GUI etkin biçimde Black&Scholes modeli ve regresyon bağıntıları ile istenilen değerlerin hesaplanmasını sağlamaktadır.

Örnek arayüz aşağıdaki gibidir,



Ek Şekil 1. Matlab Grafik Kullanıcı Arayüzü

Ek Şekil 1'deki Matlab GUI aracılığı ile kullanıcı etkileşimli olarak alış opsiyonunun değeri, alış opsiyonunun delta değeri, alış opsiyonunun gamma değeri, alış opsiyonu *rho* ve *vega* katsayıları, satış opsiyonunun değeri, satış opsiyonunun delta değeri, satış opsiyonunun gamma değeri, satış opsiyonu *rho* ve *vega* katsayıları hesaplanabilmekte ve hesaplanan her değer için garafik çizdirilebilmektedir.

Değişen faiz oranı ve değişen volatilite değerleri için B&S modelindeki diğer parametrelere göre alış ve satış opsiyonunun değerleri hesaplanabilmekte ve üç boyutlu grafikleri çizdirilebilmektedir.

Lineer regresyon bağıntılarının istenilen değerleri için hesaplaması yapılabilmekte ve hesaplamaların üç boyutlu grafikleri çizdirilebilmektedir. Lineer regeresyon modeli için çizdirilen grafikler B&S modelindeki grafikler ile üst üste çizdirilebilmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Devran YAZIR, 21.04.1982 yılında Yozgat'ın Sorgun ilçesinde doğdu. İlköğretimini Kodallı Çiftliği Köyü İlkokulunda ve Sorgun Lisesinde, orta öğretimini Hasanoğlan Atatürk Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 2000 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2005 yılında bitirdi. 2006 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2005-2006 yılları arasında Beşikdüzü Final Dershanesinde, 2006-2007 yılları arasında Akçaabat Final Dershanesinde matematik öğretmenliği yaptı. 2009-2010 yılları arasında askerlik görevini tamamladı. Devran YAZIR orta derecede İngilizce bilmektedir.