KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BELİRSİZLİK ALTINDA SÜREKLİ DAĞILIMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sercan TURHAN

EYLÜL 2010
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BELİRSİZLİK ALTINDA SÜREKLİ DAĞILIMLAR

Sercan TURHAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" Yüksek Lisans (Matematik) "
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16.08.2010
Tezin Savunma Tarihi : 17.09.2010

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN T. Kesemen
Jüri Üyesi : Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2010

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde konunun belirlenmesi, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesinde değerli bilgilerini ve kaynaklarını benimle paylaşan danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN' e; yardımlarını esirgemeyen İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü öğretim üyeleri Yrd. Doç. Dr. Orhan KESEMEN' e, Yrd. Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ' a ve Doç. Dr. Rovshan ALİYEV' e saygılarımı sunar emekleri için teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim ve öğretim hayatım boyunca madi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Sercan TURHAN
Trabzon 2010

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde sürekli dağılımlar olan düzgün, normal, üstel, gamma ve pareto dağılımları bulanık sayılar yardımıyla bulanık dağılımlar haline getirilmiş bulanık olasılıkları, beklenen değerleri ve varyansları formülize edilip örneklerle desteklenmiştir.

Birinci bölümde bulanık mantık hakkında genel bilgilerden sonra üyelik fonksiyonu çeşitleri verilip, son olarak bulanık küme ve bulanık küme üzerinde işlemler ve tez içerisinde kullanılacak bulanık sayılara yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise genel anlamda olasılık hakkında bilgi verilip, bir olayın olasılığı ve biraz daha geliştirilerek bulanık olayın bulanık olasılığı hakkında formüller elde edilmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

Üçüncü bölümde ise sürekli dağılımlar olan düzgün dağılım, normal dağılım, üstel dağılım, gamma dağılımı ve pareto dağılımı paremetrelerin bulanıklaştırılması yöntemiyle bulanık dağılımlar haline getirilmiş, elde edilen bulanık dağılımlar yardımıyla bulanık olasılıkları, bulanık beklenen değerleri ve bulanık varyanslarının formülleri verilmiş örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık mantık, üyelik fonksiyonu, bulanık kümeler, bulanık sayılar, bulanık olasılık, sürekli bulanık dağılımlar.

SUMMARY

The Continuous Distributions Under Uncertainty

In this thesis, normal, exponential, gamma and pareto distributions were transformed into fuzzy distributions by means of fuzzy numbers also fuzzy probabilities, expected values and variances as well were formulized being supported with examples.

In the first chapter a general information about fuzzy logic was given. Fuzzy group and the operations on fuzzy groups and the fuzzy numbers to be used in this thesis were introduced while the membership function was being examined.

In the second chapter the probability was described in general terms.Supported with examples, the probability of a fuzzy event A and the formulas in relation to the fuzzy probability of the fuzzy event were obtained later.

As for the third chapter, uniform ,normal, exponential, gamma and pareto distributions which are continuous distributions were transformed into fuzzy distributions by means of the fuzzification method and fuzzy probabilities, expected fuzzy values and formulas of fuzzy variances were given by means of obtained fuzzy distributions as well , being supported with examples.

Key Words: Fuzzy Logic, membership function, fuzzy sets, fuzzy numbers, fuzzy probability, continuous fuzzy distributions.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\widetilde{A}$: Bulanık Küme

$\widetilde{P}[a, b]$: $[a, b]$ aralığındaki bulanık olasılık

$\tilde{\mu}$: Bulanık beklenen değer

$\widetilde{\sigma}^2$: Bulanık varyans

$\mu_{\widetilde{A}}$: $\widetilde{A}$ kümesinin üyelik fonksiyonu

$\overline{\widetilde{A}}$: $\widetilde{A}$ kümesinin bulanık tümleyeni

$m([a, b]) = b - a$: Aralığın uç noktaları arasındaki fark

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bulanık mantık ve bulanık küme kavramlarının tanımları verilecek, bulanık mantıkta temel oluşturacak kümeler üzerinde işlemler hakkında bilgiler verilerek uygulamalarla desteklenecektir.

1.1. Giriş

Bulanık Mantık, 1965 yılında California Üniversitesi'nden Lotfi A. Zadeh tarafından bulanık küme teorisinin geliştirmesiyle ortaya çıkmıştır. Bulanık küme kavramı, Zadeh' in klasik sistem kuramının gerçek dünyadaki gereksinimleri karşılamadığını fark etmesiyle, özellikle insanları içeren kısmen karmaşık sistemlerle uğraşırken klasik sistemlerin yetersiz kaldığını görmüştür ve bulanık mantık kavramını ortaya atmıştır. Zadeh, niteliklerin ikili üyelik fonksiyonu ile ifade edildiği klasik kümeler yerine, üyeliklerin derecelerle ifade edildiği ve her bir üyenin özelliğine göre üyelik fonksiyonu yardımıyla derecelendirme yapılabilen bulanık kümeler tanımlamasını ifade etmiştir.

Bulanık mantık, klasik mantığın üst kümesidir. Bu mantık, kesin doğru yada kesin yanlış değerleriyle sınırlandıran kesin mantığın çözemediği matematiksel problemleri çözmek için geliştirildi. Bulanık mantık klasik sistemi tamamı ile bir kenara atmamış ikili üyelik derecesine sahip üyelik fonksiyonlarını genişleterek günlük hayatta karşılaşılan tüm olaylara derecelendirme yöntemiyle bir üyelik fonksiyonu atamak mantığına dayandırılmıştır.

Bulanık mantığa bir örnek vermek gerekirse; Elinizdeki elmanın bir kısmını ısırın ve şu soruyu sorun; " Elimdeki nedir? " yanıt " Elma " olacaktır. Bir parça daha alın ve yine aynı soruyu sorun. Yanıtınız belki yine " Elma " olacaktır ama içinizden bu yanıtı biraz daha açmak geçecektir,

örneğin,“ Birazı yenmiş bir elma ” gibi. Isırmaya ve soruyu sormaya devam edin. Öyle bir an gelecektir ki, elinizde tuttuğunuz, her neye benziyor ise, artık sadece “ Elma ” sözcüğü ile açıklanamayacaktır. Yemeye devam edin. Sonunda elma yok olacak ve sorunun yanıtıda “Hiçbirşey” olacaktır. Şimdi sorunuzu değiştirin; “Elma ne zaman elma olmaktan çıktı?”. Bu soruya bir yanıt bulamayacaksınız!.. Soruda “ne zaman” sözcüğü içerisinde bir kesinlik taşımaktadır. Yani, yanıtın “5. Isırıktan sonra”, ya da “Elma yenmeye başladıktan 5 dakika sonra ” gibi, kesin bir şekilde ifadesi beklenmektedir. Bulanık mantık, “ Elmadan, elma değil” e geçişi bir derece meselesi olarak algılar, klasik mantık (Aristo mantığı) ise, kesin bir an ister. [7]

1.2. Bulanık Küme

Sözel anlamda tanım olarak bulanık küme değişik üyelik derecesine sahip öğeleri olan bir topluluktur.

Tanım 1.1: Genel anlamda $x \in X$ elemanlarından oluşan, X evrensel kümesi klasik bir kümedir. X’ in herhangi bir klasik alt kümesi A olmak üzere A’ nın karakteristik fonksiyonu (üyeliği) $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{1.1}$$

Böylece fonksiyon, evrensel kümenin elemanlarını 0 ve 1’ den oluşan bir kümeye çerçeveler.

Tanım 1.2: X bir evrensel küme olsun. $\widetilde{A}$, X’ in bulanık bir alt kümesi olmak üzere

$$\mu_{\widetilde{A}}(x): X \to [0,1] \tag{1.2}$$

üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. Klasik kümenin üyelik fonksiyonu ile karşılaştırıldığında tek fark bulanık kümenin üyelik fonksiyonunun değer kümesi [0,1] kapalı aralığı olmasıdır. $\forall x \in \widetilde{A}$ için x üyeliğinin derecesi $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ ile ifade edilir.

Tanım 1.3: X bir evrensel küme olsun. $A \subset X$ olmak üzere, A kümesi, elemanlarının üyelik derecelerini $[0,1]$ kapalı aralığına resmeden üyelik fonksiyonuna sahipse A kümesine bulanık küme denir ve $\widetilde{A}$ şeklinde gösterilir.

Genel anlamda

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) | x \in X\} \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilir.

İki farklı bulanık küme vardır:

1) Kesikli Bulanık Küme[2, 4, 10]: $\widetilde{A} \subset X$ bir bulanık küme olsun. Sadece sınırlı sayıda $x \in X$ elemanlarından oluşan $\widetilde{A}$ bulanık kümesine kesikli bulanık küme denir. Örneğin;

$0 \neq x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ elemanları için $\widetilde{A}$ bulanık kümesi

$$\widetilde{A} = \frac{\mu_1}{x_1} + \frac{\mu_2}{x_2} + \dots + \frac{\mu_n}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{A}}(x_i)/x_i \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilir. Burada μ_i değerlerine üyelik değeri denir ve $\mu_{\widetilde{A}}(x_i) = \mu_i$ dir.

2) Sürekli Bulanık Küme[2, 4, 10]: X evrensel kümesi sınırlı değilse $\widetilde{A}$ bulanık kümesi sürekli küme olarak adlandırılır ve

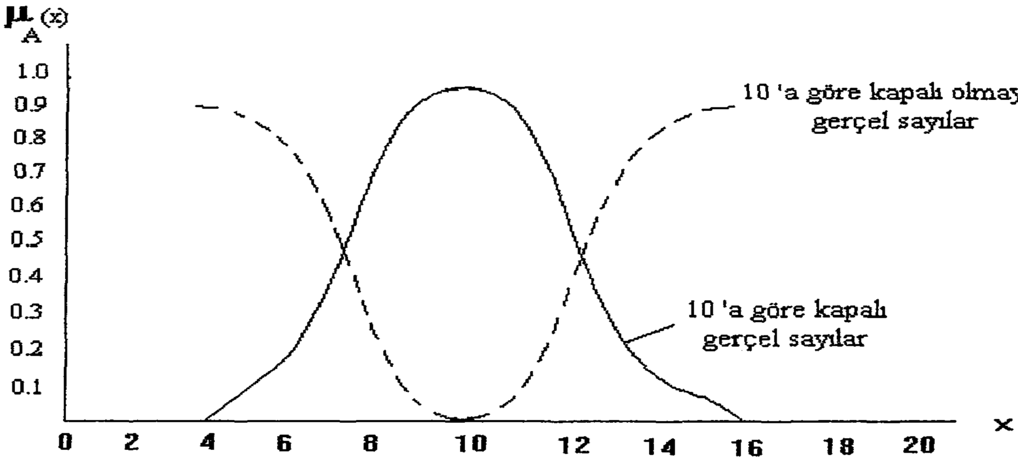
$$\widetilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x} \tag{1.5}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 1.1[**4, 19**]: X={Pozitif gerçel sayılar} sonsuz kümesi olsun. $\widetilde{A}$ = {10 sayısının etrafında toplanan (10' a göre kapalı) gerçel sayılar} bulanık kümesi olsun.

$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1/\{1 + [1/5(x - 10)]^2\}$

üyelik fonksiyonu yardımıyla $\widetilde{A} = \{x, \mu_{\widetilde{A}}(x)\}$ şeklinde tanımlanabilir. (1.5) ifadesine göre $\widetilde{A} = \int_R \mu_{\widetilde{A}}(x)/x$ şeklinde yazılabilmektedir. Şekil 1.1 ile gösterilmektedir.



Şekil 1.1. Sürekli bulanık küme için üyelik fonksiyonu grafiği

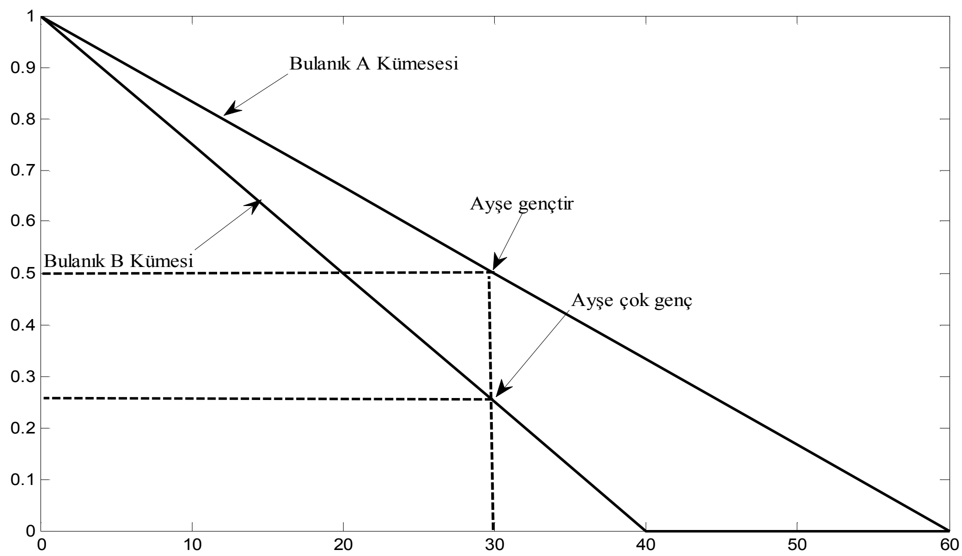
Örnek 1.2:

$\widetilde{A}$={Ayşe gençtir}. Bu sözel bir ifadedir. Bu ifadede genç sözü belirsizdir. Bu belirsizliği ifade etmek için üyelik fonksiyonu kullanılır. Bu üyelik fonksiyonunun [0,60] arasında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

$\widetilde{B}$= {Ayşe çok gençtir}

$\mu_{\widetilde{A}}(30) = 0.5$

$\mu_{\widetilde{B}}(30) = 0.25$



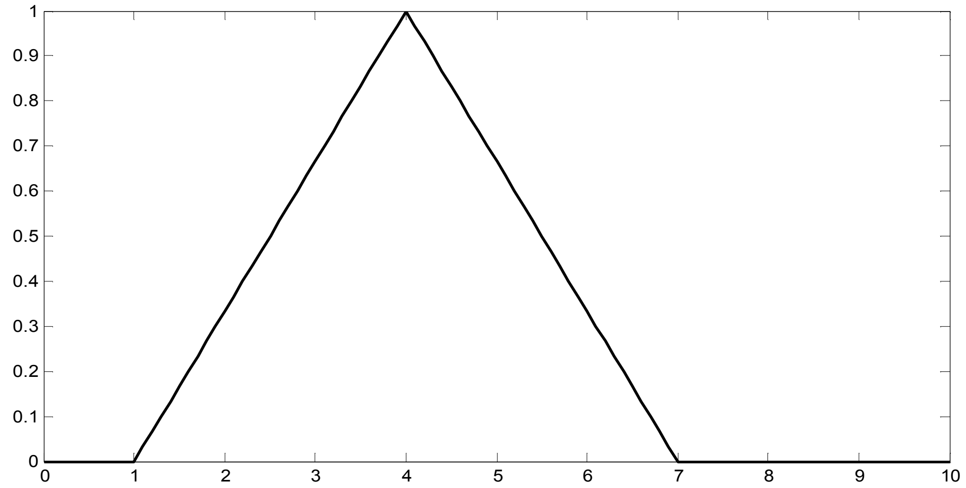
Şekil 1.2. Bulanık $\widetilde{A}$ ile bulanık $\widetilde{B}$ kümelerinin karşılaştırılması

1.3. Üyelik Fonksiyonu Çeşitleri

1.3.1. Üçgen Üyelik Fonksiyonu

Üçgen üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3 olarak üç parametre ile tanımlanır. O halde matematiksel olarak ifade etmek istenirse:

$$\mu_A(x) = \begin{Bmatrix} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & x < a_1; x > a_3 \end{Bmatrix}$$

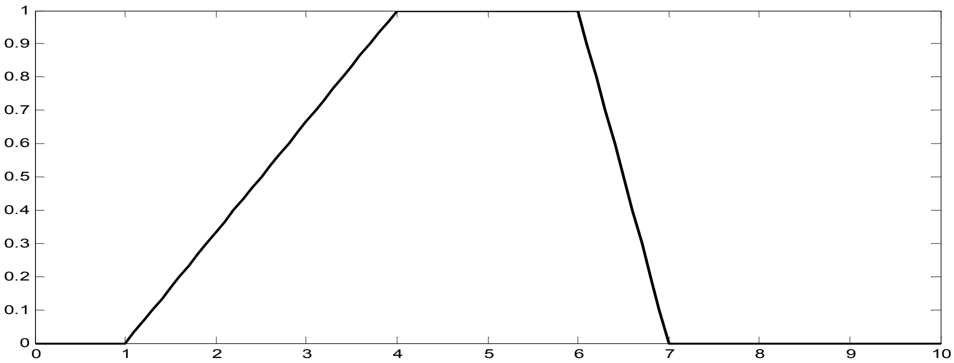


Şekil 1.3. $P = (1/4/7)$ üçgen üyelik fonksiyonu grafiği

1.3.2. Yamuk Üyelik Fonksiyonu

Yamuk üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3, a_4 dört parametre ile tanımlanır. O halde matematiksel olarak ifade etmek istenirse:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}\right) & a_1 \le x \le a_2 \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ \left(\dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}\right) & a_3 \le x \le a_4 \\ 0 & x < a_1 ; x > a_4 \end{cases}$$

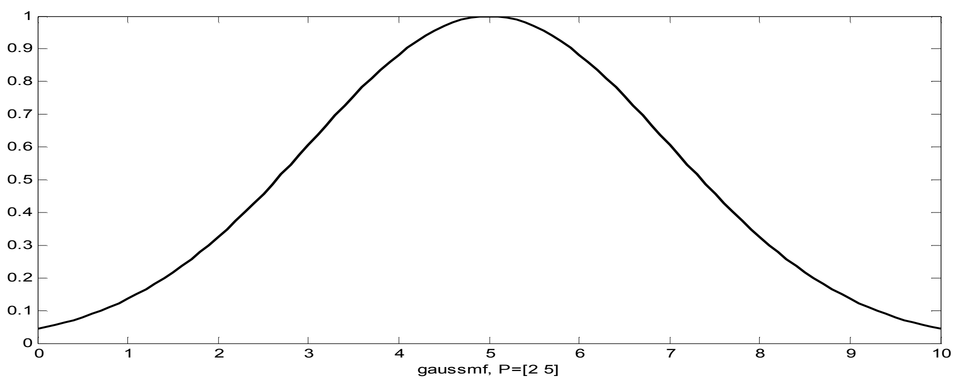


Şekil 1.4. $Q = (1/4, 6/7)$ yamuk üyelik fonksiyonu grafiği

1.3.3. Gaussian Üyelik Fonksiyonu

μ ve σ^2 paremetreli gaussian üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.6}$$

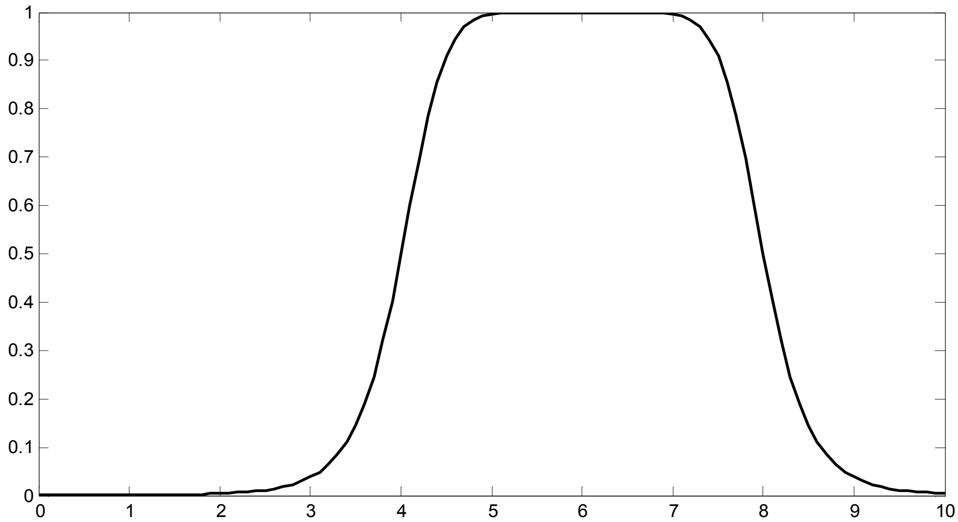


Şekil 1.5. Gaussian üyelik fonksiyonu

1.3.4. Çan Eğrisi Üyelik Fonksiyonu

Çan eğrisi üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3 üç parametre ile tanımlanır. Matematiksel olarak ifade etmek istenirse:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{\left(1 + \left|\frac{(x - a_3)}{a_1}\right|^{2a_2}\right)} \tag{1.7}$$

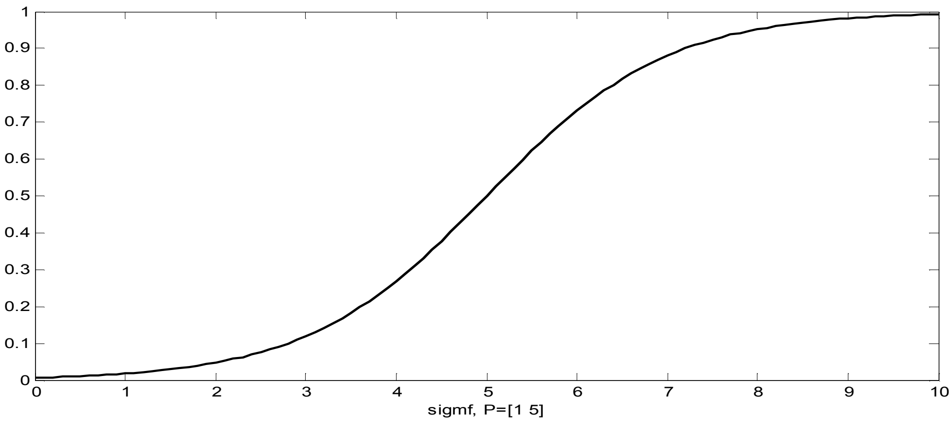


Şekil 1.6. Çan eğrisi üyelik fonksiyonu grafiği

1.3.5. Sigmoidal Üyelik Fonksiyonu

Sigmoidal eğrisi üyelik fonksiyonu a_1, a_2 parametreleri ile tanımlanır. Matematiksel olarak ifade etmek istenirse:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{(1 + e^{-a_1(x - a_2)})} \tag{1.8}$$

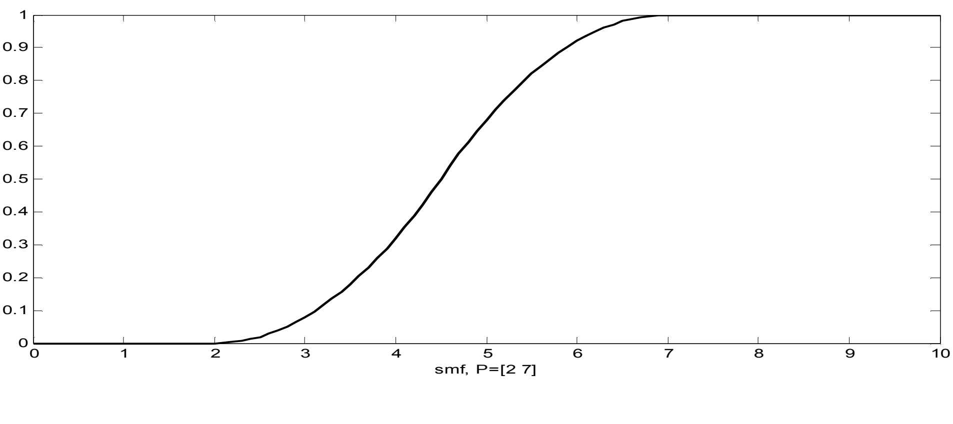


Şekil 1.7. Sigmodial üyelik fonksiyonu

1.3.6. S Şekilli Üyelik Fonksiyonu

S üyelik fonksiyonu a_1, a_2 parametreleri ile tanımlanır. Matematiksel olarak ifade etmek istenirse:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le a_1 \\ 2.\left(\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^2 & a_1 \le x \le \dfrac{a_1+a_2}{2} \\ 1-2.\left(\dfrac{x-a_2}{a_2-a_1}\right)^2 & \dfrac{a_1+a_2}{2} \le x \le a_2 \\ 1 & x \ge a_2 \end{cases}$$



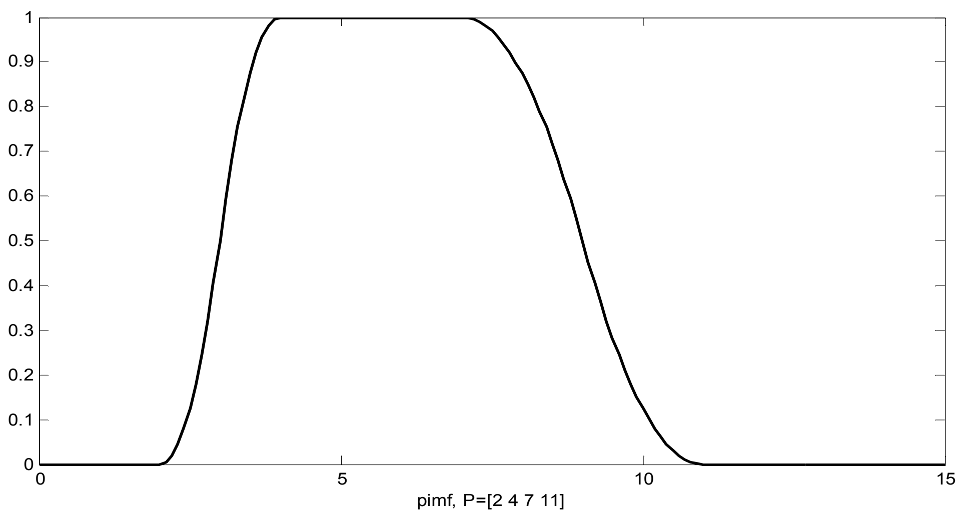
Şekil 1.8. Parametreleri $a_1 = 2$ ve $a_2 = 7$ olan S şekli üyelik fonksiyonu grafiği

1.3.7. Π Şekilli Üyelik Fonksiyonu

Π şekilli üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3, a_4 parametreleri ile tanımlanır. Matematiksel olarak ifade edilirse:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le a_1 ; x \ge a_4 \\ 2\left(\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^2 & a_1 \le x \le \dfrac{a_1+a_2}{2} \\ 1-2\left(\dfrac{x-a_2}{a_2-a_1}\right)^2 & \dfrac{a_1+a_2}{2} \le x \le a_2 \\ 1 & a_2 \le x \le a_3 \\ 1-2\left(\dfrac{x-a_3}{a_4-a_3}\right)^2 & a_3 \le x \le \dfrac{a_3+a_4}{2} \\ 2\left(\dfrac{x-a_4}{a_4-a_3}\right)^2 & \dfrac{a_3+a_4}{2} \le x \le a_4 \end{cases} \tag{1.9}$$

Örnek 1.3: Parametreleri $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 11$ olan π şekilli üyelik fonksiyonu Matlab programı ile çizilmiştir.



Şekil 1.9. Π şekilli üyelik fonksiyonu grafiği

1.3.8. Üyelik Fonksiyonu Kısımları

Tanım 1.4[**4, 19**]**:** Bir $\widetilde{A}$ bulanık kümesi, ancak ve ancak bir veya daha çok x değeri için $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$ ise normaldir. Yani $\mu_{\widetilde{A}}(x)$' in en büyük değeri 1' e eşitse $\widetilde{A}$ bir normal bulanık kümedir.

Tanım 1.5[**4**]**:** Bir bulanık kümenin konveksliği uygulama yönünden oldukça önemli bir özelliktir. $x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için eğer

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\right) \tag{1.10}$$

ise $\widetilde{A}$ bulanık kümesi konvekstir. Bu tezdeki tüm bölümlerde bütün bulanık kümeler konveks olacaktır.

Tanım 1.6[2]: Bir bulanık kümede üyelik derecesi 1' e eşit olan elemanlara " Öz Eleman " denir.

$\exists x \;,\; \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$

Örneğin; yamuk üyelik fonksiyonunun parametreleri a_1, a_2, a_3, a_4 olmak üzere yamuk üyelik fonksiyonunda a_2, a_3 arasında bulunan x' ler özalt küme oluşturuyor.

Tanım 1.7[**19**]**:** $\widetilde{A} \subset X$ bulanık kümesinin üyelik derecesi sıfırdan büyük olan elemanlarından oluşan kümeye $\left(\widetilde{A},\ \mu(x)\right)$ kümesinin dayanak kümesi denir ve

$$\mathrm{Supp}\left(\widetilde{A}\right) = \left\{x \in \widetilde{A} \middle| \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0 \textit{ ve } x \in X\right\} \tag{1.11}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.8[**2, 19**]**:** $\left\{x \in \widetilde{A} \middle| \mu_A(x) = 1\right\}$ kümesine $\left(\widetilde{A},\ \mu(x)\right)$ kümesinin çekirdeği denir.

Tanım 1.9[**2**]**:** Üyelik dereceleri 0 veya 1' e eşit olmayan x' lerin oluşturduğu kısımlara geçiş bölgeleri denir.

Tanım 1.10[**2**]**:** Bir bulanık kümenin üyelik fonksiyonu belirli bir $x = c$' ye göre simetrik ise yani

$$\forall x \in X \text{ için } \mu_{\widetilde{A}}(x + c) = \mu_{\widetilde{A}}(x - c) \tag{1.12}$$

ise buna simetrik bulanık küme denir. Örneğin; simetrik üçgen üyelik fonksiyonu $\mathrm{x} = \mathrm{a}$'ya göre simetriktir.

Örnek 1.4[15]: İnsanların yaşlarından oluşan bir evrensel küme tanımlayalım.

$\mathrm{E} = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80\}$

Tablo 1.1 incelendiğinde:

Tablo 1.1. Bebek, Genç, Yetişkin, Yaşlı Yaş Tablosu

YAŞ	BEBEK	GENÇ	YETİŞKİN	YAŞLI
0	1,00	0,00	0,00	0,00
5	1,00	0,00	0,00	0,00
10	0,80	0,00	0,00	0,00
15	0,30	0,30	0,00	0,00
20	0,00	0,80	0,00	0,00
25	0,00	1,00	0,20	0,00
30	0,00	0,80	0,50	0,00
35	0,00	0,30	0,80	0,00
40	0,00	0,00	1,00	0,00
45	0,00	0,00	1,00	0,20
50	0,00	0,00	0,80	0,40
55	0,00	0,00	0,50	0,60
60	0,00	0,00	0,20	0,80
65	0,00	0,00	0,00	0,90
70	0,00	0,00	0,00	1,00
75	0,00	0,00	0,00	1,00
80	0,00	0,00	0,00	1,00

Genç kümesi “ $\widetilde{\mathrm{G}}$ ” ile gösterilsin.

Genç bulanık kümesinin dayanak kümesi yazılırsa:

$\mathrm{Supp}(\widetilde{\mathrm{G}}) = \{15, 20, 25, 30, 35\}$

Bebek kümesi “ $\widetilde{\mathrm{B}}$ ” ile gösterilirse:

$\mathrm{Supp}(\widetilde{\mathrm{B}}) = \{0, 5, 10, 15\}$

Bebek, Genç, Yetişkin, ve Yaşlı bulanık kümeleri normal kümelerdir. Çünkü üyelik dereceleri 1' e eşit olan en az bir tane eleman vardır.

1.4. α- Kesim Kümesi ve Bulanık Kümenin Büyüklüğü

1.4.1. α-Kesim Kümesi

Üyelik derecesi α' dan az olmayan üyelerden kurulmuş kümeye $\widetilde{A}$ kümesinin α-kesim kümesi denir. $\widetilde{A}_\alpha$ ile gösterilir ve

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\widetilde{A}} \geq \alpha\}\ ,\ \alpha \in [0,1] \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanır.

Not: $\widetilde{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\widetilde{A}} > \alpha\}\ ,\ \alpha \in [0,1]$ kümesine güçlü α kümesi denir. [19]

$\alpha = 0$ olduğunda $\widetilde{A}[0]$, $\widetilde{A}$ kümesinin temeli (base) olarak ifade edilir.

Örneğin; Genç kümesinin $\alpha = 0.4$ kesim kümesi belirlenmek istenirse ;

$\widetilde{G}_{0.4} = \{20, 25, 30\}$

Bebek kümesinin $\alpha = 0.3$ kesim kümesi belirlenmek istenirse;

$\widetilde{B}_{0.3} = \{0, 5, 10, 15\}$

Yetişkin kümesinin $\alpha = 0.2$ kesim kümesi belirlenmek istenirse;

$\widetilde{Y}_{0.2} = \{25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60\}$

Yaşlı kümesinin $\alpha = 0.6$ kesim kümesi belirlenmek istenirse;

$\left(\widetilde{YA}\right)_{0.6} = \{55, 60, 65, 70, 75, 80\}$

1.4.2. Bulanık Kümede Büyüklük Kavramı[10, 19]

Bulanık kümenin büyüklüğü üç farklı şekilde belirlenir:

1. Bulanık kümenin elemanlarının üyelik dereceleri toplanarak elde edilir.

$$|\widetilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x) \tag{1.14}$$

2. Evrensel küme ile bulanık kümenin büyüklüğünün oranı şeklinde elde edilir.

$$\|\widetilde{A}\| = \frac{|\widetilde{A}|}{|E|} \tag{1.15}$$

3. Bulanık kümenin α-kesiminin asallığının bulunması ile elde edilir.

$$\mu_{\widetilde{A}}\left(|\widetilde{A}|_{\infty}\right) = \alpha \tag{1.16}$$

Örnek 1.5: Tablo 1.1' deki verileri kullanarak Bebek, Genç, Yetişkin ve Yaşlı kümelerinin bulanıklık küme büyüklüklerini bulalım:

i. $|\text{Bebek}| = 1.00 + 1.00 + 0.80 + 0.30 = 3.10$

$|\text{Genç}| = 0.30 + 0.80 + 1.00 + 0.80 + 0.30 = 3.20$

$|\text{Yetişkin}| = 0.20 + 0.50 + 0.80 + 1.00 + 1.00 + 0.80 + 0.50 + 0.20 = 5.00$

$|\text{Yaşlı}| = 0.20 + 0.40 + 0.60 + 0.80 + 0.90 + 1.00 + 1.00 + 1.00 = 5.90$

ii. $\|\text{Bebek}\| = \frac{|\text{Bebek}|}{|E|} = \frac{3.10}{17} = 0.1823$

$\|\text{Genç}\| = \frac{|\text{Genç}|}{|E|} = \frac{3.20}{17} = 0.1882$

$\|\text{Yetişkin}\| = \frac{|\text{Yetişkin}|}{|E|} = \frac{5}{17} = 0.2941$

$\|\text{Yaşlı}\| = \frac{|\text{Yaşlı}|}{|E|} = \frac{5.90}{17} = 0.3470$

iii. $\alpha = 0.40$ için $\text{Bebek}_{0.40} = \{0, 5, 10\} \Rightarrow |\text{Bebek}_{0.40}| = 3$

$\alpha = 0.50$ için $\text{Genç}_{0.50} = \{20, 25, 30\} \Rightarrow |\text{Genç}_{0.50}| = 3$

$\alpha = 0.80$ için $\text{Yetişkin}_{0.80} = \{35, 40, 45, 50\} \Rightarrow |\text{Yetişkin}_{0.80}| = 4$

$\alpha = 0.90$ için $\text{Yaşlı}_{0.90} = \{65, 70, 75, 80\} \Rightarrow |\text{Yaşlı}_{0.90}| = 4$

1.5. Bulanık Küme Üzerinde İşlemleri

Bulanık kümelerde de klasik kümeler üzerinde yapılan işlemlerin bazıları yapılabilir.

1.5.1. Bulanık Alt Küme[10, 19]

$\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$ olsun. $\forall x \in E$ için $\mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x)$ oluyorsa bu durumda $\widetilde{A}$ bulanık kümesi $\widetilde{B}$ bulanık kümesinin alt kümesidir denir ve $\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ şeklinde gösterilir.

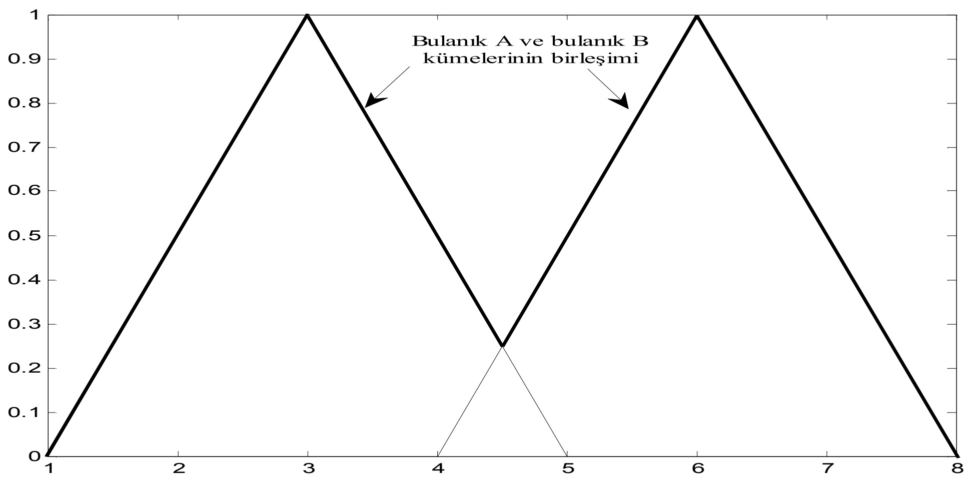
1.5.2. Eşit Bulanık Küme[10, 19]

$\forall x \in E$ için $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x)$ ise $\widetilde{A}$ bulanık kümesi $\widetilde{B}$ bulanık kümesine eşittir denir ve $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ şeklinde gösterilir.

1.5.3. Bulanık Kümelerin Birleşimi[10, 15, 19]

$\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$ iki bulanık küme olsun. $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümelerinin birleşimi de yine bir bulanık kümedir öyleki; $\mu_{\widetilde{A}}$ ve $\mu_{\widetilde{B}}$ üyelik fonksiyonları sırasıyla $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları olmak üzere $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümelerinin birleşiminin üyelik fonksiyonu üyelik fonksiyonlarının maksimumu olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\forall x \in E \text{ için } \mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\} \tag{1.17}$$

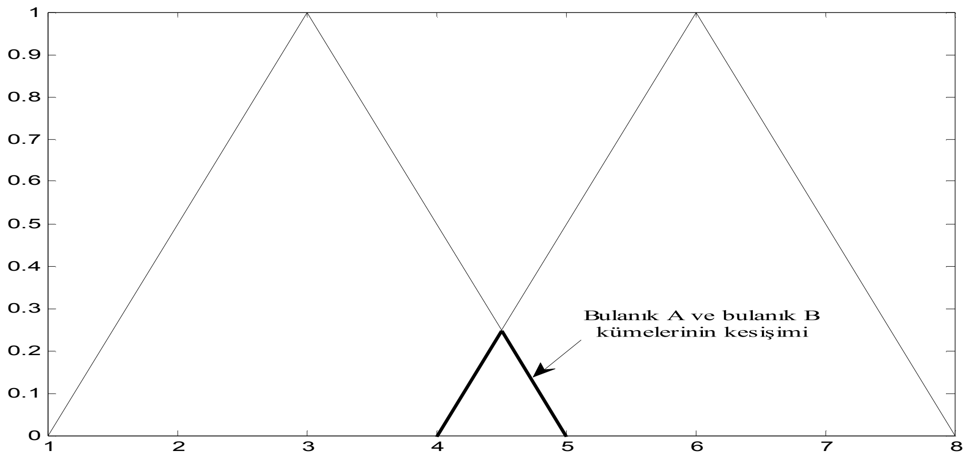


Şekil 1.10. $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ şeklindeki iki bulanık kümenin birleşimi

1.5.4. Bulanık Kesişim[10, 15, 19]

$\tilde{A}, \tilde{B} \subset E$ iki bulanık küme olsun. $\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}$ sırasıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kesişimlerinin üyelik fonksiyonu her bir kümenin üyelik fonksiyonlarının minimumu alınarak bulunur ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\forall x \in E \text{ için } \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \tag{1.18}$$



Şekil 1.11. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ şeklindeki iki bulanık kümenin kesişimi

1.5.5. Sınırlandırılmış Toplam[10, 15, 19]

$\tilde{A}, \tilde{B} \subset E$ iki bulanık küme olsun. $\tilde{A}, \tilde{B}$ bulanık kümelerinin sınırlandırılmış toplamı $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonu (1.19) ile verilmektedir.

$$\forall x \in E \text{ için } \mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\} \tag{1.19}$$

1.5.6. Sınırlandırılmış Çarpım[2, 5, 19]

$\tilde{A}, \tilde{B} \subset X$ iki bulanık küme olsun. $\tilde{A}, \tilde{B}$ bulanık kümelerinin sınırlandırılmış çarpımı $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonu (1.20) ile verilmektedir.

$$\forall\, x \in E \text{ için } \mu_{\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}}(x) = \max\{0;\ \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - 1\} \tag{1.20}$$

1.5.7. Olasılıkçı Çarpım[2, 5, 19]

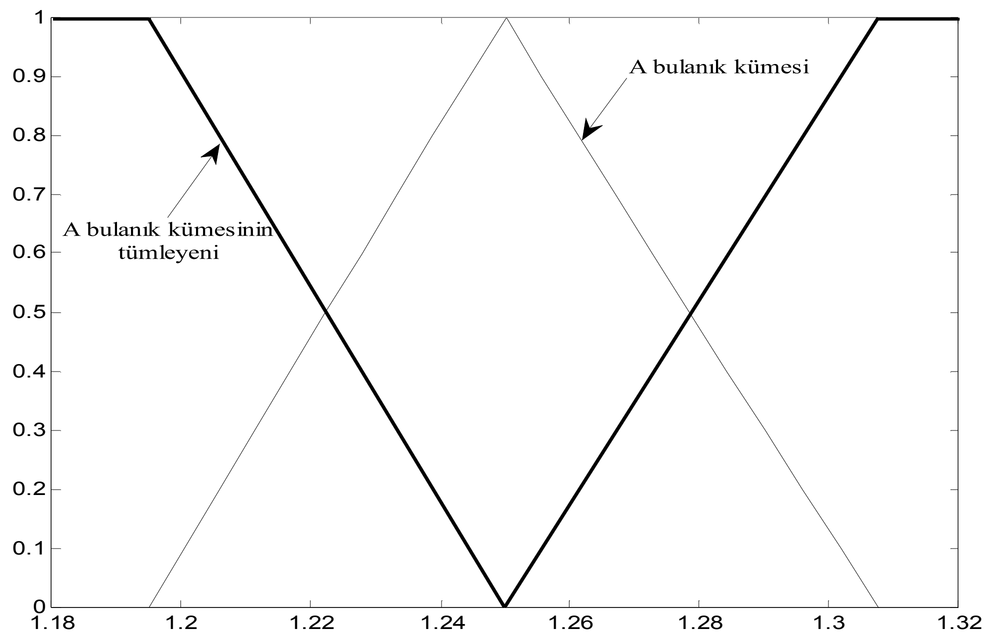
$\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset X$ iki bulanık küme olsun.$\widetilde{A}, \widetilde{B}$ bulanık kümelerinin çarpımı cebirsel çarpımdır ve ve üyelik fonksiyonu (1.21) ile verilmektedir.

$$\forall x \in E \text{ için } \mu_{\widetilde{A}\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x) \tag{1.21}$$

1.5.8. Bulanık Tümleme[10, 19]

$\widetilde{A} \subset X$ bulanık küme olsun. $\mu_{\widetilde{A}}$, $\widetilde{A}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu olmak üzere, $\widetilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeninin üyelik fonksiyonu o kümenin üyelik fonksiyonunun 1' den çıkarılmasıyla bulunur ve üyelik fonksiyonu $\mu_{\overline{\widetilde{A}}}$ şeklinde gösterilir.

$$\forall x \in E \text{ için } \mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x) \tag{1.22}$$



Şekil 1.12. $\overline{\widetilde{A}} = 1 - \widetilde{A}$ şeklindeki $\widetilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni

1.5.9. Bulanık Küme İçin Fark İşlemleri[10, 15, 19]

Bulanık kümelerde fark işlemleri iki türlü olur:

i. $\widetilde{A} \backslash \widetilde{B} = \widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{B}}$ (1.23)

$$\mu_{\widetilde{A} \cap \overline{\widetilde{B}}}(x) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x); 1 - \mu_{\widetilde{B}}(x)\} \quad (1.24)$$

ii. Sınırlanırılmış fark gösterimi: $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset X$ iki bulanık küme olmak üzere $\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}$ sınırlandırılmış farkı

$$\mu_{\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}} = \max\{0;\ \mu_{\widetilde{A}}(x) - \mu_{\widetilde{B}}(x)\} \quad (1.25)$$

Örnek 1.6: $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$ iki bulanık küme olsun.

E=$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

olmak üzere

A=$\{(x_1, 0.1), (x_2, 0.4), (x_3, 0.3), (x_4, 0.9)\}$

B=$\{(x_1, 0.2), (x_2, 0.6), (x_3, 0.1), (x_4, 1)\}$

ise

a) $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} =?$

b) $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} =?$

c) $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} =?$

d) $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B} =?$

e) $\overline{\widetilde{A}} =?$

f) $\overline{\widetilde{B}} =?$

Çözüm:

a) $\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}} = \max\{\mu_{\widetilde{A}}, \mu_{\widetilde{B}}\}$ olmak üzere

$\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.6), (x_3, 0.3), (x_4, 1)\}$

b) $\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}} = \min\{\mu_{\widetilde{A}}, \mu_{\widetilde{B}}\}$ olmak üzere

$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.4), (x_3, 0.1), (x_4, 0.9)\}$

c) $\mu_{\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}} = \min\{1, \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x)\}$ olmak üzere

$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = \{(x_1, 0.3), (x_2, 1), (x_3, 0.4), (x_4, 1)\}$

d) $\mu_{\tilde{A}\otimes\tilde{B}} = \max\{0, \mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}} - 1\}$ olmak üzere

$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), (x_4, 0.9)\}$

e) $\overline{\overline{A}} = \{(x_1, 0.9), (x_2, 0.6), (x_3, 0.7), (x_4, 0.1)\}$

f) $\overline{\overline{B}} = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.4), (x_3, 0.9), (x_4, 0)\}$

1.6. Bulanık Sayı ve Bulanık Aritmetik

Bulanık sayı kavramı matematikte bildiğimiz sayı kavramının genelleştirilmiş halidir. Bir bulanık sayı üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bir aralıktır. Daha geniş anlamda bir bulanık kümedir. Bulanık sayılar genelde dışbükey, normal, sınırlı, sürekli üyelik fonksiyonu olan ve gerçek sayılarda tanımlanmış bir bulanık kümedir. Bulanık kümeler üyelik fonksiyonuyla tanımlandığı gibi bulanık sayılarda kendi üyelik fonksiyonlarıyla verilirler. Bizim en çok üzerinde duracağımız bulanık sayılar üçgen ve yamuk bulanık sayılarıdır.

1.6.1. Üçgen Bulanık Sayı

$\tilde{N}$ bir üçgen bulanık sayı $a_1 < a_2 < a_3$ şartı olan üç sayı ile tanımlanır. Üçgen bulanık sayının merkezi a_2 ve dayanak noktaları $[a_1, a_3]$ şeklinde ifade edilir. Üçgen bulanık sayılar $\tilde{N} = (a_1/\, a_2/\, a_3)$ şeklinde gösterilir.[2]

Örnek 1.7[3]: $\tilde{N}$ üçgen bulanık sayı olmak üzere $\tilde{N} = (1.5\,/\,2\,/\,3.5)$ üçgen bulanık sayısını alalım. Şekil 1.13 ile üçgensel sayı ifade edilmiştir. Şekil 1.13' ten yararlanarak:

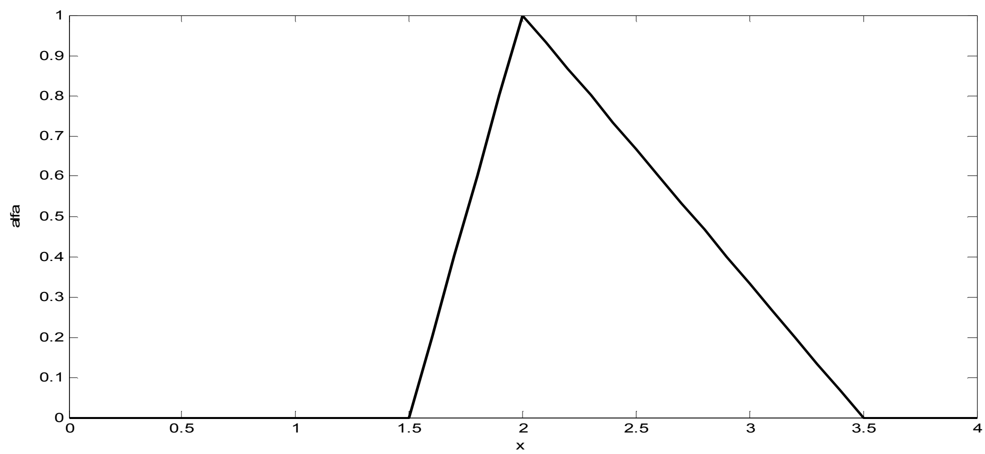
$\tilde{N}(1.75) = 0.5 \quad \tilde{N}(2) = 1 \quad \tilde{N}(2.8) = 0.3$

elde ederiz.

$\tilde{N}$ üçgen bulanık sayısını elde edebilmek için 2 önemli koşula ihtiyaç vardır:

a) $[1.5\,, 2]$ aralığında monoton şekilde artmalıdır. Şekil 1.13' te görüldüğü gibi sayı verilen aralıkta monoton artandır.

b) $[2\,, 3.5]$ aralığında monoton şekilde azalmalıdır. Şekil 1.13' te görüldüğü üzere sayı verilen aralıkta monoton azalandır.



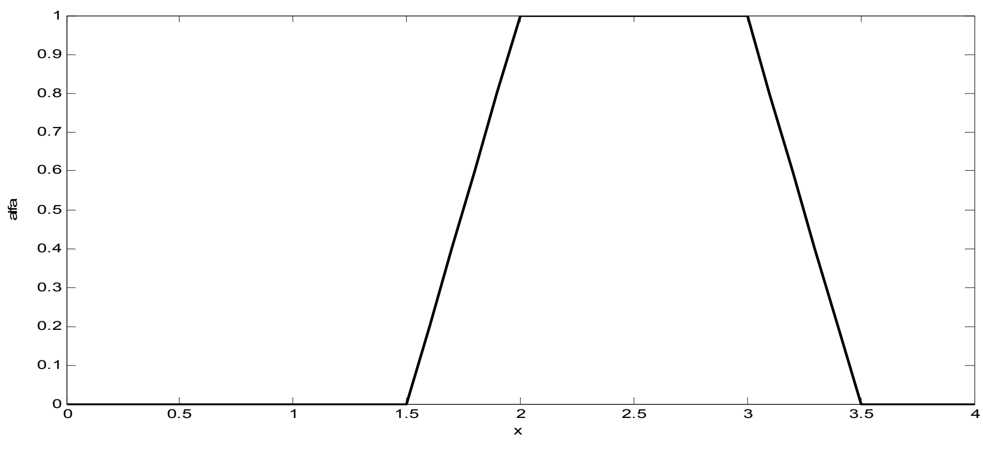
Şekil 1.13. $\widetilde{\mathrm{N}} = (1.5\ /\ 2\ /\ 3.5)$ üçgen bulanık sayı

1.6.2. Yamuk Bulanık Sayı

$\widetilde{\mathrm{M}}$ bir yamuk bulanık sayı $\mathrm{a}_1 < a_2 < \mathrm{a}_3 < \mathrm{a}_4$ dört parametre tarafından tanımlanır. Yamuk bulanık sayının tepesi $[\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3]$ (burada üyelik 1' e eşittir) ve bulanık sayının dayanağı ise $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_4]$ aralığıdır. Yamuk bulanık sayılar $\widetilde{\mathrm{M}} = (\mathrm{a}_1/\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3\ /\mathrm{a}_4)$ şeklinde gösterilir.[2]

Örnek 1.8[2]: $\widetilde{\mathrm{M}}$ bir yamuk bulanık sayı olmak üzere $\widetilde{\mathrm{M}} = [1.5\ /2,\ 3/3.5]$ olarak verilsin. Verilen $\widetilde{\mathrm{M}}$ yamuk bulanık sayısı Şekil 1.14' te verilmiştir. Şekil 1.14' e göre:

$\widetilde{\mathrm{M}}[2] = 1, \quad \widetilde{\mathrm{M}}[3] = 1 \quad , \quad \widetilde{\mathrm{M}}[1.9] = 0.9$



Şekil 1.14. $\widetilde{\mathrm{M}} = (1.5\ /2,\ 3/3.5)$ yamuk bulanık sayısı

1.6.3. Alfa (α) Kesimleri

Alfa kesmesi bulanık kümeyi bölerek kesin kümeleri oluşturmaktadır[2]. Eğer $\widetilde{A} \subset X$ bir bulanık küme ise $\widetilde{A}$ nın α-kesimi

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ için } \widetilde{A}[\alpha] = \{x \in X | \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada α=0 kesimi veya $\widetilde{A}[0]$ ayrı şekilde tanımlanmalıdır. [2]

Örnek 1.7'den $\widetilde{N}[0]$=[1.5,3.5] dir. $\widetilde{N}$ üçgensel bulanık sayısı tanımdan yararlanarak $\widetilde{N}[0]$ = Tüm reel sayılar olarak ifade edilir.

Not: Bulanık kümelerde α-kesmesi bulunduğu gibi bulanık sayılarda da α-kesmesi bulunur. Bu α-kesmesi

$$A_\alpha = \widetilde{A}[\alpha] = [a_{\alpha 1}, a_{\alpha 3}] = [a_1(\alpha), a_3(\alpha)]$$

$$a_{\alpha 1} = a_1 + (a_2 - a_1)\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ise } a_{01} = a_1$$

$$a_{\alpha 3} = a_3 - (a_3 - a_2)\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ise } a_{03} = a_3$$

şeklinde hesaplanır.

Tanım 1.11[2]: $\widetilde{A}$ herhangi bir bulanık sayı olmak üzere, $\widetilde{A}[\alpha]$ kesmesi için $\widetilde{A}[0]$' a $\widetilde{A}$ bulanık sayısının desteği (temeli) denir.

Tanım 1.12[2]: $\widetilde{A}$ bulanık sayısının çekirdeği, üyelik değerinin 1' e eşit olduğu değerlerin kümesidir. Örneğin; $\widetilde{N} = (a / b / c)$ üçgen bulanık sayısının çekirdeği tek nokta b dir. $\widetilde{M} = (a / b , c / d)$ yamuk bulanık sayısının çekirdeği $\widetilde{M} = [b, c]$ dir.

Özellik 1.1[2]: $\widetilde{Q}$ herhangi bir bulanık sayı olmak üzere biliniyor ki, $0 \leq \alpha \leq 1$ için $\widetilde{Q}[\alpha]$ kapalı, sınırlı bir araklıktır. O halde $\widetilde{Q}[\alpha] = [q_1(\alpha), q_2(\alpha)]$ olarak ifade edilir. $q_1(\alpha)(q_2(\alpha))$, $q_1(1) < q_2(1)$ ile artan (azalan) fonksiyon olacaktır. $\widetilde{Q}$ üçgen yada yamuk şekilli bulanık sayı ise:

1) α∈[0,1] aralığında $q_1(\alpha)$ sürekli ve monoton artan fonksiyon olmalıdır.

2) $0 \leq \alpha \leq 1$ aralığında $q_2(\alpha)$ sürekli, monoton azalan fonkiyon olmalıdır.

3) $q_1(1) = q_2(1)$ $(q_1(1) < q_2(1))$ durumu yamuk bulanık sayı için.

Monoton artan ya da azalan olma şartı matematiksel olarak; monoton artanlığı $\frac{d(q_1(\alpha))}{d\alpha} > 0$ şeklinde ve monoton azalanlığı ise $\frac{d(q_2(\alpha))}{d\alpha} < 0$ şeklinde kontrol edilir. [2]

Şekil 1.13 deki $\widetilde{N}$ bulanık sayısı için $\widetilde{N} = [n_1(\alpha), n_2(\alpha)]$, $0 \leq \alpha \leq 1$, olmak üzere:

$$n_1(\alpha) = 1.5 + (2 - 1.5)\alpha = 1.5 + 0.5\alpha$$

$$n_2(\alpha) = 3.5 - (3.5 - 2)\alpha = 3.5 - 1.5\alpha$$

elde edilmektedir. Benzer şekilde $\widetilde{M} = [m_1, m_2]$,$0 \leq \alpha \leq 1$, olmak üzere

$m_1(\alpha) = 1.5 + (2 - 1.5)\alpha = 1.5 + 0.5\alpha$

$m_2(\alpha) = 3 - (3.5 - 3)\alpha = 3 - 0.5\alpha$

Dikey Oy-ekseni ve yatay Ox-ekseni olmak üzere $n_1(\alpha) = 1.5 + 0.5\alpha$ ifadesi $x = 1.5 + 0.5y\,, 0 \leq y \leq 1$. Son ifade $(1.5, 0)$ dan $(2, 1)$ noktasına çizilen x' in y' e bağlı olduğu doğrusal bir fonksiyondur ve Şekil 1.13 te verilmiştir.

1.7. Bulanık Aritmetik[2]:

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ iki bulanık sayı olmak üzere bulanık sayılarda toplama, çıkartma, çarpma, bölme işlemlerine ihtiyaç vardır. $\widetilde{A} + \widetilde{B}$, $\widetilde{A} - \widetilde{B}$,…. vs. hesaplamak için iki temel yöntem vardır:

1. Genişleme prensibi

2. Aralık aritmetiği ve α-kesmeleri.

1.7.1. Genişleme Prensibi[2]:

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ iki bulanık sayı olsun. $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \tilde{C}$ ise $\tilde{C}$ bulanık sayısı için üyelik fonksiyonu

$$\tilde{C}(z) = \sup_{x,y}\left\{\min\left(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y)\right) \middle| x + y = z\right\} \qquad (1.26)$$

$\tilde{C} = \widetilde{A} - \widetilde{B}$ olursa:

$$\tilde{C}(z) = \sup_{x,y}\left\{\min\left(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y)\right) \middle| x - y = z\right\} \qquad (1.27)$$

Benzer şekilde $\tilde{C} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ olursa:

$$\tilde{C}(z) = \sup_{x,y}\left\{\min(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y)) \middle| x.y = z\right\} \qquad (1.28)$$

$\tilde{C} = \widetilde{A}/\widetilde{B}$ olursa:

$$\tilde{C}(z) = \sup_{x,y}\left\{\min(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y)) \middle| x/y = z\right\} \qquad (1.29)$$

Bütün bu durumlarda $\tilde{C}$ aynı zamanda bulanık bir sayıdır. $\tilde{C} = \tilde{A}/\tilde{B}$ ‘ de $\tilde{B}'$ nin desteğinin 0’ a ait olmadığı varsayılır. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ üçgen (yamuk) bulanık sayılarsa bu durumda $\tilde{A} + \tilde{B}$ ve $\tilde{A} - \tilde{B}$ üçgen bulanık sayı, $\tilde{A}\tilde{B}$ ve $\tilde{A}/\tilde{B}$ ise üçgen şekilli (yamuk şekilli) bulanık sayılar olacaktır.

$(1.26) - (1.29)$ eşitliklerinde “sup” operatörü kullanıldı. X üstten sınırlandırılmış gerçel sayılar dizisi ise X’ de bütün x’ ler için x ≤ M olacak şeklinde bir M vardır öyle ki M, X için sup(X)= En küçük üst sınırdır. X’ in maksimum üyesi varsa sup(X)=maks(X)=1. “sup” un çift operatörü “inf” dir. X alttan sınırlandırılırsa, ∀x ∈ X için N≤ x olacak şekilde bir N vardır öyleki N, X’ için inf(X) = En büyük alt sınırdır. Örneğin X=(0,1] için inf(X)=0 ama X=[0,1] için ise inf(X)=min(X)=0 dır.[2]

Verilen $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ için $(1.26) - (1.29)$ eşitlikleri $\tilde{A} + \tilde{B}$, $\tilde{A} - \tilde{B}$,…. vs. ‘ nin hesaplanmasında biraz karmaşık olarak görünüyor. Bu yüzden aralık aritmetiği ve alfa kesmelerine dayalı eşdeğer bir yöntem gösterilecektir. İlk önce aralık aritmetiğinin temelleri gösterilecektir.

1.7.2. Aralık Aritmetiği

Matematikte üç çeşit aralık vardır. Bu tezde kapalı aralık ile ilgilenilecektir. İlk önce kapalı aralık tanımını verelim.

Tanım 1.13[2, 13]: a ve b iki reel sayı olsun. Reel sayılar kümesinde [a,b] kapalı aralığı şeklinde gösterilir ve

$$[a, b] = \{x \in R |\, a \leq x \leq b\} \tag{1.30}$$

ifade edilmektedir.

Aralıklar arasında da basit aritmetik işlemler tanımlanır. Bu tanımlamada en önemli nokta aralıklar, kümeler ile birlikte hesaplanmaktadır.

$[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ iki kapalı, sınırlı reel sayı aralıkları olsun.

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \tag{1.31}$$

$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \tag{1.32}$$

$$\frac{[a_1, b_1]}{[a_2, b_2]} = [a_1, b_1]\left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{a_2}\right] = \left[\frac{a_1}{b_2}, \frac{b_1}{a_2}\right] \tag{1.33}$$

Son olarak ise iki kapalı aralığın çarpımını verilecektir:

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] = [\alpha, \beta] \tag{1.34}$$

$$[\alpha, \beta] = \{ab \mid a_1 \leq a \leq b_1, a_2 \leq b \leq b_2\} \tag{1.35}$$

olmak üzere

$$\alpha = \min\{a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2\}, \tag{1.36}$$

$$\beta = \max\{a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2, b_1b_2\} \tag{1.37}$$

şeklinde tanımlanır. Çarpma işlemi $a_1 \geq 0,\ a_2 \leq 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 \leq 0$...vb şeklinde a_1, a_2, b_1, b_2 ifadelerinin durumlarına göre farklı şekilde tanımlanır:

$$a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0 \text{ ise } [a_1, b_1][a_2, b_2] = [a_1a_2,\ b_1b_2] \tag{1.38}$$

$$b_1 < 0,\ a_2 \geq 0 \text{ ise } [a_1, b_1][a_2, b_2] = [a_1b_2,\ a_2b_1] \tag{1.39}$$

$$b_1 < 0,\ b_2 < 0 \text{ ise } [a_1, b_1][a_2, b_2] = [b_1b_2,\ a_1a_2] \tag{1.40}$$

$$a_1 \geq 0,\ b_2 > 0 \text{ ise } [a_1, b_1][a_2, b_2] = [a_2b_1,\ b_2a_1] \tag{1.41}$$

Örnek 1.9: Aşağıdaki kapalı araklıklarda ki dört işlem problemlerini hesaplayınız?

a) $[-2, -1] + [-1, 1]$ =?

b) $[3, 5] - [-2, 7]$ =?

c) $[-2, 4][-3, 1]$ =?

d) $[1, 2][-3, 5]$ =?

e) $[1, 2]/[-5, -3]$ =?

f) $[-1, 2]/[5, 7]$ =?

Çözüm:

a) $[-2,-1]+[-1,1]=[-2+(-1),-1+1]=[-3,0]$

b) $[3,5]-[-2,7]=[3-7,5-(-2)]=[-4,7]$

c) $[-2,4][-3,1]=[\alpha,\beta]=[-12\,,6]$

$\alpha=\min\{6,-2\,,-12\,,4\}=\ -12$

$\beta=\max\{6,-2\,,-12\,,4\}=6$

d) $[1,2][-3,5]=[\alpha,\beta]=[-6,10]$

$\alpha=\min\{-3\,,5\,,-6\,,10\}=\ -6$

$\beta=\max\{-3\,,5\,,-6\,,10\}=10$

e) $[1,2]/[-5,-3]\ =[1,2][1/(-3),1/(-5)]=[-0.6,-0.4\,]$

f) $[-1,2]/[5,7]\ =[-1,2][1/7,1/5]=[-0.1428,0.4]$

1.7.3. Bulanık Aritmetik[2]:

$\widetilde{A}\,,\widetilde{B}$ iki bulanık sayı olsun. Bulanık sayıların α-kesimi kapalı, sınırlı, aralıklar olmak üzere

$$\widetilde{A}[\alpha]=\ [a_1(\alpha),a_2(\alpha)]\qquad 0\le\alpha\le 1 \tag{1.42}$$

$$\widetilde{B}[\alpha]=[b_1(\alpha),b_2(\alpha)]\qquad 0\le\alpha\le 1 \tag{1.43}$$

şeklinde tanımlansın. $0\le\alpha\le 1$ olmak üzere

$$\tilde{C}=\ \widetilde{A}+\ \widetilde{B}\ \text{ ise }\ \tilde{C}[\alpha]=\ \widetilde{A}[\alpha]+\widetilde{B}[\alpha] \tag{1.44}$$

$$\tilde{C}=\ \widetilde{A}-\widetilde{B}\ \text{ ise }\ \tilde{C}[\alpha]=\ \widetilde{A}[\alpha]-\widetilde{B}[\alpha] \tag{1.45}$$

$$\tilde{C}=\ \widetilde{A}\widetilde{B}\ \text{ ise }\ \tilde{C}[\alpha]=\ \widetilde{A}[\alpha]\widetilde{B}[\alpha] \tag{1.46}$$

$$\tilde{C}=\ \widetilde{A}\,/\,\widetilde{B}\ \text{ ise }\ \tilde{C}[\alpha]=\ \widetilde{A}[\alpha]\,/\,\widetilde{B}[\alpha]\quad,\quad \widetilde{B}[\alpha]\ne 0 \tag{1.47}$$

Bulanık aritmetikte kullandığımız bu yöntem bulanık aritmetiğin genişleme prensibi metoduyla eşdeğerdir. Açık şekilde görülüyor ki bu yöntem aralık aritmetiğinin α-kesimi olarak da ifade edilmektedir.

Örnek 1.10: $\widetilde{\mathrm{A}}$ ve $\widetilde{\mathrm{B}}$ iki bulanık sayı olsun. $\widetilde{\mathrm{A}} = (-5\ /-3\ /-1)$ ve $\widetilde{\mathrm{B}} = (2\ /\ 4\ /\ 6)$ bulanık sayıları verilsin. $\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}$ çarpımını hesaplayınız?

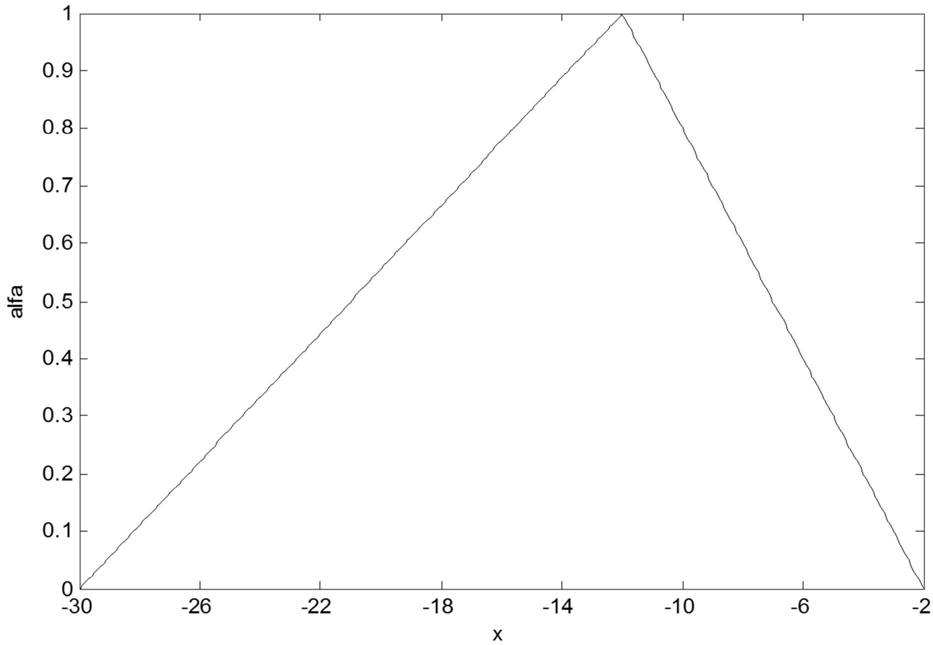
Çözüm: $\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}$ çarpımını hesaplamak için bulanık sayıların α-kesmeleri ve aralık aritmetiği kullanılacaktır. α-kesmeleri

$$\widetilde{\mathrm{A}}[\alpha] = [-5 + 2\alpha, -1 - 2\alpha] \ \text{ ve } \ \widetilde{\mathrm{B}}[\alpha] = [2 + 2\alpha, 6 - 2\alpha]$$

şeklinde elde edilmektedir. Aralık aritmetiğini kullanarak $\tilde{\mathrm{C}} = \widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}$ hesaplanırsa

$$\tilde{\mathrm{C}}[\alpha] = \widetilde{\mathrm{A}}[\alpha]\widetilde{\mathrm{B}}[\alpha] = [(-5 + 2\alpha)(6 - 2\alpha)\,, (-1 - 2\alpha)(2 + 2\alpha)]\ , \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

$\tilde{\mathrm{C}}$ bulanık sayısının grafiği Şekil 1.15' te verildiği gibidir.



Şekil 1.15. $\widetilde{\mathrm{A}} = (-5\ /-3/-1), \widetilde{\mathrm{B}} = (2\ /\ 4\ /\ 6)$ için $\tilde{\mathrm{C}} = \widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}$ grafiği

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bulanık mantık elektronik, envanter teori, güvenilirlik teorisi, kuyruk teorisi, biyoloji, medikal, sigorta teorisi, karar teorisi, yönetim bilimleri, matematik ve istatistik... gibi birçok bilimsel alanda kullanılmaktadır. Son zamanlarda bulanık küme teorisi, bulanık rasgele değişken ve bulanık stokastik süreç teorisinde de gelişmeler gerçekleşmektedir. Bu yüzden bulanık teori olasılık teorisinde önemli bir yere sahip olmuştur[6].

1991 yılında Kauffmann, A., Gupta, M.M., bulanık aritmetik teorisi ve uygulamaları üzerine çalıştı. 2009 yılında Moore, R. E., Kearfott, R. B. ve Cloud, M. J. aralık aritmetiği adlı kitabında aralık aritmeği ile oluşturulan yeni yöntemleri ve uygulamaları sunmuştur. Bu oluşturdukları yöntemle belirsiz olan verilerle doğrusal sistemleri çözmekten, integral ve diferansiyel denklem çözümlerine kadar geniş bir alanda aralık metodunu uygulamışlardır.

1965 yılında bulanık kümeler kuramıyla ilk Lotfi A. Zadeh tanıştırdı. 1978 yılında Lotfi A. Zadeh yayınladığı makalesinde bulanık küme teorisini temel alarak olasılık dağılımlarını bir bulanık yapı gibi tanımlamıştır[26]. 1980 yılında Dubois D. ve Prade H. bulanık mantık ve sistemleri üzerine 550 yayın ve makaleleri temel alan bir çalışma yayınlayarak bilinen çalışmalarla yeni çalışmaları sentezlemeyi amaçladılar[4]. 1987' de Dubois D. Ve Prade H. bulanık sayıların beklenen değeri ile ilgili makalelerinde kesin aralıkların konveks toplamını ve olasılık dağılım fonksiyonunun konveks toplamını düşünerek bulanık aritmetiğe yeni bir gözle bakmaya çalıştılar ve bunu kullanarak bulanık sayıların beklenen değerini aralık olarak tanımladılar[5]. 1997' de Nguyen H.T. makalesinde bulanık küme teorisi, bulanık olasılık ve özellikle istatistik ile bulanık methodları ilişkilendirmeyi amaçladı.

Lushu, L. ve Zhaohan, S., 1998 yılında yayınladıkları makalede bulanık rasgele değişkenin integrali ile bulanık küme değer ölçüsünü tanımladılar, bulanık küme değer ölçülerinin bazı özelliklerini elde ettiler. Hong, H.D., Ahn, H.C. 2003 yılında T ilişkili L-R bulanık sayıları için büyük sayılar kanunu üzerine makaleler yayınladılardır. 2001 yılında Xia, Kolmogrov' un olasılık sistemine bağlayan bir bulanık olasılık sistemi oluşturdu. Bulanık rasgele değişkenler ve büyük sayılar kanunu üzerine çalıştı ve martingale teorisine uyguladı. 2001 yılında Joo ve Kim çalışmalarında bağımsız toplamlar için Kolmogrov' un güçlü sayılar kanunu ve aynı şekilde bulanık rasgele değişkenlere genişlettiler.

Bulanık rasgele değişkenin beklenen değeri ve varyansı metrik uzayda Frechet'in prensibi ile karakterize edildi ve 1997 yılında Körner, R. çalışmasında bu beklenen değer ve varyansı kullanarak doğrusal regresyon problemi ve limit teorileri üzerine uyguladı. 1999 yılında Wu, H.,C. bulanık rasgele değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ilgili bir çalışma yaptı. 2001 yılında Feng, Y., Hu, L. ve Shu, H., çalışmasında bulanık rasgele değişkenlerin varyans ve kovaryans kavramı ve onların özelliklerinin tanıtılmasını sağladı. Varyans ve kovaryans bulanıklaştırıldı ve parametrelerin istatistiksel tahmininde varyans ve kovaryans uygulamaları ve hesaplamaları örneklerle verildi[6].

2003 yılında Buckley J.J. ve Eslami E., olasılık teorisinin bulanık temelleri üzerine çalıştılar. Buckley ve Eslami belirsiz olan bazı olasılık değerlerine sahip sürekli olasılık dağılımlarını araştırdılar. Bulanık sayıları kullanarak bu belirsizlikleri modellediler. Buckley, J.J., a ve b bulanık paremetreleri için düzgün dağılım, bulanık beklenen değer ve bulanık varyans parametrelerine sahip normal dağılım ve bulanık λ parametreli üstel dağılım üzerinde çalıştı ve bu bulanık paremetreler yardımıyla dağılımları bulanıklaştırdı. Wu, L., 2009' daki çalışmasında matlab programı yardımıyla tarafik kaza verilerini bulanık normal dağılım üzerine uyguladı[11].

2.1. Bulanık Bir A Olayının Olasılığı

Genellikle bulanık olasılık iki şekilde incelenir. Birinci olarak bulanık bir A olayının olasılığı; ikinci olarak ise bulanık A olayının bulanık olasılığı şeklinde incelenmektedir. Öncelikle bulanık A olayının olasılığının nasıl hesaplandığı incelenecektir.

Tanım 2.1: Kesin olasılığın tanımından biliniyor ki X örnek uzay olmak üzere

1. $\forall x \in X$ için $p(x) \in [0,1]$ (2.1)

2. $\sum_{x \in X} p(x) = 1$ (2.2)

bu koşullar altında

$$P(A) = \sum_{x \in X} p(x) \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bulanık olayın olasılığında ise $\widetilde{A}$ bir bulanık olay ve bu $\widetilde{A}$ bulanık olayın üyelik fonksiyonu $\mu_{\widetilde{A}}$ olsun. Bu durumda bulanık olayın olasılığı:

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x)p(x) \tag{2.4}$$

şeklinde gösterilir.

Bulanık bir olayın olasılığı ile ilgili çeşitli örnekler aşağıda verilmektedir:

Örnekler:

Örnek 2.1:

Bir zar atma olayında

a) $\widetilde{A} = \{\text{küçük sayı gelmesi}\} = \{(1,1)(2,0.8)(3,0.6)(4,0.3)(5,0.1)(6,0)\}$ bulanık olayının olasılığını bulunuz?

b) $\widetilde{A} = \{\text{büyük sayı gelmesi}\} = \{(1,0),(2.0.2),(3,0.5),(4,0.7),(5,0.8),(6,1)\}$ bulanık olayının olasılığını bulunuz?

Çözüm:

a) $\widetilde{A} = \{\text{küçük sayı gelmesi}\} = \{(1,1)(2,0.8)(3,0.6)(4,0.3)(5,0.1)(6,0)\}$

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{x \in \widetilde{A}} \mu_{\widetilde{A}}(x)p(x) = 1\frac{1}{6} + 0.8\frac{1}{6} + 0.6\frac{1}{6} + 0.3\frac{1}{6} + 0.1\frac{1}{6} + 0\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}[1 + 0.8 + 0.6 + 0.3 + 0.1] = \frac{2.8}{6} = 0.46$$

b) $\widetilde{A} = \{\text{büyük sayı gelmesi}\} = \{(1,0),(2.0.2),(3,0.5),(4,0.7),(5,0.8),(6,1)\}$

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{x \in \widetilde{A}} \mu_{\widetilde{A}}(x)p(x) = 0\frac{1}{6} + 0.2\frac{1}{6} + 0.5\frac{1}{6} + 0.7\frac{1}{6} + 0.8\frac{1}{6} + 1\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}[0 + 0.2 + 0.5 + 0.7 + 0.8 + 1] = \frac{3.2}{6} = 0.53$$

Örnek 2.2: İki zar atılıyor. Zarların üzerindeki sayıların çarpımlarının çok büyük gelmesi bulanık olayının olasılığını bulunuz?

Çözüm:

$$X = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ ,(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}$$

$$\widetilde{A} = \{\text{Çarpımlarının çok büyük sayı gelmesi}\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} ((6,6),1),((6,5),0.8),((5,6),0,8),((5,5),0.7), \\ ((6,4),0,6),((4,6),0.6),((5,4),0.4),((4,5),0.4) \\ ,\dots \end{matrix} \right\}$$

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{x\in\widetilde{A}} \mu_{\widetilde{A}}(x)p(x)$$

$$= \frac{1}{36}1 + \frac{1}{36}0.8 + \frac{1}{36}0.8 + \frac{1}{36}0.7 + \frac{1}{36}0.6 + \frac{1}{36}0.6 + 2\frac{1}{36}0.4 + \frac{1}{36}0 \dots$$

$$= \frac{1}{36}[1 + 0.8 + 0.8 + 0.7 + 0.6 + 0.6 + 0.4 + 0.4] = \frac{4.5}{36} = 0.147\overline{2}$$

Örnek 2.3: Bir torbada 1’ den 16’ a kadar numaralandırılmış toplar vardır. Bu toplardan 8 numaralı topun numarasına yakın bir top seçme olasılığı nedir?

Çözüm:

$$\widetilde{A} = \{\text{8 numaralı topa yakın numaralı top}\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (1,0),(2,0.1),(3,0.3),(4,0.5),(5,0.7),(6,0.8),(7,0.9),(8,1),(9,0.9),(10,0.8), \\ (11,0.7),(12,0.5),(13,0.3),(14,0.1),(15,0.1),(16,0) \end{matrix} \right\}$$

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{x\in\widetilde{A}} \mu_{\widetilde{A}}(x)p(x)$$

$$= \frac{1}{16}\,[0 + 0.1 + 0.3 + 0.5 + 0.7 + 0.8 + 0.9 + 1 + 0.9 + 0.8 + 0.7 + 0.5$$

$$+0.3 + 0.1 + 0.1 + 0] = 7.7/16 \;= 0.4812$$

Örnek 2.4: Bir zar atma olayında 4’ e yakın bir sayı gelmesi olayının olasılığı nedir?

Çözüm:

$$X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\widetilde{A} = \{4'\text{e yakın bir sayı gelmesi}\} = \{(1,0.1),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.5)\}$$

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{x\in\widetilde{A}} \mu_{\widetilde{A}}(x)p(x) = \frac{1}{6}\,[0.1 + 0.5 + 0.8 + 1 + 0.8 + 0.5] = \frac{3.7}{6} = 0.616$$

Örnek 2.5: İki zar atılıyor. Zarların üzerindeki sayıların toplamının 4’ e yakın bir sayı gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

$$X = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{Bmatrix} ((1,1),0.5),((1,2),0.8),((2.1),0.8)((1,3),1),((3,1),1),((2,2),1),((2,3),0.8) \\ ((2,4),0.5),((2,5),0.3),((2,6),0.1),((3,2),0.8)((3,3),0.5),((3,4),0.3), \\ ((4,1),0.8),((4,2),0,5),((4,3),0.3),((4,4),0.1),((5,1),0.5),((5,2),0.3), \\ ((5,3),0.1),((6,1),0.3),((6,2),0.1),((3,6),0),((4,5),0)\ldots \end{Bmatrix}$$

$$P(\tilde{A}) = \sum_{x \in \tilde{A}} \mu_{\tilde{A}}(x) p(x)$$

$$= \frac{1}{36}\,[0.5 + 0.8 + 0.8 + 1 + 1 + 1 + 0.8 + 0.5 + 0.3 + 0.1 + 0.8 + 0.5 +$$

$$+0.3 + 0.8 + 0.5 + 0.3 + 0.1 + 0.5 + 0.3 + 0.1 + 0.3 + 0.1 + 0 + 0] = 10.6/36$$

$$= 0.3166$$

2.2. Bulanık Olayın Bulanık Olasılığı

Bu başlık altında yapılan hesaplar bulanık olayın bulanık olasılığına dayanarak yapılacaktır. Öncelikle bulanık olayın bulanık olasılığının tanımı verilecek ve bulanık olayın bulanık olasılığı incelenecektir.

Tanım 2.2[2]: $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n\}$ oluşan sonlu elemanlı bir küme ve P, X' in alt kümelerinde $P(\{x_i\}) = a_i$, $1 \le i \le n$, $0 \le a_i \le 1$ $\forall i = 1,2,\ldots n$ ve $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ şeklinde tanımlanmış bir olasılık fonksiyonu olsun. P(x) bir kesikli sonlu olasılık dağılımını oluşturur. Çoğu kez bu değer tahmin edilir veya deneylerle bu değerler elde edilir. Değerlerin bazılarının kesin olmadığı kabul edilir ve bu kesin olmayan değerler bulanık sayılar kullanılarak modellenir. a_i değerlerinin tümünün belirsiz olması gerekmez, bazıları kesin olabilir ve kesin sayı olarak verilir. a_i kesin sayı olsa da bir bulanık sayısı olarak yazılabilmektedir.

a_i değerleri kesin olmamasından dolayı bu değerlere karşılık bir $\tilde{a}_i$ geçici bulanık sayıları verilebilmektedir. Her a_i değeri için $0 \le \tilde{a}_i \le 1$ olarak kullanılacaktır. Bulanık olasılıkta ise P yerine $\widetilde{P}$ kullanılacaktır ve $\widetilde{P}(\{x_i\}) = \tilde{a}_i$, $0 \le i \le 1$, $0 \le \tilde{a}_i \le 1, 1 \le i \le n$.

a_i değerlerinin bazıları kesin değildir ama biz onların kesikli olasılık dağılımına sahip olduğunu biliriz. Bu yüzden şimdi a_i değerleri için diğer kısıtlamalar verilecektir: $a_i \in \tilde{a}_i$ böylece $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ olur. Buradan a_i yerine $a_i[\alpha]$ seçilmektedir. Böylece kesikli olasılık dağılımı elde edilmiş olunmaktadır.

2.3. Bulanık Olasılık

Tanım 2.3[2]: A ve B, X' in kesin alt kümeleri olsun. A ve B kümelerinin kesin olayları olan sırasıyla P(A) ve P(B) kesin olaylarının hesaplanması bilinmektedir. Şimdi $\widetilde{P}(A)$ ve $\widetilde{P}(B)$ bulanık olasılıkları bulunacaktır. Bulanık olasılık hesaplanarak, kısıtlanmış bulanık aritmetik ortaya çıkmış olacaktır. a_i değerlerinin bazıları kesin olmayabilir fakat kesikli olasılık dağılımına sahiptirler. $\tilde{a}_i[\alpha]$' deki a_i değerleri ne olursa olsun $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ olmalıdır. Bu ifade sınırlandırılmış bulanık aritmetiğin temelidir.

Farz edelim ki A=$\{x_1, x_2, \dots x_k\}$, $1 \le k \le n$ olsun, öyleki

$$\widetilde{P}(A)[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \,\middle|\, S \right\}, 0 \le \alpha \le 1 \tag{2.5}$$

dır. Burada S "$a_i \in \tilde{a_i}[\alpha]$, $1 \le i \le n, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$" ifade etmektedir. (2.5) ifadesi kısıtlanmış bulanık aritmetiktir. Dikkat etmek gerekir ki (2.5) denklemindeki olasılığı hesaplamadan önce α değerlerinden gelen kesin kesikli olasılık dağılımı seçilmelidir. $\widetilde{P}(A)[\alpha]$, aralık aritmetiği kullanılarak $\tilde{a}_i[\alpha]$, $1 \le i \le k$, aralıklarının toplamı olarak ifade edilir. $\widetilde{P}(A)[\alpha]$, $\widetilde{P}(A)$ bulanık olasılığının α-kesmesidir. Bu ifadeyi daha kapsamlı tanımlamak için gerekli olan kümelerin tanımları verilmesi gerekmektedir.

Tanım 2.4[2]: S kümesi bir kısıtlama kümesi olup

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) |\, x_i \ge 0 \;\; \forall i, \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.5[2]**:**

$$\mathrm{Dom}[\alpha] = \left(\prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_i[\alpha]\right) \cap S\,,\ \ 0 \le \alpha \le 1 \qquad (2.7)$$

kümesi tanımlanmaktadır. (2.7) denklemi ile tanımlanan Dom kümesi n tane kapalı aralığın çarpımının S ile oluşturduğu arakesitinin n-boyutlu uzayda oluşturduğu bir dikdörtgendir.

Tanım 2.6[2]**:** $f\colon \mathrm{Dom}[\alpha] \to R$ olmak üzere,

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{k} a_i\ ,(a_1, a_2 \dots, a_n) \in \mathrm{Dom}[\alpha] \qquad (2.8)$$

fonksiyonu tanımlansın. f süreklidir, Dom[α] dikdörtgeni bağlantılı, kapalı ve sınırlıdır ve bu dikdörtgen f fonksiyonunun boyutunun reel sayıların aralığında kapalı ve sınırlı bir fonksiyon olduğunu ifade etmektedir.

Tanım 2.7[2]**:** f fonksiyonundan yararlanarak

$$\Gamma[\alpha] = f(\mathrm{Dom}[\alpha])\,,\ \ 0 \le \alpha \le 1 \qquad (2.9)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Denklem (2.9), Denklem (2.5)' te yerine yazılırsa

$$\widetilde{P}(A)[\alpha] = \Gamma[\alpha]\,,\ \ \forall\alpha \qquad (2.10)$$

elde edilir. $\widetilde{P}(A)$ normalleştirildiği için bir bulanık sayıdır.($\widetilde{P}(A)[1] \neq \emptyset$).

Teorem 2.1[2]**:**

1. Eğer A∩B = ∅ ise $\widetilde{P}(A) + \widetilde{P}(B) \ge \widetilde{P}(A \cup B)$ dir. (2.11)

2. Eğer A ⊆ B ve $\widetilde{P}(A)[\alpha] = [p_{a1}(\alpha), p_{a2}(\alpha)]$ ve $\widetilde{P}(B)[\alpha] = [p_{b1}(\alpha), p_{b2}(\alpha)]$ ise $p_{ai} \le p_{bi}$, i=1,2 ve $0 \le \alpha \le 1$. (2.12)

3. $0 \leq \widetilde{P}(A) \leq 1$ her A ile $\widetilde{P}(\emptyset) = 0, \widetilde{P}(X) = 1.$ (2.13)

4. $\widetilde{P}(A) + \widetilde{P}(A') \geq 1$, burada A' kümesi, A kümesinin tümleyenidir. (2.14)

5. $A \cap B \neq \emptyset$ ise $\widetilde{P}(A \cup B) \leq \widetilde{P}(A) + \widetilde{P}(B) - \widetilde{P}(A \cap B).$ (2.15)

Not: $\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) | x \in S\}$ bulanık olay olmak üzere bu $\widetilde{A}$ bulanık olayının olasılığı

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{x \in \widetilde{A}} \mu_{\widetilde{A}}(x) p(x)$$

şeklinde ifade edildi. Bulanık $\widetilde{A}$ olayını α-kesimi alınarak

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x | \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

bulanık $\widetilde{A}$ olayı kesinleştirildi. Bu elde edilen kesin olayın olasılığı

$$P(\widetilde{A}_\alpha) = \sum_{x \in \widetilde{A}_\alpha} p(x)$$

şeklinde elde edildi. Şimdi ise elde edilen kesin olayın bulanık olasılığı

$$\widetilde{P}(\widetilde{A}) = \{(P(\widetilde{A}_\alpha), \alpha) | \alpha \in [0,1]\} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Böylece bulanık $\widetilde{A}$ olayının bulanık olasılığı elde edilmiş oldu.

Örnek 2.5[1]: X = {a,b,c,d} P(a) = 0.2, P(b) = 0.3, P(c) = 0.4, P(d) = 0.1 şeklinde verilsin.

$$\widetilde{A} = \{(a, 1), (b, 0.8), (c, 0.5), (d, 0.3)\}$$

bulanık $\widetilde{A}$ için $\widetilde{P}(\widetilde{A})$ =?

Çözüm:

$\widetilde{A}_{0.3} = \{a, b, c, d\}$ $P(\widetilde{A}_{0.3}) = 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.1 = 1$

$\widetilde{A}_{0.5} = \{a, b, c\}$ $P(\widetilde{A}_{0.5}) = 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9$

$\widetilde{A}_{0.8} = \{a, b\}$ $P(\widetilde{A}_{0.8}) = 0.2 + 0.3 = 0.5$

$\widetilde{A}_1 = \{a\}$ $P(\widetilde{A}_1) = 0.2$

$$\widetilde{P}(\widetilde{A}) = \{(P(\widetilde{A}_\alpha), \alpha) | \alpha \in [0, 1]\}$$

ifadesinden

$$\widetilde{P}(\widetilde{A}) = \{(1; 0.3), (0.9; 0.5), (0.5; 0.8), (0.2; 1)\}$$

bulanık olasılığı elde edilir.

Örnek 2.6[2]**:** n=5 olsun. A= $\{x_1, x_2\}$, B= $\{x_4, x_5\}$, a_i = 0.2 , $1 \leq i \leq 5$ dir. a_3 dışındaki tüm olasılıklar kesin değildir. O halde $\widetilde{P}(A \cup B)[0] \leq \widetilde{P}(A)[0] + \widetilde{P}(B)[0]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = (0.19/0.2/0.21)$, $\tilde{a}_3 = 0.2$ ve $\tilde{a}_4 = \tilde{a}_5 = (0.19/0.2/0.21)$. a_1, a_2, a_4, a_5 bulanık sayılarının α- kesmeleri alınırsa

$\tilde{a}_1[\alpha] = \tilde{a}_2[\alpha] = [0.19 + 0.01\alpha, 0.21 - 0.01\alpha]$

$\tilde{a}_4[\alpha] = \tilde{a}_5[\alpha] = [0.19 + 0.01\alpha, 0.21 - 0.01\alpha]$

elde edilir. Önce $\tilde{a}_1[\alpha], \tilde{a}_2[\alpha]$ kesin sayılarının olasılıkları $\alpha = 0$ için $p_1 = 0.19, p_2 = 0.19$ ve $p_1 = p_2 = 0.21$ elde edilmektedir. Buradan bulanık olasılık hesaplanırsa

$\widetilde{P}(A)[0]$ = [0.19+0.19,0.21+0.21] = [0.38,0.42]

elde edilir. Aynı şekilde $\tilde{a}_4[\alpha], \tilde{a}_5[\alpha]$ kesin sayılarının olasılıklarıda $\alpha = 0$ için $p_4 = 0.19, p_5 = 0.19$ ve $p_4 = p_5 = 0.21$ elde edilmektedir. Bulanık olasılık hesaplanırsa

$\widetilde{P}(B)[0]$= [0.19+0.19,0.21+0.21] = [0.38,0.42]

elde edilir. $\alpha = 0$ için $\widetilde{P}(A)[0]$, $\widetilde{P}(B)[0]$ bulanık olasılıkları hesaplanmış oldu. Denklem (2.11) sol tarafı aralık aritmetiği kullanılarak

$$\widetilde{P}(A)[0] + \widetilde{P}(B)[0] = [0.76, 0.84] \tag{2.17}$$

olarak bulunur. Şimdi denklem (2.11)' in sağ tarafında bulunan $\widetilde{P}(A \cup B)[0]$ hesaplanmalıdır

$$\widetilde{P}(A \cup B)[\alpha] = \{a_1 + a_2 + a_4 + a_5 \mid S\} \tag{2.18}$$

elde edilmektedir. $a_i[\alpha] = [a_{i1}(\alpha), a_{i2}(\alpha)]$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Denklem (2.18) uç noktaları değerlendirildiğinde

1) Her α için $a_3 \in \tilde{a}_3[\alpha]$ öyleki $a_{11}(\alpha) + a_{21}(\alpha) + a_3 + a_{42}(\alpha) + a_{52}(\alpha) = 1$

2) Her α için $a_3 \in \tilde{a}_3[\alpha]$ öyleki $a_{12}(\alpha) + a_{22}(\alpha) + a_3 + a_{41}(\alpha) + a_{51}(\alpha) = 1$

Yukarıdaki veriler göz önünde bulundurularak

$\widetilde{P}(A \cup B)[\alpha] = [p_1, p_2]$ olmak üzere

$p_1 = a_{11}(\alpha) + a_{21}(\alpha) + a_{42}(\alpha) + a_{52}(\alpha) = 0.8$

$p_2 = a_{12}(\alpha) + a_{22}(\alpha) + a_{41}(\alpha) + a_{51}(\alpha) = 0.8$

elde edilir. $\alpha = 0$ için

$$\widetilde{P}(A \cup B)[0] = [0.8, 0.8] \tag{2.19}$$

olarak bulunmaktadır. O halde (2.17) ve (2.19)

$$\widetilde{P}(A)[0] + \widetilde{P}(B)[0] \geq \widetilde{P}(A \cup B)[0] \tag{2.20}$$

ifadesi sağlanmış olur.

Örnek 2.7[2]**:** n=6 ve A=$\{x_1, x_2, x_3\}$ ve B=$\{x_3, x_4, x_5\}$, $a_i = 0.1\,, 1 \leq i \leq 5$ ve $a_6 = 0.5$ olsun. Varsayılsın ki tüm olasılıklar belirsiz ve $\tilde{a}_i = (0.05/0.1/0.15)\,, 1 \leq i \leq 5$ ve $\tilde{a}_6 = (0.25\,/0.5/\,0.75)$ olsun. Bu durumda $\widetilde{P}(A \cup B) \leq \widetilde{P}(A) + \widetilde{P}(B) - \widetilde{P}(A \cap B)$ olduğunu gösteriniz .

Çözüm: $A \cup B = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ şeklindedir. Bulanık olasılıkların α-kesimi alınırsa

$$\tilde{a}_i[\alpha] = [0.05 + 0.05\alpha\,, 0.15 - 0.05\alpha]\ ,\quad 1 \leq i \leq 5$$

$$\tilde{a}_6[\alpha] = [0.25 + 0.25\alpha, 0.75 - 0.25\alpha]$$

elde edilmektedir. $\alpha = 0$ için

$$\tilde{a}_i[0] = [0.05\,, 0.15]\ ,\quad 1 \leq i \leq 5 \text{ ve } \tilde{a}_6[0] = [0.25, 0.75]$$

elde edilir. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.05$ ve $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.15$ elde edilir. O halde

$$\widetilde{P}[A \cup B][0] = [5(0.05)\,, 5(0.15)] = [0.25, 0.75]$$

bulunmaktadır.

Diğer taraftan A=$\{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi için

$$\tilde{a}_i[\alpha] = [0.05 + 0.05\alpha\,, 0.15 - 0.05\alpha]\ ,\quad 1 \leq i \leq 3$$

elde edilmektedir. $\alpha = 0$ için alınırsa $p_1 = p_2 = p_3 = 0.05$ ve $p_1 = p_2 = p_3 = 0.15$ elde edilir. Buradan A kümesinin bulanık olasılığı

$$\widetilde{P}(A)[0] = [3(0.05), 3(0.15)] = [0.15, 0.45]$$

elde edilmektedir. Aynı şekilde $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ kümesi içinde aynı işlemler yapıldığında

$$\widetilde{P}(B)[0] = [3(0.05), 3(0.15)] = [0.15, 0.45]$$

elde edilmektedir. $A \cap B = \{x_3\}$ için x_3 elemanının bulanık olasılığının α-kesimi

$$\tilde{a}_3[\alpha] = [0.05 + 0.05\alpha\,, 0.15 - 0.05\alpha]$$

şeklinde bulunmaktadır. $\alpha = 0$ için $p_1 = 0.05$ ve $p_2 = 0.15$ elde edilmektedir. O halde

$\widetilde{P}(A \cap B)[0] = [0.05\,, 0.15]$

bulanık olasılığı elde edilmektedir.

Son olarak elde edilen veriler (2.15) ifadesinde yerine yazılırsa

[0.25 , 0.75] ≠ [0.15 , 0.45] + [0.15 , 0.45] – [0.05 , 0.15] = [0.15 , 0.85]

elde edilir. O halde (2.15) ifadesi gereği

$A \cap B \neq 0\,, \qquad \widetilde{P}(A \cup B) \leq \widetilde{P}(A) + \widetilde{P}(B) - \widetilde{P}(A \cap B)$

doğrulanmaktadır.

Örnek 2.8[2]: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $A = \{x_1\}$, $B = \{x_3\}$, $\tilde{a}_1 = (0.3 / 0.33 / 0.36)$, $\tilde{a}_2 = (0.28 / 0.34 / 0.40)$ ve $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3$ olsun. O halde $\widetilde{P}(A \cup B) = \widetilde{P}(A) + \widetilde{P}(B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Burada $\widetilde{P}(A) = \tilde{a}_1\,, \widetilde{P}(B) = \tilde{a}_3$ burada $\widetilde{P}(A) + \widetilde{P}(B) = (0.6 / 0.66 / 0.72)$ elde edilmektedir. $\widetilde{P}(A \cup B)$ 'nin α-kesmesi

$$\widetilde{P}(A \cup B)[\alpha] = \{a_1 + a_3 | S\} \tag{2.21}$$

dir. i = 1,2,3 için $\tilde{a}_i[\alpha] = [a_{i1}(\alpha), a_{i2}(\alpha)] = [0.3 + 0.03\alpha\,, 0.36 - 0.03\alpha]$ olsun. Denklem (2.21)' nin α_kesimlerinin son noktaları kullanılarak değerlendirilirse:

1) ∀α için $a_2 \in \tilde{a}_2[\alpha]$ vardır öyleki $a_{11}(\alpha) + a_2 + a_{31}(\alpha) = 1$ dir.

2) ∀α için bir $a_2 \in \tilde{a}_2[\alpha]$ vardır öyle ki $a_{12}(\alpha) + a_2 + a_{32}(\alpha) = 1$ dir.

O halde

$\widetilde{P}(A \cup B) = (0.6 / 0.66 / 0.72)$

elde edilmektedir.

2.3.1. Bulanık Olasılığın Bulanık Beklenen Değer ve Varyansı

Tanım 2.8[2]: Bulanık beklenen değerin α-kesimleriyle tanımlanarak

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \middle| S \right\} \tag{2.22}$$

elde edilmektedir. Burada S “$a_i \in \tilde{a}_i[\alpha], 1 \leq i \leq n\,, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$” olarak ifade edilir.

Tanım 2.9[2]: Bulanık varyans, bulanık beklenen değer gibi α-kesimi ile tanımlanarak

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{\mu})^2 \, p_i \middle| S \, , \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \right\} \tag{2.23}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Bulanık beklenen değer $\tilde{\mu}$ ve bulanık varyans $\tilde{\sigma}^2$ ifadeleri bulanık sayılar olmalıdır. Çünkü $0 \leq \alpha \leq 1$ için $\tilde{\mu}[\alpha]$ ve $\tilde{\sigma}^2[\alpha]$ bulanık sayıları kapalı ve sınırlıdır.

Örnek 2.9[2]: X={0,1,2,3,4}, $p_0 = p_4 = 1/16 \, , p_1 = p_3 = 0.25$ ve $p_2 = 3/8$ olsun. Kesin ortalama bulmak istenirse

$$\mu = 0\frac{1}{16} + 1(0.25) + 2\frac{3}{8} + 3(0.25) + 4\frac{1}{16} = 2$$

ve kesin varyans

$$\sigma^2 = \frac{1}{16}(0-2)^2 + \frac{1}{4}(1-2)^2 + \frac{3}{8}(2-2) + \frac{1}{4}(3-2)^2 + \frac{1}{16}(4-2)^2 = 1$$

olarak bulunur. Farz edelim ki $\tilde{a}_1$ve $\tilde{a}_3$ bulanık olasılık olsun. Böylece a_1 için $\tilde{a}_1$ ve a_3 için $\tilde{a}_3$ olsun. $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = (0.2 \,/\, 0.25 \,/\, 0.3)$ eşitliği verilsin. Bulanık beklenen değer ve bulanık varyansı bulunuz.

Çözüm:. $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = (0.2 \,/\, 0.25 \,/\, 0.3)$ bulanık sayıları verilmiştir. İlk önce $\tilde{\mu}[\alpha]$ hesaplanırsa:

x_i, a_0, a_2, a_4 nümerik değerler olmak üzere $a_1 \in \tilde{a}_1[\alpha]$ seçilir ve $a_3 \in \tilde{a}_3[\alpha]$' da $a_3 = f_1(a_1) = 0.5 - a_1$ olarak ifade edilir ve a_i değerlerinin toplamı 1' e eşittir. Kesin ortalama hesaplanır gibi hesaplanırsa

$$\mu = f_1(a_1) = 0\frac{1}{16} + 1a_1 + 2\frac{3}{8} + 3\left(\frac{1}{2} - a_1\right) + 4\frac{1}{16} = 2.5 - 2a_1 \tag{2.24}$$

bulunur. Burada bulunan bulanık ortalama sadece a_1' e bağlı bir fonksiyondur. Bulanık sayı için $\frac{df_1}{da_1} = -2 < 0$ dir. Böylece bulanık ortalamanın bulanık sayı olma şartı sağlanmıştır. $\tilde{\mu}[\alpha] = [\mu_1(\alpha), \mu_3(\alpha)]$ bulanık ortalama hesaplanırsa:

$$a_{11}(\alpha) = 0.2 + (0.25 - 0.2)\alpha = 0.2 + 0.05\alpha \tag{2.25}$$

$$a_{13}(\alpha) = 0.3 - (0.3 - 0.25)\alpha = 0.3 - 0.05\alpha \tag{2.26}$$

$\mu_1(\alpha)$ ve $\mu_3(\alpha)$ değerlerini bulmak için (2.25) ve (2.26) ifadeleri denklem (2.24) de yerlerine yazılırsa

$$\mu_1[\alpha] = 2.5 - 2a_{11}(\alpha) = 2.5 - 2(0.3 - 0.05\alpha) = 2.5 - 0.6 + 0.1\alpha = 1.9 + 0.1\alpha$$

$$\mu_3[\alpha] = 2.5 - 2a_{13}(\alpha) = 2.5 - 2(0.2 + 0.05\alpha) = 2.5 - 0.4 - 0.1\alpha = 2.1 - 0.1\alpha$$

elde edilir. O halde son denklemde 1.9+0.1α elde etmek için 0.3-0.05α ve 2.1-0.1α elde etmek için 0.2+0.05α kullanılmaktadır. Böylece bulanık ortalama

$$\tilde{\mu}[\alpha] = [1.9 + 0.1\alpha\,, 2.1 - 0.1\alpha]$$

olarak elde edilmiştir. Buradan bulanık beklenen değer bulanık üçgensel sayı olarak yazılırsa

$$\tilde{\mu} = (1.9\,/\,2\,/\,2.1) \tag{2.27}$$

olarak bulunur.

Benzer formülü $\tilde{\sigma}^2$ bulanık varyansı elde etme için de kullanılmaktadır:

Denklem (2.23) ifadesindeki bulanık varyans tanımı kullanılırsa $\forall\, a_1 \in \tilde{a}_1[\alpha]$ için

$$\tilde{\sigma}^2 = f_2(a_1) = (0 - 2.5 + 2a_1)^2 \frac{1}{16} + (1 - 2.5 + 2a_1)^2 a_1 + (2 - 2.5 + 2a_1)^2 \frac{6}{16} +$$

$$+(3 - 2.5 + 2a_1)^2(0.5 - a_1) + (4 - 2.5 + 2a_1)^2 \frac{1}{16} = 0.75 + 2a_1 - 4a_1^2$$

elde edilir.

$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = [\sigma_1^2(\alpha)\,,\ \sigma_2^2(\alpha)]$ ve $f_2(a_1)$ ifadesinde $a_1(\alpha) = 0.2 + 0.05\alpha$ için yerine yazılırsa

$$\sigma_1^2(\alpha) = f_2(0.2 + 0.05\alpha) = 0.75 + 2(0.2 + 0.05\alpha) - 4(0.2 + 0.05\alpha)^2$$

$$= 0.99 + 0.22\alpha - 0.01\alpha^2 \tag{2.28}$$

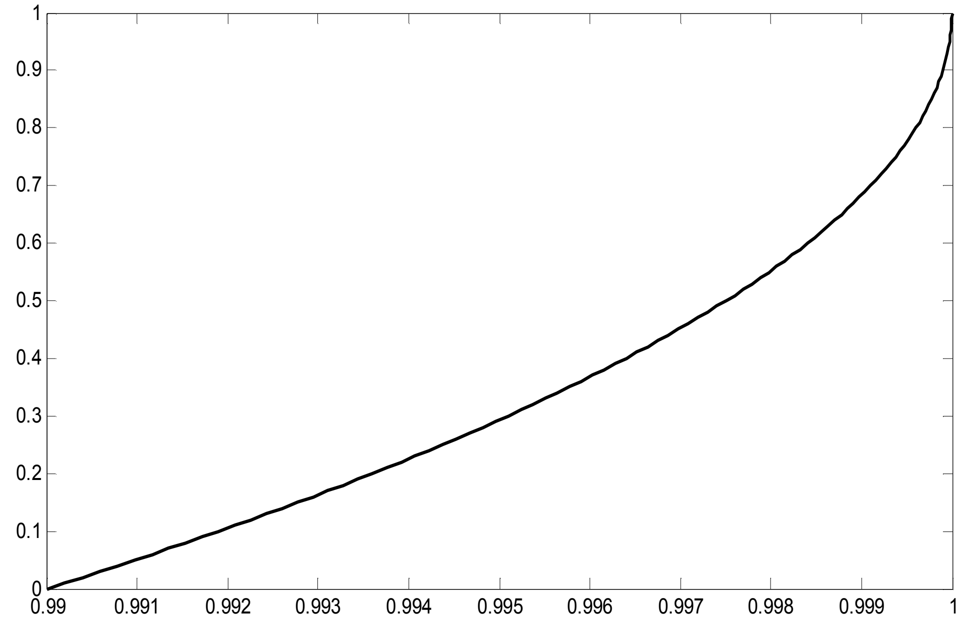
$$\sigma_2^2(\alpha) = f_2(0.3 - 0.05\alpha) = 0.75 + 2(0.3 - 0.05\alpha) - 4(0.3 - 0.05\alpha)^2 = 1 \tag{2.29}$$

bulanık varyansı elde etmiş olunmaktadır.

Denklem (2.28) ve (2.29) ifadelerinden

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = [0.99 + 0.22\alpha - 0.01\alpha^2, 1]\,, 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{2.30}$$

bulanık varyansı elde edildi.



Şekil 2.1. $\tilde{\sigma}^2[\alpha] = [0.99 + 0.22\alpha - 0.01\alpha^2, 1]$ bulanık varyansın grafiği

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Klasik ve Bulanık Rasgele Değişkenler

Bu bölümde ilk önce klasik ve bulanık rasgele değişkenler hakkında tanımlar verilecektir daha sonra ise tezin asıl konusu olan bulanık rasgele değişkenler ve sürekli bulanık rasgele değişkenler incelenecektir.

Tanım 3.1: (Ω, F, P) bir olasılık uzayı olsun. Eğer

$$\{w \mid X(w) \leq r\} \in F, \forall r \tag{3.1}$$

ise $X: \Omega \rightarrow R$ ölçülebilir reel değerli fonksiyona rasgele değişken adı verilir. Bu tanımda reel sayılarda borel sigma-cebirini $\{(-\infty, r) : r \in R\}$ üretmektedir. İki tür klasik rasgele değişken vardır: kesikli rasgele değişken ve sürekli rasgele değişken.

Bu tezin genel konusu olarak bulanık sürekli rasgele değişkenler inceleneceği için klasik sürekli rasgele değişkenler tanımı verilecek ve daha sonra yukarıda da belirtildiği gibi bulanık sürekli rasgele değişkenler incelenecektir.

Tanım 3.2: Rasgele değişkenin olası değerlerinin kümesi sayılamayan sonsuz küme olmasıyla sürekli rasgele değişken olması ilişkilidir. X sayılamayan sonsuz bir rasgele değişken olsun. X sürekli rasgele değişken, $x \in (-\infty, \infty)$ için negatif olmayan f(x) fonksiyonu varsa, reel sayıların herhangi bir B alt kümesi için

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\,dx \tag{3.2}$$

ifadesine denir. (3.2) denkleminde f(x)'e, X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

Tanım 3.3[2, 22, 14]: Bulanık değişkenler ile karakterize edilmiş kesin olmayan ifadeleri bulanık rasgele değişkenleri kullanarak matematiksel olarak ifade edilebilmektedir. Rasgele değişkenler net olarak gözlemlenemediğinde örneğin sınır değerleri değiştiğinde v.s bulanık değişkenler ortaya çıkar. Bulanık rasgele değişkenler bulanıklaştırılmış değişkenler gibi de yorumlanabilir. Kesin olmayan bir durumda rasgele olayı gözlemlemek sadece bulanık rasgele değişkenlerle mümkündür.

Bulanık rasgele değişkenler Kolmogorov' dan sonra aksiyom olasılık kavramının bir genişlemesi olarak ifade edilmektedir.

(X, σ, P) olasılık uzayı, bulanık boyutuna genişletilebilir ve kesin olmayan ölçüm uzayı n- boyutlu R^n öklid uzayı üzerinde tanımlanır.

$\widetilde{X} : \Omega \xrightarrow{\sim} F(R^n)$ olmak üzere $\widetilde{X}$ bulanık rasgele değişkeni Ω' yı $F(R^n)$ bulanık olarak resmeder. Burada $F(R^n)$, R' de tüm bulanık sayıların kümesidir. $\widetilde{X}$ bulanık rasgele değişkeni tamamıyla X klasik rasgele değişkenini içermektedir. $\widetilde{X}$ bulanık rasgele değişken, X leri içeren $\widetilde{X}$ bulanık rasgele değişkenlerinin kümesidir.

$\widetilde{X}$ bulanık rasgele değişkeni matematiksel olarak bir bulanık olasılık dağılım fonksiyonu olan $\widetilde{F}(x)$ ile tanımlanabilmetedir. $\widetilde{X}$' nün $\widetilde{F}(x)$ bulanık olasılık dağılım fonksiyonu, $\widetilde{X}$ lerin içerdiği $\mu\big(F(x)\big)$ üyelik değerlerine sahip tüm klasik X_j lerinin olasılık dağılım fonksiyonlarının kümesidir.

Nümerik değerler için, α-kesimleri faydalı bir şekilde uygulanabilir:

$$F(\tilde{s}, x) = \left\{ F_\alpha(x); \mu\big(F_\alpha(x)\big) \middle| \begin{array}{c} F_\alpha(x) = \big[F_{min,\alpha}(x);\ F_{max,\alpha}(x)\big], \\ \mu\big(F_\alpha(x)\big) = \alpha, \forall\alpha \in (0,1] \end{array} \right\} \tag{3.3}$$

$$F_{min,\alpha}(x) = \inf\{F(s, x) | s \in S_\alpha\} \tag{3.4}$$

$$F_{max,\alpha}(x) = \sup\{F(s, x) | s \in S_\alpha\} \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilmektedir.

3.2. Sürekli Bulanık Rasgele Değişkenler

Bu kesimde ilk olarak bulanık olasılık nasıl hesaplanır, bulanık ortalama ve varyans nasıl hesaplanır soruları ile ilgilenilecektir. Normal olasılık yoğunluk $N(\mu, \sigma^2)$ iken bulanık normal olasılık $N(\tilde{\mu}, \widetilde{\sigma}^2)$ şeklinde; [a, b] aralığında düzgün dağılım U(a, b) iken bulanık düzgün dağılım $U(\tilde{a}, \tilde{b})$; üstel dağılım E(λ) iken bulanık üstel dağılım $E(\tilde{\lambda})$ ile ifade edilir.

3.2.1. Bulanık Düzgün Dağılım

Tanım 3.4[2]: Düzgün dağılım U(a, b), a < b, olmak üzere düzgün dağılımın yoğunluk fonksiyonu

$$y = f(x;\ a, b) = \begin{cases} 1/(b-a) & ,\ a \leq x \leq b \\ 0 & ,\ a > x\, ; b < x \end{cases}$$

şeklindedir.

$U(\tilde{a}, \tilde{b})$ bulanık dağılımında $\tilde{a}, \tilde{b}$ sayıları bulanık sayılardır. Eğer $\tilde{a}[1] = [a_1, a_2]$ ve $\tilde{b}[1] = [b_1, b_2]$ ise $a \in [a_1, a_2]$, $b \in [b_1, b_2]$ öyleki a ifadesi bulanık olarak ã ve b ifadesi bulanık olarak $\tilde{b}$ şeklinde ifade edilir. Şimdi bulanık düzgün dağılımın yoğunluk fonksiyonunu kullanılarak [c, d] aralığındaki herhangi bir değerin bulanık olasılığı $\tilde{P}$[c, d] şeklinde ifade edilecektir.

$s \in \tilde{a}[\alpha]$ ve $t \in \tilde{b}[\alpha]$, $s < t$, U(s, t) düzgün dağılımın yoğunluk fonksiyonu [s, t] aralığında

$$f(x; s, t) = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{t-s} & s \leq x \leq t \\ 0 & s > x; t < x \end{Bmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi ise bulanık olarak ifade edelim:

L(c, d; s, t), [s, t] ∩ [c, d] aralığının uzunluğu olsun.

$$\tilde{P}[c, d][\alpha] = \{L(c, d;\ s, t)/(t-s) \mid s \in \tilde{a}[\alpha], t \in \tilde{b}[\alpha], s < t\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.6)$$

(3.6) ifadesi, $\tilde{P}[c, d]$ bulanık kümesinin α-kesimini tanımlamaktadır.

Tanım 3.5[2]: İlk olarak $U(\tilde{a}, \tilde{b})$ bulanık düzgün dağılımın bulanık beklenen değerini bulmak için $\tilde{\mu}$ bulanık beklenen değerin α-kesimi alınırsa

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \int_s^t \big(x/(t-s)\big)\, dx \,\middle|\, s \in \tilde{a}[\alpha], t \in \tilde{b}[\alpha], s < t \right\}$$

$$= \{(t^2 - s^2)\ /\ 2(t-s) \mid s \in \tilde{a}[\alpha], t \in \tilde{b}[\alpha],\ s < t\}$$

$$= \{(t+s)/\ 2 \mid s \in \tilde{a}[\alpha], t \in \tilde{b}[\alpha], s < t\}$$

$\tilde{a}[0] = [s_1, s_2], \tilde{b}[0] = [t_1, t_2]$ ve $s < t$ göz önünde bulundurularak $\tilde{\mu}[\alpha] = (t+s)/\ 2$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\tilde{\mu} = \left(\tilde{a} + \tilde{b}\right) / 2 \tag{3.7}$$

bulanık beklenen değeri elde edilir.

$U(\tilde{a}, \tilde{b})$ bulanık düzgün dağılımının bulanık varyansını bulmak için $\tilde{\sigma}^2$ bulanık varyansının α-kesmesi alınıp $\mu = (s + t)/2$ ifadesi kullanılırsa bulanık varyansın α-kesmesi

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \left\{ \int_s^t [(x - \mu)^2 / (t - s)]\, dx \,\middle|\, s \in \tilde{a}[\alpha], t \in \tilde{b}[\alpha], \mu = (s + t)/2, s < t \right\}$$

şeklindedir.

$\int_s^t [(x - \mu)^2/(t - s)]\, dx$ integralinin hesaplanması için $u = x - \mu, dx = du$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\int_s^t [(x - \mu)^2 / (t - s)]\, dx = \int_s^t (u^2/(t - s))\, du = \left.\left(\frac{u^3}{3(t-s)} \right)\right|_s^t$$

$$= ((t - \mu)^3/3(t - s)) - ((s - \mu)^3/3(t - s))$$

$$= ((t - s)^3/24(t - s)) - ((s - t)^3/24(t - s))$$

$$= 2(t - s)^3/24(t - s) = (t - s)^2/12$$

ifadesi elde edilir. O halde bulanık varyans, $\tilde{a}[0] = [s_1, s_2], \tilde{b}[0] = [t_1, t_2]$ ve $s < t$ ifadeleri göz önünde bulundurularak

$$\tilde{\sigma}^2 = (\tilde{b} - \tilde{a})^2/12 \tag{3.8}$$

elde edilmektedir.

Örnek 3.1[2]: $\tilde{a} = (0 / 1 / 2)$ ve $\tilde{b} = (3 / 4 / 5)$ bulanık sayıları olmak üzere [1, 4] kapalı aralığı için $\tilde{P}[1, 4]$ bulanık olasılığını, bulanık beklenen değeri ve bulanık varyansı hesaplayınız.

Çözüm:

$\tilde{P}[1, 4][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ bir aralığın uç noktaları α' nın fonksiyonudur.

$$p_1(\alpha) = \min\left\{ L(1, 4;\ s, t)/(t - s) \,\middle|\, s \in \tilde{a}[\alpha], t \in \tilde{b}[\alpha] \right\} \tag{3.9}$$

$$p_2(\alpha) = \max\left\{ L(1, 4;\ s, t)/(t - s) \,\middle|\, s \in \tilde{a}[\alpha], t \in \tilde{b}[\alpha] \right\} \tag{3.10}$$

Bu arada

$$\tilde{a}[\alpha] = [\alpha, 2 - \alpha] \tag{3.11}$$

$$\tilde{b}[\alpha] = [3 + \alpha, 5 - \alpha] \tag{3.12}$$

elde edilir. Şimdi s ve t nin durumları incelenirse:

1) $\alpha \leq s \leq 1$ ve $3 + \alpha \leq t \leq 4$

2) $\alpha \leq s \leq 1$ ve $4 \leq t \leq 5 - \alpha$

3) $1 \leq s \leq 2 - \alpha$ ve $3 + \alpha \leq t \leq 4$

4) $1 \leq s \leq 2 - \alpha$ ve $4 \leq t \leq 5 - \alpha$

$(3.9) - (3.10)$ denklemleri ile birlikte yukarıda ki dört durumu değerlendirirsek:

$p_1(\alpha)$ elde etmek için $L(1,4;\ s,t)/(t-s)$ ifadesinin minimum değeri bulunmalıdır. Bunun gereği olarak $L(1,4;\ s,t)$ ifadesi en küçük; $(t-s)$ ifadesi ise en büyük değeri almalıdır. O halde s ve t değerlerini (3.11) ve (3.12) ifadesindeki aralıklardan elde edilirse

$L(1,4;\ \alpha, 5-\alpha) = m([\alpha, 5-\alpha] \cap [1,4]) = m([1,4]) = 3$

$t - s = 5 - \alpha - \alpha = 5 - 2\alpha$

bulunmaktadır. İfadeler (3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$p_1(\alpha) = \min(L(1,4;\ s,t)/(t-s)) = 3\ /\ (5 - 2\alpha) \tag{3.13}$$

$p_2(\alpha)$ elde etmek için $L(1,4;\ s,t)/(t-s)$ ifadesinin maksimum değerini bulmak için $L(1,4;\ s,t)$ ifadesi en büyük, $(t-s)$ ifadesi ise en küçük değeri almalıdır. O halde

$L(1,4;\ 2-\alpha, 3+\alpha) = m([2-\alpha, 3+\alpha] \cap [1,4]) = 1 + 2\alpha$

$t - s = 3 + \alpha - 2 + \alpha = 1 + 2\alpha$

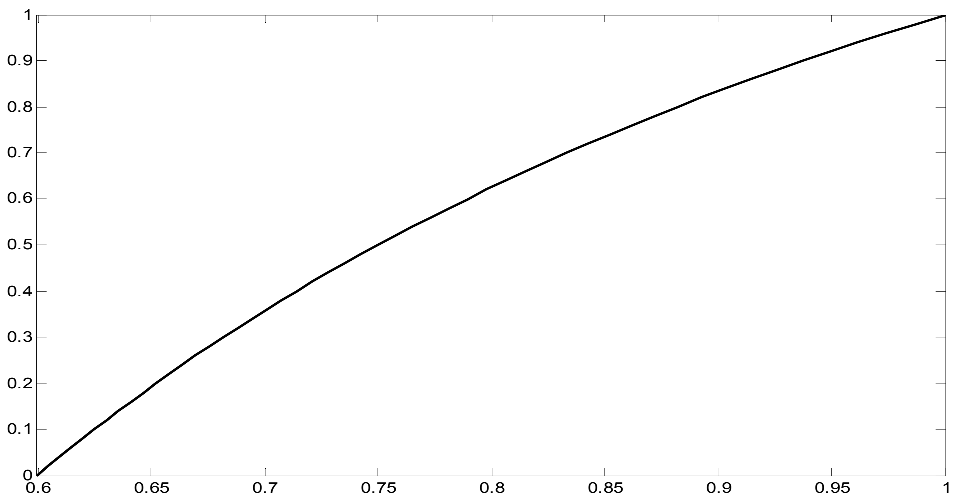
elde edilir. İfadeler (3.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$p_2(\alpha) = \max(L(1,4;\ s,t)/(t-s)) = (1 + 2\alpha)\ /\ (1 + 2\alpha) = 1 \tag{3.14}$$

(3.13) ve (3.14) ifadeleri yerine yazılırsa istenilen sonuç

$\tilde{P}[1,4][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] = [3/(5-2\alpha), 1]$

bulanık olasılığı elde edildi. Elde edilen bulanık olasılığın grafiği ise Şekil 3.1 ile verilmiştir.



Şekil 3.1. $\widetilde{\mathrm{P}}[1,4][\alpha] = [3/(5-2\alpha), 1]$ bulanık olasılığı grafiği

Denklem (3.7) kullanılarak düzgün dağılımın beklenen değeri hesaplanırsa

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \frac{(\tilde{a}+\tilde{b})}{2} = \frac{1}{2}\{[\alpha, 2-\alpha] + [3+\alpha, 5-\alpha]\} = \left[\frac{(3+2\alpha)}{2}, \frac{(7-2\alpha)}{2}\right]$$

$\alpha = 0$ için $\tilde{\mu}[0] = [1.5 / 3.5]$

ve

$\alpha = 1$ için $\tilde{\mu}[1] = [2.5 / 2.5]$

elde edilir. Yerlerine yazıldığında

$$\tilde{\mu} = (1.5 / 2.5 / 3.5) \tag{3.15}$$

bulanık beklenen değeri elde edilir.

Denklem (3.8) kullanılarak ise

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \frac{(\tilde{b}-\tilde{a})^2}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)([3+\alpha, 5-\alpha] - [\alpha, 2-\alpha])^2$$

olmak üzere

$\alpha = 0$ için $\tilde{\sigma}^2[0] = [0.0833, 2.0833]$

ve

$\alpha = 1$ için $\widetilde{\sigma}^2[1] = [0.7500, 0.7500]$

elde edilir. Değerler yerlerine yazılırsa

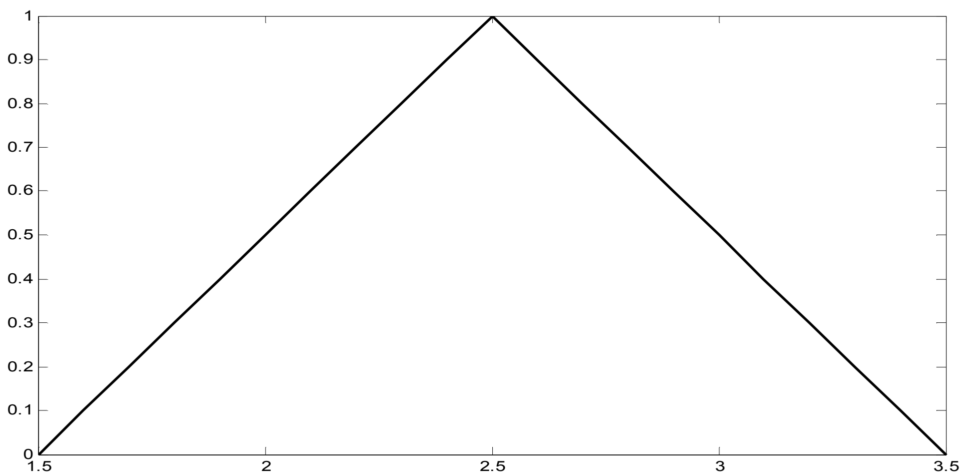
$\widetilde{\sigma}^2 = (0.0833\ /\ 0.7500\ /\ 2.0833)$

bulanık sayısı elde edilir. $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ için bulanık beklenen değer ve varyans sağlandığı gözönünde bulundurularak matlab programı ile aşağıdaki veri tablosu elde edilmektedir.

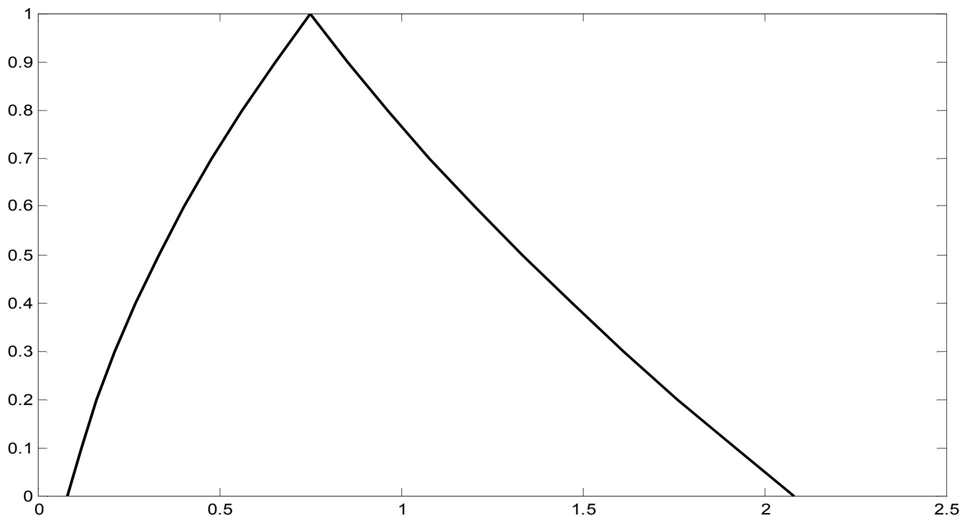
Tablo 3.1. $\widetilde{P}[1, 4]$ bulanık olasılığı için $\tilde{\mu}$ ve $\widetilde{\sigma}^2$ değerleri

α	$\tilde{\mu}$	$\widetilde{\sigma}^2$
0	[1.5000,3.5000]	[0.0833, 2.0833]
0.1	[1.6000,3.4000]	[0.1200, 1.9200]
0.2	[1.7000,3.3000]	[0.1633, 1.7633]
0.3	[1.8000,3.2000]	[0.2133, 1.6133]
0.4	[1.9000,3.1000]	[0.2700, 1.4700]
0.5	[2.0000,3.0000]	[0.3333, 1.3333]
0.6	[2.1000,2.9000]	[0.4033, 1.2033]
0.7	[2.2000,2.8000]	[0.4800, 1.0800]
0.8	[2.3000,2.7000]	[0.5633, 0.9633]
0.9	[2.4000,2.6000]	[0.6533, 0.8533]
1.0	[2.5000,2.5000]	[0.7500, 0.7500]

Yukarıda verilere göre matlab programı ile bulanık beklenen değerin ve bulanık varyansın grafiği sırasıyla Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 ile verilmiştir.



Şekil 3.2. Bulanık düzgün dağılımın bulanık beklenen değeri $\tilde{\mu} = (1.5/2.5/3.5)$



Şekil 3.3. Bulanık düzgün dağılımın varyansı $\tilde{\sigma}^2 = (0.0833 \ / \ 0.7500 \ / \ 2.0833)$

Örnek 3.2[2]: Müşteriler düzenli bir şekilde belirli bir mağazaya geliyor. Her bir müşterinin T-dakika periyodu ile gelindiği düşünüldüğünde X, müşterinin geldiği T dakikalarını ifade eden zaman olsun. Bu durumda X, U(0, T) bulanık düzgün dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu olmaktadır. $\tilde{P}(4 \leq X \leq 9)$ olasılığını istenmektedir. Burada T kesin şekilde bilinmeyen ve yaklaşık şekilde 10 bu nedenle $\tilde{T} = (8 \ / \ 10 \ /12)$ olarak alınacaktır.

Çözüm: $4 \leq X \leq 9$ ifadesinin olasılığı $\tilde{P}[4,9]$ bulanık olasılıktır. (3.6) denklemi kullanılarak $\tilde{P}[4,9] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ bulanık olasılığının α-kesimi hesaplanması gerekmektedir. $s = 0$ ve $t \in [8 + 2\alpha, 12 - 2\alpha]$ olmak üzere

$0 \leq \alpha \leq 0.5$ için

$$p_1(\alpha) = \min\big(L(4,9;\ 0,12 - 2\alpha)/(12 - 2\alpha)\big) = 5/(12 - 2\alpha) \tag{3.16}$$

$$p_2(\alpha) = \max\big(L(4,9;0,8 + 2\alpha)/(8 + 2\alpha)\big) = 5/9 \tag{3.17}$$

(3.16) ve (3.17) den

$$0 \leq \alpha \leq 0.5 \text{ için } \tilde{P}[4,9][\alpha] = \left[{}^{5}/_{12 - 2\alpha}, {}^{5}/_{9}\right] \tag{3.18}$$

dir. $0.5 \leq \alpha \leq 1$ için

$$\widetilde{P}[4,9][\alpha] = \left\{ {}^{5}\!/_{t} \,\middle|\, t \in [8 + 2\alpha, 12 - 2\alpha] \right\} \tag{3.19}$$

olduğundan $t \in [8 + 2\alpha, 12 - 2\alpha]$ olmak üzere

$$0.5 \leq \alpha \leq 1 \text{ için } \widetilde{P}[4,9][\alpha] = \left[{}^{5}\!/_{12 - 2\alpha} \,, {}^{5}\!/_{8 + 2\alpha} \right] \tag{3.20}$$

bulanık olasılığı elde edilir.

3.2.2. Bulanık Normal Dağılım

Tanım 3.6[2]: $N(\mu, \sigma^2)$ kesin normal dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \mu, \sigma^2)$, $x \in R$, beklenen değeri μ ve varyansı σ^2 olarak ifade edilmektedir. Bulanık normal dağılımda ise $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\sigma}^2 > 0$ bulanık parametreleri için $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ bulanık normal dağılımı ifade etmektedir. İstenilen [c, d] kapalı aralığındaki herhangi bir değeri içeren bulanık olasılığı hesaplamaktır. Bu bulanık olasılığı $\widetilde{P}[c, d]$ şeklinde gösterilmektedir. Aralık için elde edilen bu bulanık olasılığı R nin diğer E altkümelerine de genişletilebilmektedir.

$\forall \alpha \in [0, 1], \mu \in \tilde{\mu}[\alpha]$ ve $\sigma^2 \in \tilde{\sigma}^2[\alpha]$ olmak üzere verilen aralık standart normal dağılıma dönüştürülürse

$$z_1 = (c - \mu)/\sigma \text{ ve } \quad z_2 = (d - \mu)/\sigma \tag{3.21}$$

şeklinde elde edilir. O halde

$$\widetilde{P}[c, d][\alpha] = \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1)\, dx \,\middle|\, \mu \in \tilde{\mu}[\alpha], \sigma^2 \in \tilde{\sigma}^2[\alpha] \right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.22}$$

dir. (3.22) denklemi $\widetilde{P}[c, d]$ bulanık olasılığının α-kesimidir. (3.22) denkleminde $f(x; 0, 1)$ yoğunluk fonksiyonu (3.21) ifadesinden yararlanarak beklenen değeri 0, varyansı 1 olan standart normal dağılımın yoğunluk fonksiyonudur.

$$\widetilde{P}[c,d][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] \tag{3.23}$$

Bulanık olasılığı (3.23) olarak ifade edilmek üzere $p_1(\alpha)$ ifadesi $\widetilde{P}[c,d][\alpha]$ bulanık olasılığının minumum değeri, $p_2(\alpha)$ ise $\widetilde{P}[c,d][\alpha]$ bulanık olasılığının maksimum değeridir. Bilinen yöntemlerle bu minumum ve maksimum değerlerini bulmak zor bir iştir. Bu minumum ve maksimum değerlerini genetik algoritma, yada diğer nümerik teknikler ile bulunmaktadır.

$N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ bulanık normal dağılımında görülmektedir ki $\tilde{\mu}$ bulanık değer ile $\tilde{\sigma}^2$ bulanık varyansı sırasıyla μ kesin beklenen değeri ile σ^2 kesin varyansı' nın bulanıklaştırılmış halidir.

$\widetilde{M}$ bulanık beklenen değer olmak üzere α-kesimi için

$$\tilde{\mu} = \widetilde{M}[\alpha] = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\mu,\sigma^2)dx \,\middle|\, \mu \in \tilde{\mu}[\alpha], \sigma^2 \in \tilde{\sigma}^2[\alpha] \right\} \tag{3.24}$$

ifadesi elde edilmektedir.

$\widetilde{V}$ bulanık varyans olmak üzere α-kesimi için

$$\tilde{\sigma}^2 = \widetilde{V}[\alpha] = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x,\mu,\sigma^2)dx \,\middle|\, \mu \in \tilde{\mu}[\alpha], \sigma^2 \in \tilde{\sigma}^2[\alpha] \right\} \tag{3.25}$$

ifadesi elde edilmektedir.

Örnek 3.3[2]:

$\tilde{\mu} = (8\,/\,10\,/12)$ bulanık beklenen değeri ve $\tilde{\sigma}^2 = (4\,/\,5\,/6)$ bulanık varyansa sahip bir bulanık normal dağılım verilsin. [10, 15] kapalı aralığı için $\widetilde{P}[10\ 15]$ bulanık olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;0,1) = \left(1/\sqrt{2\pi} \right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

olmak üzere

$$g(x,y) = \int_{z_1}^{z_2} f(u;0,1)du \tag{3.26}$$

$$z_1 = (10 - x)/y \quad \text{ve} \quad z_2 = (15 - x)/y \ \ , 8 \le x \le 12, \qquad 4 \le y^2 \le 6 \tag{3.27}$$

ifadesini elde ederiz. g(x, y) fonksiyonu bulanık normal dağılıma sahip bulanık olasılığın hesaplanmasını sağlayacaktır.

$\tilde{\mu} = (8\ /\ 10\ /12)$ bulanık beklenen değerinin ve $\tilde{\sigma}^2 = (4\ /\ 5\ /6)$ bulanık varyasının α-kesimi

$$\tilde{\mu}[\alpha] = [8 + 2\alpha, 12 - 2\alpha], \qquad \tilde{\sigma}^2[\alpha] = [4 + \alpha, 6 - \alpha] \tag{3.28}$$

elde edilir.

α = 1 için (3.28) denkleminde yerlerine yazılırsa

$\tilde{\mu}[1] = [8 + 2, 12 - 2] = [10, 10] = 10$ ve $\tilde{\sigma}^2[1] = [4 + 1, 6 - 1] = 5$

(3.22), (3.26), (3.27)' de x ve y^2 değerleri için

$\tilde{P}[10,15][1] = \int_{(10-x)/y}^{(15-x)/y} \left(1/\sqrt{2\pi}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} = [0.4873, 0.4873]$

olarak elde edilir.

α = 0 için (3.28) ifadesinde $\alpha = 0$ yerine yazılırsa

$\tilde{\mu}[0] = [8, 12]$ ve $\tilde{\sigma}^2[0] = [4, 6]$

aralıkları elde edilir. Bu aralık ifadelerini elde edebilmek için denklem (3.26) ve (3.27)' de x ve y değerleri sırasıyla $[8, 12]$, $[2, \sqrt{6}]$ aralıklarından alınarak bulunur. Böylece

x =8 , y=2 ise g(8, 2) = 0.1584 bir minimum değer

ve

x=12, y=2 ise g(12, 2) = 0.7745 maksimum değerdir.

O halde $\alpha = 0$ için

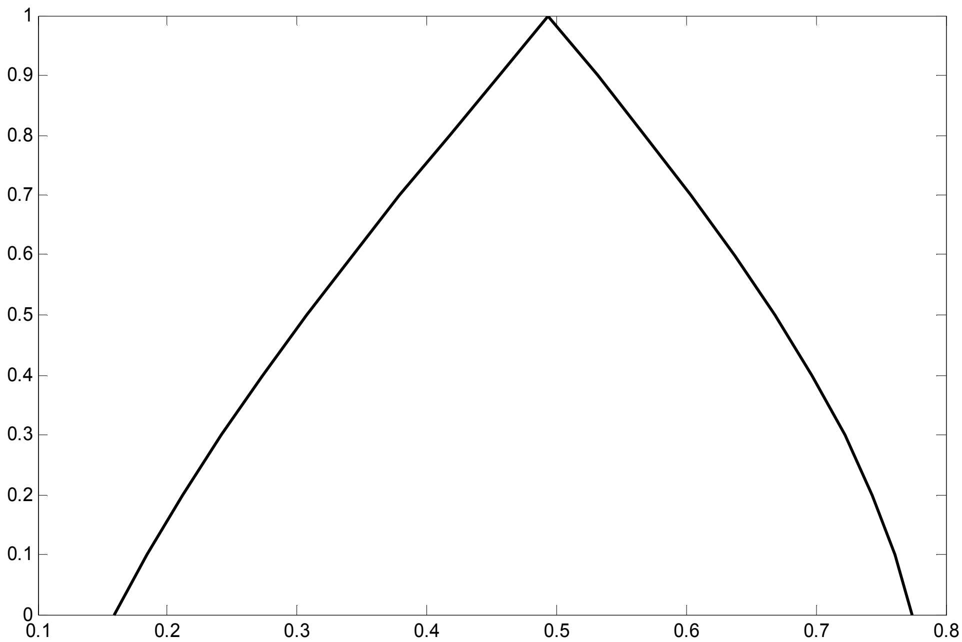
$\tilde{P}[10,15][0] = [0.1584, 0.7745]$

bulunur. $\forall 0 \le \alpha \le 1$ için $\tilde{P}[10,15][\alpha]$ bulanık olasılığının değerleri Tablo 3.2 ile verilmiştir.

Tablo 3.2. $\widetilde{P}[10,15][\alpha]$ bulanık olasılığının veri tablosu

α	$p_1(\alpha)$	$p_2(\alpha)$	$\widetilde{P}[10,15][\alpha]$
0	0.1584	0.7745	[0.1584,0.7745]
0.1	0.1837	0.7611	[0.1837,0.7611]
0.2	0.2114	0.7436	[0.2114,0.7436]
0.3	0.2413	0.7221	[0.2413,0.7221]
0.4	0.2733	0.6970	[0.2733,0.6970]
0.5	0.3072	0.6687	[0.3072,0.6687]
0.6	0.3427	0.6376	[0.3427,0.6376]
0.7	0.3795	0.6040	[0.3795,0.6040]
0.8	0.4173	0.5685	[0.4173,0.5685]
0.9	0.4555	0.5316	[0.4555,0.5316]
1.0	0.4938	0.4938	[0.4938,0.4938]

Elde edilen veriler ile oluşturulan grafik Şekil 3.4' deki gibidir.



Şekil 3.4. Bulanık normal dağılıma göre $\widetilde{P}[10,15]$ bulanık olasılığı

Şekil 3.4 deki grafik y değeri 2 ile $\sqrt{6}$ arasında bir değerde sabit için x değişken ve x=8 de sabitlendiğinde y değişken olmak üzere bu aralıklarda g(x, y) fonksiyonu artan; ek olarak x=12 de y değerleri için g(x, y) fonksiyonu azalandır. Bunun anlamı bulanık olasılık her α kesimi için y en küçük değeri ve x en büyük değeri aldığında maksimum değer; y en küçük ve x' de en küçük değeri aldığında minimum değerini alır.

Bulanık normal dağılımın bulanık beklenen değeri ve varyansı sırasıyla

$$\tilde{\mu} = \tilde{M} = (8 / 10 / 12) \tag{3.29}$$

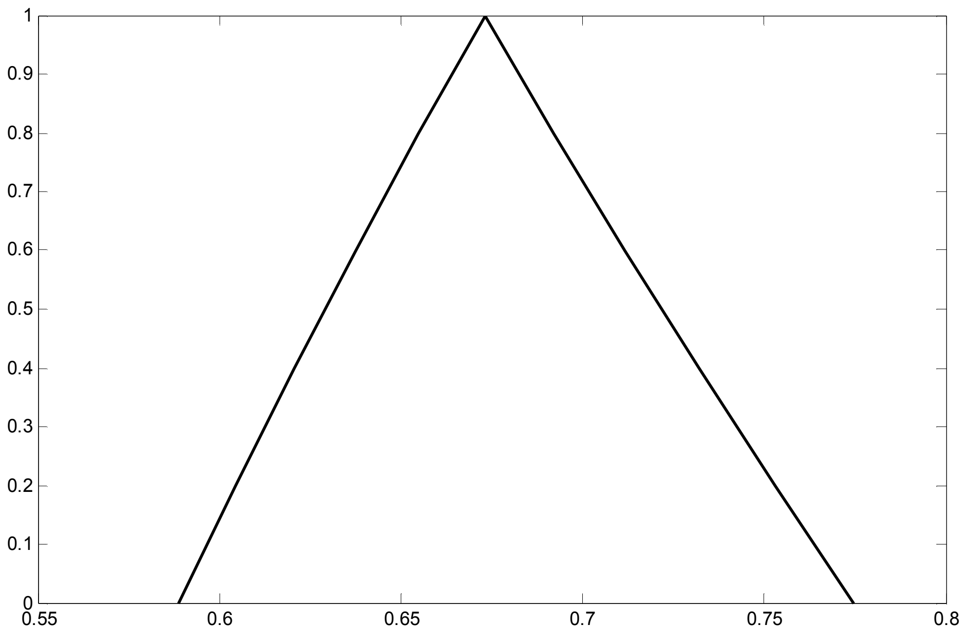
ve

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{V} = (4 / 5 / 6) \tag{3.30}$$

olarak elde edilir.

Soru 3.1: Örnek 3.3' ün grafik çiziminde y sabit tutularak x değişken olarak kabul edilerek çizim yapılmıştır. Soru şudur ki y değişken x sabit yada daha karmaşık olarak x ve y' nin her ikiside değişken olduğunda elde edilebilecek grafik nasıl oluşur.

Çözüm: Matlab programıyla gerekli komutlar yazılarak çözüm yapıldığında ilk önce x=12 sabit olmak üzere $y \in [4-\alpha, 6+\alpha]$ değişken olarak alındığında



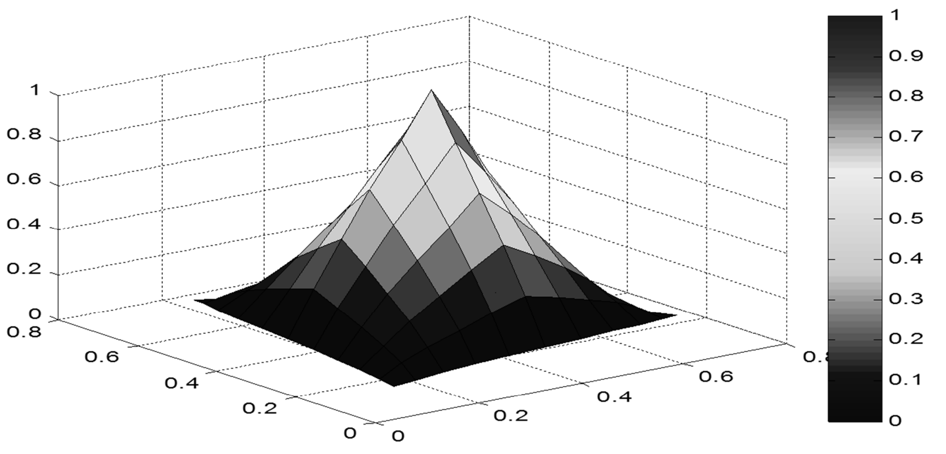
Şekil 3.5. x=12 ve $y \in [4-\alpha, 6+\alpha]$ değişken olmak üzere $\tilde{P}[10, 15]$ bulanık olasılığı

Şimdi ise son durum olarak hem x değişken hemde y değişken olduğu kabul edildiğinde işlemler düzgün olması açısından $y^2 \in [4,9]$ olmak üzere $y \in [2,3]$ ve $x \in [8,12]$ alındığında üç boyutta bir yüzey elde edilir. Tablo 3.3 ile sadece bu elde edilen $\widetilde{P}[10,15][\alpha]$ bulanık olsılığın bir kısmı veri olarak sunulmuştur.

Tablo 3.3. $\widetilde{P}[10,15][\alpha]$ bulanık olasılığının x ve y değişkenleri veri tablosu

α	x=8, x=12,y=2, y=2.5		
0	[0.1584,0.7745]	[0.1700,0.7530]	[0.1809,0.7320]
0.2	[0.2114,0.7436]	[0.2222,0.7242]	[0.2322,0.7054]
0.4	[0.2733,0.6970]	[0.2823,0.6810]	[0.2903,0.6652]
0.6	[0.3427,0.6376]	[0.3487,0.6256]	[0.3539,0.6138]
0.8	[0.4173,0.5685]	[0.4194,0.5613]	[0.4208,0.5539]
1.0	[0.4938,0.4938]	[0.4914,0.4914]	[0.4885,0.4885]
α			x=8, x=12, y=2, y=2.5
0	[0.1911,0.7117]	[0.2006,0.6920]	[0.2093, 0.6731]
0.2	[0.2413,0.6870]	[0.2495,0.6692]	[0.2569,0.6520]
0.4	[0.2974,0.6498]	[0.3036,0.6348]	[0.3090,0.6201]
0.6	[0.3581,0.6021]	[0.3616,0.5905]	[0.3643,0.5790]
0.8	[0.4215,0.5463]	[0.4216,0.5385]	[0.4211,0.5307]
1.0	[0.4851,0.4851]	[0.4814,0.4814]	[0.4772,0.4772]

Elde edilen veriler ile oluşturulan grafik Şekil 3.6' daki gibidir.



Şekil 3.6. $x \in [8+2\alpha, 12-2\alpha]$ ve $y \in [2+\frac{\alpha}{2}, 3-\frac{\alpha}{2}]$ için $\widetilde{P}[10,15][\alpha]$ bulanık olasılığı üç boyutta bir yüzey belirtir.

Örnek 3.4[2]: Savaş jetlerinde kokpitler sadece erkek pilotlar için dizayn edilirdi. Bununla beraber US Hava Kuvvetleri şimdilerde savaş jetleri için kadınlarında mükemmel şekilde iyi pilotluk yaptıklarını kabul ediyorlar. Bu yüzden çeşitli kokpit değişiklikleri yeni kadın pilotlara daha uygun hale getirildi. Savaş jetlerinde kullanılan fırlatma koltuğu ağırlığı 140 ile 200 pounds olan erkek pilotlar için dizayn edildi. Olası yeni kadın pilotların verileri temel alındığında kadın pilotların ağırlıkları standart sapması 25 pounds ve ortalaması 143 pounds normal dağılım ile tahmin verileri oluşturuldu. Ağırlığı 140 pounds dan az ve 200 pounds dan fazla olan her kadın pilot eğer jetten fırlatılırsa ciddi ve büyük yaralanmalara uğrayabilir. US Hava Kuvvetleri, n-tane olası kadın pilot üzerinden rasgele bir örnekleme verildiğinde, kadın pilotların ortalama ağırlıklarının 140 ve 200 pounds arasında olma olasılıklarının ne olduğunu bilmek istiyor. Böyle soruların cevabı, fırlatma koltuklarının olası yeniden dizaynı için önemlidir.

Standart sapması 25 pounds ve 140 pounds ortalama ile bir nokta tahminidir ve bu sayıların kullanımı bu tahminlerde kesin değerler vermeyecektir. Standart sapması $\widetilde{\sigma}$ ve ortalaması $\tilde{\mu}$ olan bulanık sayılar temel alınarak güven aralığı kullanılacaktır.

$\tilde{\mu} = (140\,/\,143\,/\,146)$ ve $\widetilde{\sigma} = (23\,/\,25\,/\,27)$ ile beraber n=36 kadın pilotun rasgele örnekleminin ağırlık ortalaması y olsun. Standart sapması $\widetilde{\sigma}/\sqrt{36}$ ve ortalaması $\tilde{\mu}$ ile bulanık normal dağılıma sahip $y \in [140, 200]$ için $\widetilde{P}[140, 200]$ bulanık olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: $\widetilde{P}[140, 200]$ bulanık olasılığının α-kesimi

$$\widetilde{P}[140, 200][\alpha] = \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x; 0, 1)\, dx \,\middle|\, \mu \in \tilde{\mu}[\alpha], \sigma \in \widetilde{\sigma}[\alpha] \right\} \tag{3.31}$$

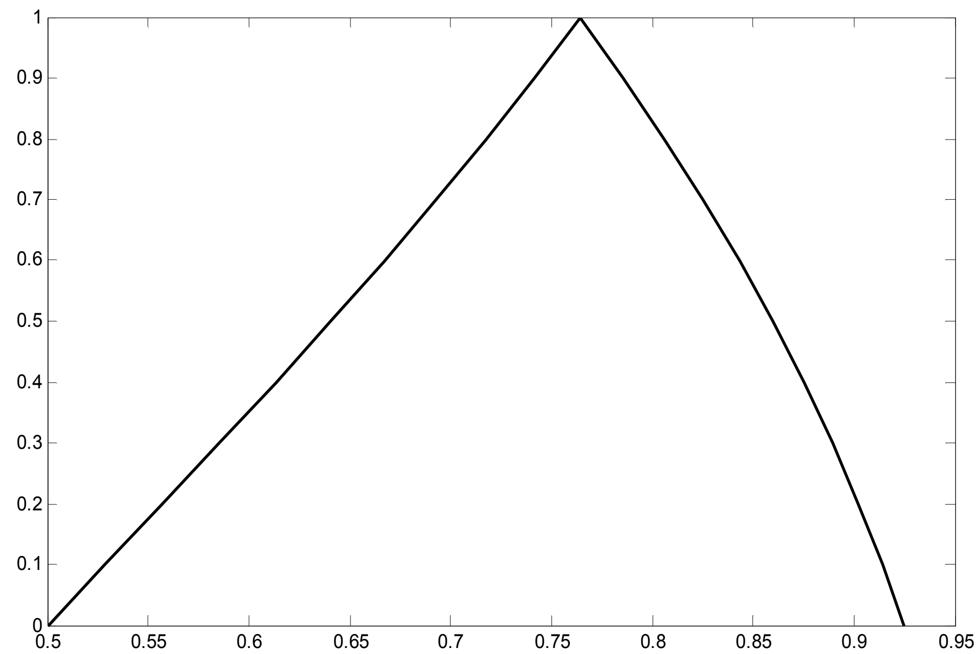
$$z_1 = \frac{6(140 - \mu)}{\sigma} \quad \text{ve} \quad z_2 = \frac{6(200 - \mu)}{\sigma} \tag{3.32}$$

olarak bulunur. Son ifadede verilen bulanık olasılık Matlab programı ile hesaplanırsa

Tablo 3.4. $\widetilde{P}[140, 200]$ bulanık olasılığının değerleri

α	$p_1(\alpha)$	$p_2(\alpha)$	$\widetilde{P}[140, 200]$
0	0.5000	0.9251	$[0.5000, 0.9251]$
0.1	0.5287	0.9143	$[0.5287, 0.9143]$
0.2	0.5572	0.9025	$[0.5572, 0.9025]$
0.3	0.5855	0.8895	$[0.5855, 0.8895]$
0.4	0.6133	0.8753	$[0.6133, 0.8753]$
0.5	0.6406	0.8599	$[0.6406, 0.8599]$
0.6	0.6671	0.8433	$[0.6671, 0.8433]$
0.7	0.6929	0.8254	$[0.6929, 0.8254]$
0.8	0.7177	0.8062	$[0.7177, 0.8062]$
0.9	0.7415	0.7858	$[0.7415, 0.7858]$
1.0	0.7642	0.7642	$[0.7642, 0.7642]$

elde edilir. Bu veriler göz önünde bulundurularak grafiksel olarak ise aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.



Şekil 3.7. US Hava Kuvvetleri kadın pilotlar için fırlatma koltuğu için elde edilen $\widetilde{P}[140, 200]$ bulanık olasılığı

3.2.3. Bulanık Üstel Dağılım

Tanım 3.7[2]: Genel durumda kesin üstel dağılım E(λ) olmak üzere kesin üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\lambda)=\begin{Bmatrix}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

şeklindedir.

Kesin üstel dağılım E(λ)' nın beklenen değeri 1/λ ve varyansı $1/\lambda^2$ olduğu bilinmektedir. Kesin durumu Denklem (3.33) ile verildikten sonra $\tilde{\lambda}>0$ bulanık sayı olmak üzere $E(\tilde{\lambda})$ bulanık üstel dağılımı göz önünde bulundurulacaktır.

$c>0$, [c, d] aralığındaki herhangi bir değerin bulanık olasılığını incelemek için $\widetilde{P}[c,d]$ ifadesinin hesaplanması gözönünde bulundurulacaktır. [c,d] aralığını genişleterek R' nin diğer tüm E altkümeleri için $\widetilde{P}[E]$ bulanık olasılığına genelleştirilmektedir.

$$\widetilde{P}[c,d][\alpha]=\left\{\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx \,\middle|\, \lambda\in\tilde{\lambda}[\alpha]\right\},\forall\alpha \tag{3.34}$$

$\widetilde{P}[c,d][\alpha]=[p_1(\alpha),p_2(\alpha)]$, $0\leq\alpha\leq 1$ olmak üzere

$$p_1(\alpha)=\min\left\{\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx \,\middle|\, \lambda\in\tilde{\lambda}[\alpha]\right\} \tag{3.35}$$

$$p_2(\alpha)=\max\left\{\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx \,\middle|\, \lambda\in\tilde{\lambda}[\alpha]\right\} \tag{3.36}$$

olur. (3.34) denkleminde integral alındığında

$$h(\lambda)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-c\lambda}-e^{-d\lambda} \tag{3.37}$$

elde edilir. Burada $\lambda^*=-[\ln(c/d)]/(d-c)$ olmak üzere

1) $0 < \lambda < \lambda^*$, λ' nın fonksiyonu h artandır,

2) $\lambda^* < \lambda$, λ' nın fonksiyonu h azalandır.

3) $\tilde{\lambda} > \lambda^*$ olduğunu varsayılsın.

$\tilde{\lambda}[\alpha] = [\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)]$ olmak üzere

$$p_1(\alpha) = h(\lambda_2(\alpha)) \tag{3.38}$$

$$p_2(\alpha) = h(\lambda_1(\alpha)) \tag{3.39}$$

olarak bulunmaktadır.

Genel anlamda $E(\tilde{\lambda})$' nın bulanık beklenen değeri $\tilde{\mu}$ olmak üzere α-kesimi

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx \,\middle|\, \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha] \right\}, \forall\alpha \tag{3.40}$$

integrali elde edilmektedir. (3.40) ifadesindeki integral alındığında

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \int_0^\infty x.\lambda e^{-\lambda x} dx = 1/\tilde{\lambda} \tag{3.41}$$

bulanık beklenen değeri elde edilmektedir. (3.41) denklemi göz önüne alınarak kesin durumda üstel dağılımın beklenen değeri $1 / \lambda$ olmakla birlikte bulanık üstel dağılımın bulanık beklenen değeri $1 / \tilde{\lambda}$ elde edilmektedir. Aynı şekilde bulanık üstel dağılımın bulanık varyansı $1 / \tilde{\lambda}^2$ şeklinde elde edilmektedir. Bulanık üstel dağılımın bulanık beklenen değeri ve varyansı kesin beklenen değerin ve varyansın bulanıklaştırılmasıyla elde edildiği görülmektedir.

Örnek 3.4[2]: $\tilde{\lambda} = (1 / 3 / 5)$ olmak üzere [1, 4] kapalı aralığında $\tilde{P}[1,4]$ bulanık olasılığını bulanık beklenen değerini ve bulanık varyansını hesaplayınız.

Çözüm: $\tilde{\lambda} = (1 / 3 / 5)$ bulanık sayısı için α-kesimi $\tilde{\lambda}[\alpha] = [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha]$ şeklinde elde edilir. İfadeler sırasıyla (3.38) ve (3.39) denklemlerinde yerlerine yazılırsa

$$p_1(\alpha) = h(5-2\alpha) = e^{-(5-2\alpha)} - e^{-4(5-2\alpha)}$$

ve

$$p_2(\alpha) = h(1+2\alpha) = e^{-(1+2\alpha)} - e^{-4(1+2\alpha)}$$

değerleri elde edilmektedir. Buradan $\alpha = 0$ kesmesi için

$$p_1(0) = e^{-5} - e^{-20} = 0.0067$$

ve

$$p_2(0) = e^{-1} - e^{-4} = 0.3496$$

değerleri bulunmaktadır. Bu değerler $\widetilde{P}[c,d][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ ifadesinde yerine yazılırsa

$\alpha = 0$ kesimi için $\widetilde{P}[1,4][0] = [0.0067, 0.3496]$

ve

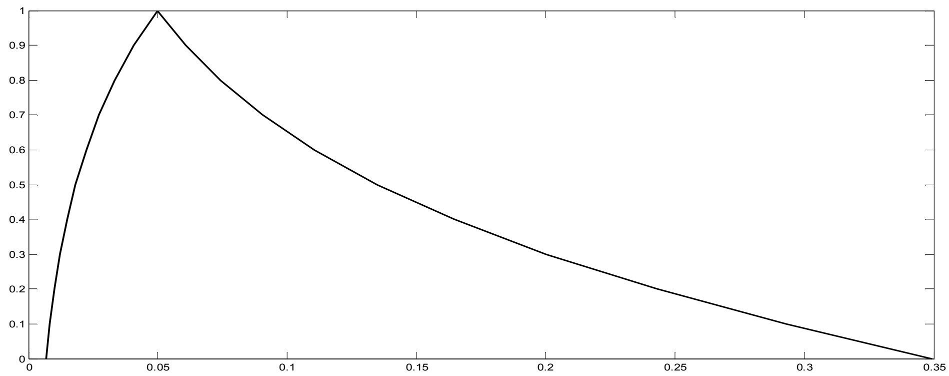
$\alpha = 1$ kesimi için $\widetilde{P}[1,4][1] = [0.0498, 0.0498]$

bulanık olasılık değerleri elde edilmektedir. $\widetilde{P}[1,4]$ bulanık olasılığı $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ için sağlandığı bilindiğine göre tüm olasılık değerleri Tablo 3.5 verilmektedir.

Tablo 3.5. $\widetilde{P}[1,4]$ bulanık olasılığının değerleri

α	$p_1(\alpha)$	$p_2(\alpha)$	$\widetilde{P}[1,4][\alpha]$
0	0.0067	0.3496	[0.0067,0.3496]
0.1	0.0082	0.2930	[0.0082,0.2930]
0.2	0.0101	0.2429	[0.0101,0.2429]
0.3	0.0123	0.2002	[0.0123,0.2002]
0.4	0.0150	0.1646	[0.0150,0.1646]
0.5	0.0183	0.1350	[0.0183,0.1350]
0.6	0.0224	0.1107	[0.0224,0.1107]
0.7	0.0273	0.0907	[0.0273,0.0907]
0.8	0.0334	0.0742	[0.0334,0.0742]
0.9	0.0408	0.0608	[0.0408,0.0608]
1.0	0.0498	0.0498	[0.0498,0.0498]

Elde edilen veri değerleri gözönünde bulundurularak Matlab programıyla Şekil 3.8 grafiği elde edilmiştir.



Şekil 3.8. Bulanık üstel dağılıma göre $\widetilde{P}[1,4]$ olasılığı

(3.41) denkleminden yararlanılırsa

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = 1/\tilde{\lambda} = {}^{1}\!/_{[1+2\alpha, 5-2\alpha]} = \left[\frac{1}{5-2\alpha}, \frac{1}{1+2\alpha}\right] \tag{3.42}$$

formülüyle $\widetilde{P}[1,4]$ bulanık üstel dağılımı için bulanık beklenen değeri ve

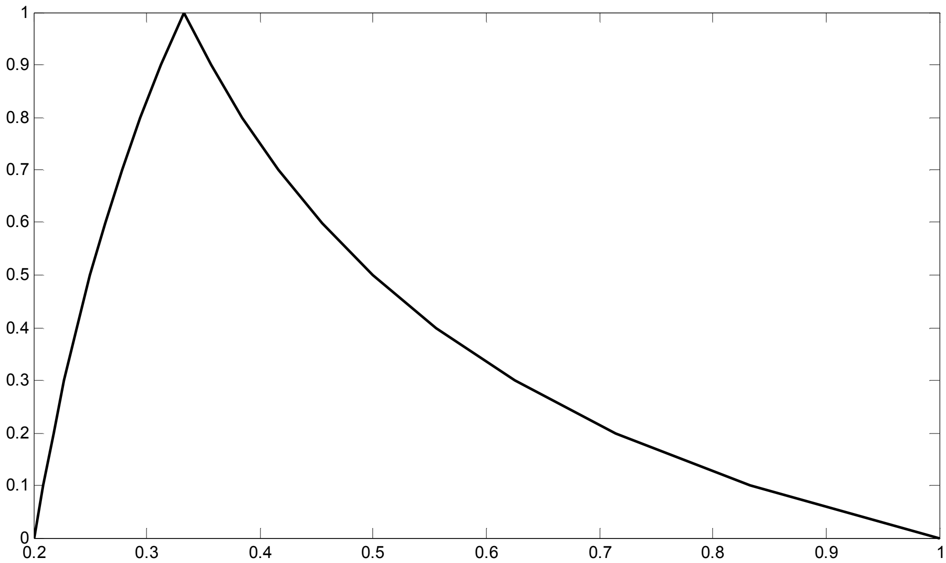
$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2} = \left[\frac{1}{(5-2\alpha)^2}, \frac{1}{(1+2\alpha)^2}\right] \tag{3.43}$$

fomülüyle $\widetilde{P}[1,4]$ bulanık üstel dağılımı için bulanık varyansı elde edilir. Matlab programı yardımıyla (3.42) ve (3.43) kullanılarak

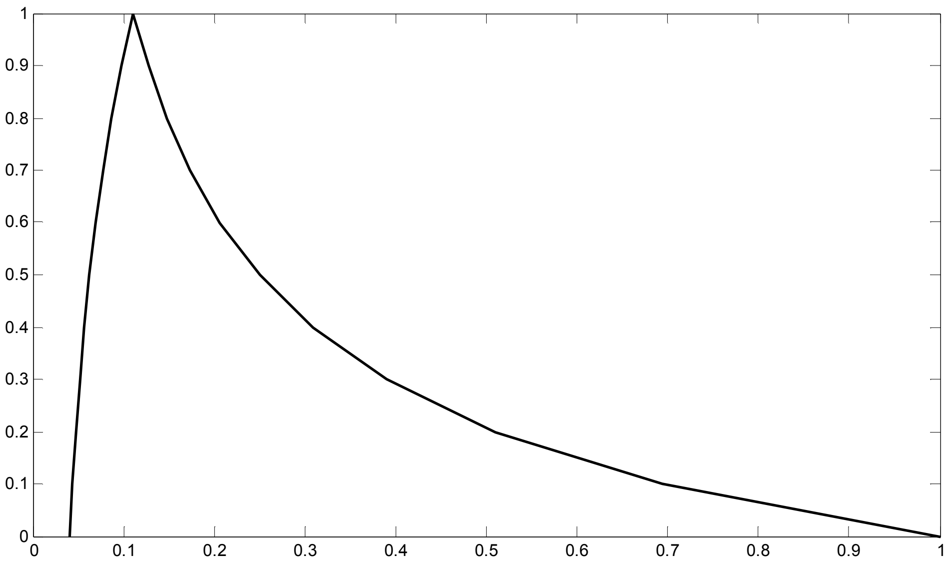
Tablo 3.6. $\widetilde{P}[1,4][\alpha]$ bulanık dağılımın $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\sigma}^2$ değerleri

α	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\sigma}^2$
0	[0.2000,1.0000]	[0.0400,1.0000]
0.1	[0.2083,0.8333]	[0.0434,0.6944]
0.2	[0.2174,0.7143]	[0.0473,0.5102]
0.3	[0.2273,0.6250]	[0.0517,0.3906]
0.4	[0.2381,0.5556]	[0.0567,0.3086]
0.5	[0.2500,0.5000]	[0.0625,0.2500]
0.6	[0.2632,0.4545]	[0.0693,0.2066]
0.7	[0.2778,0.4167]	[0.0772,0.1736]
0.8	[0.2941,0.3846]	[0.0865,0.1479]
0.9	[0.3125,0.3571]	[0.0977,0.1276]
1.0	[0.3333,0.3333]	[0.1111,0.1111]

veri tablosu elde edilir. Bu veriler kullanılarak bulanık beklenen değer ve bulanık varyansın grafikleri Şekil 3.9 ve Şekil 3.10 ile verilmiştir.



Şekil 3.9. $\tilde{\lambda} = (1\ /\ 3\ /\ 5)$ parametreli bulanık üstel dağılımın bulanık beklenen değeri



Şekil 3.10. $\tilde{\lambda} = (1\ /\ 3\ /\ 5)$ parametreli üstel dağılımın bulanık varyansı

Örnek 3.5: $\tilde{\lambda} = (1.9/\ 2\ /\ 2.1)$ bulanık beklenen değeri ve $[1,3]$ kapalı aralığı için $\widetilde{P}[1,3]$ bulanık olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: $\tilde{\lambda} = (1.9\ /\ 2\ /\ 2.1)$ bulanık sayısının α-kesimi

$\tilde{\lambda}[\alpha] = [1.9 + 0.1\alpha, 2.1 - 0.1\alpha],\ \forall\alpha$

$\widetilde{P}[1,3][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ olmak üzere $p_1(\alpha)$, $p_2(\alpha)$ değerlerini bulmak için denklem $(3.38) - (3.39)$ kulanılırsa

$$p_1(\alpha) = h(2.1 - 0.1\alpha) = e^{-2.1+0.1\alpha} - e^{-6.3+0.3\alpha} \tag{3.44}$$

ve

$$p_2(\alpha) = h(1.9 + 0.1\alpha) = e^{-1.9-0.1\alpha} - e^{-5.7-0.3\alpha} \tag{3.45}$$

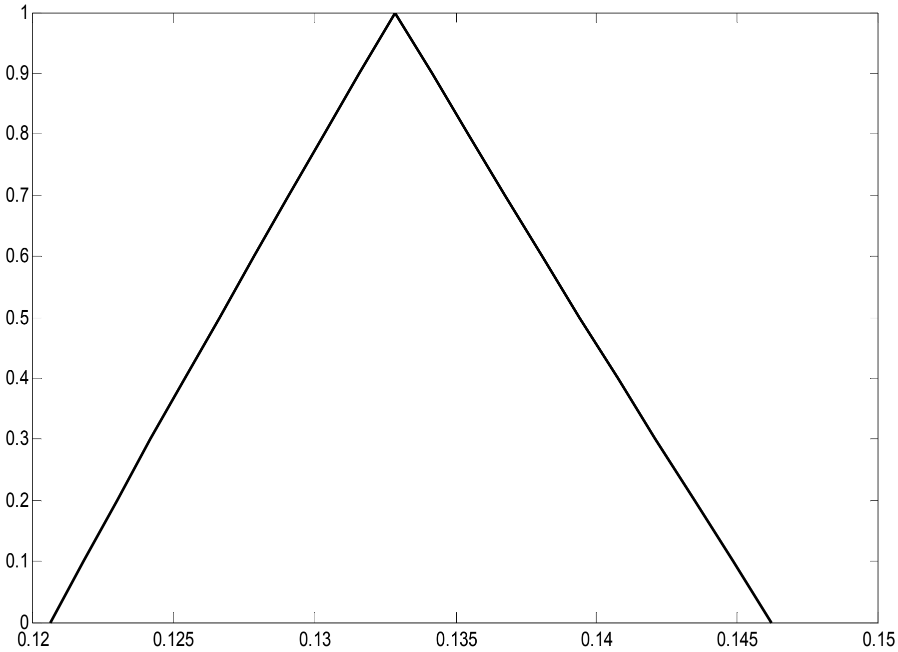
elde edilir.

Matlab programı yardımyla $(3.44) - (3.45)$ denklemleri gözönünde bulundurularak çözülürse

Tablo 3.7. $\widetilde{P}[1,3][\alpha]$ bulanık olasılığının değerleri

α	$p_1(\alpha)$	$p_2(\alpha)$	$\widetilde{P}[1,3][\alpha]$
0	0.1206	0.1462	[0.1206,0.1462]
0.1	0.1218	0.1448	[0.1218,0.1448]
0.2	0.1230	0.1435	[0.1230,0.1435]
0.3	0.1242	0.1421	[0.1242,0.1421]
0.4	0.1254	0.1407	[0.1254,0.1407]
0.5	0.1266	0.1394	[0.1266,0.1394]
0.6	0.1278	0.1381	[0.1278,0.1381]
0.7	0.1291	0.1367	[0.1291,0.1367]
0.8	0.1303	0.1354	[0.1303,0.1354]
0.9	0.1316	0.1341	[0.1316,0.1341]
1.0	0.1329	0.1329	[0.1329,0.1329]

bulanık olasılık değerleri elde edilir. Tablo 3.7 deki $\forall 0 \le \alpha \le 1$ için $\widetilde{P}[1,3]$ bulanık olasılık değerleri gözönüne alınarak matlab programı ile çizdirilirse Şekil 3.11 elde edilir.

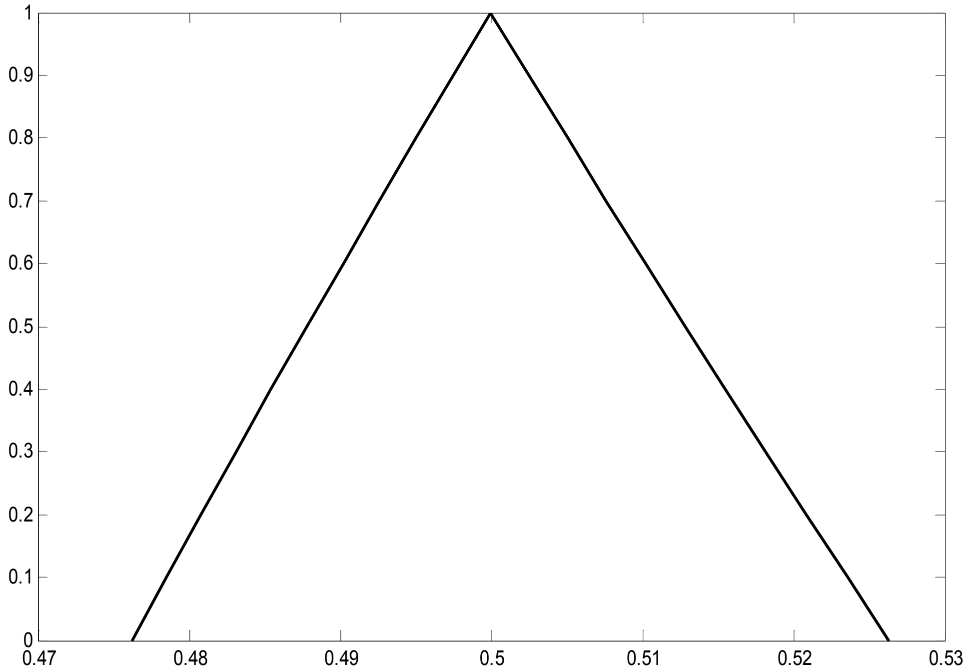


Şekil 3.11. $\tilde{\lambda} = (1.9/\ 2\ /\ 2.1)$ paremetre ile bulanık üstel dağılım $\widetilde{P}[1, 3]$ olasılığı

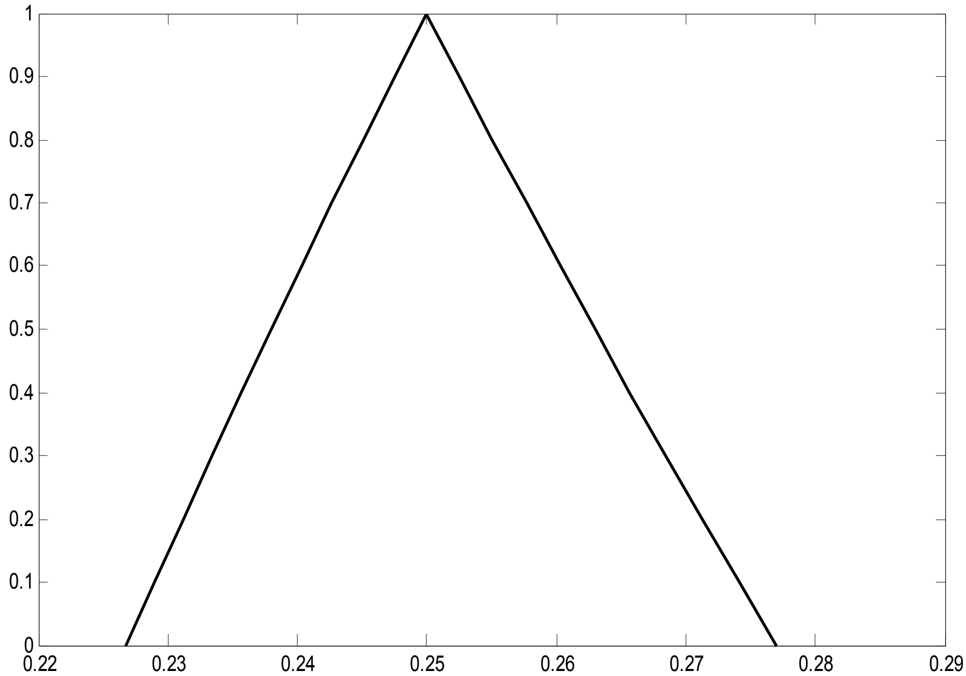
$\widetilde{P}[1, 3]$ bulanık üstel dağılımın bulanık beklenen değeri ve bulanık varyansı hesaplandığında aşağıdaki Tablo 3.8 deki veriler elde edilmektedir.

Tablo 3.8. $\widetilde{P}[1, 3][\alpha]$ bulanık olasılığının $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\sigma}^2$ değerleri

α	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\sigma}^2$
0	[0.4762,0.5263]	[0.2268,0.2770]
0.1	[0.4785,0.5236]	[0.2289,0.2741]
0.2	[0.4808,0.5208]	[0.2311,0.2713]
0.3	[0.4831,0.5181]	[0.2334,0.2685]
0.4	[0.4854,0.5155]	[0.2356,0.2657]
0.5	[0.4878,0.5128]	[0.2380,0.2630]
0.6	[0.4902,0.5102]	[0.2403,0.2603]
0.7	[0.4926,0.5051]	[0.2427,0.2577]
0.8	[0.4950,0.5076]	[0.2451,0.2551]
0.9	[0.4975,0.5025]	[0.2475,0.2525]
1.0	[0.5000,0.5000]	[0.2500,0.2500]



Şekil 3.12. $\widetilde{\mathrm{P}}[1, 3]$ bulanık üstel dağılımın bulanık beklenen değeri



Şekil 3.13. $\widetilde{\mathrm{P}}[1, 3]$ bulanık üstel dağılımın bulanık varyansı

3.2.4. Bulanık Gamma Dağılımı

Tanım 3.8: Gamma (k,θ) kesin gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;k,\theta) = x^{k-1}\frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k\Gamma(k)} \ , \qquad \Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}\,dx = (k-1)! \qquad (3.46)$$

$k, \ \theta > 0$ ve $x > 0$ dır. Gamma dağılımını diğer bir ifade şekli ise Gamma(a, b) olmak üzere k = a ve b = $1/\theta$ olarak alındığında

$$f(x;a,b) = x^{a-1}\frac{b^a e^{-bx}}{\Gamma(a)} \ , \qquad \Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx = (a-1)! \qquad (3.47)$$

$a, b > 0$ ve $x > 0$ dır.

$\tilde{k}, \tilde{\theta} > 0$ bulanık sayı olmak üzere Gamma $(\tilde{k}, \tilde{\theta})$ bulanık gamma dağılımı düşünülmelidir. $[c, d]$ kapalı aralığında herhangi bir değerin bulanık olasılığı $\widetilde{P}[c, d]$ bulanık gamma dağılımı ile incelenecektir. Bu ifade ise tüm $E \subset R$ alt kümelerine genişletilerek $\widetilde{P}[E]$ bulanık olasılığına genelleştirilmektedir. $\widetilde{P}[c, d]$ bulanık olasılığı

$$\widetilde{P}[c,d][\alpha] = \left\{ \int_c^d f(u;k,\theta)du \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha] \right\} \ , \qquad \forall\, 0 < \alpha < 1 \qquad (3.48)$$

dir.

$\widetilde{P}[c,d][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ bulanık olasılığında

$$p_1(\alpha) = \min\left\{ \int_c^d f(u;k,\theta)du \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha] \right\} \ , \qquad \forall\, 0 < \alpha < 1 \qquad (3.49)$$

$$p_2(\alpha) = \max\left\{ \int_c^d f(u;k,\theta)\,du \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha] \right\} \ , \qquad \forall\, 0 < \alpha < 1 \qquad (3.50)$$

ifadeleri elde edilmektedir. Bilinen yöntemlerle bu integrallerin hesaplanması zor olduğu için matlab programı yardımıyla örneklendirmeler ve integral hesaplamaları yapılmaktadır.

Gamma dağılımının beklenen değeri $\mu = k\theta$ olduğu bilinmektedir. Bulanık gamma dağılımının bulanık beklenen değerinin α-kesimi

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \int_0^\infty \frac{x x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha] \right\}, \quad \forall\, 0 < \alpha < 1 \tag{3.51}$$

olarak ifade edilmektedir. Kesin beklenen değer $\mu = k\theta$ iken bulanık beklenen değeri

$$\tilde{\mu} = \tilde{k}\tilde{\theta} \tag{3.52}$$

olmaktadır. Benzer şekilde gamma dağlımının varyansı $\sigma^2 = k\theta^2$ olduğu bilinmektedir. Bulanık gamma dağılımının varyansının α-kesimi

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \left\{ \int_0^\infty \frac{(x-\mu)^2 x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha], \mu \in \tilde{\mu}[\alpha] \right\}, \quad \forall\, 0 < \alpha < 1 \tag{3.53}$$

olarak bulunur. Gamma dağılımının varyansı $\sigma^2 = k\theta^2$ iken bulanık gamma dağılımının bulanık varyansı

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{k}\tilde{\theta}^2 \tag{3.54}$$

olarak elde edilmektedir.

Örnek 3.6: $\tilde{k} = (1 / 3 / 5)$, $\tilde{\theta} = (6 / 7 / 8)$ bulanık sayıları verilsin. Bulanık gamma dağılımı ile $[3, 7]$ kapalı aralığı için $\tilde{P}[3, 7]$ bulanık olasılığını, bulanık beklenen değerini ve bulanık varyansını hesaplayınız.

Çözüm: $\tilde{k} = (1 / 3 / 5)$ ve $\tilde{\theta} = (6 / 7 / 8)$ bulanık sayıları olmak üzere α-kesimleri

$$\tilde{k}[\alpha] = [1 + 2\alpha, 5 - 2\alpha] \quad \text{ve} \quad \tilde{\theta}[\alpha] = [6 + \alpha, 8 - \alpha], \forall\alpha \tag{3.55}$$

olmak üzere $\tilde{P}[3, 7][\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ bulanık olasılığında α = 0 ve α = 1 değerleri için $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$ değerleri bulunacaktır. Görülmektedir ki (3.55)' de α = 1 için $\tilde{k}[1] = [3,3] = 3$ ve $\tilde{\theta}[1] = [7,7] = 7$

elde edilmektedir. Yukarıda elde edilen değerler $\alpha = 1$ için $(3.49) - (3.50)$ denklemlerinde yerine yazılırsa

$$p_1(\alpha) = \min\left\{\int_c^d f(u;k,\theta)du \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha]\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_3^7 x^{k-1}e^{-\frac{x}{\theta}}dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha]\right\} = 0.0990$$

$$p_2(\alpha) = \max\left\{\int_c^d f(u;k,\theta)du \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha]\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_3^7 x^{k-1}e^{-\frac{x}{\theta}}dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha]\right\} = 0.0990$$

değerleri elde edilir. Buradan

α = 1 için $\tilde{P}[3,7][1] = [0.0990, 0.0990] = 0.0990$

elde edilir.

Şimdi ise α = 0 için $\tilde{P}[3,7][0]$ bulanık olasılığı bulunmalıdır.

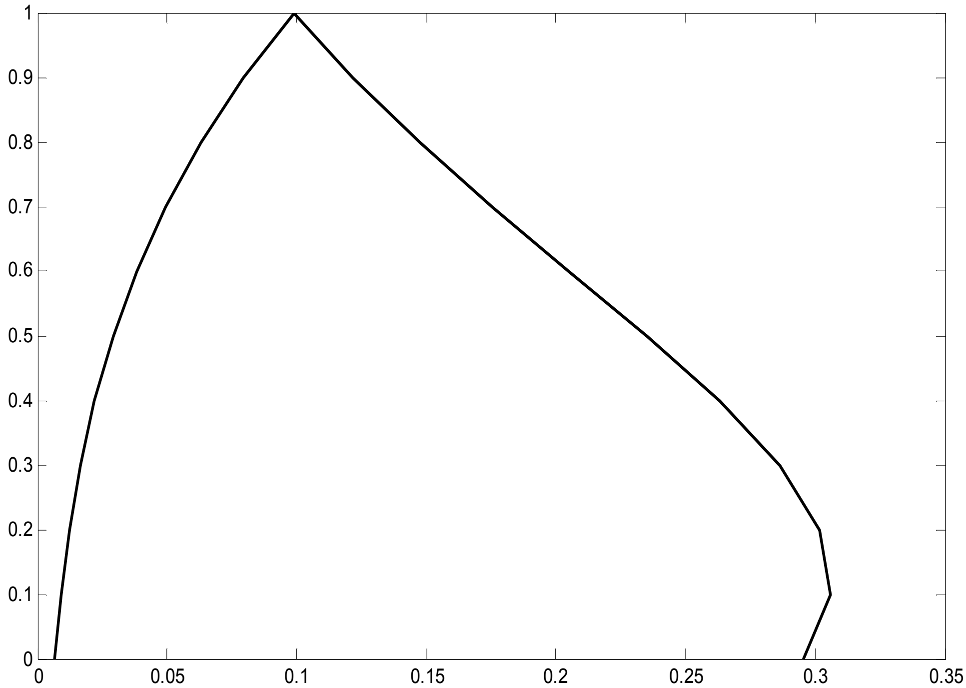
$$F(x;k,\theta) = \frac{1}{\theta^k\Gamma(k)}\int_3^7 u^{k-1}e^{-\frac{u}{\theta}}du\ , \qquad 1 \le k \le 5 \text{ ve } 6 \le \theta \le 8 \tag{3.56}$$

α = 0 kesimi için $(1/3/5)$ bulanık sayısı $[1,5]$ ve $(6/7/8)$ bulanık sayısı $[6,8]$ aralığını ifade eder. Matlab programı ile çözümleme yapıldığında

Tablo 3.9. $\tilde{P}[3,7][\alpha]$ bulanık olasılığının değerleri

α	$p_1(\alpha)$	$p_2(\alpha)$	$\tilde{P}[3,7][\alpha]$
0	0.0067	0.2951	[0.0067,0.2951]
0.1	0.0092	0.3057	[0.0092,0.3057]
0.2	0.0124	0.3016	[0.0124,0.3016]
0.3	0.0167	0.2862	[0.0167,0.2862]
0.4	0.0222	0.2629	[0.0222,0.2629]
0.5	0.0292	0.2351	[0.0292,0.2351]
0.6	0.0381	0.2053	[0.0381,0.2053]
0.7	0.0492	0.1756	[0.0492,0.1756]
0.8	0.0629	0.1474	[0.0629,0.1474]
0.9	0.0794	0.1217	[0.0794,0.1217]
1.0	0.0990	0.0990	[0.0990,0.0990]

Tablo 3.9 elde edilmektedir. Bu tablo okunduğunda $k = 1$ ve $\theta = 6$ da bulanık olasılık minimum değeri 0.0067; k$= 5$ ve $\theta = 6$ da ise bulanık olasılık maksimum değeri 0.2951 almaktadır ve böylece α = 0 için $\widetilde{P}[3,7][0] = [0.0067{,}0.2951]$ elde edilmektedir. Diğer α-kesimleri ise tabloda verilmektedir. Bulanık dağılım fonksiyonunun grafiği ise θ sabit, k değişken olarak alındığında Şekil 3.14 olarak elde edilmektedir.



Şekil 3.14. $\tilde{k} = (1\ /\ 3\ /\ 5)$ ve $\theta = 6$ paremetreleri için $\widetilde{P}[3,7]$ olasılığı

$\tilde{k} = (1\ /\ 3\ /\ 5)$ ve $\tilde{\theta} = (6\ /\ 7\ /\ 8)$ bulanık sayıları olmak üzere bulanık gamma dağılımının bulanık beklenen değeri denklem (3.52) ifadesinden

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \tilde{k}[\alpha]\tilde{\theta}[\alpha] = [(1+2\alpha)(8-\alpha),(5-2\alpha)(6+\alpha)] \tag{3.57}$$

bulunur. Son denklemde

$\alpha = 0$ için $\tilde{\mu}[0] = [8,30]$

ve

$\alpha = 1$ için $\tilde{\mu}[1] = [21,21]$

elde edilir. O halde bulanık beklenen değer

$$\tilde{\mu} = (8 \,/\, 21 \,/\, 30) \tag{3.58}$$

olarak elde edilmektedir. Görüldüğü gibi elde edilen bulanık beklenen değer bir bulanık üçgensel sayısıdır. Bulanık Gamma dağılımının bulanık varyansı ise denklem (3.54)' den

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \tilde{k}[\alpha]\tilde{\theta}^2[\alpha] = [(1+2\alpha)(8-\alpha)^2, (5-2\alpha)(6+\alpha)^2] \tag{3.59}$$

elde edilir. Son denklemde

$\alpha = 0$ için $\tilde{\sigma}^2[0] = [64, 180]$

ve

$\alpha = 1$ için $\tilde{\sigma}^2[1] = [147, 147]$

bulunur. O halde bulanık varyans bir bulanık üçgensel sayı olmak üzere

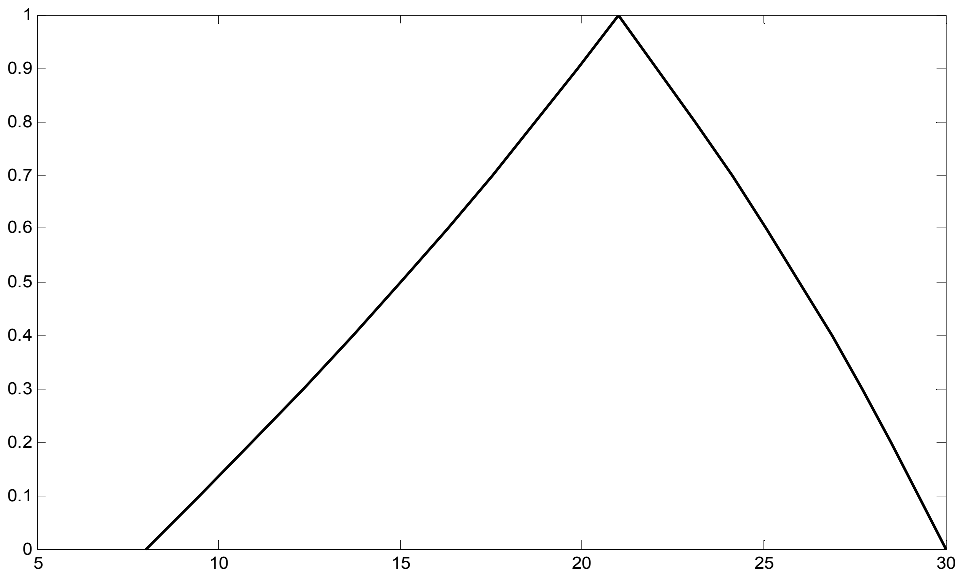
$$\tilde{\sigma}^2 = (64 \,/\, 147 \,/\, 180) \tag{3.60}$$

şeklindedir. Bulanık beklenen değer ve bulanık varyans $\forall 0 \le \alpha \le 1$ için $(3.57) - (3.59)$ denklemleri gözönüne alınarak ve matlab programı kullanılarak Tablo 3.10 elde edilmiştir.

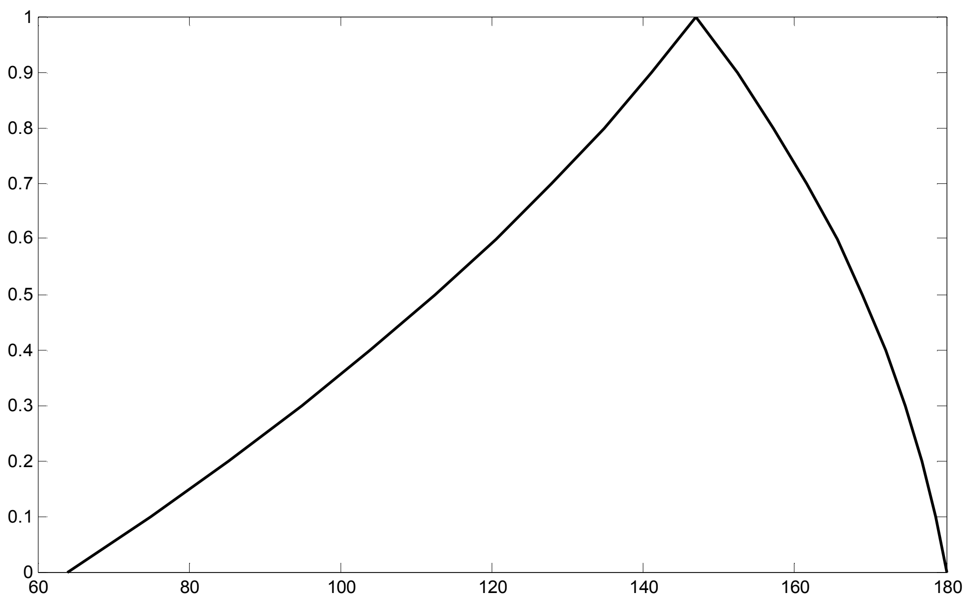
Tablo 3.10. $\tilde{P}[3,7][\alpha]$ bulanık olasılığının $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\sigma}^2$ değerleri

α	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\sigma}^2$
0	[8.0000, 30.0000]	[64.0000, 180.0000]
0.1	[9.4800, 29.2800]	[74.8920, 178.6080]
0.2	[10.9200, 28.5200]	[85.1760,176.8240]
0.3	[12.3200, 27.7200]	[94.8640, 174.6360]
0.4	[13.6800, 26.8800]	[103.9680, 172.0320]
0.5	[15.0000, 26.0000]	[112.5000, 169.0000]
0.6	[16.2800, 25.0800]	[120.4720, 165.5280]
0.7	[17.5200, 24.1200]	[127.8960, 161.6040]
0.8	[18.7200, 23.1200]	[134.7840, 157.2160]
0.9	[19.8800, 22.0800]	[141.1480, 152.3520]
1.0	[21.0000, 21.0000]	[147.0000, 147.0000]

Yukarıda veriler ışığında $\widetilde{P}[3,7]$ bulanık olasılığının bulanık beklenen değer ve bulanık varyansın grafikleri sırasıyla Şekil 3.15 ve Şekil 3.16 ile verilmiştir.



Şekil 3.15. $\widetilde{P}[3,7]$ olasılığının $\tilde{\mu} = (6\ /\ 21\ /\ 30)$ bulanık beklenen değeri



Şekil 3.16. Bulanık gamma dağılımı $\widetilde{P}[3,7]$ olasılığının $\tilde{\sigma}^2 = (64\ /\ 147\ /\ 180)$ bulanık varyansı

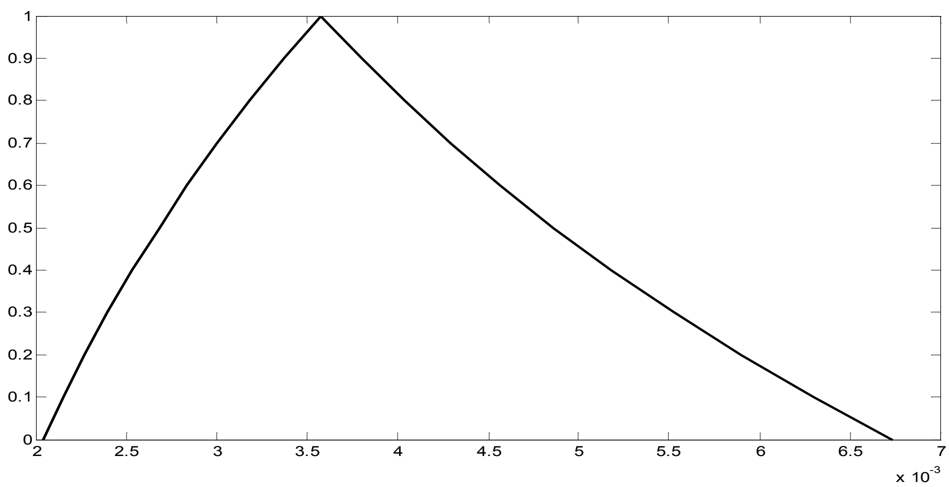
Soru 3.2: Örnek 3.6 daki değerler ve veriler olmak üzere x değişkeni $[1, 5]$ aralığının herhangi bir değerinde sabit ve $y \in [6, 8]$ değişken olarak alınsın. Elde edilen sonuçları inceleyiniz.

Çözüm: $k = 5$ sabitlenmiş bir değer ve $\tilde{\theta} = (6 / 7 / 8)$ bulanık sayı olmak üzere α-kesimi $\tilde{\theta}[\alpha] = [6 + \alpha, 8 - \alpha]$ olmak üzere $\theta \in [6 + \alpha, 8 - \alpha]$ değişken olsun. Bu durumda matlab programı yardımıyla $\forall\ 0 \leq \alpha \leq 1$ için elde edilen veri tablosu

Tablo 3.11. $k = 5$ sabit $\tilde{\theta} = (6 / 7 / 8)$ parametre için $\tilde{P}[3, 7][\alpha]$

α	$p_1(\alpha)$	$p_2(\alpha)$	$\tilde{P}[3, 7][\alpha]$
0	0.0020	0.0067	$[0.0020, 0.0067]$
0.1	0.0021	0.0063	$[0.0021, 0.0063]$
0.2	0.0023	0.0059	$[0.0023, 0.0059]$
0.3	0.0024	0.0055	$[0.0024, 0.0055]$
0.4	0.0025	0.0052	$[0.0025, 0.0052]$
0.5	0.0027	0.0049	$[0.0027, 0.0049]$
0.6	0.0028	0.0046	$[0.00280.0046,]$
0.7	0.0030	0.0043	$[0.0030, 0.0043]$
0.8	0.0032	0.0040	$[0.0032, 0.0040]$
0.9	0.0034	0.0038	$[0.0034, 0.0038]$
1.0	0.0036	0.0036	$[0.0036, 0.0036]$

ve bu verilere baz alınarak oluşturulan grafik Şekil 3.17 ile verilmiştir.



Şekil 3.17. Bulanık gamma dağılımı için $k = 5$ sabitlenmiş bir değer ve $\tilde{\theta} = (6 / 7 / 8)$ paremetresine göre $\tilde{P}[3, 7]$ olasılığı

3.2.5. Bulanık Pareto Dağılımı

Pareto dağılımı iktisat dışında sosyal bilimler, fen, geofizik, sigortacılık ve birçok doğal fenomen incelemeleri için geniş bir alanda uygulanabilmektedir. İktisatta pareto dağılımı bireylerin servetlerini veya gelirin büyük bir kısmının incelendiği sosyetenin küçük bir bireyler grubu tarafından sahip olduğunu bu dağılım bariz şekilde göstermektedir. Bu fikir genellikle daha basit olarak Pareto Prensibi ya da bir ülkenin nüfusunun %20' si servetin veya gelirin %80' ine sahip olduğu şekilde ifade edilen 80-20 kuralı olarak ifade edilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonundan da görebilmektedir ki "olasılık" veya kişi başına küçük gelire sahip toplumların oranı yükselirken gelir düzeyi bakımından sürekli şekilde azalır. Pareto dağılımı, servet veya gelir dağılımı olarak kısıtlanmaz ama birçok durumda küçükten büyüğe doğru hareket eden dağılımda bulunan bir denge durumudur.[6, 8]

Tanım 3.9[6]: Eğer X pareto dağılımına sahip bir rasgele değişken ise herhangi bir x sayısından daha büyük X rasgele değişkenin olasılığı

$$P(X > x) = \left(\frac{x}{x_m}\right)^{-k}, \qquad \forall x \geq x_m \tag{3.61}$$

denkleminde x_m, X' in minimum olasılık değeridir ve nadiren pozitiftir ve k bir pozitif bir paremetredir. Pareto dağılımı ailesi x_m ve k iki ifade ile paremetreleştirilebilir. Bir servetin dağılım modeli olarak pareto dağılımı kullanılıdığında k paremetresine özel olarak pareto indeksi olarak ifade edilir. Pareto dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; k, x_m) = k\frac{x_m^k}{x^{k+1}}, \qquad \forall x \geq x_m \tag{3.62}$$

Genel anlamda pareto dağılımı yukarıdaki şekilde ifade edilmektedir. Bulanık pareto dağılımı ise;

$[c, d]$ kapalı aralığında bulunan bir değerin bulanık olasılığı $\widetilde{P}[c, d]$ olmak üzere

$$\widetilde{P}[c, d] = \left\{\int_c^d k\frac{x_m^k}{x^{k+1}}dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha]\right\}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.63}$$

şeklindedir. $\widetilde{P}[c,d] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ olmak üzere

$$p_1(\alpha) = \min\left\{\int_c^d k\frac{x_m^k}{x^{k+1}}dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha]\right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.64}$$

ve

$$p_2(\alpha) = \max\left\{\int_c^d k\frac{x_m^k}{x^{k+1}}dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha]\right\}, 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.65}$$

şeklindedir.$(3.62) - (3.63)$ denklemlerinden

$$h(k) = \int_c^d k\frac{x_m^k}{x^{k+1}}dx = -\left(\frac{d}{x_m}\right)^{-k} + \left(\frac{c}{x_m}\right)^{-k} \text{ ve } \tilde{k}(\alpha) = [k_1(\alpha), k_2(\alpha)] \tag{3.66}$$

olarak elde edilir. (3.66) denklemindeki $h(k)$ fonksiyonu kullanılarak

$$p_1(\alpha) = h\big(k_2(\alpha)\big) \tag{3.67}$$

$$p_2(\alpha) = h\big(k_1(\alpha)\big) \tag{3.68}$$

elde edilen $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$ değerleri $\widetilde{P}[c,d] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)]$ eşitliğinde yazılır. Bu ise $\widetilde{P}[c,d]$ bulanık olasılığını ifade eder.

Bulanık pareto dağılımının bulanık beklenen değerinin α-kesimi

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{\int_{x_m}^{\infty} k\left(\frac{x_m}{x}\right)^k dx \,\middle|\, k \in \tilde{k}[\alpha]\right\}, \qquad \forall 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{3.69}$$

olarak elde edilmektedir. Pareto dağılımının beklenen değeri

$$\mu = k\frac{x_m}{k-1}, k > 1$$

iken (3.69) denklemiyle elde edilen bulanık beklenen değer

$$\tilde{\mu} = \tilde{k}\frac{x_m}{\tilde{k}-1}\ ,\tilde{k} > 1 \tag{3.70}$$

şeklindedir. Kesin pareto dağılımının varyansı

$$\sigma^2 = k\frac{x_m^2}{(k-2)(k-1)^2}\ ,k > 2$$

olarak ifade edilirken bulanık pareto dağılımının bulanık varyansı

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{k}\frac{x_m^2}{\left(\tilde{k}-2\right)\left(\tilde{k}-1\right)^2}\ ,\tilde{k} > 2 \tag{3.71}$$

olarak ifade edilir.

Örnek 3.7: $x_m = 3$ ve $k = 3$ olmak üzere $\tilde{k} = (2.8\ /\ 3\ /\ 3.2)$ paremetreleri için $\widetilde{P}[4,6]$ bulanık pareto dağılımının bulanık olasılığını, bulanık beklenen değerini ve bulanık varyansını bulunuz.

Çözüm:

$\tilde{k} = (2.8\ /\ 3\ /\ 3.2)$ bulanık sayısınn α-kesimi

$\tilde{k}[\alpha] = [2.8 + 0.2\alpha, 3.2 - 0.2\alpha]\ ,\forall\ 0 \leq \alpha \leq 1$

elde edilen $\tilde{k}[\alpha]$ değerleri (3.67) ve (3.68) da yerine yazılırsa

$$p_1(\alpha) = h(3.2 - 0.2\alpha) = -\left[2^{-3.2+0.2\alpha} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-3.2+0.2\alpha}\right]$$

ve

$$p_2(\alpha) = h(2.8 + 0.2\alpha) = -\left[2^{-2.8-0.2\alpha} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-2.8-0.2\alpha}\right]$$

değerleri elde edilir.

Son eşitliklerde sırasıyla $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ değerleri yazılarak bulanık olasılığın uç değerleri

$\alpha = 0$ için $\widetilde{P}[4,6][0] = [0.2895, 0.3033]$

ve

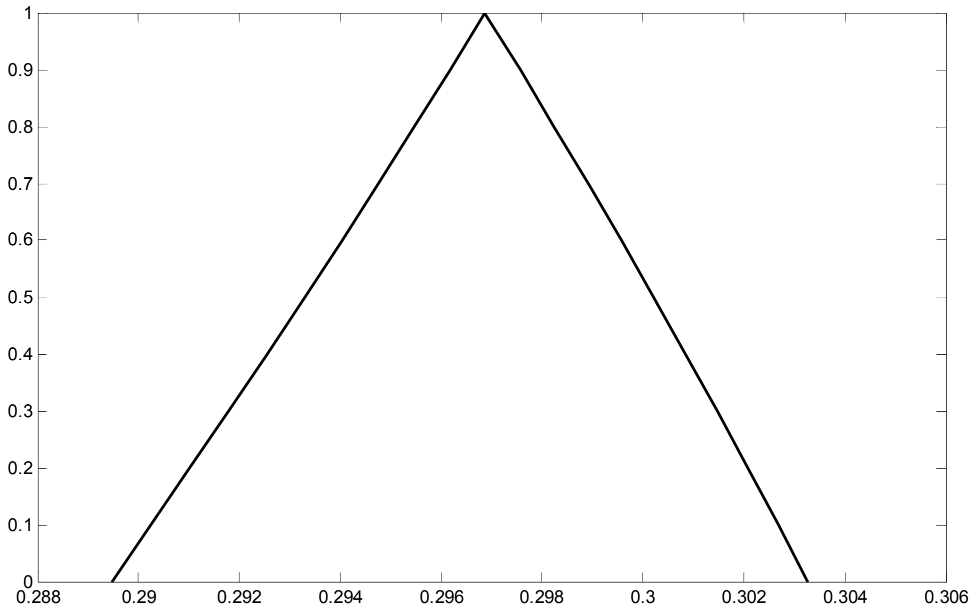
$\alpha = 1$ için $\widetilde{P}[4,6][1] = [0.2969, 0.2969]$

olarak elde edilir. $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ için olduğundan elde edilen tüm α değerleri için bulanık olasılık matlab programı ile hesaplanmış ve Tablo 3.12 verilmiştir.

Tablo 3.12. $\widetilde{P}[4,6]$ bulanık olasılığının değerleri

α	$p_1(\alpha)$	$p_2(\alpha)$	$\widetilde{P}[4,6]$
0	0.2895	0.3033	$[0.2895, 0.3033]$
0.1	0.2902	0.3027	$[0.2902, 0.3027]$
0.2	0.2910	0.3021	$[0.2910, 0.3021]$
0.3	0.2918	0.3015	$[0.2918, 0.3015]$
0.4	0.2925	0.3009	$[0.2925, 0.3009]$
0.5	0.2933	0.3002	$[0.2933, 0.3002]$
0.6	0.2940	0.2996	$[0.2940, 0.2996]$
0.7	0.2947	0.2989	$[0.2947, 0.2989]$
0.8	0.2955	0.2982	$[0.2955, 0.2982]$
0.9	0.2962	0.2976	$[0.2962, 0.2976]$
1.0	0.2969	0.2969	$[0.2969, 0.2969]$

Bu veriler ışığında bulanık pareto dağılımında $\widetilde{P}[4,6]$ bulanık olasılığının grafiği ise Şekil 3.18 ile verilmiştir.



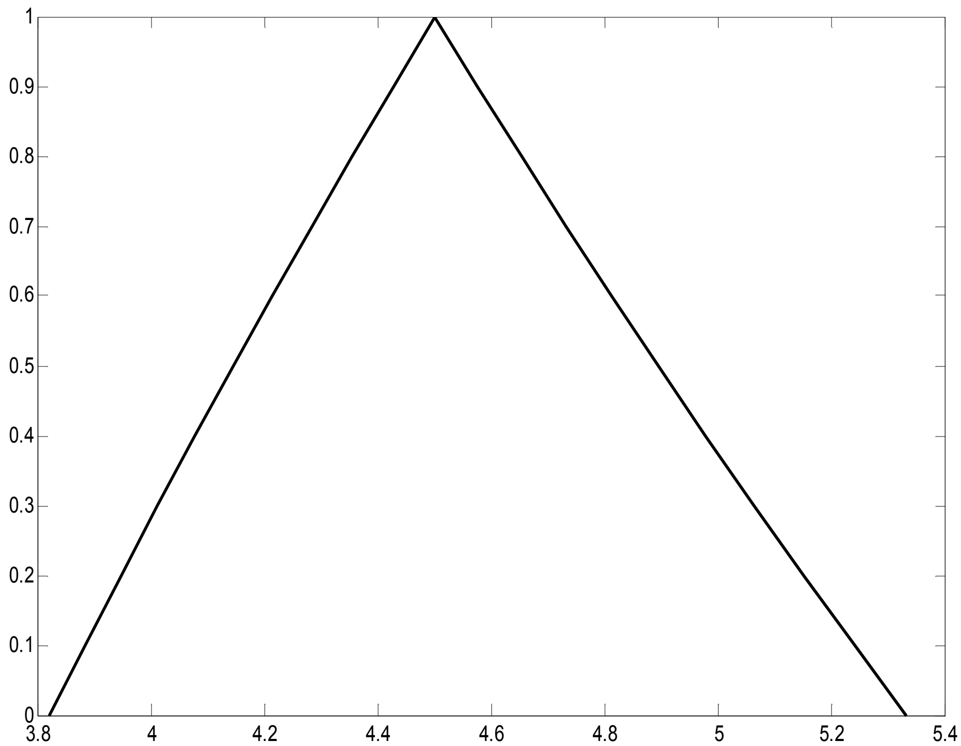
Şekil 3.18. Bulanık pareto dağılımında $\widetilde{P}[4,6]$ olasılığı

$\widetilde{P}[4,6]$ bulanık olasılığının bulanık beklenen değeri ve bulanık varyansı denklem $(3.70) - (3.71)$ formülleri kullanılarak matlab programı yardımıyla Tablo 3.13 deki gibi elde edilmektedir.

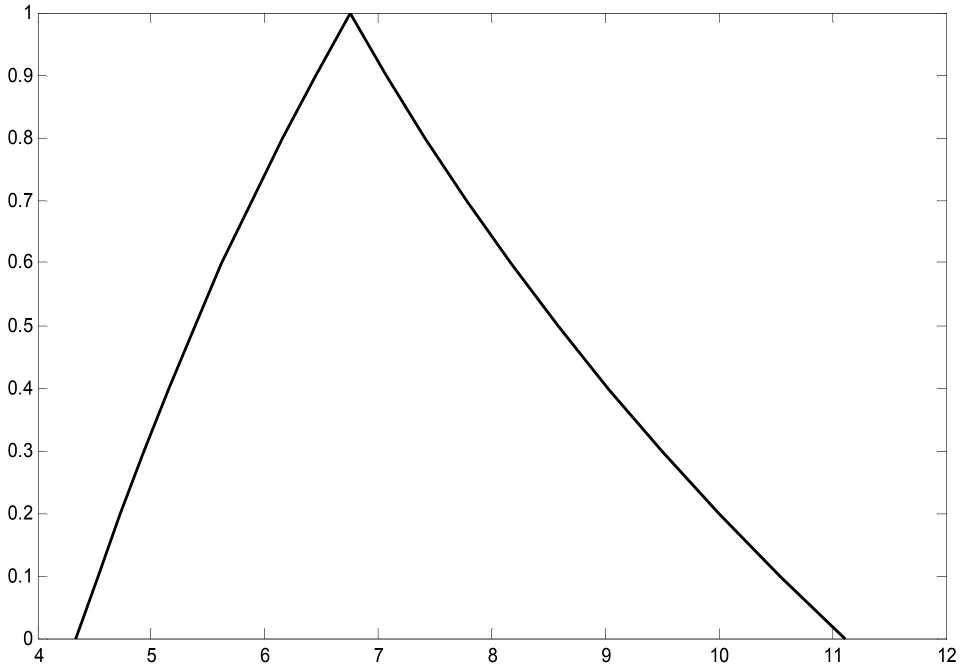
Tablo 3.13. $\widetilde{P}[4, 6]$ bulanık olasılığı için $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\sigma}^2$ değerleri

α	$\tilde{\mu}$	$\tilde{\sigma}^2$
0	$[3.8182, 5.3333]$	$[4.3388, 11.1111]$
0.1	$[3.8807, 5.2418]$	$[4.5258, 10.5369]$
0.2	$[3.9444, 5.1522]$	$[4.7228, 10.0003]$
0.3	$[4.0093, 5.0645]$	$[4.9303, 9.4983]$
0.4	$[4.0755, 4.9787]$	$[5.1493, 9.0281]$
0.5	$[4.1429, 4.8947]$	$[5.3803, 8.5873]$
0.6	$[4.2115, 4.8125]$	$[5.6244, 8.1734]$
0.7	$[4.2816, 4.7320]$	$[5.8823, 7.7845]$
0.8	$[4.3529, 4.6531]$	$[6.1552, 7.4188]$
0.9	$[4.4257, 4.5758]$	$[6.4440, 7.0745]$
1.0	$[4.5000, 4.5000]$	$[6.7500, 6.7500]$

Tablodan elde edilen verilerle bulanık beklenen değer ve bulanık varyansın grafikleri sırasıyla Şekil 3.19 ve Şekil 3.20 ile verilmiştir:



Şekil 3.19. Bulanık pareto dağılımında $\widetilde{P}[4, 6]$ olaslığının bulanık beklenen değeri



Şekil 3.20. Bulanık pareto dağılımında $\widetilde{\mathrm{P}}[4, 6]$ olasılığının bulanık varyansı

4. SONUÇLAR

Bu çalışmanın literatüre katkıları aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

1. Herhangi bir olayın bulanık olasılığı incelenip daha sonra ise bu olasılıktan yararlanarak bulanık olayın bulanık olasılığı elde edilmiştir.

2. (μ, σ^2) parametreli normal dağılımının paremetreleri μ ve σ^2 sırasıyla bulanıklaştırılarak $\tilde{\mu}$ bulanık beklenen değerli ve $\tilde{\sigma}^2$ bulanık varyanslı $(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ bulanık normal dağılım elde edilmiştir. Bulanık normal dağılımının bulanık olasılığı formülize edilerek $[c, d]$ aralığında

$$z_1 = \frac{c-\mu}{\sigma} \text{ ve } z_2 = \frac{c-\mu}{\sigma} \quad , \mu \in \tilde{\mu}[\alpha] \, , \sigma \in \tilde{\sigma}[\alpha]$$

$$\tilde{P}[c, d][\alpha] = \int_c^d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, , \mu \in \tilde{\mu}[\alpha] \, , \sigma \in \tilde{\sigma}[\alpha]$$

eşitliği elde edilmiştir.

3. $(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$ parametreli bulanık normal dağılımı için $x \in \tilde{\mu}[\alpha]$ ve $y^2 \in \tilde{\sigma}^2[\alpha]$ değişkenleri göz önüne alınarak bulanık olasılık

I. x değişken y sabit olmak üzere elde edilen bulanık olasılık ve grafiği bir üçgensel bulanık sayı

II. x bulunduğu aralıktaki herhangi bir değerde sabit; y değişken olmak üzere elde edilen bulanık olasılık ve grafiği üçgensel bulanık sayı

III. x ve y değişken olduğu durumda elde edilen bulanık olasılık ve grafiği düzlemsel olmak üzere elde edilmiştir.

4. $E(\lambda)$ parametreli üstel dağılımın λ parametresi bulanık hale getirilerek $E(\tilde{\lambda})$ parametreli bulanık üstel dağılım elde edilmiştir. Bulanık üstel dağılımın $[c, d]$ aralığındaki bulanık olasılığı

$$\tilde{P}[c, d][\alpha] = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt \, , \quad \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]$$

olarak elde edilmiştir.

5. $E(\tilde{\lambda})$ parametreli üstel dağılımın bulanık beklenen değer ve bulanık varyansı

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \text{ ve } \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}^2}$$

olarak formülize edilmiştir.

6. (k, θ) parametreli gamma dağılımınının k ve θ paremetreleri bulanık hale getirilerek $(\tilde{k}, \tilde{\theta})$ parametreli bulanık gamma dağılımı elde edilmiştir. Gamma$(\tilde{k}, \tilde{\theta})$ dağılımının $[c, d]$ aralığındaki bulanık olasılığı

$$\widetilde{P}[c,d][\alpha] = \int_0^{\infty} \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} dx \ , k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha]$$

olarak elde edilmiştir.

7. Gamma$(\tilde{k}, \tilde{\theta})$ dağılımının bulanık beklenen değeri ve bulanık varyansı

$$\tilde{\mu} = \tilde{k}\tilde{\theta} \text{ ve } \tilde{\sigma}^2 = \tilde{k}\tilde{\theta}^2$$

olarak formülize edilmiştir.

8. x_m ve k parametreli pareto dağılımı için x_m sabit ve k parametresi bulanıklaştırılarak x_m ve $\tilde{k}$ parametreli pareto dağılımı elde edilmişir. Bulanık pareto dağılımının $[c, d]$ aralığındaki bulanık olasılığı

$$\widetilde{P}[c,d][\alpha] = \int_c^{d} k \frac{x_m^k}{x^{k+1}} dx \ , k \in \tilde{k}[\alpha]$$

bulanık olasılığı elde edilmiştir.

9. x_m ve $\tilde{k}$ parametreli pareto dağılımının bulanık beklenen değeri ve bulanık varyansı

$$\tilde{\mu} = \tilde{k} \frac{x_m}{\tilde{k} - 1} \quad \text{ve } \tilde{\sigma}^2 = \tilde{k} \frac{x_m^2}{(\tilde{k} - 2)(\tilde{k} - 1)^2} \ , \tilde{k} > 2$$

şeklinde formülize edilmiştir.

5. ÖNERİLER

1. Kesikli dağılımların parametreleri bulanık yamuk sayı olarak alınarak dağılımlar bulanıklaştırılabilir.

2. Bu tezde sürekli dağılımların parametreleri $\tilde{a} = (a_1 \,/\, a_2 \,/ a_3)$ şeklinde alınarak dağılımlar bulanıklaştırılmıştır. Farklı olarak sürekli dağılımların parametreleri $\tilde{a} = (a_1 \,/\, a_2 \,, a_3 / a_4)$ şeklinde bulanık yamuk sayı olarak alınarak elde edilen bulanık olasılık, bulanık beklenen değer ve bulanık varyans değerleri grafikleri ile incelenebilir.

3. Gamma$(\tilde{k}, \tilde{\theta})$ bulanık dağılımında $x \in \tilde{k}[\alpha]$ ve $y \in \tilde{\theta}[\alpha]$ her iki değerin de değişken olduğu durumda

$$P[c,d][\alpha] = \int_0^\infty \frac{t^{k-1} e^{-\frac{t}{\theta}}}{\theta^k \Gamma(k)} dt \;, k \in \tilde{k}[\alpha], \theta \in \tilde{\theta}[\alpha]$$

bulanık olasılığı elde edilebilir ve bu veriler ışığında beklenen değer ve varyansı değerlendirilebilir

4. Bu tez çalışmasındaki sürekli dağılımlar dışında Beta Dağılımı, F Dağılımı, Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı, Ki-Kare Dağılımı, Laplace Dağılımı, Log-normal Dağılımı, Student’ in t Dağılımları bulanık hale getirilip bulanık sürekli dağılımlar elde edilebilir.

5. Bu tezde dağılımları bulanık hale getirilmesi için paremetreler bulanıklaştırılmıştır. Paremetreler yerine rasgele değişkenler bulanık hale getirilerek bulanık dağılımlar elde edilebilir.

6. Bu çalışmada üstel dağılım bulanık hale getirilmiştir. Bu çalışmadan yararlanarak üstel dağılım özelliği bulanık hale getirilebilir.

7. Kullanılan bu yöntem stokastik süreçler teoresindeki yenileme süreçler teorisinde örneğin; yenileme süreçleri, markov süreçleri, bulanık stokastik süreçler optimizasyonu... vs uygulanabilir.

8. Bu tezde bir boyut üzerinde çalışılmıştır. Paremetrelerin bulanıklaştırılması yöntemi kullanılarak 2-boyuta da genelleştirilebilir ve 2 boyutlu yenileme süreçlerine uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Baykal, N. ve Beyan, T., Bulanık Mantık İlke ve Temelleri, 9. Baskı, Bıçaklar Kitabevi, Kızılay/Ankara, 2004.

2. Buckley, J.J., Fuzzy Probabilities-New Approach and Applications, Springer-Verlang, 2005.

3. Buckley, J.J., Fuzzy Probability and Statistics, Springer-Verlang, 2006.

4. Dubois, D. ve Prade, H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Mathematics in Science and Engineering A Series of Monographs and Textbooks, Academic Press, California, 1980.

5. Dubois, D. ve Prade, H., The Mean Value of A Fuzzy Number, Fuzzy Sets and Systems, 24 (1987) 279-300.

6. Erbay Dalkılıç, T., Kesemen T. ve Tank, F., Pareto Distribution And Numerical Characteristics Of This Distribution Under Uncertainty, XIIIth International Congress on Insurance: Mathematics and Economics-IME 2009, 2009, 88.

7. http://www.plcprogramlama.com/prosesfuzzy.htm Bulanık Mantık. 27 Mayıs 2004.

8. http://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_distribution, Pareto Distributions, 15 Temmuz 2010.

9. Kocatürk, Y., Bulanık Değişkenler ve Bulanık Yenileme Süreçleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Üniversitesi, 2007.

10. Lai, Y.J. ve Hwang, C.J, Fuzzy Mathematical Programming-Methods and Applications, 42/3140-543210, Springer – Verlang, New York, Berlin, Heidelberg, 1992.

11. Lurong, W., Fuzzy Distributions Fitting for Law of Traffic Accidents based on Matlab, Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (2009) 227-231.

12. Mon, D. L., Cheng, C. H. ve Lu, H. C., , Applications of Fuzzy Distributions on Project Management, Fuzzy Sets and Systems, 73 (1995) 227-234.

13. Moore, R. E., Kearfott, R. B. ve Cloud, M. J., Introduction to Interval Analysis, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.

14. Möller, B., Graf, W., Beer ve M., Sickert, J-U, Fuzzy Randomness-Towards a new Modeling of Uncertainty, Fifth World Congress on Computational Mechanics, 2002, Vienna, Austria.

15. Nabiyev, Vasif V., Yapay Zeka: Problemler-Yöntemler-Algoritmalar, İkinci Baskı, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2005.

16. Nguyen, Hung T., Fuzzy Sets and Probability, Fuzzy Sets and Systems, 90 (1997) 129-132.

17. Özgür, D., Fuzzy Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri Hakkında, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa, 2008.

18. Ross, Timothy J., Booker, J. M. ve Parkinson, W. J., Fuzzy Logic and Probability Applications: Bridging The Gap, ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability, SIAM, Philadelphia, ASA, Alexandria, VA, 2002.

19. Tuna, B., Bulanık Olasılıklar ve Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 1994.

20. Wang, T., Wang, G., Liu, Y. ve Zhou, S., Fuzzy Reliability Design Based on Gamma and Normal Distribution, Second International Symposium on Intelligent Information Technology Application, 443 (2008) 490-493.

21. Watanabe, N. ve Imaizumi, T., A Fuzzy Statistical Test of Fuzzy Hypotheses, Fuzzy Sets and Systems, 53 (1993) 167-178.

22. Wu, H.C., Probability Density Functions of Fuzzy Random Variables, Fuzzy Sets and Systems, 105 (1999) 139-158.

23. Xia Z., Fuzzy Probability System: Fuzzy-Probability Space, Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001) 469-486.

24. Yongting, C., Fuzzy Quality and Analysis on Fuzzy Probability, Fuzzy Sets and Systems, 83 (1996) 283-290.

25. Zadeh, L., A., Fuzzy Sets, Department of Electrical Engineering and Electronic Research Laboratory University of California-Information and Control 8 (1965) 338-353.

26. Zadeh, L. A., Fuzzy Sets As A Basis for A Theory of Posibility, Fuzzy Sets and Systems, 100 (1999) 9-34.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Giresun ilinin Bulancak ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Bulacak Gazi İlköğretim okulunda, ortaokulu Giresun Mehmet Akif İlköğretim okulunda lise öğreniminide Giresun Yabancı Dil Ağrılıklı Lisesi’ nde tamamladı.

2002-2003 eğitim-öğretim yılında Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 2007 yılında matematik bölümünü 2. olarak bitirerek mezun oldu.

2007-2008 yılında İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Elektronik anabilimda yüksek lisans için hak kazandı. Aynı anda Karadeniz Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Elektronik anabilim dalında yüksek lisansa hak kazandı ve bu bölüme kaydını yaptırdı. Bir sene bu bölüme devam ettikten sonra 2008 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik programını kazandı ve bu programa başladı. Sercan TURHAN iyi derecede ingilizce bilmektedir.