

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUTBOL TOPU YÖRÜNGE MODELİ VE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Süleyman ŞENGÜL

TEMMUZ 2010
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

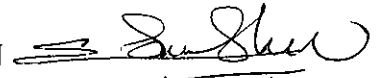
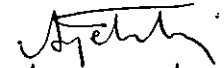

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUTBOL TOPU YÖRÜNGE MODELİ VE ANALİZİ

Süleyman ŞENGÜL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15.06.2010
Tezin Savunma Tarihi : 12.07.2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erhan COŞKUN 
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Selçuk Han AYDIN 
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Alev AYDINER 

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmada futbol topu yörünge modelleri topa etki eden ortam direnç kuvveti, Magnus kuvveti ve yer çekimi kuvveti dikkate alınarak formüle edilmiş ve elde edilen modellerin analitik yaklaşım ve sayısal yöntemler yardımıyla çözümleri elde edilmiştir.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca KTÜ Matematik Bölümü'nün tüm hocalarına, moral desteklerinden ve yardımlarından dolayı KTÜ Matematik Bölümünün tüm Araştırma Görevlisi arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Süleyman ŞENGÜL

Trabzon 2010

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	V
SUMMARY	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	2
3. ORTAM DİRENÇ KUVVETİ.....	5
3.1. Ortam Direnç Kuvveti Altında Futbol Topunun Hareketi	5
3.2. Sadece Ortam Direnç Kuvveti Etkisinde Futbol Topunun 2-Boyutlu Hareketi	7
3.3. Adomian Ayrışım Yöntemiyle Yaklaşık Çözümler.....	11
4. <i>MAGNUS</i> KUVVETİ.....	16
4.1. <i>Magnus</i> Kuvvetinin Tarihi	16
4.2. <i>Magnus</i> Kuvveti	16
4.2.1. <i>Magnus</i> Kuvvetinin Büyüklüğü	18
4.3. Sadece <i>Magnus</i> Kuvveti Etkisi Altındaki Futbol Topunun İki Boyutta Hareketi	20
5. FUTBOL TOPUNUN 2-BOYUTTA YÖRÜNGESİ	25
5.1. <i>Magnus</i> ve Ortam Direnç Kuvveti	25
5.2. <i>Adomian</i> Yöntemi ile Analitik Yaklaşım.....	27
5.3. Boyutsuzlaştırma.....	33
5.4. Boyutsuzlaştırılmış Denklemlere Analitik Yaklaşım.....	39

5.4.1 I. Durum	43
5.4.2 II. Durum.....	48
5.5. Boyutsuzlaştırılmış Problem İçin Alternatif Analitik Yaklaşım	54
6. FUTBOL TOPUNUN 3-BOYUTTA YÖRÜNGESİ	60
6.1. 3-Boyutta Futbol Topunun Hareketi	60
6.2. 3-Boyutta Boyutsuzlaştırma.....	69
6.3. Boyutsuz Sistem İçin Taylor Yaklaşım.....	75
6.4. <i>Newton</i> Sıçrama (Restitution) Yasası	82
6.4.1. Durma Anına Kadar Futbol Topu Yörünge Modeli.....	83
6.5. Serbest Vuruş Hareketi	87
7. SONUÇLAR	93
8. ÖNERİLER.....	94
9. KAYNAKLAR	95
10. EK	96
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu çalışmada ortam direnç kuvveti, Magnus kuvveti ve yer çekimi kuvveti etkisi altında futbol topu yörünge modeli göz önüne alınmış ve modelin analitik yaklaşım ve sayısal yöntemler yardımıyla çözümleri elde edilmiştir. Özellikle falso verilen topun yörüngesini etkileyen Magnus kuvvetinin yörünge üzerindeki etkisi analiz edilmiştir. Mevcut yörünge modeli sıçramaları da dikkate alacak şekilde Newton Sıçrama (Restitution) Yasası yardımıyla durma anına kadar topun yörüngesini belirleyecek şekilde biçimde genelleştirilmiştir. Ayrıca, engelli serbest vuruşların öngörülen hedeflere yönelmesi için topa verilmesi gereken başlangıç hız ve falso MATLAB Grafik Kullanıcı Arayüzü(GUI) aracılığıyla interaktif olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ortam Direnç Kuvveti, Magnus Kuvveti, Adomian Ayrışım Yöntemi, Taylor Açılımı, Boyutsuzlaştırma, Newton Sıçrama Yasası.

SUMMARY

Football Trajectory Model and Its Analysis

In this study, trajectory of a football is investigated using an appropriately formulated mathematical model accounting for Magnus, drag and gravitational forces. Both numerical and approximate analytical methods are used to obtain approximate solutions. In particular, a closed attention is paid to the trajectory of football under the initial rotational kick. The existing model is extended using Newton Restitution Law to account for jumps till the ball stops. Futhermore, in order for a free kick with barrier to target at a specified position, the initial linear and rotational velocity are studied interactively using a graphical user interface developed with MATLAB GUI.

Key Words: Drag force, Magnus Force, Adomian Decomposition Method, Taylor polynomials, Nondimensionalization, Newton Restitution Law.

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Küçük bir zaman aralığında yer değiştiren havanın kütlesi.....	5
Şekil 2. İki boyutta hareket eden futbol topunun başlangıç hız bileşenleri.....	7
Şekil 3. Herhangi bir t anında cismin hız bileşenleri.....	8
Şekil 4. Sadece ortam direnç kuvveti etkisindeki bir topun yörüngesi	10
Şekil 5. Adomian ile analitik yaklaşım ve gerçek çözümün uyumu(noktalar gerçek çözümlü, çizgiler ise Adomian yaklaşımları göstermektedir düşey eksen: x , yatay eksen: y)	15
Şekil 6. Dönme hareketi yapmayan topun yüzeyindeki hız değişimi	16
Şekil 7. ω (devir/s) açısal hızıyla dönen futbol topu	17
Şekil 8. Dönme olayı sonucunda topun iki yüzeyinde oluşan hız farkı	18
Şekil 9. Magnus kuvvetinin yönünü gösteren bir örnek	19
Şekil 10. Sadece Magnus kuvveti etkisi altındaki top yörüngesi.....	23
Şekil 11. Farklı ω (devir/s) açısal hızları için cismin yörüngesi	26
Şekil 12. Sabit açısal hız değerinde farklı hız büyüklüklerinde(farklı v_0 (m/s) değerleri için) cismin yörüngesi.....	26
Şekil 13. ω (devir/s) açısal hızının pozitif veya negatif olması arasındaki fark grafiği ..	27
Şekil 14. Analitik çözüm ile sayısal çözümün karşılaştırılması(sayısal çözüm(noktalar),Adomian yaklaşımı (Düz çizgi), Yatay eksen (x), Düşey eksen (y)).....	32
Şekil 15. Sayısal yöntem sonucunda cismin yörüngesi.....	38
Şekil 16. Boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen yörünge	38
Şekil 17. Sayısal yöntemler ile topun yörüngesi	46
Şekil 18. Taylor açılımı ile elde edilen yörünge	48
Şekil 19. Boyutsuzlaştırmanın sayısal çözüm ile Taylor yaklaşımının grafikleri(sayısal yaklaşım (nokta) Taylor yaklaşım (çizgi)).....	48
Şekil 20. II. durum için sayısal çözüm ile Taylor yaklaşımının karşılaştırılması(sayısal çözüm (nokta), Taylor yaklaşım (çizgi)).....	54

Şekil 21. Örnek 4.5 için analitik yaklaşımın ilk üç terim ile sayısal çözümü	58
Şekil 22. Analitik yaklaşımın ilk dört terimi alınarak elde edilen analitik yaklaşım(çizgi) ve sayısal çözüm(nokta).....	58
Şekil 23. Sadece ortam direnç kuvveti etkisi altındaki topun üç boyutlu hareketi	63
Şekil 24. Magnus kuvveti etkisi altındaki topun üç boyutlu hareketi(falsolu hareket (nokta), falsosuz hareket (çizgi))	64
Şekil 25. Farklı açısız hız değerleri için futbol topunun yere düşme zamanına kadar yörüngesi	66
Şekil 26. Sabit açısız hız altında farklı başlangıç hızları için futbol topunun üç boyutlu hareketi.....	67
Şekil 27. Sabit açısız hız değeri için açısız hızın $x - z$ düzlemiyle yaptığı farklı açılar için yörünge grafikleri.....	68
Şekil 28. Boyutsuzlaştırılmış denklem için cismin yörünge grafikleri	74
Şekil 29. Boyutsuzlaştırma yapılmadan önceki denklemlerin yörünge grafikleri	74
Şekil 30. Boyutsuzlaştırılmış denklem sistemin analitik ve sayısal çözümü	81
Şekil 31. İki cismin çarpışmadan önce ve sonraki hızları	82
Şekil 32. Bir top zemine dik olarak bırakılırsa çarpmadan önceki ve çarptıktan sonraki hızı.....	83
Şekil 33. Bir topun zeminden bir açı yaparak yansıması	83
Şekil 34. Futbol topunun zemine vurduktan önceki ve sonraki z eksenine yaptığı açılar	84
Şekil 35. Zemine vurarak yansıyan futbol topunun $x - y$ düzlemindeki açıları	84
Şekil 36. Farklı sıçrama sabitleri için durma anına kadar yörünge grafikleri	85
Şekil 37. $e_1 = 0.8$ değeri için futbol top yörüngesi	86
Şekil 38. Frikik atışı yörünge şematiği.....	88
Şekil 39. Frikik hareketi için MATLAB GUI program kullanıcı arayüzü.....	89
Şekil 40. Örnek 6.7’de barajdan dönen topun yörüngesinin grafiği	90
Şekil 41. Örnek 6.8. hesaplanan başlangıç açıları için cismin yörünge grafiği	91
Şekil 42. Örnek 6.9’da hesaplanan başlangıç açıları için cismin yörüngesi	92

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Futbol topu için tipik parametreler ve değerleri.....	5
Tablo 2. Futboldaki standart parametreler.....	103

SEMBOLLER DİZİNİ

cm=santimetre

kg=kilogram

M. Ö. =Milattan Önce

m/s=metre/saniye

cm=santimetre

m=metre

devir/s=devir/saniye

s=saniye

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Futbol, başta ülkemiz olmak üzere birçok Avrupa, Asya, Afrika ve özellikle Güney Amerika'da popüler bir spor dalıdır. Futbolu popüler yapan birçok özelliği söz konusudur: takımla çalışabilme yeteneği, topu çok kısa sürede istenilen yöne doğru yönlendirebilme yeteneği, futbol ve dolayısı ile de futbolcular için oldukça önemlidir.

Belirli bir başlangıç hızı verilen top, hareket süresi boyunca ortam direnci(drag force) ve yerçekimi kuvveti etkisi altında kalır. Belirli bir eksen etrafında dönerek hareket eden vuruşa falsolu vuruş adı verilir. Bu durumda top yörüngesi boyunca belirli eksen etrafında dönerek hareket eder. Falsolu top, ortam direnç kuvveti ve yer çekim kuvvetine ilaveten Magnus kuvveti adı verilen bir diğer kuvvet etkisi altında hareket eder. Bu durumda topun basit bir parabolik yörünge takip etmediği görülür.

Bu çalışmada amacımız özellikle falsolu vuruşlarda top yörüngesini bahsettiğimiz üç kuvvet etkisi altında inceleyen matematiksel modeli Newton hareket yasası kapsamında ifade ederek, modelin sayısal ve analitik yaklaşım çözümlerini elde etmek, modelde mevcut parametrelerin topun yörüngesini nasıl etkileyeceğini araştırmak ve Newton sıçrama(restitution) yasası yardımıyla da mevcut modeli geliştirerek duruş anına kadar topun yörüngesini belirlemeye çalışmaktır.

Bu çalışmada MKS birim sistemi kullanılmaktadır. Dolayısı ile elde edilen tüm uzunluklar metre cinsindedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Futbol topunun yörüngesini anlamaya yönelik olarak, deneysel ve teorik çalışmalar yayımlanmıştır. Deneysel çalışmalar sırasıyla ortam direnç sabiti, kaldırma kuvveti sabiti ve yanal kuvvet sabiti parametrelerinin tahminine yöneliktir. Elde edilen tahmini değerler futbol topu yörünge modelinde kullanılarak topun yörüngesi tahmin edilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, Mehta (1985) kriket topu, basebol topu ve golf topunun aerodinamik özelliklerini incelemiştir.

Barber vd (2008) CFD(Computational Fluid Dynamics) FLUENT programı yardımıyla farklı yüzey bileşenlerin dikiş veya yapışma yöntemleri ile bir araya getirilmesi suretiyle oluşturulan top dış yüzeylerinin topun yörüngesi üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Bu amaçla 7 farklı yüzey tipine sahip top için c_d (ortam direnç sabiti), c_l (kaldırma kuvveti sabiti) ve c_s (yan kuvvet sabiti) katsayıları hesaplamışlardır. Sonuç olarak, farklı toplar için c_d 'nin çok fazla değişmediğini ancak c_l ve c_s 'nin değişim gösterdiğini gözlemlemişlerdir.

Bray ve Kerwin (2002) top falso miktarını kapalı olarak içeren yörünge modeli inceleyerek modeldeki ortam direnç ve kaldırma kuvveti katsayılarını deneysel gözlemler yardımıyla tahmin etmişlerdir. Elde edilen tahmini c_d, c_l parametreleri için serbest vuruş hareketini incelemişlerdir. Bu çalışmada dönme hızı deneysel olarak belirlenmediği için falsolu topun yörüngesini dönmedeki değişime göre incelememişlerdir. Model Runge-Kutta yöntemi yardımıyla çözülmüştür. Gözlemlenen testler için topun yörüngesi ile video çekimi sonucunda elde edilen yörünge benzer olduğu sonucuna varmışlardır.

Spathopoulos(2009) top yörünge modelini Euler yöntemi yardımıyla çözerek Excel ortamında derste yörünge mekaniği konusunun öğretimi için yörünge simülasyonları gerçekleştirmiştir.

Cook ve Goff (2006) top yörünge modelini Euler-Cromer algoritması yöntemiyle çözerek serbest vuruş ve korner atışını dört parametredeki değişime göre (başlangıç açısı, açısız hız büyüklüğü, başlangıç vuruş açısı ve dönme açısı) incelemişlerdir.

Griffiths vd (2005) etkin bir deneysel ölçüm düzeneği kurarak, top dönme oranının zamanla azaldığını, buna rağmen nadiren yörünge boyunca dönme oranının bazen sabit kaldığını ve hatta bazen de arttığını gözlemlemişlerdir. Ayrıca aerodinamik katsayıları deneysel olarak incelemişlerdir.

Goff ve Carré (2009) yerleştirdikleri iki kamera ile falsolu ve falsosuz hareket yapan topun yörüngesini inceleyerek topun c_l, c_d parametreleri için tahmini değerler elde etmişlerdir. İlk olarak falsosuz hareket yapan topu incelediklerinde ortam direnç sabitinin yörünge boyunca fazla değişmediğini gözlemlemişlerdir. Daha sonra topa falso verdikleri durumda ise Reynold Number ve falso parametresini ($S_p = r\omega/v$) küçük değerleri için kaldırma (lift) katsayısını elde etmeye çalışmışlardır. Yapılan deneyler sonucunda, daha önce fark edilmemiş olan, falso parametresi için kaldırma kuvveti katsayısının iki değere sahip olduğunu elde etmişlerdir.

Neilson vd (2004) yaptıkları çalışmada futbol topunun hızını ve falsosunu doğru bir şekilde hesaplayan bir düzenek kurmuşlardır. Bunun için topun hızını, yüksekliğini, falso miktarını ve falso eksenini doğru bir şekilde hesaplayabilen yeni görüntü tanıma sistemi kurmuşlardır. Topun ard arda gelen iki hareketini sabitleyerek futbol topunun uzaydaki yerini ve top yönünü hesaplamışlardır. Ayrıca renk panelleri kullanarak topun bütün yüzeyini işaretlemişlerdir ve top yörüngelerini hesaplamak için örnek bir işaretleme algoritması kullanmışlardır. Kayıt edilen iki top görüntüsünü analiz ederek topun hızını, vuruş yüksekliğini, falso miktarını ve eksenini hesaplamışlardır.

Carré vd (2002) topa vuruş biçimine göre, topta oluşan falsonun neden olduğu temel karakteristikleri hesaplamayı ve topun falsosundaki değişimlerin topun yörüngesini nasıl değiştirdiğini gözlemlemeyi amaçlamışlardır. Bunun için ilk olarak falso olmadığı durum için farklı başlangıç hızlarında yörüngeyi hesaplamışlar ve elde edilen sonuçları analiz etmişlerdir. Bu durumda topun başlangıç hızı arttıkça ortam direnç sabitinin de arttığını gözlemlemişlerdir. Daha sonra, topun falso parametrelerini (dönme eksenini yatay alarak) değiştirerek aynı başlangıç hızları için yörüngeyi hesaplayarak ortam direnç sabitini ve kaldırma kuvveti sabitini hesaplamışlardır. Elde ettikleri değerleri ise üç tipik oyun simülasyonunda kullanmışlar ve bu simülasyonlar ile hava koşullarının, vurma etkisiyle sapma miktarının yörüngeye olan etkilerini incelemişlerdir. Falso verildiği durumda uygulanan falso parametresi ile birlikte kaldırma kuvveti ve ortam direnç sabitinin arttığını gözlemlemişlerdir.

Bu çalışmada ise yukarıda bahsedilen çalışmalarda incelenen top yörünge modeli göz önüne alınmış ve aşağıda belirtilen açılardan mevcut çalışmalar genelleştirilmiştir:

Top yörünge modeli, topa başlangıçta verilen falso miktarındaki değişime göre incelenmiştir. Ayrıca, yukarıda bahsedilen çalışmalarda sadece sayısal sonuçları verilen yörünge modelinin analitik yaklaşım sonuçları Adomian Ayrışım Yöntemi (2005)

yardımıyla hesaplanmıştır. Newton Sıçrama Yasası yardımıyla topun sıçrama hareketini de modelleyerek durma anına kadar olan hareketi genelleştirilmiş yörünge modeli oluşturmak suretiyle incelenmiştir. Matlab GUI (Grafik Kullanıcı Arayüzü) aracılığı ile kullanıcı etkileşimli olarak alınan top yörünge modeli parametreleri ile topun yörüngesine ait $x - y, x - z$ ve $y - z$ düzlemlerindeki izdüşümleri grafiksel olarak gösterilmiştir. Son olarak top yörünge modeli serbest vuruş hareketi için uygulanmak üzere bir sınır değer problemine dönüştürülmüş ve topun hedeflenen bölgeye yönlendirilmesi için gerekli başlangıç şartları Eğik Atış Yöntemi yardımıyla hesaplanmıştır. Ayrıca engelli vuruşlar için hedefin önündeki ilgili engelden geçmesini sağlayacak top yörüngesi için uygun bir algoritma önerilmiştir.

Bu çalışma aşağıdaki gibi organize edilmiştir:

Kesim 3'te ortam direnç kuvveti formüle edilerek sadece ortam direnç kuvveti etkisi altında top yörüngesi analiz edilmiştir. İlgili yörünge denklemindeki analitik yaklaşım çözümleri Adomian ayrışım yöntemi yardımıyla elde edilmiştir. Kesim 4'te Magnus kuvveti etkisindeki top yörüngesi için analitik çözüm ile top yörüngesi analiz edilmiştir. Kesim 5'de Magnus kuvveti ve ortam direnci etkisi altındaki topun iki boyutlu yörüngesi incelenmiştir. Elde edilen yörünge denklemi boyutsuzlaştırılarak denklemlere analitik yaklaşım yöntemi uygulanmıştır. Kesim 6'da Kesim 5'te incelenen yörünge modeli üç boyuta genelleştirilmiştir. Ayrıca, Newton sıçrama yasası yardımıyla duruş anına kadar futbol topunun yörüngesini belirleyen genelleştirilmiş model elde edilerek incelenmiştir. Kesim 6'nın son kısmında ise frikik hareketi için uygun başlangıç hız ve falso değerleri bir sınır değer problemi olarak formüle edilerek incelenmiştir.

3. ORTAM DİRENÇ KUVVETİ

3.1. Ortam Direnç Kuvveti Altında Futbol Topunun Hareketi

Futbol topu atmosferde belli bir hızda ilerlerken üzerine etkileyen kuvvetlerden biri hıza ters yönde etki eden ortam direnç kuvvetidir. Bu kuvvet için genelde aşağıdaki yaklaşım kullanılır.(Giordano ve Nakanishi, 2006)

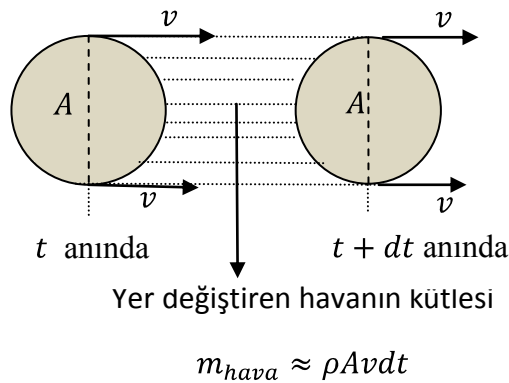
$$F_d \approx -B_1v - B_2v^2, B_1 > 0, B_2 > 0 \quad (1)$$

(1) denkleminde oldukça düşük hızlarda birinci terim baskın durumdayken, yüksek hızlarda hızın karesi ile orantılı terimin baskın olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada top hızının yüksek olduğu kabul edilerek v^2 ile orantılı durum ele alınmaktadır. Bu bölümdeki amacımız, bu baskın terimin katsayısı olan B_2 'yi hesaplamaktır.

Bir cisim atmosferde v hızı ile ilerlerken önündeki havayı yörüngesinin dışına iter. Küçük bir dt zamanında yer değiştiren havanın kütlesi

$$m_{hava} \approx \rho Avdt$$

olarak verilir, burada ρ hava yoğunluğu, A Şekil 1'de görüldüğü üzere cismin kesit alanıdır.



Şekil 1. Küçük bir zaman aralığında yer değiştiren havanın kütlesi

Havaya bir v hızı verildiğinden dolayı havanın kinetik enerjisi

$$E_{hava} = \frac{m_{hava}v^2}{2}$$

bağıntısı ile verilir. Bu değer cismin dt zamanında hava direncine karşı yaptığı iş olduğundan

$$E_{hava} = Kuvvet \times yol$$

$$E_{hava} = F_d v dt$$

bağıntısı elde edilir. Elde edilen bağıntılardan ortam direnç kuvvetinin büyüklüğü

$$F_d = \frac{C\rho Av^2}{2} \quad (2)$$

olarak bulunur. (2) denklemini vektörel formda ise

$$\vec{F}_d = \frac{C\rho Av^2}{2} \vec{e}_d$$

şeklinde yazılır. Burada \vec{e}_d , ortam direnç kuvveti yönündeki birim vektörü göstermektedir. Ortam direnç kuvveti hıza zıt yönlü bir kuvvet olduğundan dolayı bu kuvvet yönündeki birim vektör

$$\vec{e}_d = -\frac{\vec{v}}{v}$$

şeklindedir. Dolayısı ile ortam direnç kuvveti

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} C\rho Av\vec{v} \quad (3)$$

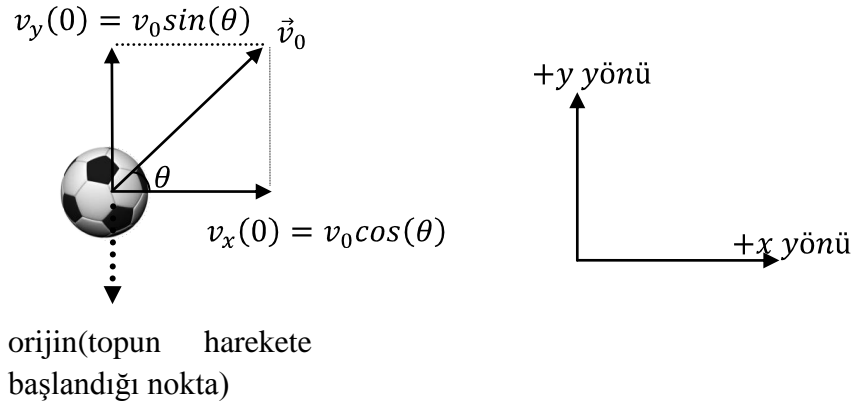
olarak elde edilir. (3) denklemdaki eksi işareti ortam direnç kuvvetinin hıza ters yönde olduğunu göstermektedir. Ayrıca (3) denklemindeki C , ortam direnç sabiti olarak bilinir ve bu değer hızın bir fonksiyonu olduğu bilinmekle birlikte bu çalışmada düzgün küresel cisimler için ölçülen standart değer olan $C = 0.47$ (URL-1, 2009) olarak alınmaktadır. Fakat C sabitini bulmanın en iyi yolu rüzgar tuneli ölçümü veya benzer deneyler yapmaktır. (Giordano ve Nakanishi, 2006) Ayrıca bu çalışmada topun standart özellikleri ile, topun yarıçapı $r = 0.11 \text{ m}$ olduğundan dolayı $A = \pi (0.11)^2 = 0.038 \text{ m}^2$ değeri kullanılmaktadır. Kullanılan tipik parametreler ve değerleri Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1. Futbol topu için tipik parametreler ve değerleri

Parametreler	Anlamı	Tipik Değeri	Büyüklik Mertebesi
ρ	Havanın yoğunluğu	1.245 kg/m^3	$O(10^0)$
v	Cismin sürati	$20 - 30 \text{ m/s}$	$O(10^1)$
r	Futbol topunun yarıçapı	0.11 m	$O(10^{-1})$
m_t	Futbol topunun kütlesi	0.43 kg	$O(10^{-1})$
C	Ortam direnç sabiti	0.47	$O(10^{-1})$

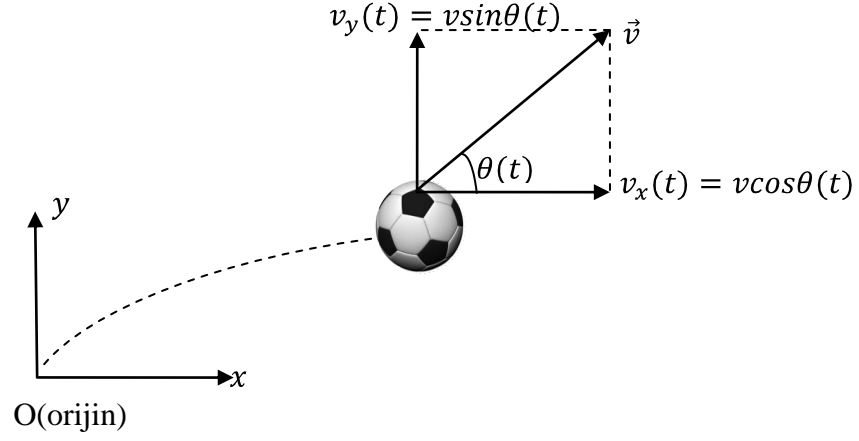
3.2. Sadece Ortam Direnç Kuvveti Etkisinde Futbol Topunun 2-Boyutlu Hareketi

Bu bölümde, futbol topunun sadece ortam direnç kuvveti altındaki hareketi $x - y$ düzleminde incelenmektedir. Bunun için başlangıçta topa Şekil 2’de gösterildiği gibi $\vec{v}(0) = (v_x(0), v_y(0)) = (\beta, \gamma)$ hızı ile orijinden vurulduğu göz önüne alınsın. Alınan başlangıç değeri için topun nasıl bir yörünge izleyeceği aşağıda incelenmektedir.



Şekil 2. İki boyutta hareket eden futbol topunun başlangıç hız bileşenleri

İki boyutta hareket incelendiğinden dolayı hızın Şekil 3’teki gibi x ve y yönünde sırasıyla v_x ve v_y ile gösterilen iki hız bileşeni mevcuttur.



Şekil 3. Herhangi bir t anında cismin hız bileşenleri

Newton'un ikinci yasası ile

$$m_t \vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{F}_d \quad (4)$$

bağıntısı elde edilir. Burada m_t topun kütesidir. $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \vec{v}'$ olduğundan

$$m_t \vec{v}' = \vec{F}_d$$

şeklindedir. (3) denkleminde elde edilen ortam direnç kuvveti son bağıntıda yerine yazılırsa

$$m_t \vec{v}' = -\frac{1}{2} C \rho A v \vec{v} \quad (5)$$

olarak elde edilir. Burada $v = |\vec{v}|$ dir.

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Hız vektörü (5) denkleminde yerine yazılırsa

$$m_t (v_x, v_y)' = -\frac{1}{2} C \rho A v (v_x, v_y) \quad (6)$$

elde edilir. (6) denkleminde hız bileşenlerini veren denklemler

$$m_t v_x' = -\frac{1}{2} C \rho A v_x v$$

$$m_t v'_y = -\frac{1}{2} C \rho A v_y v$$

olarak bulunur. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ olduğundan dolayı denklemler

$$m_t v'_x = -\frac{1}{2} C \rho A v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (7.a)$$

$$m_t v'_y = -\frac{1}{2} C \rho A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (7.b)$$

şeklinde yazılır. (7.a) ve (7.b) taraf tarafa bölünürse

$$\frac{m_t v'_x}{m_t v'_y} = \frac{-\frac{1}{2} C \rho A v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{-\frac{1}{2} C \rho A v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v'_x}{v'_y} = \frac{v_x}{v_y} \Rightarrow \frac{v'_x}{v_x} = \frac{v'_y}{v_y} \quad (8)$$

elde edilir. (8) denkleminin iki tarafının integrali alınırsa

$$v_y = c_2 v_x \quad (9)$$

veya $(x(t), y(t))$, t anındaki konum ve

$$\frac{dy}{dt} = v_y, \frac{dx}{dt} = v_x$$

bağıntılarından

$$y' = c_2 x'$$

şeklinde elde edilir. Buradan ise

$$y = c_2 x + c_3 \quad (10)$$

şeklinde bulunur. Başlangıç değerleri elde edilen çözümlere uygulanırsa

$$v_y = c_2 v_x$$

olduğundan

$$v_y(0) = c_2 v_x(0) \Rightarrow \gamma = c_2 \beta \Rightarrow c_2 = \frac{\gamma}{\beta}$$

elde edilir. Ayrıca top orijinden harekete başlandığından dolayı konum denkleminde

$$y = c_2 x + c_3 \Rightarrow y(0) = c_2 x(0) + c_3 \Rightarrow c_3 = 0$$

olarak bulunur. Elde edilen sabitler (10)'da yerine yazılırsa konum denklemi

$$y = \frac{\gamma}{\beta} x \tag{11}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1: Bir futbol topuna 25 m/s 'lik bir ilk hızla x eksenine ile pozitif yönde 15° 'lik bir açı yapacak şekilde vurulsun. Bu durumda topun başlangıç hız bileşenleri

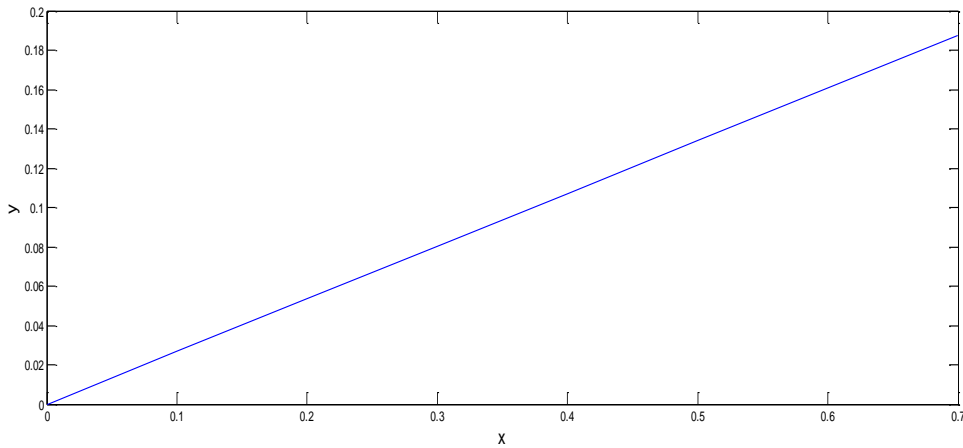
$$v_x(0) = v(0) \cos(15) \approx 24.1481 = \beta$$

$$v_y(0) = v(0) \sin(15) \approx 6.4705 = \gamma$$

şeklinde olur. Dolayısıyla sadece ortam direnç kuvveti etkisi altındaki cismin yörüngesi, (11) denkleminde

$$y = \frac{\gamma}{\beta} x = 0.2680x$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla sadece ortam direnç kuvveti etkisindeki bir top Şekil 4'de görüldüğü gibi doğrusal bir yörüngeye sahiptir.



Şekil 4. Sadece ortam direnç kuvveti etkisindeki bir topun yörüngesi

3.3. Adomian Ayrışım Yöntemiyle Yaklaşık Çözümler

Sadece ortam direnç kuvveti etkisi altındaki bir topun yörüngesinin doğrusal olduğu bir önceki bölümde gösterildi. Bu bölümde, (7) denklem sistemi için alternatif bir analitik yaklaşım yöntemi ile topun yörüngesinin nasıl elde edilebileceği araştırılmaktadır. Burada gösterilen yöntem analitik olarak çözülemeyen birçok problem için iyi bir yaklaşım yöntemidir ve bu çalışmanın ileri ki kısımları için temel oluşturmaktadır. Söz konusu yöntem Adomian yöntemi olarak bilinmektedir.

Eğer (7) denklem sisteminde

$$p := v_x \text{ ve } u := v_y$$

olarak tanımlanırsa hız denklemleri

$$\begin{aligned} mp' &= \alpha p \sqrt{p^2 + u^2} \\ mu' &= \alpha u \sqrt{p^2 + u^2} \end{aligned} \quad (12)$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha = -\frac{1}{2}C\rho A \cong -0,5 \times 0,47 \times 1,245 \times \pi \times (0,11)^2 \approx -0,0111 \text{ kg/m}$ ve $m = m_t$ 'dir. Analitik olarak çözülebilen denklem sistemi için Adomian yöntemi ile yaklaşımlar aşağıdaki gibi elde edilir.

Öncelikle (12)'deki denklem sisteminin

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k p_k \\ u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k \end{aligned}$$

şeklinde çözümlerinin mevcut olduğu kabul edilir. Bu çözümler (12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & m(p'_0 + \alpha p'_1 + \alpha^2 p'_2 + \alpha^3 p'_3 + \dots) \\ &= \alpha(p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 \\ &+ \dots) \sqrt{(p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + \dots)^2 + (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 + \dots)^2} \\ & m(u'_0 + \alpha u'_1 + \alpha^2 u'_2 + \alpha^3 u'_3 + \dots) \\ &= \alpha(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 \\ &+ \dots) \sqrt{(p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + \dots)^2 + (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 + \dots)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Ek kısmında Örnek Ek 2'de $F(p, u) = \sqrt{p^2 + u^2}$ şeklindeki lineer olmayan fonksiyonların

$$\sqrt{p^2 + u^2} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k A_k$$

şeklinde bir ayrışımı mevcut olduğu gösterilmektedir. Dolayısı ile Adomian yöntemi özetle A_0, A_1, \dots katsayılarının etkin bir biçimde hesaplanmasını sağlayan bir yöntemdir. Bu açılım denklemlerde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m(p'_0 + \alpha p'_1 + \alpha^2 p'_2 + \alpha^3 p'_3 + \dots) \\ = \alpha(p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + \dots)(A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \dots) \\ m(u'_0 + \alpha u'_1 + \alpha^2 u'_2 + \alpha^3 u'_3 + \dots) \\ = \alpha(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 + \dots)(A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \dots) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerin her iki tarafı α katsayılı polinomlar olup bu polinomların eşit üslü terimlerinin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned} mp'_0 = 0; \quad mp'_1 = p_0 A_0; \quad mp'_2 = p_0 A_1 + p_1 A_0; \quad mp'_3 = p_0 A_2 + p_1 A_1 + p_2 A_0; \dots \\ mu'_0 = 0; \quad mu'_1 = u_0 A_0; \quad mu'_2 = u_0 A_1 + u_1 A_0; \quad mu'_3 = u_0 A_2 + u_1 A_1 + u_2 A_0; \dots \end{aligned}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Ayrıca topun başlangıçtaki hız bileşenleri

$$\begin{aligned} v_x(0) = p(0) = \beta \\ v_y(0) = u(0) = \gamma \end{aligned}$$

olarak alınır

$$p(t) = p_0(t) + \alpha p_1(t) + \alpha^2 p_2(t) + \alpha^3 p_3(t) + \dots$$

olduğundan dolayı p için başlangıç değerleri

$$\begin{aligned} p(0) = p_0(0) + \alpha p_1(0) + \alpha^2 p_2(0) + \alpha^3 p_3(0) + \dots = \beta \\ \Rightarrow \begin{cases} p_0(0) = \beta \\ p_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{cases} u_0(0) = \gamma \\ u_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

başlangıç değerleri elde edilir. Ayrıca Ek kısmında A_0, A_1, A_2, \dots değerleri Örnek Ek 2'de

$$\begin{aligned} A_0 &= \sqrt{p_0^2 + u_0^2} \\ A_1 &= \frac{p_0 p_1 + u_0 u_1}{\sqrt{p_0^2 + u_0^2}} \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{(p_1^2 + 2p_0p_2 + 2u_0u_2 + u_1^2)(p_0^2 + u_0^2) - (p_0p_1 + u_0u_1)^2}{2(p_0^2 + u_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

⋮

olarak elde edildiğinden dolayı bu değerler denklemlerde yerine yazılırsa aşağıdaki başlangıç değer problemleri elde edilir.

p için elde edilen denklemler

$$mp'_0 = 0, \quad p_0(0) = \beta$$

$$mp'_1 = p_0\sqrt{p_0^2 + u_0^2}, \quad p_1(0) = 0$$

$$mp'_2 = p_0 \frac{p_0p_1 + u_0u_1}{\sqrt{p_0^2 + u_0^2}} + p_1\sqrt{p_0^2 + u_0^2}, \quad p_2(0) = 0$$

⋮

u için elde edilen denklemler

$$mu'_0 = 0, \quad u_0(0) = \gamma$$

$$mu'_1 = u_0\sqrt{p_0^2 + u_0^2}, \quad u_1(0) = 0$$

$$mu'_2 = u_0 \frac{u_0u_1 + p_0p_1}{\sqrt{p_0^2 + u_0^2}} + u_1\sqrt{p_0^2 + u_0^2}, \quad u_2(0) = 0$$

⋮

şeklindedir. Bu denklemlerin çözümlerinden

$$p_0(t) = \beta$$

$$p_1(t) = \frac{\beta\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{m} t$$

$$p_2(t) = \frac{\beta^3 + \beta\gamma^2}{m^2} t^2$$

⋮

elde edilir. Benzer şekilde

$$u_0(t) = \gamma$$

$$u_1(t) = \frac{\gamma\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{m} t$$

$$u_2(t) = \frac{\gamma^3 + \gamma\beta^2}{m^2} t^2$$

⋮

olarak bulunur. Dolayısı ile aranan yaklaşımlar

$$p = p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \dots = \beta + \alpha \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{m} t + \alpha^2 \frac{\beta^3 + \beta \gamma^2}{m^2} t^2 + \dots$$

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots = \gamma + \alpha \frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{m} t + \alpha^2 \frac{\gamma^3 + \gamma \beta^2}{m^2} t^2 + \dots$$

şeklindedir. Burada $p = v_x$ ve $u = v_y$ olduğundan topun hız bileşenleri

$$v_x = \beta + \alpha \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{m} t + \alpha^2 \frac{\beta^3 + \beta \gamma^2}{m^2} t^2 + \dots$$

$$v_y = \gamma + \alpha \frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{m} t + \alpha^2 \frac{\gamma^3 + \gamma \beta^2}{m^2} t^2 + \dots$$

şeklinde bulunur. Burada β ve γ değerleri topun başlangıç hız bileşenleridir. Ayrıca konumun türevi hızı verdiği için topun konum denklemleri

$$x = \beta t + \frac{\alpha \beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{2m} t^2 + \alpha^2 \frac{\beta^3 + \beta \gamma^2}{3m^2} t^3 + \dots$$

$$y = \gamma t + \frac{\alpha \gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{2m} t^2 + \alpha^2 \frac{\gamma^3 + \gamma \beta^2}{3m^2} t^3 + \dots$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla cismin başlangıçtaki hız bileşenleri bilinirse kütlesi $m = 0.43 \text{ kg}$ ve $\alpha \approx -0,0111 \text{ kg/m}$ olduğundan cismin konumu bulunur. Yukarıdaki denklemlerden

$$y = \frac{\gamma}{\beta} x \tag{13}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla elde edilen çözüm (11)'deki analitik olarak bulunan çözümün aynısıdır.

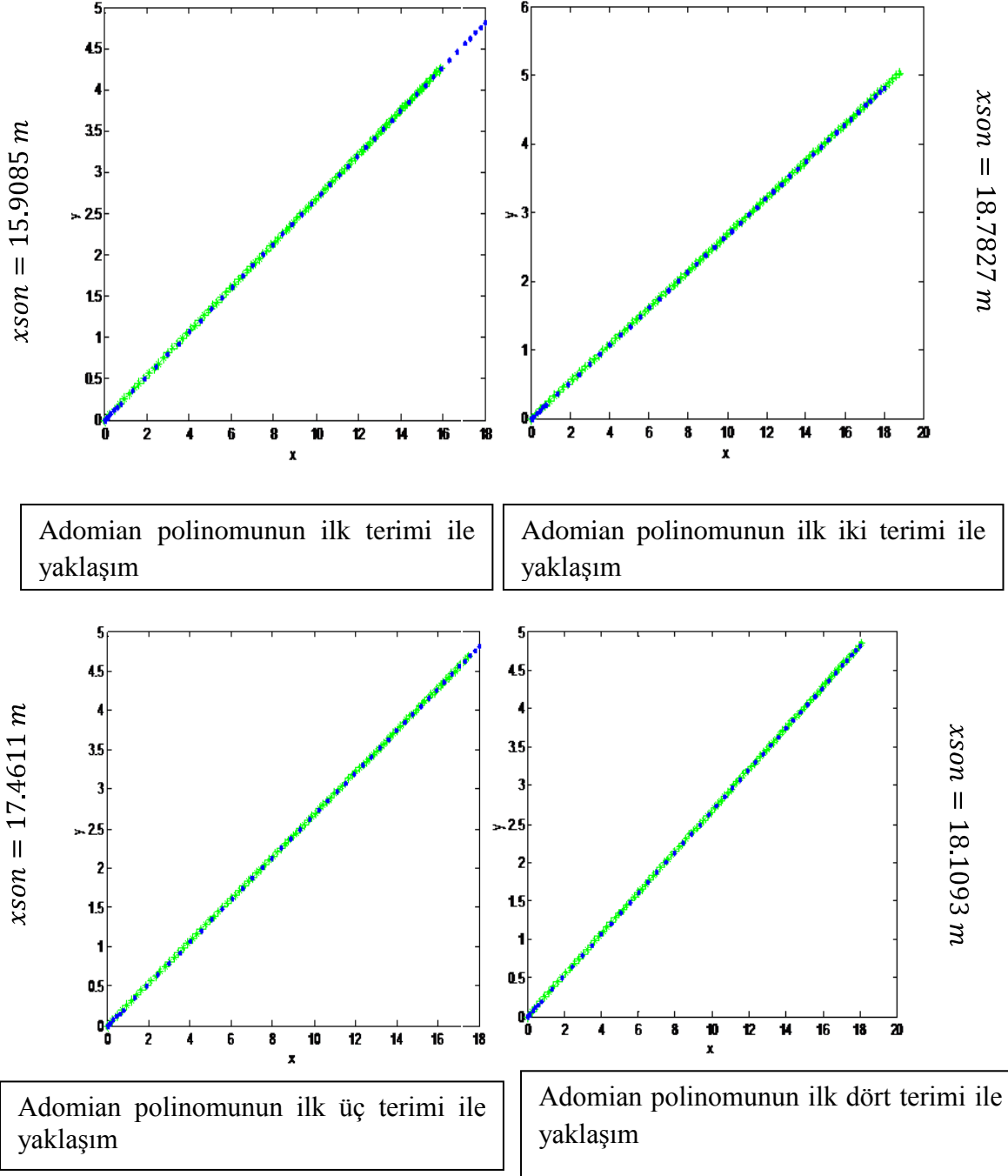
Örnek 3.2: Futbol topunun sadece ortam direnç kuvveti etkisi altındaki genel denklemleri elde edildikten sonra analitik olarak bulunan çözüm grafiği ile Adomian yöntemi ile elde edilen çözümün grafikleri karşılaştıralım. Bunun için kaleye 18 m uzaklıkta bulunan topa 25 m/s 'lik bir ilk hızla x eksenine pozitif yönde 15° 'lik açı yapacak şekilde vurulsun. Dolayısıyla başlangıç hız bileşenleri

$$\beta = 25 \cos(15^\circ) \approx 24.1481 \text{ m/s}$$

$$\gamma = 25 \sin(15^\circ) \approx 6.4705 \text{ m/s}$$

şeklindedir. MATLAB ODE çözümler yardımıyla futbol topu kaleye ulaşmaya kadar yaklaşık olarak $0,957734 \text{ s}$ hareket ettiği elde edilir. Bu süre zarfında topun analitik ve Adomian yöntemiyle elde edilen grafikleri aşağıda görülmektedir.

Şekil 5’de görüldüğü üzere Adomian ayrışımının ilk üç teriminden sonraki grafikleri cismin yörüngesi ile aynı davranışı sergilemektedir. Dolayısı ile Adomian yöntemi ile elde edilen çözümler hızlı bir şekilde gerçek çözüme yakınsamaktadırlar.



Şekil 5. Adomian ile analitik yaklaşım ve gerçek çözümün uyumu (noktalar gerçek çözümü, çizgiler ise Adomian yaklaşımları göstermektedir düşey eksen: x , yatay eksen: y)

4. MAGNUS KUVVETİ

4.1. Magnus Kuvvetinin Tarihi

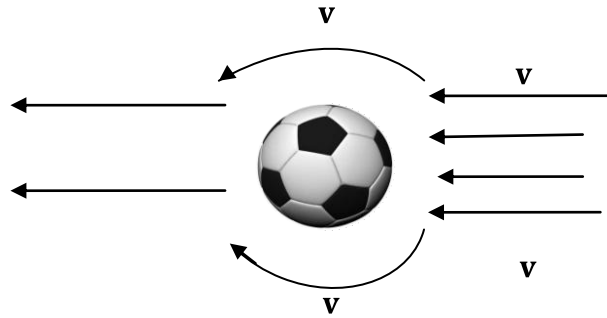
Magnus kuvvetinin tarihi gelişimi ile ilgili bilgilere Bray(2006) tarafından yazılan “if you can't bend it, model it!” adlı yazısından ulaşabilirsiniz.

Aerodinamik incelemelerin sporda ne zaman kullanıldığı tam olarak bilinmemektedir. Bu durumun ilk olarak Isaac Newton'un bir tenis maçında tenis raketiyle topa eğik bir şekilde vurulduğu zaman topun saptığını gözlemlemesiyle başladığı düşünülmektedir. Bu vuruş bugünlerde “kesme vuruşu” olarak bilinir.

Topun dönme hareketinin neden olduğu yörüngesel değişim Alman fizikçi Heinrich Gustov Magnus tarafından açıklanmış ve bu kuvvet kendi ismiyle anılmaya başlamıştır.

4.2. Magnus Kuvveti

Dönme hareketi yapmayan top üzerinde hava akımı Şekil 6'daki gibi uçuş boyunca simetrik olarak dağılır. Dolayısıyla topun yüzeylerindeki her noktaya hava akımı eşit olarak dağılır.



Şekil 6. Dönme hareketi yapmayan topun yüzeyindeki hız değişimi

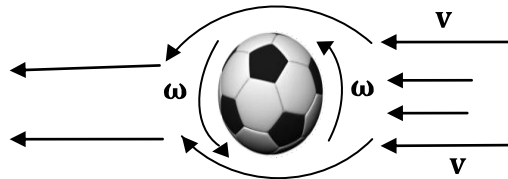
Fakat parçacıklar havada hareket halinde iken çoğunun dönme hareketi yapmakta olduğu görülür. Dönen parçacıklar, cismin hızına ve dönme eksenine dik olan, bu çalışmada önemli bir yer tutan kuvvet oluşturur. Dönme olayı ile oluşan kuvveti açıklamadan önce bu kuvvetin temelini oluşturan Bernoulli prensibini göz önüne alalım.

Bernoulli bağıntısı olarak bilinen

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{sabit} \quad (14)$$

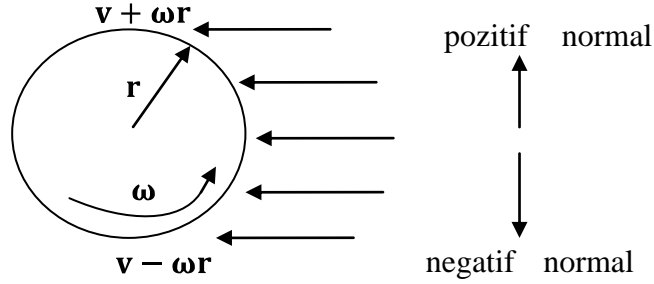
bağıntısını ele alalım. (14) bağıntısında, p basınç; ρ akışkanın yoğunluğu; v cismin hızı ve z sıvının referans alınan eksene göre yüksekliğidir. Bernoulli prensibi, sıkıştırılabilirlik ve sürtünme etkileri ihmal edildiğinde, bir akışkan parçacığının bir akım çizgisi boyunca daimi akışı sırasında, kinetik, potansiyel ve akış enerjilerinin toplamı sabit kaldığını ifade eder.(Çengel ve Cimbala, 2008) (14) denklemi akış oranı ölçümünden uçak kanadı dizaynına kadar birçok farklı uygulamada kullanılmaktadır. (14) denklemi yorumlamak istenirse; elde edilen sonuçlardan biri, eğer yükseklik sabit tutulur ve akışkanın hızı yükseltirse basıncın düşeceği, Benzer düşünce ile eğer yükseklik sabit tutulur ve akışkanın hızı azaltılırsa (14) eşitliğinin sabit kalması için basıncın artması gerektiği görülür. Dolayısı ile bu çalışmada kullanılan Bernoulli prensibi akışkanın hızının arttığı yerde akışkana uygulanan basıncın düşeceği ve hızın azaldığı yerde basıncın artacağı ilkesidir. Bu prensip uçak kanatlarının yapımında önemli rol oynamaktadır. Uçakların kanadının üst kısmı biraz tümsek ve alt kısmı düz yapılarak alt kısım ile üst kısım arasında öncelikle hız ve dolayısıyla da basınç farkı oluşması sağlanır. Böylelikle uçağın kanatlarında bir kaldırma veya lift kuvveti oluşur. Bu kuvvet sayesinde uçağın havalanması sağlanır.

Bernoulli prensibini, Şekil 7'de görüldüğü üzere havada ω açısal hızıyla saat yönünün tersine dönen bir futbol topunun hareketine uygulayalım.



Şekil 7. ω (devir/s) açısal hızıyla dönen futbol topu

Futbol topunun v hızı ile hareket ediyorken aynı zamanda saat yönünün tersine ω açısal hız ile döndüğünü kabul edelim. Bu durumda futbol topunun yüzeyine yakın katmanındaki hava tabakası top ile birlikte döner. Böylece cismin yüzeyine yakın bölgede, ya dönme hıza eklenir ya da hızdan çıkarılır. Dolayısıyla topun hareket yönünün normal doğrultudaki farklı iki yüzeyinde bir hız farkı oluşur. Şekil 8’den görüldüğü üzere dönme, topun pozitif normal yönündeki yüzeyi boyunca akışkan hızını artırırken negatif normal yüzeyi boyunca azaltmaktadır. Topun pozitif normal yönündeki akışkan hızı negatif normal yönündekinden daha fazla olduğundan Bernoulli prensibini göre, topun pozitif normal yönünde yüzeyinde oluşan basınç, negatif normal yüzeyinden daha az olur. Bu basınç farkı pozitif normal yönünde bir kuvvetin oluşmasına neden olur. Bu kuvvet, “Magnus kuvveti” veya bazen de “kaldırma kuvveti” olarak adlandırılır.(Palmer, 2005) Bu kuvvetin yönü genelde, burada da kaydedildiği gibi, dönme yönüne bağlıdır. Bu yön, hem dönme eksenine hem de hıza dik yönde olacak şekilde alınmalıdır.



Şekil 8. Dönme olayı sonucunda topun iki yüzeyinde oluşan hız farkı

4.2.1. Magnus Kuvvetinin Büyüklüğü

Şekil 7’de belirtilen topun yüzeylerindeki hız farkından dolayı, topun negatif normal yönündeki ortam direnç kuvvetinin bileşeni oradaki hız $(v - \omega r)^2$ ile orantılıdır. Benzer şekilde, topun pozitif normal yönündeki ortam direnç kuvveti bileşeni de oradaki hız büyüklüğü $(v + \omega r)^2$ ile orantılıdır. Dolayısı ile topun yüzeylerinde oluşan ortam direnç kuvvetleri arasındaki fark, Magnus kuvvetinin büyüklüğünü vermektedir. Böylece Magnus kuvvetinin

$$(v + \omega r)^2 - (v - \omega r)^2 = 4v\omega r$$

ile orantılı olduğu elde edilir. (Giordano ve Nakanishi, 2006) Dolayısı ile Magnus kuvvetinin genel formu ortam direnç kuvvetine benzer olarak

$$\vec{F}_m = \frac{1}{2} C\rho A (v + \omega r)^2 \vec{e}_m - \frac{1}{2} C\rho A (v - \omega r)^2 \vec{e}_m = \frac{1}{2} C\rho A 4v\omega r \vec{e}_m$$

$$\vec{F}_m = 2 C\rho A v\omega r \vec{e}_m \quad (15)$$

şeklinde elde edilir. Burada \vec{e}_m , Magnus kuvveti yönündeki birim vektörü göstermektedir. Magnus kuvveti dönme eksenine ve hıza dik olduğundan dolayı bu vektörün yönünü veren birim vektör, dönme eksenini ile hız vektörünün vektörel çarpımının bu vektörel çarpımın boyuna oranı olur. Yani,

$$\vec{e}_m = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|} \quad (16)$$

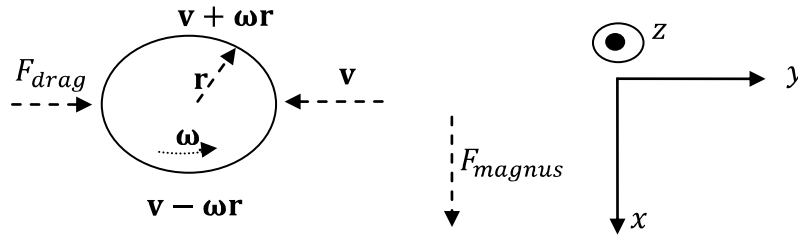
şeklindedir. (16) bağıntısı denklem (15)'de yerine yazılırsa Magnus kuvveti

$$\vec{F}_m = 2 C\rho A v\omega r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|} \quad (17)$$

olarak elde edilir. Burada $v = |\vec{v}|$, $\omega = |\vec{\omega}|$ 'dir.

Magnus kuvvetinin yönünü göstermek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.1: Futbol topunun sadece z ekseninde döndüğünü ve topa $-y$ ekseninde vurulduğunu düşünelim. Bu koşullar altında Magnus kuvvetinin yönünün nasıl olacağı araştıralım. Bu yön için şekil 9'u göz önüne alalım.



Şekil 9. Magnus kuvvetinin yönünü gösteren bir örnek

Şekil 9'dan görüleceği üzere sağdan sola doğru hareket eden ve +z eksenine paralel saat yönünün tersi yönünde dönen bir top için topun alt kısmındaki hız bileşeni üst kısmındakinden daha az olur. Hava kısmen +x yönünde çekildiğinden ve topun yörüngesinde bir dönme olduğundan ortam direnç kuvvetinin topun üst kısmında bir bileşene sahiptir. Ortam direnç kuvvetinin üst kısmındaki bileşenine benzer biçimde bir de aşağı yönlü bileşeni mevcuttur. Topun üzerindeki bu iki kuvvet eklenirse Şekil 9'da gösterildiği gibi +x yönünde bir kuvvet oluşur. Bu kuvvet Magnus kuvvetidir. Ayrıca bu kuvvet hıza ve dönme eksenine diktir. (Giordano ve Nakanishi, 2006)

4.3. Sadece Magnus Kuvveti Etkisi Altındaki Futbol Topunun İki Boyutta Hareketi

Bu bölümde, iki boyutlu uzayda z ekseninde dönen bir topun sadece Magnus kuvveti altındaki hareketi incelenmektedir. Burada, topun $x - y$ düzleminde hareket ettiği düşünülerek z yönünde hareket olmadığı göz önüne alınmaktadır. Buna bağlı olarak $-z$ yönündeki yerçekimi kuvveti mg ihmal edilir ve sadece $x - y$ düzlemindeki hareket incelenir. (17) denkleminde Magnus kuvveti

$$\vec{F}_m = 2 C_p A v \omega r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}$$

şeklinde elde edildiğinden dolayı buradaki yön vektörü hesaplanmalıdır. Dönme eksenini $\vec{\omega}$, +z eksenini kabul edilip bu ekseninde sabit kaldığı düşünüldüğünden $\vec{\omega} = (0, 0, \omega) = \omega \vec{k}$ şeklindedir. $x - y$ düzleminde yörünge analizi yapıldığı için hız vektörünün $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ olacak şekilde iki bileşeni mevcuttur. Dolayısıyla $\vec{\omega} \times \vec{v}$ vektörü

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = (-\omega v_y, \omega v_x, 0)$$

olarak elde edilir. Buradan Magnus kuvvetinin yönünü gösteren birim vektör

$$\frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|} = \frac{(-\omega v_y, \omega v_x, 0)}{\sqrt{(\omega v_y)^2 + (\omega v_x)^2}} = \frac{(-v_y, v_x, 0)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

şeklindedir. Dolayısı ile $x - y$ düzleminde hareket eden cisme etkileyen Magnus kuvvetinin yönü hem x hem de y yönündedir. Başlangıçta cismin $-y$ ekseninde atıldığı göz önüne alınırsa, Magnus kuvvetinin sadece +x yönünde olduğuna dikkat ediniz.

Dolayısıyla sadece Magnus kuvveti etkisinde hareket eden bir cisme Newton'un 2. yasası uygulanırsa

$$m\vec{a} = \vec{F}_{magnus}$$

olduğundan

$$m(x'', y'') = 2 C\rho A v \omega r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}$$

şeklindedir. Buradan ise

$$m(x'', y'') = 2 C\rho A v \omega r \frac{(-v_y, v_x)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

elde edilir. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ olduğundan

$$m(x'', y'') = 2 C\rho A \omega r (-v_y, v_x)$$

olarak bulunur. Son bağıntıdan konum denklemleri

$$mx'' = -2 C\rho A \omega r v_y$$

$$my'' = 2 C\rho A \omega r v_x$$

şeklindedir. Bu elde edilen denklemler hız bileşenleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} mv'_x &= -2 C\rho A \omega r v_y \\ mv'_y &= 2 C\rho A \omega r v_x \end{aligned} \quad (18)$$

olarak elde edilir. (18) denklem sisteminin matris formu ise

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (19)$$

olarak yazılır. Burada $a = 2 C\rho A \omega r / m$ (devir/s)'dir. (19)'daki sabit katsayılı denklem sisteminin çözümü için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa A matrisinin özdeğerleri $\det(A - \lambda I) = 0$ koşulunu sağlayan λ değerleri olup bu değerler

$$\lambda_1 = ia ; \lambda_2 = -ia$$

şeklindedir. Bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ise

$$\lambda_1 = ia \text{ özdeğeri için } Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}; \lambda_2 = -ia \text{ özdeğeri için } Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Dolayısı ile denklem sisteminin genel çözümü özdeğerler ve özvektörler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = c_1 e^{iat} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + c_2 e^{-iat} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (20)$$

olarak elde edilir. (20) denklemine

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

açılımı uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = c_1 (\cos(at) + i\sin(at)) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + c_2 (\cos(at) - i\sin(at)) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1 (\cos(at) + i\sin(at)) + c_2 (\cos(at) - i\sin(at)) \\ -ic_1 (\cos(at) + i\sin(at)) + ic_2 (\cos(at) - i\sin(at)) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) \cos(at) + i(c_1 - c_2) \sin(at) \\ -i(c_1 - c_2) \cos(at) + (c_1 + c_2) \sin(at) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısı ile hız bileşenleri

$$\begin{aligned} v_x(t) &= C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at) \\ v_y(t) &= -C_2 \cos(at) + C_1 \sin(at) \end{aligned} \quad (21)$$

şeklindedir. Burada $C_1 = c_1 + c_2$ ve $C_2 = i(c_1 - c_2)$ 'dir. Futbol topunun başlangıçtaki hız bileşenleri

$$v_x(0) = \beta ; v_y(0) = \gamma$$

olarak alınırsa (21) denklemlerinden $C_1 = \beta ; C_2 = -\gamma$ olarak bulunur. Dolayısı ile hız denklemleri

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \beta \cos(at) - \gamma \sin(at) \\ v_y(t) &= \gamma \cos(at) + \beta \sin(at) \end{aligned}$$

şeklindedir. Konum bileşenleri hız bileşenlerinin integrali olduğundan

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v_x(t) dt = \frac{\beta}{a} \sin(at) + \frac{\gamma}{a} \cos(at) + C_3 \\ y(t) &= \int v_y(t) dt = \frac{\gamma}{a} \sin(at) - \frac{\beta}{a} \cos(at) + C_4 \end{aligned} \quad (22)$$

olarak elde edilir. Eğer başlangıçta cismin orijinden harekete başladığı, yani

$$x(0) = 0 ; y(0) = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa (22) denkleminde $C_3 = -\gamma/a$; $C_4 = \beta/a$ olarak bulunur.

Böylece cismin konum bileşenleri

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\beta}{a} \sin(at) + \frac{\gamma}{a} \cos(at) - \frac{\gamma}{a} \\ y(t) &= \frac{\gamma}{a} \sin(at) - \frac{\beta}{a} \cos(at) + \frac{\beta}{a} \end{aligned} \quad (23)$$

şeklindedir. Burada $a = 2C\rho A\omega r/m$ (devir/s)'dir.

Örnek 4.2: Bir futbol topuna sadece Magnus kuvveti etkisi altında 30 m/s 'lik bir ilk hızla x eksenine pozitif yönde 15° 'lik açı yapacak şekilde vurulsun. Ayrıca top 8 devir/s 'lik bir dönmeye sahip olsun. Bu durumda başlangıç değerleri

$$\beta = v_x(0) = 30 \cos(15^\circ) = 28.9778 \text{ m/s}$$

$$\gamma = v_y(0) = 30 \sin(15^\circ) = 7.7646 \text{ m/s}$$

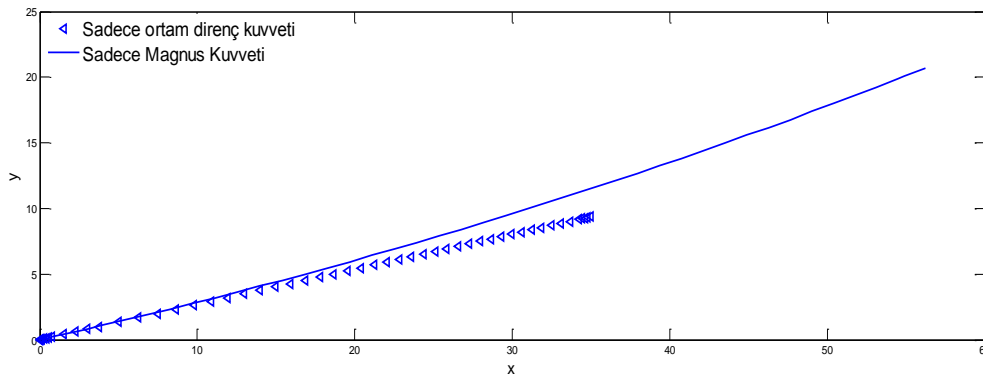
$$a = 2 \frac{C\rho A\omega r}{m} = 0.1707 \text{ devir/s}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla (23)'de elde edilen konum denklemleri ile cismin yörüngesini veren denklemler

$$x(t) = 169.7586 \sin(0.1707t) + 45.4868 \cos(0.1707t) - 45.4868$$

$$y(t) = 45.4868 \sin(0.1707t) - 169.7586 \cos(0.1707t) + 169.7586$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklemler ile topun sadece Magnus kuvveti etkisi altındaki 2 s 'lik süre zarfındaki yörüngesi Şekil 10'daki gibidir.



Şekil 10. Sadece Magnus kuvveti etkisi altındaki top yörüngesi

Şekil 10'dan görüldüğü üzere, dönme sonucunda oluşan Magnus kuvveti altındaki topun yörüngesi ortam direnç kuvvetinden farklı olarak yön değiştirmektedir. Bu yön değişimi topun falsosundan kaynaklanmaktadır. Bu olay futbol karşılaştırılması izlerken toptaki ani yön değiştirmelerin sebebini ortaya koyan önemli bir örnektir.

5. FUTBOL TOPUNUN 2-BOYUTTA YÖRÜNGESİ

5.1. Magnus ve Ortam Direnç Kuvveti

Bu bölümde, ortam direnç ve Magnus kuvvetleri etkisi altındaki bir topun nasıl bir yörüngeye sahip olacağı araştırılmaktadır. Bunun için önceki bölümlerde elde edilen iki kuvvete Newton'un 2. yasası uygulayalım. Bu yasaya göre

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{F}_d + \vec{F}_m$$

olduğundan

$$m\vec{a} = -\frac{1}{2}C\rho Av\vec{v} + 2C\rho Av\omega r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}$$

şeklinde bulunur. $x - y$ düzleminde hareket eden bir cisim için $\vec{v} = (v_x, v_y)$ ve $\vec{a} = (a_x, a_y) = (x'', y'')$ olduğundan

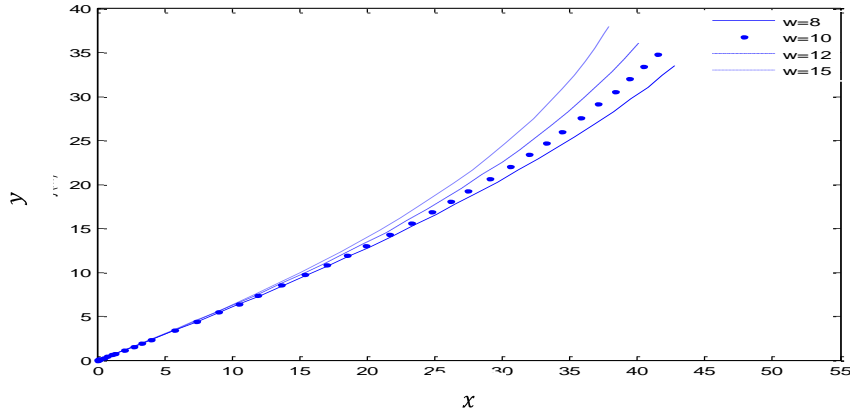
$$m(x'', y'') = -\frac{1}{2}C\rho Av(v_x, v_y) + 2C\rho Av\omega r \frac{(-v_y, v_x)}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

olarak elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned} mx'' &= -\frac{1}{2}C\rho Avv_x + 2C\rho Av\omega r \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = C\rho Av\left(-\frac{1}{2}v_x - 2\omega r \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right) \\ my'' &= -\frac{1}{2}C\rho Avv_y + 2C\rho Av\omega r \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = C\rho Av\left(-\frac{1}{2}v_y + 2\omega r \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

nonlineer denklem sistemi elde edilir. (24) sistemini birinci mertebeden denklem sistemine dönüştürerek MATLAB ODE çözücülerini yardımıyla sayısal olarak çözüyoruz.

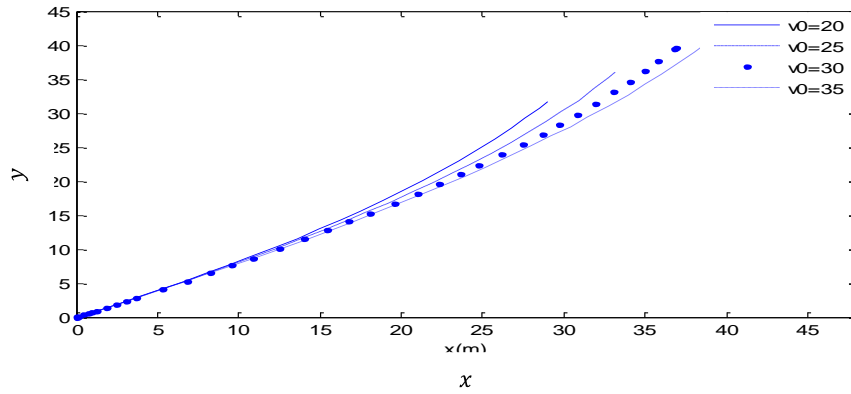
Futbol topu başlangıçta x eksenini ile pozitif yönde 30° 'lik açı yapacak şekilde 30 m/s 'lik bir başlangıç hızıyla atıldığını kabul ederek, ω açısal hızı için $\omega = 8, 10, 12$ ve 15 devir/s değerlerinde topun yörüngesinin nasıl değiştiğini inceleyelim.



Şekil 11. Farklı ω (devir/s) açısal hızları için cismin yörüngesi

Şekil 11'den görüleceği üzere ω 'nın değeri arttıkça top daha fazla falsoya maruz kalmaktadır ve topun yörüngesi $\omega = 0$ değerine karşılık gelen doğrusal yörüngeden uzaklaşmaktadır.

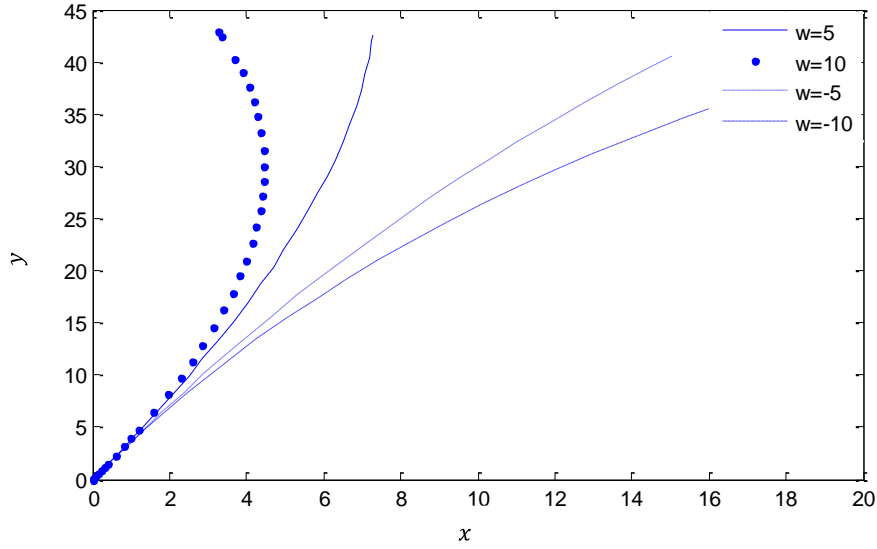
İkinci olarak, sabit ω falso büyüklüğü için başlangıç hız büyüklüğündeki değişimin yörüngeye olan etkisini inceleyelim. Başlangıç hızının x eksenine pozitif yönde 37° 'lik açı yaptığı ve açısal hızın ise $\omega = 10$ devir/s değerinde sabit kaldığı göz önüne alınsın. Bu durumda alınan farklı başlangıç hızlarında elde edilen yörüngeler Şekil 12'deki gibidir.



Şekil 12. Sabit açısal hız değerinde farklı hız büyüklüklerinde (farklı v_0 (m/s) değerleri için) cismin yörüngesi

Şekil 12'den görüleceği üzere düşük hızlarda falsonun yörünge üzerindeki etkisi, yüksek hızlara oranla daha fazladır.

Son olarak ise, topa verilen falsonun negatif ve pozitif olduğu durumları inceleyen Şekil 13'ü göz önüne alalım. Şekilde görüldüğü gibi, eğer bir kişi topa negatif yönde bir falso verirse top sağ yöne doğru kavis almakta iken pozitif yönde falso verdiğinde ise sol yöne doğru kavis almaktadır. Dolayısı ile bu durum frikiğin kullanılacağı yere göre niçin uygun ayaklı kişilerin seçilmesi gerektiğini göstermektedir.



Şekil 13. ω (devir/s) açısal hızının pozitif veya negatif olması arasındaki fark grafiği

5.2. Adomian Yöntemi ile Analitik Yaklaşım

Sadece ortam direnç kuvveti etkisi altındaki bir topun hareketi Bölüm 3'de incelendi ve Adomian yaklaşım yöntemi ile analitik çözümün uyumundan bahsedildi. Burada ise hem Magnus kuvveti hem de ortam direnç kuvveti etkisi altındaki bir topun yörüngesini belirlemek için Adomian yöntemi yardımıyla nasıl analitik yaklaşımlar elde edileceği incelenmektedir.

$x - y$ düzleminde hareket eden bir top için elde edilen denklem sistemi

$$mx'' = -\frac{1}{2} C\rho A v v_x + 2 C\rho A v \omega r \frac{-v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$my'' = -\frac{1}{2} C\rho A v v_y + 2 C\rho A v \omega r \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

şeklindedir. Hız vektörü iki bileşene sahip olduğundan hız büyüklüğü $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 'dir.

Dolayısı ile (24) denklemleri

$$mx'' = -\frac{1}{2}C\rho Avv_x - \frac{1}{2}C\rho A(4\omega rv_y)$$

$$my'' = -\frac{1}{2}C\rho Avv_y + \frac{1}{2}C\rho A(4\omega rv_x)$$

formunda ifade edilir. Bu denklemler analitik olarak çözülebilir denklemler olmayıp Bölüm 5.1'deki gibi MATLAB ODE çözücülerini yardımıyla sayısal çözümleri hesaplamak suretiyle topun yörüngesi çizdirilebilir. Elde edilen denklem sisteminde

$$x' = v_x$$

$$y' = v_y$$

olduğundan dolayı denklemler

$$mv_x' = -\frac{1}{2}C\rho A(vv_x + 4\omega rv_y)$$

$$mv_y' = -\frac{1}{2}C\rho A(vv_y - 4\omega rv_x)$$

şeklinde birinci mertebeden bir sistem olarak yazılır. Bölüm 3.3'deki gibi

$$p = v_x \text{ ve } u = v_y \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{p^2 + u^2}$$

olarak alınırsa denklemler

$$mp' = \alpha \left(p\sqrt{p^2 + u^2} + 4\omega ru \right)$$

$$mu' = \alpha \left(u\sqrt{p^2 + u^2} - 4\omega rp \right)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\alpha = -\frac{1}{2}C\rho A \cong -0,5 \times 0,47 \times 1,245 \times \pi \times (0,11)^2 \approx -0,0111 \text{ kg/m}$ 'dir. Denklemlerin genel çözümünü

$$p = p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \alpha^3 p_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k p_k$$

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k$$

şeklinde araştıralım. Ayrıca, ekte gösterildiği gibi

$$F(p, u) = \sqrt{p^2 + u^2}$$

fonksiyonunun

$$F(p, u) = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k A_k$$

şeklinde bir polinom açılımı mevcuttur. Denklemlerde elde edilen açılımlar yerine yazılırsa

$$mp' = \alpha(p\sqrt{p^2 + u^2} + 4\omega ru)$$

$$mu' = \alpha(u\sqrt{p^2 + u^2} - 4\omega rp)$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} m(p_0' + \alpha p_1' + \alpha^2 p_2' \dots) \\ &= \alpha[(p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \dots)(A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \dots) \\ &\quad + 4\omega r(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots)] \\ m(u_0' + \alpha u_1' + \alpha^2 u_2' + \dots) \\ &= \alpha[(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots)(A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \dots) \\ &\quad - 4\omega r(p_0 + \alpha p_1 + \dots)] \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu denklemlerin her iki tarafı α katsayılı polinomlar şeklinde olup bu polinomların eşit üstlü terimlerinin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$mp_0' = 0; \quad mp_1' = p_0 A_0 + 4\omega ru_0; \quad mp_2' = p_0 A_1 + p_1 A_0 + 4\omega ru_1;$$

$$mp_3' = p_0 A_2 + p_1 A_1 + p_2 A_0 + 4\omega ru_2; \dots$$

$$mu_0' = 0; \quad mu_1' = u_0 A_0 - 4\omega rv_0; \quad mu_2' = u_0 A_1 + u_1 A_0 - 4\omega rp_1;$$

$$mu_3' = u_0 A_2 + u_1 A_1 + u_2 A_0 - 4\omega rp_2; \dots$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Ayrıca Bölüm 3.3'deki gibi cismin başlangıç hız bileşenleri

$$v_x(0) = p(0) = \beta$$

$$v_y(0) = u(0) = \gamma$$

olarak alınır Adomian yaklaşımları için aşağıdaki başlangıç değerleri elde edilir.

$$\begin{cases} p_0(0) = \beta \\ p_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0) = \gamma \\ u_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ek kısmında elde edilen ve A_0, A_1, A_2, \dots ile gösterilen Adomian katsayıları ilgili denklemlerde yerine yazılırsa aşağıdaki başlangıç değer problemleri bulunur.

p için elde edilen yaklaşım denklemleri

$$mp_0' = 0, \quad p_0(0) = \beta$$

$$mp_1' = p_0 \sqrt{p_0^2 + u_0^2} + 4\omega ru_0, \quad p_1(0) = 0$$

$$mp_2' = p_0 \frac{p_0 p_1 + u_0 u_1}{\sqrt{p_0^2 + u_0^2}} + p_1 \sqrt{p_0^2 + u_0^2} + 4\omega r u_1, \quad p_2(0) = 0$$

⋮

u için elde edilen yaklaşım denklemleri ise

$$mu_0' = 0, \quad u_0(0) = \gamma$$

$$mu_1' = u_0 \sqrt{p_0^2 + u_0^2} - 4\omega r p_0, \quad u_1(0) = 0$$

$$mu_2' = u_0 \frac{p_0 p_1 + u_0 u_1}{\sqrt{p_0^2 + u_0^2}} + u_1 \sqrt{p_0^2 + u_0^2} - 4\omega r p_1, \quad u_2(0) = 0$$

⋮

şeklindedir. Elde edilen denklemlerin çözümlerinden

$$p_0(t) = \beta$$

$$p_1(t) = \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + 4\omega r \gamma}{m} t$$

$$p_2(t) = \left[\frac{\beta^3 + \beta \gamma^2}{m^2} + 4\omega r \left(\frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - 2\omega r \beta}{m^2} \right) \right] t^2$$

⋮

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$u_0(t) = \gamma$$

$$u_1(t) = \frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - 4\omega r \beta}{m} t$$

$$u_2(t) = \left[\frac{\gamma^3 + \gamma \beta^2}{m^2} - 4\omega r \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + 2\omega r \gamma}{m^2} \right] t^2$$

⋮

olarak bulunur. Dolayısı ile hız bileşenlerini veren çözümler

$$v_x = p = p_0 + \alpha p_1 + \alpha^2 p_2 + \dots$$

$$= \beta + \alpha \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + 4\omega r \gamma}{m} t$$

$$+ \alpha^2 \left[\frac{\beta^3 + \beta \gamma^2}{m^2} + 4\omega r \left(\frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - 2\omega r \beta}{m^2} \right) \right] t^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
v_y = u &= u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots \\
&= \gamma + \alpha \frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - 4\omega r \beta}{m} t \\
&\quad + \alpha^2 \left[\frac{\gamma^3 + \gamma \beta^2}{m^2} - 4\omega r \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + 2\omega r \gamma}{m^2} \right] t^2 + \dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Konumun türevi hızı verdiği için denklemlerin her iki tarafının t 'ye göre integrali alınarak suretiyle elde edilen x ve y konum denklemleri

$$\begin{aligned}
x &= \beta t + \alpha \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + 4\omega r \gamma}{2m} t^2 + \alpha^2 \frac{\left[\frac{\beta^3 + \beta \gamma^2}{m^2} + 4\omega r \frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - 2\omega r \beta}{m^2} \right] t^3}{3} + \dots \\
y &= \gamma t + \alpha \frac{\gamma \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - 4\omega r \beta}{2m} t^2 + \alpha^2 \frac{\left[\frac{\gamma^3 + \gamma \beta^2}{m^2} - 4\omega r \frac{\beta \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + 2\omega r \gamma}{m^2} \right] t^3}{3} + \dots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

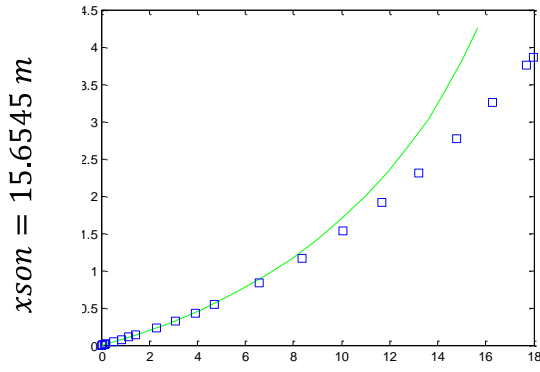
MATLAB ODE çözümler yardımcıyla elde edilen sayısal çözümün grafiği ile Adomian yöntemiyle elde edilen yaklaşımların grafikleri 5.1 Örnekte karşılaştırılmaktadır.

Örnek 5.1: Kaleye 18 m uzaklıktan 15 m/s'lik bir ilk hızla vurulan topun hareketi inceleyelim. Bunun için topun başlangıçta x eksenine göre pozitif yönde 15° 'lik bir açı yaptığı göz önüne alınsın. Bu durumda başlangıç hız bileşenleri

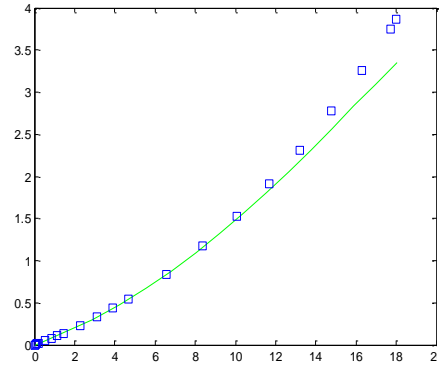
$$\beta = 15 \cos(15^\circ) \approx 14.9429 \text{ m/s}$$

$$\gamma = 15 \sin(15^\circ) \approx 3.9073 \text{ m/s}$$

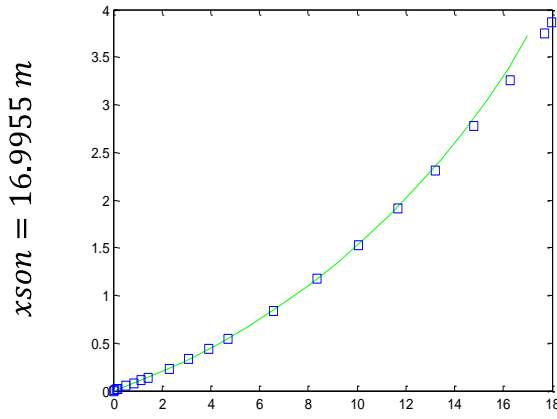
şeklinde elde edilir. Eğer futbol topuna 15 devir/s'lik bir falso ile vurulursa cismin konumunu veren (24) denklemlerinden cismin yörüngesi sayısal olarak hesaplanabilir. Bu durumda ODE çözümler yardımcıyla futbol topunun yaklaşık olarak $t = 1.57793$ s hareket ettiği elde edilir. Bu t değeri süresince Adomian yöntemi ile elde edilen çözüm ile ODE çözümler yardımcıyla elde edilen çözümün grafikleri karşılaştırılabilir. Aşağıdaki grafiklerde düz çizgi ile çizilen grafik Adomian yöntemi ile elde edilen çözümün grafiğini gösterirken noktalarla çizilen grafik ise ODE çözümler ile elde edilen grafiği göstermektedir.



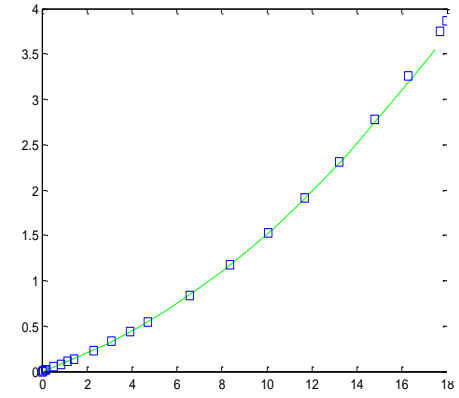
Bir terimli Adomian Yaklaşımı



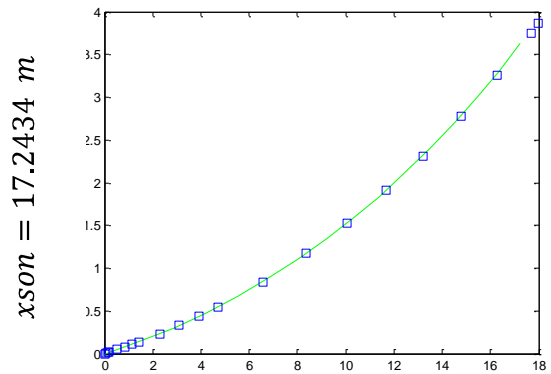
İki terimli Adomian Yaklaşımı



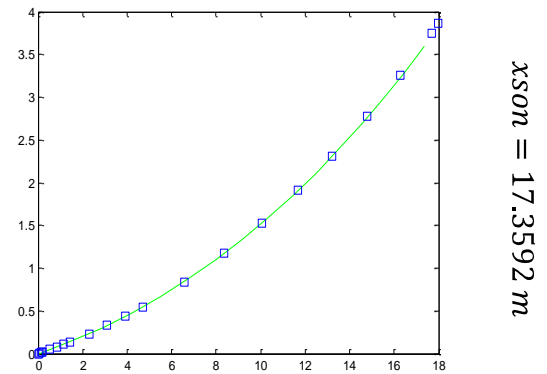
Üç terimli Adomian Yaklaşımı



Dört terimli Adomian Yaklaşımı



Beş terimli Adomian Yaklaşımı



Altı terimli Adomian Yaklaşımı

Şekil 14. Analitik çözüm ile sayısal çözümün karşılaştırılması(sayısal çözüm(noktalar),Adomian yaklaşımı (Düz çizgi),Yatay eksen (x),Düşey eksen (y))

Şekil 14'den görüldüğü üzere, alınan yaklaşımların sayısı arttıkça analitik yaklaşım ile sayısal çözüm benzer davranışlar sergilemektedir. Dolayısı ile analitik yaklaşım ile elde edilen çözümler futbol topunun yörüngesini tanımlamada kullanılabilir.

5.3. Boyutsuzlaştırma

İki boyutta hareketi incelenen futbol topunun sayısal çözümü ile analitik yaklaşım yöntemlerinin karşılaştırması önceki bölümde araştırıldı. Bu bölümde ise, gerekli dönüşümler yapılarak (24) denklem sistemindeki mevcut olan r, C, ρ, A, m sabitlerinden denklemleri kurtarmak suretiyle, denklemlerin belli parametrelerdeki değişime göre nasıl değiştiği araştırılmaktadır. Bu basitleştirme olayı matematikte boyutsuzlaştırma olarak da bilinmektedir.

Bir futbol topunun iki boyutlu hareketinde elde edilen denklem sistemi

$$\begin{aligned} mx'' &= -\frac{1}{2}C\rho Ax'\sqrt{(x')^2 + (y')^2} - \frac{1}{2}C\rho A(4\omega ry') \\ my'' &= -\frac{1}{2}C\rho Ay'\sqrt{(x')^2 + (y')^2} + \frac{1}{2}C\rho A(4\omega rx') \end{aligned} \quad (25)$$

şeklindedir. (25) denklemlerindeki bağımsız değişken olan t 'yi τ ile bağımlı değişkenler x, y 'yi ise X, Y ile değiştiren

$$x = \alpha X$$

$$y = \beta Y$$

$$t = \gamma \tau$$

olacak şekildeki α, β, γ boyutsuzlaştırma sabitlerini araştıralım. (25) denklem sistemindeki t bağımsız değişkenine göre türevler yeni bağımsız değişken olan τ 'ya göre düzenlenirse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(\alpha X)}{d(\gamma \tau)} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(\beta Y)}{d(\gamma \tau)} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau}$$

ikinci türevlerden ise,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha dX}{\gamma d\tau} \right) = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{dX}{d\tau} \right) = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dX}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{d^2X}{d\tau^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta dY}{\gamma d\tau} \right) = \frac{\beta}{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{dY}{d\tau} \right) = \frac{\beta}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dY}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{d^2Y}{d\tau^2}$$

olarak elde edilir. Bu elde edilen türevler (25) denkleminde yerine yazılırsa yeni denklem sistemi

$$m \frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{d^2X}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{\alpha dX}{\gamma d\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha dX}{\gamma d\tau} \right)^2 + \left(\frac{\beta dY}{\gamma d\tau} \right)^2} - \varepsilon 4\omega r \frac{\beta dY}{\gamma d\tau}$$

$$m \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{\beta dY}{\gamma d\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha dX}{\gamma d\tau} \right)^2 + \left(\frac{\beta dY}{\gamma d\tau} \right)^2} + \varepsilon 4\omega r \frac{\alpha dX}{\gamma d\tau}$$

şeklinde bulunur. Burada $\varepsilon = \frac{1}{2} C\rho A$ (kg/m)'dir. Denklemlerin her iki tarafı 2.

mertebeden türevlerin katsayılarına bölünürse

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{\gamma dX}{m d\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha dX}{\gamma d\tau} \right)^2 + \left(\frac{\beta dY}{\gamma d\tau} \right)^2} - \varepsilon 4\omega r \frac{\beta \gamma dY}{\alpha m d\tau}$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{\gamma dY}{m d\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha dX}{\gamma d\tau} \right)^2 + \left(\frac{\beta dY}{\gamma d\tau} \right)^2} + \varepsilon 4\omega r \frac{\alpha \gamma dX}{\beta m d\tau}$$

veya

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\varepsilon \frac{\alpha}{m} \right)^2 \left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\beta}{m} \right)^2 \left(\frac{dY}{d\tau} \right)^2} - \left(\varepsilon 4\omega r \frac{\beta \gamma}{\alpha m} \right) \frac{dY}{d\tau}$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\varepsilon \frac{\alpha}{m} \right)^2 \left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\beta}{m} \right)^2 \left(\frac{dY}{d\tau} \right)^2} + \left(\varepsilon 4\omega r \frac{\alpha \gamma}{\beta m} \right) \frac{dX}{d\tau}$$

denklemleri elde edilir. Buradaki terimlerin boyutsuz olmaları için yukarıdaki türev fonksiyonlarının katsayılarının 1'e eşit olarak seçilebilir. Bu katsayılar 1'e eşitlenerek aranan boyutsuzlaştırma sabitleri

$$\varepsilon \frac{\alpha}{m} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{m}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \frac{\beta}{m} = 1 \Rightarrow \beta = \frac{m}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon 4\omega r \frac{\beta \gamma}{\alpha m} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha m}{\varepsilon 4\omega r \beta} \Rightarrow \gamma = \frac{m}{\varepsilon 4\omega r}$$

olarak elde edilir. Bu durumda yeni bağımlı ve bağımsız değişkenlerin boyutsuz olmaları gerekir. Gerçekten, eğer kütle boyutu $[M]$; uzunluk boyutu $[L]$; zamanın boyutu $[T]$ ile

gösterilecek olunursa $[\rho] = ML^{-3}$; $[A] = L^2$ ve $[\omega] = T^{-1}$ olduğundan $[\varepsilon] = ML^{-1}$ elde edilir. Dolayısı ile α , β ve γ parametrelerinin boyutları aşağıdaki gibi bulunur.

$$[\alpha] = \frac{M}{ML^{-1}} = L$$

$$[\beta] = \frac{M}{ML^{-1}} = L$$

$$[\gamma] = \frac{M}{ML^{-1}T^{-1}L} = T$$

Ayrıca

$$x = \alpha X$$

$$y = \beta Y$$

$$t = \gamma \tau$$

ve

$$[x] = L$$

$$[y] = L$$

$$[t] = T$$

olduğundan X, Y ve τ 'nin boyutsuz olduğu görülür. Dolayısı ile elde edilen sabitler sonucunda elde edilen diferensiyel denklemin boyutsuz olduğu gözlemlenir. Elde edilen değerlerden

$$x = \frac{m}{\varepsilon} X$$

$$y = \frac{m}{\varepsilon} Y$$

$$t = \frac{m}{4\varepsilon\omega r} \tau$$

şeklinde olup boyutsuz X, Y bağımlı değişkenlerinin elde edilen yeni bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferensiyel denklem sistemi

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2} - \frac{dY}{d\tau}$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2} + \frac{dX}{d\tau}$$

şeklinde oluşur. Burada

$$\frac{dX}{d\tau} = X'; \quad \frac{dY}{d\tau} = Y'$$

ile gösterilirse elde edilen denklemlerin

$$\begin{aligned} X'' &= -X' \sqrt{(X')^2 + (Y')^2} - Y' \\ Y'' &= -Y' \sqrt{(X')^2 + (Y')^2} + X' \end{aligned} \quad (26)$$

şeklinde bir diferensiyel denklem sistemi olduğu görülür. (26) diferensiyel denklem sisteminin başlangıç değerleri ile (24) diferensiyel denklem sisteminin başlangıç değerleri uyumlu olmalıdır. Eğer topun başlangıçta orijinden harekete başladığı göz önüne alınırsa (24) diferensiyel denklem sisteminde $x(0) = 0$ ve $y(0) = 0$ olur. Ayrıca cismin başlangıçtaki hız bileşenleri $v_x(0)$ ve $v_y(0)$ ile gösterilirse $x'(0) = v_x(0)$ ve $y'(0) = v_y(0)$ şeklindedir. Bu başlangıç koşulları (26) denklemleri için ise

$$x = \frac{m}{\varepsilon} X \Rightarrow x(0) = \frac{m}{\varepsilon} X(0) \Rightarrow 0 = \frac{m}{\varepsilon} X(0) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$y = \frac{m}{\varepsilon} Y \Rightarrow y(0) = \frac{m}{\varepsilon} Y(0) \Rightarrow 0 = \frac{m}{\varepsilon} Y(0) \Rightarrow Y(0) = 0$$

şeklindedir.

Ayrıca

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau} \Rightarrow x' = \frac{\alpha}{\gamma} X' \Rightarrow x'(0) = \frac{\alpha}{\gamma} X'(0) \Rightarrow v_x(0) = \frac{\alpha}{\gamma} X'(0) \Rightarrow X'(0) = v_x(0) \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau} \Rightarrow y' = \frac{\beta}{\gamma} Y' \Rightarrow y'(0) = \frac{\beta}{\gamma} Y'(0) \Rightarrow v_y(0) = \frac{\beta}{\gamma} Y'(0) \Rightarrow Y'(0) = v_y(0) \frac{\gamma}{\beta}$$

ve

$$\gamma = \frac{m}{4\varepsilon\omega r}, \alpha = \frac{m}{\varepsilon}, \beta = \frac{m}{\varepsilon}$$

olduğundan elde edilen boyutsuz denklem için başlangıç değerleri

$$X(0) = 0$$

$$Y(0) = 0$$

$$X'(0) = \frac{1}{4\omega r} v_x(0)$$

$$Y'(0) = \frac{1}{4\omega r} v_y(0)$$

şeklinde bulunur. Dolayısı ile boyutsuzlaştırılmış diferensiyel denklem sistemi ve başlangıç değerleri

$$\begin{aligned}
X'' &= -X'\sqrt{(X')^2 + (Y')^2} - Y', X(0) = 0, X'(0) = \frac{1}{4\omega r} v_x(0) \\
Y'' &= -Y'\sqrt{(X')^2 + (Y')^2} + X', Y(0) = 0, Y'(0) = \frac{1}{4\omega r} v_y(0)
\end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (25), (27) denklemleri arasındaki bağıntılar incelenirse

$$\begin{aligned}
x &= \frac{m}{\varepsilon} X \\
y &= \frac{m}{\varepsilon} Y \\
t &= \frac{m}{4\varepsilon\omega r} \tau
\end{aligned}$$

ve standart bir futbol topu için $m = 0.43 \text{ kg}$, $r = 0.11 \text{ m}$ ve $\varepsilon = \frac{1}{2} C\rho A = 0.0111 \text{ kg/m}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
x &= \frac{0.43}{0.0111} X = 38.7387X \\
y &= \frac{0.43}{0.0111} Y = 38.7387Y \\
t &= \frac{88.0426}{\omega} \tau
\end{aligned}$$

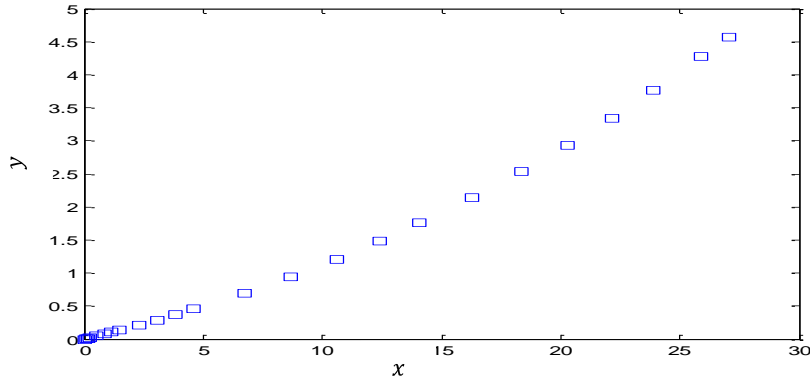
şeklinde bulunur. Bu değerlerden de görüleceği üzere boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen konum değerleri esas denklemdeki değerlerden 38.7387 kat daha küçüktür. Ayrıca buradaki bağımsız değişken olan τ değeri başlangıçtaki alınan t değerinin $88.0426/\omega$ katıdır. Dolayısı ile topun hareketini küçük bir zaman değerleri için gözlemlemek mümkündür. Ayrıca burada elde edilen t değeri sadece ω 'ya bağlı olduğundan, sadece ω 'daki değişimlere göre cismin hareketini incelemek mümkündür. Boyutsuzlaştırma işlemi sonunda elde edilen topun yörünge denklemleri için ODE çözümleri ile elde edilen sayısal çözümlerin grafikleri aşağıdaki örnekle gösterilmektedir.

Örnek 5.2: Bir futbol topu başlangıçta $v_0 = 20 \text{ m/s}$ 'lik bir ilk hızla x eksenine pozitif yönde 5° 'lik bir açıyla atılsın. $\omega = 8 \text{ devir/s}$ olarak cismin $t = 2 \text{ s}$ 'lik hareketini inceleyelim.

Bu değerler ile denklem (27)'deki başlangıç değerleri

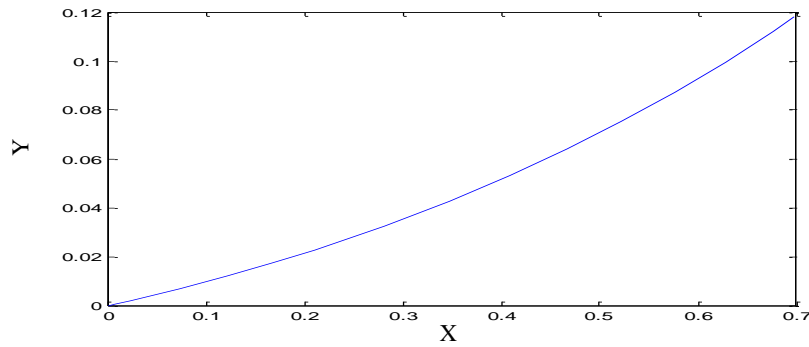
$$\begin{aligned}
X'(0) &= \frac{1}{4\omega r} v_x(0) = 5.6602 \\
Y'(0) &= \frac{1}{4\omega r} v_y(0) = 0.4952
\end{aligned}$$

şeklinde olup $t = 2 s$ 'lik sürede cismin hareketi boyutsuz denklemde $\tau \cong 0.1817$ 'e karşılık gelir. Ayrıca yukarıda da belirtildiği gibi boyutsuz denklemde, herhangi bir τ anında bulunan X ve Y değerleri boyutlu problemdeki x ve y değerlerinin 38.7387'de biri olması gerekir. İlk olarak başlangıçta çalışılan boyutlu denklemin grafiği Şekil 15'de çizdirilmektedir. $t = 2 s$ süresindeki x ve y değerleri $x_{son} = 27.0396 m$ ve $y_{son} = 4.5753 m$ olarak bulunur.



Şekil 15. Sayısal yöntem sonucunda cismin yörüngesi

Bu denklemin boyutsuzlaştırılmış hali için ise elde edilen grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 16. Boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen yörünge

Bu denklem için $\tau = 0.1817$ süre sonundaki X ve Y değerleri ise $X_{son} = 0.6983$ ve $Y_{son} = 0.1181$ şeklindedir ve bu değerler boyutlu denklem için elde edilen değerlerin yaklaşık olarak $1/38.7$ katıdır. Dolayısı ile elde edilen iki sistem birbiri ile uyumludur.

5.4. Boyutsuzlaştırılmış Denklemlere Analitik Yaklaşım

Bölüm 5.3'de boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen denklem sistemi için MATLAB ODE çözücülerini yardımıyla cismin yörüngesi oluşturuldu. Boyutsuzlaştırma yapmadan önce elde edilen denklemler için Adomian ayrışmaları yardımıyla analitik yaklaşımın mevcut olduğu gösterildi.

Bu bölümde ise boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen denklem sistemi için analitik yaklaşımın mevcut olup olmadığı araştırılmaktadır. Bunun için Bölüm 5.2'de yapıldığı gibi (27)'deki denklemlere Adomian ayrışımı ile analitik olarak yaklaşıp yaklaşamayacağı araştırılmaktadır. Bunun için denklemlerde

$$X' = U$$

$$Y' = V$$

olarak alınır. Bu durumda (27)'den

$$U' = -U\sqrt{U^2 + V^2} - V$$

$$V' = -V\sqrt{U^2 + V^2} + U$$

denklem sistemi elde edilir. Bölüm 3.3'de yapıldığı gibi

$$U = U_0 + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \alpha^3 U_3 + \dots$$

$$V = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \alpha^3 V_3 + \dots$$

şeklinde çözüm araştırılır. Burada $\alpha = 1$ 'dir. Ayrıca ekte gösterildiği gibi

$$\sqrt{U^2 + V^2} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3 + \dots$$

şeklinde Adomian ayrışımının mevcut olduğu göz önüne alınırsa yukarıdaki denklemlerden

$$(U'_0 + \alpha U'_1 + \dots) = -(U_0 + \alpha U_1 + \dots)(A_0 + \alpha A_1 + \dots) - (V_0 + \alpha V_1 + \dots)$$

$$(V'_0 + \alpha V'_1 + \dots) = -(V_0 + \alpha V_1 + \dots)(A_0 + \alpha A_1 + \dots) + (U_0 + \alpha U_1 + \dots)$$

olarak elde edilir. Buradaki α 'nın eşit üslü terimlerinin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$U'_0 = -U_0 A_0 - V_0$$

$$U'_1 = -U_0 A_1 - U_1 A_0 - V_1$$

⋮

$$V'_0 = -V_0 A_0 + U_0$$

$$V'_1 = -V_0 A_1 - V_1 A_0 + U_1$$

⋮

olarak bulunur.

Ek'te elde edilen Adomian polinomları

$$A_0 = \sqrt{U_0^2 + V_0^2} ; A_1 = \frac{U_0 U_1 + V_0 V_1}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} ; \dots$$

şeklinde olduğundan dolayı, çözülmesi gereken denklemlerdeki ilk Adomian yaklaşımları için denklem sistemi

$$U'_0 = -U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} - V_0$$

$$V'_0 = -V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} + U_0$$

şeklinde bulunur. Bu sistem başlangıçtaki boyutsuzlaştırılmış sistem ile benzerdir. Dolayısı ile Adomian yaklaşımı boyutsuz denkleme uygulandığında karşılaşılan ilk denklem sistemi yine kolayca çözülemeyen nonlinear bir yapıya sahiptir. Böylece Adomian yöntemi analitik yaklaşım bulmak için uygun değildir. Fakat burada alternatif bir yöntemle analitik yaklaşım araştırılabilir. Bunun için boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen (27) denklemleri tekrar ele alalım.

$$X'' = -X' \sqrt{(X')^2 + (Y')^2} - Y' , X'(0) = \frac{1}{4\omega r} v_x(0)$$

$$Y'' = -Y' \sqrt{(X')^2 + (Y')^2} + X' , Y'(0) = \frac{1}{4\omega r} v_y(0)$$

Bu bölümde, bu nonlinear diferensiyel denklem sisteminin analitik yaklaşımını Taylor açılımı yardımıyla araştıralım. Yukarıda yapıldığı gibi denklem sisteminde

$$U = X'$$

$$V = Y'$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} U' &= -U \sqrt{U^2 + V^2} - V , U(0) = U_0 \\ V' &= -V \sqrt{U^2 + V^2} + U , V(0) = V_0 \end{aligned} \quad (28)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$U_0 = \frac{1}{4\omega r} v_x(0) , V_0 = \frac{1}{4\omega r} v_y(0)$$

şeklindedir. (28)'deki denklem sisteminde

$$F(U, V) := -U \sqrt{U^2 + V^2} - V$$

$$G(U, V) := -V \sqrt{U^2 + V^2} + U$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Tanımlanan F ve G fonksiyonlarının (U_0, V_0) başlangıç noktası komşuluğundaki I . mertebeden Taylor açılımları

$$\begin{aligned} F(U, V) &= F(U_0, V_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial U} \right|_{(U_0, V_0)} (U - U_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{(U_0, V_0)} (V - V_0) + F(\zeta_1) \\ G(U, V) &= G(U_0, V_0) + \left. \frac{\partial G}{\partial U} \right|_{(U_0, V_0)} (U - U_0) + \left. \frac{\partial G}{\partial V} \right|_{(U_0, V_0)} (V - V_0) + F(\zeta_2) \end{aligned} \quad (29)$$

şeklindedir. Denklem 29'daki terimler hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial U} &= -\sqrt{U^2 + V^2} - \frac{U^2}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{-2U^2 - V^2}{\sqrt{U^2 + V^2}} \\ \frac{\partial F}{\partial V} &= -\frac{UV}{\sqrt{U^2 + V^2}} - 1 = \frac{-UV - \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{U^2 + V^2}} \\ \frac{\partial G}{\partial U} &= -\frac{UV}{\sqrt{U^2 + V^2}} + 1 = \frac{-UV + \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{U^2 + V^2}} \\ \frac{\partial G}{\partial V} &= -\sqrt{U^2 + V^2} - \frac{V^2}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \frac{-U^2 - 2V^2}{\sqrt{U^2 + V^2}} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemler 29'da yerine yazılırsa F ve G fonksiyonları

$$\begin{aligned} F(U, V) &= -U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} - V_0 + \frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} (U - U_0) \\ &\quad + \frac{-U_0 V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} (V - V_0) + F(\zeta_1) \\ G(U, V) &= -V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} + U_0 + \frac{-U_0 V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} (U - U_0) \\ &\quad + \frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} (V - V_0) + F(\zeta_2) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu denklemler düzenlenirse

$$\begin{aligned} F(U, V) &= U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} + \left(\frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) U + \left(\frac{-U_0 V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) V + F(\zeta_1) \\ G(U, V) &= V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} + \left(\frac{-U_0 V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) U + \left(\frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) V + F(\zeta_2) \end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Alınan tipik τ değeri çok küçük olduğundan dolayı hata terimleri ihmal edilebilir. Dolayısı ile (28) denklem sistemi

$$\begin{aligned}
U' &= U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} + \left(\frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) U + \left(\frac{-U_0 V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) V \\
V' &= V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} + \left(\frac{-U_0 V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) U + \left(\frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \right) V
\end{aligned} \tag{30}$$

şeklinde yazılır. (30) denklem sisteminin matrisel gösterimi

$$\begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0 V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \\ \frac{-U_0 V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} \\ V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} \end{bmatrix} \tag{31}$$

şeklindedir. (31)'deki sabit katsayılı diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü

$$X_g = X_h + X_0$$

şeklindedir. Burada $X_g = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$, X_h homojen kısmın çözümü, X_0 özel çözümdür. Dolayısı ile X_h homojen kısmın çözümünü sağlayan denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0 V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \\ \frac{-U_0 V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \tag{32}$$

şeklindedir. (32) denklem sisteminin çözümü

$$X_h = c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_1 + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_2$$

şeklindedir. Burada λ_1, λ_2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0 V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \\ \frac{-U_0 V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri ve Y_1, Y_2 ise bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdir.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

eşitliğinden özdeğerler

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2} - \frac{1}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2} + \frac{1}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4}$$

şeklinde bulunur. Dolayısı ile verilen başlangıç şartları için A matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler ise

$$Y_1 = \left[\frac{\left(\frac{U_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right) \left(\sqrt{U_0^2 + V_0^2} - U_0 V_0\right) + \sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4} \left[\frac{U_0^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} - \frac{U_0 V_0}{2} \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right]}{-U_0^2 - V_0^2 + U_0^2 V_0^2} \right]$$

$$Y_2 = \left[\frac{\left(\frac{U_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right) \left(\sqrt{U_0^2 + V_0^2} - U_0 V_0\right) - \sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4} \left[\frac{U_0^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} - \frac{U_0 V_0}{2} \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right]}{-U_0^2 - V_0^2 + U_0^2 V_0^2} \right]$$

şeklinde elde edilir. Fakat burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta ise $\sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4}$ terimde karekök içerisindeki terim sıfırdan büyük veya küçük olması durumudur. Eğer $U_0^2 + V_0^2 - 4 \geq 0$ ise, çözüm $e^{\lambda\tau}$ 'li formatta ifade edilebilirken $U_0^2 + V_0^2 - 4 < 0$ olduğunda ise çözüm \cos ve \sin kombinasyonu şeklinde yazılır. Dolayısı ile bu iki durum ayrı ayrı incelenmesi gerekir.

5.4.1 I. Durum

$U_0^2 + V_0^2 \geq 4$ olsun. Bu durumda λ_1, λ_2 özdeğerleri reel olduğundan dolayı homojen kısmın çözümü,

$$X_h = c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_1 + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_2$$

eşitliğinde elde edilen değerlerin yerine yazılması suretiyle elde edilir.

(31) diferensiyel denklem sisteminin özel çözümü $X_{\bar{0}}$ ise

$$X_{\bar{0}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

şeklinde araştırılır. Aranılan çözüm (31)'deki denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0 V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \\ \frac{-U_0 V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} \\ V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2} \end{bmatrix}$$

denklemini elde edilir. Burada

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan bu denklem sistemini sağlayan a ve b sayıları

$$\begin{bmatrix} -U_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2} \\ -V_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2U_0^2 - V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0V_0 - \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \\ \frac{-U_0V_0 + \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} & \frac{-U_0^2 - 2V_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

denklem sisteminin çözümüdür. Bu sistemin çözümünden

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_0^3 + U_0V_0^2 - V_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{2U_0^2 + 2V_0^2 + 1} \\ \frac{V_0^3 + U_0^2V_0 + U_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{2U_0^2 + 2V_0^2 + 1} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Dolayısı ile genel çözüm

$$\begin{aligned} X &= X_h + X_0 \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} &= c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_1 + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_2 + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada özvektörler

$$Y_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix} ; Y_2 = \begin{bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{bmatrix}$$

ile gösterilirse (31) denklem sisteminin genel çözümü

$$U(\tau) = c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_{11} + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_{12} + a$$

$$V(\tau) = c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_{21} + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_{22} + b$$

olarak bulunur. Buradaki c_1 ve c_2 sabitleri ise

$$U(0) = U_0$$

$$V(0) = V_0$$

başlangıç değerleri ile hesaplanır. Bu başlangıç değerleri ise

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U(0) \\ V(0) \end{bmatrix} &= c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} U(0) - a \\ V(0) - b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} U_0 - a \\ V_0 - b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümü ile hesaplanır. Bulunan U ve V çözümleri topun hız bileşenleridir. Topun yörünge denklemi ise elde edilen hız denklemlerinin τ 'ya göre integralleri alınmak suretiyle elde edilir.

Topun hız denklemleri

$$U(\tau) = c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_{11} + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_{12} + a$$

$$V(\tau) = c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_{21} + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_{22} + b$$

şeklinde olduğundan konumu veren denklemler

$$X(\tau) = \int U(\tau) d\tau = \frac{c_1 Y_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1 \tau} + \frac{c_2 Y_{12}}{\lambda_2} e^{\lambda_2 \tau} + a\tau + c_3$$

$$Y(\tau) = \int V(\tau) d\tau = \frac{c_1 Y_{21}}{\lambda_1} e^{\lambda_1 \tau} + \frac{c_2 Y_{22}}{\lambda_2} e^{\lambda_2 \tau} + b\tau + c_4$$

şeklinde elde edilir. Topun başlangıç konumu orijin, yani $X(0) = 0$ ve $Y(0) = 0$ olarak alınırsa c_3 ve c_4 sabitlerinin sağlanması gereken denklem sistemi

$$X(0) = 0 = \frac{c_1 Y_{11}}{\lambda_1} + \frac{c_2 Y_{12}}{\lambda_2} + c_3$$

$$Y(0) = 0 = \frac{c_1 Y_{21}}{\lambda_1} + \frac{c_2 Y_{22}}{\lambda_2} + c_4$$

şeklinindedir. Bu denklemlerden

$$c_3 = -\left(\frac{c_1 Y_{11}}{\lambda_1} + \frac{c_2 Y_{12}}{\lambda_2}\right)$$

$$c_4 = -\left(\frac{c_1 Y_{21}}{\lambda_1} + \frac{c_2 Y_{22}}{\lambda_2}\right)$$

olarak hesaplanır. Dolayısı ile konum bileşenleri

$$X(\tau) = \frac{c_1 Y_{11}}{\lambda_1} e^{\lambda_1 \tau} + \frac{c_2 Y_{12}}{\lambda_2} e^{\lambda_2 \tau} + a\tau - \left(\frac{c_1 Y_{11}}{\lambda_1} + \frac{c_2 Y_{12}}{\lambda_2}\right)$$

$$Y(\tau) = \frac{c_1 Y_{21}}{\lambda_1} e^{\lambda_1 \tau} + \frac{c_2 Y_{22}}{\lambda_2} e^{\lambda_2 \tau} + b\tau - \left(\frac{c_1 Y_{21}}{\lambda_1} + \frac{c_2 Y_{22}}{\lambda_2}\right)$$

şeklinde elde edilir.

Son olarak, MATLAB ODE çözücüsü yardımıyla elde edilen sayısal çözüm ile yukarıda kullanılan Taylor açılımından elde edilen analitik yaklaşımı Örnek 5.3'te karşılaştıralım.

Örnek 5.3: Bir futbol topuna başlangıçta $v_0 = 25 \text{ m/s}$ 'lik bir ilk hızla x - eksenine pozitif yönde 5° 'lik açı yapacak şekilde vurulsun. Bu durumda boyutsuzlaştırılmış parametrelere göre başlangıç hızları

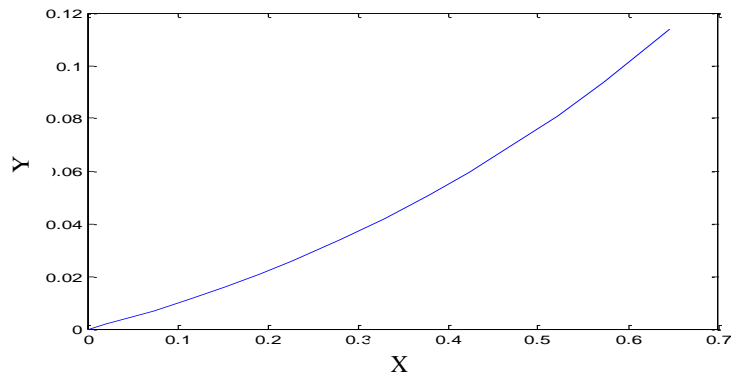
$$X'(0) = U(0) = \frac{1}{4\omega r} v_x(0) = 4.7168$$

$$Y'(0) = V(0) = \frac{1}{4\omega r} v_y(0) = 0.4127$$

şeklindedir. Ayrıca futbol topuna $\omega = 12 \text{ devir/s}$ 'lik bir falso verildiği göz önüne alınsın. Eğer futbol topunun kaleye olan uzaklığı 25 m olarak alınırsa sayısal yöntem ile topun yaklaşık olarak 1.4388 s hareket ettiği bulunur. Bu hareket süresi boyutsuzlaştırılmış denklemdaki

$$\tau = \frac{4\varepsilon\omega r}{m}t = 0.1961$$

süresine karşılık gelir. Bu süre sonunda cismin ODE çözümler yardımıyla elde edilen yörünge grafiği Şekil 17'deki gibidir.



Şekil 17. Sayısal yöntemler ile topun yörüngesi

Verilen parametrelere göre Taylor açılımı ile çözülmesi gereken diferensiyel denklemlerin matris formu

$$\begin{bmatrix} U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.4337 & -1.4111 \\ 0.5889 & -4.47708 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22.3332 \\ 1.9541 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklemin homojen kısmının çözümündeki özdeğerler

$$\lambda_1 = -9.2481; \lambda_2 = -4.9564$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$Y_1 = [-0.9915 \ 0.1304]^T; Y_2 = [0.3006 \ -0.9538]^T$$

şeklinde elde edilir. Dolayısı ile homojen kısmın çözümü

$$X_h(\tau) = c_1 e^{-9.2481\tau} \begin{bmatrix} -0.9915 \\ 0.1304 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4.9564\tau} \begin{bmatrix} 0.3006 \\ -0.9538 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Özel çözüm $X_p(\tau) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ şeklinde araştırıldığından dolayı a ve b 'nin sağlanması gereken denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} -22.3332 \\ -1.9541 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.4337 & -1.4111 \\ 0.5889 & -4.47708 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklem sisteminin çözümünden $a = 2.2643$; $b = 0.6891$ olarak bulunur.

Dolayısı ile genel çözüm

$$X_g = X_h + X_0 = c_1 e^{-9.2481\tau} \begin{bmatrix} -0.9915 \\ 0.1304 \end{bmatrix} + c_2 e^{-4.9564\tau} \begin{bmatrix} 0.3006 \\ -0.9538 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.2643 \\ 0.6891 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradaki keyfi sabitler olan c_1 ve c_2 'ler başlangıç değerleri olan

$$U(0) = 4.7168$$

$$V(0) = 0.4127$$

yardımı ile

$$\begin{bmatrix} 2.4525 \\ -0.2764 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9915 & 0.3006 \\ 0.1304 & -0.9538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

denklem sisteminin çözümünden $c_1 = -2.4889$ ve $c_2 = -0.0505$ olarak bulunur.

Dolayısı ile futbol topunun hız bileşenlerini veren denklem

$$S = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = -2.4889 e^{-9.2481\tau} \begin{bmatrix} -0.9915 \\ 0.1304 \end{bmatrix} - 0.0505 e^{-4.9564\tau} \begin{bmatrix} 0.3006 \\ -0.9538 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.2643 \\ 0.6891 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Hızın türevi konumu verdiği için dolayı topun konum bileşenlerini veren diferensiyel denklemler

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = -2.4889 e^{-9.2481\tau} \begin{bmatrix} -0.9915 \\ 0.1304 \end{bmatrix} - 0.0505 e^{-4.9564\tau} \begin{bmatrix} 0.3006 \\ -0.9538 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.2643 \\ 0.6891 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Elde edilen denklemlerin her iki tarafının τ değişkenine göre integrali alınması ile yörünge denklemleri

$$X(\tau) = -0.1855 e^{-9.2481\tau} + 0.0031 e^{-4.9564\tau} + 2.2643\tau + c_3$$

$$Y(\tau) = 0.0351 e^{-9.2481\tau} - 0.0097 e^{-4.9564\tau} + 0.6891\tau + c_4$$

şeklinde elde edilir. $X(0) = 0$; $Y(0) = 0$ başlangıç değerlerinden dolayı c_3 ve c_4 keyfi sabitleri

$$-0.1855 + 0.0031 + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0.1824$$

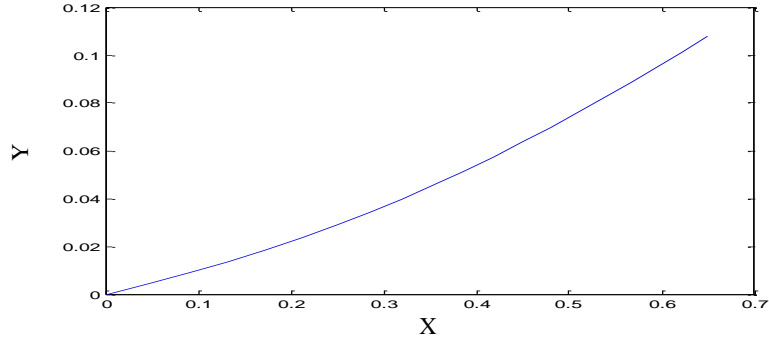
$$0.0351 - 0.0097 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = -0.0254$$

olarak bulunur. Dolayısı ile genel çözüm

$$X(\tau) = -0.1855 e^{-9.2481\tau} + 0.0031 e^{-4.9564\tau} + 2.2643\tau + 0.1824$$

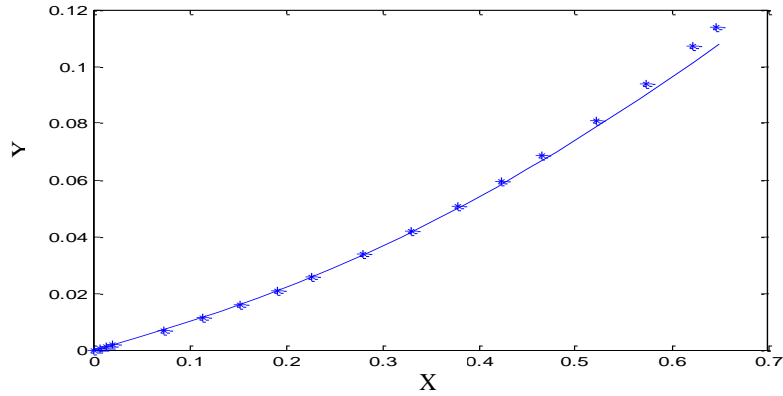
$$Y(\tau) = 0.0351 e^{-9.2481\tau} - 0.0097 e^{-4.9564\tau} + 0.6891\tau - 0.0254$$

şeklindedir. Taylor açılımı ile elde edilen çözümün grafiği ise Şekil 18'de gösterilmektedir.



Şekil 18. Taylor açılımı ile elde edilen yörünge

İki grafik üst üste çizdirildiğinde elde edilen grafik Şekil 19'da görülmektedir. Bu grafikten de görüleceği üzere küçük bir zaman aralığında elde edilen çözümler uyumludur.



Şekil 19. Boyutsuzlaştırmanın sayısal çözüm ile Taylor yaklaşımının grafikleri (sayısal yaklaşım (nokta) Taylor yaklaşım (çizgi))

5.4.2 II. Durum

$U_0^2 + V_0^2 < 4$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2} - \frac{1}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2} + \frac{1}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4}$$

özdeğerlerinde $U_0^2 + V_0^2 - 4 < 0$ olduğundan A matrisinin iki kompleks özdeğeri mevcuttur. İşlemleri kolaylaştırmak için bu özdeğerler

$$\lambda_1 = \varphi + i\xi$$

$$\lambda_2 = \varphi - i\xi$$

şeklinde gösterilsin. Burada

$$\varphi = -\frac{3}{2}\sqrt{U_0^2 + V_0^2}; \xi = \frac{1}{2}\sqrt{-(U_0^2 + V_0^2 - 4)}$$

şeklinde dir. ξ 'nin önündeki işaretin negatif alınmasının nedeni $U_0^2 + V_0^2 - 4 < 0$ olduğundan bu değeri kompleks olmaktan çıkartıp reel olmasını sağlamaktır. Bu elde edilen özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerde de

$$\sqrt{U_0^2 + V_0^2 - 4}$$

şeklinde terim mevcut olduğundan özvektörler de kompleks değerlidir. Bu özvektörler ise

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ c + id \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ c - id \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$$

şeklinde gösterilsin. Burada

$$c = \frac{\left(\frac{U_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right) \left(\sqrt{U_0^2 + V_0^2} - U_0 V_0\right)}{-U_0^2 - V_0^2 + U_0^2 V_0^2}$$

$$d = \frac{\sqrt{-(U_0^2 + V_0^2 - 4)} \left[\frac{U_0^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} - \frac{U_0 V_0}{2} \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right]}{-U_0^2 - V_0^2 + U_0^2 V_0^2}$$

şeklinde dir. Dolayısı ile (32) denklem sisteminin homojen kısmının çözümü

$$X_h = c_1 e^{\lambda_1 \tau} Y_1 + c_2 e^{\lambda_2 \tau} Y_2$$

şeklinde olduğundan

$$X_h = c_1 e^{(\varphi + i\xi)\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ c + id \end{bmatrix} + c_2 e^{(\varphi - i\xi)\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ c - id \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Elde edilen çözüm $e^{\varphi\tau}$ parantezine alınırsa

$$X_h = e^{\varphi\tau} \left(c_1 e^{i\xi\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ c + id \end{bmatrix} + c_2 e^{-i\xi\tau} \begin{bmatrix} 1 \\ c - id \end{bmatrix} \right)$$

elde edilir. Buradaki kompleks üslü terimlere

$$e^{\mp i\tau} = \cos\tau \mp i\sin\tau$$

açılımı uygulanırsa homojen kısmın çözümü

$$X_h = e^{\varphi\tau} \left(c_1 (\cos(\xi\tau) + i\sin(\xi\tau)) \begin{bmatrix} 1 \\ c + id \end{bmatrix} + c_2 (\cos(\xi\tau) - i\sin(\xi\tau)) \begin{bmatrix} 1 \\ c - id \end{bmatrix} \right)$$

olarak bulunur. Bu denklemlerde gerekli işlemler yapılır ve ortak terimlerin parantezine alınır

$$X_h = e^{\varphi\tau} \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) \cos(\xi\tau) + i(c_1 - c_2) \sin(\xi\tau) \\ ((c_1 + c_2)c + i(c_1 - c_2)d) \cos(\xi\tau) + (-d(c_1 + c_2) + ic(c_1 - c_2)) \sin(\xi\tau) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada matrisin 1. satırındaki terimlerin katsayıları olan sabitler

$$c_1 + c_2 = C_1$$

$$i(c_1 - c_2) = C_2$$

olacak şekilde yeni bir C_1 ve C_2 sabitleri ile değiştirilirse elde edilen homojen kısmın çözümü

$$X_h = e^{\varphi\tau} \begin{bmatrix} C_1 \cos(\xi\tau) + C_2 \sin(\xi\tau) \\ (cC_1 + dC_2) \cos(\xi\tau) + (-dC_1 + cC_2) \sin(\xi\tau) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Denklemin özel çözümü ise I . durumda olduğu gibi

$$X_{\text{ö}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

şeklinde araştırılır. Özel çözüm denkleminde yerine yazıldığında çözülmesi gereken denklemin sistemi I . durumdaki denklemin sistemi ile aynı olduğundan dolayı aranan özel çözüm

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_0^3 + U_0 V_0^2 - V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{2U_0^2 + 2V_0^2 + 1} \\ \frac{V_0^3 + U_0^2 V_0 + U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{2U_0^2 + 2V_0^2 + 1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Dolayısı ile genel çözüm

$$X_g = X_h + X_{\text{ö}}$$

olduğundan

$$X_g = e^{\varphi\tau} \begin{bmatrix} C_1 \cos(\xi\tau) + C_2 \sin(\xi\tau) \\ (cC_1 + dC_2) \cos(\xi\tau) + (-dC_1 + cC_2) \sin(\xi\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki keyfi sabitler olan C_1 ve C_2 'ler I . durumda yapıldığı gibi

$$U(0) = U_0$$

$$V(0) = V_0$$

başlangıç değerleri ile hesaplanır. Başlangıç değerleri çözümde yazılırsa

$$X_g = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \Rightarrow X_g(0) = \begin{bmatrix} U(0) \\ V(0) \end{bmatrix} \Rightarrow X_g(0) = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

olduğundan dolayı

$$X_g(0) = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ (cC_1 + dC_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden

$$C_1 = U_0 - a$$

$$C_2 = \frac{V_0 - b - cU_0 + ac}{d}$$

olarak bulunur. Dolayısı ile genel çözüm

$$X_g = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = e^{\varphi\tau} \begin{bmatrix} (U_0 - a) \cos(\xi\tau) + \frac{V_0 - b - cU_0 + ca}{d} \sin(\xi\tau) \\ (V_0 - b) \cos(\xi\tau) + \left(-d(U_0 - a) + c \frac{V_0 - b - cU_0 + ac}{d}\right) \sin(\xi\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$X' = U ; Y' = V$$

olarak seçildiğinden dolayı

$$\begin{bmatrix} X'(\tau) \\ Y'(\tau) \end{bmatrix} = e^{\varphi\tau} \begin{bmatrix} (U_0 - a) \cos(\xi\tau) + \frac{V_0 - b - cU_0 + ca}{d} \sin(\xi\tau) \\ (V_0 - b) \cos(\xi\tau) + \left(-d(U_0 - a) + c \frac{V_0 - b - cU_0 + ac}{d}\right) \sin(\xi\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

elde edilir. Elde edilen denklemlerin sağ tarafı yalnızca τ 'nin bir fonksiyonu olduğu için her iki tarafın integrali alınarak

$$\begin{bmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{bmatrix} = \int e^{\varphi\tau} \begin{bmatrix} (U_0 - a) \cos(\xi\tau) + \frac{V_0 - b - cU_0 + ca}{d} \sin(\xi\tau) \\ (V_0 - b) \cos(\xi\tau) + \left(-d(U_0 - a) + c \frac{V_0 - b - cU_0 + ac}{d}\right) \sin(\xi\tau) \end{bmatrix} d\tau \\ + \int \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} d\tau + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\int e^{\varphi\tau} \cos(\xi\tau) d\tau = \frac{e^{\varphi\tau}}{\varphi^2 + \xi^2} (\varphi \cos(\xi\tau) + \xi \sin(\xi\tau)) + C$$

$$\int e^{\varphi\tau} \sin(\xi\tau) d\tau = \frac{e^{\varphi\tau}}{\varphi^2 + \xi^2} (-\xi \cos(\xi\tau) + \varphi \sin(\xi\tau)) + C$$

bilinen integrallerine göre ilgili terimler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{bmatrix} = \frac{e^{\varphi\tau}}{\varphi^2 + \xi^2} \begin{bmatrix} (C_1\varphi - C_2\xi) \cos(\xi\tau) + (C_1\xi + C_2\varphi) \sin(\xi\tau) \\ (m_1\varphi - m_2\xi) \cos(\xi\tau) + (m_1\xi + m_2\varphi) \sin(\xi\tau) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tau + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $m_1 = cC_1 + dC_2, m_2 = -dC_1 + cC_2$ 'dir. Bu çözümdeki sabitler yukarıda elde edilen değerlerdir. Bu şekilde yazılma nedeni katsayılardan gelecek uzun

terimlerin karmaşıklığını önlemek içindir. Bu bağıntılardaki keyfi sabitler, topun başlangıç konumu orijin kabul edildiğinden

$$X(0) = 0 ; Y(0) = 0$$

başlangıç değerleri ile hesaplanır. Bu değerler denklemlerde yerine yazılırsa aranan sabitler

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X(0) \\ Y(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\varphi^2 + \xi^2} \begin{bmatrix} (C_1\varphi - C_2\xi) \\ ((cC_1 + dC_2)\varphi - (-dC_1 + cC_2)\xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} C_3 = \frac{1}{\varphi^2 + \xi^2} (-C_1\varphi + C_2\xi) \\ C_4 = \frac{1}{\varphi^2 + \xi^2} (-(cC_1 + dC_2)\varphi + (-dC_1 + cC_2)\xi) \end{cases} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısı ile topun konumunu veren denklemler

$$X(\tau) = \frac{e^{\varphi\tau}}{\varphi^2 + \xi^2} [(C_1\varphi - C_2\xi) \cos(\xi\tau) + (C_1\xi + C_2\varphi) \sin(\xi\tau)] + a\tau + C_3$$

$$\begin{aligned} Y(\tau) &= \frac{e^{\varphi\tau}}{\varphi^2 + \xi^2} [((cC_1 + dC_2)\varphi - (-dC_1 + cC_2)\xi) \cos(\xi\tau) \\ &\quad + ((cC_1 + dC_2)\xi + (-dC_1 + cC_2)\varphi) \sin(\xi\tau)] + b\tau + C_4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradaki katsayılar

$$c = \frac{\left(\frac{U_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right) \left(\sqrt{U_0^2 + V_0^2} - U_0V_0\right)}{-U_0^2 - V_0^2 + U_0^2V_0^2} ;$$

$$d = \frac{\sqrt{-(U_0^2 + V_0^2 - 4)} \left[\frac{U_0^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} - \frac{U_0V_0}{2} \sqrt{U_0^2 + V_0^2}\right]}{-U_0^2 - V_0^2 + U_0^2V_0^2}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_0^3 + U_0V_0^2 - V_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{2U_0^2 + 2V_0^2 + 1} \\ \frac{V_0^3 + U_0^2V_0 + U_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{2U_0^2 + 2V_0^2 + 1} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = U_0 - a ; C_2 = \frac{V_0 - b - cU_0 + ac}{d} ; C_3 = \frac{1}{\varphi^2 + \xi^2} (-C_1\varphi + C_2\xi) ;$$

$$C_4 = \frac{1}{\varphi^2 + \xi^2} (-(cC_1 + dC_2)\varphi + (-dC_1 + cC_2)\xi)$$

şeklindedir.

Örnek 5.4: Futbol topuna başlangıç hız vektörünün x yönündeki bileşeninin 9.9 m/s ve y yönündeki bileşeninin 8.25 m/s olacak şekilde vurulduğu ve topun açılma hızının $\omega = 15 \text{ devir/s}$ olduğu göz önüne alınsın. Ayrıca topun kaleye olan mesafesi ise 15 m olarak alınsın. Bu durumda boyutsuz denklemdeki başlangıç değerleri

$$X'(0) = U(0) = \frac{1}{4\omega r} v_x(0) = 1.5$$

$$Y'(0) = V(0) = \frac{1}{4\omega r} v_y(0) = 1.25$$

şeklindedir. Ayrıca verilen parametrelere göre topun kaleye ulaşması için geçen süre 2.60125 s 'dir. Bu değer boyutsuzlaştırılmış denklemde

$$\tau = \frac{4\varepsilon\omega r}{m} t = 0.4432$$

süresine karşılık gelmektedir. Ayrıca dikkat edilirse

$$U^2(0) + V^2(0) = 3.8125 < 4$$

olduğundan denklemin özdeğerleri kompleks değerlidir. Gerçekten, verilen başlangıç değerleri için özdeğerler ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_1 = -2.9288 + 0.2165i ; Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.0898 - 0.1104i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2.9288 - 0.2165i ; Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.0898 + 0.1104i \end{bmatrix}$$

Dolayısı ile II. durumda elde edilen değerler ile hız bileşenleri

$$U(\tau) = e^{-2.9288\tau}(1.1199 \cos(0.2165\tau) - 4.151 \sin(0.2165\tau)) + 0.3801\tau$$

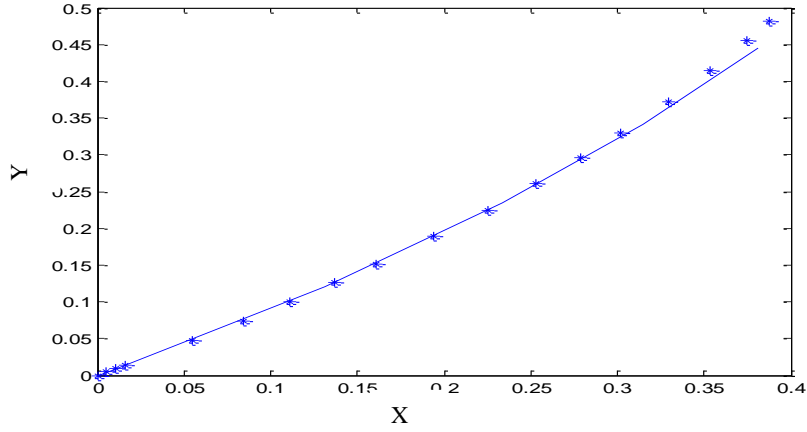
$$V(\tau) = e^{-2.9288\tau}(0.3579 \cos(0.2165\tau) + 0.4965 \sin(0.2165\tau)) + 0.3801\tau$$

olarak bulunur. Konumun türevi hız denklemlerini verdiği için konum denklemleri

$$X(\tau) = 0.2761 + e^{-2.9288\tau}(-0.2761 \cos(0.2165\tau) + 1.4377 \sin(0.2165\tau)) + 0.3801\tau$$

$$Y(\tau) = 0.134 - e^{-2.9288\tau}(0.134 \cos(0.2165\tau) + 0.1596 \sin(0.2165\tau)) + 0.3801\tau$$

şeklinde elde edilir. Bu elde edilen bağıntılar ile cismin hem MATLAB ODE çözümleri ile elde edilen sayısal çözümünün hem de Taylor açılımı ile elde edilen analitik yaklaşımının grafikleri aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 20. II. durum için sayısal çözüm ile Taylor yaklaşımının karşılaştırılması (sayısal çözüm (nokta), Taylor yaklaşım (çizgi))

Burada nokta nokta gösterilen ODE çözümleri ile elde edilen sayısal çözümün grafiği gösterirken düz çizgi ile gösterilen Taylor yöntemi ile elde edilen grafikdir. Bu şekilden de görüleceği üzere analitik yöntem ve sayısal yöntem istenilen küçük zaman diliminde iyi sonuçlar vermektedirler.

5.5. Boyutsuzlaştırılmış Problem İçin Alternatif Analitik Yaklaşım

Boyutsuzlaştırılmış denklemler için analitik yaklaşım yöntemi Bölüm 5.4'te gösterildi. Bu bölümde boyutsuzlaştırılmış denklemlere farklı bir analitik yaklaşım yöntemiyle nasıl çözüm araştırılabileceği incelenmektedir. Bunun için (26) denklem sisteminde

$$U = X'$$

$$V = Y'$$

alınmak suretiyle elde edilen (28) denklem sistemini ele alalım. (28) sistemine göre çözülmesi gereken denklem sistemi

$$U' = -U\sqrt{U^2 + V^2} - V, U(0) = U_0$$

$$V' = -V\sqrt{U^2 + V^2} + U, V(0) = V_0$$

şeklinde dir. Eğer birinci denklem U ile ikinci denklem V ile çarpılarak iki denklem sistemi taraf tarafa toplanırsa

$$UU' + VV' = -(U^2 + V^2)\sqrt{U^2 + V^2} = -(U^2 + V^2)^{\frac{3}{2}}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemden

$$\frac{1}{2} \frac{d(U^2 + V^2)}{d\tau} = -(U^2 + V^2)^{\frac{3}{2}}$$

olarak bulunur. Burada

$$S := \sqrt{U^2 + V^2}$$

olarak tanımlanırsa

$$\frac{1}{2} \frac{dS^2}{d\tau} = -S^3$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklemden

$$\frac{1}{2} 2S \frac{dS}{d\tau} = -S^3 \Rightarrow \frac{dS}{d\tau} = -S^2$$

olarak bulunur. Son denklem değişkenlerine ayrılabilir bir denklem olup bu denklemin çözümünden

$$\frac{dS}{-S^2} = d\tau \Rightarrow \frac{1}{S} = \tau + c \Rightarrow S(\tau) = \frac{1}{\tau + c}$$

olarak elde edilir. Alınan başlangıç hız değerleri ile

$$S(0) = \sqrt{U(0)^2 + V(0)^2}$$

olduğundan

$$S(\tau) = \frac{1}{\tau + 1/S(0)}$$

elde edilir. Ayrıca

$$S = \sqrt{U^2 + V^2}$$

alındığından dolayı denklem (28) S cinsinden

$$U' = -US - V, U(0) = U_0$$

$$V' = -VS + U, V(0) = V_0$$

olarak yazılır. Adomian ayrışım yöntemindeki gibi denklem sistemi için

$$U = U_0 + \tau U_1 + \tau^2 U_2 + \tau^3 U_3 + \dots$$

$$V = V_0 + \tau V_1 + \tau^2 V_2 + \tau^3 V_3 + \dots$$

şeklinde bir çözüm araştıralım ve τ 'nin fonksiyonu olan S için Taylor açılımı denklemlere uygulayalım. Bu durumda denklemlerin her iki tarafındaki τ 'nin eşit üstlü terimleri birbirlerine eşitlemek suretiyle gerekli olan yaklaşımların nasıl bulunacağını araştıralım. Bunun için

$$S(t) = \frac{1}{\tau + 1/S(0)}$$

fonksiyonunun Taylor açılımı

$$\frac{1}{\tau + 1/S(0)} = \frac{1}{S(0)} - \frac{1}{S(0)^2}\tau + \frac{1}{S(0)^3}\tau^2 - \frac{1}{S(0)^4}\tau^3 + \dots$$

şeklinde olduğundan $a = 1/S(0)$ olmak üzere

$$S(t) = a - a^2\tau + a^3\tau^2 - a^4\tau^3 + \dots$$

olarak yazılır. Elde edilen bağıntılar denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} U_1 + 2\tau U_2 + 3\tau^2 U_3 + \dots \\ &= -(U_0 + \tau U_1 + \tau^2 U_2 + \tau^3 U_3 + \dots)(a - a^2\tau + a^3\tau^2 - a^4\tau^3 + \dots) \\ &\quad - (V_0 + \tau V_1 + \tau^2 V_2 + \tau^3 V_3 + \dots) \\ V_1 + 2\tau V_2 + 3\tau^2 V_3 + \dots \\ &= -(V_0 + \tau V_1 + \tau^2 V_2 + \tau^3 V_3 + \dots)(a - a^2\tau + a^3\tau^2 - a^4\tau^3 + \dots) \\ &\quad + U_0 + \tau U_1 + \tau^2 U_2 + \tau^3 U_3 + \dots \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde τ 'nin eşit üslü terimlerinin katsayıları birbirine eşitlemek suretiyle elde edilen U için denklemler

$$\begin{aligned} U_1 &= -aU_0 - V_0 \\ 2U_2 &= a^2U_0 - aU_1 - V_1 \\ 3U_3 &= -a^3U_0 + a^2U_1 - aU_2 - V_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde V için denklemler

$$\begin{aligned} V_1 &= -aV_0 + U_0 \\ 2V_2 &= a^2V_0 - aV_1 + U_1 \\ 3V_3 &= -a^3V_0 + a^2V_1 - aV_2 + U_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Cismin başlangıç hızları

$$\begin{aligned} U(0) &= U_0 = \beta \\ V(0) &= V_0 = \gamma \end{aligned}$$

olduğundan dolayı U denklemlerinin ilk dört terimi

$$\begin{aligned} U_1 &= -a\beta - \gamma; U_2 = \frac{2a^2\beta + 2a\gamma - \beta}{2}; U_3 = \frac{-6a^3\beta - 6a^2\gamma + 3a\beta + \gamma}{6}; \\ U_4 &= \frac{24a^4\beta + 24a^3\gamma - 12a^2\beta - 4a\gamma + \beta}{24} \end{aligned}$$

V denklemlerinin ilk dört terimi ise

$$V_1 = -a\gamma + \beta; V_2 = \frac{2a^2\gamma - 2a\beta - \gamma}{2}; V_3 = \frac{-6a^3\gamma + 6a^2\beta + 3a\gamma - \beta}{6};$$

$$V_4 = \frac{24a^4\gamma - 24a^3\beta - 12a^2\gamma + 4a\beta + \gamma}{24}$$

olarak elde edilir. Dolayısı ile genel çözümler

$$U(t) = \beta + (-a\beta - \gamma)\tau + \frac{2a^2\beta + 2a\gamma - \beta}{2}\tau^2 + \frac{-6a^3\beta - 6a^2\gamma + 3a\beta + \gamma}{6}\tau^3 + \dots$$

$$V(t) = \gamma + (-a\gamma + \beta)\tau + \frac{2a^2\gamma - 2a\beta - \gamma}{2}\tau^2 + \frac{-6a^3\gamma + 6a^2\beta + 3a\gamma - \beta}{6}\tau^3 + \dots$$

şeklindedir. $X' = U, Y' = V$ olduğundan her iki tarafının τ 'ya göre integrali alınarak konum denklemleri

$$X = \beta\tau + \frac{(-a\beta - \gamma)}{2}\tau^2 + \frac{2a^2\beta + 2a\gamma - \beta}{6}\tau^3 + \frac{-6a^3\beta - 6a^2\gamma + 3a\beta + \gamma}{24}\tau^4 + \dots$$

$$Y = \gamma\tau + \frac{(-a\gamma + \beta)}{2}\tau^2 + \frac{2a^2\gamma - 2a\beta - \gamma}{6}\tau^3 + \frac{-6a^3\gamma + 6a^2\beta + 3a\gamma - \beta}{24}\tau^4 + \dots$$

olarak bulunur. Burada cismin başlangıç konumu orijin kabul edildiğinden konum denklemlerinden gelecek sabitler sıfırdır.

Örnek 5.5: Bölüm 5.4.1'de Örnek 5.3'te alınan başlangıç şartları ele alınsın. Dolayısı ile başlangıç değerleri

$$X'(0) = U(0) = 4.7168 = \beta$$

$$Y'(0) = V(0) = 0.4127 = \gamma$$

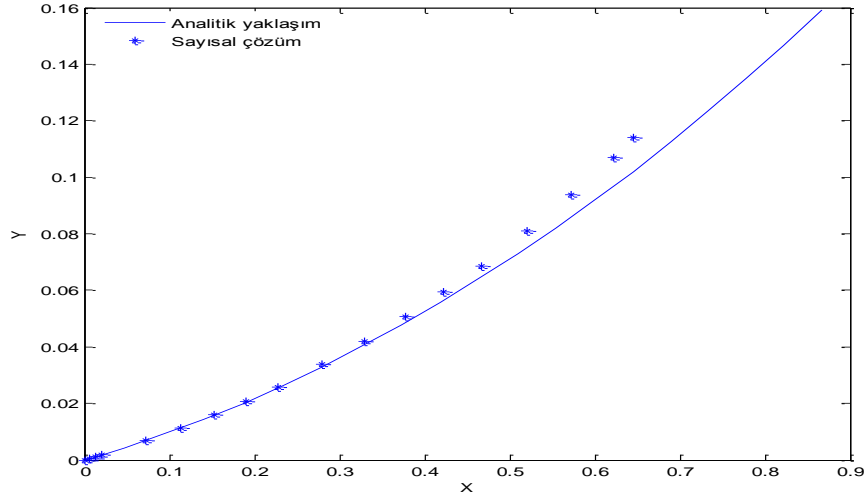
şeklindedir. Ayrıca boyutsuzlaştırılmış denklem için topun hareket edeceği süre ise $\tau = 0.1961$ 'dir. Dolayısı ile cismin başlangıç sürati

$$S(0) = \sqrt{U(0)^2 + V(0)^2} = 4.7348$$

olduğundan denklemlerdeki a sabiti $a = 1/S(0) = 0.2112$ olarak elde edilir. Böylece verilen başlangıç değerleri ile cismin konumunu veren denklemler aşağıdaki gibi bulunur.

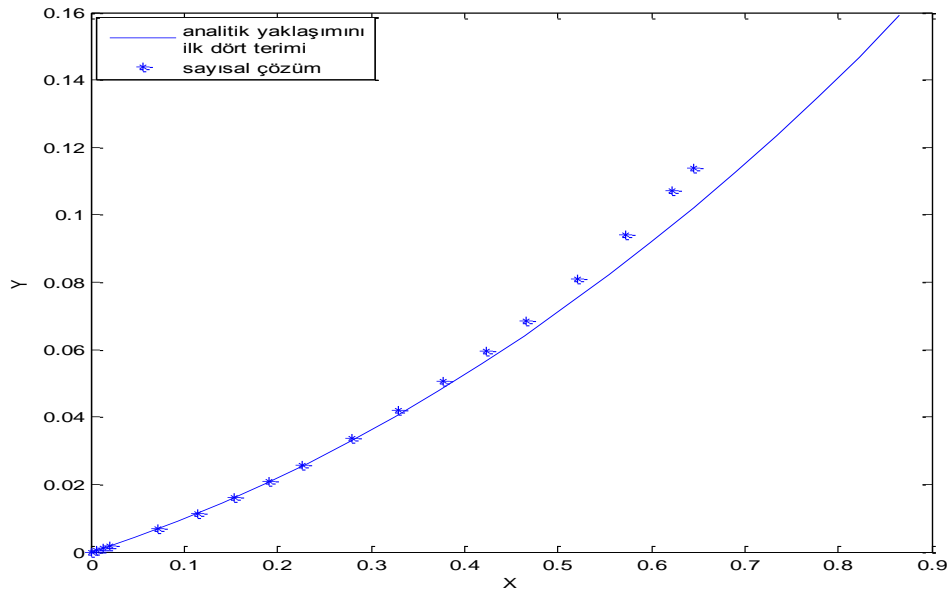
$$X = 4.7168\tau - 0.7044\tau^2 - 0.6869\tau^3 + 0.126\tau^4 + \dots$$

$$Y = 0.4127\tau + 2.3148\tau^2 - 0.3947\tau^3 - 0.134\tau^4 + \dots$$



Şekil 21. Örnek 4.5 için analitik yaklaşımın ilk üç terim ile sayısal çözümü

Elde edilen analitik yaklaşımda ilk üç terimi alınarak elde edilen analitik yaklaşım ile sayısal çözümün grafiği Şekil 21’de görülmektedir. Buradan da görüleceği üzere analitik çözüm ile sayısal çözüm çok küçük zaman aralığında benzer davranış gösterirken zaman aralığı arttıkça farklılık göstermektedir. Fakat eğer analitik yaklaşımların ilk 4 terimi alınırsa elde edilen analitik yaklaşım ile sayısal çözümün grafiği ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 22. Analitik yaklaşımın ilk dört terimi alınarak elde edilen analitik yaklaşım(çizgi) ve sayısal çözüm(nokta)

Şekil 22'den görüleceği üzere analitik yaklaşımlarının ilgili terimlerinin sayısı arttıkça analitik çözüm ile sayısal çözümün grafikleri birbirine yaklaşmaktadır. Dolayısı ile kullanılan analitik yaklaşım cismin yörüngesini tanımlamak için kullanılabilir.

Böylece bir futbol topunun iki boyutlu uzaydaki yörüngesi incelendi. Bu yörüngeler için hem analitik hem de sayısal çözümlerin birbiri ile uyumlu olduğu gösterildi. Bir sonraki bölümde ise futbol topunun üç boyutlu uzaydaki hareketi incelenmektedir. Bu uzayda futbol topunun etki eden denklemlerin genel formları bulunarak topun yörünge denklemleri oluşturulmaktadır.

6. FUTBOL TOPUNUN 3-BOYUTTA YÖRÜNGESİ

6.1. 3-Boyutta Futbol Topunun Hareketi

2 boyutta futbol topunun yörüngesi incelendikten sonra 3 boyutta futbol topunun nasıl bir yörünge izleyeceğini inceleyelim. 2 boyutta elde edilen ortam direnç kuvveti ve Magnus kuvvetinin genel şekillerini 3 boyutlu uzaya genişletelim. Bölüm 3.1'deki ortam direnç kuvvetinin genel ifadesi

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} C \rho A v \vec{v}$$

ve Bölüm 4.2'deki Magnus kuvvetinin genel ifadesi ise

$$\vec{F}_m = 2 C \rho A v \omega r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|}$$

olarak elde edilmişti. Bölüm 5'te futbol topunun $x - y$ yönündeki hareketi incelendiği için hız vektörünün sadece v_x ve v_y bileşenleri hesaba katılmıştı. Bu bölümde ise z yönünde de bir hareket olacağından \vec{v} hız vektörünün

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

olacak şekilde üç hız bileşeni mevcuttur. Ayrıca bölüm 4'te topun sadece z ekseninde döndüğü kabul edilmişti. Burada ise topa başlangıçta x, y ve z yönünde bir dönme verildiği ve bu dönmenin de hareket boyunca sabit kaldığı kabul edilmektedir. Dolayısı ile dönme vektörü $\vec{\omega}$ 'nın

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

olacak şekilde üç bileşeni mevcuttur. Burada topa y eksenini yönünde vurulduğu düşünülerek y yönü topun kaleye olan uzaklığını, x yönü topun sağa veya sola ne kadar gittiğini, z yönü ise topun yerden ne kadar yüksekte olduğunu göstermektedir.

Yapılan varsayımlar sonucunda 3 boyutlu uzayda futbol topunu etkileyen ortam direnç kuvveti

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} C \rho A v (v_x, v_y, v_z) \quad (33)$$

ve Magnus kuvveti

$$\vec{F}_m = 2 C \rho A v \omega r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{|\vec{\omega} \times \vec{v}|} \quad (34)$$

şeklinde elde edilir. Burada $|\vec{v}| = v$ ve $|\vec{\omega}| = \omega$ 'dir. Ayrıca Magnus kuvvetindeki $\vec{\omega}$ ile \vec{v} vektörlerinin vektörel çarpımının büyüklüğü, vektörel çarpımın özelliğinden dolayı

$$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega v \sin(\zeta)$$

olarak ifade edilir. Bu bağıntı Denklem 34'de yerine yazılırsa

$$\vec{F}_m = 2 C \rho A v \omega r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{\omega v \sin(\zeta)} = 2 C \rho A r \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{\sin(\zeta)} \quad (35)$$

olarak bulunur. Burada ζ olarak $\vec{\omega}$ ile \vec{v} vektörleri arasındaki başlangıçtaki açı olarak alınmaktadır. Bu durumda ζ 'nin değeri iki vektör arasındaki açı formülünden

$$\cos(\zeta) = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_0}{\|\vec{\omega}\| \cdot \|\vec{v}_0\|} = \frac{\omega_x v_x(0) + \omega_y v_y(0) + \omega_z v_z(0)}{\sqrt{[\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2][v_x^2(0) + v_y^2(0) + v_z^2(0)]}}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca Denklem 35'de $\vec{\omega} \times \vec{v}$ vektörü hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (\omega_y v_z - \omega_z v_y) \vec{i} - (\omega_x v_z - \omega_z v_x) \vec{j} + (\omega_x v_y - \omega_y v_x) \vec{k} \\ &= (\omega_y v_z - \omega_z v_y, \omega_z v_x - \omega_x v_z, \omega_x v_y - \omega_y v_x) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu bağıntı Magnus kuvvetinde yerine yazılırsa

$$\vec{F}_m = 2 C \rho A r \frac{(\omega_y v_z - \omega_z v_y, \omega_z v_x - \omega_x v_z, \omega_x v_y - \omega_y v_x)}{\sin(\zeta)} \quad (36)$$

olarak bulunur.

Topun üzerine etkileyen iki kuvvetin dışında bir de topun yere düşmesini sağlayacak olan yerçekimi kuvveti mg mevcuttur. Bu kuvvet her zaman $-z$ yönünde olduğundan dolayı

$$\vec{F}_{yer} = (0, 0, -mg) \quad (37)$$

olarak elde edilir. Burada $m = m_t$ 'dir. Dolayısı ile genel şekilleri Denklem 33, 36 ve 37'de verilen kuvvetlere Newton'un 2. yasası uygulanırsa

$$m\vec{a} = \sum F = \vec{F}_d + \vec{F}_m + \vec{F}_{yer}$$

şeklinde olduğundan dolayı

$$m\vec{a} = -\frac{1}{2}C\rho Av(v_x, v_y, v_z) + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_y v_z - \omega_z v_y, \omega_z v_x - \omega_x v_z, \omega_x v_y - \omega_y v_x) + (0, 0, -mg)$$

elde edilir. Hızın zamana göre türevi ivmeyi verdiğiinden cismin hız bileşenleri

$$m(v'_x, v'_y, v'_z) = -\frac{1}{2}C\rho Av(v_x, v_y, v_z) + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_y v_z - \omega_z v_y, \omega_z v_x - \omega_x v_z, \omega_x v_y - \omega_y v_x) + (0, 0, -mg)$$

denkleminde

$$\begin{aligned} mv'_x &= -\frac{1}{2}C\rho Avv_x + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_y v_z - \omega_z v_y) \\ mv'_y &= -\frac{1}{2}C\rho Avv_y + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_z v_x - \omega_x v_z) \\ mv'_z &= -\frac{1}{2}C\rho Avv_z + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_x v_y - \omega_y v_x) - mg \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca cismin konum bileşenleri hız bileşenlerinin integrali olduğundan dolayı cismin konum bileşenlerini veren denklemler

$$\begin{aligned} mx'' &= -\frac{1}{2}C\rho Ax'\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_y z' - \omega_z y') \\ my'' &= -\frac{1}{2}C\rho Ay'\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_z x' - \omega_x z') \\ mz'' &= -\frac{1}{2}C\rho Az'\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_x y' - \omega_y x') - mg \end{aligned} \quad (38)$$

şeklinde dir. 38 denklemleri Bölüm 5'deki gibi MATLAB ODE (veya sistemler için Euler yönetimi ile) çözümleri yardımıyla sayısal olarak çözülür ve buna bağlı olarak topun yörüngesi çizdirilir.

Örnek 6.1: Bir futbol topuna başlangıçta falso verilmeyecek şekilde vurulsun. Ayrıca başlangıçta topa verilen hız vektörünün büyüklüğü 25 m/s ve hız vektörünün z eksenine pozitif yönde yaptığı açı 45° , $x - y$ düzlemine izdüşümünün x eksenine pozitif yönde yaptığı açı 60° olsun. Bu verilere göre başlangıç değerleri

$$v_x(0) = v_0 \sin(45) \cos(60) = 8.8388 \text{ m/s}$$

$$v_y(0) = v_0 \sin(45) \sin(60) = 15.3093 \text{ m/s}$$

$$v_z(0) = v_0 \cos(45) = 17.6777 \text{ m/s}$$

şeklindedir. Bu başlangıç değerleri için futbol topunun nasıl bir yörünge izleyeceğini inceleyelim.

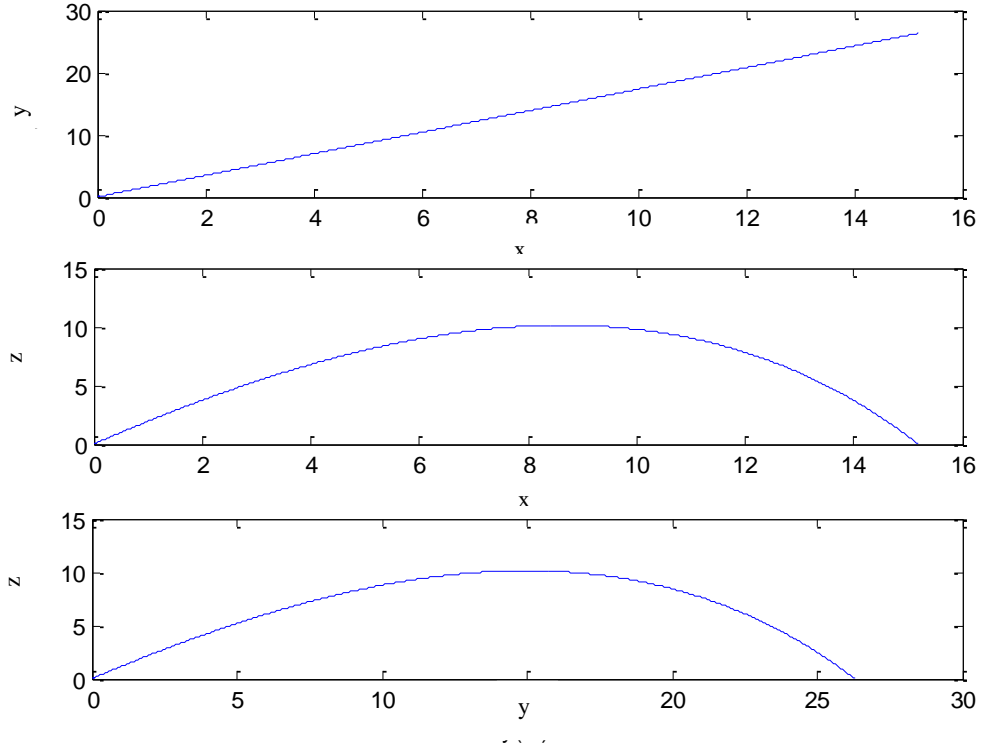
Topa falso verilmediğinden dolayı ($\vec{\omega} = 0$) 38'deki denklem sisteminde Magnus kuvvetinin etkisi mevcut olmayacağından denklemler

$$mx'' = -\frac{1}{2} C\rho Ax' \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

$$my'' = -\frac{1}{2} C\rho Ay' \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$$

$$mz'' = -\frac{1}{2} C\rho Az' \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} - mg$$

şeklinde ifade edilir. Bu nonlinear denklem sistemleri ODE çözücüler yardımıyla veya Euler yöntemi ile çözdürülerek topun zemine ilk vurduğu ana kadarki yörüngeleri aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 23. Sadece ortam direnç kuvveti etkisi altındaki topun üç boyutlu hareketi

Şekil 23'den görüldüğü üzere sadece ortam direnç kuvveti altında hareket eden bir top $x - y$ düzleminde herhangi bir sapmaya maruz kalmadan doğrusal bir şekilde ilerler.

Örnek 6.2: Örnek 6.1'de futbol topuna falso verilmediği yani, ortam direnç kuvveti ve yer çekimi kuvveti altında hareket ettiği varsayılmıştı. Bu örnekte ise Örnek 6.1'de alınan tipik başlangıç değerlerine bir de falso ekleyerek futbol topunun nasıl bir yörünge izleyeceğini inceleyelim.

Bunun için futbol topuna sadece $x - z$ düzleminde x eksenine pozitif yönde 53° 'lik açı yapacak şekilde 8 devir/s 'lik bir falso verilsin. Bu durumda açısal hızın bileşenleri

$$\omega_x = 8 \cos(53^\circ) = 4.8145$$

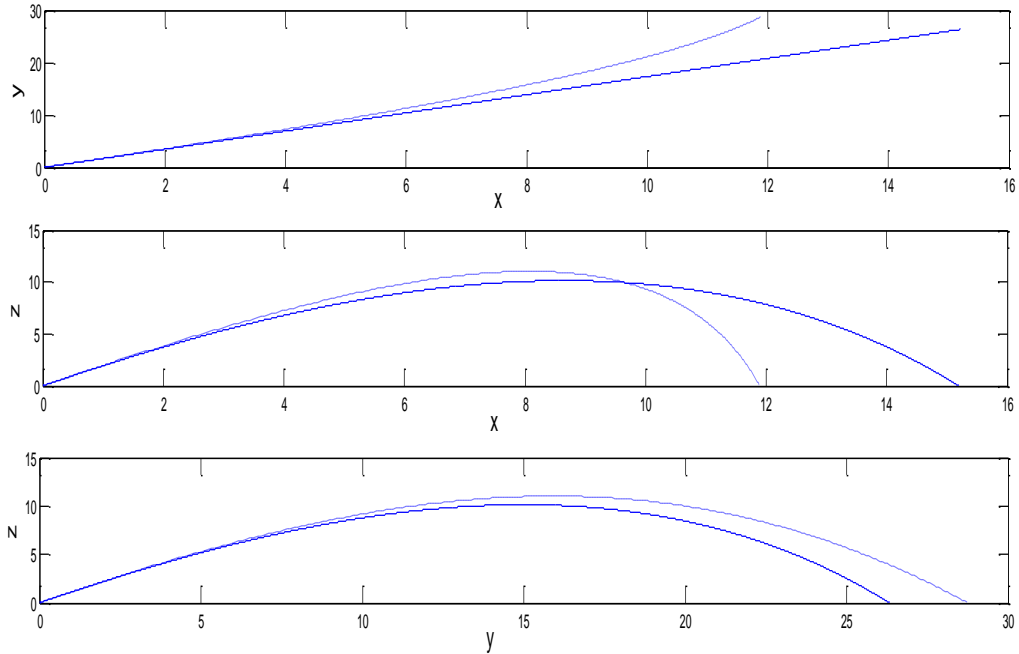
$$\omega_y = 8 \sin(53^\circ) = 6.3891$$

olarak bulunur. Bu değerler ile futbol topunun $\vec{\omega}$ ile \vec{v}_0 arasındaki açısı

$$\cos(\zeta) = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}_0}{\|\vec{\omega}\| \cdot \|\vec{v}_0\|} = 0.7775$$

formülünden $\zeta \approx 38.9669^\circ$ olarak elde edilir.

Elde edilen değerler ile Denklem 38'deki sistemin sayısal yöntemler yardımıyla çözümünden aşağıdaki şekiller elde edilir.



Şekil 24. Magnus kuvveti etkisi altındaki topun üç boyutlu hareketi (falsolu hareket (nokta), falsosuz hareket (çizgi))

Şekil 24'deki grafiklerde noktalarla gösterilen grafikler falso olayını gösterirken düz çizgi ile gösterilen grafikler Örnek 6.1'deki falso olmadığını göstermektedir. Şekillerden görüldüğü üzere falsosuz hareket yapan top $x - y$ düzleminde doğrusal bir yörünge çizerken falsolu durumunda Magnus kuvveti etkisi ile $-x$ yönünde bir kıvrılmaya maruz kalmaktadır. Fakat falsolu topun x yönünde aldığı mesafe $-x$ yönündeki sapmadan dolayı falsosuz durumdan az iken y yönünde aldığı mesafe daha fazladır. Bu durum falsolu topun $x - y$ düzlemindeki iz-düşüm eğrisinin uzunluğu ile falsosuz eğri uzunluğu büyüklükleri arasında nasıl bir fark oluşacağı sorusunu akla getirebilir. Bunun için her iki durumda eğri uzunluklarını sayısal yöntemler ile hesaplamak suretiyle yörünge uzunluklarını karşılaştıralım. Bu çalışmada kullanılan sayısal yöntemin amacı, yörünge x ve y eksenini eşit uzunlukta çok küçük parçalara bölmek suretiyle her bir uzunlukta uç noktadaki değerleri Euler yöntemi ile hesaplamak ve bu iki nokta arasındaki uzunlukları elde etmektir. Aynı zamanda elde edilen uzunlukları toplamaktır. Falso olmadığı durumda top düz bir doğru çizdiğinden dolayı topun yörüngesinin eğri uzunluğu topun son ulaştığı nokta (15.1974,26.3227) ile başlangıç olarak kabul edilen orijin arasındaki uzaklık olan 30.3948 m'dir. Falsolu durumda ise sayısal yöntem ile eğri uzunluğu 31.2591 m olarak bulunur. Dolayısıyla bu durum falsolu topun eğri uzunluğunun falsosuz toptan daha fazla olduğu göstermektedir.

Örnek 6.3: Bir futbol topuna 25 m/s'lik bir ilk hız ile başlangıçta z eksenine pozitif yönde 60° 'lik açı ve başlangıç hız vektörünün $x - y$ düzlemine iz düşümünün x eksenine pozitif yönde 30° 'lik bir açı yapacak şekilde vurulduğu kabul edilsin. Alınan değerlere göre başlangıç hız vektörünün bileşenleri

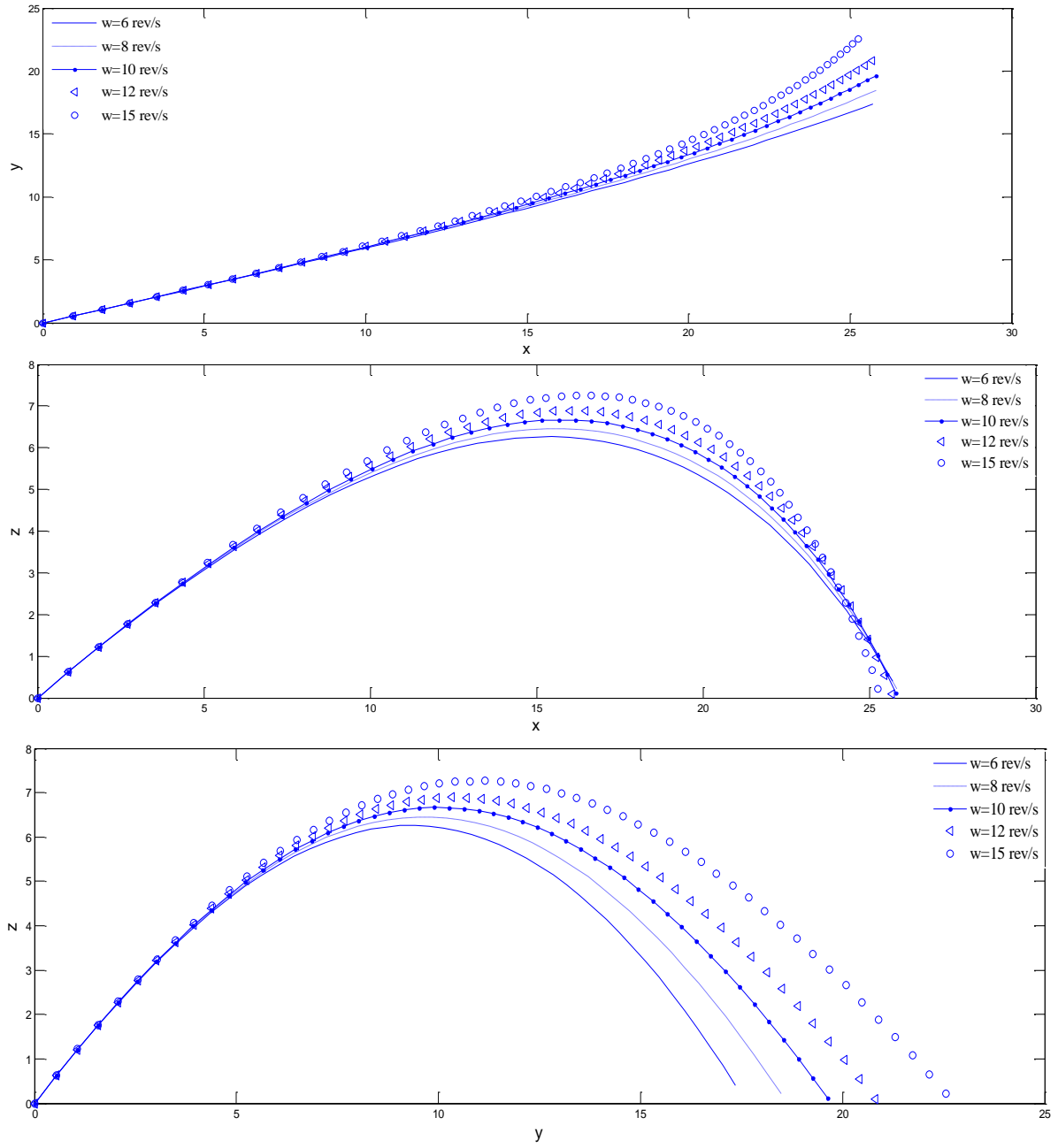
$$v_x(0) = v_0 \sin(60) \cos(30) = 18.75 \text{ m/s}$$

$$v_y(0) = v_0 \sin(60) \sin(30) = 10.8253 \text{ m/s}$$

$$v_z(0) = v_0 \cos(60) = 12.5 \text{ m/s}$$

şeklindedir.

i. Başlangıçta topa $x - z$ düzleminde x eksenine pozitif yönde 37° 'lik bir açı yapacak şekilde bir falso verilsin ve bu değer cismin hareketi boyunca değişmesin. Bu durumda Euler yöntemi ile topun farklı açısal hız değerleri için yörüngesi aşağıdaki gibi olur.

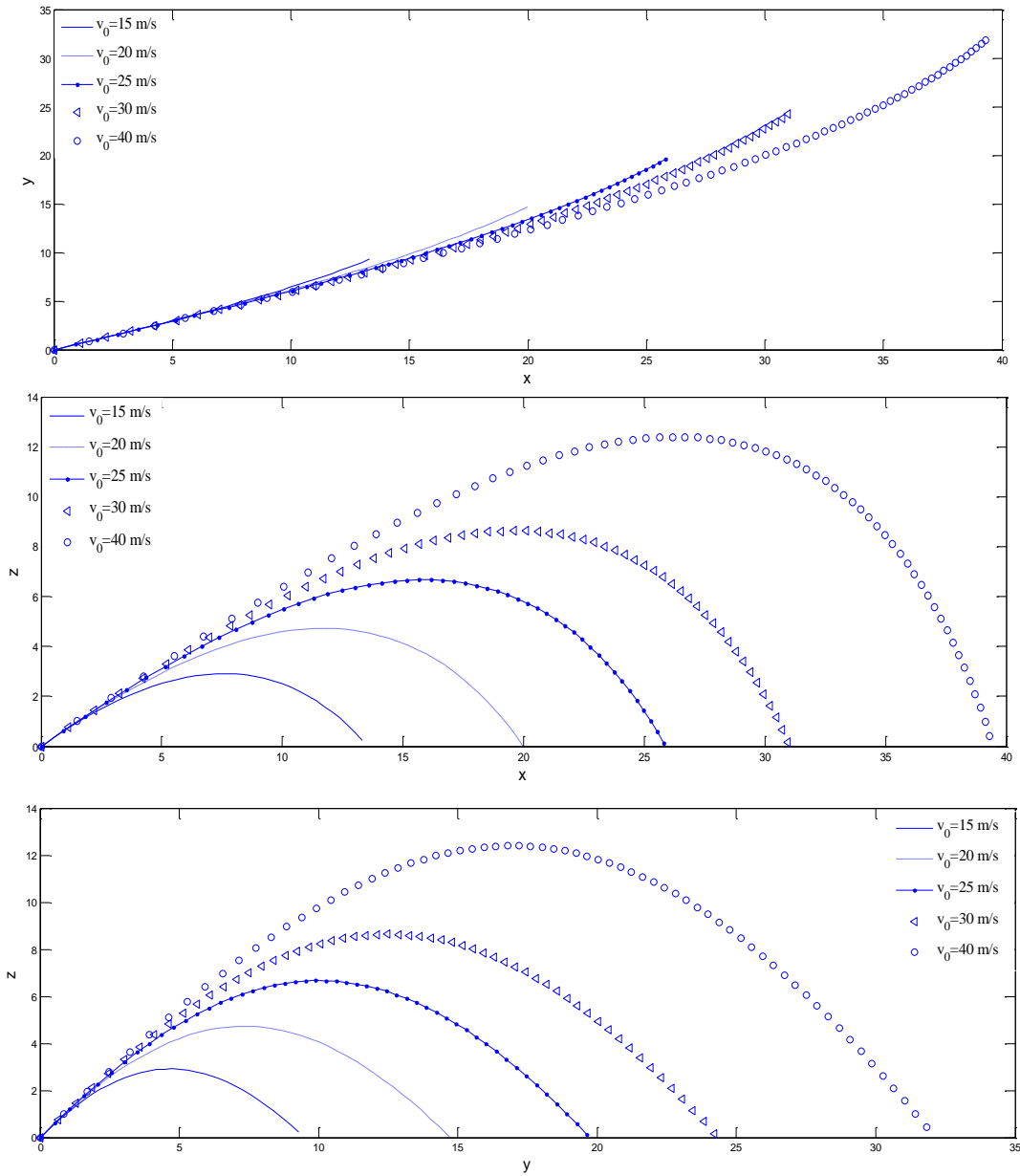


Şekil 25. Farklı açısal hız değerleri için futbol topunun yere düşme zamanına kadar yörüngesi

Alınan keyfi açısal hız değerleri için futbol topunun zemine düşme anına kadar yörüngeleri Şekil 25’de görülmektedir. Bu grafiklerden görüleceği üzere, açısal hız değeri arttıkça Magnus kuvvetinin etkisi artar ve dolayısıyla top $-x$ yönünde daha çok kıvrılmaya maruz kalır. Ayrıca açısal hız değeri arttıkça topun z yönünde aldığı maksimum yüksekliğinin arttığı ve y ekseninde daha çok yol aldığı görülür.

ii. Açısal hız değeri 10 devir/s 'de sabit tutularak farklı başlangıç hızlarında cismin yörüngesi gözlemlenebilir. Bunun için başlangıç hızının $x - y$ düzlemiyle ve z eksenleriyle yaptığı açıları (i) kısmında olduğu gibi kabul ederek farklı başlangıç hızları için cismin yörüngesini inceleyelim.

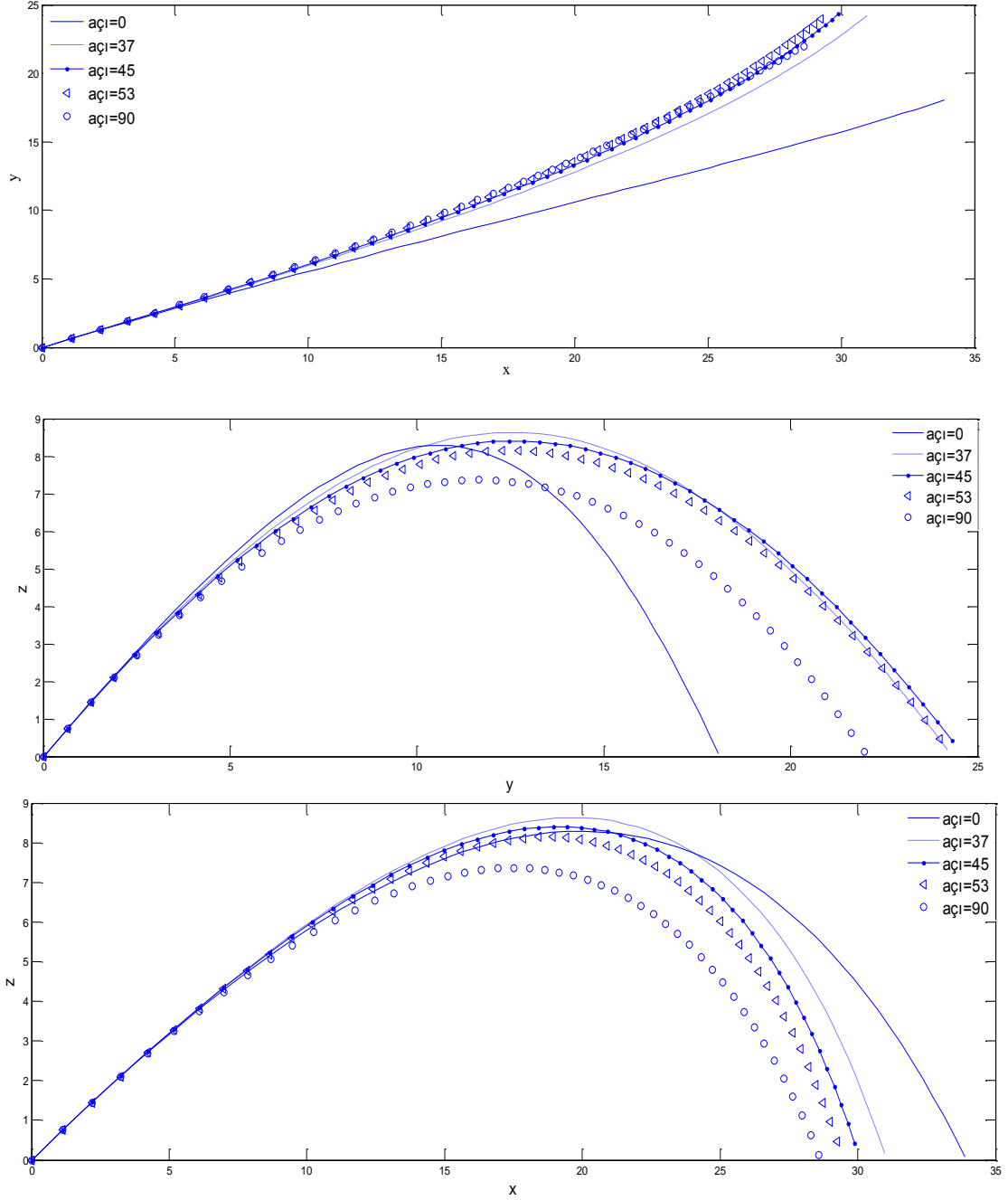
Şekil 26'da başlangıç hız değerleri 15 m/s ile 40 m/s arasında alınarak elde edilen grafikler görülmektedir. Şekillerden de görüldüğü üzere topun başlangıç hızı arttıkça x boyunca ve y boyunca aldığı mesafe artarken havada kalma süresi de uzamaktadır.



Şekil 26. Sabit açısal hız altında farklı başlangıç hızları için futbol topunun üç boyutlu hareketi

iii. Açısal hızın x eksenini ile yaptığı açının yörüngeye nasıl etki ettiğini araştıralım. Bunun için başlangıç hız bileşenlerini başlangıçtaki gibi alalım ve açısal hızın büyüklüğünü $\omega = 10 \text{ devir/s}$ olduğunu kabul ederek farklı açılarda topun yörüngesini çizdirelim.

Şekil 27'den görüleceği üzere falso açısı arttıkça top daha çok kıvrılmaya maruz kalmaktadır. (Futbol topunun sadece $x - z$ düzleminde döndüğü varsayılmaktadır.)



Şekil 27. Sabit açısal hız değeri için açısal hızın $x - z$ düzlemiyle yaptığı farklı açılar için yörünge grafikleri

6.2. 3-Boyutta Boyutsuzlaştırma

$x - y$ düzleminde hareket eden topun yörüngesi incelenirken yapılan boyutsuzlaştırma işlemini üç boyutta verelim. Bunun için 2 boyutta yapılan işlemlere benzer işlemler yaparak cismin hareketini daha küçük zaman aralığında inceleyelim.

Bu bölümde, topun sadece $x - z$ düzleminde döndüğü kabul edilmektedir. Dolayısıyla (38) denklemlerinde $\omega_y = 0$ alınmak suretiyle

$$\begin{aligned} mx'' &= -\frac{1}{2}C\rho Ax'\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} - \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}\omega_z y' \\ my'' &= -\frac{1}{2}C\rho Ay'\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}(\omega_z x' - \omega_x z') \\ mz'' &= -\frac{1}{2}C\rho Az'\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} + \frac{2C\rho Ar}{\sin(\zeta)}\omega_x y' - mg \end{aligned} \quad (39)$$

denklemler elde edilir. Yeni boyutsuz τ parametresine bağlı olarak denklemlerdeki x, y, z parametreleri sırasıyla X, Y, Z parametrelerine dönüştürülsün. Dolayısı ile

$$x = \alpha X ; y = \beta Y ; z = \eta Z ; t = \gamma \tau \quad (40)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ki $\alpha, \beta, \eta, \gamma$ katsayılarını hesaplayalım.

2 boyutta bulunan türev denklemlerine benzer şekilde

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{d(\alpha X)}{d(\gamma \tau)} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{d(\beta Y)}{d(\gamma \tau)} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau} \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{d(\eta Z)}{d(\gamma \tau)} = \frac{\eta}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca yeni bağımsız değişkene göre ikinci türevler ise

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau} \right) = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{dX}{d\tau} \right) = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dX}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{d^2X}{d\tau^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau} \right) = \frac{\beta}{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{dY}{d\tau} \right) = \frac{\beta}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dY}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{d^2Y}{d\tau^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau} \right) = \frac{\eta}{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{dZ}{d\tau} \right) = \frac{\eta}{\gamma} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dZ}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{\eta}{\gamma^2} \frac{d^2Z}{d\tau^2} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (39) denklemlerinde $\varepsilon = \frac{1}{2}C\rho A$ (kg/m) alınır ve elde edilen yeni bağımsız değişkene göre türevler yerine yazılırsa

$$m \frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{d^2 X}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau}\right)^2} - \frac{\varepsilon 4\omega_z r}{\sin(\zeta)} \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau}$$

$$m \frac{\beta}{\gamma^2} \frac{d^2 Y}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{\varepsilon 4r}{\sin(\zeta)} \left(\omega_z \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau} - \omega_x \frac{\eta}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau}\right)$$

$$m \frac{\eta}{\gamma^2} \frac{d^2 Z}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{\varepsilon 4\omega_x r}{\sin(\zeta)} \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau} - mg$$

denklemleri elde edilir. 2 boyutta yapıldığı gibi ikinci türev terimlerinin katsayıları her iki tarafa bölünür ve ortam direnç kuvvetinin terimlerinin birinci türevlerinin katsayıları kök içerisine alınırsa elde edilen denklemler

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = -\frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\varepsilon \frac{\alpha}{m}\right)^2 \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\beta}{m}\right)^2 \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\eta}{m}\right)^2 \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} - \frac{4\varepsilon\omega_z r}{\sin(\zeta)m} \frac{\beta}{\alpha} \frac{dY}{d\tau}$$

$$\frac{d^2 Y}{d\tau^2} = -\frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\varepsilon \frac{\alpha}{m}\right)^2 \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\beta}{m}\right)^2 \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\eta}{m}\right)^2 \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{4\varepsilon r}{\sin(\zeta)m} \left(\omega_z \frac{\alpha}{\beta} \frac{dX}{d\tau} - \omega_x \frac{\eta}{\beta} \frac{dZ}{d\tau}\right)$$

$$\frac{d^2 Z}{d\tau^2} = -\frac{dZ}{d\tau} \sqrt{\left(\varepsilon \frac{\alpha}{m}\right)^2 \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\beta}{m}\right)^2 \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon \frac{\eta}{m}\right)^2 \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{4\varepsilon\omega_x r}{\sin(\zeta)m} \frac{\beta}{\eta} \frac{dY}{d\tau} - g \frac{\gamma^2}{\eta}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemlerdeki terimlerin boyutsuz olması için

$$\varepsilon \frac{\alpha}{m} = 1$$

$$\varepsilon \frac{\beta}{m} = 1$$

$$\varepsilon \frac{\eta}{m} = 1$$

$$\frac{4\varepsilon\omega_z r}{\sin(\zeta)m} \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

$$\frac{4\varepsilon\omega_x r}{\sin(\zeta)m} \frac{\eta}{\beta} = 1$$

olarak seçilebilir. Bu denklemlerden istenilen bağıntılar

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{m}{\varepsilon} \\
\beta &= \frac{m}{\varepsilon} \\
\eta &= \frac{m}{\varepsilon} \\
\gamma &= \frac{\sin(\zeta)m}{4\varepsilon\omega_z r} \text{ veya } \gamma = \frac{\sin(\zeta)m}{4\varepsilon\omega_x r}
\end{aligned} \tag{41}$$

olarak bulunur. Elde edilen bağıntıların boyutlarına bakılacak olunursa, $[\varepsilon] = ML^{-1}$ ve $[m] = M$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
[\alpha] &= \frac{M}{ML^{-1}} = L \\
[\beta] &= \frac{M}{ML^{-1}} = L \\
[\eta] &= \frac{M}{ML^{-1}} = L
\end{aligned}$$

şeklindedir. γ 'nun boyutu ise $[\omega] = T^{-1}$, $[r] = L$ olduğundan

$$[\gamma] = \frac{M}{ML^{-1}T^{-1}L} = T$$

şeklindedir. (40) denklemlerinde

$$x = \alpha X ; y = \beta Y ; z = \eta Z ; t = \gamma \tau$$

olarak seçildiğinden dolayı yeni değişkenlerin boyutsuz olduğu görülür.

Bu seçilen parametrelere göre boyutsuzlaştırılmış denklem sistemi

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 X}{d\tau^2} &= -\frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} - \frac{dY}{d\tau} \\
\frac{d^2 Y}{d\tau^2} &= -\frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dX}{d\tau} - \frac{dZ}{d\tau} \\
\frac{d^2 Z}{d\tau^2} &= -\frac{dZ}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dY}{d\tau} - g \frac{\gamma^2}{\eta}
\end{aligned} \tag{42}$$

şeklindedir. (42) diferensiyel denklem sisteminin başlangıç değerleri (38) denklem sistemi ile uyumlu olmalıdır. Bunun sonucunda yeni başlangıç değerleri, cismin orijinden harekete başladığı kabul edilirse

$$x = \frac{m}{\varepsilon} X \Rightarrow x(0) = \frac{m}{\varepsilon} X(0) \Rightarrow 0 = \frac{m}{\varepsilon} X(0) \Rightarrow X(0) = 0$$

$$y = \frac{m}{\varepsilon} Y \Rightarrow y(0) = \frac{m}{\varepsilon} Y(0) \Rightarrow 0 = \frac{m}{\varepsilon} Y(0) \Rightarrow Y(0) = 0$$

$$z = \frac{m}{\varepsilon} Z \Rightarrow z(0) = \frac{m}{\varepsilon} Z(0) \Rightarrow 0 = \frac{m}{\varepsilon} Z(0) \Rightarrow Z(0) = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$x'(0) = v_x(0), y'(0) = v_y(0), z'(0) = v_z(0)$$

olarak seçilirse

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{dX}{d\tau} \Rightarrow x' = \frac{\alpha}{\gamma} X' \Rightarrow x'(0) = \frac{\alpha}{\gamma} X'(0) \Rightarrow v_x(0) = \frac{\alpha}{\gamma} X'(0) \Rightarrow X'(0) = v_x(0) \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{dY}{d\tau} \Rightarrow y' = \frac{\beta}{\gamma} Y' \Rightarrow y'(0) = \frac{\beta}{\gamma} Y'(0) \Rightarrow v_y(0) = \frac{\beta}{\gamma} Y'(0) \Rightarrow Y'(0) = v_y(0) \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\eta}{\gamma} \frac{dZ}{d\tau} \Rightarrow z' = \frac{\eta}{\gamma} Z' \Rightarrow z'(0) = \frac{\eta}{\gamma} Z'(0) \Rightarrow v_z(0) = \frac{\eta}{\gamma} Z'(0) \Rightarrow Z'(0) = v_z(0) \frac{\gamma}{\eta}$$

başlangıç değerleri elde edilir. Dolayısıyla boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen başlangıç değer problemi

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{d\tau^2} &= -\frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} - \frac{dY}{d\tau}, X(0) = 0, X'(0) = v_x(0) \frac{\gamma}{\alpha} \\ \frac{d^2Y}{d\tau^2} &= -\frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dX}{d\tau} - \frac{dZ}{d\tau}, Y(0) = 0, Y'(0) = v_y(0) \frac{\gamma}{\beta} \\ \frac{d^2Z}{d\tau^2} &= -\frac{dZ}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dY}{d\tau} - g \frac{\gamma^2}{\eta}, Z(0) = 0, Z'(0) = v_z(0) \frac{\gamma}{\eta} \end{aligned} \quad (43)$$

şeklindedir.

Örnek 6.4: Bir top 25 m/s 'lik ilk hızla z -ekseni ile pozitif yönde 60° 'lik bir açı, $x - y$ düzlemindeki iz düşümünün ise x -ekseniyle pozitif yönde 30° 'lik bir açı yapacak şekilde y eksenini boyunca atılsın. Ayrıca topun sadece $x - z$ düzleminde 8 devir/s 'lik sabit bir açısal hızla x -ekseniyle pozitif yönde 45° 'lik açı yapacak şekilde hareket ettiği kabul edilsin. Dolayısıyla topun başlangıçtaki açısal hız vektörü ile topun başlangıç hız vektörü arasındaki açı iki vektör arasındaki açı formülü ile $\zeta \cong 27.8859^\circ$ olarak bulunur. (41) denklemleri ile boyutsuzlaştırma parametreleri

$$\alpha = \frac{m}{\varepsilon} = \frac{0.43}{0.0111} = 38.7387, \beta = 38.7387, \eta = 38.7387$$

$$\gamma = \frac{\sin(\zeta)m}{4\varepsilon\omega_z r} = \frac{0.43\sin(27.8859)}{4 * 8 * 0.0111 * 0.11 * \sin(45)} \cong 7.2794$$

şeklindedir. Dolayısı ile boyutsuz parametrelerinden elde edilen denklemler için yeni başlangıç değerleri

$$X'(0) = v_x(0) \frac{\gamma}{\alpha} = 25 * \cos(30) * \sin(60) * \frac{7.2794}{38.7387} \cong 3.5233$$

$$Y'(0) = v_y(0) \frac{\gamma}{\beta} = 25 * \sin(30) * \sin(60) * \frac{7.2794}{38.7387} \cong 2.0342$$

$$Z'(0) = v_z(0) \frac{\gamma}{\eta} = 25 * \cos(60) * \frac{7.2794}{38.7387} \cong 2.3489$$

şeklinde olur. Dolayısı ile elde edilen denklem sistemi

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} - \frac{dY}{d\tau}, \quad X(0) = 0, X'(0) = 3.5233$$

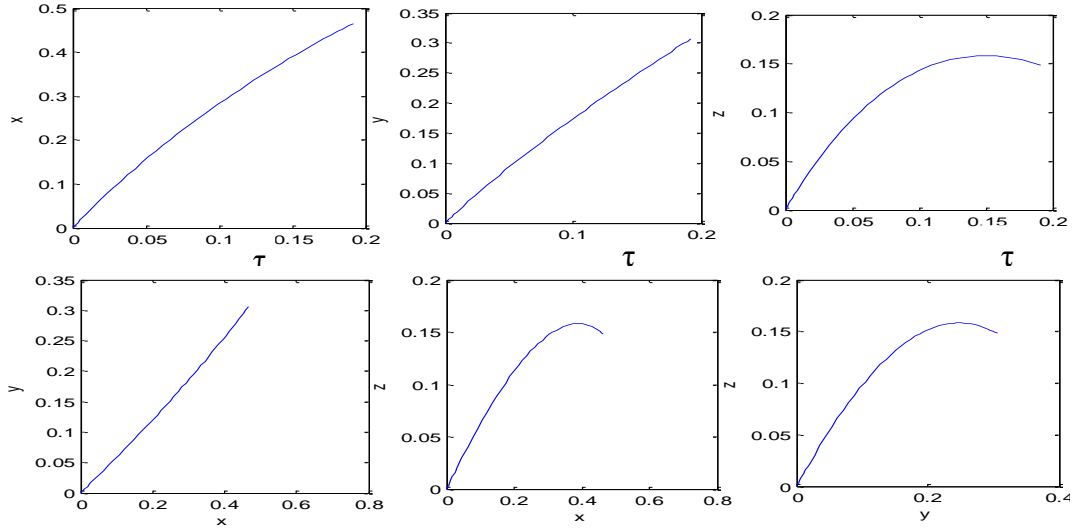
$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dX}{d\tau} - \frac{dZ}{d\tau}, Y(0) = 0, Y'(0) = 2.0342$$

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} = -\frac{dZ}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dY}{d\tau} - g \frac{\gamma^2}{\eta}, Z(0) = 0, Z'(0) = 2.3489$$

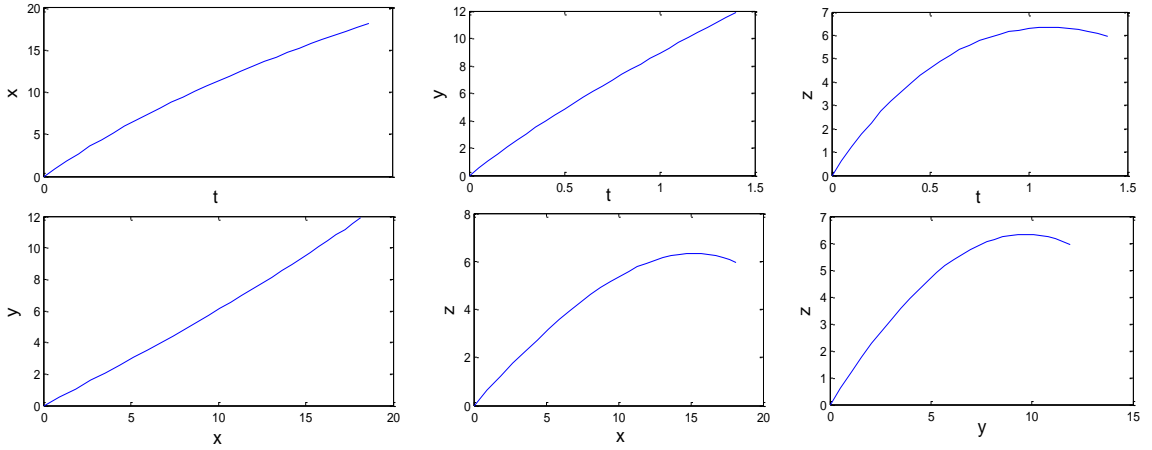
şeklindedir. Bu diferensiyel denklem sisteminin sayısal yöntemler yardımıyla elde edilen grafiğini inceleyelim. Eğer futbol topunun kaleye olan uzaklığı 18 m olarak alınırsa 39'da elde edilen denklem sisteminin sayısal çözümü ile topun $t = 1.39355$ s yol aldığı bulunur. Bu hareket süresi boyutsuz denklemdeki yeni zaman parametresi olan τ 'ya göre $t = \gamma\tau$ bağıntısı mevcut olduğundan top

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = \frac{1.39355}{7.2794} = 0.0895$$

süresince hareket eder. Bu sürede futbol topunun boyutsuz denklemler sonucunda elde edilen grafiği ile bir önceki bölümdeki grafiklerini karşılaştıralım.



Şekil 28. Boyutsuzlaştırılmış denklem için cismin yörünge grafikleri



Şekil 29. Boyutsuzlaştırma yapılmadan önceki denklemlerin yörünge grafikleri

Şekil 28 boyutsuzlaştırılmış denklemin grafiğini gösterirken Şekil 29 ise üç boyutlu uzayda elde edilen denklemin grafiklerini göstermektedir. Bu şekillerden boyutsuzlaştırılmış denklem ile esas denklemin grafiklerinin aynı davranışı sergiledikleri görülmektedir. Ayrıca topun yeni zaman değişkenine göre eksenlerde aldıkları mesafe sırasıyla $X = 0.4649$, $Y = 0.3062$ ve $Z = 0.1482$ 'dir. Boyutlu problem MATLAB ODE

çözümler yardımıyla çözümlerse elde edilen değerler sırasıyla $x = 18, y = 11.8576$ ve $z = 5.7378$ şeklindedir. Bu değerler karşılaştırılırsa

$$\frac{18}{0.4649} = 38.7180, \frac{11.8576}{0.3062} = 38.7250, \frac{5.7378}{0.1482} = 38.7166$$

olarak bulunur. Bu değerlerin boyutsuzlaştırılmamış denklemlerle elde edilen değerlerin yaklaşık olarak 38.71 katı olduğu görülür. Boyutsuzlaştırma işleminde eski uzunlukların, yeni uzunlukların $m/\varepsilon = 38.7387$ katı olması gerektiğinden sistemler birbiri ile uyumludur.

6.3. Boyutsuz Sistem İçin Taylor Yaklaşım

Bölüm 5.4'de yapıldığı gibi boyutsuzlaştırılmış denkleme başlangıç noktası komşuluğunda Taylor açılımı yardımı ile analitik yaklaşım uygulanabilir. Fakat Bölüm 5.4'den farklı olarak burada üç denklem mevcuttur ve her bir sistemin başlangıç noktası komşuluğunda Taylor açılımı ile analitik yaklaşım hesaplanmalıdır. Denklem (42) elde edilen boyutsuzlaştırılmış denklemler

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{dX}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} - \frac{dY}{d\tau}, \quad X(0) = 0, X'(0) = v_x(0) \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{dY}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dX}{d\tau} - \frac{dZ}{d\tau}, \quad Y(0) = 0, Y'(0) = v_y(0) \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} = -\frac{dZ}{d\tau} \sqrt{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2} + \frac{dY}{d\tau} - g \frac{\gamma^2}{\eta}, \quad Z(0) = 0, Z'(0) = v_z(0) \frac{\gamma}{\eta}$$

şeklindedir. Bu denklemler birinci mertebeden türeve indirgemek istenirse, yani

$$U := \frac{dX}{d\tau}, V := \frac{dY}{d\tau}, W := \frac{dZ}{d\tau}$$

olarak alınırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$U' = -U \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} - V, \quad U'(0) = v_x(0) \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$V' = -V \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} + U - W, \quad V'(0) = v_y(0) \frac{\gamma}{\beta}$$

$$W' = -W \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} + V - g \frac{\gamma^2}{\eta}, \quad W'(0) = v_z(0) \frac{\gamma}{\eta}$$

Buradaki başlangıç değerlerinde oluşacak karmaşıklığı önlemek için

$$U_0 := v_x(0) \frac{\gamma}{\alpha}, V_0 := v_y(0) \frac{\gamma}{\beta}, W_0 := v_z(0) \frac{\gamma}{\eta}$$

olarak tanımlanırsa ise elde edilen bağıntılara göre başlangıç değer problemi en son hali

$$\begin{aligned} U' &= -U\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} - V, & U'(0) &= U_0 \\ V' &= -V\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} + U - W, & V'(0) &= V_0 \\ W' &= -W\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} + V - g\frac{\gamma^2}{\eta}, & W'(0) &= W_0 \end{aligned} \quad (43)$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerde

$$\begin{aligned} F(U, V, W) &:= -U\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} - V \\ G(U, V, W) &:= -V\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} + U - W \\ H(U, V, W) &:= -W\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} + V - g\frac{\gamma^2}{\eta} \end{aligned} \quad (44)$$

fonksiyonlarını tanımlansın. Bölüm 5.4'de yapıldığı gibi bu fonksiyonların (U_0, V_0, W_0) başlangıç hızı komşuluğundaki Taylor açılımları

$$\begin{aligned} F(U, V, W) &= F(U_0, V_0, W_0) + \frac{\partial F}{\partial U} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (U - U_0) + \frac{\partial F}{\partial V} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (V - V_0) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial W} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (W - W_0) + F(\zeta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(U, V, W) &= G(U_0, V_0, W_0) + \frac{\partial G}{\partial U} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (U - U_0) + \frac{\partial G}{\partial V} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (V - V_0) \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial W} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (W - W_0) + F(\zeta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(U, V, W) &= H(U_0, V_0, W_0) + \frac{\partial H}{\partial U} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (U - U_0) \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial V} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (V - V_0) + \frac{\partial H}{\partial W} \Big|_{(U_0, V_0, W_0)} (W - W_0) + F(\zeta_3) \end{aligned}$$

şeklinde olduğundan buradaki terimlerdeki türev fonksiyonları bulunur ve başlangıç noktaları bu türev fonksiyonlarında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
F(U, V, W) &= -U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} - V_0 + \left(\frac{-2U_0^2 - V_0^2 - W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) (U - U_0) \\
&\quad + \left(-\frac{U_0 V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} - 1 \right) (V - V_0) + \left(-\frac{U_0 W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) (W - W_0) \\
&\quad + F(\zeta_1) \\
G(U, V, W) &= -V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} + U_0 - W_0 + \left(-\frac{U_0 V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} + 1 \right) (U - U_0) \\
&\quad + \left(\frac{-U_0^2 - 2V_0^2 - W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) (V - V_0) + \left(-\frac{V_0 W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} - 1 \right) (W - W_0) \\
&\quad + F(\zeta_2) \\
H(U, V, W) &= -W_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} + V_0 - g \frac{\gamma^2}{\eta} + \left(-\frac{U_0 W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) (U - U_0) \\
&\quad + \left(-\frac{W_0 V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} + 1 \right) (V - V_0) + \left(\frac{-U_0^2 - V_0^2 - 2W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) (W - W_0) \\
&\quad + F(\zeta_3)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
F(U, V, W) &= U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} + \left(\frac{-2U_0^2 - V_0^2 - W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) U + \left(-\frac{U_0 V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} - 1 \right) V \\
&\quad + \left(-\frac{U_0 W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) W + F(\zeta_1) \\
G(U, V, W) &= V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} + \left(-\frac{U_0 V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} + 1 \right) U + \left(\frac{-U_0^2 - 2V_0^2 - W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) V \\
&\quad + \left(-\frac{V_0 W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} - 1 \right) W + F(\zeta_2) \\
H(U, V, W) &= W_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} - g \frac{\gamma^2}{\eta} + \left(-\frac{U_0 W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) U \\
&\quad + \left(-\frac{W_0 V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} + 1 \right) V + \left(\frac{-U_0^2 - V_0^2 - 2W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \right) W + F(\zeta_3)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Boyutsuzlaştırma sonucunda elde edilen zaman değerleri üç boyuttaki esas denklemden çok daha kısa olduğundan hata terimleri ihmal edilebilir. Dolayısıyla elde edilen Taylor açılımları

$$U' = F(U, V, W)$$

$$V' = G(U, V, W)$$

$$W' = H(U, V, W)$$

denklemlerinde yerine yazılırsa elde edilen denklem sisteminin matris formu

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{-2U_0^2 - V_0^2 - W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} & -\frac{U_0V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} - 1 & -\frac{U_0W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \\ -\frac{U_0V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} + 1 & \frac{-U_0^2 - 2V_0^2 - W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} & -\frac{V_0W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} - 1 \\ -\frac{U_0W_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} & -\frac{W_0V_0}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} + 1 & \frac{-U_0^2 - V_0^2 - 2W_0^2}{\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} \\ V_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} \\ W_0\sqrt{U_0^2 + V_0^2 + W_0^2} - g\frac{\gamma^2}{\eta} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir lineer denklem sistemidir. Bu denklem sistemi Bölüm 4.4'teki gibi kolay analiz edilebilir bir problem değildir. Çünkü özdeğerleri hesaplanırken λ^3 içeren bir terim elde edileceğinden özdeğerleri veren denklemin köklerinin genel bir formunu elde etmek zordur. Bu durumda oluşacak karmaşıklığı önlemek için uygulanacak yöntemi bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 6.5: Örnek 6.4'te alınan başlangıç değerleri için Taylor yaklaşımı ile boyutsuzlaştırılmış probleme analitik bir yaklaşım uygulandığını göz önüne alalım. Örnek 6.4'deki başlangıç değerleri

$$U_0 = 3.5233, V_0 = 2.0342, W_0 = 2.3489$$

şeklinde olduğu için bu başlangıç değeri komşuluğunda, yukarıda yapılan Taylor açılımı sonucunda elde edilen denklemlerin matris formu yardımıyla çözülmesi gereken denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -7.3402 & -2.5256 & -1.7617 \\ -0.5256 & -5.5786 & -1.0171 \\ -1.7617 & -0.0171 & -5.8722 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16.5516 \\ 9.5562 \\ -2.3702 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu denklem sisteminin genel çözümü

$$y_{genel} = y_{homojen} + y_{özel}$$

şeklindedir. Burada $y_{homojen}$ çözümü

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -7.3402 & -2.5256 & -1.7617 \\ -0.5256 & -5.5786 & -1.0171 \\ -1.7617 & -0.0171 & -5.8722 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

denklem sisteminin çözümüdür. Burada

$$A = \begin{bmatrix} -7.3402 & -2.5256 & -1.7617 \\ -0.5256 & -5.5786 & -1.0171 \\ -1.7617 & -0.0171 & -5.8722 \end{bmatrix}$$

şeklinde alınırsa A matrisinin özdeğerleri

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

bağıntısını sağlayan λ değerleridir. Bu bağıntıdan karakteristik polinom

$$\lambda^3 + 18.7910 \lambda^2 + 112.3614 \lambda + 219.7599 = 0$$

şeklinindedir. Son denklemden ise özdeğerler yaklaşık olarak

$$\lambda_1 = -9.0884, \lambda_2 = -4.8513 + 0.8032i, \lambda_3 = -4.8513 - 0.8032i$$

elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$(A - \lambda_i I)V_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

özelliğini sağlayan $V_i = [V_{i,1}, V_{i,2}, V_{i,3}]^T$, $i = 1, 2, 3$ sütun vektörleridir. Bu özelliği sağlayan özvektörler yaklaşık olarak aşağıda verilmiştir.

$$\lambda_1 = -9.0884 \text{ 'e karşılık gelen özvektör } V_1 = [0.8460 \quad 0.2614 \quad 0.4648]^T$$

$\lambda_2 = -4.8513 + 0.8032i$ 'e karşılık gelen özvektör

$$V_2 = [-0.4048 - 0.3243i \quad -0.1937 + 0.4483i \quad 0.7017]^T$$

$\lambda_3 = -4.8513 - 0.8032i$ 'e karşılık gelen özvektör

$$V_3 = [-0.4048 + 0.3243i \quad -0.1937 - 0.4483i \quad 0.7017]^T.$$

Dolayısı ile verilen sistemin homojen kısmının çözümü

$$y_h = c_1 e^{-9.0884\tau} \begin{bmatrix} 0.8460 \\ 0.2614 \\ 0.4648 \end{bmatrix} + c_2 e^{(-4.8513 + 0.8032i)\tau} \begin{bmatrix} -0.4048 - 0.3243i \\ -0.1937 + 0.4483i \\ 0.7017 \end{bmatrix} \\ + c_3 e^{(-4.8513 - 0.8032i)\tau} \begin{bmatrix} -0.4048 + 0.3243i \\ -0.1937 - 0.4483i \\ 0.7017 \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. $e^{\mp it} = \cos(t) \mp i \sin(t)$ açılımı çözüme uygulanırsa

$$y_h = \begin{bmatrix} 0.8460 C_1 e^{-9.0884\tau} \\ 0.2614 C_1 e^{-9.0884\tau} \\ 0.4648 C_1 e^{-9.0884\tau} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} e^{-4.8513\tau} [n_1 \cos(0.8032\tau) + n_2 \sin(0.8032\tau)] \\ e^{-4.8513\tau} [n_3 \cos(0.8032\tau) + n_4 \sin(0.8032\tau)] \\ e^{-4.8513\tau} [0.7017 C_2 \cos(0.8032\tau) + 0.7017 C_3 \sin(0.8032\tau)] \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$C_1 = c_1, C_2 = c_2 + c_3, C_3 = i(c_2 - c_3),$$

$$n_1 = -0.4048C_2 - 0.3243C_3, n_2 = -0.4048C_3 + 0.3243C_2,$$

$$n_3 = -0.1937C_2 + 0.4483C_3, n_4 = (-0.1937C_3 - 0.4483C_2)$$

şeklindedir.

Özel çözüm ise

$$y_{\text{ö}} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde araştırılır ve denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -16.5516 \\ -9.5562 \\ 2.3702 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.3402 & -2.5256 & -1.7617 \\ -0.5256 & -5.5786 & -1.0171 \\ -1.7617 & -0.0171 & -5.8722 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü yardımıyla özel çözüm

$$y_{\text{ö}} = \begin{bmatrix} 1.9006 \\ 1.7124 \\ -0.9788 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Dolayısı ile genel çözüm

$$y = y_h + y_{\text{ö}}$$

dir. $y = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$ olduğundan verilen başlangıç değerleri ile

$$\begin{aligned} y(0) = \begin{bmatrix} U(0) \\ V(0) \\ W(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3.5233 \\ 2.0342 \\ 2.3489 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.9006 \\ 1.7124 \\ -0.9788 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8460C_1 - 0.4048C_2 - 0.3243C_3 \\ 0.2614C_1 - 0.1937C_2 + 0.4483C_3 \\ 0.4648C_1 + 0.7017C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8460 & -0.4048 & -0.3243 \\ 0.2614 & -0.1937 & 0.4483 \\ 0.4648 & 0.7017 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 = 3.1803, C_2 = 2.6357, C_3 = 0.0025$$

şeklinde elde edilir. Buradan cismin hız bileşenleri

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U(\tau) \\ V(\tau) \\ W(\tau) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.6904e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[-1.0677 \cos(0.8032\tau) + 0.8538 \sin(0.8032\tau)] \\ 0.8313e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[-0.5094 \cos(0.8032\tau) - 1.1822 \sin(0.8032\tau)] \\ 1.4781e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[1.8496 \cos(0.8032\tau) + 0.0018 \sin(0.8032\tau)] \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 1.9006 \\ 1.7124 \\ -0.9788 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısı ile boyutsuz denklemin konum bileşenleri iki tarafın τ 'ya göre integrali alınarak

$$\begin{bmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \\ Z(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2960e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[0.1859 \cos(0.8032\tau) - 0.2068\sin(0.8032\tau)] \\ -0.0915e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[0.1415 \cos(0.8032\tau) + 0.2203 \sin(0.8032\tau)] \\ -0.1626e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[-0.3711 \cos(0.8032\tau) + 0.0611\sin(0.8032\tau)] \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1.9006\tau + C_4 \\ 1.7124\tau + C_5 \\ 0.9788\tau + C_6 \end{bmatrix}$$

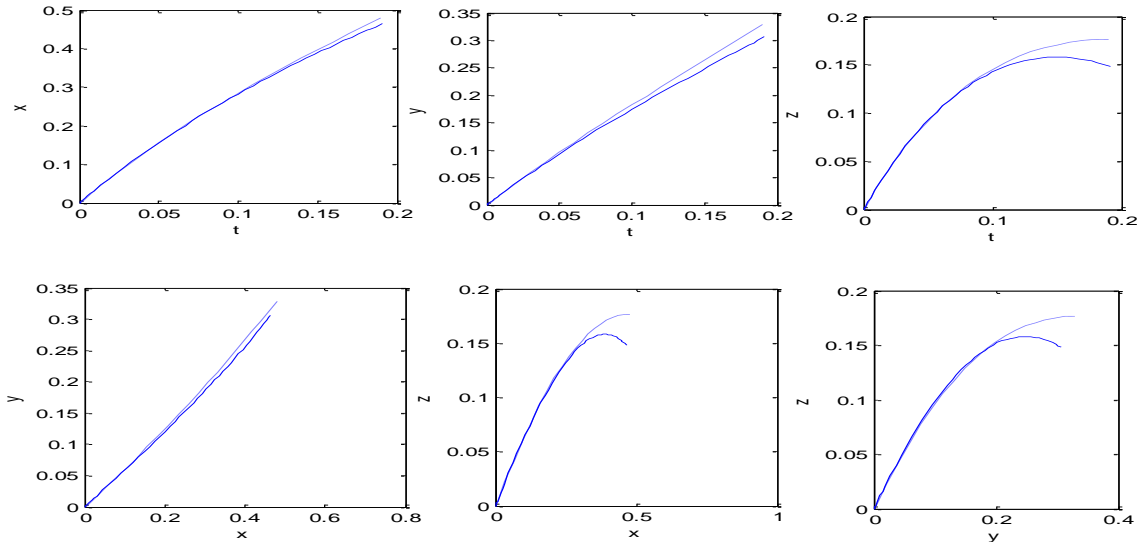
olarak bulunur. Cismin başlangıçtaki konumu orijin alındığından keyfi sabitler

$$C_4 = -0.1102, C_5 = 0.05, C_6 = -0.5338$$

olarak elde edilir. Dolayısı ile genel çözüm

$$\begin{bmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \\ Z(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2960e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[0.1859 \cos(0.8032\tau) - 0.2068\sin(0.8032\tau)] \\ -0.0915e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[0.1415 \cos(0.8032\tau) + 0.2203 \sin(0.8032\tau)] \\ -0.1626e^{-9.0884\tau} + e^{-4.8513\tau}[-0.3711 \cos(0.8032\tau) + 0.0611\sin(0.8032\tau)] \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1.9006\tau - 0.1102 \\ 1.7124\tau + 0.05 \\ -0.9788\tau - 0.5338 \end{bmatrix}$$

şeklinde. Elde edilen genel çözüm, cismin Taylor açılımı ile elde edilen analitik bir yaklaşımdır. Ayrıca Örnek 6.4'te bulunan sayısal çözüm ile elde edilen analitik yaklaşımın grafikleri aşağıda verilmektedir. Aşağıda noktalarla gösterilen grafik, analitik yaklaşımı gösterirken düz çizgiler ile gösterilen grafik MATLAB ODE çözümleri ile elde edilen sayısal çözümü göstermektedir.



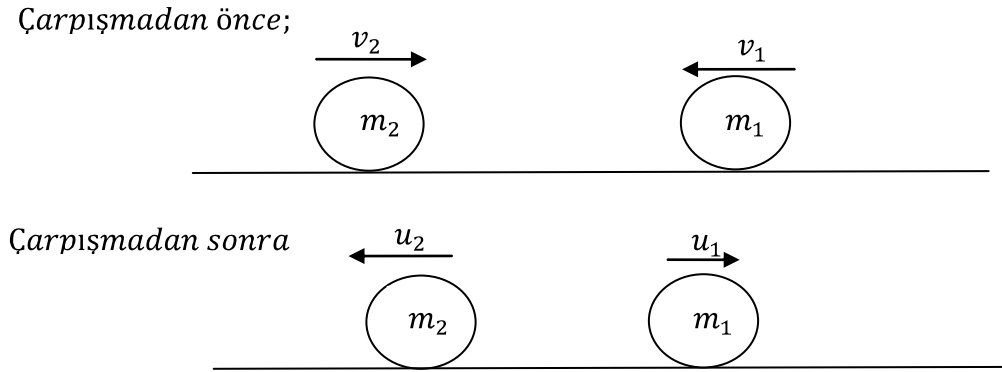
Şekil 30. Boyutsuzlaştırılmış denklem sistemin analitik ve sayısal çözümü

6.4. Newton Sıçrama (Restitution) Yasası

Newton sıçrama yasasına göre, eğer iki cismin çarpışmadan önceki hızları sırasıyla v_1 , v_2 ve çarpışmadan sonraki hızları sırasıyla u_1 , u_2 ise hızları arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$u_1 - u_2 = e_1(v_1 - v_2) \quad (45)$$

Buradaki e_1 sabitine “sıçrama sabiti” adı verilir. Bu yasaya göre sıçrama sabitinin, cisimlerin çarpıştıktan sonraki hızları farkının çarpışmadan önceki hızları farkına oranı olduğu görülmektedir. Bu değer ideal elastik çarpışmalar için 1’e çok yakın iken, daha az elastik çarpışmalar için 1’den küçük sifira yakın bir değere eşittir.



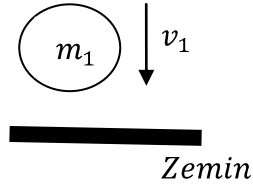
Şekil 31. İki cismin çarpışmadan önce ve sonraki hızları

Şekil 32’deki gibi zemine dik bir şekilde bırakılan top göz önüne alınsın. Eğer topun zemine vurmadan önceki hızı v_1 , zeminden sıçradığı andaki hızı u_1 ise bu takdirde Newton sıçrama yasasına göre

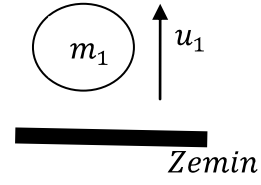
$$u_1 = e_1 v_1 \Rightarrow e_1 = \frac{u_1}{v_1} \quad (46)$$

dir.

Zemine vurmadan önce



Zemine vurduktan sonra



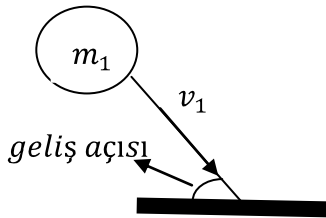
Şekil 32. Bir top zemine dik olarak bırakılırsa çarpmadan önceki ve çarptıktan sonraki hızı

(47) bağıntısından görüldüğü üzere bir top zemine düz bir şekilde çarptığında hızında e_1 katı kadar bir değişim gerçekleşir. Ayrıca Şekil 33'deki gibi, eğer bir top zemine dik bir şekilde gelmiyorsa bu durumda Newton sıçrama yasasına göre sıçramadan önceki ve sonraki hızları arasında

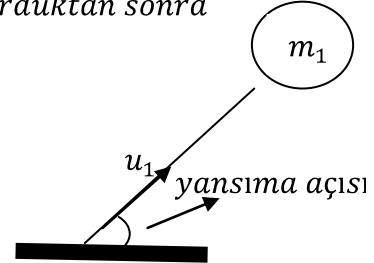
$$u_1 = e_1 v_1$$

bağıntısı mevcuttur. Aynı zamanda top, geliş açısı ile eşit açı yapacak şekilde yansır.

Zemine vurmadan önce



Zemine vurduktan sonra



$$geliş\ açısı = yansıma\ açısı$$

Şekil 33. Bir topun zeminden bir açı yaparak yansıması

6.4.1. Durma Anına Kadar Futbol Topu Yörünge Modeli

Bir futbol topuna belli bir hızla $+y$ yönünde vurulduğunu göz önüne alalım ve topun durma anına kadar nasıl bir yol alacağını inceleyelim. Bunun için ilk olarak üç boyutlu uzayda elde edilen (38) denklemleri Euler yöntemi yardımıyla çözmek suretiyle topun yere

düşme zamanı sayısal olarak bulunur. Bu değer t_1 olsun. Bu t_1 anında topun konum bileşenleri ve hız bileşenleri olan

$$(x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \text{ ve } (v_x(t_1), v_y(t_1), v_z(t_1))$$

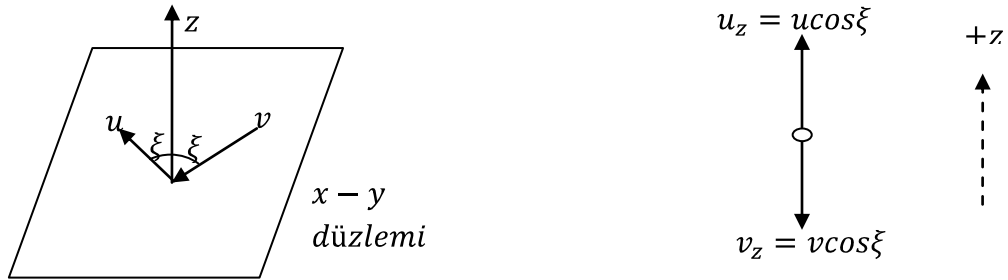
değerleri belirlenir. Newton sıçrama yasasına göre, sıçrama anında cismin hız vektöründe e sabiti kadar değişim meydana geldiğinden hız vektörü e_1 sabiti ile çarpılır. Fakat burada dikkat edilmesi gereken nokta, Şekil 34 ve 35'de görüleceği üzere, cismin sıçrama anındaki hız bileşeninin z yönündeki bileşeni yere çarptığı andaki yönün tersi yönde olduğudur. Dolayısıyla sıçrama anında cismin yeni hız değerleri

$$(e_1 v_x(t_1), e_1 v_y(t_1), -e_1 v_z(t_1))$$

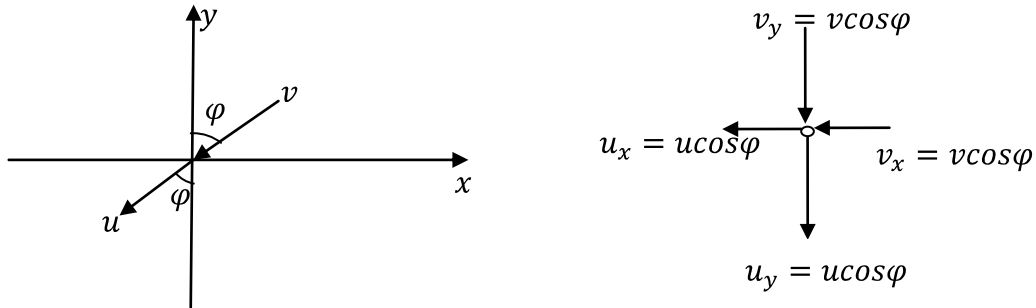
olarak alınır. Elde edilen konum vektörü ve hız vektörü topun yeni başlangıç değerleri olarak alınır ve cismin bir sonraki sıçrama anına kadar olan yörüngesi Euler yöntemi ile belirlenir. Bu şekilde devam edilerek

$$|\vec{v}| < \varepsilon$$

olana kadar cismin yörüngesi elde edilir.



Şekil 34. Futbol topunun zemine vurduktan önceki ve sonraki z eksenindeki yaptığı açıları



Şekil 35. Zemine vurarak yansıyan futbol topunun $x - y$ düzlemindeki açıları

Hız bileşenleri için geçerli olan durum dönme vektörü bileşenleri için de geçerlidir. Yani topun yere vurduğu andaki dönme vektörü

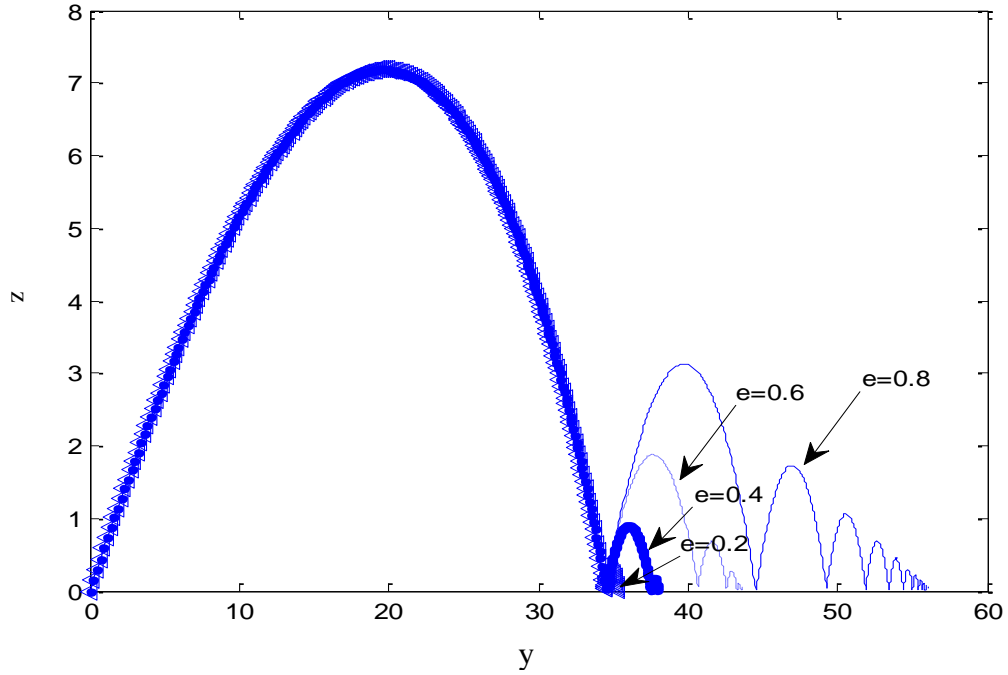
$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

ise topun sıçradığı andaki dönme vektörü

$$\omega_2 = e_2 \vec{\omega} = (e_2 \omega_x, e_2 \omega_y, e_2 \omega_z)$$

şeklindedir. Fakat burada topun sıçramadan önceki dönme yönü ile sıçradıktan sonraki dönme yönü değişmemektedir.

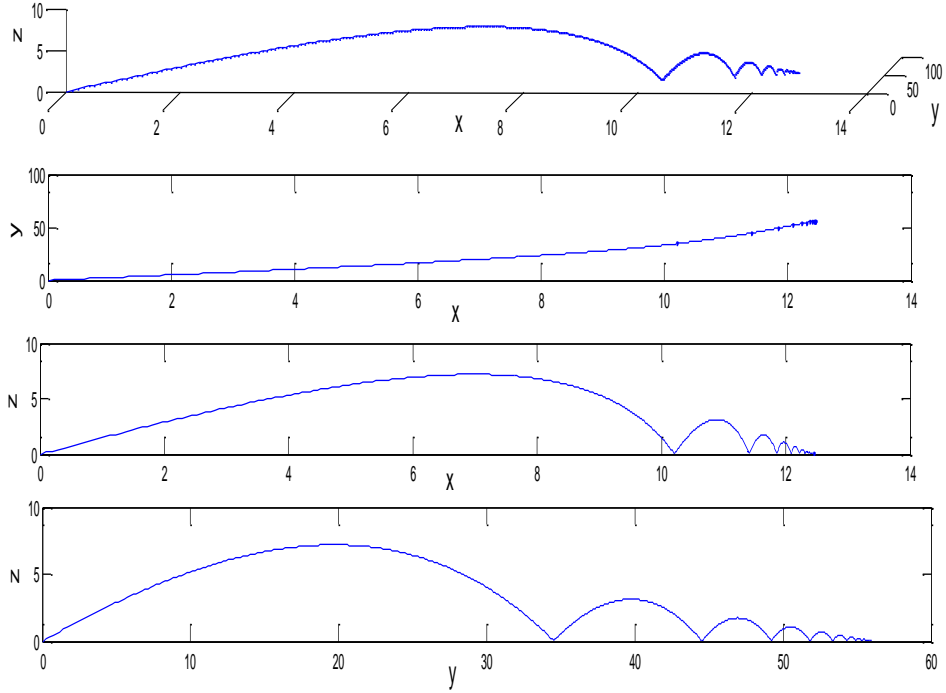
Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta ise yukarıda kullanılan e_1 ve e_2 sabit değerlerinin ne olacağıdır. Bu değer topun bulunduğu ortama göre değişir. Örneğin, bir topun beton bir zemine bırakıldığında gerçekleşen sıçrama yüksekliği, topun çim zemine vurduğu andaki sıçrama yüksekliğinden fazladır. Benzer şekilde toprak zemindeki sıçrama yüksekliği ile çim zemindeki sıçrama yüksekliği farklıdır. Bu gibi durumlar göz önüne alındığında futbol topunun bulunduğu ortama göre alınan e_1 sabitlerinin de farklılık gösterdiği görülmektedir. Bu farklılıklardan oluşan yörünge değişimini gözlemlemek için dönmeye her bir sıçrama anındaki değişim katsayısı olan e_2 değeri 0.4 alınmak suretiyle topun farklı $0 < e_1 < 1$ değerlerindeki yörüngeleri incelenebilir.



Şekil 36. Farklı sıçrama sabitleri için durma anına kadar yörünge grafikleri

Şekil 36'daki grafik e_1 değerinin 0.2 ile 0.8 arasında aldığı değerlere göre topun yörüngelerini göstermektedir. Beklendiği gibi e_1 değeri arttıkça her bir sıçrama anında alınan v değeri arttığı için y yönünde aldığı yol ve sıçrama yüksekliğinin arttığı görülür. Bu sebeple topun bulunduğu zemin topun yörüngesinin incelenmesi bakımından önemlidir.

Örnek 6.6: Futbol topunun çimen bir zeminde hareket ettiği düşünülün. Bir futbolcunun topa saatte 30 m'lik bir ilk hız ile $+y$ yönünde vurduğu ve bu hız vektörünün y eksenini ile pozitif yönde 22.5° 'lik açı ve z eksenini ile pozitif yönde 30° 'lik açı yaptığı ele alınsın. Ayrıca topun başlangıçta 8 devir/s'lik bir açısal hız ile $+z$ yönünde döndüğü kabul edilsin. Alınan başlangıç değerleri için topun hız değeri $\varepsilon = 1$ değerinden küçük olana kadar yörüngesi incelensin. Burada topun yerden her sıçramasında topun hızında azalmaya neden olacak e_1 sabiti 0.8 ve dönme için de bu değer 0.2 olduğu düşünülün. Bu durumda aşağıdaki yörünge grafikleri elde edilir.



Şekil 37. $e_1 = 0.8$ değeri için futbol top yörüngesi

6.5. Serbest Vuruş Hareketi

Bu bölümde topun başlangıçtaki hız büyüklüğü v_0 'ın ve dönme vektörü $\vec{\omega}$ 'nın sabit olduğu göz önüne alındığında serbest vuruşta topun kaleyi bulması için topa verilmesi gereken başlangıç hız vektörünün $x - y$ düzlemiyle yaptığı pozitif yönlü yükselme açısının ve $x - y$ düzleminde y eksenine yaptığı pozitif yönlü açının nasıl alınması gerektiği incelenmektedir. Fakat bazı serbest vuruşlarda top kaleyi bulduğu halde kaleciler tarafından rahatlıkla yakalanabileceği noktalara gitmektedir. Bunun sonucunda kullanılan serbest vuruş, skor üretmeye katkı sağlamamaktadır. Bu durumu engellemek için topu kalecinin bulunduğu köşenin ters köşesindeki 90 diye tabir edilen, yan direk ile üst direğin kesişim noktasına göndermek en iyi yöntemdir. Böylece kalecinin topa yapacağı hamleler topu yakalaması için genelde yeterli olmayacaktır. Bu yüzden topa vurulacak açılar belirlerken ilk amaç topu 90'a atmak olmalıdır. Fakat bu durumda başlangıç hız büyüklüğü sabit tutulduğundan topu 90'a atmak için elde edilen başlangıç hız vektörünün eksenlerle yaptığı açılar, toptan 9.15 m uzaklıkta kurulan baraj üzerinden geçmesi için yeterli olmayabilir. Bu durumda top baraja çarparak geri döner. Dolayısıyla böyle durumlarda top barajın üstünden geçirilmek istenirse topa ya daha küçük bir hız büyüklüğü verilerek atılmalı ya da topun kaleye olan uzaklığı arttırılmalıdır.

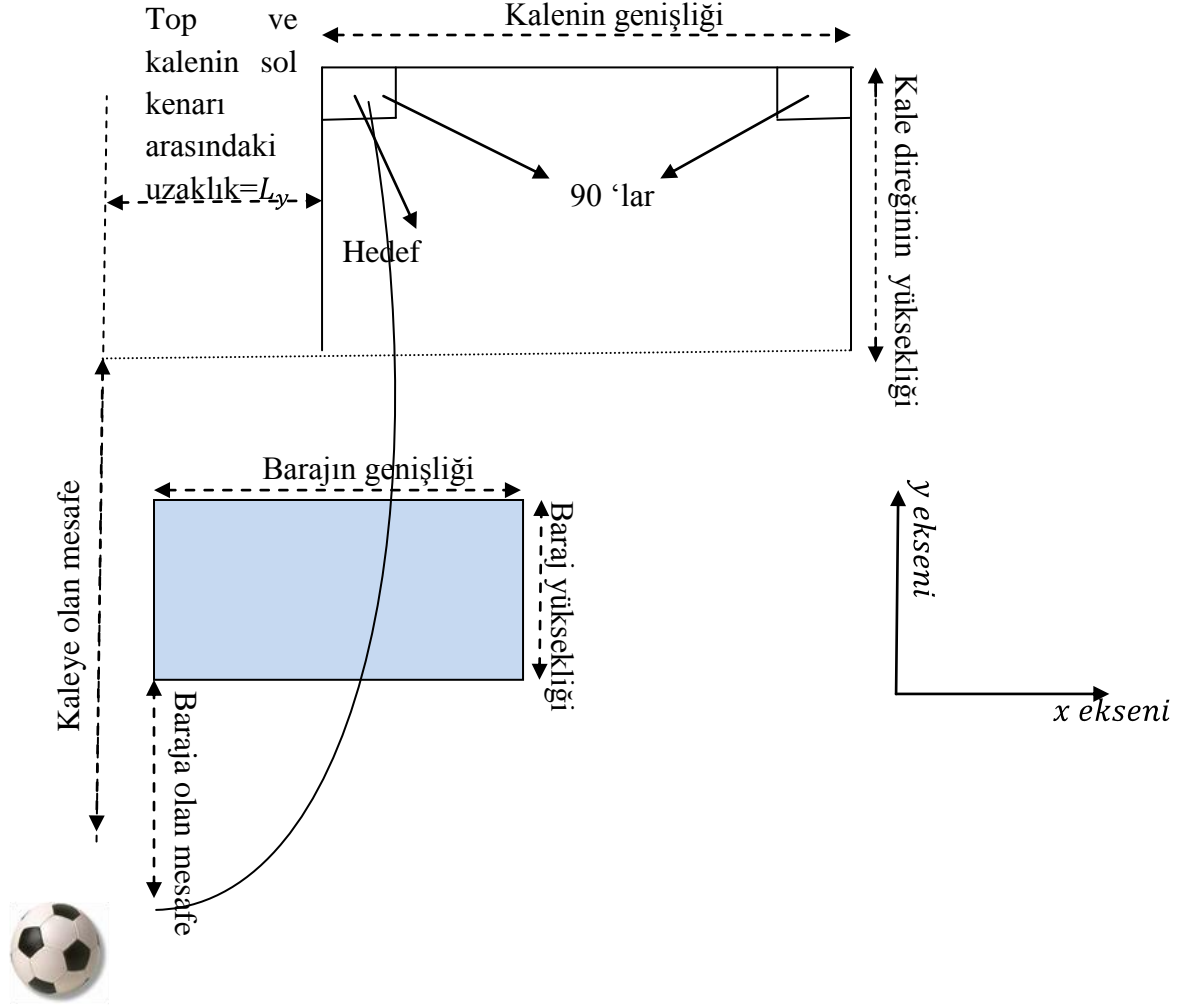
Bu çalışmada topun 90'a gitmesi için gerekli açılar bulmada kullanılacak yöntem, Eğik Atış yöntemi olarak bilinen sayısal yöntemdir. Bu yöntem ile topun 90'a gitmesi için gerekli olan açılar eğik atış yöntemi ile yaklaşık olarak bulunur ve bu açılar için topun barajı geçip geçmediği kontrol edilir. Eğer top barajı geçip doksana gitmiş ise iyi bir atış yapıldığı fakat barajı geçememiş ise topa daha az hız büyüklüğü verilmesi gerektiği veya kaleye olan mesafenin arttırılarak daha iyi bir vuruşun yapılabileceği belirtilmelidir. Bu durumları incelerken örneklerde topun Şekil 38'deki gibi, kalenin sol yan direğinin solunda olduğu kabul edilir ve topun sol direğin doksanına gitmesi için gerekli olan açılar eğik atış yöntemi ile sayısal olarak bulunmaya çalışılır. Şekil 38'deki parametrelerin bazıları futbol kuralları içerisinde belirlenmiştir ve bu değerler Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Futboldaki standart parametreler

Parametreler	Tipik Değerler
Kale genişliği	7.32 m

Tablo 2'nin devamı

Kale direğinin yüksekliği	2.44 m
Baraj ile top arasındaki mesafe	9.15 m



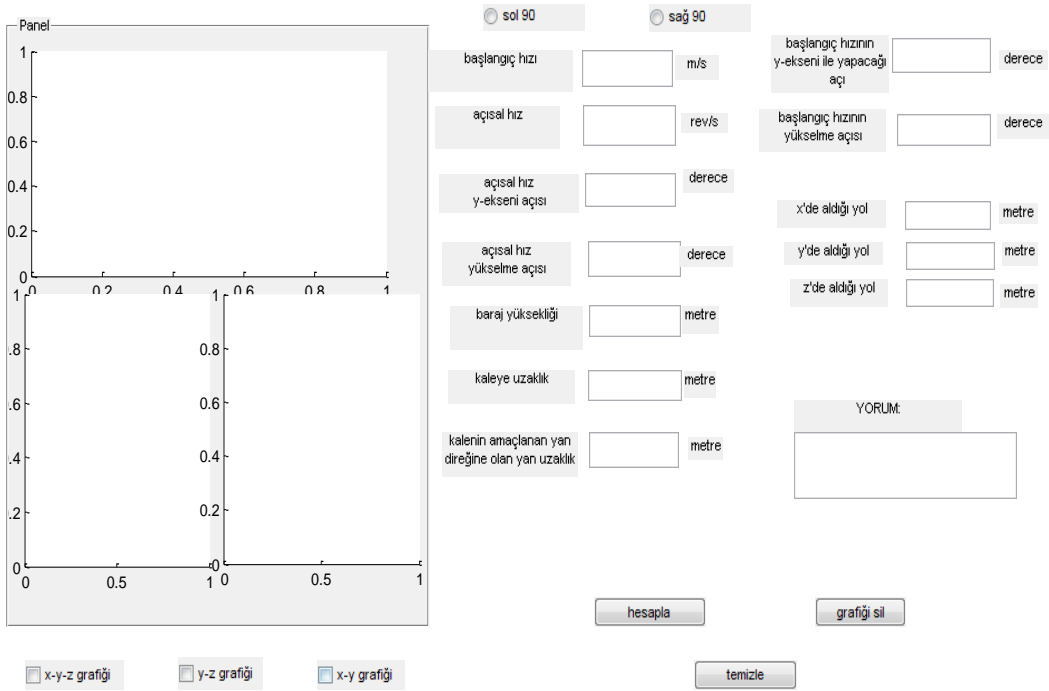
Şekil 38. Frikik atışı yörünge şematifi

Bu çalışmada eğik atış yöntemi için aşağıdaki algoritma kullanılmaktadır.

1. Verilen parametreler: $v_0, \vec{\omega}$, top ve kale arasındaki matematiksel uzaklık, baraj yüksekliği ve kaleye olan mesafe
2. Başlangıç hız vektörünün $x - y$ düzlemi ile yaptığı yükselme açısı ve $x - y$ düzlemindeki izdüşümünün y ekseni ile yapılan açısı sıfır al.

3. Euler yöntemiyle cismin kaleye ulaştığındaki x ve z eksenlerinde aldıkları yolu belirle. Elde edilen değerler x_1, z_1 olsun.
4. Yükselme açısını ve izdüşüm açısını belirle.
4. a. Eğer $(2.44 - z_1) < eps$ ise yükselme açısı uygun.
4. b. Eğer $(2.44 - z_1) > eps$ ise yükselme açısını bir veya yarım derece arttır.
4. c. Eğer $(x_1 - L_y) < eps$ ise $x - y$ düzleminde y eksenini ile yapılan açı uygun.
4. d. Eğer $(x_1 - L_y) > eps$ ise $x - y$ düzleminde y eksenini ile yapılan açıyı bir veya yarım derece arttır ve 3'e git.
5. Eğer $(2.44 - z_1) < eps$ ve $(x_1 - L_y) < eps$ ise topun barajı geçip geçmediğini kontrol et.

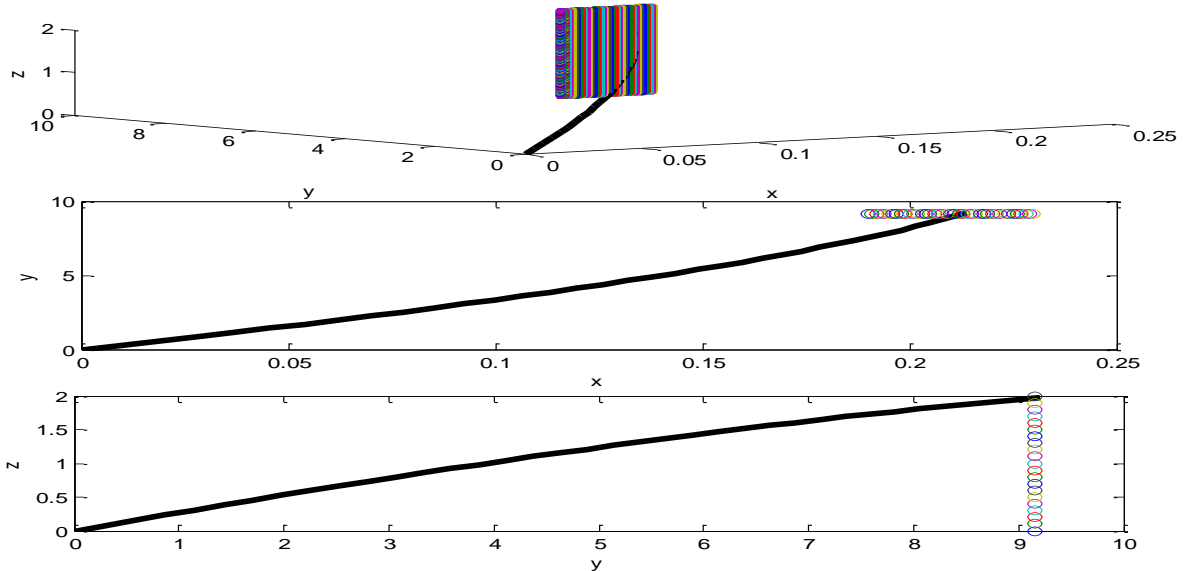
MATLAB yardımıyla yapılacak bu işlem için bir MATLAB GUI programının şekli aşağıda gösterilmektedir. Bu program sayesinde topa verilen başlangıç parametrelerine bağlı olarak uygun açılar hesaplanır ve elde edilen değerlere bağlı olarak cismin yörüngesi ilgili şekilde görülür.



Şekil 39. Frikik hareketi için MATLAB GUI program kullanıcı arayüzü

Örnek 6.7: Kaleye 18 m uzaklıktaki bir topa 30 m/s'lik bir ilk hız ile vurulduğu göz önüne alınsın. Topun bulunduğu nokta, kalenin sol direğinin 0.2 m sol tarafında olsun. Bu atış için topa +z yönünde 5 devir/s'lik bir falso verilsin. Bu durumda topun 90'a gitmesi için topa verilmesi gereken başlangıç hızının eksenlerle yaptığı açılar ne olmalıdır?

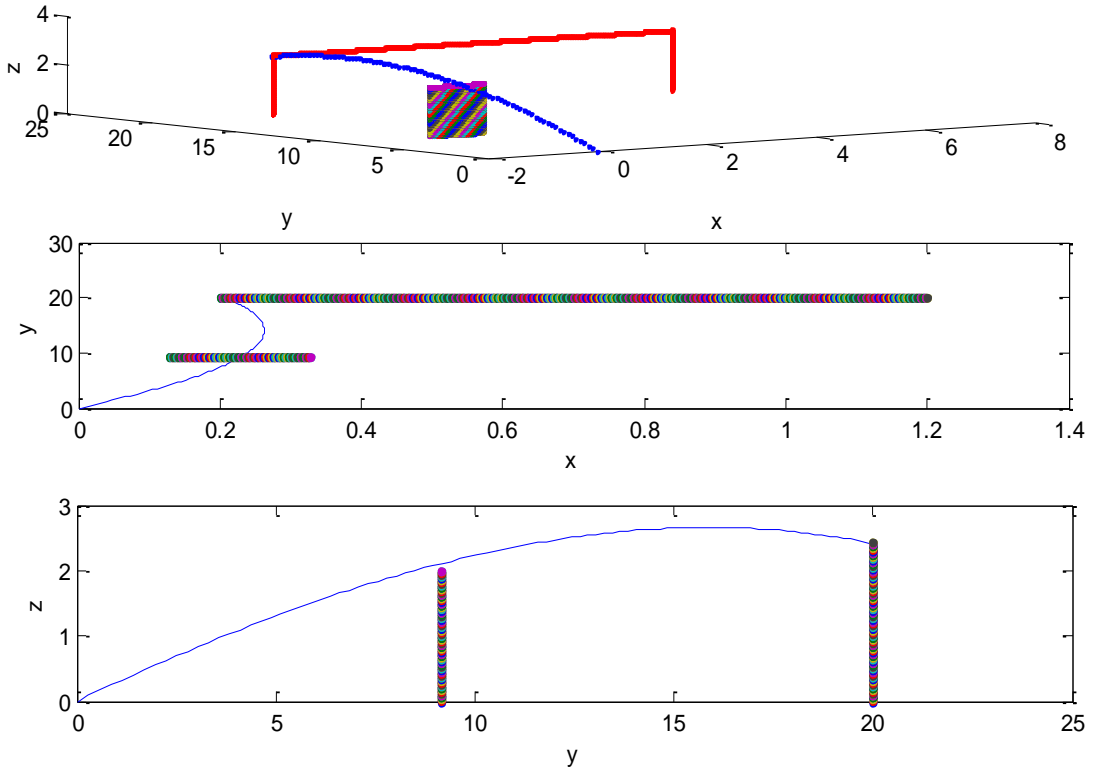
Eğer serbest vuruşta topun önüne bir baraj kurulmadığı düşünülürse eğik atış yöntemi ile topun 90'a gitmesi için gerekli açılar, $x - y$ düzleminde y eksenine yaptığı açının 1.9° ve z eksenine yaptığı yükselme açısının ise 15.7° olduğu hesaplanır. Fakat frikik hareketinde toptan 9.15 m uzaklıkta baraj kurulacağından topun bu alınan açılar ile barajın üzerinden geçmesi gerekmektedir. Elde edilen başlangıç açıları ile vurulacak top, 2 m yüksekliğe sahip olduğu düşünülen barajın üzerinden geçemez. Dolayısıyla top kaleye gitmeden barajdan geri döner. Burada bulunan $x - y$ düzlemiyle yapılan yükselme açısı artırılarak topun barajın üzerinden geçirilebileceği de düşünülebilir. Fakat bu durumda topun kalenin üzerinden dışarı çıkacağı gözlemlenir. Örneğin, topa $x - y$ düzlemiyle 16° 'lik bir açı verildiği takdirde top baraja ulaştığında z ekseninde aldığı mesafe 2.039 m olacağından top barajı geçer. Fakat top 18 m ilerideki kaleye gittiğinde z ekseninde aldığı yol 2.466 m olarak bulunur. Kalenin yerden yüksekliği 2.44 m olduğundan top kale direğini sıyrarak dışarı çıkar.



Şekil 40. Örnek 6.7'de barajdan dönen topun yörüngesinin grafiği

Örnek 6.8: Kaleye olan mesafe 20 m alınarak topun Örnek 6.7'deki başlangıç hızı ve dönme ile topun amaçlanan hedefe ulaşip ulaşmadığını araştıralım.

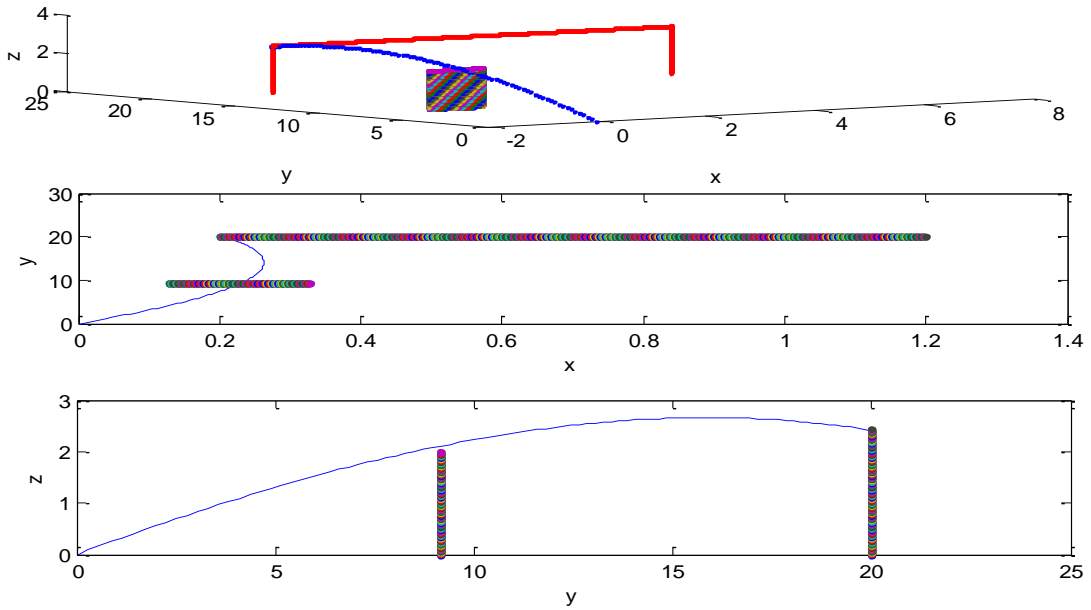
Bu durumda topun 90'a gitmesi için gerekli olan minimum açıların eğik atış yöntemiyle y –ekseniyle yaptığı açının 2° ve $x - y$ düzemiyle yaptığı yükselme açısının yaklaşık olarak 16.2° olduğu gözlemlenir. Bu açılar ile 0.92 sn sonunda topun sol direk ile üst direğin kesiştiği noktadan 90'a gittiği görülür. Fakat bu durumda topun barajın üzerinden geçip geçmediği kontrol edilmelidir. Bu başlangıç hız değerleri ile top y eksenı boyunca 9.15 m'ye ulaştığı andaki yerden yüksekliği 2.0783 m olarak elde edilir. Barajın yüksekliği 2 m olarak kabul edildiğinden top barajın üzerinden geçerek hedefe ulaşır. Örnek 6.7'de alınan başlangıç hızı için kaleye olan mesafe iyi bir vuruş için yeterli olmazken aynı hız büyüklüğünde kaleye olan mesafenin arttırılmasının iyi bir yöntem olduğu görülür.



Şekil 41. Örnek 6.8. hesaplanan başlangıç açıları için cismin yörünge grafiği

Örnek 6.9: Örnek 6.7’de alınan başlangıç hızı için kaleye olan mesafe arttırılarak topun barajın üzerinden geçerek kaleyi bulacağı Örnek 6.8’de gösterildi. Fakat kaleye olan uzaklığı arttırmak yerine başlangıç hızının büyüklüğünde değişiklik yapılarak top kaleye ulaşabilir mi?

Eğer hız büyüklüğü arttırılırsa topun 90’a gitmesi için gerekli olan yükselme açısı azaltılmalıdır. Fakat Örnek 6.7’de daha büyük yükselme açısı için top barajda kaldığından yükselme açısı azaltıldığında da topun barajı geçmediği görülür. Dolayısıyla topun hızının büyüklüğünün arttırılması iyi bir atış için doğru bir tercih değildir. Örnek 6.7’de alınan başlangıç hızı 25 m/s olarak alınsın. Bu hız büyüklüğünde topun 90’a gitmesi için gerekli olan açılar eğik atış yöntemi ile yükselme açısı 19.5° ve $x - y$ düzleminde y eksenine yaptığı açı 2.2° olarak belirlenir. Bu durumda top yaklaşık olarak 0.98 s sonunda amaçlanan noktaya gider. Alınan açılar için topun barajı geçip geçmediği kontrol edilirse, top 9.15 m uzaklıktaki baraja geldiğinde z ekseninde aldığı mesafe 2.363 m olacağından top barajın üzerinden geçerek hedefe ulaşır. Sonuç olarak, eğer belli bir hızda kaleye atılan topun barajdan geri döndüğü dikkate alınırsa topun barajın üzerinden geçmesi için, açısal hız vektörü sabit kalmak kaydıyla ya hızın büyüklüğü azaltılmalı ya da kaleye olan mesafe arttırılmalıdır.



Şekil 42. Örnek 6.9’da hesaplanan başlangıç açıları için cismin yörüngesi

7. SONUÇLAR

❖ Falsonun top yörüngesi üzerinde önemli bir faktör olduğu yörünge modeli ile gözlemlendi.

❖ Adomian Ayrışım Yöntemi yardımıyla yörünge modelinin yaklaşık çözümleri elde edildi.

❖ Newton Sıçrama (Restituion) Yasası ile topun durma anına kadar olan yörüngesini belirlemek üzere mevcut model geliştirildi.

❖ Futbol eğitim seminerlerinde de kullanılacak kullanıcı etkileşimli serbest vuruş yörünge arayüzü MATLAB GUI yardımıyla tasarlandı. Uygun başlangıç parametrelerini kabul eden arayüz, arka planda yörünge modelini adım adım çizerek top yörüngesini zamanın fonksiyonu olarak arayüz üzerinde göstermektedir.

8. ÖNERİLER

Bu çalışmada falsolu bir topun yörüngesi sabit açısal hız altında incelendi. Fakat açısal hız değişken olduğu durumlar da mevcuttur. Açısal hızın değişken olduğu durumda futbol topunun daha gerçekçi yörüngesi elde edilebilir. Top yüzeyinin dikişle birleştirilmiş bileşenler veya yapıştırılmış farklı sayılardaki bileşenlerden oluşması durumuna göre top yörüngesinin nasıl değişebileceği incelenebilir. Top yüzeyindeki ince hava katmanının falsolu top ile birlikte hareket ettiği varsayımının bütün hızlarda geçerli olup olmadığı araştırılabilir. Falsolu topta özellikle yüksek hızlarda gözlenen ani yön değiştirme nedeni olan faktör incelenerek, bu olayı da modelleyecek biçimde yörünge modeli geliştirilebilir.

9. KAYNAKLAR

- Barber, S., Chin, S. B. ve Carré, M. J., 2008. Sports ball aerodynamics: A numerical study of the erratic motion of soccer balls, Computer and Fluids, 38,1091-1100.
- Bray, K., “if you can't bend it, model it!”.
<http://plus.maths.org/issue40/features/bray/index.html> 28 Ağustos 2009.
- Bray, K. ve Kerwin, D. G., 2003. Modelling the flight of a soccer ball in a direct free kick, Journal of Sports Sciences, 21, 75–85.
- Carre', M. J., Asai, T., Akatsuka, T. ve Haake, S. J., 2002. The curve kick of a football II: flight through the air, Sports Engineering, 5, 193–200.
- Cook, B. G. ve Goff, J. E., 2006. Parameter space for successful soccer kicks, European Journal OF Physics. 27, 865–874.
- Çengel, Y.A ve Cimbala, J.M., Tahsin, 2008. Akışkanlar Mekaniği Temelleri ve Uygulamaları, Birinci Baskıdan Çeviri, Güven Bilimsel, İzmir.
- Giordano, N.J. ve Nakaniski, H., 2006. Computational Physics, Second Edition, PEARSON Prentice Hall, United States of America.
- Goff, J. E., Carré, M., J., 2009. Trajectory analysis of a soccer ball, American Association of Physics Teachers, 77, 11, 1020-1027.
- Griffiths, I., Evans, C. and Griffiths, N., 2005. Tracking the flight of a spinning football in three dimensions, Measurement Science and Technology, 16, 2056–2065.
- Mehta, R. D., 1985. Aerodynamics of Sports Balls, Annual Review of Fluid Mechanics, 17, 151-189.
- Neilson, P., Jones, R., Kerr, D. ve Sumpter, C, 2004. An image recognition system for the measurement of soccer ball spin characteristics, Measurement Science and Technology, 15, 2239-2247.
- Palmer, G., 2005. Physics for Game programmers, Apress, United States fo America.
- Spathopoulos, V. M., 2009. A Spreadsheet Model for Soccer Ball Flight Mechanics Simulation, Computer Application in Engineering Education, DOI: 10.1002/cae.20331.
- Zhu, Y., Chang, Q. ve Wu, S., 2005. A New Algorithm for calculating Adomian Polynomials, Applied Mathematics and Computation 169, 402-416.
- URL-1, http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient, Drag Coefficient, 15 EKİM 2009.

10.EK

Adomian Ayrışım Yöntemi

Adomian ayrışım yöntemiyle ilgili olarak aşağıda verilen bilgiler Applied Mathematics and Computation adlı dergide yayınlanan "A New Algorithm for calculating Adomian Polynomials" adlı makaleden alınmıştır.(Zhu vd., 2005)

Adomian yöntemi fiziksel, kimyasal, biyolojik ve matematiksel birçok lineer ve lineer olmayan probleme uygulaması olan geniş bir sınıftır. Adomian ayrıştırma yöntemi, $u(x, t)$ fonksiyonun terimlerini $u_n(x, t)$ bileşenlerinin sonsuz toplamına ayrıştırır. Yani,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

olarak çözüm araştırılır. Ayrıca ayrıştırma metodu nonlinear terim olan $F(u(x, t))$ 'yi $A_0(u_0) + A_1(u_0, u_1) + A_2(u_0, u_1, u_2) + \dots$ olacak şekilde ayrıştırır. Yani,

$$F(u(x, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$$

olarak ayrışım mevcuttur. Buradaki, A_n terimleri Adomian polinomları olarak adlandırılır. Bu polinomların bulunması için birçok çalışma yapıldı ve algoritmalar geliştirildi. Bu çalışmada nonlinear sistemler için Adomian polinomlarının bulunması için kolay bir yol verilerek algoritma oluşturulmaktadır. Bu algoritma bu çalışmanın içerisinde kullanılmaktadır.

Adomian Yaklaşımlarının Bulunması İçin Algoritma

İlk olarak aşağıdaki teoremi ele alalım.

Teorem: $F(u) = Nu$ şeklinde bir nonlinear fonksiyon ve $u(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k$ polinomu u 'nun parametrize edilmiş gösterimi olsun. Bu takdirde

$$\frac{\partial^n F(u(\alpha))}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

dır.

İspat: $u(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k$ olduğundan

$$u(\alpha) = \sum_{k=0}^n \alpha^k u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^k u_k$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n F(u(\alpha))}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu bağıntıdan ise

$$\frac{\partial^n F(u(\alpha))}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

olarak elde edilir. ■

Bu teorem yardımıyla Adomian polinomlarının nasıl hesaplanacağı aşağıda verilmektedir.

$$Nu(\alpha) = F(u(\alpha)) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k A_k$$

ve $u(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k$ şeklinde araştırıldığından

$$F(u(\alpha)) = F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k A_k$$

şeklinde yazılır. Bu F fonksiyonun her iki tarafının α parametresine göre n . mertebeden ($n = 1, 2, 3, \dots$) türevi alınır ve α yerine sıfır yazılırsa, yani

$$\frac{\partial^n F(u(\alpha))}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k A_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

olarak alınırsa teoremden dolayı sonsuz toplam sonlu toplama çevrilebilir. Böylece

$$\frac{\partial^n F(u(\alpha))}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^n \alpha^k A_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

elde edilir. Ayrıca u ve v fonksiyonlarının sonsuz toplamları yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^n \alpha^k A_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

elde edilir. Teoremden dolayı

$$\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

olduğundan

$$\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^n \alpha^k A_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

olarak bulunur. Bu denklemlerde

$n = 0$ alınırsa A_0 ; $n = 1$ alınırsa A_1 ; $n = 2$ alınırsa A_2 ve bu şekilde devam edilirse A_3, A_4, \dots, A_n polinomları hesaplanır. ■

Adomian polinomlarının nasıl elde edildiği gösterildikten sonra yapılması gereken adımlar için bir algoritma verelim.

Adım 1: $Nu = F(u)$ denklemi için $u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots + \alpha^n u_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k u_k$ olarak alınır.

Adım 2: $F(u) = F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k) = \sum_{k=0}^n \alpha^k A_k$ olarak Adomian polinom yaklaşımı uygulanır.

Adım 3: Bu Adomian polinomlarını bulmak için $i = 0, 1, \dots, n$ kadar Adım 3 teki denklemlerin her iki tarafının α göre türevi alınır. Yani,

$$\frac{\partial^i F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)}{\partial \alpha^i} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^i (\sum_{k=0}^n \alpha^k A_k)}{\partial \alpha^i} \Big|_{\alpha=0}$$

yazılır.

Adım 5: Bu alınan $i = 0, 1, \dots, n$ kadar ki türevler için α yerine 0 ($\alpha = 0$) yazılarak $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ polinomları hesaplanır.^[6]

ÖRNEK EK 1: $F(u) = u^2$ fonksiyonu için Adomian polinomlarını bulunuz.

ÇÖZÜM: $u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots$ olarak araştırılır. u verilen denklemde yerine yazılırsa

$$F(u) = u^2 \Rightarrow F(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots) = (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots)^2$$

olarak elde edilir. $F(u) = F(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k) = \sum_{k=0}^n \alpha^k A_k$ şeklinde bir Adomian polinomu mevcut olduğundan

$$F(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots) = (u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots)^2 = \sum_{k=0}^n \alpha^k A_k$$

şeklinde yazılır. Buradaki Adomian polinomlarını hesaplamak için Adım 4 ve Adım 5 probleme uygulanır. Yani, $i = 0, 1, \dots, n$ her iki tarafının α 'ya göre türevleri alınarak α yerine sıfır yazılır.

$i = 0$ için

$$A_0 = u_0^2$$

dir. $i = 1$ için

$$\frac{\partial(A_0 + \alpha A_1)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial(u_0 + \alpha u_1)^2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

$$\Rightarrow A_1 = 2u_0 u_1$$

bulunur. $i = 2$ için

$$\frac{\partial^2(A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^2(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2)^2}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(A_1 + 2\alpha A_2)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial 2(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2)(u_1 + 2\alpha u_2)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

$$\Rightarrow 2A_2 = 2u_1^2 + 4u_0 u_2$$

$$\Rightarrow A_2 = u_1^2 + 2u_0 u_2$$

olarak bulunur. $i = 3$ için

$$\frac{\partial^3(A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha^3 A_3)}{\partial \alpha^3} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^3(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \alpha^3 u_3)^2}{\partial \alpha^3} \Big|_{\alpha=0}$$

yazılarak türevler alınır ve $\alpha = 0$ yazılırsa

$$A_3 = 2u_0 u_3 + 2u_1 u_2$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek diğer Adomian polinomları elde edilebilir.

ÖRNEK EK 2: Bu çalışmada önemli yer tutan $F(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$ fonksiyonu için Adomian polinomlarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Bu durumda F fonksiyonu u ve v olmak üzere iki bileşene sahiptir. Bu durumda da ilk durumda da yapıldığı gibi

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \dots$$

ve

$$v = v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2 + \dots$$

şeklinde araştırılır ve F fonksiyonu için

$$F(u, v) = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \dots = \sum_{k=0}^n \alpha^k A_k$$

şeklinde bir Adomian polinomları ile ayrışımı Adım 4 ve 5'de verildiği gibi hesaplanır. Verilen kurala göre

$$\frac{\partial^n \sqrt{(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)^2 + (\sum_{k=0}^n \alpha^k v_k)^2}}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^n (\sum_{k=0}^n \alpha^k A_k)}{\partial \alpha^n} \Big|_{\alpha=0}$$

şeklinde yazılır. Adım 4 ve 5'e göre, $n = 0, 1, 2, \dots$ her iki tarafın türevleri alınarak α yerine sıfır yazılır.

$n = 0$ için

$$A_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$$

olarak bulunur. $n = 1$ için

$$\frac{\partial \sqrt{(\sum_{k=0}^n \alpha^k u_k)^2 + (\sum_{k=0}^n \alpha^k v_k)^2}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial (\sum_{k=0}^n \alpha^k A_k)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial \sqrt{(u_0 + \alpha u_1)^2 + (v_0 + \alpha v_1)^2}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial (A_0 + \alpha A_1)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &\Rightarrow A_1 = \frac{2(u_0 + \alpha u_1)u_1 + 2(v_0 + \alpha v_1)v_1}{2\sqrt{(u_0 + \alpha u_1)^2 + (v_0 + \alpha v_1)^2}} \Big|_{\alpha=0} = \frac{u_0 u_1 + v_0 v_1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} \end{aligned}$$

dir. $n = 2$ alınır

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \sqrt{(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2)^2 + (v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2)^2}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial^2 (A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2)(u_1 + 2\alpha u_2) + (v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2)(v_1 + 2\alpha v_2)}{\sqrt{(u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2)^2 + (v_0 + \alpha v_1 + \alpha^2 v_2)^2}} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial (A_1 + 2\alpha A_2)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

türev alınır ve α yerine sıfır yazılırsa

$$A_2 = \frac{(u_1^2 + 2u_0 u_2 + 2v_0 v_2 + v_1^2)(u_0^2 + v_0^2) - (u_0 u_1 + v_0 v_1)^2}{2(u_0^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek diğer terimler bulunabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Süleyman ŞENGÜL 08.11.1985 yılında Trabzon'un Arsin ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Arsin Cumhuriyet İlköğretim Okulunda ve Arsin Lisesinde, orta öğrenimini Arsin Lisesinde tamamladı. 2003 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2007 yılında bitirdi. 2007 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2008 yılında Rize Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesine araştırma görevlisi olarak atandı. 35 kadrosu ile yüksek lisans eğitimi boyunca KTÜ 'ye görevlendirildi. Orta derecede İngilizce bilmektedir.