KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TL-VAGUE MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dilek BAYRAK

HAZİRAN 2010
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TL-VAGUE MODÜLLER

Dilek BAYRAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20.05.2010
Tezin Savunma Tarihi : 25.06.2010

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sultan YAMAK
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Osman KAZANCI
Jüri Üyesi : Prof. Dr. İsmail Hakkı ALTAŞ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, her zaman her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan, değerli hocam Doç. Dr. Sultan YAMAK' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Çalışmalarımda çok yardımını gördüğüm sevgili arkadaşım Canan EKİZ'e, KTÜ Matematik Bölüm'ündeki bütün hocalarıma, her zaman yanımda olan arkadaşlarım Perihan, Pınar ve Hilal'e ve hayatım boyunca benden desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Dilek BAYRAK
Trabzon 2010

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa No</u>

ÖZET

Bu tezin temel amacı grup, halka ve modül kavramlarına ilişkin temel sonuçların TL-vague grup, TL-vague halka ve TL-vague modüllerdeki karşılıklarını incelemektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, tezde ihtiyacımız olduğu kadarıyla kafes, grup, halka, modül, L-fuzzy alt kümeler, L-fuzzy bağıntılar ve TL-fuzzy fonksiyonlar ile ilgili temel kavramlardan oluşmaktadır. Ayrıca bu çalışmanın temelini oluşturan TL-vague gruplar ve TL-vague halkalarla ilgili bilgiler derlenmiştir.

Çalışmanın özgün bölümünü oluşturan ikinci bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci ve ikinci kısımda TL-vague gruplarla ve TL-vague halkalarla ilgili bazı yeni özellikler incelenmiş ve ilgili örnekler verilmiştir. Tezin son kısmında TL-vague modül ve TL-vague alt modül tanımlanmış ve modüllerdeki temel teoremlerin TL-vague modülere aktarılmıştır.

Anahtar Kelimler: TL-vague grup, TL-vague halka, TL-vague modül.

SUMMARY

(TL-vague module)

The purpose of this thesis is to study basic properties of vague notions such as TL-vague group, TL-vague ring and TL-vague module which are vague versions of the structure of group, ring and module.

This thesis consists of two chapters. Chapter one deals with the basic concepts of lattice, group, ring, module, L-fuzzy subset theories, L-fuzzy relations and TL-fuzzy functions which will be needed. Also basic material concerning TL-vague groups and TL-vague rings which make up the basis of the thesis are established.

Second chapter, which is the original part of this study, consists of three sections. In the first and second parts, some new properties of TL-vague group are investigated and give some examples. In the last chapter, the notions of TL-vague module and TL-vague sub module are transmitted in TL-vague module of the basic theorems of module is given.

Key Words: TL-vague group, TL-vague ring, TL-vague module

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	**:** Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	**:** Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{T}$	**:** L üzerinde tanımlı bir t-norm
$(\boldsymbol{L}, \leq)$	**:** Sıralı küme
$\bigvee_{\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}} \boldsymbol{a}$	**:** A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu)
$\bigwedge_{\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}} \boldsymbol{a}$	**:** A kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu)
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{L})$	**:** X'in L-fuzzy güç kümesi
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{E})$	**:** E X üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı
$\tilde{\circ}$	**:** TL-vague ikili işlem
$(\boldsymbol{G}, \tilde{\circ})$	**:** $\tilde{\circ}$ G üzerinde TL-vague ikili işlem
$\boldsymbol{A}_{\tilde{\circ}}^{-1}$	**:** A kümesinin TL-vague tersi
$\boldsymbol{A} \tilde{\circ} \boldsymbol{B}$	**:** A ve B nin TL-vague çarpımı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Belirsizlik veya bulanıklık kavramları; niteliği tam anlaşılamayan, iyi seçilmeyen, açık seçik görülmeyen veya net olmayan şeklinde tanımlanabilir. İnsan aklı bulanıklık içeren durumları matematiksel olarak ifade etmek için derecelendirme kavramını oluşturmuştur. Bulanıklık, dereceli üyelik kavramı yardımı ile bilim dünyasına ilk kez 1965 yılında Azeri matematikçi A. Lotfi Zadeh [43] tarafından taşınmıştır. Zadeh'in bulanık (fuzzy) kümeler teorisi olarak adlandırdığı teorisinde, bulanık kümeler, kesin sınırları belirli olmayan olayları tanımlamak ve matematiksel olarak modellemek amacıyla kullanılır. Bilgisayar sistemleri, kontrol mühendisliği gibi matematiksel otomasyon gerektiren modellemelerde bulanık kavramlara ihtiyaç duyulmuştur.

Zadeh'in [43]'de tanıttığı bulanık küme teorisi birçok bilim insanının çalışmalarına ışık tutmuştur ve teorinin gelişmesine katkıda bulunmuştur. Fuzzy altkümeler teorisinin bir genellemesi olarak 1967 yılında Goguen [19] fuzzy altkümelerini bir kafes üzerinde tanımlamıştır. 1971 yılında Rosenfeld [30] fuzzy kümeler teorisini gruplar teorisine uyarlamıştır. Anthony ve Sherwood [1] Rosenfield'ın tanımlarını $[0,1]$ kafesi üzerindeki "*min*" ikili işleminden daha genel olan *t*-normlara genişletmiştir.

Fuzzy bağıntı kavramı Zadeh [43] tarafından tanıtılmış ve Rosenfield [32], Tamura [40], Yeh ve Bang [41] tarafından bu kavrama önemli gelişmeler ilave edilmiştir.

Fuzzy cebirsel yapılar klasik ikili işlemler altında uzun yıllar çalışıldı. Bu konuda temel eksiklik fuzzy ikili işlem için gerekli fuzzy fonksiyon kavramıydı. Birçok araştırmacı bu eksikliği gidermek için çalışmalar yapmıştır [25, 33, 38]. Başlangıçta fuzzy fonksiyon ve fuzzy homomorfi tanımları adı altında yayınlanan makalelerde fonksiyon ve homomorfi kavramları fuzzye aktarılamadı. Klasik fonksiyon ve homomorfi tanımı dışında bu konuda ilk olarak fuzzy halka homomorfi tanımı 1992 yılında Malik ve Mordeson [25] tarafından verildi. Daha sonrasında Sasaki [33] ve Sidky [38] makalelerinde fuzzy fonksiyon kavramını ele almışlar ve bu tanımı yine fuzzye aktarılamadı.

Bir kafes üzerinde *t*-norm ve fuzzy denklik bağıntı yardımıyla fuzzy fonksiyon kavramı Höhle ve Porst [20], Sostak [39], Kim, Monk ve Neggers [22], Demirci [8, 10, 11, 14] ve daha birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu çalışmaların ardından 1999 yılında Demirci [6], fuzzy fonksiyon kavramı yardımıyla vague ikili işlem tanımını vermiştir. Daha sonra bu konuyla ilgili vague gruplar [3, 4, 7, 9, 26, 34, 35, 36], vague halkalar [5, 30, 37], vague universal cebirler [29] ve vague kafesler [12, 13, 18] incelenmiştir.

Tüm bu çalışmalar ışığında gruplar ve halkalar teorisinde mevcut olan ancak vague anlamında incelenmeyen bazı özellikler ve vague modül teorisi incelenecektir.

Bu çalışmanın birinci bölümü beş kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısmında kafesler ve t-normlar; ikinci kısmında gruplar, halkalar ve modüller; üçüncü kısmında L-fuzzy alt kümeler ve L-fuzzy bağıntılar ve dördüncü kısmında ve TL-fuzzy fonksiyonlar kavramları [8, 10, 11, 14] kaynaklarından verilmiştir. Beşinci kısımda TL-vague gruplar ve TL-vague halkalara ilişkin temel bilgiler [6, 7, 30, 34, 37] kaynaklarından derlenerek verilmiştir.

Tezin ikinci bölümü özgün sonuçlardan oluşmaktadır. Birinci ve ikinci kısımda vague grup ve vague halkalara ait [6, 7, 30, 34, 37] çalışmalarında incelenenlerin dışında klasik teoride mevcut olup vague anlamında incelenmeyen cebirsel yapıları içermektedir. Bölümün son kısmında ise TL-vague modül tanımı verilerek modül teorisinin önemli kısımları bu alana taşınmıştır.

1.2.Kafesler ve t-normlar

Bu kısım tez boyunca ihtiyaç duyulan kafesler ve t-normlar ile ilgili tanım ve teoremleri içermektedir ve kaynak olarak [2] ve [23]'den yararlanılmıştır.

Tanım 1.2.1 [2]: $L \neq \emptyset$ bir küme ve "$\leq$" L üzerinde bir bağıntı olsun. "$\leq$" bağıntısına L üzerinde bir sıralama bağıntısı denir: $\Leftrightarrow$

i) Her $a \in L$ için $a \leq a$,

ii) Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$,

iii) Her $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

dır.

Tanım 1.2.2 [2]: L kümesi üzerinde "$\leq$" sıralama bağıntısı varsa L kümesine sıralı küme denir ve $(L, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.2.3 [2]: $(L, \leq)$ sıralı küme ve $A \subseteq L$ olsun.

i) Her $a \in A$ için $x \leq a$ ise $x \in L$ elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir.

ii) Her $a \in A$ için $a \leq y$ ise $y \in L$ elemanına A kümesinin bir üst sınırı denir.

Tanım 1.2.4 [2]: $(L, \leq)$ sıralı küme, $A \subseteq L$ ve $a_0 \in A$ olsun.

i) Her $a \in A$ için $a_0 \leq a$ ise a_0 elemanına A kümesinin en küçük elemanı denir.

ii) Her $a \in A$ için $a \leq a_0$ ise a_0 elemanına A kümesinin en büyük elemanı denir.

Genel olarak bir kafesin en küçük elemanı “0” ve en büyük elemanı ise “1” ile gösterilir.

Tanım 1.2.5 [2]: $(L, \leq)$ sıralı küme, $A \subseteq L$ ve A kümesinin, tüm alt sınırlarının ve üst sınırlarının oluşturduğu kümeler sırasıyla A_{alt} ve $A_{üst}$ ile gösterilsin. Bu takdirde;

i) $A_{alt} \neq \emptyset$ olan bir küme ve bu kümenin en büyük elemanı mevcut ise bu elemana A kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve $infA$, $\wedge A$, $\bigwedge_{a \in A} a$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

ii) $A_{üst} \neq \emptyset$ olan bir küme ve bu kümenin en küçük elemanı mevcut ise bu elemana A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $supA$, $\vee A$, $\bigvee_{a \in A} a$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 1.2.6 [2]: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

i) L kümesine kafes denir:$\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $inf\{a, b\} = a \wedge b$ ve $sup\{a, b\} = a \vee b$ mevcuttur. Bu durum $(L, \leq, \wedge, \vee)$ şeklinde gösterilir.

ii) L kümesine zincir denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ dır.

iii) L kümesine tam kafes denir: $\Leftrightarrow$ Her $A \subseteq L$ için $infA$ ve $supA$ mevcuttur.

Teorem 1.2.7 [2]: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

i) L tam kafestir $\Leftrightarrow$ $1 \in L$ ve her $A \subseteq L$ için $infA$ mevcuttur.

ii) L bir zincir ise L bir kafestir.

iii) L bir tam kafes ise bir kafestir.

Tanım 1.2.8 [2]: $(L, \leq)$ bir kafes olsun.

i) L'ye alttan sınırlı kafes denir $:\Leftrightarrow$ L'nin en küçük elemanı mevcuttur. Bu durum $(L, \leq, 0)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) L'ye üstten sınırlı kafes denir $:\Leftrightarrow$ L'nin en büyük elemanı mevcuttur. Bu durum $(L, \leq, 1)$ notasyonu ile gösterilir.

iii) L'ye sınırlı kafes denir $:\Leftrightarrow$ L kafesi üstten ve alttan sınırlıdır. Bu durum $(L, \leq, 0, 1)$ notasyonu ile gösterilir.

Her tam kafes sınırlıdır, ancak tersi genelde doğru değildir.

Örnek 1.2.9: Şekil 1'deki "$\leq$" sıralaması ile $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sınırlı bir kafestir. Ancak $(\mathbb{N}, \leq)$ bir tam kafes değildir.

Şekil 1. Örnek 1.2.9'daki kafes yapısı

Tanım 1.2.10 [23]: $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ tam kafesi üzerinde tanımlı $T: L \times L \to L$ ikili işlemine bir t-norm denir $:\Leftrightarrow$

T1) Her $x, y \in L$ için $T(x, y) = T(y, x)$,

T2) Her $x, y, z \in L$ için $T(T(x, y), z) = T\big(x, T(y, z)\big)$,

T3) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $T(x, z) \leq T(y, z)$,

T4) Her $x \in L$ için $T(x, 1) = x$

dir.

Örnek 1.2.11 [16]: $0 \to a \to 1$ sıralaması ile verilen $L = \{0, a, 1\}$ kafesi üzerindeki bütün t-normlar aşağıda verilmiştir.

Tablo 1. $L=\{0,a,1\}$ kafesi üzerindeki t-normlar tablosu

T_1	0	a	1
0	0	0	0
a	0	0	a
1	0	a	1

T_2	0	a	1
0	0	0	0
a	0	a	a
1	0	a	1

Örnek 1.2.12 [23]: Aşağıda $L=[0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlanan temel t-normlar verilmiştir.

a) $T_M(x,y)=\min(x,y)$, (Minimum)

b) $T_P(x,y)=x.y$, (Çarpım)

c) $T_L(x,y)=\max(x+y-1,0)$ (Lukasiewicz)

d) $T_D(x,y)=\begin{cases} x, & y=1 \\ y, & x=1 \\ 0, & x\neq 1 \text{ ve } y\neq 1 \end{cases}$ (Kesin Çarpım)

Teorem 1.2.13 [23]: L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

1) Her $x,y\in L$ için $T(x,y)\leq x\wedge y$ dir.
2) Her $x\in L$ için $T(x,0)=T(0,x)=0$ dır.
3) Her $x_1,x_2,y_1,y_2\in L$ için $x_1\leq x_2$ ve $y_1\leq y_2$ise $T(x_1,y_1)\leq T(x_2,y_2)$ dir.

Örnek 1.2.14: $L=\left\{\frac{1}{n}\middle|n=1,2,\ldots\right\}\cup\{0\}$ kafesi olsun. Bu takdirde;

i) $$T(a,b)=\begin{cases} 0, & a.b=0 \\ a, & b=1 \\ b, & a=1 \\ \frac{1}{n+m}, & a=\frac{1}{n}, b=\frac{1}{m}, m>1, n>1 \end{cases}$$

ii) $$T(a,b)=\begin{cases} 0, & a.b=0 \\ \frac{1}{n+m-1}, & a=\frac{1}{n}, b=\frac{1}{m} \end{cases}$$

ikili işlemleri t-normdur.

1.3. Gruplar, Halkalar ve Modüller

Bu kısımdaki tanım ve teoremler Hungerford [21]'dan derlenmiştir.

Tanım 1.3.1 [21]: $G \neq \emptyset$ olan bir küme ve " $*$ " , G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Bu takdirde;

i) G'ye yarı grup denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in G$ için
$a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

ii) G yarı grubuna monoid denir : $\Leftrightarrow$ $\exists e \in G$ öyleki her $a \in G$ için
$a * e = e * a = a$ dır.

iii) G monoidine grup denir : $\Leftrightarrow$ Her $a \in G$ için $\exists a^{-1} \in G$ öyle ki
$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ dir.

iv) G grubuna değişmeli grup denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in G$ için
$a * b = b * a$ dır.

(ii)'de ifade edilen $e \in G$ elemanına birim eleman, (iii)'de ifade edilen $a^{-1} \in G$ elemanına ise a elemanının tersi denir.

Örnek 1.3.2: $\mathbb{Z}_2$ kümesini grup yapan bütün ikili işlemler aşağıdaki şekildedir.

Tablo 2. $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki bütün grupların tablosu

$*_1$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$*_2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Tanım 1.3.3 [21]: G bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Eğer H kümesi G grubundaki ikili işleme göre bir grup ise H'ya G'nin alt grubu denir. Bu durum $H \leq G$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 1.3.4 [21]: $(G,*)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Bu takdirde $H \leq G \Leftrightarrow$

i) Her $a, b \in H$ için $a * b \in H$,

ii) Her $a \in H$ için $a^{-1} \in H$

dır.

Tanım 1.3.5 [21]: $(G,*)$ bir grup ve $H, K \in \wp(G)\backslash\{\emptyset\}$ olsun. Bu takdirde $H * K$ ve H^{-1} kümelerine H ile K'nın çarpımı ve H'ın tersi denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, \ k \in K\} \ , \qquad H^{-1} = \{h^{-1} \mid h \in H\}$$

dır.

Bu durumda Teorem 1.3.4 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 1.3.6 [21]: $(G,*)$ bir grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Bu takdirde $H \leq G$'dir. $\Leftrightarrow$ $H * H \subseteq H$ ve $H^{-1} \subseteq H$ dır.

Tanım 1.3.7 [21]: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ yarı gruplar olsun. $f: G \to H$ fonksiyonuna homomorfizm denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in G$ için

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

dir.

Tanım 1.3.8 [21]: $R \neq \emptyset$ olan bir küme , " $+$ " ve " $*$ " R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. $(R, +,*)$ üçlüsüne bir halka denir: $\Leftrightarrow$

i) $(R, +)$ değişmeli grup,

ii) Her $a, b, c \in R$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$,

iii) Her $a, b, c \in R$ için $a * (b + c) = a * b + a * c$ ve $(a + b) * c = a * c + b * c$

dır.

Halka tanımına ek olarak ;

R halkasına birim elemanlı halka denir. $\Leftrightarrow$ $\exists e \in R$ öyleki her $a \in R$ için

$a * e = e * a = a$ dır.

R halkasına değişmeli halka denir. $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in R$ için

$a * b = b * a$ dır.

Tanım 1.3.9 [21]: R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. S, R üzerindeki ikili işlemlere göre bir halka ise S'ye R'nin alt halkası denir.

Tanım 1.3.10 [21]: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ ve I alt halka olsun.

I'ya sol (sağ) ideal denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in I$ ve $r \in R$ için

$$a - b \in I \text{ ve } \ r * a \in I \ \ (a * r \in I\,)$$

dır. I sol ve sağ ideal ise I'ya ideal denir.

Tanım 1.3.11 [21]: $(R,+,*)$ ve $(S,\oplus,\otimes)$ halkalar olsunlar. $f\colon R\to S$ fonksiyonuna halka homomorfizması denir: $\Leftrightarrow$ Her $a,b\in R$ için

$$f(a+b)=f(a)\oplus f(b) \text{ ve } f(a*b)=f(a)\otimes f(b)$$

dir.

Tanım 1.3.12 [21]: $(R,+,*)$ bir halka, $(M,\oplus)$ bir değişmeli grup olmak üzere $\cdot\colon R\times M\to M$ skaler çarpımı $\cdot\,(r,m)=r\cdot m$ olarak tanımlansın. M'ye (sol) R-modül denir $\Leftrightarrow$
Her $m,m_1,m_2\in M$ ve her $r,r_1,r_2\in R$ için

1) $r\cdot(m_1\oplus m_2)=(r\cdot m_1)\oplus(r\cdot m_2)$,
2) $(r_1+r_2)\cdot m=(r_1\cdot m)\oplus(r_2\cdot m)$,
3) $(r_1*r_2)\cdot m=r_1\cdot(r_2\cdot m)$

dır.

Örnek 1.3.13 [21]:

i) $(R,+,*)$ bir halka olmak üzere, her $a,r\in R$ için $r\cdot a=r*a$ şeklinde tanımlanırsa R bir R-modüldür.

ii) $(M,\oplus)$ bir değişmeli grup olsun. Her $n\in\mathbb{Z}$ ve $a\in M$ için

$$n\cdot a=\begin{cases}0 & , \quad n=0\\ \underbrace{a\oplus a\oplus\ldots\oplus a}_{n\ tane} & , \quad n>0\\ \underbrace{(-a)\oplus(-a)\oplus\ldots\oplus(-a)}_{n\ tane} & , \quad n<0\end{cases}$$

olarak tanımlanan "·" skaler çarpımı ile M bir $\mathbb{Z}$-modüldür.

iii) $(M,\oplus)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Her $r\in R$ ve $m\in M$ için "·" skaler çarpımı $r\cdot m=0$ şeklinde tanımlanırsa M bir R-modüldür.

Tanım 1.3.14[21]: M bir R-modül ve $\emptyset\neq A\subseteq M$ olsun. A'ya M'nin alt modülü denir : $\Leftrightarrow$ Her $a,b\in A$ ve $r\in R$ için $a-b\in A$ ve $r\cdot a\in A$ dır.

1.4. *L*-fuzzy (Alt) Kümeler ve *L*-fuzzy Bağıntılar

Bu kısımda aksi söylenmedikçe $(L,\leq)$ bir tam kafes ve T, L üzerinde bir *t*-norm olarak alınacaktır. Ayrıca sonraki kısımlarda kullanılacak L-fuzzy alt kümeler, L-fuzzy bağıntı kavramları ve bazı örnekleri [14, 27, 34] kaynaklarında derlenerek verilecektir.

Tanım 1.4.1 [27]: $X \neq \emptyset$ olan bir küme ve L bir kafes olsun. Her $\mu: X \to L$ fonksiyonuna X'in bir L-fuzzy küme (altkümesi) denir. X'in bütün L-fuzzy kümelerinin kümesine X'in L-fuzzy güç kümesi denir ve $F(X, L)$ ile gösterilir.

Özel olarak $L = [0,1]$ olarak seçilirse μ'ye fuzzy kümesi denir ve X'in tüm fuzzy altkümelerinin kümesi $F(X)$ ile gösterilir.

Örnekler 1.4.2 : L bir kafes, $X \neq \emptyset$ olan bir küme, $\emptyset \neq Y \subseteq X$ ve $\alpha \in L$ olsun.

i) Her $x \in X$ için $1_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$ olarak tanımlanan $1_Y \in F(X, L)$ dir. Bu fonksiyona Y'nin karakteristik fonksiyonu denir ve χ_Y ile gösterilir.

ii) Her $x \in X$ için $\alpha_Y(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$ olarak tanımlanan $\alpha_Y \in F(X, L)$ dir.

$Y = \{y\}$ ise bu fonksiyona fuzzy noktası denir ve y_α ile de gösterilebilir.

Tanım 1.4.3 [27]: μ, ν X'in bir L-fuzzy alt kümesi olsun. Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise μ, ν de içerilir denir ve bu durum $\mu \leq \nu$ şeklinde gösterilir. Eğer $\mu \leq \nu$ ve $\mu \neq \nu$ ise μ'ye, ν'de kesin içerilir (veya ν, μ yü kesin içerir) denir ve bu durumda $\mu < \nu$ yazılır.

Tanım 1.4.4 [27]: $(X,*)$ bir grup ve μ, X'in bir L-fuzzy alt kümesi olsun. μ'ye, X'in bir TL-fuzzy alt grubu denir :⟺ Her $x, y \in X$ için

i) $\mu(x) T \mu(y) \leq \mu(x * y)$,

ii) $\mu(x) \leq \mu(x^{-1})$

dir.

Teorem 1.4.5 [27]: $(X,*)$ bir grup ve μ X'in bir TL-fuzzy alt grubu olsun. μ'e X'in bir TL-fuzzy normal alt grubu denir.:⟺ Her $x, y \in X$ için

$$\mu(x * y * x^{-1}) \geq \mu(y)$$

dir.

Tanım 1.4.6 [14]: X, $Y \neq \emptyset$ olan kümeler, L kafes ve $\rho: X \times Y \to L$ ise ρ'ya X'den Y'ye L-fuzzy bağıntı denir.

Tanım 1.4.7 [14]: $\rho: X \times X \to L$ L-fuzzy bağıntısına TL-fuzzy denklik bağıntısı denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in X$ için

1) $\rho(x, x) = 1$,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3) $\rho(x, y)T\rho(y, z) \leq \rho(x, z)$

dir. $T = \wedge$ olarak alınırsa ρ'ya L-fuzzy denklik bağıntısı denir.

ρ TL-fuzzy denklik bağıntısına ayrılabilir denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için

$\rho(x, y) = 1$ ise $x = y$ dir.

Örnek 1.4.8: X en az iki elemanı olan bir küme, $\rho: X \times X \to L$ ve $\alpha \in L \backslash \{1\}$ olsun. Bu durumda;

i) Her $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = 1$ ile tanımlanan ρ L-fuzzy bağıntısı TL-fuzzy denklik bağıntısıdır ancak ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı değildir.

ii) Her $x, y \in X$ için $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ \alpha & x \neq y \end{cases}$ ile tanımlanan ρ L-fuzzy bağıntısı ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.

Örnek 1.4.9: $L = [0,1]$ olsun. $\rho: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [0,1]$ fuzzy bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın. Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$\rho(x, y) = \frac{1}{|x-y|+1}.$$

Bu takdirde;

$T \in \{T_P, T_D, T_L\}$ için ρ ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.

$T = \wedge$ için ρ L-fuzzy denklik bağıntısı değildir.

Örnek 1.4.10 [14]: T, L üzerinde bir t-norm ve E, F sırasıyla X, Y üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı olmak üzere;

$$E \times_T F\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = E(x_1, x_2)TF(y_1, y_2)$$

şeklinde tanımlanan $E \times_T F$ bağıntısı $X \times Y$ kümesi üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.

E, X üzerinde TL - fuzzy denklik bağıntısı ise aksi söylenmedikçe $X \times X$ üzerinde ki TL-fuzzy denklik bağıntısı $E \times_T E$ olarak alınacaktır.

Teorem 1.4.11 [34]: $E_i,\ X_i\ \ (i = 1,2,\dots,n)$ üzerinde L-fuzzy denklik bağıntıları ve $X \coloneqq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olsun. Bu durumda $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in X$ için

$$E\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) \coloneqq \wedge_{i=1}^{n} E(x_i,y_i)$$

ile tanımlanan L-fuzzy bağıntısı X üzerinde L-fuzzy denklik bağıntısıdır. Bu durum $E = E_1 \times \dots \times E_n$ ile gösterilir.

Örnek 1.4.12 : $0 \to a \to 1$ sıralaması ile $L = \{0, a, 1\}$ kafesi verilsin. Örnek 1.2.11'de ki T_1 t-normu ile $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki bütün T_1L-fuzzy denklik bağıntıları aşağıda verilmiştir.

Tablo 3. Örnek 1.4.12'de ki T_1L-fuzzy denklik bağıntıları tablosu

$E_1(i,j)$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	0
$\bar{1}$	0	1

$E_2(i,j)$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	a
$\bar{1}$	a	1

$E_3(i,j)$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	1	1
$\bar{1}$	1	1

Tanım 1.4.13 [14]: E, X üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $\mu \in F(X,L)$ olsun. μ'ye E'ye genişletilmiş TL-fuzzy altküme denir: $\Leftrightarrow$ Her $x,y \in X$ için

$$\mu(x)TE(x,y) \le \mu(y)$$

dir.

Teorem 1.4.14 [14]: E, X üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde;

1) $F(X,L)$ kümesindeki bütün E'ye genişletilmiş TL-fuzzy altkümelerinin kümesi "$\le$" bağıntısına göre tam kafestir.
2) Eğer E TL-fuzzy denklik bağıntısı

$$E(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa E'ye genişletilmiş bütün TL-fuzzy altkümelerin kümesi $F(X,L)$'e eşittir.

Tanım 1.4.15 [14]: E, F sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $f: X \to Y$ olsun. Bu takdirde f'ye E-F'ye genişletilmiş fonksiyon denir: $\Leftrightarrow$
Her $x, x' \in X$ için

$E(x,x') \leq F(f(x), f(x'))$

dir.

Örnekler 1.4.16 :

1) E, F sırasıyla X, Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $x, x' \in X$ için

   $E(x,x') = F(f(x), f(x'))$

   ile tanımlanan E, X üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısıdır ve f, E-F'ye genişletilmiş fonksiyondur.
2) E, F sırasıyla X, Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ise her f sabit fonksiyonu E-F'ye genişletilmiştir.
3) T, $[0,1]$ üzerinde bir t-norm, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(x) = x + 1$ şeklinde tanımlansın. $\mathbb{Z}$ üzerindeki E ve F TL-fuzzy denklik bağıntıları sırasıyla

   $$E(x,y) := \begin{cases} 1 & x = y \\ \frac{1}{3} & x \neq y \end{cases} \quad \text{ve} \quad F(x,y) := \begin{cases} 1 & x = y \\ \frac{1}{2} & x \neq y \end{cases}$$

   olarak tanımlanırsa f fonksiyonu E-F'ye genişletilmiştir. Fakat f, F-E'ye genişletilmiş değildir.

Tanım 1.4.17 [14]: E, F sırasıyla X, Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\rho: X \times Y \to L$ L-fuzzy bağıntı olsun.

i) ρ'ya E'ye genişletilmiş denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, x' \in X$ ve her $y \in Y$ için

   $\rho(x,y)TE(x,x') \leq \rho(x',y)$ dir.

ii) ρ'ya F'ye genişletilmiş denir: $\Leftrightarrow$Her $x \in X$ ve her $y, y' \in Y$ için

   $\rho(x,y)TF(y,y') \leq \rho(x,y')$ dir.

iii) ρ'ya E-F' ye genişletilmiş denir: $\Leftrightarrow$ ρ E ve F' ye genişletilmiş TL-fuzzy bağıntıdır.

1.5. TL-fuzzy Fonksiyonlar

Bu kısımda çalışmanın temelini oluşturan L-fuzzy bağıntılar için TL -fuzzy fonksiyon, mükemmel TL -fuzzy fonksiyon ve güçlü TL -fuzzy fonksiyon tanımları ve özellikleri [14] kaynağından derlenerek verilecektir.

Tanım 1.5.1 [14]: E, F sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\rho: X \times Y \rightarrow L$ E-F'ye genişletilmiş TL-fuzzy bağıntı olsun.

i) ρ'ya kısmi TL-fuzzy fonksiyon denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ ve her $y, z \in Y$ için
$\rho(x, y) T \rho(x, z) \leq F(y, z)$ dir.

ii) ρ'ya TL-fuzzy fonksiyon denir $:\Leftrightarrow$ ρ kısmi TL-fuzzy fonksiyon ve her $x \in X$ için
$\bigvee_{y \in Y} \rho(x, y) = 1$ dir.

iii) ρ'ya mükemmel TL-fuzzy fonksiyon denir $:\Leftrightarrow$ ρ kısmi TL-fuzzy fonksiyon ve her $x \in X$ için $\exists y \in Y$ öyle ki
$\rho(x, y) = 1$ dir.

Tanım 1.5.2 [14]: E, F sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\rho: X \times Y \rightarrow L$ L-fuzzy bağıntı olsun. ρ'ya güçlü TL-fuzzy fonksiyon denir $:\Leftrightarrow$
Her $x, x' \in X$ ve her $y, y' \in Y$ için

i) $E(x, x') T \rho(x, y) T \rho(x', y') \leq F(y, y')$,

ii) Her $x \in X$ için $\exists y \in Y$ öyle ki $\rho(x, y) = 1$

dir.

Örnek 1.5.3 [14]: E, F sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\rho: X \times Y \rightarrow L$ L-fuzzy bağıntı olsun.

i) ρ mükemmel TL-fuzzy fonksiyon ise ρ güçlü TL-fuzzy fonksiyondur.

ii) $f: X \rightarrow Y$ E-F'ye genişletilmiş fonksiyon ve $\rho(x, y) = F(y, f(x))$ ise ρ mükemmel TL-fuzzy fonksiyondur.

Teorem 1.5.4 [14]: E, F sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\rho: X \times Y \rightarrow L$ L-fuzzy bağıntı olsun. $\rho: X \times Y \rightarrow L$ güçlü TL-fuzzy fonksiyondur $\Leftrightarrow$
$\exists f: X \rightarrow Y$ E-F'ye genişletilmiş fonksiyon öyle ki her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için
$$\rho(x, f(x)) = 1 \text{ ve } \rho(x, y) \leq F(f(x), y)$$
dir.

Teorem 1.5.5 [14]: E, F sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\rho: X \times Y \rightarrow L$ L-fuzzy bağıntı olsun. $\rho: X \times Y \rightarrow L$ mükemmel TL-fuzzy fonksiyon $\Leftrightarrow$

$\exists f: X \to Y$ E-F'ye genişletilmiş fonksiyon öyle ki her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$\rho(x, y) = F(f(x), y)$$

dir.

Tanım 1.5.6 [14]: E, X üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $(X,*)$ grupoid olsun.

1) E'ye regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in X$ için

   $E(a, b) \le E(a * c, b * c)$ ve $E(a, b) \le E(c * a, c * b)$ dır.

2) E'ye invaryant TL-fuzzy denklik bağıntısı denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in X$ için

   $E(a, b) = E(a * c, b * c)$ ve $E(a, b) = E(c * a, c * b)$ dır.

   Açık olarak her invaryant TL-fuzzy denklik bağıntısı regüler TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.

Örnekler 1.5.7:

1) $(X,*)$ bir grupoid ve ρ, Örnek 1.4.8 (ii)'de ki gibi olsun. Bu durumda ρ regüler TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.
2) Örnek 1.4.9'da $(\mathbb{Z}, +)$ grubu ele alındığında $T \in \{T_P, T_D, T_L\}$ t-normu için TL-fuzzy denklik bağıntısı olan ρ invaryant TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.

Teorem 1.5.8 [14]: $(X,*)$ grupoid ve E, X üzerinde regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı ise her $a, b, c \in X$ için

$$E(a, b)TE(c, d) \le E(a * c, b * d)$$

dır.

Teorem 1.5.9 [14]: $(X,*)$ grup ve E, X üzerinde regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı ise E, X üzerinde invaryant TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.

Teorem 1.5.10 [14]: $(X,*)$ bir grup, $e \in X$ birim eleman olmak üzere μ, $\mu(e) = 1$ olarak tanımlanmış X'in bir TL-fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda her $a, b \in X$ için;

$$E_\mu(a, b) = \mu(a * b^{-1})$$

ile tanımlanan L-fuzzy bağıntısı;

i) TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.
ii) μ, X'in TL-fuzzy normal alt grubu ise regüler TL-fuzzy denklik bağıntısıdır.

1.6. TL-vague Gruplar ve TL-vague Halkalar

Bu kısımda, tezin özgün bölümünde kullanacağımız TL-vague gruplara ait bilgiler; Demirci [6, 7, 9, 14], Mordeson ve Bhutani [4, 26], Sezer [34], TL-vague halkalara ait bilgiler; Ren, Zhang, Ma [30], Sezer [37] araştırmacılarına ait makalelerden derlenmiştir.

Tanım 1.6.1 [6]: E, F sırasıyla G ve $G \times G$ kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\tilde{\circ}: G \times G \times G \to L$ L-fuzzy bağıntı olsun. Bu takdirde $\tilde{\circ}$' ya TL-vague ikili işlem denir: $\Leftrightarrow$ $\tilde{\circ}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyondur.

Eğer $\tilde{\circ}: G \times G \times G \to L$ TL-vague ikili işlem ise G kümesi $(G,\tilde{\circ})$ sıralı ikilisi ile gösterilecektir.

Tanım 1.6.2 [6]: E, F sırasıyla G ve $G \times G$ kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\tilde{\circ}: G \times G \times G \to L$ TL-vague ikili işlem olsun. Bu takdirde;

i) $\tilde{\circ}$' ya birinci mertebeden geçişken denir: $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z, z' \in G$ için
$\tilde{\circ}\,(x, y, z)TE(z, z') \leq \tilde{\circ}\,(x, y, z')$ dir.

ii) $\tilde{\circ}$' ya ikinci mertebeden geçişken denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z, y' \in G$ için
$\tilde{\circ}\,(x, y, z)TE(y, y') \leq \tilde{\circ}\,(x, y', z)$ dir.

iii) $\tilde{\circ}$' ya üçüncü mertebeden geçişken denir : $\Leftrightarrow$ Her $x, y, z, x' \in G$ için
$\tilde{\circ}\,(x, y, z)TE(x, x') \leq \tilde{\circ}\,(x', y, z)$ dir.

Eğer $\tilde{\circ}$ birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden geçişken ise $\tilde{\circ}$' ya tam geçişken denir. Açık olarak $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işleminin tam geçişken olması için gerek ve yeter şart her $x, y, z, x', y', z' \in G$ için

$$\tilde{\circ}\,(x, y, z)TE(x, x')TE(y, y')TE(z, z') \leq \tilde{\circ}\,(x', y', z')$$

dır.

Tanım 1.6.3 [6]: E, G üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $\tilde{\circ}$, G kümesi üzerinde TL-vague ikili işlem olsun. Bu durumda;

1) G'ye TL-vague yarı grup denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c, d, m, w, q \in G$ için
$\tilde{\circ}\,(b, c, d)T\,\tilde{\circ}\,(a, d, m)T\,\tilde{\circ}\,(a, b, q)T\,\tilde{\circ}\,(q, c, w) \leq E(m, w)$ dir.
2) G'ye TL-vague monoid denir : $\Leftrightarrow$ G, TL-vague yarı grup ve
$\exists e \in G$ öyle ki her $a \in G$ için

$\tilde{\circ}\,(e,a,a)T\,\tilde{\circ}\,(a,e,a)=1$ dir.

3) G'ye TL-vague grup denir $:\Longleftrightarrow G, TL$-vague monoid ve her $a\in G$ için $\exists b\in G$ için

$\tilde{\circ}\,(b,a,e)T\,\tilde{\circ}\,(a,b,e)=1$ dir.

4) G'ye TL-vague değişmeli grup denir $:\Longleftrightarrow G$ TL-vague grup ve her $a,b,m,w\in G$ için

$\tilde{\circ}\,(a,b,m)T\,\tilde{\circ}\,(b,a,w)\leq E(m,w)$ dir.

$(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup olmak üzere özel olarak $T=\wedge$ olarak belirlenirse ise G'ye L-vague grup denir.

(2)' de ifade edilen e elemanına G'nin TL-vague birim elemanı ve (3)' de ifade edilen $b\in G$ elemanına a elemanının e TL-vague birim elemanına göre TL-vague tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir. TL-vague birim eleman ve bir elemanın TL-vague tersi tek olmayabilir. TL-vague birim elemanına göre bir elemanın TL-vague tersi farklılık gösterebilir.

Örnek 1.6.4 : L bir tam kafes ve E $\mathbb{Z}$ üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı olsun. $\alpha\in L$ ve her $x,y\in\mathbb{Z}$ için

$$E(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ \alpha & x\neq y\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\beta\in L$ ve $\beta\leq\alpha$ için

$$\tilde{\circ}\,(a,b,c)=\begin{cases}1, & a+b=c\\ \beta, & a+b\neq c\end{cases}$$

ile tanımlanan $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi ile $(\mathbb{Z},\tilde{\circ})$ değişmeli TL-vague gruptur.

Teorem 1.6.5 [14]: E, G üzerinde bir TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $e,\ e'$ G' nin TL-vague birim elemanları ise $E(e,e')=1$ dir.

ii) $b,\ b'$ bir a elemanının TL-vague tersleri ise $E(b,b')=1$ dir.

iii) $\tilde{\circ}$ ikinci ve üçüncü mertebeden geçişken, $E(a_1,a_2)=1$ ve b, a_1' in TL-vague tersi ise b, a_2'nin TL-vague tersidir.

iv) $\tilde{\circ}$ birinci mertebeden geçişken, b, a_1 elemanının $e\in G$ TL-vague birim elemanına göre TL-vague tersi ise b, a'nın her TL-vague birim elemanına göre TL-vague tersidir.

v) $\tilde{\circ}$ birinci mertebeden geçişken, b, b' a elemanının sırasıyla $e, e' \in G$ TL-vague birim elemanlarına göre TL-vague tersileri ise $E(b, b') = 1$ dir.

vi) E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı ise G'nin TL-vague birim elemanı ve bir elemanın TL-vague tersi tektir.

Teorem 1.6.6 [7]: $(G,\circ)$ grupoid olsun. E, G üzerinde regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı olmak üzere, $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi $\tilde{\circ}\,(a, b, c) = E(a \circ b, c)$ olarak tanımlanırsa;

1) G yarıgrup ise G TL-vague yarı gruptur.
2) G monoid ise G TL-vague monoiddir
3) G grup ise G TL-vague gruptur.
4) G değişmeli grup ise G değişmeli TL-vague gruptur.

E, G üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $\tilde{\circ}$, G üzerinde TL-vague ikili işlem ise $\tilde{\circ}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan Teorem 1.5.4 ile $\exists\, \circ : G \times G \to G$ öyle ki

$\tilde{\circ}\,(a, b, a \circ b) = 1$ ve $\tilde{\circ}\,(a, b, c) \leq E(a \circ b, c)$

koşulunu sağlar. Buradaki "$\circ$" ikili işlemi, $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi ile üretilen bir ikili işlemdir. Bu durumda aşağıdaki teorem ile ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntıları için TL-vague gruptan klasik anlamda gruba gidebiliriz.

Teorem 1.6.7 [7]: E, G üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olmak üzere; $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlem ve "$\circ$", $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi ile üretilen bir ikili işlem olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

1) G TL-vague yarı grup ise $(G,\circ)$ yarıgruptur.
2) G TL-vague monoid ise $(G,\circ)$ monoiddir.
3) G TL-vague grup ise $(G,\circ)$ gruptur.
4) G değişmeli TL-vague grup ise $(G,\circ)$ değişmeli gruptur.

Tanım 1.6.8 [6]: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ için A'ya $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalı denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b \in A$ ve $c \in G$ için $\tilde{\circ}\,(a, b, c) = 1$ ise $c \in A$ dır.

Teorem 1.6.9 [6]: E, G üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup olsun. Bu takdirde her $a, b, c, u \in G$ için

i) $\tilde{\circ}\,(a, b, u) T\, \tilde{\circ}\,(a, c, u) \leq E(b, c)$,

ii) $\tilde{\circ}\,(b,a,u) T \tilde{\circ}\,(c,a,u) \leq E(b,c)$

dır.

Teorem 1.6.10 [34]: E_i, G_i üzerinde L-fuzzy denklik bağıntıları, $(G_i,\tilde{\circ}_i)$ L-vague gruplar $(i = 1,2,\dots,n)$, $G = G_1 \times \dots \times G_n$ ve $E = E_1 \times \dots \times E_n$ olsun. Bu takdirde $\widetilde{\odot}: G \times G \times G \longrightarrow L$ $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$, $z = (z_1,\dots,z_n) \in G$ için;

$$\widetilde{\odot}\,(x,y,z) := \wedge_{i=1}^{n} \tilde{\circ}_i\,(x_i,y_i,z_i)$$

ile tanımlanan $\widetilde{\odot}$ L-vague ikili işlemi ile G bir L-vague gruptur.

Tanım 1.6.11 [6]: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ öyle ki A, $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalı olsun. A'ya G'nin TL-vague alt grubu denir :$\Leftrightarrow$ $(A,\tilde{\circ}\downarrow_{A\times A\times A})$ TL-vague gruptur.

Teorem 1.6.12 [6]: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup olmak üzere $\emptyset \neq A \subseteq G$ için A, G'nin TL-vague alt grubudur. $\Leftrightarrow$

i) A, $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalı,

ii) Her $a \in A$ için $a^{-1} \in A$

dır.

Tanım 1.6.13 [6]: $(G,\tilde{\circ})$ ve $(H,\widetilde{\otimes})$ iki TL-vague yarı grup olsun. $\phi: G \to H$ fonksiyonuna TL-vague homomorfi denir.$\Leftrightarrow$ Her $a,b,c \in G$ için

$$\tilde{\circ}\,(a,b,c) \leq \widetilde{\otimes}\big(\phi(a),\phi(b),\phi(c)\big)$$

dır.

Tanım 1.6.14 [6]: $(G,\tilde{\circ})$ ve $(H,\widetilde{\otimes})$ TL-vague monoidler ve $\phi: G \to H$ TL-vague homomorfi olsun. Bu durumda;

$$\{a \in G : \phi(a) = e_H\}$$

kümesine ϕ' nin TL-vague çekirdeği denir ve $VÇek\phi$ ile gösterilir.

Teorem 1.6.15 [6]: F, H üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı, $(G,\tilde{\circ})$ ve $(H,\widetilde{\otimes})$ TL-vague monoidler ve $\phi: G \to H$ TL-vague homomorfi olsun. Bu takdirde;

i) e_G ve e_H sırasıyla G ve H nin TL-vague birim elemanları ise

$F(\phi(e_G), e_H) = 1$ dir.

ii) F ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı ise

$\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$ dır.

Tanım 1.6.16 [6]: E ve F sırasıyla G ve H üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları olsunlar. $\phi: G \to H$ fonksiyonuna TL-vague birebir denir: $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in G$ için

$F(\phi(a), \phi(b)) \leq E(a, b)$

dir.

Tanım 1.6.17 [6]: $(G, \tilde{\circ})$, $(H, \tilde{\otimes})$ TL-vague yarı gruplar ve $\phi: G \to H$ örten TL-vague homomorfi olsun. ϕ'ye TL-vague izomorfi denir: $\Leftrightarrow$ ϕ TL-vague birebir ve $\phi^{-1}: H \to G$ TL-vague homomorfidir.

Tanım 1.6.18 [34]: $(G, \tilde{\circ})$ $TL-$vague grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. $\tilde{\otimes}$ A üzerinde TL-vague ikili işlem olsun. A'ya G'nun genelleştirilmiş TL-vague alt grubu denir : $\Leftrightarrow$

i) Her $a, b, c \in A$ için $\tilde{\otimes}(a, b, c) \leq \tilde{\circ}\,(a, b, c)$,

ii) $(A, \tilde{\otimes})$ TL-vague grup

dur.

Teorem 1.6.19 [34]:$(G, \tilde{\circ})$ $TL-$vague grup olsun. $A, B \in \wp(G)/\{\emptyset\}$ ve $\tilde{\otimes}$, $\tilde{\odot}$ sırasıyla A ve B kümeleri üzerinde TL-vague ikili işlemler olsun. Eğer B A'nın ve A , G'nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubu ise B, G' nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubudur.

Teorem 1.6.20 [34]: $(G, \tilde{\circ})$ TL-vague grup, $(A, \tilde{\otimes})$ G'nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubu ve $(B, \tilde{\odot})$, A' nın genelleştirilmiş TL-vague alt grubu olsun. Eğer $\tilde{\cdot}$ $A \cup B$ üzerinde TL-vague ikili işlem ise; $(A \cup B, \tilde{\cdot})$, G' nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubudur $\Leftrightarrow$

i) Her $a, b, c \in A \cup B$ için $\tilde{\cdot}\,(a, b, c) \leq \tilde{\circ}\,(a, b, c)$,

ii) $A \subseteq B$ veya $B \subseteq A$

dır.

Teorem 1.6.21 [34]: $(G, \tilde{\circ})$ TL-vague grup ve $\emptyset \neq A \subseteq G$ olsun. $\tilde{\otimes}$ A üzerinde TL-vague ikili işlem olmak üzere; $(A, \tilde{\otimes})$, G'nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubudur $\Leftrightarrow$

i) Her $a, b \in A$ için $\tilde{\circ}\,(a, b^{-1}, c) = 1 \Longrightarrow\ c \in A$,

ii) Her $a, b, c \in A$ için $\widetilde{\otimes}(a, b, c) \leq \tilde{\circ}\,(a, b, c)$

dır.

Teorem 1.6.22 [34]: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup ve $\emptyset \neq A \subset G$ olan bir küme olsun. $\widetilde{\otimes}$ A üzerinde TL-vague ikili işlem ise $\left(A, \widetilde{\otimes}\right)$ G'nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubudur $\Leftrightarrow$

i) Her $a \in A$ için $\widetilde{\otimes}$ TL-vague ikili işlemine göre tersi A'nın elemanı,

ii) Her $a, b, c \in A$ için $\widetilde{\otimes}(a, b, c) \leq \tilde{\circ}\,(a, b, c)$

dır.

Teorem 1.6.23 [34]: $(G,\tilde{\circ})$, $\left(H, \widetilde{\otimes}\right)$ TL-vague gruplar ve $\phi: G \rightarrow H$ TL-vague homomorfi olsun. Bu takdirde;

i) $\tilde{\cdot}$ $VÇek\phi$ üzerinde TL-vague ikili işlem ve her $a, b, c \in VÇek\phi$ için

$\tilde{\cdot}\,(a, b, c) \leq \tilde{\circ}\,(a, b, c)$

ise $(VÇek\phi,\tilde{\cdot})$ G'nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubudur.

ii) $(A,\tilde{\cdot})$ G'nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubu ve $\widetilde{\odot}$ $\phi(A)$ üzerinde TL-vague ikili işlem ve her $a, b, c \in \phi(A)$ için

$\widetilde{\odot}(a, b, c) \leq \widetilde{\otimes}(a, b, c)$

ise $\left(\phi(A), \widetilde{\odot}\right)$, H'nın genelleştirilmiş TL-vague alt grubudur.

iii) $(B,\tilde{\cdot})$ H'nın genelleştirilmiş TL-vague alt grubu ve $\widetilde{\odot}$ $\phi^{-1}(B)$ üzerinde TL-vague ikili işlem ve her $a, b, c \in \phi^{-1}(B)$ için

$\widetilde{\odot}(a, b, c) \leq \tilde{\circ}\,(a, b, c)$

ise $\left(\phi^{-1}(B), \widetilde{\odot}\right)$ G'nin genelleştirilmiş TL-vague alt grubudur.

$\tilde{+}$ ve $\tilde{*}$ R üzerinde TL-vague ikili işlemler ise $(R, \tilde{+},\tilde{*})$ sıralı üçlüsü ile gösterilecektir.

Tanım 1.6.24 [30]: E, F sırasıyla $R \times R$, R kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları olmak üzere; $(R, \tilde{+},\tilde{*})$ sıralı üçlüsüne TL-vague halka denir. $\Leftrightarrow$

i) $(R, \tilde{+})$ değişmeli TL-vague grup,

ii) $(R,\tilde{*})$ TL-vague yarı grup,

iii) $(R, \tilde{+},\tilde{*})$ aşağıda verilen iki özelliği sağlar.

Her $x, y, z, d, t, a, b, c \in R$ için

$\tilde{*}(x,y,a)T\tilde{*}(x,z,b)T\tilde{+}(a,b,c)T\tilde{+}(y,z,d)T\tilde{*}(x,d,t) \leq E(t,c)$,

$\tilde{*}(x,z,a)T\tilde{*}(y,z,b)T\tilde{+}(a,b,c)T\tilde{+}(x,y,d)T\tilde{*}(d,z,t) \leq E(t,c)$,

dır.

$(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halkasına birim elemanlı vague halka denir : $\Leftrightarrow$ $\exists e \in R$, her $x \in R$ için

$\tilde{*}(x,e,x)T\tilde{*}(e,x,x) = 1$

dir.

$(R,\tilde{+},\tilde{*})$ vague halkasına değişmeli TL-vague halka denir : $\Leftrightarrow$ Her $x,y,a,b \in R$ için

$\tilde{*}(x,y,a)T\tilde{*}(y,x,b) \leq E(a,b)$

dır.

Bu çalışmada $\tilde{*}$'ye göre TL-vague birim eleman $e_{\tilde{*}}$ ile bir x elemanının TL-vague tersi ise x^{-1}; $\tilde{+}$'ya göre TL-vague birim eleman $e_{\tilde{+}}$ ile bir x elemanının TL-vague tersi ise $-x$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.6.25 [30]:$(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka, $\emptyset \neq A \subseteq R$ ve A $\tilde{+}$ ve $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalı olsun. A'ya R'nin TL-vague alt halkası denir: $\Leftrightarrow$

$(A,\tilde{+}\downarrow_{A\times A\times A},\tilde{*}\downarrow_{A\times A\times A})$ TL-vague halkadır.

Teorem 1.6.26 [30]: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka ve E, R üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı ise her $x \in R$ için

$\tilde{*}(x,e_{\tilde{+}},e_{\tilde{+}}) = 1$

dir.

Tanım 1.6.27 [30]:$(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka, $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, R'nin TL-vague alt halkasına sol(sağ) TL-vague ideali denir : $\Leftrightarrow$ Her $a \in I$, her $x \in R$ için $\exists b \in I$ öyleki

$\tilde{*}(x,a,b) = 1$ ($\tilde{*}(a,x,b) = 1$)

dir.

Tanım 1.6.28 [30]: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ ve $(S,\widetilde{\oplus},\widetilde{\odot})$ TL-vague halkalar olsun. $\phi: R \to S$ fonksiyonuna TL-vague halka homomorfisi denir: $\Leftrightarrow$ Her $a,b,c \in R$ için

$\tilde{+}(a,b,c) \leq \widetilde{\oplus}\big(\phi(a),\phi(b),\phi(c)\big)$ ve $\tilde{*}(a,b,c) \leq \widetilde{\odot}\big(\phi(a),\phi(b),\phi(c)\big)$

dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölüm tezin özgün kısmını oluşturmaktadır. 2.1 ve 2.2 kısımlarında sırasıyla TL-vague grup ve TL-vague halka ile ilgili bazı yeni özellikler verildi. Kısım 2.3'de ise TL-vague modül tanımı verilerek modüller üzerinde mevcut olan bir çok özellik TL-vague modüllere aktarıldı.

2.1. TL-vague Grupların Üzerine Çalışmalar

TL-vague gruplar klasik anlamdaki grupların bir genişlemesidir. Demirci [6]'in verdiği Teorem 1.6.6 ile bir gruptan vague grup elde edebiliyoruz. Fakat bir TL-vague gruptan grup elde etmemiz için TL-fuzzy denklik bağıntısının ayrılabilir olması gerekiyor. Sonuç olarak bir küme üzerinde elde edilebilecek grup ve TL-vague grup sayılarının farklılık göstermektedir.

Örnek 2.1.1: Örnek 1.4.12'de ki E_2 invaryant T_1L-fuzzy denklik bağıntısı ve $\tilde{\circ}$, $\tilde{\otimes}$ T_1L-vague ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır ise $(\mathbb{Z}_2,\tilde{\circ})$ ve $(\mathbb{Z}_2,\tilde{\otimes})$ vague gruplardır.

Tablo 4. Örnek 2.1.1'deki T_1L-vague ikili işlemlerinin tablosu

$\tilde{\circ}$		$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\tilde{\circ}\,(\bar{0},i,j)$	$\bar{0}$	1	α
	$\bar{1}$	α	1
$\tilde{\circ}\,(\bar{1},i,j)$	$\bar{0}$	α	1
	$\bar{1}$	1	α

$\tilde{\otimes}$		$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\tilde{\otimes}(\bar{0},i,j)$	$\bar{0}$	1	α
	$\bar{1}$	1	α
$\tilde{\otimes}(\bar{1},i,j)$	$\bar{0}$	1	α
	$\bar{1}$	α	1

Tablo.4'den anlaşılacağı üzere $\alpha \in L = \{0, a, 1\}$ elemanını değiştirerek üç farklı $(\mathbb{Z}_2,\tilde{\circ})$ vague grupları elde edilir. Benzer şekilde üç farklı $(\mathbb{Z}_2,\tilde{\otimes})$ vague grupları elde edilir. Oysaki klasik anlamda düşünüldüğünde $\mathbb{Z}_2$ kümesini grup yapan sadece iki tane ikili işlem mevcuttur.

TL-vague grupların klasik gruplardan bir farkı TL-vague birim eleman ve bir elemanın TL-vague tersinin elemanlarının tek olması gerekmediğidir. Eğer E, G üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı ise Teorem 1.6.5 ile TL-vague birim eleman ve bir elemanın TL-vague tersi tektir. Ancak E, G üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı değil ise TL-vague birim eleman ve bir elemanın TL-vague tersi tek olması gerekmez.

Örnek 2.1.2: L tam kafes, T, L üzerinde bir *t*-norm ve G en az iki elemanlı bir küme olmak üzere her $x, y \in G$ için $E(x, y) = 1$ ise E G üzerinde ayrılabilir olmayan TL-fuzzy denklik bağıntısıdır. Ayrıca her $a, b, c \in G$ için

$$\tilde{\circ}\,(a, b, c) = 1$$

ile tanımlanan $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi ile G kümesi TL-vague gruptur ve her eleman TL-vague birim elemandır. Diğer yandan her eleman G'deki bütün elemanların tersidir.

Teorem 2.1.3: E, G üzerinde bir TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup olsun. Bu takdirde $c \in G$ için $\tilde{\circ}\,(c, c, c) = 1$ ise $E(e, c) = 1$ dir.

İspat: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague yarı grup olduğundan,

$$1 = \tilde{\circ}\,(c, c, c) T \,\tilde{\circ}\,(c^{-1}, c, e) T \,\tilde{\circ}\,(c^{-1}, c, e) T \,\tilde{\circ}\,(e, c, c) \leq E(e, c)$$

dir. Buradan

$$E(e, c) = 1$$

elde edilir.

Teorem 2.1.4: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup ve E, G üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde G'nin TL-vague alt gruplarının kümesi "$\subseteq$" bağıntısına göre bir tam kafestir.

İspat: $\{H_i : i \in I\}$ TL-vague alt gruplarının bir ailesi ise $H_i \neq \emptyset$ olduğundan her $i \in I$ için $a \in H_i$ mevcuttur. H_i TL-vague alt grup olduğundan $a^{-1} \in H_i$ öyle ki

$$\tilde{\circ}\,(a, a^{-1}, e) = 1$$

dir. H_i TL-vague kapalı olduğundan her $i \in I$ için $e \in H_i$ dir. E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan TL-vague birim eleman tektir. Böylece $e \in \bigcap_{i\in I} H_i$ elde edilir. Buradan $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$ dir. $a, b \in \bigcap_{i\in I} H_i$ için $\tilde{\circ}\,(a, b, c) = 1$ olsun. Buradan her $i \in I$ için $a, b \in H_i$ ve H_i TL-vague alt grup olduğundan $c \in H_i$ elde edilir. Böylece her $i \in I$ için $c \in H_i$ olduğundan $c \in \bigcap_{i\in I} H_i$ dir. Bundan dolayı $\bigcap_{i\in I} H_i$, $\tilde{\circ}$ altında TL-vague kapalıdır.

$a \in \bigcap_{i \in I} H_i$ keyfi olsun. Bu takdirde her $i \in I$ için $a \in H_i$ dir. H_i kümeleri TL-vague alt grup olduklarından her $i \in I$ için $a^{-1} \in H_i$ dir. Böylece $a^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$ elde edilir. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} H_i$ G'in TL-vague alt grubudur.

G TL-vague grup olduğundan TL-vague alt gruplarının kümesi "$\subseteq$" bağıntısı ile tam kafestir.

Gruplarda Teorem 1.3.6'da bahsedildiği gibi alt grup olma şartları kümelerden faydalanarak ifade edilebilir. TL-vague gruplarda ise benzer durumu ifade etmek için aşağıdaki tanımlar verildi.

Tanım 2.1.5: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup, $A \in \wp(G)/\{\emptyset\}$ olsun. Bu takdirde,

$$\{y \in G \mid \exists x \in A \ \ \tilde{\circ}\,(x,y,e) T \,\tilde{\circ}\,(y,x,e) = 1\,\}$$

kümesine A kümesinin TL-vague tersi denir. Bu küme $A_{\tilde{\circ}}^{-1}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup, $A, B \in \wp(G)/\{\emptyset\}$ olsun. Bu takdirde,

$$\{c \in G \mid \exists a \in A\ \exists b \in B\ \ \tilde{\circ}\,(a,b,c) = 1\,\}$$

kümesine A ve B kümelerinin TL-vague çarpımı denir. Bu küme $A \,\tilde{\circ}\, B$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 2.1.7: G boştan farklı bir küme olsun. Örnek 2.1.2'deki E TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi göz önüne alınırsa herhangi, $A, B \in \wp(G)/\{\emptyset\}$ kümeleri için $A_{\tilde{\circ}}^{-1} = G$ ve $A \,\tilde{\circ}\, B = G$ dir.

Teorem 2.1.8: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup, $A \in \wp(G)/\{\emptyset\}$ olan bir küme olsun. A, G'nin TL-vague alt grubudur $\Leftrightarrow$

i) $A \,\tilde{\circ}\, A \subseteq A$,

ii) $A_{\tilde{\circ}}^{-1} \subseteq A$

dır.

İspat: : $\Longrightarrow$ A, G'nin TL-vague alt grubu olsun.

i) $c \in A \,\tilde{\circ}\, A$ keyfi olsun. $\exists a, b \in A$ öyleki

$$\tilde{\circ}\,(a,b,c) = 1$$

dir. A, G'nin TL-vague alt grubu olduğundan TL-vague kapalıdır. Bu durumda $c \in A$ dır. Böylece $A \,\tilde{\circ}\, A \subseteq A$ elde edilir.

ii) $b \in A_{\tilde{\circ}}^{-1}$ keyfi olsun. $\exists a \in A$ öyleki

$$\tilde{\circ}\,(a,b,e)T\,\tilde{\circ}\,(b,a,e) = 1$$

dir. b a elemanının TL-vague tersidir. A, G'nin TL-vague alt grubu olduğundan $b \in A$ dır. Buradan $A_{\tilde{\circ}}^{-1} \subseteq A$ elde edilir.

$\Leftarrow$: $A\,\tilde{\circ}\,A \subseteq A$ ve $A_{\tilde{\circ}}^{-1} \subseteq A$ olsun. $a,b \in A$ keyfi olmak üzere $\tilde{\circ}\,(a,b,c) = 1$ olsun. $c \in A\,\tilde{\circ}\,A \subseteq A$ olduğundan $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi TL-vague kapalıdır.

$a \in A$ ve b a elemanının TL-vague tersi olsun.

$$b \in A_{\tilde{\circ}}^{-1} \subseteq A$$

olduğundan A, G'nin TL-vague alt grubudur.

Teorem 1.6.6 ile Demirci [6] gruplardan TL-vague gruplar elde edildiği gösterildi. Benzer şekilde alt gruplar ve TL-vague alt gruplar arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem 2.1.9:$(G,\circ)$ grup ve A G'nin alt grubu olsun. E G üzerinde regüler ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi $\tilde{\circ}\,(a,b,c) = E(a \circ b, c)$ olarak tanımlansın. Bu takdirde A, G'nin TL-vague alt grubudur.

İspat: Teorem 1.6.6 ile G'nin TL-vague gruptur.

$x \in A\,\tilde{\circ}\,A$ keyfi olsun. $\exists a,b \in A$ öyle ki $\tilde{\circ}\,(a,b,x) = 1$ dir. Bu durumda

$$E(a \circ b, x) = 1$$

elde edilir. E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan $x = a \circ b$ dır. A alt grup olduğundan $x = a \circ b \in A$ elde edilir. Böylece $A\,\tilde{\circ}\,A \subseteq A$ dır.

$y \in A_{\tilde{\circ}}^{-1}$ keyfi olmak üzere $\exists x \in A$ öyle ki

$$\tilde{\circ}\,(x,y,e)T\,\tilde{\circ}\,(y,x,e) = 1$$

dir. Bu durumda

$$E(x \circ y, e) = 1 = E(y \circ x, e)$$

dir. E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan $y = x^{-1}$ elde edilir. A alt grup olduğundan $y \in A^{-1}$ dır. Böylece $A_{\tilde{\circ}}^{-1} \subseteq A$ dır. Sonuç olarak A, G'nin TL-vague alt grubudur.

Teorem 2.1.10: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup, $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken ve $a,b,c \in G$ için $\tilde{\circ}\,(a,b,c) = 1$ olsun. Bu takdirde $\tilde{\circ}\,(b^{-1},a^{-1},c^{-1}) = 1$ dir.

İspat: $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken ve keyfi $a,b,c \in G$ için

$$\tilde{\circ}(a,b,c)=1$$

olsun. $\tilde{\circ}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists l \in G$ öyle ki

$$\tilde{\circ}(c,b^{-1},l)=1$$

dir. $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague yarı grup olduğundan

$$1=\tilde{\circ}(b,b^{-1},e)T\,\tilde{\circ}(a,e,a)T\,\tilde{\circ}(a,b,c)T\,\tilde{\circ}(c,b^{-1},l)\leq E(a,l)$$

ve

$$1=\tilde{\circ}(c,b^{-1},l)TE(a,l)\leq\tilde{\circ}(c,b^{-1},a)$$

dir. Buradan

$$\tilde{\circ}(c,b^{-1},a)=1$$

elde edilir. Diğer yandan $\tilde{\circ}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists x \in G$ öyle ki

$$\tilde{\circ}(a^{-1},c,x)=1$$

dir. Böylece

$$1=\tilde{\circ}(a,b,c)T\,\tilde{\circ}(a^{-1},c,x)T\,\tilde{\circ}(a^{-1},a,e)T\,\tilde{\circ}(e,b,b)\leq E(x,b)$$

ve

$$1=\tilde{\circ}(a^{-1},c,x)T\,E(x,b)\leq\tilde{\circ}(a^{-1},c,b)$$

benzer şekilde $\tilde{\circ}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists d,m \in G$ öyle ki

$$\tilde{\circ}(b^{-1},a^{-1},d)=1 \text{ ve } \tilde{\circ}(c,d,m)=1$$

dir. Buradan

$$1=\tilde{\circ}(b^{-1},a^{-1},d)T\,\tilde{\circ}(c,d,m)T\,\tilde{\circ}(c,b^{-1},a)T\,\tilde{\circ}(a,a^{-1},e)\leq E(m,e)$$

ve

$$1=\tilde{\circ}(c,d,m)T\,E(m,e)\leq\tilde{\circ}(c,d,e)$$

olduğundan

$$\tilde{\circ}(c,l,e)=1 \tag{1}$$

elde edilir. $\tilde{\circ}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists z \in G$ öyle ki

$$\tilde{\circ}(d,c,z)=1$$

dir. Buradan

$$1=\tilde{\circ}(a^{-1},c,b)T\,\tilde{\circ}(b^{-1},b,e)T\,\tilde{\circ}(b^{-1},a^{-1},d)T\,\tilde{\circ}(d,c,z)\leq E(e,z)$$

olduğundan

$$1=\tilde{\circ}(d,c,z)T\,E(e,z)\leq\tilde{\circ}(d,c,e)$$

$$\tilde{\circ}(d,c,e)=1 \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2)'den Teorem 1.6.5 (ii) ile

$$E(d,c^{-1})=1$$

dir. Sonuç olarak

$$1 = \tilde{\circ}\,(b^{-1}, a^{-1}, d)T\,E(d, c^{-1}) \leq \tilde{\circ}\,(b^{-1}, a^{-1}, c^{-1})$$

olduğundan

$$\tilde{\circ}\,(b^{-1}, a^{-1}, c^{-1}) = 1$$

elde edilir.

Teorem 2.1.11: $(G,\tilde{\circ})$ TL-vague grup, H, K G'nin TL-vague alt grupları, $\tilde{\circ}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken ve $K \,\tilde{\circ}\, H$ G'nin TL-vague alt grubu olsun. Bu takdirde $H \,\tilde{\circ}\, K = K \,\tilde{\circ}\, H$ dır.

İspat: $c \in H \,\tilde{\circ}\, K$ keyfi olsun. Böylece $\exists h \in H$ ve $\exists k \in K$ öyleki

$$\tilde{\circ}\,(h, k, c) = 1$$

dir. Teorem 2.1.10 ile

$$\tilde{\circ}\,(k^{-1}, h^{-1}, c^{-1}) = 1$$

elde edilir. Buradan $c^{-1} \in K \,\tilde{\circ}\, H$ dir. c^{-1} elemanının bir TL-vague tersi c dir. $K \,\tilde{\circ}\, H$ G'nin TL-vague alt grubu olduğundan $c \in K \,\tilde{\circ}\, H$ elde edilir. Böylece $H \,\tilde{\circ}\, K \subseteq K \,\tilde{\circ}\, H$ elde edilir.

Tersine olarak $x \in K \,\tilde{\circ}\, H$ keyfi olsun. $K \,\tilde{\circ}\, H$ kümesi G'nin TL-vague alt grubu olduğundan $x^{-1} \in K \,\tilde{\circ}\, H$ dir. Bu durumda $\exists k \in K$ ve $\exists h \in H$ öyle ki

$$\tilde{\circ}\,(k, h, x^{-1}) = 1$$

dir. Teorem 2.1.10 ile

$$\tilde{\circ}\,(h^{-1}, k^{-1}, x) = 1$$

elde edilir. H ve K G'nin TL-vague alt grupları olduğundan $h^{-1} \in H$ ve $k^{-1} \in K$ dır. Böylece $x \in H \,\tilde{\circ}\, K$ elde edilir. Buradan $K \,\tilde{\circ}\, H \subseteq H \,\tilde{\circ}\, K$ dır. Sonuç olarak $H \,\tilde{\circ}\, K = K \,\tilde{\circ}\, H$ elde edilir.

TL-vague alt grupların TL-vague homomorfi altında görüntülerinin TL-vague alt grup olması gerekmez.

Örnek 2.1.12: $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki birinci TL-vague ikili işlem Örnek 2.1.1 deki gibi ikincisi her $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ için $\tilde{\otimes}(a, b, c) = 1$ olarak tanımlansın. $\phi: (\mathbb{Z}_2,\tilde{\circ}) \to (\mathbb{Z}_2, \tilde{\otimes})$ fonksiyonu her $a \in \mathbb{Z}_2$ için $\phi(a) = \bar{1}$ olarak tanımlanırsa; $\mathbb{Z}_2$ TL-vague alt grubudur, ancak $\phi(\mathbb{Z}_2)$ $\mathbb{Z}_2$'in TL-vague alt grubu değildir. Gerçekten her $a, b, c \in X$ için

$$\tilde{\circ}\,(a, b, c) \leq 1 = \tilde{\otimes}\big(\phi(a), \phi(b), \phi(c)\big)$$

olduğundan ϕ TL-vague homomorfidir.

$$\bar{1} \in \{\bar{1}\} \text{ için } \widetilde{\otimes}(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}) = 1$$

dir. $\bar{0} \notin \{\bar{1}\}$ olduğundan $\{\bar{1}\}$ kümesi $\widetilde{\otimes}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalı değildir. Bu durumda $\phi(\mathbb{Z}_2) = \{\bar{1}\}$ kümesi $(\mathbb{Z}_2, \widetilde{\otimes})$'in TL-vague alt grubu değildir.

Teorem 2.1.13: $(G, \tilde{\circ})$, $(H, \widetilde{\otimes})$, $(J, \widetilde{\odot})$ TL-vague yarı gruplar, $\phi: G \to H$, $\varphi: H \longrightarrow J$ TL-vague homomorfiler olsun. Bu takdirde $\varphi \circ \phi: G \to J$ TL-vague homomorfidir.

İspat: Her $a, b, c \in G$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\circ}\,(a, b, c) &\leq \widetilde{\otimes}\big(\phi(a), \phi(b), \phi(c)\big) \\ &\leq \widetilde{\odot}\,\big(\varphi\big(\phi(a)\big), \varphi\big(\phi(b)\big), \varphi\big(\phi(c)\big)\big) \\ &= \widetilde{\odot}\,(\varphi \circ \phi\,(a), \varphi \circ \phi(b), \varphi \circ \phi(c)) \end{aligned}$$

olduğundan Tanım 1.6.13 ile $\varphi \circ \phi$ TL-vague homomorfidir.

Eğer G ve H üzerindeki TL-fuzzy denklik bağıntıları ayrılabilir ise TL-vague birebir fonksiyonu birebir fonksiyondur. Ancak her birebir fonksiyon TL-vague birebir olması gerekmez. Bu duruma örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.1.14: L tam kafes, $\alpha \in L\backslash\{0\}$ ve T bir *t*-norm olmak üzere $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde

$$E(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ \alpha & x \neq y \end{cases}, \quad F(x, y) = 1$$

TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $(\mathbb{Z}, \tilde{\circ})$, $(\mathbb{Z}, \widetilde{\otimes})$ TL-vague yarı gruplar olsun. Bu takdirde $\phi = I_{\mathbb{Z}}$ birebir fonksiyondur ancak TL-vague birebir değildir.

Gerçekten;

$$2,3 \in \mathbb{Z} \text{ için } E_{\widetilde{\otimes}}\big(\phi(2), \phi(3)\big) = 1 \nleq E_{\tilde{\circ}}(2,3) = \alpha$$

olduğundan ϕ TL-vague birebir değildir.

Teorem 2.1.15: $(G, \tilde{\circ})$ TL-vague grup, $(H, \widetilde{\otimes})$ değişmeli TL-vague grup, E, F sırasıyla G ve H üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $\phi: G \to H$ TL-vague homomorfisi TL-vague birebir olsun. Bu takdirde G değişmeli TL-vague gruptur.

İspat: $a, b, c, d \in G$ keyfi olsun.

$$\begin{aligned} \tilde{\circ}\,(a, b, c) T\, \tilde{\circ}\,(b, a, d) &\leq \widetilde{\otimes}\big(\phi(a), \phi(b), \phi(c)\big) T \widetilde{\otimes}\big(\phi(b), \phi(a), \phi(d)\big) \\ &\leq F\big(\phi(c), \phi(d)\big) \end{aligned}$$

$\leq E(c,d)$

dir. Böylece

$\tilde{\circ}\,(a,b,c) T \,\tilde{\circ}\,(b,a,d) \leq E(c,d)$

elde edilir. Sonuç olarak G değişmeli TL-vague gruptur.

Teorem 2.1.16: $(G,\circ)$ ve $(H,\otimes)$ gruplar, E,F sırasıyla G ve H üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları olsun. G ve H üzerinde sırasıyla, her $a,b,c \in G$ ve her $x,y,z \in H$ için

$\tilde{\circ}\,(a,b,c) = E(a \circ b, c)$ ve

$\widetilde{\otimes}(x,y,z) = F(x \otimes y, z)$

TL-fuzzy ikili işlemleri tanımlansın. Eğer $\phi: G \to H$ grup homomorfisi E-F'ye genişletilmiş ise ϕ TL-vague homomorfidir.

İspat: G ve H üzerinde sırasıyla tanımlanan $\tilde{\circ}$ ve $\widetilde{\otimes}$ TL-fuzzy ikili işlemleri ile $(G,\tilde{\circ})$ ve $(H,\widetilde{\otimes})$ TL-vague yarı grupları elde edilir. Her $a,b,c \in G$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{\otimes}\big(\phi(a),\phi(b),\phi(c)\big) &= F(\phi(a)\otimes\phi(b),\phi(c)) \\ &= F(\phi(a \circ b),\phi(c)) \\ &\geq E(a \circ b, c) = \tilde{\circ}\,(a,b,c)\,.\end{aligned}$$

olduğundan ϕ TL-vague homomorfidir.

2.2. TL-vague Halkalar Üzerine Çalışmalar

Kısım 1.6'da verilen TL-vague halkalar hakkında mevcut olan tanım ve teoremlere ek olarak elde edilen bazı özellikler bu bölümde çalışıldı.

Örnek 2.2.1: L bir tam kafes ve $\mathbb{Z}$ kümesi üzerinde E TL-fuzzy denklik bağıntısı Örnek 1.4.8 (ii)'de ki gibi tanımlansın. Bu durumda her $a,b,c \in \mathbb{Z}$; $\beta,\gamma \in L$ ve $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ için TL-vague ikili işlemleri

$$\tilde{+}(a,b,c) = \begin{cases} 1, & a+b=c \\ \beta, & a+b \neq c \end{cases} \quad \text{ve} \quad \tilde{*}\,(a,b,c) = \begin{cases} 1, & a*b=c \\ \gamma, & a*b \neq c \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise $(\mathbb{Z},\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halkadır.

Teorem 2.2.2: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka olsun.

i) $e_{\tilde{*}}, e'_{\tilde{*}}$, $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ 'in iki TL-vague birim elemanı ise $E(e_{\tilde{*}}, e'_{\tilde{*}}) = 1$ dir.

ii) b, b' bir a elemanının $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemine göre iki TL-vague tersi ise $E(b, b') = 1$ dir.

iii) $\tilde{\mp}$ ikinci ve üçüncü mertebeden geçişken. Eğer $E(a_1, a_2) = 1$ ve b a_1'in TL-vague tersi ise b a_2'nin TL-vague tersidir.

iv) $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken, b, a_1 elemanının $e_{\tilde{*}} \in R$ TL-vague birim elemanına göre TL-vague tersi ise b a'nın her TL-vague birim elemanına göre TL-vague tersidir.

v) $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken, b, b' a elemanının sırasıyla $e_{\tilde{*}}, e'_{\tilde{*}} \in R$ TL-vague birim elemanlarına göre TL-vague tersleri ise $E(b, b') = 1$ dir.

vi) E ayrılabilir TL - fuzzy denklik bağıntısı ise TL-vague birim eleman ve bir elemanın TL-vague tersi tektir.

İspat: Teorem 1.6.5'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.2.3: $(R, \tilde{\mp}, \tilde{*})$ TL-vague halka ve $e_{\tilde{\mp}}$, $(R, \tilde{\mp})$ TL-vague grubunun TL-vague birim elemanı olsun. Bu takdirde $\tilde{\mp}$ ve $\tilde{*}$ TL-vague işlemleri birinci mertebeden geçişken ise her $x \in R$ için $\tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, e_{\tilde{\mp}}) = 1$ dir.

İspat: Her $x \in R$ için $\tilde{\mp}$ ve $\tilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyonlar olduğundan $\exists k, r \in R$ öyle ki

$$\tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, k) = 1 \text{ ve } \tilde{\mp}(k, k, r) = 1$$

dir.

$$1 = \tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, k) T \tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, k) T \tilde{\mp}(k, k, r) T \tilde{\mp}(e_{\tilde{\mp}}, e_{\tilde{\mp}}, e_{\tilde{\mp}}) T \tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, k) \leq E(r, k)$$

dir. $\tilde{\mp}$ birinci mertebeden geçişken olduğundan;

$$1 = \tilde{\mp}(k, k, r) T\, E(r, k) \leq \tilde{\mp}(k, k, k)$$

ile

$$\tilde{\mp}(k, k, k) = 1$$

elde edilir. Buradan Teorem 2.1.3 ile;

$$E(e_{\tilde{\mp}}, k) = 1$$

elde edilir. $\tilde{*}$ birinci mertebeden geçişken olduğundan;

$$1 = \tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, k) T E(e_{\tilde{\mp}}, k) \leq \tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, e_{\tilde{\mp}})$$

dir. Sonuç olarak

$$\tilde{*}\,(x, e_{\tilde{\mp}}, e_{\tilde{\mp}}) = 1$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4: $(R,+,*)$ halka ve E, R üzerindeki her iki ikili işleme göre regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı olsun. $\widetilde{+}$ ve $\widetilde{*}$ TL-vague işlemleri her $r,s,t\in R$ için

$$\widetilde{+}(r,s,t)=E(r*s,t) \quad \text{ve} \quad \widetilde{*}(r,s,t)=E(r*s,t)$$

olarak tanımlanırsa $(R,\widetilde{+},\widetilde{*})$ TL-vague halkadır.

İspat: Teorem 1.6.6'dan $(R,\widetilde{+})$ değişmeli TL-vague grup ve $(R,\widetilde{*})$ TL-vague yarı gruptur. Her $x,y,z,d,t,a,b,c\in R$ için

$$\begin{aligned}
&\widetilde{*}(x,y,a)T\widetilde{*}(x,z,b)T\widetilde{+}(a,b,c)T\widetilde{+}(y,z,d)T\widetilde{*}(x,d,t)\\
&\le E(x*y,a)TE(x*z,b)TE(a+b,c)TE(y+z,d)TE(x*d,t)\\
&\le E\big((x*y)+(x*z),a+b\big)TE(a+b,c)TE(y+z,d)TE(x*d,t)\\
&\le E\big((x*y)+(x*z),c\big)TE(x*(y+z),x*d)TE(x*d,t)\\
&\le E(x*(y+z),c)TE(x*(y+z),t)\\
&\le E(t,c)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\widetilde{*}(x,z,a)T\widetilde{*}(y,z,b)T\widetilde{+}(a,b,c)T\widetilde{+}(x,y,d)T\widetilde{*}(d,z,t)\\
&\le E(x*z,a)TE(y*z,b)TE(a+b,c)TE(y+z,d)TE(d*z,t)\\
&\le E\big((x*z)+(y*z),a+b\big)TE(a+b,c)TE(x*(y+z),x*d)TE(x*d,t)\\
&\le E(x*(y+z),a+b)TE(a+b,c)TE(x*(y+z),t)\\
&\le E(x*(y+z),c)TE(x*(y+z),t)\\
&\le E(t,c)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(R,\widetilde{+},\widetilde{*})$ TL-vague halkadır.

Teorem 2.2.5: $(R,\widetilde{+},\widetilde{*})$ bir TL-vague halka ve E, R üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olmak üzere; "$+$" ve "$*$" sırasıyla $\widetilde{+}$ ve $\widetilde{*}$ TL-vague ikili işlemleri ile üretilen ikili işlemler olsun. Bu durumda $(R,+,*)$ halkadır.

İspat: Teorem 1.6.7 ile $(R,\widetilde{+})$ değişmeli TL-vague grup olduğundan $(R,+)$ değişmeli grup ve $(R,\widetilde{*})$ TL-vague yarı grup olduğundan $(R,*)$ yarı gruptur. Her $a,b,c\in R$ için

$$\begin{aligned}
1=\ &\widetilde{*}(a,b,a*b)T\widetilde{*}(a,c,a*c)T\widetilde{+}\big(a*b,a*c,(a*b)+(a*c)\big)\\
&\qquad T\widetilde{+}(b,c,b+c)T\widetilde{*}\big(a,b+c,a*(b+c)\big)\\
&\le E((a*b)+(a*c),a*(b+c))
\end{aligned}$$

E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan

$$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(b + c) * a = (b * a) + (c * a)$$

olduğu açıktır. Böylece $(R, +,*)$ halkadır.

Sezer [34]'in çalışmasında verilen Teorem 1.6.10'da L-vague grupların kartezyen çarpımlarının da L-vague grup olduğu belirtilmiştir. Bundan yola çıkarak L-vague halkaların Kartezyen çarpımının L-vague halka olması aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 2.2.6: E_i, R_i üzerinde L-fuzzy denklik bağıntıları ve $(R_i, \tilde{+}_j, \tilde{*}_j)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ L-vague halkalar olsunlar. $R = R_1 \times \dots \times R_n$ olmak üzere

$$\widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes} : R \times R \times R \longrightarrow L$$

L-vague ikili işlemleri $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in R$ için;

$$\widetilde{\oplus}(x, y, z) \coloneqq \wedge_{i=1}^{n} \tilde{+}_i(x_i, y_i, z_i)$$

ve

$$\widetilde{\otimes}(x, y, z) \coloneqq \wedge_{i=1}^{n} \tilde{*}_i(x_i, y_i, z_i)$$

olarak tanımlanırsa $(R, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes})$ bir L-vague halkadır.

İspat: Teorem 1.6.10 ile $(R, \widetilde{\oplus})$ L-vague gruptur. Ayrıca $(R, \widetilde{\otimes})$ L-vague yarı gruptur. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in R$ olsun.

$$A := \widetilde{\otimes}(x, y, a) \wedge \widetilde{\otimes}(y, x, b)$$

olarak tanımlansın. Her $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için

$$A \le \tilde{+}_i(x_i, y_i, a_i) \wedge \tilde{+}_i(y_i, x_i, b_i) \le E_i(a_i, b_i)$$

dir. Buradan

$$A \le \wedge_{i=1}^{n} E_i(a_i, b_i) = E_1 \times \dots \times E_n((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n))$$

elde edilir. Böylece $(R, \widetilde{\oplus})$ değişmeli L-vague gruptur.

$$B := \widetilde{\otimes}(x, y, a) \wedge \widetilde{\otimes}(x, z, b) \wedge \widetilde{\oplus}(a, b, c) \wedge \widetilde{\oplus}(y, z, d) \wedge \widetilde{\otimes}(x, d, t)$$

olarak tanımlansın. Her $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için

$$B \le \tilde{*}_i(x_i, y_i, a_i) \wedge \tilde{*}_i(x_i, z_i, b_i) \wedge \tilde{+}_i(a_i, b_i, c_i) \wedge \tilde{+}_i(y_i, z_i, d_i) \wedge \tilde{*}_i(x_i, d_i, t_i)$$
$$\le E_i(c_i, t_i)$$

elde edilir. Bu takdirde

$$B \le \wedge_{i=1}^{n} E_i(c_i, t_i) = E_1 \times \dots \times E_n((c_1, \dots, c_n), (t_1, \dots, t_n))$$

dir. Benzer şekilde Tanım 1.6.24 (iii) koşuluda gerçeklenir. Böylece $(R, \widetilde{\oplus}, \widetilde{\otimes})$ bir L-vague halkadır.

Teorem 2.2.7: $(R, \widetilde{+}, \widetilde{*})$ vague halka, $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. A'ya R'nin TL-vague alt halkasıdır. ⟺

i) A, R'nin TL-vague alt grubudur.

ii) A, $\widetilde{*}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalıdır.

İspat::⟹ A R'nin TL-vague alt halkası ise $(A, \widetilde{+}\downarrow_{A\times A\times A}, \widetilde{*}\downarrow_{A\times A\times A})$ TL-vague halkadır. Bu durumda tek tarafın gösterilmesi yeterli olacaktır.

⟸: A, R'nin TL-vague alt grubu olduğundan $(A, \widetilde{+}\downarrow_{A\times A\times A})$ TL-vague gruptur. $(R, \widetilde{+})$ değişmeli TL-vague grup olduğundan R değişmeli TL-vague gruptur.

A, $\widetilde{*}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalı olduğundan $\widetilde{*}$ A üzerinde güçlü TL-fuzzy fonksiyondur. R TL-vague halka olduğundan A kümesi de TL-vague halka olma koşullarını sağlar.

Teorem 2.2.8: $(R, \widetilde{+}, \widetilde{*})$ TL-vague halka ise $\{e_{\widetilde{+}}\}$ ve R kümeleri R'nin TL-vague alt halkalarıdır.

Teorem 2.2.9: $(R, +, *)$ bir halka, A R'nin alt halkası, E, R üzerindeki her iki ikili işleme göre regüler ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı ve $\widetilde{+}$, $\widetilde{*}$ TL-vague ikili işlemleri her $a, b, c \in R$ için

$$\widetilde{+}(a, b, c) = E(a + b, c)$$

$$\widetilde{*}(a, b, c) = E(a * b, c)$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde A, R'nin TL-vague alt halkasıdır.

İspat: A R halkasının alt halkası olduğundan A R grubunun alt grubudur. Teorem 2.1.9 ile A R'nin TL-vague alt grubudur.

Yine Teorem 2.1.9'dan benzer şekilde A $\widetilde{*}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalıdır. Böylece Teorem 2.2.7 ile A R'nin TL-vague alt halkasıdır.

Teorem 2.2.10: $(R, \widetilde{+}, \widetilde{*})$ TL-vague halka ve E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde R'nin TL-vague alt halkalarının kümesi "⊆" bağıntısına göre tam kafestir.

İspat: $\{(H_i, \widetilde{+}, \widetilde{*}) : i \in I\}$ R'nin TL-vague alt halkalarının bir ailesi olsun.

Teorem 2.1.4 den $\bigcap_{i\in I} H_i$, R'nin TL-vague alt grubudur. Buradan her $i \in I$ için H_i kümeleri $\widetilde{*}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalı olduğundan Teorem 2.1.4'ün ispatından $\bigcap_{i\in I} H_i$ $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemi altında TL-vague kapalıdır. Bu durumda Teorem 2.2.7 ile $\bigcap_{i\in I} H_i$, R'nin TL-vague alt halkasıdır. Teorem 2.2.8 ile R, R'nin TL-vague alt halkasıdır. Böylece R'nin TL-vague alt halkalarının kümesi "$\subseteq$" bağıntısına göre bir tam kafestir.

Tanım 2.2.11: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka, $a\in R$ olsun. Bu durumda $a\tilde{*}R$ ve $R\tilde{*}a$ kümeleri sırasıyla

$$a\tilde{*}R=\{x\in R|\exists r\in R \quad \tilde{*}(a,r,x)=1\} \text{ ve } R\tilde{*}a=\{y\in R|\exists r\in R \quad \tilde{*}(r,a,y)=1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.12: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka $a\in R$ ve $\tilde{+}$, $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemleri birinci mertebeden geçişken olsun. Bu takdirde $a\tilde{*}R$ ve $R\tilde{*}a$ kümeleri R'nin TL-vague alt halkalarıdır.

İspat: $x,y\in a\tilde{*}R$ keyfi ve $\tilde{+}(x,y,z)=1$ olsun. Bu takdirde $\exists r_1,r_2\in R$ öyle ki

$$\tilde{*}(a,r_1,x)=1 \text{ ve } \tilde{*}(a,r_2,y)=1$$

dir. $\tilde{+}$ ve $\tilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyonlar olduğundan $\exists r_3,k\in R$ öyle ki

$$\tilde{+}(r_1,r_2,r_3)=1 \text{ ve } \tilde{*}(a,r_3,k)=1$$

dir. Bu takdirde

$$1=\tilde{+}(r_1,r_2,r_3)T\tilde{*}(a,r_3,k)T\tilde{*}(a,r_1,x)T\tilde{*}(a,r_2,y)T\tilde{+}(x,y,z)\le E(z,k)$$

ve

$$1=\tilde{*}(a,r_3,k)TE(z,k)\le\tilde{*}(a,r_3,z)$$

dir. Buradan $z\in a\tilde{*}R$ elde edilir. $a\tilde{*}R$ kümesi $\tilde{+}$ TL-vague ikili işlemine göre TL-vague kapalıdır.

$x\in a\tilde{*}R$ keyfi olsun. $\tilde{+}$ ve $\tilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyonlar olduğundan $\exists l,m\in R$ öyle ki

$$\tilde{*}(a,-r_1,l)=1 \text{ ve } \tilde{+}(x,l,m)=1$$

dir. Bu takdirde

$$1=\tilde{+}(r_1,-r_1,e_{\tilde{+}})T\tilde{*}(a,e_{\tilde{+}},e_{\tilde{+}})T\tilde{*}(a,r_1,x)T\tilde{*}(a,-r_1,l)T\tilde{+}(x,l,m)$$
$$\le E(e_{\tilde{+}},m)$$

ve

$$1=\tilde{+}(x,l,m)TE(e_{\tilde{+}},m)\le\tilde{+}(x,l,e_{\tilde{+}})$$

olduğundan

$\widetilde{+}(x, l, e_{\widetilde{+}}) = 1$

elde edilir. Benzer şekilde $\widetilde{+}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists k \in R$ öyle ki

$\widetilde{+}(l, x, k) = 1$

dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{+}(-r_1, r_1, e_{\widetilde{+}})T \,\widetilde{*}\, (a, e_{\widetilde{+}}, e_{\widetilde{+}})T \,\widetilde{*}\, (a, -r_1, l)T \,\widetilde{*}\, (a, r_1, x)T\widetilde{+}(l, x, k)$$
$$\leq E(e_{\widetilde{+}}, k)$$

ve

$$1 = \widetilde{+}(l, x, k)TE(e_{\widetilde{+}}, k) \leq \widetilde{+}(l, x, e_{\widetilde{+}})$$

olduğundan

$\widetilde{+}(l, x, e_{\widetilde{+}}) = 1$

elde edilir. Bu durumda

$E(l, -x) = 1$

dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{*}\, (a, -r, l)TE(l, -x) \leq \widetilde{*}\, (a, -r, -x)$$
$$1 = \widetilde{*}\, (a, -r, -x)$$

olduğundan $-x \in a \,\widetilde{*}\, R$ dır. Böylece $a \,\widetilde{*}\, R$, R'nin TL-vague alt grubudur.

$x, y \in a \,\widetilde{*}\, R$ ve $\widetilde{*}\, (x, y, z) = 1$ olsun. Bu durumda $\widetilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists k, t \in R$ öyle ki

$\widetilde{*}\, (r_1, y, k) = 1$ ve $\widetilde{*}\, (a, k, t) = 1$

ve

$$1 = \widetilde{*}\, (r_1, y, k)T \,\widetilde{*}\, (a, k, t)T \,\widetilde{*}\, (a, r_1, x)T \,\widetilde{*}\, (x, y, z) \leq E(t, z)$$

olduğundan

$$1 = \widetilde{*}\, (a, k, t)TE(t, z) \leq \widetilde{*}\, (a, k, z)$$

elde edilir. $\widetilde{*}\, (a, k, z) = 1$ olacak şekilde $k \in R$ mevcuttur. Buradan $z \in a \,\widetilde{*}\, R$ olduğundan $a \,\widetilde{*}\, R$ kümesi $\widetilde{*}$ TL-vague ikili işlemine göre TL-vague kapalıdır. Böylece $a \,\widetilde{*}\, R$, R'nin TL-vague alt halkasıdır. Benzer şekilde $R \,\widetilde{*}\, a$ kümesi , R'nin TL-vague alt halkasıdır.

Örnek 2.2.13: $(R, \widetilde{+}, \widetilde{*})$ TL-vague halka, $\widetilde{+}$, $\widetilde{*}$ birinci mertebeden geçişken ise $\{e_{\widetilde{+}}\}$ ve R TL-vague ideallerdir.

Çözüm: Teorem 2.2.3 ile her $x \in R$ için $\widetilde{*}\, (x, e_{\widetilde{+}}, e_{\widetilde{+}}) = 1$ ve $\widetilde{*}\, (e_{\widetilde{+}}, x, e_{\widetilde{+}}) = 1$ olduğundan $\{e_{\widetilde{+}}\}$ TL-vague idealidir. R'nin TL-vague ideal olduğu açıktır.

Teorem 2.2.14: E, R üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı, $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka, I ve J R'nin iki sol TL-vague idealleri olsun. Bu takdirde $I\cap J$ R'nin sol TL-vague idealidir.

İspat: I ve J R'nin iki sol TL-vague alt halkaları olduğundan Teorem 2.2.10'dan $I\cap J$ R'nin TL-vague alt halkasıdır. Her $a\in I\cap J$, $x\in R$ için $\exists b\in I$ öyleki

$$\tilde{*}\,(x,a,b)=1$$

ve $\exists c\in J$ öyleki

$$\tilde{*}\,(x,a,c)=1$$

dir. $\tilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan

$$1=\tilde{*}\,(x,a,b)T\,\tilde{*}\,(x,a,c)TE((x,a),(x,a))\leq E(b,c)$$

$$1=E(b,c)$$

elde edilir. E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan $b=c$ olur. Bu durumda her $a\in I\cap J$, her $x\in R$ için $\exists b\in I\cap J$ öyleki $\tilde{*}\,(x,a,b)=1$ dir. Böylece $I\cap J$ R'nin sol TL-vague idealidir.

Teorem 2.2.15: R birim elemanlı TL-vague halka olsun. Bu takdirde I , R'nin TL-vague birim elemanını içeren bir sol TL-vague ideali ise $I=R$ dir.

İspat: $r\in R$ için $e_{\tilde{*}}\in I$ olduğundan $\exists b\in I$ öyleki

$$\tilde{*}\,(r,e_{\tilde{*}},b)=1$$

dir. $\tilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan

$$1=\tilde{*}\,(r,e_{\tilde{*}},b)T\,\tilde{*}\,(r,e_{\tilde{*}},r)TE\times_T E((r,e_{\tilde{*}}),(r,e_{\tilde{*}}))\leq E(b,r)$$

ve buradan

$$E(b,r)=1$$

elde edilir. E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan $b=r$ dir. Böylece $I=R$ dir.

Teorem 2.2.16: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka $a\in R$ ve $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken olsun. $a\,\tilde{*}\,R$ kümesi R'nin sağ TL-vague ideali, $R\,\tilde{*}\,a$ kümesi R'nin sol TL-vague idealidir.

İspat: Teorem 2.2.12 ile $a\,\tilde{*}\,R$ kümesi R'nin TL-vague alt halkasıdır. Her $x\in a\,\tilde{*}\,R$, her $r\in R$ için $\tilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists k\in R$ öyle ki

$\tilde{*}(x,r,k)=1$

dir. $x\in a\tilde{*}R$ olduğundan $\exists r_1\in R$ öyle ki

$\tilde{*}(a,r_1,x)=1$

dir. $\tilde{*}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyonlar olduğundan $\exists l,z\in R$ öyle ki

$\tilde{*}(r_1,r,l)=1$ ve $\tilde{*}(a,l,z)=1$

dir. R TL-vague halka olduğundan

$$1=\tilde{*}(a,r_1,x)T\tilde{*}(x,r,k)T\tilde{*}(r_1,r,l)T\tilde{*}(a,l,z)\leq E(z,k)$$

$$1=\tilde{*}(a,l,z)TE(z,k)\leq\tilde{*}(a,l,k)$$

$$1=\tilde{*}(a,l,k)$$

elde edilir. Böylece $k\in a\tilde{*}R$ dir. Buradan her $x\in a\tilde{*}R$, her $r\in R$ için $\exists k\in a\tilde{*}R$ öyleki

$\tilde{*}(x,r,k)=1$

dir. Sonuç olarak $a\tilde{*}R$ kümesi R'nin sağ TL-vague idealidir.

$R\tilde{*}a$ kümesinin R'nin sol TL-vague ideali olduğu benzer şekilde gösterilir.

Teorem 2.2.17: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$, $(S,\widetilde{\oplus},\widetilde{\odot})$ ve $(P,\widetilde{\boxplus},\widetilde{\boxdot})$ TL-vague halkalar olsun. $\phi: R\to S$, $\varphi: S\longrightarrow P$ TL-vague halka homomorfileri ise $\varphi\circ\phi$: $R\to P$ TL-vague halka homomorfisidir.

İspat: ϕ ve φ TL-vague homomorfi olduklarından Teorem 2.1.13 ile her $a,b,c\in R$ için

$$\tilde{+}(a,b,c)\leq\widetilde{\boxplus}(\varphi\circ\phi(a),\varphi\circ\phi(b),\varphi\circ\phi(c))$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\tilde{*}(a,b,c)&\leq\widetilde{\odot}\big(\phi(a),\phi(b),\phi(c)\big)\\&\leq\widetilde{\boxdot}\big(\varphi(\phi(a)),\varphi(\phi(b)),\varphi(\phi(c))\big)\\&=\widetilde{\boxdot}(\varphi\circ\phi(a),\varphi\circ\phi(b),\varphi\circ\phi(c))\end{aligned}$$

Böylece Tanım 1.6.28 ile $\varphi\circ\phi$ TL-vague halka homomorfisidir.

Teorem 2.2.18: F S üzerinde ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı, $(R,\tilde{+},\tilde{*})$, $(S,\widetilde{\oplus},\widetilde{\odot})$ TL-vague halkalar ve $\phi: R\to S$ TL-vague halka homomorfisi olsun. ϕ örten ve $(R,\tilde{*})$ TL-vague birim elemanlı ise $\phi(e_{\tilde{*}})=e_{\widetilde{\oplus}}$ dir.

İspat: Her $r\in R$ için

$\tilde{*}(r,e_{\tilde{*}},r)T\tilde{*}(e_{\tilde{*}},r,r)=1$

dir. ϕ örten olduğundan her $s\in S$ için $\exists r\in R$ öyle ki

$\phi(r)=s$

ve ϕ TL-vague halka homomorfisi olduğundan

$$
\begin{aligned}
1 &= \tilde{*}\,(r, e_{\tilde{*}}, r) T \,\tilde{*}\, (e_{\tilde{*}}, r, r) \\
&\leq \widetilde{\odot}\, (\phi(r), \phi(e_{\tilde{*}}), \phi(r)) T\, \widetilde{\odot}\, (\phi(e_{\tilde{*}}), \phi(r), \phi(r)) \\
&= \widetilde{\odot}\, (s, \phi(e_{\tilde{*}}), s) T\, \widetilde{\odot}\, (\phi(e_{\tilde{*}}), s, s)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan Teorem 2.2.2 (i) ile

$$F(\phi(e_{\tilde{*}}), e_{\widetilde{\oplus}}) = 1$$

dir. Son olarak F ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan

$$\phi(e_{\tilde{*}}) = e_{\widetilde{\oplus}}$$

elde edilir.

2.3. TL-vague Modüller

Bu bölümde F, E sırasıyla R, M kümeleri üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntıları ve $F \times_T E$, $R \times M$ üzerinde TL-fuzzy denklik bağıntısı olarak alınacaktır.

Tanım 2.3.1: $(R, \tilde{+}, \tilde{*})$ TL-vague halka, $(M, \widetilde{\oplus})$ değişmeli TL-vague grup olmak üzere $\tilde{\cdot}: R \times M \times M \longrightarrow L$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon ise $\tilde{\cdot}$'ya TL-vague skaler çarpım denir.

Tanım 2.3.2: $(R, \tilde{+}, \tilde{*})$ TL-vague halka, $(M, \widetilde{\oplus})$ değişmeli TL-vague grup olmak üzere $\tilde{\cdot}: R \times M \times M \longrightarrow L$ TL-vague skaler çarpım olsun. M'ye TL-R-vague modül denir. $\Leftrightarrow$ Her $r, r_1, r_2, s, p \in R$, her $m, m_1, m_2, k, l, t, y, z \in M$ için;

i) $\widetilde{\oplus}\,(m_1, m_2, k) T\, \tilde{\cdot}\, (r, k, l) T\, \tilde{\cdot}\, (r, m_1, t) T\, \tilde{\cdot}\, (r, m_2, y) T\, \widetilde{\oplus}\, (t, y, z) \leq E(l, z)$,

ii) $\tilde{+}\,(r_1, r_2, s) T\, \tilde{\cdot}\, (s, m, l) T\, \tilde{\cdot}\, (r_1, m, t) T\, \tilde{\cdot}\, (r_2, m, y) T\, \widetilde{\oplus}\, (t, y, z) \leq E(l, z)$,

iii) $\tilde{*}\,(r_1, r_2, p) T\, \tilde{\cdot}\, (p, m, l) T\, \tilde{\cdot}\, (r_2, m, t) T\, \tilde{\cdot}\, (r_1, t, y) \leq E(l, y)$

dır.

Burada $m \in M$ için $\widetilde{\oplus}$ TL-vague işlemine göre tersi "$-m$" olarak gösterilecektir.

Örnek 2.3.3: L bir tam kafes ve $\mathbb{Z}$ kümesi üzerinde E TL-fuzzy denklik bağıntısı $\alpha \in L$ ve her $x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$E(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ \alpha & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Örnek 1.6.4 ile elde edilen $(\mathbb{Z},\tilde{\circ})$ değişmeli TL-vague grubu ve Örnek 2.2.1'de elde edilen $(\mathbb{Z},\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka ile her $a,b,c\in\mathbb{Z}$ için $\beta,\gamma,\delta\in L$ ve $\delta\le\gamma\le\beta\le\alpha$ olmak üzere $\tilde{\cdot}$ TL-vague skaler çarpımı

$$\tilde{\cdot}\,(a,b,c)=\begin{cases}1, & a*b=c\\ \delta, & a*b\neq c\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ise $\mathbb{Z}$ TL-$\mathbb{Z}$-vague modüldür.

Teorem 2.3.4:$(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka olsun. Bu takdirde TL-vague skaler çarpım $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemi olarak alınırsa R, TL-R-vague modüldür.

İspat: $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka ise $(R,\tilde{+})$ değişmeli TL-vague gruptur. $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka olduğundan her $r,r_1,r_2,s,p,m,m_1,m_2,k,l,t,y,z\in R$ için;

$$\tilde{+}(m_1,m_2,k)T\,\tilde{*}\,(r,k,l)T\,\tilde{*}\,(r,m_1,t)T\,\tilde{*}\,(r,m_2,y)T\tilde{+}(t,y,z)\le E(l,z)$$

ve

$$\tilde{+}(r_1,r_2,s)T\,\tilde{*}\,(s,m,l)T\,\tilde{*}\,(r_1,m,t)T\,\tilde{*}\,(r_2,m,y)T\tilde{+}\,(t,y,z)\le E(l,z)$$

elde edilir. $(R\,,\tilde{*})$ TL-vague yarı grup olduğundan

$$\tilde{*}\,(r_1,r_2,p)T\,\tilde{*}\,(k,m,l)T\,\tilde{*}\,(r_2,m,t)T\,\tilde{*}\,(r_1,t,y)\le E(l,y)$$

elde edilir. Tanım 2.3.2 ile R, TL-R-vague modüldür.

Bu teoremle her TL-vague halka yardımıyla bir TL-vague modül elde edebiliriz.

TL-vague modüllere ait bazı özellikler aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.3.5: M sol TL-R-vague modül ve $\tilde{\oplus}$ TL-vague ikili işlemi ve $\tilde{\cdot}$ TL-vague skaler çarpımı birinci mertebeden geçişken ise;

i) Her $m\in M$ için $\tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{+}},m,e_{\tilde{\oplus}}\right)=1$ dir.

ii) Her $r\in R$ için $\tilde{\cdot}\left(r,e_{\tilde{\oplus}},e_{\tilde{\oplus}}\right)=1$ dir.

İspat:

i) Her $m\in M$ için $\tilde{\cdot}$ ve $\tilde{\oplus}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyonlar olduğundan $\exists l,t\in M$ öyle ki

$\tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{+}},m,l)=1$ ve $\tilde{\oplus}\,(l,l,t)=1$

dir. Bu takdirde

$$1=\tilde{+}\,(e_{\tilde{+}},e_{\tilde{+}},e_{\tilde{+}})T\,\tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{+}},m,l)T\,\tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{+}},m,l)T\,\tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{+}},m,l)T\,\tilde{\oplus}\,(l,l,t)\le E(l,t)$$

olduğundan

$$1=\tilde{\oplus}\,(l,l,t)TE(l,t)\le\tilde{\oplus}\,(l,l,l)$$

elde edilir. Teorem 2.1.3 ile

$$E\left(e_{\widetilde{\oplus}}, l\right) = 1$$

elde edilir. Buradan

$$1 = \tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{+}}, m, l) T\, E\left(e_{\widetilde{\oplus}}, l\right) \leq \tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{+}}, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$

dir. Böylece

$$\tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{+}}, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) = 1$$

elde edilir.

ii) Her $r \in R$ için $\tilde{\cdot}$ ve $\widetilde{\oplus}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyonlar olduğundan $\exists k, s \in M$ öyleki

$$\tilde{\cdot}\left(r, e_{\widetilde{\oplus}}, k\right) = 1 \text{ ve } \widetilde{\oplus}\,(k, k, s) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{\oplus}\,(e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}) T\, \tilde{\cdot}\left(r, e_{\widetilde{\oplus}}, k\right) T\, \tilde{\cdot}\left(r, e_{\widetilde{\oplus}}, k\right) T\, \tilde{\cdot}\left(r, e_{\widetilde{\oplus}}, k\right) T\, \widetilde{\oplus}\,(k, k, s)$$
$$\leq E(k, s)$$

elde edilir. Böylece

$$1 = \widetilde{\oplus}\,(k, k, s) T E(k, s) \leq \widetilde{\oplus}\,(k, k, k)$$

ve Teorem 2.1.3 ile

$$E\left(e_{\widetilde{\oplus}}, k\right) = 1$$

elde edilir. Buradan

$$1 = \tilde{\cdot}\left(r, e_{\widetilde{\oplus}}, k\right) T\, E\left(e_{\widetilde{\oplus}}, k\right) \leq \tilde{\cdot}\left(r, e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$

dir. Sonuç olarak

$$\tilde{\cdot}\left(r, e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}\right) = 1$$

elde edilir.

Örnekler 2.3.6:

1) $(M, \widetilde{\oplus})$ değişmeli TL-vague grup, $(R, \tilde{+}, \tilde{*})$ TL-vague halka olsun.

Her $r \in R$, her $m \in M$ için

$$\tilde{\cdot}\,(r, m, k) = \begin{cases} 1 & k = e_{\widetilde{\oplus}} \\ \alpha & k \neq e_{\widetilde{\oplus}} \end{cases}$$

TL-vague skaler çarpımı ve Örnek 1.4.8 (ii)'de ki E TL-fuzzy denklik bağıntısı alınırsa M TL-R-vague modüldür.

Çözüm: Her $m, m_1, m_2, , l, t, y, z \in M$ ve her $r, r_1, r_2, s, k \in R$ için;

l, t, y elemanlarından en az birinin $e_{\widetilde{\oplus}}$'den farklı olması durumunda

$$\widetilde{\oplus}\,(m_1,m_2,m)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m,l)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m_1,t)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m_2,y)T\,\widetilde{\oplus}\,(t,y,z) \leq \alpha \leq E(l,z)$$

dir. Eğer $l = t = y = e_{\widetilde{\oplus}}$ ise

$$\widetilde{\oplus}\,(m_1,m_2,m)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m,l)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m_1,t)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m_2,y)T\,\widetilde{\oplus}\,(t,y,z) \leq 1 = E(l,z)$$

elde edilir. Benzer şekilde Tanım 2.3.2'nin (ii) ve (iii) koşulları da sağlanır.Böylece M TL-R-vague modüldür.

2) $(R,\tilde{+},\tilde{*})$ TL-vague halka ve I R'nin sol TL-vague ideali olsun. Bu takdirde I TL-R-vague modüldür.

Tanım 2.3.7[17]: M R-modül olmak üzere; E'ye M üzerinde regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı denir. $\Leftrightarrow$ Her $r \in R$ ve her $m_1,m_2,m_3 \in M$ için;

i) $E(m_1,m_2) \leq E(m_1 \oplus m_3, m_2 \oplus m_3)$,

ii) $E(m_1,m_2) \leq E(r \cdot m_1, r \cdot m_2)$

dır.

Daha önceki kısımlarda gruplar ve halkalardan TL-vague grup ve TL-vague halka elde edilebileceğini incelenmişti. Modüllerde de aynı durum geçerlidir. Aşağıdaki teoremle verilen bir modülden TL-vague modül elde edilmiştir.

Teorem 2.3.8: M R-modül ve E, F sırasıyla M, R üzerinde regüler TL-fuzzy denklik bağıntıları olmak üzere, $\widetilde{\oplus}$, $\tilde{+}$, $\tilde{*}$ TL-vague ikili işlemleri ve $\tilde{\cdot}$ TL-vague skaler çarpımı sırasıyla her $r,s,p \in R$ ve her $a,b,c \in M$ için

$$\widetilde{\oplus}\,(a,b,c) = E(a \oplus b, c),\quad \tilde{+}\,(r,s,p) = F(r+s,p),\quad \tilde{*}\,(r,s,p) = F(r*s,p) \quad \text{ve}$$

$$\tilde{\cdot}\,(r,b,c) = E(r \cdot b, c)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $r,s \in R$ ve her $m \in M$ için

$$F(r,s) \leq E(r \cdot m, s \cdot m)$$

ise M TL-R-vague modüldür.

İspat: M değişmeli grup olduğundan Teorem 1.6.6 den M TL-vague değişmeli gruptur. Benzer şekilde R halka olduğundan Teorem 2.2.4 ile R TL-vague halka elde edilir.

Her $r,r_1,r_2,s,p \in R$, her $m,m_1,m_2,k,l,t,y,z \in M$ için;

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\oplus}\,(m_1,m_2,k)T\,\tilde{\cdot}\,(r,k,l)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m_1,t)T\,\tilde{\cdot}\,(r,m_2,y)T\,\widetilde{\oplus}\,(t,y,z)\\
&\quad = E(m_1 \oplus m_2, k)TE(r \cdot k, l)TE(r \cdot m_1, t)\,TE(r \cdot m_2, y)TE(t \oplus y, z)\\
&\quad \leq E(r \cdot (m_1 \oplus m_2), r \cdot k)TE(r \cdot k, l)TE(r \cdot m_1, t)TE(r \cdot m_2, y)TE(t \oplus y, z)\\
&\quad \leq E(r \cdot (m_1 \oplus m_2), l)TE(r \cdot m_1, t)\,TE(r \cdot m_2, y)TE(t \oplus y, z)
\end{aligned}$$

$\leq E(r \cdot (m_1 \oplus m_2), l) T E\big((r \cdot m_1) \oplus (r \cdot m_2), t \oplus y\big) T E(t \oplus y, z)$

$\leq E(r \cdot (m_1 \oplus m_2), l)\ T E(r \cdot (m_1 \oplus m_2), z)$

$\leq E(l, z)$

elde edilir.

$\widetilde{+}\,(r_1, r_2, s) T\, \tilde{\cdot}\,(s, m, l) T\, \tilde{\cdot}\,(r_1, m, t) T\, \tilde{\cdot}\,(r_2, m, y) T\, \widetilde{\oplus}\,(t, y, z)$

$= F(r_1 + r_2, s) T\ E(s \cdot m, l) T E(r_1 \cdot m, t)\ T E(r_2 \cdot m, y) T E(t \oplus y, z)$

$\leq E((r_1 + r_2) \cdot m, s \cdot m) T\ E(s \cdot m, l) T E((r_1 \cdot m) \oplus (r_2 \cdot m), t \oplus y)$

$T E(t \oplus y, z)$

$\leq E((r_1 + r_2) \cdot m, l)\ T E((r_1 + r_2) \cdot m, t \oplus y) T E(t \oplus y, z)$

$\leq E(l, t \oplus y) T E(t \oplus y, z)$

$\leq E(l, z)$

elde edilir.

$\tilde{*}\,(r_1, r_2, p) T\, \tilde{\cdot}\,(p, m, l) T\, \tilde{\cdot}\,(r_2, m, t) T\, \tilde{\cdot}\,(r_1, t, y)$

$= F(r_1 * r_2, p) T\ E(p \cdot m, l) T E(r_2 \cdot m, t)\ T E(r_1 \cdot t, y)$

$\leq E((r_1 * r_2) \cdot m, p \cdot m) T\ E(p \cdot m, l) T E(r_1 \cdot (r_2 \cdot m), r_1 \cdot t)\ T E(r_1 \cdot t, y)$

$\leq E((r_1 * r_2) \cdot m, l) T E(r_1 \cdot (r_2 \cdot m), y)$

$= E(r_1 \cdot (r_2 \cdot m), l) T E(r_1 \cdot (r_2 \cdot m), y)$

$\leq E(l, y)$

elde edilir. Böylece Tanım 2.3.2 ile M TL-R-vague modüldür.

L-vague modüllerin kartezyen çarpımı L-vague modül olacaktır. Bu durum aşağıdaki teoremle incelenmiştir.

Teorem 2.3.9: $(R_i, \widetilde{+}_i, \tilde{*}_i)$ L-vague halkalar, $(M_i, \widetilde{\oplus}_i)$ L-R_i-vague modüller $(i = 1,2, \ldots, n)$, $R = R_1 \times \ldots \times R_n$ ve $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ olsun.

$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in M$

$r = (r_1, \ldots, r_n) \in R$ için

$$\widetilde{\boxplus}\,(x, y, z) \coloneqq \wedge_{i=1}^{n} \widetilde{\oplus}_i\,(x_i, y_i, z_i)$$

ve

$$\widetilde{\odot}(r, y, z) \coloneqq \wedge_{i=1}^{n} \tilde{\cdot}_i\,(r_i, y_i, z_i)$$

ile

$$\widetilde{\boxplus}: M \times M \times M \longrightarrow L, \qquad \widetilde{\odot}: R \times M \times M \longrightarrow L$$

L-vague ikili işlemi ve L-vague skaler çarpımı ile M L-R-vague modüldür.

İspat: Teorem 2.2.6 ile R bir L-vague halka ve M bir değişmeli L-vague gruptur. Her $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için $\tilde{\cdot}_i$ güçlü L-fuzzy fonksiyon olduğundan her $x_i \in R_i$ ve her $y_i \in M_i$ için $\exists z_i \in M_i$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}_i\,(x_i, y_i, z_i) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$\tilde{\odot}\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n)\big) = \wedge_{i=1}^{n} \tilde{\cdot}_i\,(x_i,y_i,z_i) = 1$$

elde edilir. $r,a,b,s,p \in R$, $m,c,d,k,l,t,y,z \in M$ için;

$r = (r_1,\dots,r_n)$, $a = (a_1,\dots,a_n)$, $b = (b_1,\dots,b_n)$, $s = (s_1,\dots,s_n)$, $p = (p_1,\dots,p_n)$ ve $m = (m_1,\dots,m_n)$, $c = (c_1,\dots,c_n)$, $d = (d_1,\dots,d_n)$, $k = (k_1,\dots,k_n)$, $t = (t_1,\dots,t_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$, $z = (z_1,\dots,z_n)$ olsun.

$$\begin{aligned}
&\tilde{\odot}(r,k,l)T\tilde{\odot}(a,b,c)TE_{R\times M}\big((r,k),(a,b)\big)\\
&\qquad\qquad \le \tilde{\cdot}_i\,(r_i,k_i,l_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(a_i,b_i,c_i)TE_{R_i\times M_i}\big((r_i,k_i),(a_i,b_i)\big)\\
&\qquad\qquad \le E_{M_i}\,(l_i,c_i)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\tilde{\odot}(r,k,l)T\tilde{\odot}(a,b,c)TE_{R\times M}\big((r,k),(a,b)\big) \le E_M(l,c)$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\odot}$, $R \times M$ kümesi üzerinde güçlü L-fuzzy fonksiyondur.

$$\alpha := \widetilde{\boxplus}\,(c,d,k)T\tilde{\odot}(r,k,l)T\tilde{\odot}(r,c,t)T\tilde{\odot}(r,d,y)T\,\widetilde{\boxplus}\,(t,y,z)$$

olarak kabul edilsin. Bu durumda her $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için

$$\begin{aligned}
\alpha &\le \widetilde{\oplus}_i\,(c_i,d_i,k_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(r_i,k_i,l_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(r_i,c_i,t_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(r_i,d_i,y_i)T\,\widetilde{\oplus}_i\,(t_i,y_i,z_i)\\
&\le E_i(l_i,z_i)
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\alpha \le \wedge_{i=1}^{n} E_i(l_i,z_i) = E_1 \times \dots \times E_n((l_1,\dots,l_n),(z_1,\dots,z_n))$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\beta := \tilde{+}_i\,(a_i,b_i,s_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(s_i,m_i,l_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(a_i,m_i,t_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(b_i,m_i,y_i)T\,\widetilde{\oplus}_i\,(t_i,y_i,z_i)$$

ise

$$\beta \le E_1 \times \dots \times E_n((l_1,\dots,l_n),(z_1,\dots,z_n))$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\gamma := \tilde{*}_i\,(a_i,b_i,p_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(p_i,m_i,l_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(b_i,m_i,t_i)T\,\tilde{\cdot}_i\,(a_i,t_i,y_i)$$

ise

$$\gamma \le E_1 \times \dots \times E_n((l_1,\dots,l_n),(y_1,\dots,y_n))$$

elde edilir. Böylece M L-R-vague modüldür.

TL-vague modül tanımının ardından ilk akla gelen soru TL-vague alt modülün nasıl ifade edileceğidir. Modül teorisindeki ifadesi göz önüne alınarak TL-vague alt modül tanımı aşağıdaki şekilde verilecektir.

Tanım 2.3.10: M TL-R-vague modül ve $\emptyset \neq A \subseteq M$ olsun. A'ya M'nin TL-vague alt modülü denir. $\Leftrightarrow$ Her $r \in R$ ve her $x, y \in A$ için $\exists b, c \in A$ öyle ki $\widetilde{\oplus}\,(x, -y, b) = 1$ ve $\tilde{\cdot}\,(r, x, c) = 1$ dir.

Teorem 2.3.11: $\widetilde{\oplus}$ TL-vague ikili işlemi ve $\tilde{\cdot}$ TL-vague skaler çarpımı birinci mertebeden geçişken olsun. Bu takdirde $\{e_{\widetilde{\oplus}}\}$ ve M kümeleri M'nin TL-vague alt modülleridir.

İspat: Her $r \in R$ ve $e_{\widetilde{\oplus}} \in \{e_{\widetilde{\oplus}}\}$ için

$$\widetilde{\oplus}\,(e_{\widetilde{\oplus}}, -e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}) = 1$$

ve Teorem 2.3.4 (ii) ile

$$\tilde{\cdot}\,(r, e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}) = 1$$

dir. Buradan $\{e_{\widetilde{\oplus}}\}$ M nin TL-vague alt modülüdür.

Benzer şekilde her $r \in R$ ve her $x, y \in M$ için $\widetilde{\oplus}$ ve $\tilde{\cdot}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduklarından $\exists b, c \in M$ öyle ki

$$\widetilde{\oplus}\,(x, -y, b) = 1 \text{ ve } \tilde{\cdot}\,(r, x, c) = 1$$

dir. Böylece M, M'nin TL-vague alt modülüdür.

Teorem 2.3.12: M TL-R-vague modül ve A, M'nin TL-vague alt modülü ve E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı ise $e_{\widetilde{\oplus}} \in A$ dır.

İspat: $x \in A$ keyfi olsun. Her $r \in R$ için A, M'nin TL-vague alt modülü olduğundan $\exists c \in A$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}\,(r, x, c) = 1$$

dir. Özel olarak $e_{\tilde{+}} \in R$ için $\exists k \in A$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{+}}, x, k) = 1$$

dir. Ayrıca Teorem 2.3.5 (i) den

$$\tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{+}}, x, e_{\widetilde{\oplus}}) = 1$$

ve $\tilde{\cdot}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan

$$E(e_{\widetilde{\oplus}}, k) = 1$$

elde edilir. E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan $k = e_{\widetilde{\oplus}} \in A$ elde edilir.

Teorem 2.3.13: M R-modül, E, M üzerinde regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı ve A, M'nin alt modülü olsun. $\tilde{\cdot}$ ve $\widetilde{\oplus}$ TL-vague ikili işlemleri sırasıyla her $a \in R$ ve her $b, c, d \in M$ için;

$$\tilde{\cdot}\,(a, b, c) = E(a \cdot b, c) \text{ ve } \widetilde{\oplus}\,(b, c, d) = E(b \oplus c, d)$$

olarak tanımlanır ise A, M'nin TL-vague alt modülüdür.

İspat: A M'nin alt modülü olduğundan her $r \in R$ ve her $x, y \in A$ için

$$x - y, r \cdot x \in A$$

dır. Buradan

$$\widetilde{\oplus}\,(x, -y, x - y) = E(x - y, x - y) = 1$$

ve

$$\tilde{\cdot}\,(r, x, r \cdot x) = E(r \cdot x, r \cdot x) = 1$$

elde edilir. Böylece A, M nin TL-vague alt modülüdür.

Teorem 2.3.14: M TL-R-vague modül ve E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde M'nin TL-vague alt modüllerinin kümesi "$\subseteq$" bağıntısına göre bir tam kafestir.

İspat: $\{(N_i, \widetilde{\oplus}) : i \in I\}$ M'nin TL-vague alt modüllerinin bir ailesi olsun.

$x, y \in \bigcap_{i \in I} N_i$ keyfi olsun.

Her $i \in I$ için $x, y \in N_i$, N_i M R TL-vague alt modül olduğundan $\exists k_i \in N_i$ öyle ki

$$\widetilde{\oplus}\,(x, -y, k_i) = 1$$

dir. Ayrıca $\exists k_j \in N_j$ öyle ki

$$\widetilde{\oplus}\,(x, -y, k_j) = 1$$

dir. $\widetilde{\oplus}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan

$$E(k_i, k_j) = 1$$

ve E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan $k_i = k_j \in \bigcap_{i \in I} N_i$ elde edilir. Böylece her $x, y \in \bigcap_{i \in I} N_i$ için $\exists k \in \bigcap_{i \in I} N_i$

$$\widetilde{\oplus}\,(x, -y, k) = 1$$

elde edilir. Her $r \in R$ için $\exists c_i \in N_i$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}\,(r, x, c_i) = 1$$

ve $x, y \in N_k$ olduğundan $\exists c_k \in N_k$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}\,(r, x, c_k) = 1$$

dır. $\tilde{\cdot}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan

$$E(c_i, c_k) = 1$$

ve E ayrılabilir TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan $c_i = c_k \in \bigcap_{i \in I} N_i$ elde edilir. Yani her $r \in R$ ve $x \in \bigcap_{i \in I} N_i$ için $\exists c \in \bigcap_{i \in I} N_i$

$$\tilde{\cdot}\,(r, x, c) = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak $\bigcap_{i \in I} N_i$ M R TL-vague alt modüldür.

Teorem 2.3.11 ile M, M'nin TL-vague alt modülü olduğundan TL-vague alt modüllerinin kümesi "$\subseteq$" bağıntısına göre tam kafestir.

Tanım 2.3.15: M ve N TL-R-vague modüller olsun. Bir $\phi: M \to N$ fonksiyonuna TL-vague R-modül homomorfisi denir.$\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in M$ ve her $r \in R$ için

$$\widetilde{\oplus}\,(a, b, c) \leq \widetilde{\ominus}\,\big(\phi(a), \phi(b), \phi(c)\big) \text{ ve } \tilde{\cdot}_M\,(r, b, c) \leq \tilde{\cdot}_N\,\big(r, \phi(b), \phi(c)\big)$$

dır.

Teorem 2.3.16:$(M, \widetilde{\oplus})$, $(N, \widetilde{\ominus})$ ve $(K, \widetilde{\boxplus})$ TL-R-vague modüller olsun. $\phi: M \to N$, $\varphi: N \longrightarrow K$ TL-vague modül homomorfileri olsun. Bu takdirde $\varphi \circ \phi: M \to K$ TL-vague modül homomorfisidir.

İspat: ϕ ve φ TL-vague homomorfileri olduklarından her $a, b, c \in M$ her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{\oplus}\,(a, b, c) &\leq \widetilde{\ominus}\,\big(\phi(a), \phi(b), \phi(c)\big) \\ &\leq \widetilde{\boxplus}\,(\varphi(\phi\,(a)), \varphi(\phi(b)), \varphi(\phi(c))) \\ &\leq \widetilde{\boxplus}\,(\varphi \circ \phi\,(a), \varphi \circ \phi(b), \varphi \circ \phi(c)) \end{aligned}$$

elde edilir.Ayrıca ϕ ve φ TL-vague modül homomorfileri olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{\cdot}_M\,(r, b, c) &\leq \tilde{\cdot}_N\,\big(r, \phi(b), \phi(c)\big) \\ &\leq \tilde{\cdot}_K\,\Big(r, \varphi\big(\phi(b)\big), \varphi\big(\phi(c)\big)\Big) \\ &= \tilde{\cdot}_K\,\big(r, \varphi \circ \phi(b), \phi \circ \varphi(c)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Tanım 2.3.15 ile $\varphi \circ \phi$ TL-vague modül homomorfisidir.

Tanım 2.3.17: M TL-R-vague modül ve $A \subseteq M$ olsun.

$$\big\{r \in R \,\big|\, \forall a \in A \text{ için } \tilde{\cdot}\,\big(r, a, e_{\widetilde{\oplus}}\big) = 1\,\big\}$$

kümesine A'nın TL-vague sıfırlayanı (annihilatorü) denir. A kümesinin TL-vague sıfırlayanı $VAnn(A)$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 2.3.18: M TL-R-vague modül, $\widetilde{\oplus}$ ve $\tilde{\cdot}$ TL-vague ikili işlemleri birinci mertebeden geçişken ve $A \subseteq M$ olsun.

i) $VAnn(A)$ R'nin TL-vague sol idealdir.

ii) A TL-vague alt modül ise $VAnn(A)$ R TL-vague halkasının TL-vague idealdir.

İspat:

i) $a, b \in VAnn(A)$ için $\widetilde{+}(a, b, c) = 1$ olsun. Bu durumda $\forall m \in A$ için

$$\tilde{\cdot}\left(a, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) = 1 \text{ ve } \tilde{\cdot}\left(b, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) = 1$$

dir. Ayrıca $\tilde{\cdot}$ güçülü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $l \in M$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}(c, m, l) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{+}(a, b, c) T \tilde{\cdot}(c, m, l) T \tilde{\cdot}\left(a, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) T \tilde{\cdot}\left(b, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) T \widetilde{\oplus}\left(e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}\right) \leq E\left(l, e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$

ve buradan

$$1 = \tilde{\cdot}(c, m, l) T\, E\left(l, e_{\widetilde{\oplus}}\right) \leq \tilde{\cdot}\left(c, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$

elde edilir. Bu durumda

$$c \in VAnn(A)$$

dir. Böylece $VAnn(A)$ kümesi $\widetilde{+}$ TL-vague işlemi altında TL-vague kapalıdır.

$a \in VAnn(A)$ keyfi olsun. $\tilde{\cdot}$ güçülü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan

$$\tilde{\cdot}(-a, m, t) = 1$$

olacak şekilde bir $t \in M$ mevcuttur. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{+}(-a, a, e_{\widetilde{+}}) T \tilde{\cdot}\left(e_{\widetilde{+}}, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) T \tilde{\cdot}(-a, m, t) T \tilde{\cdot}\left(a, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) T \widetilde{\oplus}\left(t, e_{\widetilde{\oplus}}, t\right)$$
$$\leq E(t, e_{\widetilde{\oplus}})$$

ve buradan

$$1 = \tilde{\cdot}(-a, m, t) T\, E\left(t, e_{\widetilde{\oplus}}\right) \leq \tilde{\cdot}\left(-a, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$

olduğundan

$$-a \in VAnn(A)$$

elde edilir. Böylece $VAnn(A)$ R' nin TL-vague alt grubudur.

$a, b \in VAnn(A)$ keyfi olmak üzere $\widetilde{*}(a, b, c) = 1$ olsun. $\tilde{\cdot}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $l \in M$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}(c, m, l) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{*}\,(a,b,c) T \,\widetilde{\cdot}\,(c,m,l) T \,\widetilde{\cdot}\,\big(b,m,e_{\widetilde{\oplus}}\big) T \,\widetilde{\cdot}\,\big(a,e_{\widetilde{\oplus}},e_{\widetilde{\oplus}}\big) T \leq E\big(l,e_{\widetilde{\oplus}}\big)$$

elde edilir. Buradan

$$1 = \widetilde{\cdot}\,(c,m,l) T\, E\big(l,e_{\widetilde{\oplus}}\big) \leq \widetilde{\cdot}\,\big(c,m,e_{\widetilde{\oplus}}\big)$$

olduğundan

$$c \in VAnn(A)$$

elde edilir. Böylece $VAnn(A)$ $\widetilde{*}$ işlemi altında TL-vague kapalıdır. $a \in VAnn(A)$, $r \in R$ için $\widetilde{*}\,(r,a,x) = 1$ olsun. $\widetilde{\cdot}$ güçülü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $t \in M$ öyle ki

$$\widetilde{\cdot}\,(x,m,t) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{*}\,(r,a,x) T \,\widetilde{\cdot}\,(x,m,t) T \,\widetilde{\cdot}\,\big(a,m,e_{\widetilde{\oplus}}\big) T \,\widetilde{\cdot}\,\big(r,e_{\widetilde{\oplus}},e_{\widetilde{\oplus}}\big) \leq E\big(t,e_{\widetilde{\oplus}}\big)$$

ve buradan

$$1 = \widetilde{\cdot}\,(x,m,t) T\, E\big(t,e_{\widetilde{\oplus}}\big) \leq \widetilde{\cdot}\,\big(x,m,e_{\widetilde{\oplus}}\big)$$

olduğundan

$$x \in VAnn(A)$$

elde edilir. Sonuç olarak $VAnn(A)$ R'nin TL-vague sol idealdir.

ii) $a \in VAnn(A)$ ve $r \in R$ keyfi olsun. A TL-vague alt modül olduğundan $m \in A$ keyfi olmak üzere $\exists c \in A$ öyle ki $\widetilde{\cdot}\,(r,m,c) = 1$ dir.

$\widetilde{*}\,(a,r,x) = 1$ ise $\widetilde{\cdot}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $n \in M$ öyle ki $\widetilde{\cdot}\,(x,m,n) = 1$ dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{*}\,(a,r,x) T \,\widetilde{\cdot}\,(x,m,n) T \,\widetilde{\cdot}\,(r,m,c) T \,\widetilde{\cdot}\,\big(a,c,e_{\widetilde{\oplus}}\big) \leq E(n,e_{\widetilde{\oplus}})$$

ve buradan

$$1 = \widetilde{\cdot}\,(x,m,n) T\, E\big(n,e_{\widetilde{\oplus}}\big) \leq \widetilde{\cdot}\,\big(x,m,e_{\widetilde{\oplus}}\big)$$

olduğundan

$$x \in VAnn(A)$$

elde edilir. Böylece $VAnn(A)$ R'nin TL-vague sağ idealdir. Sonuç olarak $VAnn(A)$ R'nin TL-vague idealidir.

Teorem 2.3.19: M R-modül, A ve B M'nin alt modülleri, $\widetilde{\oplus}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken ve E regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı olsun. Her $r \in R$ ve her $a,b,c \in M$ için

$$\widetilde{\cdot}\,(r,a,b) = E(r \cdot a, b) \text{ ve } \widetilde{\oplus}\,(a,b,c) = E(a \oplus b, c)$$

olarak tanımlanır ise $A \widetilde{\oplus} B$, M'nin TL-vague alt modülüdür.

İspat: Teorem 2.3.13 ile A ve B M'nin TL-vague alt modülleridir. $\widetilde{\oplus}$ TL-vague ikili işlemi güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan Her $a \in A$ her $b \in B$ ye karşılık $\exists c \in M$ öyleki

$$\widetilde{\oplus}\,(a,b,c) = 1$$

dir. Böylece

$$A \widetilde{\oplus} B \neq \emptyset$$

elde edilir. $c_1, c_2 \in A \widetilde{\oplus} B$ ise $\exists a_1, a_2 \in A$ $\exists b_1, b_2 \in B$ öyleki

$$\widetilde{\oplus}\,(a_1, b_1, c_1) = 1 = E(a_1 \oplus b_1, c_1) \text{ ve } \widetilde{\oplus}\,(a_2, b_2, c_2) = 1$$

dir. Teorem 2.1.10 dan

$$\widetilde{\oplus}\,(-a_2, -b_2, -c_2) = 1 = E((-a_2) \oplus (-b_2), (-c_2))$$

dir. E regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= E(a_1 \oplus b_1, c_1) T E\big((-a_2) \oplus (-b_2), (-c_2)\big) \\ &\leq E(a_1 \oplus b_1 \oplus (-a_2) \oplus (-b_2), c_1 \oplus (-c_2)) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\widetilde{\oplus}\,(a_1 \oplus (-a_2), b_1 \oplus (-b_2), a_1 \oplus (-a_2) \oplus b_1 \oplus (-b_2)) = 1$$

olduğundan

$$a_1 \oplus (-a_2) \oplus b_1 \oplus (-b_2) \in A \widetilde{\oplus} B$$

dir. $(M,\oplus)$ değişmeli grup olduğundan $a_1 \oplus b_1 \oplus (-a_2) \oplus (-b_2) \in A \widetilde{\oplus} B$ dir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} &\widetilde{\oplus}\,\big(c_1, -c_2, a_1 \oplus b_1 \oplus (-a_2) \oplus (-b_2)\big) \\ &\quad = E(c_1 \oplus -c_2, a_1 \oplus b_1 \oplus (-a_2) \oplus (-b_2)) \\ &\quad = E\big(c_1 \oplus -c_2, a_1 \oplus b_1 \oplus (-a_2) \oplus (-b_2)\big) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $r \in R$ ve $c \in A \widetilde{\oplus} B$ olsun. Bu durumda $\exists a \in A$ $\exists b \in B$ öyle ki

$$\widetilde{\oplus}\,(a,b,c) = 1 = E(a \oplus b, c)$$

dir. E regüler TL-fuzzy denklik bağıntısı olduğundan

$$1 = E(a \oplus b, c) \leq E(r \cdot (a \oplus b), r \cdot c)$$

dir. Diğer yandan

$$\widetilde{\oplus}\,(r \cdot a, r \cdot b, r \cdot a \oplus r \cdot b) = 1$$

olduğundan $r \cdot a \oplus r \cdot b \in A \widetilde{\oplus} B$ dir. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \tilde{\cdot}\,(r, c, r \cdot a \oplus r \cdot b) &= E(r \cdot c, r \cdot a \oplus r \cdot b) \\ &= E(r \cdot (a \oplus b), r \cdot c) T\, E(r \cdot c, r \cdot a \oplus r \cdot b) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $A \widetilde{\oplus} B,\ M$'nin TL-vague alt modülüdür.

Tanım 2.3.20: M, TL-R-vague modül ve A M'nin TL-vague alt modülü olsun. Bu takdirde $R \tilde{\cdot} A$ kümesi

$$R \tilde{\cdot} A=\{m \in M | \exists r \in R\ \exists a \in A\ \tilde{\cdot}(r,a,m) = 1\ \}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.21: M TL-R-vague modül, E ayrılabilir TL-fuzzy denlik bağıntısı ve $\tilde{\cdot}$ TL-vague skaler çarpımı her $x, y, z, y', z' \in M\ \ r \in R$ için

$$\tilde{\cdot}(r,y,z)TE(z,z')TE(y,y') \leq \tilde{\cdot}(r,y',z'),$$

koşulunu gerçekler ise $R \tilde{\cdot} A = \{e_{\widetilde{\oplus}}\}$ olacak şekilde A, M'nin TL-vague alt modülü mevcuttur.

İspat: $A = \left\{m \in M \middle| \tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{*}}, m, e_{\widetilde{\oplus}}\right) = 1\ \right\}$ olarak tanımlansın. $\widetilde{\oplus}$ TL-vague ikili işlemi güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan her $x, -y \in A$ için $\exists b \in M$ öyle ki

$$\widetilde{\oplus}(x,-y,b) = 1$$

dir. Buradan

$$1 = \widetilde{\oplus}(x,-y,b)T\,\tilde{\cdot}(e_{\tilde{*}},b,l)T\,\tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{*}},x,e_{\widetilde{\oplus}}\right)T\,\tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{*}},-y,e_{\widetilde{\oplus}}\right)T\,\widetilde{\oplus}\left(e_{\widetilde{\oplus}},e_{\widetilde{\oplus}},e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$
$$\leq E(l,e_{\widetilde{\oplus}})$$

ve

$$1 = \tilde{\cdot}(e_{\tilde{*}},b,l)T\,E\left(l,e_{\widetilde{\oplus}}\right) \leq \tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{*}},b,e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$

olduğundan $b \in A$ elde edilir. Böylece her $x, y \in A$ için $\exists b \in A$ öyleki

$$\widetilde{\oplus}(x,-y,b) = 1$$

dir. Her $r \in R$ ve her $x \in A$ için $\tilde{\cdot}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists c \in M$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}(r,x,c) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$1 = \tilde{*}(r,e_{\tilde{*}},r)T\,\tilde{\cdot}(r,x,c)T\,\tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{*}},x,e_{\widetilde{\oplus}}\right)T\,\tilde{\cdot}\left(r,e_{\widetilde{\oplus}},e_{\widetilde{\oplus}}\right) \leq E(c,e_{\widetilde{\oplus}})$$

ve buradan

$$1 = \tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{*}},e_{\widetilde{\oplus}},e_{\widetilde{\oplus}}\right)TE(c,e_{\widetilde{\oplus}}) \leq \tilde{\cdot}\left(e_{\tilde{*}},c,e_{\widetilde{\oplus}}\right)$$

olduğundan $c \in A$ elde edilir. Böylece her $r \in R$ ve her $x \in A$ için $\exists c \in A$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}(r,x,c) = 1$$

dir. Sonuç olarak seçilen A kümesi M'nin TL-vague alt modülüdür.

$x \in R \tilde{\ast} A$ keyfi olsun. $\exists a \in A$ ve $\exists r \in R$ öyle ki

$$\tilde{\ast}(r, a, x) = 1$$

dir. $a \in A$ olduğundan

$$\tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, a, e_{\widetilde{\oplus}}) = 1$$

ve böylece

$$1 = \tilde{\ast}\,(r, e_{\tilde{\ast}}, r) T \tilde{\ast}(r, a, x) T \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, a, e_{\widetilde{\oplus}}) T \tilde{\ast}(r, e_{\widetilde{\oplus}}, e_{\widetilde{\oplus}}) \leq E(x, e_{\widetilde{\oplus}})$$

dir. E ayrılabilir TL-fuzzy denlik bağıntısı olduğundan $x = e_{\widetilde{\oplus}}$ elde edilir. Buradan $R \tilde{\ast} A = \{e_{\widetilde{\oplus}}\}$ elde edilir.

Örnek 2.3.22: M TL-R-vague modül ve $\tilde{\ast}$ TL-vague ikili işlemi birinci mertebeden geçişken olsun. Bu takdirde

$$B = \{x \in M | \exists m \in M \ \ \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, m, x) = 1 \}$$

şeklinde tanımlanan B, M'nin TL-vague alt modülüdür.

Çözüm: $x, y \in B$ keyfi olsun. Bu takdirde $\exists m_1, m_2 \in M$ öyle ki

$$\tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, m_1, x) = 1 \quad \text{ve} \quad \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, m_2, y) = 1$$

dir. Buradan Teorem 2.1.10 ile

$$\tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, -m_2, -y) = 1$$

elde edilir. $\tilde{\ast}$ ve $\widetilde{\oplus}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyonlar olduğundan $\exists k, q \in M$ öyleki

$$\widetilde{\oplus}\,(x, -y, k) = 1 \ \text{ ve } \ \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, l, q) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$1 = \widetilde{\oplus}\,(m_1, -m_2, l) T \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, l, q) T \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, m_1, x) T \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, -m_2, -y) T \,\widetilde{\oplus}\,(x, -y, k)$$
$$\leq E(q, k)$$

ve

$$1 = \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, l, q) T E(q, k) \leq \tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, l, k)$$

elde edilir. Böylece $k \in B$ dir. Her $x, y \in B$ için $\exists k \in B$ öyle ki

$$\widetilde{\oplus}\,(x, -y, k) = 1$$

dir. Her $r \in R$ ve her $x \in B$ için $\exists a \in M$ öyle ki

$$\tilde{\ast}(r, x, a) = 1$$

dir. $x \in B$ olduğundan $\exists m \in M$ öyleki

$$\tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, m, x) = 1$$

dir. $\tilde{\ast}$ güçlü TL-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists s \in M$ öyleki

$$\tilde{\ast}(e_{\tilde{\ast}}, a, s) = 1$$

dir. Bu takdirde

$$1 = \tilde{*}\,(e_{\tilde{*}}, r, r)\, T\, \tilde{\cdot}\,(r, x, a)\, T\, \tilde{\cdot}\,(r, x, a)\, T\, \tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{*}}, a, s) \leq E(a, s)$$

ve

$$1 = \tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{*}}, a, s)\, T E(a, s) \leq \tilde{\cdot}\,(e_{\tilde{*}}, a, a)$$

olduğundan $a \in B$ elde edilir. Böylece her $r \in R$ ve her $x \in B$ için $\exists a \in B$ öyle ki

$$\tilde{\cdot}\,(r, x, a) = 1$$

dir. Sonuç olarak B kümesi M'nin TL-vague alt modülüdür.

3. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen en önemli sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bölüm 2.1. de:

1. TL-vague alt grupların "⊆" bağıntısına göre tam kafes olduğu gösterildi (Teorem 2.1.4).
2. TL-vague alt gruplar için gerek ve yeter şart verildi (Teorem 2.1.8).
3. Grup üzerinde verilen regüler TL-fuzzy bağıntsı yardımıyla oluşturulan TL-vague gup için bir alt grubun TL-vague alt grup olduğu gösterildi (Teorem 2.1.9).
4. TL-vague homomorfilerin bileşkesinin TL-vague homomorfi olduğu gösterildi (Teorem 2.1.13).
5. Bir grup homomorfisi E-F'ye genişletilmiş ise TL-vague homomorfi olduğu gösterildi (Teorem 2.1.16).

Bölüm 2.2. de:

1. Verilen bir halkadan TL-vague halka elde edilebileceği gösterildi (Teorem 2.2.4).
2. TL-vague alt halkalar için gerek ve yeter şart verildi (Teorem 2.2.7).
3. Halka üzerinde verilen regüler TL-fuzzy bağıntsı yardımıyla oluşturulan TL-vague halka için bir alt halkanın TL-vague alt halka olduğu gösterildi (Teorem 2.2.9).
4. TL-vague alt halkaların "⊆" bağıntısına göre tam kafes olduğu gösterildi (Teorem 2.2.10).
5. TL-vague halka homomorfilerin bileşkesinin TL-vague halka homomorfisi olduğu gösterildi (Teorem 2.2.167).

Bölüm 2.3. de:

1. Verilen bir modülden TL-vague modül elde edilebileceği gösterildi (Teorem 2.3.8).
2. Modül üzerinde verilen regüler TL-fuzzy bağıntsı yardımıyla oluşturulan TL-vague modül için bir alt modülün TL-vague alt modül olduğu gösterildi (Teorem 2.3.13).
3. TL-vague alt modüllerin kafes yapısı "⊆" bağıntısına göre tam kafes olduğu gösterildi (Teorem 2.3.14).
4. TL-vague modül homomorfilerin bileşkesinin TL-vague modül homomorfisi olduğu gösterildi (Teorem 2.3.16).
5. TL-vague alt modülün TL-vague sıfırlayanının TL-vague ideal olduğu gösterildi (Tanım 2.3.17) (Teorem 2.3.18).

4. ÖNERİLER

Gruplar, halkalar ve modüller matematiğin önemli konularındandır. Son yıllarda fuzzy alt gruplar, fuzzy alt halkalar yardımıyla klasik teorideki bazı özellikler elde edildiği gözlemlenmektedir. TL-vague ikili işlem klasik ikili işlemin bir genellemesi olduğundan TL-vague grup, TL-vague halka, TL-vague modül yapılarını incelemek klasik teoride bazı sonuçları elde etmek için kullanılabilir. Özellikle TL-fuzzy altgrupları, TL-fuzzy alt halkaları ve TL-fuzzy alt modülleri TL-vague ikili işlemler için incelemek bu konuya büyük katkı sağlayacaktır.

5. KAYNAKLAR

1. Anthony, J.M. ve Sherwood, H., Fuzzy groups redefined, J. Math. Anal. Appl., 69 (1979) 124-130.

2. Birkhoff, G., Lattice Theory, 3rd Edition, Providence, RI, 1967.

3. Bhutani, K. R. ve Mordeson, J. N., Vague groups and -vague groups, New Mathematics and Natural Computation 1, 2 (2005) 229-242.

4. Bhutani K. R. ve Mordeson, J. N., Similarity Relations, Vague Groups, and Fuzzy Subgroups, New Mathematics and Natural Computation ,1, 2 (2006) 195-208.

5. Crist, R. ve Mordeson, J. N., Vague rings, New Mathematics and Natural Computation 1, 2 (2005) 215-228.

6. Demirci, M., Vague groups, J. Math. Anal. Appl., 230 (1999) 142–156.

7. Demirci, M.,Fundamentals of M-vague algebra and M-vague arithmetic operations, Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems, 10, 1 (2002) 25-75.

8. Demirci, M., Fuzzy functions and their fundamental properties, Fuzzy Sets Syst., 106 (1999) 239–246.

9. Demirci, M. ve Çoker, D., Remarks on Vague Groups, Journal of Fuzzy Mathematics, 10 (2002) 657-668.

10. Demirci, M., Foundations of Fuzzy Functions and Vague Algebra Based on Many-valued Equivalence Relations, Part II: Vague Algebraic Notions, Int. J. General Systems, 32, 2 (2003) 157-175.

11. Demirci, M., Foundations of Fuzzy Functions and Vague Algebra Based on Many-valued Equivalence Relations, Part III: Constructions of Vague Algebraic Notions and Vague Arithmetic Operations , Int. J. General Systems, 32, 2 (2003) 177-201.

12. M. Demirci, A Theory of Vague Lattices Based on Many-Valued Equivalence Relations-II: complete lattices, Fuzzy Sets and Systems, 151, 3 (2005) 473-489.

13. M. Demirci, A Theory of Vague Lattices Based on Many-Valued Equivalence Relations-I: general representation results, Fuzzy Sets and Systems,151, 3 (2005) 437-472.

14. Demirci, M. ve Recasens, J., Fuzzy groups, fuzzy functions and fuzzy equivalence relations, Fuzzy Sets Syst., 144 (2004) 441-458.

15. Demirci, M., Errete to “Fuzzy Group Based on Fuzzy Binary Operation”, Computers and Mathematics with Applications, 49 (2005) 1951-1952.

16. Deniz, Ü., Fuzzy Modül Homomorfizmaları, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

17. Dutta T.K. ve Biswas B.K., On fuzzy congruence of near-ring module, Fuzzy Sets Syst., 112 (2000) 343-348.

18. Eken, Z. ve Sezer, S., On Some Properties of Vague Lattices, International Journal of Contempt. Math. Sciences, 31, 4 (2009) 1511-1524.

19. Goguen J.A., L-Fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145-174.

20. Höhle U., Porst H. ve Sostak A., Fuzzy functions: a fuzzy extension of the category set and some related categories, Applied General Topology, 1 (2000) 115-127.

21. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1989.

22. Kim H. S., Monk B. ve Neggers J., On pseudo-fuzzy linear mappings, Information Sciences, 177 (2007) 897-905.

23. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

24. Ma, Z., Yang, W. ve Ren, Q., A common generalization of smooth group and vague group, Fuzzy Information and Engineering, 40 (2007) 144-148.

25. Malik, D.S. ve Mordeson, J.N., Fuzzy homomorphisms of rings, Fuzzy Sets and Systems 46 (1992) 139-146.

26. Mordeson, J. N. ve Bhutani, K. R., Vague groups and Vague Field, J. Fuzzy Math. 15, 4 (2007) 927-944.

27. Mordeson, J. N. and Malik, D.S.,Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing, 1998.

28. Nguyen, H. ve Walker, E., A first course in Fuzzy Logic, New Mexico, 1999.

29. Ramakrishna, N., On vague universal algebras, International Journal Of Computational Cognitional, 7, 1 (2009).

30. Ren, Q., Zhang, D. ve Ma, Z., On Vague Subring and Its Structure, Fuzzy Information and Engineering, 40 (2007) 138-143.

31. Rosenfeld, A., Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl., 35 (1971) 512-517.

32. Rosenfeld, A., Fuzzy graphs, in; L. A. Zadeh, K. S. Fv, M. Shimura(Eds.), Fuzzy Sets and Their Applications, Academic pres, New York, 1975.

33. Sasaki, M., Fuzzy functions, Fuzzy Sets Syst., 55 (1993) 295-301.

34. Sezer, S., Vague groups and generalized vague subgroups on the basis of ([0,1], ≤, ⋀), Information Sciences, 174 (2005) 123-142.

35. Sezer, S., Vague Subgroups, 15th Turkish National Mathematical Symposium Proceding-Mersin University, 2004, XV. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildirileri, 119-133.

36. Sezer, S., Vague Normal Subgroups, The Journal of Fuzzy Mathematics, 16, 3 (2008) 513-524.

37. Sezer, S., Some Properties of Vague Rings, International Journal of Algebra, 16, 4 (2010) 751-760.

38. Sidky, F.I., t-fuzzy mapping, Fuzzy Sets Syst., 76 (1995) 387-393.

39. Sostak, A., Fuzzy fuctions and an extension of the category L-top of Chang-Goguen L-topological spaces, Proceedings of the Ninth Prague Symposium, 2002, Topology Atlas, Toronto, 271-294.

40. Tamura, S., Higuchi, S. ve Tanaka, K., Pattern classification based on fuzzy relations, IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 1 (1971) 61-66.

41. Yeh, R.T. ve Bang, S.Y., Fuzzy relations, Fuzzy graphs and their applications to cluster analysis, in; L. A. Zadeh, K. S. Fv, M. Shimura(Eds.), Fuzzy Sets and Their Applications, Academic pres, New York, 1975.

42. Yuan, X. ve Lee, E., Fuzzy Group Based on Fuzzy Binary Operation, Computers and Mathematics with Applications, 47 (2004) 631-641.

43. Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

44. Zadeh, L. A., Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences, 3 (1971) 177-200.

ÖZGEÇMİŞ

Dilek Bayrak, 1986’da Sinop’ta doğdu. İlköğrenimini İnkılap İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini ise Sinop Anadolu Öğretmen Lise’sinde tamamladı.

2003-2004 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği programına girdi. 2008 yılında lisans eğitimini tamamladı.

2008-2009 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı yüksek öğrenimine başlayan BAYRAK iyi derecede İngilizce bilmektedir.