KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARIGRUPLARDA $(\mathcal{J}, T)$-L- FUZZY KABA KÜMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canan EKİZ

TEMMUZ 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YARIGRUPLARDA $(\mathcal{I},T)$-L- FUZZY KABA KÜMELER

Canan EKİZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	**: 10.06.2009**
Tezin Savunma Tarihi	**: 10.07.2009**

Tez Danışmanı	**: Yrd. Doç. Dr. Sultan YAMAK**
Jüri Üyesi	**: Doç. Dr. Osman KAZANCI**
Jüri Üyesi	**: Prof. Dr. İsmail Hakkı ALTAŞ**

Enstitü Müdürü	**: Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU**

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince, karşılaştığım her türlü sorunda yardımlarını esirgemeyen ve bilimsel çalışma hayatımı, emekleri üzerine kuracağım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Sultan YAMAK' a sabırla yol gösterdiği için çok teşekkür ederim.

Başarıma inandığı, çalışmalarımda daima yüreklendirdiği, bana güvendiği ve beni her konuda desteklediği için saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a çok teşekkür ederim.

Çalışanı olduğum Giresun Üniversitesi'nin değerli üyelerine ve sevgiyle öğrettikleri için K.T.Ü Matematik bölümündeki tüm hocalarıma saygılar sunar, çok teşekkür ederim. Ayrıca her zaman yanımda olan canım aileme ve beraber çalıştığım sevgili arkadaşlarım, başta, Yıldıray ÇELİK, Rukiye ÖZTÜRK, Ayşe KABATAŞ ve Elif BEKAR olmak üzere değerli arkadaşım Fatma ÇOBAN' a ve hayatım boyunca daima yanımda bulduğum canım kuzenim İnci KAYA' ya çok teşekkür ederim.

Canan EKİZ
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada, genelleştirilmiş kaba kümeler ve genelleştirilmiş $(\mathcal{J}, T)$-L-fuzzy kaba kümelerle ilgili bazı yeni özellikler incelenmiştir. Genelleştirilmiş kaba kümeler ve genelleştirilmiş $(\mathcal{J}, T)$-L-fuzzy kaba kümeler, en genel durumları göz önüne alınarak, yarıgruplara aktarılmış ve bazı yeni teoremler elde edilmiştir.

Birinci bölümde, kafes, t- norm, t- conorm, negatör, implikasyon, yarıgrup, L-fuzzy alt küme, L-fuzzy bağıntı, TL-fuzzy alt yarı grup (ideal, bi-ideal, asal ideal) kavramlarına değinilmiş ve bu çalışmada yararlı olabilecek tanımlar, teoremler ve örneklere yer verilmiştir.

İkinci bölümde; öncelikle, genelleştirilmiş yaklaşım uzayı için bir kesin kümenin alt ve üst yaklaşımlarının ve genelleştirilmiş L-fuzzy yaklaşım uzayı için bir L-fuzzy kümesinin T-üst ve $\mathcal{J}$-alt fuzzy yaklaşımlarının genel özellikleri incelenmiştir. Daha sonra evrensel küme olarak iki yarıgrup seçilerek bazı teoremler ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: L-Fuzzy Alt Küme, Yarıgrup, Genelleştirilmiş (L-Fuzzy) Yaklaşım Uzayı, Kaba Küme, $(\mathcal{J}, T)$-L-Fuzzy Kaba Küme

SUMMARY

$(\mathcal{J}, T)$-L-Fuzzy Rough Sets in Semigroups

In this thesis, some new properties of generalized rough sets and generalized $(\mathcal{J}, T)$-L-Fuzzy Rough Sets are investigated. Taking their general cases into consideration, generalized rough sets and generalized $(\mathcal{J}, T)$-L-fuzzy rough sets are adapted to the semigroups and some new theorems are obtained.

In the first part, the notions of lattice, t-norm, t-conorm, implication, semigroup, L-fuzzy subset, L-fuzzy relation, TL-fuzzy subsemigroup (ideal, bi-ideal, prime ideal) are dealt with and some definitions, theorems and examples necessary for this study are given.

In the second part; first of all, for generalized approximation space, general properties of lower and upper approximations of a crisp set or for generalized L-fuzzy approximation space, $\mathcal{J}$-lower and T-upper approximations of a L-fuzzy subset are investigated. Afterwards when two semigroups are chosen as universal sets, some theorems are proved.

Key Words: L-Fuzzy Subset, Semigroup, Generalized (L-Fuzzy) Approximation Space, Rough Set, $(\mathcal{J}, T)$-L-Fuzzy Rough Set

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\wp(X)$	: X'in güç kümesi
$(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$	: En büyük elemanı 1, en küçük elemanı 0 olan bir tam kafes
T	: L üzerinde tanımlı bir t-norm
S	: L üzerinde tanımlı bir t-conorm
$\mathcal{I}$	: L üzerinde tanımlı bir implikasyon
$\mathcal{N}$	: L üzerinde tanımlı bir negatör
$(Y, *)$	: " $*$ " ikili işlemine göre bir yarıgrup
$F(X)$	: X'in fuzzy güç kümesi
$F(X, L)$	: X'in L-fuzzy güç kümesi
μ_α	: μ'nün seviye alt kümesi
D_T	: L üzerinde tanımlı bir T t-normuna göre L'nin idempotent elemanlarının kümesi
(X, Y, φ)	: Genelleştirilmiş yaklaşım uzayı
$F_\varphi(x)$	: $x \in X$'in φ bağıntısına göre ardıl komşuluğu
$\overline{\varphi}(A)$	: A kümesinin üst kaba yaklaşımı
$\underline{\varphi}(A)$	: A kümesinin alt kaba yaklaşımı
(X, Y, R)	: Genelleştirilmiş L-fuzzy yaklaşım uzayı
$\overline{R}^T(\mu)$	: μ'nün T-üst L-fuzzy kaba yaklaşımı
$\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$	: μ'nün $\mathcal{I}$-alt L-fuzzy kaba yaklaşımı

1.GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Küme, matematiğin temel kavramlarından biridir. Bu kavramın tanımlanması ve küme teorisinin ortaya çıkması, yüz yıldan daha uzun bir zaman önce çağdaş matematiğin temellerini kuran Alman matematikçi George Cantor'a (1845-1918) kadar uzanır. Cantor [5] küme kavramını, bazı kurallara göre tam olarak düşünülebilen nesnelerin herhangi bir topluluğu olarak açıklar. Bu kavramın çok sezgisel ve basit olduğu söylenebilir. Bağıntılar, fonksiyonlar ve sayılar gibi matematiksel nesneler kümelere örnektir.

Küme kavramı, sadece matematiğin değil, aynı zamanda gündelik yaşamın da bir parçasıdır. Kitaplardan, resimlerden ve insanlardan oluşan topluluklar da birer kümedir. Bir şekilde birbirleri ile ilişkili olan ancak aralarındaki ilişkinin doğası tam açıklanmayan nesneler de küme oluşturabilir.

İngiliz filozof Bertrand Russell [48] (1872-1970), Cantor tarafından verilen sezgisel küme kavramının mantıksal çelişkilere sebep olduğunu gözlemlemiştir. Russell çelişkisi olarak bilinen örnek şöyledir: Kendilerinin elemanı olmayan tüm Y kümelerini içeren bir X kümesi düşünün. $X \in X$ ise X kümesinin tanımından dolayı $X \notin X$ olacaktır. $X \notin X$ ise yine tanımdan $X \in X$ olmak zorundadır. Bu yolla bir çelişki elde edilir. Böylece bir küme, nesnelerin herhangi bir topluluğu olamaz. Bu nedenle bazı matematikçilerin Cantor'un teorisini düzeltme girişimleri olmuştur. Bazılarının ise bu teorinin yerini alabilecek çelişkilerden bağımsız yeni teoriler üretme çabaları vardır. Ancak şimdiye kadar Cantor'un küme teorisine alternatif olabilecek yeni teoriler başarısızlıkla sonuçlanmıştır.

Küme kavramı üzerine kurulu olan modern matematiğin, şüpheli kavramlar üzerine oturtulduğu elbette söylenemez. Pratik anlamda kümeler, matematikte tartışılan yanlışlıklardan uzak olarak kullanılabildikleri için bu yetersizlikler daha çok felsefi boyuttadır.

Küme kavramı ile ilgili olarak tartışılan bir diğer sorun da belirsizliktir. Belirsizlik fikrinin kökeni, "sorites ve falakros (küme ve kel adam)" olarak bilinen paradoksu ilk ortaya atan antik Yunan filozofu Megara'lı Eubulides'e kadar uzanır. Küme ve kel adam paradoksu şöyledir: Bir adamın kafasında 100.000 tel saçı olduğunu düşünün. Bir tel saçının dökülmesi, adamı kesinlikle kel yapmayacaktır. Bu adımın tekrarlanması ile sonuçta saçsız ve kel olmayan bir adama ulaşılır.

Belirsizlik, genellikle, 1893'te Alman mantıkçı Gottlob Frege [16] tarafından kurallaştırılan sınır bölge yaklaşımı ile ilişkilendirilir. Sınır bölge yaklaşımı, sadece bir kümeye veya o kümenin tümleyenine göre sınıflandırılamayacak nesnelerin varlığı ile ilgilidir. Frege'ye göre; kavram, keskin sınırlara sahip olmalıdır ve matematik, belirsiz fikirler kullanmamalıdır.

Matematik, kümeleri içeren tüm matematiksel kavramların kesin olmasını gerektirir. Aksi takdirde doğru muhakeme yapmak imkansızdır.

Klasik küme teorisinde, kümeler sadece elemanlarıyla tanımlanır. Her eleman sadece kümeye ait olup olmadığı ile sınıflandırılır. Örneğin tek sayılar kümesi kesindir (klasiktir). Çünkü bir tamsayı ya tektir ya da değildir. Aksine güzel resim kavramı belirsizdir. Tüm resimlerin güzel resim veya güzel olmayan resim olarak sadece iki sınıfa ayrılması mümkün olmayabilir. Güzellik kesin olmayan ve belirsiz bir kavram olduğundan bazı resimlerin güzel olup olmadığına karar verilemeyebilir.

Sonuç olarak, belirsizlik; matematikte kullanılması onaylanmayan, felsefe için oldukça ilginç bir fikirdir. Ayrıca yeryüzünde elde edilen bilgilerin çoğunlukla belirsizlik içermesi, bu bilgilerden yola çıkarak değerlendirme yapmaya çalışan yapay zeka, bilgisayar bilimleri, veri madenciliği, endüstri mühendisliği, tıp ve her türlü bilimsel veya sosyal alanda uğraş veren kimi araştırmacıların çalışmalarını zorlaştırmaktadır.

Buraya kadar verilen bilgiler [41, 42, 43] makalelerinden derlenmiştir.

Belirsizliklerle başa çıkmada en başarılı teorik yaklaşım, şüphesiz, Azeri matematikçi Lotfi Zadeh [60] tarafından 1965 yılında ortaya atılmış olan bulanık (fuzzy) kümeler teorisidir. Zadeh'in üzerinde durduğu belirsizliği giderme çabası bir çeşit derecelendirme meselesidir. Örneğin 'Perihan gençtir.' önermesinin "yanlış" ya da "doğru" olduğunu tam bir kesinlikle söylemek mümkün değildir. Perihan'ın yaşını bildiğimizde, önermenin doğruluğu (yani bu yaşın "genç olmak" ile uygunluğu) bir derece problemidir ve "Gençlik" kavramından ne anladığımıza bağlıdır. Önerme: "Perihan 22 yaşından küçüktür." olsaydı ve Perihan'ın yaşı bilinseydi, bu önermenin doğru ya da yanlış olduğuna dair kesin bir cevap verilebilirdi. Bu durum bir yaşın $[0, \infty)$ aralığında olacağı düşünülerek kurallaştırılabilir. Şöyle ki $A \subseteq \{x | x \in [0, \infty) ve\ x < 22\}$ kümesi alınır ve Perihan'ın yaşının A'da olup olmadığına bakılır. Ancak "gençlik", $[0, \infty)$ gibi bir kümenin alt kümesi olarak tanımlanamaz. Bu noktada, Zadeh, fuzzy alt kümeleri kavramını tanıtmıştır. Fuzzy küme teorisinde, evrendeki bütün nesnelere üyelik derecesi değeri atanarak nesneler matematiksel olarak yeniden tanımlanır. Üyelik derecesi, verilen kavram ile uyumludur ve benzer nesnelerin derecesine uyar. Açıkça 18 ve 20 yaşları genç yaşlardır fakat farklı derecelere sahiptir: 18 yaş 20 den daha genç bir yaştır. Üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığının gerçel değerleri ile ifade edilir [39].

Kaba (Rough Set Theory) küme teorisi, 1982 de Pawlak [40] tarafından belirsizlik kavramına yeni bir matematiksel yaklaşım olarak ileri sürülmüştür. Klasik küme teorisine bir alternatif değildir, bu teoriden yararlanır.

Kaba küme felsefesi, bir kümenin tanımlanması için başlangıçta evrenin elemanları hakkında bazı bilgilere gereksinim olduğu ve birbirleri ile ilişkili olan bazı bilgilerin evrendeki nesnelerle ifade edilebileceği varsayımına dayanan yaklaşımdır. Aynı bilgi ile nitelendirilen nesneler aynıdır veya ayırt edilemezdir. Örneğin, eğer nesneler belli bir hastalıktan şikâyetçi olan hastalar ise hastalığın belirtileri hastalar hakkındaki bilgileri oluşturur. Aynı belirtileri gösteren hastalar, kendileri hakkındaki bilgiler bakımından ayırt edilemezdir. Bu şekilde elde edilen ayırt edilmezlik bağıntısı, kaba küme kuramının matematiksel temelini oluşturur. Bütün aynı nesnelerin kümesine temel (elemanter) küme denir ve bu küme bilginin yapıtaşını oluşturur. Temel kümelerin herhangi birleşimine kesin (crisp) denir. Aksi takdirde bir küme kabadır. Her kaba küme, kendisinin ya da tümleyenin elemanları şeklinde kesin bir yargıyla sınıflandırılamayan (sınır hattı elemanlarına) elemanlara sahiptir. Belirsizlik kavramı, kesinlik kavramının aksine, elemanlarının bilgisine göre nitelendirilemez. Kaba küme yaklaşımında, herhangi bir belirsiz kavramın (bu belirsiz kavramın alt ve üst yaklaşımları olarak adlandırılan) kesin kavramlar çifti ile yer değiştirebileceği farz edilir. Alt yaklaşım kesin olarak kavrama ait olan tüm nesnelerden oluşur. Üst yaklaşım ise kavrama ait olması muhtemel olan tüm nesneleri içerir. Alt ve üst yaklaşımlar arasındaki fark, belirsizlik kavramının sınır hattını oluşturur. Yaklaşımlar kaba küme teorisindeki iki temel işlemdir.

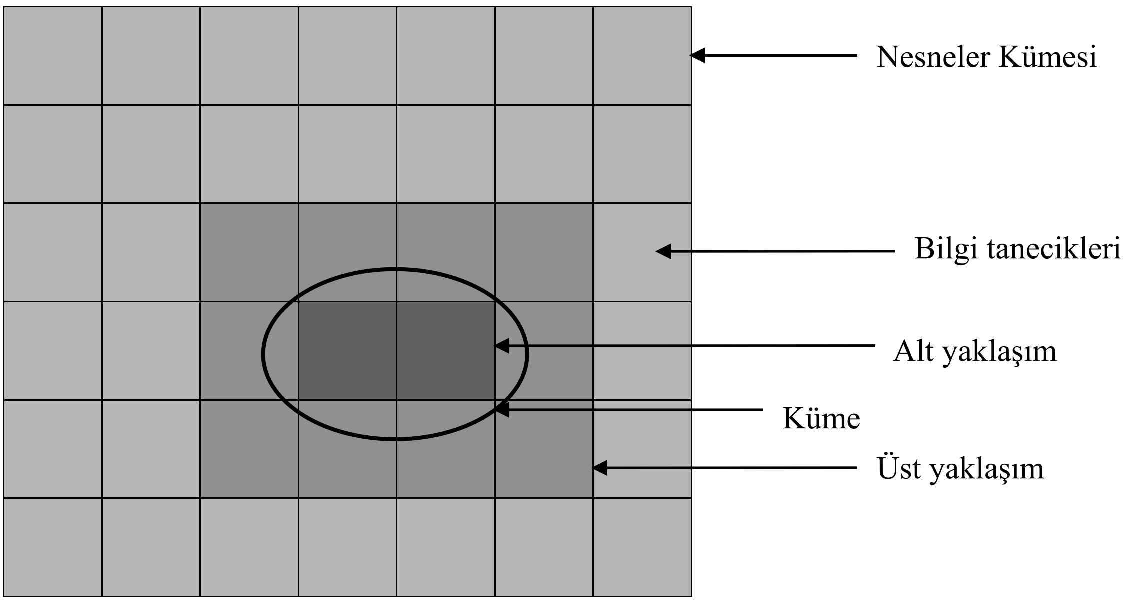
Pawlak kaba kümeleri şöyle tasarlamıştır:

U sonlu ve boştan farklı bir küme ve A niteliklerin bir kümesi olmak üzere bilgi sistemi $S=(U,A)$ çifti ile gösterilir ve her $a \in A$ için $a: U \to V_a$ bir bilgi fonksiyonudur. Burada V_a kümesi a'nın değer kümesidir ve $a(x)$, x nesnesine göre a'nın değerini tanımlar. Eğer her $a \in B$ için $a(x)=a(y)$ oluyorsa $B \subseteq A$ alt kümesi için ayırt edilemezlik bağıntısı $I_B=\{(x,y) \in U^2 : \forall a \in B, a(x)=a(y)\}$ şeklinde gösterilir. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. I_B nin x i içeren denklik sınıfı $B(x)$ ile gösterilir. Eğer $(x, y) \in I_B$ ise x ve y ye B-ayırt edilemez denir. $X \subseteq U$ olmak üzere sırasıyla X'in B-alt ve B-üst yaklaşımları,

$\underline{B(X)} = \{x \in U: B(x) \subseteq X\}$,

$\overline{B(X)} = \{x \in U: B(x) \cap X \neq \varnothing\}$,

olarak tanımlanır. $BN_B(X) = \overline{B(X)} - \underline{B(X)}$ kümesi X'in B-sınır bölgesidir. Eğer $BN_B(X) = \varnothing$ olan bir küme ise X kümesi, B'ye göre klasik (kesin) kümedir ancak $BN_B(X) \neq \varnothing$ olan bir küme ise X kümesi B'ye göre kabadır.



Pawlak [40, 41, 42, 43], bir U kümesi üzerinde, bir denklik bağıntısına göre tanımladığı bu yaklaşımların bazı özelliklerini aşağıda vermiştir:

- $\underline{B(X)} \subseteq X \subseteq \overline{B(X)}$,
- $\underline{B(\varnothing)} = \overline{B(\varnothing)} = \varnothing$,
- $\underline{B(U)} = \overline{B(U)} = U$,
- $\overline{B(X \cup Y)} = \overline{B(X)} \cup \overline{B(Y)}$,
- $\underline{B(X \cap Y)} = \underline{B(X)} \cap \underline{B(Y)}$,
- $X \subseteq Y$ ise $\overline{B(X)} \subseteq \overline{B(Y)}$ ve $\underline{B(X)} \subseteq \underline{B(Y)}$,
- $\underline{B(X)} \cup \underline{B(Y)} \subseteq \underline{B(X \cup Y)}$,
- $\overline{B(X \cap Y)} \subseteq \overline{B(X)} \cap \overline{B(Y)}$,
- $\underline{B(\sim X)} = \sim\overline{B(X)}$,
- $\overline{B(\sim X)} = \sim\underline{B(X)}$,
- $\underline{B\left(\underline{B(X)}\right)} = \overline{B\left(\underline{B(X)}\right)} = \underline{B(X)}$,
- $\overline{B\left(\overline{B(X)}\right)} = \underline{B\left(\overline{B(X)}\right)} = \overline{B(X)}$.

Dubois ve Prade [14] kaba küme ve fuzzy küme kavramlarını birleştirmiştir.

Morsi ve Yakout [38] T yarı-sürekli bir t-norm olmak üzere T-kaba küme tanımını genelleştirmişlerdir.

Rady, Kozae ve Abd El-Monsef [47] herhangi sonlu bir küme üzerinde bir bağıntıya göre alt ve üst yaklaşımlar tanımlayarak Pawlak'ın teorisini genelleştirmişlerdir.

Wu ve Zhang [50] ve Wu,Mi ve Zhang [52] iki sonlu sonlu küme üzerinde tanımlanan herhangi bir fuzzy bağıntı için fuzzy alt ve üst yaklaşımları tanımlamışlardır. Mi ve Zhang [35] ise genelleştirilmiş fuzzy kaba küme teorisinin aksiyomlarına sadık kalmışlar ancak alt ve üst yaklaşımları, herhangi bir T t-normu ve onun reziduali olan bir implikasyon ile tanımlayarak önceki çalışmaları genelleştirmişlerdir. Daha sonraki çalışmalarında Wu, Leung ve Mi [51], genelleştirilmiş yaklaşım uzayında herhangi bir T t-normu için üst ve herhangi bir $\mathcal{J}$ implikasyonu için de alt yaklaşım operatörü tanımlamışlar ve $(\mathcal{J}, T)$-fuzzy kaba yaklaşım operatörleri şeklinde isimlendirdikleri bu operatörlerin özelliklerini araştırmışlardır.

Yeung, Chen, Tsang, Lee ve Wang [57] farklı ikişer fuzzy alt ve üst yaklaşım tanımlayarak, bu yaklaşımların çeşitli özelliklerini, kafes yapılarını ve topolojik yapılarını incelemişlerdir. Özel bir alt yaklaşım operatörü fuzzy küme teorisine uygulanmıştır.

Kaba küme teorisinin cebirsel yaklaşımları birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Kuroki [27] yarıgruplarda, kongrüans ve fuzzy kongrüans bağıntısına göre, alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerini incelemiştir. Kuroki ve Wang [28] fuzzy gruplarda alt ve üst yaklaşımlar üzerinde çalışmışlardır.

Xiao ve Zhang [53] yarıgruplarda, kongrüans ve fuzzy kongrüans bağıntılarını kullanarak kaba asal idealler ve kaba fuzzy asal idealler kavramları üzerinde çalışmışlardır.

Davvaz [10] kaba kümeler ile halkalar arasındaki ilişkileri incelemiştir. Ayrıca, Davvaz kaba kümeler, fuzzy kümeler ve halka teorisi arasındaki ilişkileri araştırdığı çalışmasında [11], Kuroki'nin [27]'deki çalışmasından esinlenlenmiş, evrensel küme olarak halkayı ele alarak halkalardaki fuzzy ideal tanımını, halka üzerinde tanımlanan alt ve üst yaklaşım tanımlarına uygulamıştır. Kazancı ve Davvaz [22] bir halkanın kaba asal idealleri ve kaba fuzzy asal ideallerini tanımlamışlardır. Ayrıca Davvaz ve Mahdavipour [12] bir R-modülün alt modülüne göre kaba alt modül kavramını tanıtmışlardır.

Li, Yin ve Lu [30] evrensel küme olarak bir halka almışlar ve bu halka üzerinde bir T-kongrüans L-fuzzy bağıntı tanımlamışlardır. Bu bağıntı ile, T bir t-norm ve ν, T nin residual implikasyonu olmak üzere, T-üst ve ν-alt yaklaşımlarını tanımlamışlardır. Sonuç olarak TL-fuzzy kaba ideal olarak adlandırdıkları yeni bir cebirsel yapı elde etmişlerdir ve bir TL-fuzzy ideale göre TL-fuzzy kaba kümeler arasında homomorfi tanımını vermişlerdir.

Ignjatović, Ciric ve Bogdanovic [19], çalışmalarında, aynı türden cebirsel yapılar arasında "bağıntısal homomorfi" olarak isimlendirdikleri bir bağıntı ve bir tam rezidual kafes üzerinde "fuzzy bağıntısal homomorfi" şeklinde isimlendirdikleri, bir L-fuzzy bağıntı tanımlamışlardır.

Tüm bu çalışmalar ışığında, bu tezde evrensel küme olarak iki yarıgrup ele alınmış ve $((\mathcal{J}, T)$-L-fuzzy) kaba kümelerin cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Yarı gruplar üzerinde tanımlanan bağıntısal homomorfiye göre alt ve üst yaklaşımların bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca T ve $\mathcal{J}$, sırasıyla, bir L tam kafesi üzerinde tanımlı birer t-norm ve implikasyon olmak üzere yarıgruplarda tanımlanan fuzzy bağıntısal homomorfiye göre $(\mathcal{J}, T)$-L-fuzzy kaba yaklaşım operatörlerinin özellikleri araştırılmıştır. Verilen kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli bilgiler aşağıda verilmiştir.

1.2.Kafesler

Tanım 1.2.1 [4]: $L \neq \emptyset$ olan bir küme ve "$\leq$" bu küme üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. L kümesine sıralı küme denir : $\Leftrightarrow$

(i) Her $a \in L$ için $a \leq a$, (yansıma özelliği)

(ii) Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$, (ters-simetri özelliği)

(iii) Her $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$, (geçişme özelliği)

Bu durum $(L, \leq)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.2.2 [4]: $(L, \leq)$ sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ olsun.

(i) Her $b \in B$ için $x \leq b$ ise $x \in L$ elemanına B kümesinin bir alt sınırı,

(ii) Her $b \in B$ için $b \leq y$ ise $y \in L$ elemanına B kümesinin bir üst sınırı

denir.

Tanım 1.2.3 [4]: $(L, \leq)$ sıralı bir küme, $B \subseteq L$ ve $b_0 \in B$ olsun.

(i) Her $b \in B$ için $b_0 \leq b$ ise b_0 elemanına B kümesinin en küçük elemanı,

(ii) Her $b \in B$ için $b \leq b_0$ ise b_0 elemanına B kümesinin en büyük elemanı

denir.

Genel olarak bir kafesin en küçük elemanı "0" ve en büyük elemanı ise "1" ile gösterilir.

Tanım 1.2.4 [4]: $(L, \leq)$ sıralı bir küme ve $B \subseteq L$ olmak üzere B kümesinin, tüm alt sınırlarının oluşturduğu küme B_{alt} ve tüm üst sınırlarının oluşturduğu küme de $B_{üst}$ ile gösterilsin. Bu takdirde:

(i) $B_{alt} \neq \varnothing$ olan bir küme ve bu kümenin en büyük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir. $infB$, $\wedge B$, $\bigwedge_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

(ii) $B_{üst} \neq \varnothing$ olan farklı bir küme ve bu kümenin en küçük elemanı mevcut ise bu elemana B kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. $supB$, $\vee B$, $\bigvee_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım1.2.5 [4]: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun.

(i) Her $a, b \in L$ için $sup\{a, b\} = a \vee b$ ve $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ mevcut ise L kümesine bir kafes denir. Bu durum $(L, \ \wedge, \ \vee\ )$ şeklinde gösterilir.

(ii) Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise L kümesine bir zincir denir.

Örnekler 1.2.6:

(1) Her zincir bir kafestir.

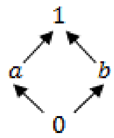
(2) $L = \{0, a, b, 1\}$ kümesi üzerinde Şekil 1 yardımıyla "$x \leq y \iff x = y$ veya x'ten y'ye oklar yardımıyla ulaşılabilsin."şeklinde tanımlanan" $\leq$ " sıralama bağıntısı verilsin.

Şekil 1. Örnekler 1.2.6 (2)'deki kafes yapısı

$(L, \leq)$, bu bağıntıya göre bir zincirdir.

Verilen kümeler üzerinde verilen şekiller yardımıyla tanımlanan sıralama bağıntıları aksi söylenmedikçe yukarıda tanımlandığı gibi alınacaktır.

(3) $L = \{0, a, b, 1\}$ kümesi üzerinde yandaki Şekil 2 yardımıyla" $\leq$ " sıralama bağıntısı tanımlansın.



Şekil 2. Örnekler 1.2.6 (3)'deki kafes yapısı

Bu durumda $(L, \leq)$ bir kafestir. Ancak açıkça görülebilir ki L bir zincir değildir.

(4) X bir küme ve $\wp(X)$, X'in bütün alt kümelerinin kümesi olsun. $(\wp(X), \subseteq)$ bir kafestir. Ancak X en az iki elemanlı bir küme ise $(\wp(X), \subseteq)$ kümesi bir zincir değildir.

Tanım 1.2.7 [4]: $(L, \leq)$ sıralı bir küme olsun. Her $K \subseteq L$ için $infK$ ve $supK$ mevcut ise L'ye bir tam kafes denir.

Örnekler 1.2.8:

(1) $(G, +)$ bir grup olsun. $S(G) = \{H|H, G'nin\ alt\ grubu\}$ kümesi $" \subseteq "$ bağıntısına göre bir tam kafestir.

(2) M bir R-modül ise $S(M) = \{A|A, M'nin\ R\_alt\ modül\}$ kümesi $" \subseteq "$ bağıntısına göre bir tam kafestir.

(3) $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ bir topoloji olsun. $(\mathcal{T}, \subseteq)$ bir tam kafestir.

Her tam kafesin bir kafes olduğu açıktır. Ancak aşağıdaki örneklerden de görülebileceği gibi bu ifadenin tersi genel anlamda doğru değildir.

Örnekler 1.2.9:

(1) $" \leq "$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerindeki sıralama olarak alınırsa $(\mathbb{N}, \leq)$ bir zincirdir. Ancak $K = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ için $K_{üst} = \emptyset$ olduğundan $\mathbb{N}$ bir tam kafes değildir.

(2) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x \leq y \Leftrightarrow x \mid y$ olarak alınırsa $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$ kümesi bir kafestir ancak $K = \{2n \middle| n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $K_{üst} = \emptyset$ olduğundan $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ bir zincir veya tam kafes değildir.

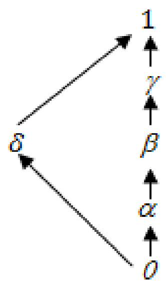
(3) $" \leq "$, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde bilinen anlamdaki sıralama bağıntısı olsun. $L = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ üzerinde $" \lesssim "$ bağıntısı $\frac{1}{x} \lesssim \frac{1}{y} \Leftrightarrow x \leq y$ olarak tanımlansın. $(L, \lesssim)$ kümesi bir zincirdir. Fakat bir tam kafes değildir.

Teorem 1.2.10 [4]: $(L, \leq)$ bir sıralı küme olsun.

$(L, \leq)$ bir tam kafestir $\Leftrightarrow$ $1 \in L$ ve her $\emptyset \neq T \subseteq L$ için $infT$ mevcuttur.

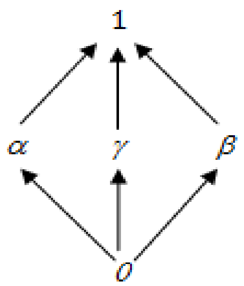
Tanım 1.2.11 [4]: L bir kafes ve her $a, b, c \in L$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ise L ye dağılımlı kafes denir.

Örnek 1.2.12: Şekil 3'te verilen sıralama ile $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, 1\}$ kümesi bir dağılımlı kafestir.

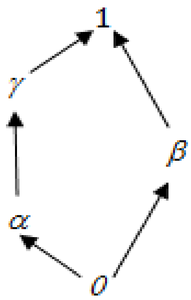


Şekil 3. Örnek 1.2.12'deki kafes yapısı

Örnek 1.2.13: M_5 ve N_5 kafesleri dağılımlı kafes değildir.



Şekil 4. M_5 kafes yapısı



Şekil 5. N_5 kafes yapısı

Tanım 1.2.14 [4]: $(L, \leq, \wedge, \vee)$ bir tam kafes olsun.

Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için $a \wedge \left(\bigvee_{i \in J} b_i\right) = \bigvee_{i \in J}(a \wedge b_i)$ eşitliği sağlanıyorsa L'ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir.

Tanım 1.2.15 [4]:

(i) En küçük elemanı mevcut olan kafeslere alttan sınırlı kafes denir ve $(L, \leq, 0)$ ile gösterilir.

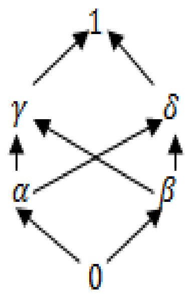
(ii) En büyük elemanı mevcut olan kafeslere üstten sınırlı kafes denir ve $(L, \leq, 1)$ ile gösterilir.

L kafesi üstten ve alttan sınırlı ise L ye sınırlı kafes denir ve $(L, \leq, 0, 1)$ ile gösterilir.

Her tam kafes sınırlıdır. Ancak tersi doğru olmayabilir.

Örnekler 1.2.16:

(1) Şekil 6'daki " $\leq$ " sıralaması ile $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, 1\}$ kümesi sınırlıdır. Ancak $(L, \leq)$ bir kafes değildir.



Şekil 6. Örnekler 1.2.16 (1)'deki kafes yapısı

(2) Şekil 7'deki " $\leq$ " sıralaması ile $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sınırlı bir kafestir. Ancak $(\mathbb{N}, \leq)$ bir tam kafes değildir.

Şekil 7. Örnekler 1.2.16 (2)'deki kafes yapısı

Teorem 1.2.17 [4]: $(L_1, <)$, $(L_2, \prec)$ kafesler ve $L = L_1 \times L_2$ olsun. Aksi söylenmedikçe L üzerindeki bağıntı $(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Leftrightarrow x < x',\ y \prec y'$ olarak alınacaktır. Bu durumda $(L, \preccurlyeq)$ kümesi bir kafestir.

Örnek 1.2.18 [4]: $(L, \leq)$ bir kafes olsun. Teorem1.2.17'de ifade edilen sıralamaya göre $L^I = \{(x, y) | x, y \in L, x \leq y\}$ kümesi kafestir.

Bu tezde aksi söylenmedikçe $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ tam kafesi üzerinde çalışılacaktır.

1.3. t-normlar ve t-conormlar

Tanım 1.3.1 [24]: $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ tam kafesi üzerinde tanımlı $T: L^2 \to L$ ikili işlemine bir t-norm denir $:\Leftrightarrow$

T1) Her $x, y \in L$ için $T(x,y) = T(y,x)$, (Değişme)

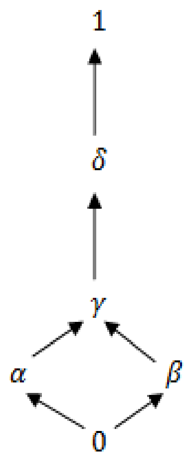
T2) Her $x, y, z \in L$ için $T(T(x,y),z) = T\big(x, T(y,z)\big)$, (Birleşme)

T3) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $T(x,z) \leq T(y,z)$, (Monotonluk)

T4) Her $x \in L$ için $T(x,1) = x$. (Sınır Şartı)

Herhangi $x, y \in L$ için $T(x,y)$ notasyonu yerine xTy notasyonu da kullanılabilir.

Örnek 1.3.2: Şekil 8'deki sıralama ile verilen $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, 1\}$ kümesi bir tam kafestir ve aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlanan T ikili işlemi L tam kafesi üzerinde bir t-normdur.



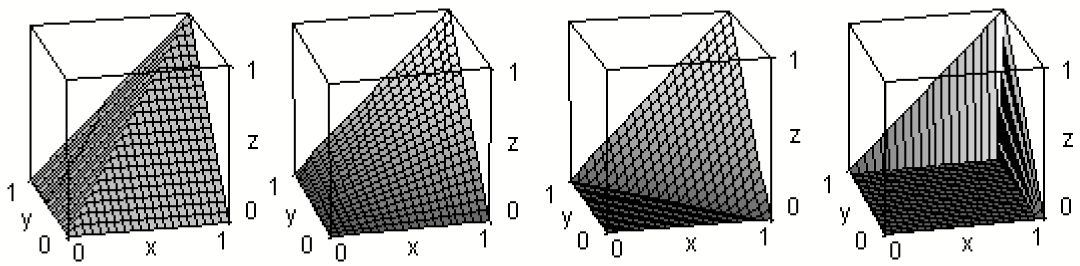
Şekil 8. Örnek 1.3.2'deki kafes yapısı

Tablo 1. Örnek 1.3.2'deki T t-normu

$\boldsymbol{T}$	**0**	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\delta}$	**1**
0	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{\alpha}$	0	α	α	α	α	α
$\boldsymbol{\beta}$	0	α	β	γ	γ	β
$\boldsymbol{\gamma}$	0	α	γ	γ	γ	γ
$\boldsymbol{\delta}$	0	α	γ	γ	δ	δ
1	0	α	β	γ	δ	1

Örnek 1.3.3 [24]: Aşağıda $L = [0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlanan temel t-normlar verilmiştir:

- $T_M(x, y) = \min(x, y)$, (Minimum)
- $T_P(x, y) = x.y$, (Çarpım)
- $T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$, (Lukasiewicz t-norm)
- $T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & x, y \in [0,1) \\ \min(x, y), & x = 1 \; veya \; y = 1 \end{cases}$, (Kesin Çarpım)
- $T_{nM}(x, y) = \begin{cases} 0, & x + y \leq 1 \\ \min(x, y), & x + y > 1 \end{cases}$, (Nilpotent Minimum)



Şekil 9. Sırasıyla, T_M, T_P, T_L ve T_D temel t-normlarının üç boyutlu grafikleri

Teorem 1.3.4 [24]: L bir tam kafes ve T, L üzerinde t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçeklenir:

(1) $\forall x, y \in L$ için $T(x, y) \leq x \wedge y$,

(2) $\forall x \in L$ için $T(x, 0) = T(0, x) = 0$,

(3) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ için $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$.

Tanım 1.3.5 [13, 49]: L bir tam kafes ve T , L üzerinde bir t-norm olsun.

(i) T'ye L üzerinde $\vee$-dağılımlı t-norm denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b_1, b_2 \in L$ için $T(a, b_1 \vee b_2) = T(a, b_1) \vee T(a, b_2)$.

(ii) T'ye L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için $T(a, \vee_{i \in J} b_i) = \vee_{i \in J} T(a, b_i)$.

Örnek 1.3.6: T_P t-normu, $[0,1]$ üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-normdur.

Örnek 1.3.7: T_D t-normu, $[0,1]$ üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı değildir.

Tanım 1.3.8 [24]: $(L,\leq)$ bir tam kafes ve T_1, T_2, L üzerinde herhangi iki t-norm olsun. T_1, T_2'den zayıftır (veya T_2, T_1'den güçlüdür) denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y\in L$ için $T_1(\mathrm{x},\mathrm{y})\leq T_2(\mathrm{x},\mathrm{y})$'dir.

Bu durum $T_1\leq T_2$ şeklinde yazılır.

Örnekler 1.3.9: Bir L bir tam kafesi üzerinde aşağıdaki t-norm örnekleri verilebilir:

(i) $\forall x,y\in L$ için $T_D(x,y)=\begin{cases} x, & y=1 \\ y, & x=1 \\ 0, & x\neq 1 \; veya \; y\neq 1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan T_D ikili işlemi L üzerinde bir t-normdur.

(ii) $\forall x,y\in L$ için $T_M(x,y)=x\wedge y$ şeklinde tanımlanan T_M ikili işlemi L üzerinde bir t-normdur.

L üzerindeki herhangi bir T t-normu için $T_D\leq T\leq T_M$ olduğundan T_D , L üzerindeki en zayıf t-norm ve T_M L üzerindeki en güçlü t-normdur.

Tanım 1.3.10 [24]: L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. $a\in L$'ye L'nin, T t-normuna göre bir idempotent elemanı denir $:\Leftrightarrow$ $T(a,a)=a$'dır.

L'nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $D_T=\{a\in L|T(a,a)=a\}$ ile gösterilir. Herhangi bir T t-normu için T ikili işlemi, D_T kümesi üzerinde bir ikili işlemdir.

Teorem 1.3.11 [24]: L bir tam kafes ve T, L üzerinde bir t-norm olsun. I ve J birer indis kümesi olmak üzere $\{a_i\in L|i\in I\}$ ve $\{b_j\in L\big|j\in J\}$ aileleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)\boldsymbol{T}\left(\bigwedge_{j\in J} b_j\right)\leq \bigwedge_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(a_iTb_j).$$

Tanım 1.3.12 [24]: $(L,\leq,\wedge,\vee,0,1)$ tam kafesi üzerinde tanımlı $S:L^2\to L$ ikili işlemine t-conorm denir $:\Leftrightarrow$

S1) Her $x,y\in L$ için $S(x,y)=S(y,x)$, (Değişme)

S2) Her $x,y,z\in L$ için $S(S(x,y),z)=S\big(x,S(y,z)\big)$, (Birleşme)

S3) Her $x,y,z\in L$ için $x\leq y$ ise $S(x,z)\leq S(y,z)$, (Monotonluk)

S4) Her $x\in L$ için $S(x,0)=x$. (Sınır Şartı)

Örnek 1.3.13 [24]: Aşağıda $L=[0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlanan temel t-conormlar verilmiştir:

- $S_M(x,y)=\max(x,y)$, (Maksimum)
- $S_P(x,y)=x+y-xy$, (Olasılıklı Toplam)

- $S_{LK}(x,y) = \min\{1, x+y\}$, (Lukasiewicz)
- $S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x,y \in L \setminus \{0\} \\ \max(x,y) & , \quad x = 0 \; veya \; y = 0 \end{cases}$, (Kesin Toplam)
- $S_{nM}(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x+y \leq 1 \\ \max(x,y) & , \quad x+y \nleq 1 \end{cases}$, (Nilpotent Maksimum)

Önerme 1.3.14 [24]: Bir $S: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-conormdur ancak ve ancak her $x, y \in [0,1]$ için $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$ olacak şekilde, $[0,1]$ tam kafesi üzerinde tanımlı olan bir T t-normu mevcuttur.

1.4. Negatörler

Tanım 1.4.1 [15]: L bir tam kafes olsun. $\mathcal{N}: L \to L$ fonksiyonuna bir negatör denir : ⟺

(i) $\mathcal{N}: L \to L$ azalan bir fonksiyondur,

(ii) $\mathcal{N}(0) = 1$ ve $\mathcal{N}(1) = 0$.

Her $x \in L = [0,1]$ için $\mathcal{N}_S(x) = 1 - x$ negatörü standart negatör olarak adlandırılır.

Tanım 1.4.2 [15]: L bir tam kafes ve $\mathcal{N}: L \to L$ bir negatör olsun. $\mathcal{N}$'ye involutive denir : ⟺ Her $x \in$ L için $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$.

1.5. İmplikasyonlar

Tanım 1.5.1 [1, 2, 3, 20, 21, 33]: $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ tam kafesi üzerinde tanımlı $\mathcal{I}: L^2 \to L$ ikili işlemine bir implikasyon denir : ⟺

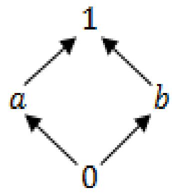
I1) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $\mathcal{I}(y,z) \leq \mathcal{I}(x,y)$,

I2) Her $x, y, z \in L$ için $y \leq z$ ise $\mathcal{I}(x,y) \leq \mathcal{I}(x,z)$,

I3) Her $\mathcal{I}(0,0) = \mathcal{I}(1,1) = 1$ ve $\mathcal{I}(1,0) = 0$.

Tanımdan kolayca görülebilir ki $\mathcal{I}$ implikasyonu her $y \in L$ için $\mathcal{I}(0,y) = 1$ ve her $x \in L$ için $\mathcal{I}(x,1) = 1$ eşitliklerini sağlar.

Örnek 1.5.2: $L = \{0, a, b, 1\}$ kümesi Şekil 10'da verilen sıralama bağıntısına göre bir tam kafestir. Bu durumda, aşağıdaki tablolar yardımıyla tanımlanan $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ve $\mathcal{I}_3$ ikili işlemleri L üzerinde tanımlı implikasyonlardır.



Şekil 10. Örnek 1.5.2'deki kafes yapısı

Tablo 2. Örnek 1.5.2'deki $\mathcal{I}_1$ implikasyonu

$\mathcal{I}_1$	**0**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	**1**
0	1	1	1	1
$\boldsymbol{a}$	0	1	a	1
$\boldsymbol{b}$	0	b	1	1
1	0	0	0	1

Tablo 3. Örnek 1.5.2'deki $\mathcal{I}_2$ implikasyonu

$\mathcal{I}_2$	**0**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	**1**
0	1	1	1	1
$\boldsymbol{a}$	0	1	b	1
$\boldsymbol{b}$	0	a	1	1
1	0	0	0	1

Tablo 4. Örnek 1.5.2'deki $\mathcal{I}_3$ implikasyonu

$\mathcal{I}_3$	**0**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	**1**
0	1	1	1	1
$\boldsymbol{a}$	b	1	b	1
$\boldsymbol{b}$	a	a	1	1
1	0	a	b	1

Örnekler 1.5.3 [3, 39]: $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir tam kafes olsun.

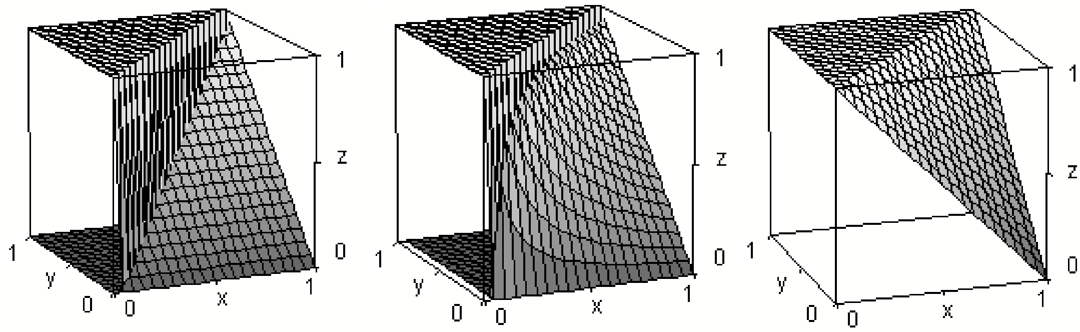
(1) T , L üzerinde bir t-norm olmak üzere,

$$\mathcal{I}(x,y) = \bigvee_{xTk \leq y} k$$

ikili işlemi L üzerinde bir implikasyondur. Bu implikasyona $\mathfrak{R}$-implikasyon denir.

$L = [0,1]$ tam kafesi üzerindeki bazı $\mathfrak{R}$-implikasyonlar şunlardır:

- $xTy = x \wedge y$ ise $\mathcal{I}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$ (Gödel)
- $xTy = x.y$ ise $\mathcal{I}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$ (Goguen)
- $xTy = max\{0, x + y - 1\}$ ise $\mathcal{I}(x,y) = min\{1, 1 - x + y\}$. (Lukasiewicz)



Şekil 11. Gödel, Goguen ve Lukasiewicz implikasyonlarının üç boyutlu grafikleri

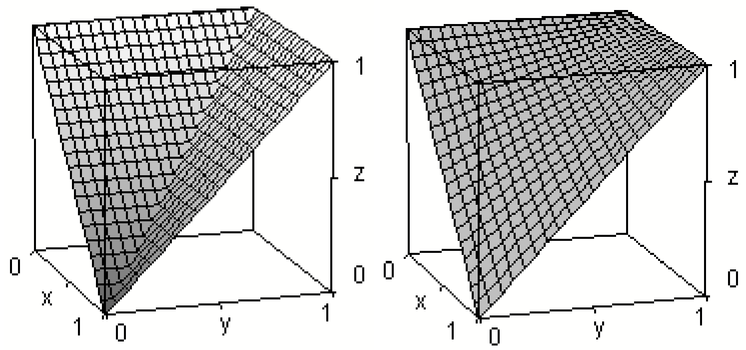
(2) S, L üzerinde bir t-conorm ve $\mathcal{N}$, L üzerinde bir negatör olmak üzere,

$$\mathcal{I}(x,y) = S(\mathcal{N}(x), y)$$

İle tanımlı $\mathcal{I}: L^2 \to L$ ikili işlemi L üzerinde bir implikasyondur. Bu implikasyona S-implikasyon denir.

$L = [0,1]$ tam kafesi üzerindeki bazı $\mathcal{S}$-implikasyonlar şunlardır:

- $xSy = max(x,y)$ ve $\mathcal{N}(x) = 1 - x$ ise $\mathcal{I}(x,y) = max\{1 - x, y\}$(Kleene-Dienes)
- $xSy = x + y - xy$ ve $\mathcal{N}(x) = 1 - x$ ise $\mathcal{I}(x,y) = 1 - x + x\,y$ (Reichenbach)
- $xSy = min\{1, x + y\}$ ve $\mathcal{N}(x) = 1 - x$ ise $\mathcal{I}(x,y) = min\{1, 1 - x + y\}$ (LK)



Şekil 12. Kleene-Dienes ve Reichenbach implikasyonlarının üç boyutlu grafikleri

1.6.Bağıntılar

Tanım 1.6.1 [18]: $X, Y \neq \varnothing$ olan iki küme olsun. $\theta \in \mathcal{P}(X \times Y)$ altkümesine X'ten Y'ye bir bağıntı denir. $X = Y$ ise θ 'ya X üzerinde bir bağıntı denir.

Tanım 1.6.2 [50, 51]: $\theta \in \mathcal{P}(X \times Y)$ olsun. Her $a \in X$ için $(a, b) \in \theta$ olacak şekilde $b \in Y$ mevcut ise θ'ye serial bağıntı denir.

Tanım 1.6.3 [50, 51]: $\theta \in \mathcal{P}(X \times X)$ olsun. Bu takdirde θ'ya,

(i) yansıyan denir $:\Leftrightarrow$ Her $a \in X$ için $(a, a) \in \theta$;

(ii) simetrik denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $(a, b) \in \theta$ ise $(b, a) \in \theta$;

(iii) geçişken denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in X$ için $(a, b) \in \theta$ ve $(b, a) \in \theta$ ise $(a, c) \in \theta$

(iv) Euclidean denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in X$ için $(a, b) \in \theta$ ve $(a, c) \in \theta$ ise $(b, c) \in \theta$.

Yansıyan, simetrik ve geçişken bir θ bağıntısına X üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Tanım 1.6.4 [55, 56]: $\theta \in \mathcal{P}(X \times Y)$ bir bağıntı olsun. Bu takdirde $(x, y) \in \theta \Leftrightarrow (y, x) \in \theta^{-1}$ koşulunu sağlayan $\theta^{-1} \in \mathcal{P}(Y \times X)$ bağıntısına θ 'nın tersi denir.

1.7.Yarıgruplar

Tanım 1.7.1 [18]: $X \neq \varnothing$ olan bir küme ve " $*$ ", X üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. X kümesine bir yarıgrup denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in X$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ 'dir. (birleşme özelliği)

Bu durum "$(X,*)$ bir yarıgruptur." şeklinde yazılır.

$(X,*)$ bir yarıgrup ve $A, B \in \wp(X) \setminus \{\emptyset\}$ iki küme olmak üzere $A * B$ kümesi $\{a * b \mid a \in A, b \in B\}$ olarak tanımlanır. $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ ise $A * B = \emptyset$ olarak alınacaktır.

Örnekler 1.7.2:

(1) L bir tam kafes ve T, L üzerinde tanımlı bir t-norm olsun. Bu durumda (L, T) bir yarıgruptur.

(2) $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $M_2(\mathbb{Z})$ tüm 2×2 tipindeki matrisler kümesi olsun. $M_2(\mathbb{Z})$ kümesi matrisler üzerinde tanımlı çarpma işlemine göre yarıgruptur.

(3) $\mathbb{Z}_m$ üzerindeki ikili işlem $\overline{a} \vartriangle \overline{b} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{a}\overline{b}$ olarak tanımlansın. Bu takdirde $(\mathbb{Z}_m, \vartriangle)$ bir yarıgruptur.

Tanım 1.7.3 [27]: $(X,*)$ bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. A'ya X'in bir

(i) alt yarıgrubu denir $:\Leftrightarrow A * A \subseteq A$,

(ii) sol ideali denir $:\Leftrightarrow A * X \subseteq A$,

(iii) sağ ideali denir $:\Leftrightarrow X * A \subseteq A$'dır.

A , X' in hem sol hem de sağ ideali ise A'ya X'in iki yanlı ideali denir.

Tanım 1.7.4 [53, 54]: $(X,*)$ bir yarıgrup ve A, $(X,*)$'in bir ideali olsun. Bu durumda, A'ya X'in bir asal ideali denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için $x * y \in A$ ise $x \in A$ veya $y \in A$'dır.

Tanım 1.7.5 [29]: $(X,*)$ bir yarıgrup ve A, X'in bir alt yarıgrubu olsun. A'ya X'in bir bi-ideali denir $:\Leftrightarrow A * X * A \subseteq A$'dır.

Tanım 1.7.6 [7, 29]: $(X,*)$ bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. A'ya X'in bir quasi-ideali denir $:\Leftrightarrow X * A \cap A * X \subseteq A$'dır.

Teorem 1.7.7 [29]: $(X,*)$ bir yarıgrup olsun. Bu takdirde X'in herhangi bir sol (sağ, iki yanlı veya quasi-) ideali X'in bir bi-idealidir.

Örnek 1.7.8: $" * "$ ve $" \diamond "$ ikili işlemleri $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde, sırasıyla, Tablo 5 ve Tablo 6 yardımıyla tanımlanmıştır. Bu durumda $(X,*)$ ve $(X,\diamond)$ yarıgruplardır.

Tablo 5. Örnek 1.7.8'deki $" * "$ ikili işlemi

$*$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{a}$	a	b	b	d
$\boldsymbol{b}$	b	b	b	d
$\boldsymbol{c}$	b	b	b	d
$\boldsymbol{d}$	d	d	d	d

Tablo 6. Örnek 1.7.8'deki " $\diamond$ " ikili işlemi

$\diamond$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{a}$	a	a	a	d
$\boldsymbol{b}$	a	b	a	d
$\boldsymbol{c}$	a	a	c	d
$\boldsymbol{d}$	d	d	d	d

$(X,*)$ yarıgrubunun tüm alt yarı grupları: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$ kümeleridir.

$(X,*)$ yarıgrubunun tüm sol idealleri: $\{d\}$, $\{b,d\}$, $\{a,b,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$ kümeleridir.

" $*$ " işlemi değişmeli olduğundan $(X,*)$ yarı grubunun tüm sol, sağ, bi- ve quasi-idealler kümeleri aynıdır.

$(X,*)$ yarıgrubunun tek asal ideali $\{d\}$ kümesidir.

Tanım 1.7.9 [18]: $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ yarıgruplar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f 'ye, X'ten Y'ye yarıgrup homomorfisi denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için $f(x) \star f(y) = f(x \circ y)$'dir.

Tanım 1.7.10 [27]: $(X,*)$ bir yarıgrup ve θ, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde θ bağıntısına X üzerinde bir kongrüans bağıntısı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $(a,b) \in \theta$ ise $(a*x, b*x) \in \theta$ ve $(x*a, x*b) \in \theta$'dır.

1.8. *L*-Fuzzy Kümeler

L-fuzzy alt kümeler Zadeh'in [60]'da tanıttığı fuzzy alt kümelerinin bir genellemesi olarak Goguen [17] tarafından 1967 yılında tanıtılmıştır.

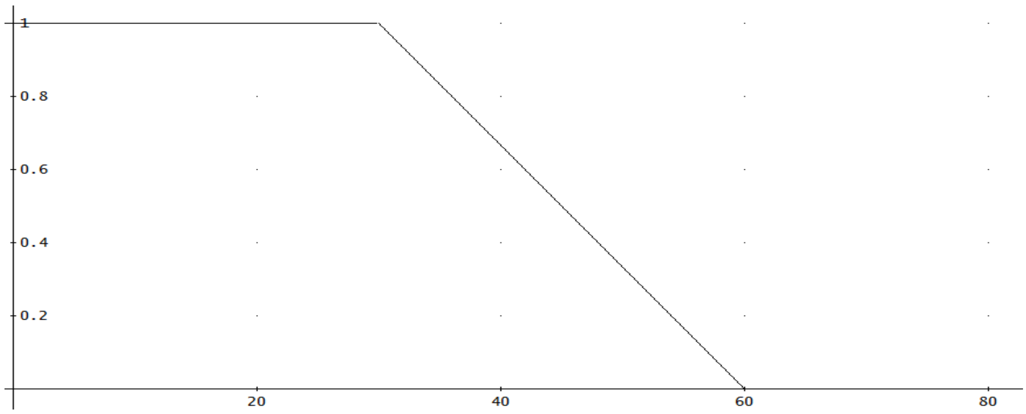
Tanım 1.8.1 [17, 39]: $X \neq \emptyset$ olan bir küme ve L bir kafes olsun. Her $\mu: X \to L$ fonksiyonuna X'in bir L-fuzzy kümesi (veya altkümesi) denir. X'in bütün L-fuzzy kümelerinin kümesine X'in L-güç kümesi denir ve $F(X,L)$ ile gösterilir.

$\alpha \in L$ için $\mu_\alpha = \{x \in X | \alpha \leq \mu(x)\}$ kümesine μ'nün α-kesim veya seviye alt kümesi denir.

Özel olarak $L = [0,1]$ olarak seçilirse μ'ye fuzzy kümesi denir ve X'in tüm fuzzy alt kümelerinin kümesi $F(X)$ ile gösterilir.

Örneğin, giriş bölümünde bahsedildiği gibi, göreceli olan “gençlik kavramı”, kimi insanlara göre $\mu\colon [0,\infty) \to [0,1]$ şeklindeki bir üyelik fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

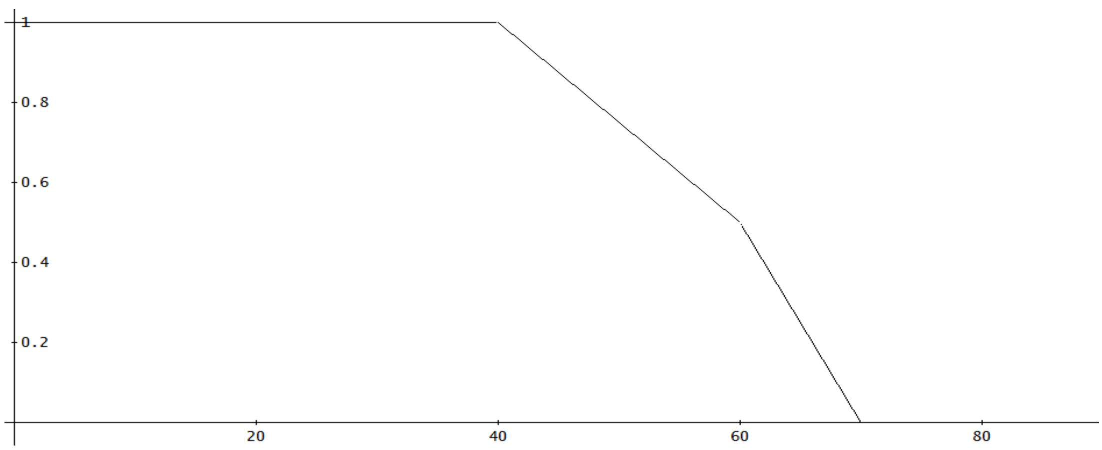
$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 30 \\ \dfrac{60-x}{30} & , \quad 30 \le x \le 60 \\ 0 & , \quad 60 < x \end{cases}$$



Şekil 13. μ üyelik fonksiyonunun grafiği

Daha yaşlı olan insanlar üyelik fonksiyonunu $\nu\colon [0,\infty) \to [0,1]$ olarak belirleyebilir:

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 40 \\ \dfrac{80-x}{40} & , \quad 40 \le x \le 60 \\ \dfrac{70-x}{20} & , \quad 60 < x \le 70 \\ 0 & , \quad 70 < x \end{cases}$$



Şekil 14. ν üyelik fonksiyonunun grafiği

Örnekler 1.8.2: L bir kafes $X \neq \emptyset$ olan bir küme, $\emptyset \neq B \subseteq X$ ve $\lambda \in L$ olsun.

(1) Her $x \in X$ için $1_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $1_B \in F(X, L)$'dir.

(2) Her $x \in X$ için $\lambda_B(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $\lambda_B \in F(X, L)$'dir.

Tanım 1.8.3 [37]: $\mu, \nu \in F(X, L)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise μ, ν de içerilir denir ve bu durum $\mu \leq \nu$ şeklinde gösterilir. Eğer $\mu \leq \nu$ ve $\mu \neq \nu$ ise μ'ye, ν'de kesin içerilir (veya ν, μ yü kesin içerir) denir ve bu durumda $\mu < \nu$ yazılır.

Tanım 1.8.4 [51]: T, S ve $\mathcal{J}$, sırasıyla, L tam kafesi üzerinde birer t-norm, t-conorm ve imlikasyon olsun. $\mu, \nu \in F(X, L)$ olmak üzere her $x \in X$ için μ ve ν L-fuzzy kümelerinin bileşimi, arakesiti, T-kesişimi, S-bileşimi, $\mathcal{J}$-implikasyonu, sırayla, aşağıdaki gibi tanımlanan L-fuzzy kümeleridir.

- $(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$,
- $(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$,
- $(\mu T \nu)(x) = T\big(\mu(x), \nu(x)\big)$,
- $(\mu S \nu)(x) = S\big(\mu(x), \nu(x)\big)$,
- $(\mu \mathcal{J} \nu)(x) = \mathcal{J}\big(\mu(x), \nu(x)\big)$.

Tanım 1.8.5 [37]: $I \neq \emptyset$ olan bir indis kümesi olmak üzere $\{\mu_i | i \in I\} \in F(X, L)$, X'in L-fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Bu kümenin en küçük üst sınırı $\bigvee_{i \in I} \mu_i$ ve en büyük alt sınırı $\bigwedge_{i \in I} \mu_i$; her $x \in X$ için sırasıyla $(\bigvee_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(x)$ ve $(\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.8.6: X, Y kümeler, L bir tam kafes olsun. Her $R: X \times Y \to L$ fonksiyonuna X'ten Y'ye bir L-fuzzy bağıntı denir. $R: X \times Y \to L$ L-fuzzy bağıntıların eşitliği, bileşimi, arakesiti, T-kesişimi, S-bileşimi, $\mathcal{J}$-implikasyonu L-fuzzy kümelerindeki gibi tanımlanır. Burada $(x, y) \in X \times Y$ olmak üzere $R(x, y) \in L$'ye x ile y elemanları arasındaki ilgililik derecesi denir.

$\alpha \in L$ için R'nin α-kesim veya seviye alt kümesi $R_\alpha = \{(x, y) \in X \times Y | \alpha \leq R(x, y)\}$ şeklindedir.

Özel olarak $L = [0,1]$ kafesi için R'ye, X'ten Y'ye bir fuzzy bağıntı denir.

Tanım 1.8.7 [31]: $R \in F(X \times Y, L)$ ve $P \in F(Y \times Z, L)$ olsun. Bu L-fuzzy bağıntıların T-bileşkesi $P \circ_T R: X \times Z \to L$ şeklindeki L-fuzzy bağıntıdır ve her $(x, z) \in X \times Z$ için $P \circ_T R(x, z) = \bigvee_{y \in Y} R(x, y) T P(y, z)$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.8.8 [8]: $\mu : X \to L$ bir L-fuzzy alt küme olsun. "μ, $\vee$-özelliğine sahiptir." denir :$\Leftrightarrow$ Her $A \subseteq X$ için

$$\mu(x_0) = \bigvee_{x \in A} \mu(x)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in A$ mevcuttur.

Tanım 1.8.9 [50, 51, 52]: $R \in F(X \times Y, L)$ olsun. R'ye, serial L-fuzzy bağıntı denir :$\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $R(x, y) = 1$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcuttur.

Teorem 1.8.10: $R \in F(X \times Y, L)$ serial L-fuzzy bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in L$ için R_α serial bir bağıntıdır.

İspat: R serial L-fuzzy bağıntı ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde $R(x, y) = 1$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcuttur. Böylece her $\alpha \in L$ için $\alpha \leq 1 = R(x, y)$ dir. Buradan $(x, y) \in R_\alpha$ elde edilir. R_α serialdir. Aksine $x \in X$ olsun. Bu takdirde R_1 serial oldundan $(x, y) \in R_1$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcuttur. Böylece $1 \leq R(x, y)$ dir. Buradan $R(x, y) = 1$ elde edilir. Sonuç olarak R serial L-fuzzy bağıntıdır.

$R \in F(X \times X, L)$ ise R'ye, X üzerinde bir L-fuzzy bağıntı denir.

Tanım 1.8.11 [50, 51]: $R \in F(X \times X, L)$ olsun. Bu takdirde, R'ye;

(i) yansıyan L-fuzzy bağıntı denir :$\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $R(x, x) = 1$,

(ii) simetrik L-fuzzy bağıntı denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ için $R(x, y) = R(y, x)$,

(iii) T-geçişken L-fuzzy bağıntı denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, z \in X$ için $\vee_{y \in X}(R(x, y)TR(y, z)) \leq R(x, z)$'dir.

Teorem 1.8.12: $R \in F(X \times X, L)$ olsun.

(1) R yansıyan L-fuzzy bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in L$ için R_α yansıyan bağıntıdır

(2) R simetrik L-fuzzy bağıntı ancak ve ancak her $\alpha \in L$ için R_α simetrik bağıntıdır;

(3) $ResR \subseteq D_T$ olsun. R, T-geçişken L-fuzzy bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in D_T$ için R_α geçişken bağıntıdır.

İspat:

(1) R yansıyan L-fuzzy bağıntı ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde her $\alpha \in L$ için $\alpha \leq 1 = R(x, x)$ dir. Böylece $(x, x) \in R_\alpha$ olduğundan R_α yansıyandır. Aksine her $\alpha \in L$ için R_α yansıyan bağıntı ve $x \in X$ olsun. Bu durumda $(x, x) \in R_\alpha$ dır. Buradan her $\alpha \in L$ için $\alpha \leq R(x, x)$ yazılabilir. Böylece $\vee_{\alpha \in L} \alpha = 1 \leq R(x, x)$ elde edilir. R yansıyan L-fuzzy bağıntıdır.

(2) R simetrik L-fuzzy bağıntı olmak üzere her $\alpha \in L$ ve $x, y \in X$ için $(x, y) \in R_\alpha$ olsun. Bu takdirde $\alpha \leq R(x, y) = R(y, x)$ dir. Buradan $(y, x) \in R_\alpha$ elde edilir. Aksine her $\alpha \in L$ için R_α simetrik bağıntı ve $x, y \in X$ olmak üzere $\alpha = R(x, y)$ olsun. Bu takdirde $(x, y) \in R_\alpha$ dır. Böylece $(y, x) \in R_\alpha$ dır. Buradan $\alpha = R(x, y) \leq R(y, x)$ yazılır. Benzer şekilde $R(y, x) \leq R(x, y)$ olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak $R(x, y) = R(y, x)$ elde edilir.

(3) R, T-geçişken L-fuzzy bağıntı olmak üzere her $\alpha \in D_T$ için $(x, y), (y, x) \in R_\alpha$ olsun. Bu takdirde $\alpha \leq R(x, y)$ ve $\alpha \leq R(y, z)$ dir. Buradan $\alpha = \alpha T \alpha \leq R(x, y) T R(y, z) \leq R(x, z)$ dir. Böylece $(x, z) \in R_\alpha$ elde eldir. R_α geçişken bağıntıdır. Önermenin diğer tarafı için $\alpha = R(x, y) T R(y, z)$ olsun. Bu takdirde $(x, y) \in R_\alpha$, $(y, x) \in R_\alpha$ ve $\alpha \in D_T$ dir. Her $\alpha \in D_T$ için R_α geçişken olduğundan $(x, z) \in R_\alpha$ dır. Buradan $\alpha \leq R(x, z)$ dir. Böylece $R(x, y) T R(y, z) \leq R(x, z)$ elde edilir. R, T-geçişkendir.

Tanım 1.8.13 [32]: $R \in F(X \times Y, L)$ olsun. $R^{-1} \in F(Y \times X, L)$ L-fuzzy bağıntısına R'nin ters L-fuzzy bağıntısıdır denir :$\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $R^{-1}(y, x) = R(x, y)$'dir.

Tanım 1.8.14 [25, 34]: $(Y, \star)$ bir yarıgrup ve $\mu \in F(Y, L)$ olsun. μ'ye, Y'nin bir TL-fuzzy alt yarıgrubu denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in Y$ için $\mu(x) T \mu(y) \leq \mu(x \star y)$.

Tanım 1.8.15 [25, 34]: $(Y, \star)$ bir yarıgrup ve μ, Y nin bir TL-fuzzy alt yarıgrubu olsun. Bu takdirde μ'ye, Y'nin;

(i) TL-fuzzy sağ ideali denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in Y$ için $\mu(x) \leq \mu(x \star y)$,

(ii) TL-fuzzy sol ideali denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in Y$ için $\mu(x) \leq \mu(y \star x)$,

(iii) TL-fuzzy iki yanlı ideali denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in Y$ için $\mu(x) \vee \mu(y) \leq \mu(x \star y)$'dir.

Tanım 1.8.16 [23, 25]: $(Y, \star)$ bir yarıgrup olsun ve μ, Y'nin bir TL-fuzzy alt yarıgrubu olsun. μ'ye, Y'nin bir TL-fuzzy bi-ideali denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, a, y \in S$ için $\mu(x) T \mu(y) \leq \mu(x \star a \star y)$'dir.

Tanım 1.8.17 [53, 54]: $(Y, \star)$ bir yarıgrup ve μ, Y'nin bir TL-fuzzy alt yarıgrubu olsun. μ'ye, S'nin bir TL-fuzzy asal ideali denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y \in S$ için $\mu(x \star y) = \mu(x)$ veya $\mu(x \star y) = \mu(y)$'dir.

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1.Genelleştirilmiş Kaba Kümeler

Bu bölümde, çeşitli çalışmalarda [9, 10, 12, 22, 27, 42, 43, 44, 45, 47, 52, 53, 55, 56, 58, 59] incelenmiş olan genelleştirilmiş yaklaşım uzayının bazı özellikleri hatırlatılacak ve bu özelliklere bazı ilaveler yapılacaktır.

$X, Y \neq \varnothing$ olan iki küme ve $\varphi \subseteq X \times Y$ olsun. F_φ: X→$\wp$(Y) küme değerli fonksiyonu her $x \in X$ için $F_\varphi(\mathrm{x}) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \varphi\}$ şeklinde tanımlansın. Burada $F_\varphi(\mathrm{x})$ kümesine, x'in φ'ye göre ardıl komşuluğu denir. Aksine X'den $\wp$(Y)'ye herhangi bir küme değerli F fonksiyonu ile X'den Y'ye $\varphi_F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$ şeklinde bir bağıntı tanımlanabilir. (X, Y, φ) üçlüsüne bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı denir. Herhangi bir $A \subseteq Y$ için A nın $\underline{\varphi}(A)$ alt ve $\overline{\varphi}(A)$ üst yaklaşımları sırasıyla;

$$\underline{\varphi}(A) = \{x \in X \mid F_\varphi(\mathrm{x}) \subseteq A\} , \qquad \overline{\varphi}(A) = \{x \in X \mid F_\varphi(\mathrm{x}) \cap A \neq \varnothing\} ,$$

olarak tanımlanır. $\left(\underline{\varphi}(A), \overline{\varphi}(A)\right)$ çiftine A'nın (X, Y, φ) üzerindeki genelleştirilmiş kaba kümesi denir ve burada $\underline{\varphi}$ ve $\overline{\varphi}$ fonksiyonlarına, sırasıyla, alt ve üst genelleştirilmiş yaklaşım operatörleri denir.

Önerme 2.1.1: $\varphi: X \to Y$ bir fonksiyon ise her $A \subseteq Y$ için $\varphi^{-1}(A) = \overline{\varphi}(A) = \underline{\varphi}(A)$ eşitliği sağlanır.

İspat: A'nın $\underline{\varphi}(A)$ ve $\overline{\varphi}(A)$ yaklaşımlarının tanımlarından kolayca elde edilebilir.

Teorem 2.1.2 [50, 51]: φ , X'den Y'ye bir bağıntı olmak üzere $A, B \in \wp(Y)$ kümelerinin alt ve üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

(L1) $\underline{\varphi}(A) = \sim\overline{\varphi}(\sim A)$,

(L2) $\underline{\varphi}(Y) = X$,

(L3) $\underline{\varphi}(A \cap B) = \underline{\varphi}(A) \cap \underline{\varphi}(B)$,

(L4) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\varphi}(A) \subseteq \underline{\varphi}(B)$,

(L5) $\underline{\varphi}(A) \cup \underline{\varphi}(B) \subseteq \underline{\varphi}(A \cup B)$.

(U1) $\overline{\varphi}(A) = \sim\underline{\varphi}(\sim A)$,

(U2) $\overline{\varphi}(\emptyset) = \emptyset$,

(U3) $\overline{\varphi}(A \cup B) = \overline{\varphi}(A) \cup \overline{\varphi}(B)$,

(U4) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{\varphi}(A) \subseteq \overline{\varphi}(B)$,

(U5) $\overline{\varphi}(A \cap B) \subseteq \overline{\varphi}(A) \cap \overline{\varphi}(B)$.

Burada herhangi bir $A \subseteq Y$ için A'nın Y'deki komplementi $\sim A$ ile gösterilmiştir. (L1) ve (U1) özellikleri gösterir ki $\underline{\varphi}$ ve $\overline{\varphi}$ dual yaklaşım operatörleridir. Aynı numaralı özellikler dual özellikler olarak düşünülebilir.

Teorem 2.1.3 [45, 57]: $\varphi \subseteq X \times Y$ ve I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $A_i \in \wp(Y)$ olsun. (L3), (L5), (U3) ve (U5) maddeleri aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

(1) $\underline{\varphi}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \underline{\varphi}(A_i)$

(2) $\bigcup_{i\in I} \underline{\varphi}(A_i) \subseteq \underline{\varphi}(\bigcup_{i\in I} A_i)$

(3) $\overline{\varphi}(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{\varphi}(A_i)$

(4) $\bigcup_{i\in I} \overline{\varphi}(A_i) = \overline{\varphi}(\bigcup_{i\in I} A_i)$.

Teorem 2.1.4 [50, 51, 55, 56]: $\varphi \subseteq X \times X$ olsun. $\underline{\varphi}$ alt ve $\overline{\varphi}$ üst genelleştirilmiş yaklaşım operatörleri olmak üzere:

(1) φ serialdir $\Leftrightarrow$ $(L0)$ $\underline{\varphi}(\emptyset) = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ $(U0)$ $\overline{\varphi}(X) = X$

$\Leftrightarrow$ $(LU0)$ $\underline{\varphi}(A) \subseteq \overline{\varphi}(A)$, $\forall A \in P(X)$.

(2) φ yansıyandır $\Leftrightarrow$ $(L6)$ $\underline{\varphi}(A) \subseteq A$, $\forall A \in P(X)$

$\Leftrightarrow$ $(U6)$ $A \subseteq \overline{\varphi}(A)$, $\forall A \in P(X)$.

(3) φ simetriktir $\Leftrightarrow$ $(L7)$ $\overline{\varphi}\left(\underline{\varphi}(A)\right) \subseteq A$, $\forall A \in P(X)$

$\Leftrightarrow$ $(U7)$ $A \subseteq \underline{\varphi}(\overline{\varphi}(A))$, $\forall A \in P(X)$.

(4) φ geçişlidir $\Leftrightarrow$ $(L8)$ $\underline{\varphi}(A) \subseteq \underline{\varphi}\left(\underline{\varphi}(A)\right)$, $\forall A \in P(X)$

$\Leftrightarrow$ $(U8)$ $\overline{\varphi}(\overline{\varphi}(A)) \subseteq \overline{\varphi}(A)$, $\forall A \in P(X)$.

Teorem 2.1.5: $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi olsun. Bu takdirde;

(1) Her $a \in X$ için $F_{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(a) = \bigcap_{i\in I} F_{\varphi_i}(a)$,

(2) Her $a \in X$ için $F_{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(a) = \bigcup_{i\in I} F_{\varphi_i}(a)$.

İspat:

(1) $t \in F_{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(a) \Leftrightarrow (a,t) \in \bigcap_{i\in I} \varphi_i$

$\Leftrightarrow$ Her $i \in I$ için $(a,t) \in \varphi_i$

$\Leftrightarrow$ Her $i \in I$ için $t \in F_{\varphi_i}(a)$

$\Leftrightarrow t \in \bigcap_{i\in I} F_{\varphi_i}(a)$.

Böylece $F_{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(a) = \bigcap_{i\in I} F_{\varphi_i}(a)$ elde edilir.

(2) $t \in F_{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(a) \Leftrightarrow (a,t) \in \bigcup_{i\in I} \varphi_i$

$\Leftrightarrow$ $\exists i \in I$, $(a,t) \in \varphi_i$

$\Leftrightarrow$ $\exists i \in I$, $t \in F_{\varphi_i}(a)$

$\Leftrightarrow t \in \bigcup_{i\in I} F_{\varphi_i}(a)$.

Böylece $F_{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(a) = \bigcup_{i\in I} F_{\varphi_i}(a)$ elde edilir.

Teorem 2.1.6: $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi olsun. Bu takdirde herhangi bir $A \subseteq Y$ için $\overline{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(A) \subseteq \bigcap_{i\in I}\overline{\varphi_i}(A)$ dir.

İspat: $a \in \overline{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(A) \Leftrightarrow F_{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(a) \cap A \neq \varnothing$. Bu takdirde $t \in F_{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(a)$ olacak şekilde $t \in A$ mevcuttur. Yukarıdaki teorem ile $t \in \bigcap_{i\in I} F_{\varphi_i}(a)$ dır. Bu durumda her $i \in I$ için $t \in F_{\varphi_i}(a)$ olur. Buradan her $i \in I$ için $F_{\varphi_i}(a) \cap A \neq \varnothing$ ifadesi doğrudur. Her $i \in I$ için $a \in \overline{\varphi_i}(A)$ dır. Böylece $a \in \bigcap_{i\in I}\overline{\varphi_i}(A)$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(A) \subseteq \bigcap_{i\in I}\overline{\varphi_i}(A)$ dır.

Bu teorem, herhangi iki kongrüans bağıntısı için Kuroki tarafından [27]'de verilmiştir. Bu bakımdan teorem, [27]'deki Teorem 2.4.'ün bir genellemesidir.

Örnek 2.1.7: $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ için φ_1 ve φ_2 bağıntıları $\varphi_1 = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ ve $\varphi_2 = \{(1, a), (2, c)\}$ olarak seçilirse $A = \{a, c\}$ kümesinin üst yaklaşımları sırasıyla, $\overline{\varphi_1}(A) = \{1, 2, 3\}$, $\overline{\varphi_2}(A) = \{1,2\}$ ve $\overline{\varphi_1 \cap \varphi_2}(A) = \{1\}$ olduğundan yukarıdaki teorem ters yönde genel olarak doğru değildir.

Teorem 2.1.8: $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi olsun. Bu takdirde herhangi bir $A \subseteq Y$ için $\overline{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(A) = \bigcup_{i\in I}\overline{\varphi_i}(A)$ dir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
a \in \overline{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(A) &\Leftrightarrow F_{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(a) \cap A \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow \exists t \in A\,, t \in F_{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(a) \\
&\Leftrightarrow \exists t \in A\,, t \in \bigcup_{i\in I} F_{\varphi_i}(a) \\
&\Leftrightarrow \exists i \in I\,, t \in F_{\varphi_i}(a) \\
&\Leftrightarrow a \in \bigcup_{i\in I}\overline{\varphi_i}(A).
\end{aligned}
$$

Böylece $\overline{\bigcup_{i\in I}\varphi_i}(A) = \bigcup_{i\in I}\overline{\varphi_i}(A)$ eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem 2.1.9: $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi olsun. Bu takdirde herhangi bir $A \subseteq Y$ için $\bigcap_{i\in I}\underline{\varphi_i}(A) \subseteq \underline{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(A)$ dır.

İspat: $a \in \bigcap_{i\in I}\underline{\varphi_i}(A)$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $F_{\varphi_i}(a) \subseteq A$ dır. Buradan $\bigcap_{i\in I} F_{\varphi_i}(a) \subseteq A$ dır. Teorem ile $\bigcap_{i\in I} F_{\varphi_i}(a) = F_{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(a) \subseteq A$ dır. Sonuç olarak $a \in \underline{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(A)$ olur. Böylece $\bigcap_{i\in I}\underline{\varphi_i}(A) \subseteq \underline{\bigcap_{i\in I}\varphi_i}(A)$ elde edilir.

Herhangi iki kongrüans bağıntısı için bu teoremdeki alt küme işlecinin eşitlik olarak ifade edilebileceği, Kuroki tarafından [27]'deki Teorem 2.5.'de ispat edilmiştir.

Örnek 2.1.10: $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ için $\varphi_1$ve φ_2 bağıntıları $\varphi_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ ve $\varphi_2 = \{(1, a), (2, c)\}$ olarak seçilirse $A = \{a, c\}$ kümesinin φ_1 , φ_2 ve $\varphi_1 \cap \varphi_2$ ye göre alt yaklaşımları sırasıyla, $\underline{\varphi_1}(A) = \{1, 3\}$, $\underline{\varphi_2}(A) = \{1, 2, 3\}$ ve $\underline{\varphi_1 \cap \varphi_2}(A) = \{1, 2, 3\}$ şeklindedir. Buradan yukarıdaki teoremin ters yönde genel olarak doğru olmadığı görülür.

Teorem 2.1.11: $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi olsun. Bu takdirde herhangi bir $A \subseteq Y$ için $\underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\ (A) = \ \bigcap_{i \in I} \underline{\varphi_i}(A)$ dır.

İspat:

$$\begin{aligned} a \in \underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\ (A) &\Leftrightarrow F_{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}(a) \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} F_{\varphi_i}(a) \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, F_{\varphi_i}(a) \subseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, a \in \underline{\varphi_i}(A) \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{i \in I} \underline{\varphi_i}(A). \end{aligned}$$

Böylece $\underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\ (A) = \ \bigcap_{i \in I} \underline{\varphi_i}(A)$ eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.1.12: $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi olsun. Bu takdirde herhangi bir $A \subseteq Y$ için $\underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\ (A) \subseteq \ \bigcup_{i \in I} \underline{\varphi_i}(A)$ dir.

İspat: Teorem 2.1.11'den açıktır.

Sonuç 2.1.13: $\{\varphi_i | i \in I\}$, X'ten Y'ye bağıntılar ailesi olsun. Bu takdirde herhangi bir $A \subseteq Y$ için $\underline{\bigcup_{i \in I} \varphi_i}\ (A) \subseteq \ \underline{\bigcap_{i \in I} \varphi_i}\ (A)$ dır.

İspat: Teorem 2.1.9 ile Teorem 2.1.11'den açıktır.

Tanım 2.1.14: $X \neq \varnothing$ olan bir küme ve θ , X üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $x \in X$ ile ilgili olan elemanların $\{y \in X | (x, y) \in \theta\}$ kümesine x'in denklik sınıfı denir ve $[x]_\theta$ ile gösterilir. X üzerinde, θ tarafından üretilen tüm denklik sınıflarının ailesi X/θ ile gösterilir.

X'in herhangi bir A altkümesinin alt ve üst yaklaşımları sırasıyla $\underline{\theta}(A) = \{x \in X | [x]_\theta \subseteq A\}$ ve $\overline{\theta}(A) = \{x \in X | [x]_\theta \cap A \neq \varnothing\}$ şeklindedir. Bu durumda

(X,θ) çiftine Pawlak yaklaşım uzayı denir. Bu durumda $\underline{\theta}$ ve $\overline{\theta}$ yaklaşım operatörlerinin ilave özellikleri [41, 55, 56] de incelenmiştir.

$(X,*)$ yarıgrup ve θ, X üzerinde bir kongrüans bağıntısı ise $\underline{\theta}$ ve $\overline{\theta}$ yaklaşım operatörlerinin çeşitli özellikleri Kuroki [27] tarafından incelenmiştir.

2.2.Yarıgruplarda Genelleştirilmiş Kaba Kümeler

Ignjatović, Ciric ve Bogdanovic [19], çalışmalarında, aynı türden cebirsel yapılar arasında "bağıntısal homomorfi" olarak isimlendirdikleri bir bağıntı tanımlamışlardır. Bu bölümde $(X,\circ)$, $(Y,\star)$ yarıgrupları için $\varphi \subseteq X \times Y$ bağıntısal homomorfi tanımı yapılacak ve (X,Y,φ) genelleştirilmiş yaklaşım uzayı oluşturularak bu yaklaşım uzayının çeşitli özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.2.1 [19]: $\varphi \subseteq X \times Y$ olsun. Her $(x,y),(a,b) \in R$ için $(x \circ a, y \star b) \in \varphi$ koşulu sağlanıyorsa φ'ye, X'ten Y'ye bir bağıntısal homomorfi denir.

Örnek 2.2.2:

(1) φ, $(X,\circ)$ yarıgrubu üzerinde bir kongrüans bağıntısı olsun. Bu durumda φ, X'ten X'e bir bağıntısal homomorfidir.

(2) $f: X \to Y$ yarıgrup homomorfisi olsun. Bu takdirde $f \subseteq X \times Y$ bir bağıntısal homomorfidir.

(3) $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ herhangi iki yarıgrup olmak üzere $\varphi = X \times Y$ bir bağıntısal homomorfidir.

Örnek 2.2.3: $X = \{a,b\}$ ve $Y = \{1,2\}$ kümeleri üzerinde, sırasıyla, Tablo 7 ve Tablo 8 yardımıyla tanımlan " $\circ$ " ve " $\star$ " ikili işlemleri ile $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ birer yarıgruptur.

Tablo 7. Örnek 2.2.3'teki" $\circ$ " ikili işlemi

$\circ$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}$	a	b
$\boldsymbol{b}$	b	b

Tablo 8. Örnek 2.2.3'teki" $\star$ "ikili işlemi

$\star$	**1**	**2**
1	1	1
2	1	2

X'ten Y'ye tüm bağıntısal homomorfiler:

$\psi_1 = \{(a,1)\}$,
$\psi_2 = \{(a,2)\}$,
$\psi_3 = \{(b,1)\}$,
$\psi_4 = \{(b,2)\}$,
$\psi_5 = \{(a,1),(b,1)\}$,
$\psi_6 = \{(a,2),(b,1)\}$,
$\psi_7 = \{(a,2),(b,2)\}$,
$\psi_8 = \{(b,1),(b,2)\}$,
$\psi_9 = \{(a,1),(a,2)\}$,
$\psi_{10} = \{(a,1),(a,2),(b,1)\}$,
$\psi_{11} = \{(a,1),(b,1),(b,2)\}$,
$\psi_{12} = \{(a,2),(b,1),(b,2)\}$,
$\psi_{13} = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$ dır.

Önerme 2.2.4: φ, X'ten Y'ye bir bağıntısal homomorfi olsun. Bu takdirde her $x,y \in X$ için $F_\varphi(\mathrm{x}) \star F_\varphi(\mathrm{y}) \subseteq F_\varphi(\mathrm{x} \circ \mathrm{y})$ dir.

İspat: $a \in F_\varphi(\mathrm{x}) \star F_\varphi(\mathrm{y})$ olsun. Bu takdirde $a = t_1 \star t_2$ olacak şekilde $t_1 \in F_\varphi(\mathrm{x})$ ve $t_2 \in F_\varphi(\mathrm{y})$ elemanları mevcuttur. Bu durumda $(x,t_1),(y,t_2) \in \varphi$ yazılır. φ bağıntısal homomorfi olduğundan $(x \circ y, t_1 \star t_2) \in \varphi$ dir. Böylece $a \in F_\varphi(x \circ y)$ dır. Sonuç olarak $F_\varphi(\mathrm{x}) \star F_\varphi(\mathrm{y}) \subseteq F_\varphi(\mathrm{x} \circ \mathrm{y})$ dir.

Tanım 2.2.5 [9]: $(X,\circ)$, $(Y,\star)$ birer grup olsun. $F: X \to \wp^*(Y)$ fonksiyonuna küme değerli homomorfizim denir $:\Leftrightarrow$ Her $a,b \in X$ için $F(a) \star F(b) = F(a \circ b)$ ve $(F(a))^{-1} = F(a^{-1})$.

Teorem 2.2.6: $(X,\circ)$, $(Y,\star)$ gruplar olsun. $F: X \to \wp^*(Y)$ küme değerli homomorfizim ise φ_F bağıntısal homomorfidir.

İspat: Önerme 2.2.4 ile kolayca görülebilir.

Teorem 2.2.7: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir alt yarıgrubu olsun. Bu takdirde $\overline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir alt yarıgrubudur.

İspat: $x \in \overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(A)$ olsun. $x = a \circ b$ olacak şekilde $a,b \in \overline{\varphi}(A)$ mevcuttur. Bu takdirde, $\overline{\varphi}(A)$'nın tanımından $F_\varphi(a) \cap A \neq \varnothing$ ve $F_\varphi(b) \cap A \neq \varnothing$ yazılabilir. Bu durumda $(a,t_1),(b,t_2) \in \varphi$ olacak şekilde $t_1,t_2 \in A$ mevcuttur. φ bağıntısal homomorfi olduğundan $(a \circ b, t_1 \star t_2) \in \varphi$ dir. A alt yarıgrup olduğu için $t_1 \star t_2 \in A$ dır. Bu durumda $F_\varphi(x) \cap A \neq \varnothing$ olur. Buradan $x \in \overline{\varphi}(A)$ olduğu görülür. Böylece $\overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(A) \subseteq \overline{\varphi}(A)$ elde edilir.

Teorem 2.2.8: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir serial bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir sol (sağ) ideali olsun. Bu takdirde $\overline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir sol (sağ) idealidir.

İspat: $x \in X \circ \overline{\varphi}(A)$ olsun. $x = a \circ b$ olacak şekilde $a \in X$ ve $b \in \overline{\varphi}(A)$ mevcuttur. φ serial olduğu için $(a, y) \in \varphi$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcuttur ve $\overline{\varphi}(A)$'nın tanımından $F_\varphi(b) \cap A \neq \varnothing$ yazılabilir. Bu takdirde $(b, t) \in \varphi$ olacak şekilde $t \in A$ mevcuttur. φ bağıntısal homomorfi olduğundan $(a \circ b, y \star t) \in \varphi$'dir. A sol ideal ise $y \star t \in A$'dır. Bu durumda $F_\varphi(x) \cap A \neq \varnothing$ olur. Buradan $x \in \overline{\varphi}(A)$'dır. Böylece $X \circ \overline{\varphi}(A) \subseteq \overline{\varphi}(A)$ elde edilir. $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir sol idealidir. A, Y'nin bir sağ ideali ise ispat benzer şekildedir.

Örnek 2.2.9, yukarıdaki teoremin genel olarak doğru olabilmesi için φ bağıntısının serial olması gerektiğini ifade etmektedir.

Örnek 2.2.9: $X = \{a, b, c\}$ ve $Y = \{d, e, f\}$ kümeleri üzerinde, sırasıyla, " $\circ$ " ve " $\star$ " ikili işlemleri aşağıdaki tablolar yardımıyla tanımlanmıştır.

Tablo 9. Örnek 2.2.9'daki " $\circ$ " ikili işlemi

$\circ$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	a	a	a
$\boldsymbol{b}$	b	b	b
$\boldsymbol{c}$	c	c	c

Tablo 10. Örnek 2.2.9'daki " $\star$ " ikili işlemi

$\star$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{d}$	d	e	f
$\boldsymbol{e}$	d	e	f
$\boldsymbol{f}$	d	e	f

Bu işlemlere göre $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ birer yarıgruptur. $A = \{d, e\} \subseteq Y$ kümesi $(Y,\star)$ kümesinin bir sol idealidir ve $\varphi = \{(a, d), (a, e), (a, f), (b, d), (b, e), (b, f)\} \subseteq X \times Y$ serial olmayan bir bağıntısal homomorfidir. Kolayca görülebilir ki $\overline{\varphi}(A) = \{a, b\}$ kümesi X'in bir sol ideali değildir.

Aşağıdaki örnek; Y'nin bir quasi-idealinin, bir bağıntısal homomorfiye göre üst yaklaşımının, X'in bir quasi-ideali olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 2.2.10: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $(M_2(\mathbb{Z}),.)$ yarıgruptur.
$A = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi $M_2(\mathbb{Z})$ kümesinin bir quasi-idealidir.

$$\varphi = \left\{\left(0, \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \middle| x \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\left(1, \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \middle| x \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{Z} \times M_2(\mathbb{Z})$$

bir bağıntısal homomorfidir. Ancak A'nın üst yaklaşımı olan $\overline{\varphi}(A) = \{0,1\}$ kümesi $\mathbb{Z}$'nin bir quasi-ideali değildir.

Teorem 2.2.11: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir serial bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir bi-ideali olsun. Bu takdirde $\overline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir bi-idealidir.

İspat: $x \in \overline{\varphi}(A) \circ X \circ \overline{\varphi}(A)$ olsun. $x = a \circ b \circ c$ olacak şekilde $a, c \in \overline{\varphi}(A)$ ve $b \in X$ mevcuttur. φ serial olduğu için $(b, y) \in \varphi$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcuttur ve $\overline{\varphi}(A)$'nın tanımından $F_\varphi(a) \cap A \neq \varnothing$ ve $F_\varphi(c) \cap A \neq \varnothing$ yazılır. Bu takdirde $(a, t_1) \in \varphi$ ve $(c, t_2) \in \varphi$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in A$ elemanları mevcuttur. φ bağıntısal homomorfi ve A bi-ideal olduğundan $(a \circ b \circ c, t_1 \star y \star t_2) \in \varphi$ ve $t_1 \star y \star t_2 \in A$ dır. Bu durumda $F_\varphi(x) \cap A \neq \varnothing$ olur. Buradan $x \in \overline{\varphi}(A)$ olduğu görülür. Böylece $\overline{\varphi}(A) \circ X \circ \overline{\varphi}(A) \subseteq \overline{\varphi}(A)$ elde edilir. Teorem 2.2.7 ile $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir bi- idealidir.

Örnek 2.2.12: Örnek 2.2.3'te verilen $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ yarıgrupları üzerinde tanımlanan $\psi_1$bağıntısal homomorfisi serial değildir. $A = \{1\}$ kümesi Y'nin bir bi-idealidir ancak $\overline{\psi_1}(A) = \{a\}$, X'in bir bi-ideali değildir.

Teorem 2.2.13: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir bağıntısal homomorfi olsun. Bu takdirde her $A, B \in \wp(Y)$ için $\overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(B) \subseteq \overline{\varphi}(A \star B)$ dir.

İspat: $x \in \overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(B)$ olsun. Bu takdirde $x = a \circ b$ olacak şekilde $a \in \overline{\varphi}(A)$ ve $b \in \overline{\varphi}(B)$ elemanları mevcuttur. Üst yaklaşım tanımı ile $F_\varphi(a) \cap A \neq \varnothing$ ve $F_\varphi(b) \cap B \neq \varnothing$dir. Bu durumda $(a, t_1) \in \varphi$ ve $(b, t_2) \in \varphi$ olacak şekilde $t_1 \in A$ ve $t_2 \in B$ elemanları mevcuttur. φ bağıntısal homomorfi olduğundan $(a \circ b, t_1 \star t_2) \in \varphi$ ve $t_1 \star t_2 \in A \star B$ dir. Buradan $x = a \circ b \in \overline{\varphi}(A \star B)$ elde edilir. Böylece $\overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(B) \subseteq \overline{\varphi}(A \star B)$dir.

Örnek 2.2.14 ile bu teoremdeki alt küme işlecinin genel anlamda eşitlik ile değiştirilemeyeceği gösterilmiştir.

Örnek 2.2.14: $\circ$ ikili işlemi her $a, b \in \mathbb{N}$ için $a \circ b = a.b$ ve " $\star$ " ikili işlemi her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \star b = a + b - 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{N},\circ)$ ve $(\mathbb{Z},\star)$ yarıgruplardır.

$\varphi = \{(0,0),(0,-1),(0,-2),(0,-3),...\}$ şeklinde tanımlanan φ bağıntısı $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye bir bağıntısal homomorfidir. $A = \{0,4\}$ ve $B = \{1\}$ olarak seçilirse $\overline{\varphi}(A) = \{0\}$, $\overline{\varphi}(B) = \varnothing$ ve $\overline{\varphi}(A \star B) = \{0\}$ olduğundan $\overline{\varphi}(A \star B) \nsubseteq \overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(B)$'dir.

Tanım 2.2.15: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir bağıntısal homomorfi olsun. Her $a, b \in X$, $y \in Y$ ve $(a \circ b, y) \in \varphi$ için $c \star d = y$ ve $(a,c),(b,d) \in \varphi$ olacak şekilde $c, d \in Y$ mevcut ise φ'ye tam bağıntısal homomorfi denir.

Örnekler 2.2.16:

(1) Örnek 2.2.3' te verilen $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ yarıgrupları üzerinde tanımlanan ψ_2, ψ_7, ψ_9 ve ψ_{13} bağıntıları tam bağıntısal homomorfilerdir.

(2) $X = \{a, b, c, 1\}$ ve $Y = \{d, e\}$ kümeleri üzerinde, Tablo 11 ve Tablo 12 yardımıyla tanımlan " $\circ$ " ve " $\star$ " ikili işlemleri ile $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ birer yarıgruptur.

Tablo 11. Örnekler 2.2.16 (2)'deki " $\circ$ " ikili işlemi

$\circ$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	**1**
$\boldsymbol{a}$	a	a	a	a
$\boldsymbol{b}$	b	b	b	b
$\boldsymbol{c}$	c	c	c	c
1	a	b	c	1

Tablo 12. Örnekler 2.2.16 (2)'deki " $\circ$ " ikili işlemi

$\star$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{d}$	d	e
$\boldsymbol{e}$	e	e

Bu durumda, X'ten Y'ye $\varphi = \{(a,d),(b,d),(c,d),(1,d)\} \subseteq X \times Y$ bağıntısı bir tam bağıntısal homomorfidir.

Örnek 2.2.17: $X = \{a, b, c\}$ ve $Y = \{1, 2, 3\}$ kümeleri üzerinde aşağıdaki tablolar yardımıyla tanımlanan " $\circ$ " ve " $\star$ " ikili işlemleri ile $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ birer yarıgruptur.

Tablo 13. Örnek 2.2.17 ‘deki " $\circ$ " ikili işlemi

$\circ$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	a	c	c
$\boldsymbol{b}$	c	b	c
$\boldsymbol{c}$	c	c	c

Tablo 14. Örnek 2.2.17 ‘deki " $\star$ " ikili işlemi

$\star$	**1**	**2**	**3**
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

$\varphi_1 = \{(a,1)\}$,

$\varphi_2 = \{(b,1)\}$,

$\varphi_3 = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$,

$\varphi_4 = \{(a,1),(a,2),(a,3)\}$,

$\varphi_5 = \{(b,1),(b,2),(b,3)\}$,

$\varphi_6 = \{(a,1),(a,2),(a,3)(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)(c,3)\}$ bağıntıları X’ten Y’ye bazı tam bağıntısal homomorfilerdir.

$\varphi_7 = \{(a,2),(a,3)\}$,

$\varphi_8 = \{(b,2),(b,3)\}$,

$\varphi_9 = \{(a,1),(b,2),(c,2)(c,3)\}$ ve $\varphi_{10} = \{(c,2)(c,3)\}$ bağıntıları, X’ten Y’ye, birer bağıntısal homomorfi olmalarına karşın tam bağıntısal homomorfi değildir.

$\varphi_{11} = \{(a,1),(b,2)\}$ ve $\varphi_{12} = \{(a,2),(b,3)\}$ bağıntıları bağıntısal homomorfi değildir.

Önerme 2.2.18: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir tam bağıntısal homomorfi olsun. Bu durumda $F_\varphi(\mathrm{x}) \star F_\varphi(\mathrm{y}) = F_\varphi(\mathrm{x} \circ \mathrm{y})$ dir.

İspat: $a \in F_\varphi(\mathrm{x} \circ \mathrm{y})$ olsun. Bu takdirde $(\mathrm{x} \circ \mathrm{y}, a) \in \varphi$’dir. φ tam bağıntısal homomorfi olduğundan $a = t_1 \star t_2$ ve $(x,t_1),(y,t_2) \in \varphi$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in Y$ mevcuttur. Buradan $t_1 \in F_\varphi(x)$ ve $t_2 \in F_\varphi(y)$ dir. Bu durumda $a \in F_\varphi(x) \star F_\varphi(y)$ olur. Böylece $F_\varphi(x \circ y) \subseteq F_\varphi(x) \star F_\varphi(y)$ elde edilir.

$\varphi \subseteq X \times Y$ bağıntısal homomorfi olduğundan Önerme 2.2.4 ile ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.19: $\varphi \subseteq X \times Y$ ve φ^{-1} bir tam bağıntısal homomorfi olsun. Bu takdirde her $A, B \in \wp(Y)$ için $\overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(B) = \overline{\varphi}(A \star B)$'dir.

İspat: $x \in \overline{\varphi}(A \star B)$ olsun. Bu takdirde $F_\varphi(x) \cap A \star B \neq \varnothing$ olur. Buradan $a \star b \in F_\varphi(x)$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ mevcuttur. Böylece $(x, a \star b) \in \varphi$'dir ve buradan da φ^{-1}'in tanımı ile $(a \star b, x) \in \varphi^{-1}$'dir. φ^{-1} bir tam bağıntısal homomorfi olduğundan $x = p \circ q$ ve $(a,p), (b,q) \in \varphi^{-1}$ olacak şekilde $p, q \in X$ mevcuttur. Bu durumda $(p,a), (q,b) \in \varphi$'dir. Böylece $a \in F_\varphi(p) \cap A$ ve $b \in F_\varphi(q) \cap B$ elde edilir. $p \in \overline{\varphi}(A)$ ve $q \in \overline{\varphi}(B)$'dir. $x = p \circ q \in \overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(B)$ elde edilir.

Sonuç olarak Teorem 2.2.13 ile $\overline{\varphi}(A) \circ \overline{\varphi}(B) = \overline{\varphi}(A \star B)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 2.2.20: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir tam bağıntısal homomorfi olsun.
Bu takdirde her $A, B \in \wp(Y)$ için $\underline{\varphi}(A) \circ \underline{\varphi}(B) \subseteq \underline{\varphi}(A \star B)$'dir.

İspat: $x \in \underline{\varphi}(A) \circ \underline{\varphi}(B)$ olsun. Bu takdirde $x = a \circ b$ olacak şekilde $a \in \underline{\varphi}(A)$ ve $b \in \underline{\varphi}(B)$ elemanları mevcuttur. Alt yaklaşım tanımı ile $F_\varphi(a) \subseteq A$ ve $F_\varphi(b) \subseteq B$ dir. Bu durumda Önerme 2.2.18 ile $F_\varphi(a) \star F_\varphi(b) = F_\varphi(a \circ b) \subseteq A \star B$ elde edilir. Buradan $x = a \circ b \in \underline{\varphi}(A \star B)$ elde edilir. Böylece $\underline{\varphi}(A) \circ \underline{\varphi}(B) \subseteq \underline{\varphi}(A \star B)$ dir.

Teorem 2.2.21: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir tam bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir alt yarıgrubu olsun. Bu takdirde $\underline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\underline{\varphi}(A)$, X'in bir alt yarıgrubudur.

İspat: $x \in \underline{\varphi}(A) \circ \underline{\varphi}(A)$ olsun. Bu durumda $x = a \circ b$ olacak şekilde $a, b \in \underline{\varphi}(A)$ mevcuttur. Buradan $F_\varphi(a) \subseteq A$ ve $F_\varphi(b) \subseteq A$ yazılır. A kümesi alt yarıgrup olduğundan ve Önerme 2.2.18 ile $F_\varphi(a \circ b) = F_\varphi(a) \star F_\varphi(b) \subseteq A \star A \subseteq A$ elde edilir. Bu takdirde $x = a \circ b \in \underline{\varphi}(A)$'dır. Sonuç olarak $\underline{\varphi}(A) \circ \underline{\varphi}(A) \subseteq \underline{\varphi}(A)$'dır.

Bu teoremin doğru olabilmesi için $\varphi \subseteq X \times Y$'nin bağıntısal homomorfi olması yeterli değildir.

Örnek 2.2.22: $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ yarıgrupları ve φ_{10} bağıntısal homomorfisi Örnek 2.2.17'de verildiği gibi olsun. $A = \{1,2\}$ kümesi Y'nin bir alt yarıgrubudur.

Ancak $\underline{\varphi_{10}}(A) = \{a, b\}$, X'in bir alt yarıgrubu değildir.

Teorem 2.2.23: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir tam bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir sol (sağ) ideali olsun. Bu takdirde $\underline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\underline{\varphi}(A)$, X'in bir sol (sağ) idealidir.

İspat: $x \in X \circ \underline{\varphi}(A)$ olsun. Bu takdirde $x = a \circ b$ olacak şekilde $a \in X$ ve $b \in \underline{\varphi}(A)$ mevcuttur. Buradan $F_\varphi(b) \subseteq A$'dir. φ tam bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir sol ideali olduğundan $F_\varphi(a \circ b) = F_\varphi(a) \star F_\varphi(b) \subseteq Y \star A \subseteq A$'dır. Buradan $x = a \circ b \in \underline{\varphi}(A)$'dır. Böylece $X \circ \underline{\varphi}(A) \subseteq \underline{\varphi}(A)$ elde edilir.

Örnek 2.2.24: Örnekler 2.2.16 (2)'de verilen $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ yarıgrupları ele alınsın. $\varphi = \{(a,d),(a,e)\} \subseteq X \times Y$ olarak tanımlanan φ bir bağıntısal homomorfidir ancak tam bağıntısal homomorfi değildir.

$A = \{e\}$ kümesi Y'nin bir sol idealidir. Fakat $\underline{\varphi}(A) = \{b, c, 1\}$, X'in bir sol ideali değildir.

Teorem 2.2.25: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir tam bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir bi-ideali olsun. Bu takdirde $\underline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\underline{\varphi}(A)$, X'in bir bi-idealidir.

İspat: $z \in \underline{\varphi}(A) \circ X \circ \underline{\varphi}(A)$ olsun. Bu takdirde $z = a \circ x \circ b$ olacak şekilde $a, b \in \underline{\varphi}(A)$ ve $x \in X$ elemanları mevcuttur. Böylece $F_\varphi(a) \subseteq A$ ve $F_\varphi(b) \subseteq A$'dır. A, Y'nin bi-ideali olduğundan ve Önerme 2.2.18 ile $F_\varphi(a \circ x \circ b) = F_\varphi(a \circ x) \star F_\varphi(b) = F_\varphi(a) \star F_\varphi(x) \star F_\varphi(b) \subseteq A \star Y \star A \subseteq A$'dir. Buradan $z = a \circ x \circ b \in \underline{\varphi}(A)$'dır. Böylece $\underline{\varphi}(A) \circ X \circ \underline{\varphi}(A) \subseteq \underline{\varphi}(A)$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 2.2.21 ile ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.25, Teorem 2.2.11 ve Teorem 1.7.7 göz önünde bulundurularak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 2.2.26:

(1) $\varphi \subseteq X \times Y$ bir serial bağıntısal homomorfi ve A, Y nin bir sol (sağ, iki yanlı veya quasi-) ideali olsun. Bu takdirde $\overline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir bi- idealidir.

(2) $\varphi \subseteq X \times Y$ bir tam bağıntısal homomorfi ve A, Y nin bir sol (sağ, iki yanlı veya quasi-) ideali olsun. Bu takdirde $\underline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\underline{\varphi}(A)$, X'in bir bi-idealidir.

Teorem 2.2.27: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir tam bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir asal ideali olsun. Bu takdirde $\underline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\underline{\varphi}(A)$, X'in bir asal idealidir.

İspat: Teorem 2.2.23'ten $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir idealidir.

$x \circ y \in \underline{\varphi}(A)$ olsun. Bu durumda $F_\varphi(x \circ y) \subseteq A$ olur. Önerme 2.2.18 ile $F_\varphi(x) \star F_\varphi(y) \subseteq A$'dır. A asal ideal olduğundan $F_\varphi(x) \subseteq A$ veya $F_\varphi(y) \subseteq A$ olur. Böylece $x \in \underline{\varphi}(A)$ veya $y \in \underline{\varphi}(A)$ sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak $\underline{\varphi}(A)$, X'in bir asal idealidir.

Teorem 2.2.28: $\varphi \subseteq X \times Y$ bir serial tam bağıntısal homomorfi ve A, Y'nin bir asal ideali olsun. Bu takdirde $\overline{\varphi}(A) \neq \varnothing$ ise $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir asal idealidir.

İspat: Teorem 2.2.8'den $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir idealidir. $x \circ y \in \overline{\varphi}(A)$ olsun. Bu durumda $F_\varphi(x \circ y) \cap A \neq \varnothing$ olur. $(x \circ y, a) \in \varphi$ olacak şekilde $a \in A$ mevcuttur. φ tam bağıntısal homomorfi olduğundan $a = b \circ c$ ve $(x,b),(y,c) \in \varphi$ olan $b,c \in Y$ mevcuttur. $a = b \circ c \in A$ ve A, Y nin bir asal ideali olduğundan $b \in A$ veya $c \in A$'dır. Böylece $b \in F_{\varphi}(x) \cap A$ veya $c \in F_{\varphi}(y) \cap A$'dır. $x \in \overline{\varphi}(A)$ veya $y \in \overline{\varphi}(A)$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{\varphi}(A)$, X'in bir asal idealidir.

2.3. $(\mathcal{J},T)$-L-Fuzzy Kaba Kümelerin Yapısı

X ve Y boştan farklı iki küme ve R , X'den Y'ye bir L-fuzzy bağıntı olmak üzere (X,Y,R) üçlüsüne bir L-fuzzy yaklaşım uzayı denir. $X = Y$ ise R, X'de L-fuzzy bağıntı olarak adlandırılır ve bu durumda (X,R)'ye bir L-fuzzy yaklaşım uzayı denir. Bu yaklaşım uzayı üzerindeki çeşitli özellikler [6, 11, 14, 22, 28, 35, 36, 38, 44, 46, 50, 51, 52, 57] makalelerinde incelenmiştir.

T ve $\mathcal{J}$, sırasıyla, L tam kafesi üzerinde birer t-norm ve implikasyon olsun. (X,Y,R) L-fuzzy yaklaşım uzayı olmak üzere $\mu: Y \to L$ gibi herhangi bir L-fuzzy kümesinin bu yaklaşım uzayına göre T-üst ve $\mathcal{J}$-alt L-fuzzy kaba yaklaşımları sırasıyla $\overline{R}^{T}(\mu)$ ve $\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overline{R}^{T}(\mu)(x) = \bigvee_{y \in Y} T\big(R(x,y),\mu(y)\big) \quad ,x \in X$$

$$\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu)(x) = \bigwedge_{y \in Y} \mathcal{J}\big(R(x,y),\mu(y)\big) \quad ,x \in X$$

$\overline{R}^{T}, \underline{R}_{\mathcal{J}} : L^{Y} \to L^{X}$ operatörleri (X,Y,R) yaklaşım uzayının T-üst ve $\mathcal{J}$-alt L-fuzzy kaba yaklaşım operatörleridir. $\overline{R}^{T}(\mu)$ ve $\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu)$, X in birer L-fuzzy kümesidir.

$\left(\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu), \overline{R}^{T}(\mu)\right)$ ikilisine μ nün (X,Y,R) yaklaşım uzayına göre $(\mathcal{J},T)$- L-fuzzy kaba kümesi denir.

$L = [0,1]$ tam kafesi seçilerek bu yaklaşım uzayındaki daha özel bazı sonuçlar [30, 50, 51, 52] de incelenmiştir.

Örnek 2.3.1: $X = \{x,y,z\}$ ve $Y = \{a,b,c\}$ olsun.

$\mu: Y \to [0,1]$ fuzzy kümesi: $\mu(a) = 0$, $\mu(b) = 0.7$, $\mu(c) = 1$ olarak tanımlansın.

$R: X \times Y \to [0,1]$ fuzzy bağıntısı aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlansın.

Tablo 15. Örnek 2.3.1'deki R L-fuzzy bağıntısı

R	a	b	c
x	0.6	1	0
y	0.9	0.5	1
z	1	0.2	0.7

$\alpha T\beta = max\{0, \alpha+\beta-1\}$ olarak tanımlanan t-norm için $\overline{R}^T(\mu)$ alt yaklaşımı şöyledir:

$$\overline{R}^T(\mu)(x) = \bigvee_{t\in Y} T\big(R(x,t),\mu(t)\big)$$
$$= sup\big\{T\big(R(x,a),\mu(a)\big), T\big(R(x,b),\mu(b)\big), T\big(R(x,c),\mu(c)\big)\big\}$$
$$= sup\{T(0.6,0), T(1,0.7), T(0,1)\} = sup\{0, 0.7, 0\} = 0.7$$
$$\overline{R}^T(\mu)(y) = \bigvee_{t\in Y} T\big(R(y,t),\mu(t)\big)$$
$$= sup\big\{T\big(R(y,a),\mu(a)\big), T\big(R(y,b),\mu(b)\big), T\big(R(y,c),\mu(c)\big)\big\}$$
$$= sup\{T(0.9,0), T(0.5,0.7), T(1,1)\} = sup\{0,0.2, 1\} = 1$$
$$\overline{R}^T(\mu)(z) = \bigvee_{t\in Y} T\big(R(z,t),\mu(t)\big)$$
$$= sup\big\{T\big(R(z,a),\mu(a)\big), T\big(R(z,b),\mu(b)\big), T\big(R(z,c),\mu(c)\big)\big\}$$
$$= sup\{T(1,0), T(0.2,0.7), T(0.7,1)\} = sup\{0, 0, 0.7\} = 0.7$$

$\alpha \mathcal{J}\beta = min\{1, 1-\alpha+\beta\}$ olarak tanımlanan implikasyon için $\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu)$ alt yaklaşımı şöyledir:

$$\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu)(x) = \bigwedge_{t\in Y} \mathcal{J}\big(R(x,t),\mu(t)\big)$$
$$= inf\big\{\mathcal{J}\big(R(x,a),\mu(a)\big), \mathcal{J}\big(R(x,b),\mu(b)\big), \mathcal{J}\big(R(x,c),\mu(c)\big)\big\}$$
$$= inf\{\mathcal{J}(0.6,0), \mathcal{J}(1,0.7), \mathcal{J}(0,1)\} = inf\{0.4, 0.7,1\} = 0.4$$
$$\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu)(y) = \bigwedge_{t\in Y} \mathcal{J}\big(R(y,t),\mu(t)\big)$$
$$= inf\big\{\mathcal{J}\big(R(y,a),\mu(a)\big), \mathcal{J}\big(R(y,b),\mu(b)\big), \mathcal{J}\big(R(y,c),\mu(c)\big)\big\}$$
$$= inf\{\mathcal{J}(0.9,0), \mathcal{J}(0.5,0.7), \mathcal{J}(1,1)\} = inf\{0.1,1, 1\} = 0.1$$

$$\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)(z) = \bigwedge_{t\in Y} \mathcal{I}\big(R(z,t),\mu(t)\big)$$
$$= inf\{\mathcal{I}\big(R(z,a),\mu(a)\big),\mathcal{I}\big(R(z,b),\mu(b)\big),\mathcal{I}\big(R(z,c),\mu(c)\big)\}$$
$$= inf\{\mathcal{I}(1,0),\mathcal{I}(0.2,0.7),\mathcal{I}(0.7,1)\} = inf\{0,1,1\} = 0$$

Teorem 2.3.2 [51]: $\mu,\nu,1_B,1_y \in F(Y,L)$ ve $B \subseteq Y$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\overline{R}^T(\bigvee_{i\in I}\mu_i) = \bigvee_{i\in I}\overline{R}^T(\mu_i)$,

(ii) $\mu \le \nu$ ise $\overline{R}^T(\mu) \le \overline{R}^T(\nu)$,

(iii) $\overline{R}^T(\bigwedge_{i\in I}\mu_i) \le \bigwedge_{i\in I}\overline{R}^T(\mu_i)$,

(iv) Her $(x,y) \in X\times Y$ için $\overline{R}^T\big(1_y\big)(x) = R(x,y)$,

(v) Her $(x,y) \in X\times Y$ için $\overline{R}^T(1_B)(x) = \bigvee_{y\in B} R(x,y)$.

Teorem 2.3.3 [51]: $\mu,\nu,1_{B\setminus\{y\}},1_B \in F(Y,L)$ ve $B \subseteq Y$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\bigwedge_{i\in I}\mu_i) = \bigwedge_{i\in I}\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu_i)$,

(ii) $\mu \le \nu$ ise $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu) \le \underline{R}_{\mathcal{I}}(\nu)$,

(iii) $\bigvee_{i\in I}\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu_i) \le \underline{R}_{\mathcal{I}}(\bigvee_{i\in I}\mu_i)$,

(iv) Her $(x,y) \in X\times Y$ için $\underline{R}_{\mathcal{I}}\big(1_{B\setminus\{y\}}\big)(x) = \mathcal{I}(R(x,y),0)$,

(v) Her $(x,y) \in X\times Y$ için $\underline{R}_{\mathcal{I}}(1_B)(x) = \bigwedge_{y\notin B}\mathcal{I}(R(x,y),0)$.

Teorem 2.3.4: (X,Y,R) L-fuzzy yaklaşım uzayı ve $A \subseteq Y$ olsun. Bu takdirde:

(1) Her $\alpha \in L$ için $\overline{R_\alpha}(A) \subseteq [\overline{R}^T(1_A)]_\alpha$'dır.

(2) R, $\vee$- özelliğine sahip bir L-fuzzy bağıntı ise $\overline{R_\alpha}(A) = [\overline{R}^T(1_A)]_\alpha$'dır.

İspat:

(1) $x \in \overline{R_\alpha}(A)$ olsun. Bu takdirde $F_{R_\alpha}(x) \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $(x,t) \in R_\alpha$ olacak şekilde $t \in A$ mevcuttur. Buradan $\alpha \le R(x,t) \le \overline{R}^T(1_A)(x)$ yazılabilir. Bu durumda $x \in [\overline{R}^T(1_A)]_\alpha$ olduğu görülür. Böylece $\overline{R_\alpha}(A) \subseteq [\overline{R}^T(1_A)]_\alpha$ elde edilir.

(2) R sup-property özelliğine sahip bir L-fuzzy bağıntı ve $x \in [\overline{R}^T(1_A)]_\alpha$ olsun. Bu durumda $\alpha \le \overline{R}^T(1_A)(x)$ olur. Bu takdirde $\alpha \le \bigvee_{y\in Y} R(x,y)T1_A(y) = \bigvee_{y\in A} R(x,y)$ sıralaması yazılabilir. R'nin $\vee$-özelliği ile $\alpha \le R(x,t)$ olacak şekilde bir $t \in A$ mevcuttur. Böylece $x \in \overline{R_\alpha}(A)$ olduğu görülür. Buradan $[\overline{R}^T(1_A)]_\alpha \subseteq \overline{R_\alpha}(A)$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{R_\alpha}(A) = [\overline{R}^T(1_A)]_\alpha$dir.

Örnek 2.3.5: $X = \{1, 2, 3,4\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ iki küme olsun. $L = M_5$ ve $\alpha \in L$ olmak üzere $R: X \times Y \to L$ L- fuzzy bağıntısı Tablo 16 yardımıyla tanımlansın.

Tablo 16. Örnek 2.3.5'teki R L- Fuzzy bağıntısı

R	a	b	c
1	0	1	β
2	γ	γ	β
3	1	α	1
4	0	γ	α

Y kümesinin bir $A = \{a, c\}$ alt kümesi için $\overline{R_\alpha}(A) = \{3\}$ ve $4 \in [\overline{R}^T(1_A)]_\alpha$'dır. Böylece Teorem 2.3.4 (2)'deki eşitlik genel anlamda doğru değildir.

Teorem 2.3.6: (X, Y, R) L-fuzzy yaklaşım uzayı ve $\mu \in F(Y, L)$ olsun. $\alpha, \beta \in L$ için R nin β-seviye kümesi R_β ve $\overline{R}^T(\mu)$ nün $\alpha T \beta$-seviye kümesi $[\overline{R}^T(1_A)]_{\alpha T \beta}$ olmak üzere $\overline{R_\beta}(\mu_\alpha) \subseteq [\overline{R}^T(\mu)]_{\alpha T \beta}$ şeklindedir.

İspat: $x \in \overline{R_\beta}(\mu_\alpha)$ olsun. Bu durumda $F_{R_\beta}(x) \cap \mu_\alpha \neq \emptyset$ dır. Buradan $(x, t) \in R_\beta$ olacak şekilde $t \in \mu_\alpha$ mevcuttur. Bu takdirde $\alpha \leq \mu(t)$ ve $\beta \leq R(x, t)$'dir. Böylece $\alpha T \beta \leq \mu(t) T R(x, t) \leq \overline{R}^T(\mu)(x)$ elde edilir. Buradan $x \in [\overline{R}^T(\mu)]_{\alpha T \beta}$ olduğundan ispat tamamlanır.

Örnek 2.3.7: $X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ iki küme olsun. L, Şekil 8 ile verilen tam kafes ve $\alpha \in L$ olmak üzere $R: X \times Y \to L$ L-fuzzy bağıntısı aşağıdaki Tablo 17 yardımıyla tanımlansın. $\mu \in F(Y, L)$ L-fuzzy kümesi $\mu(a) = 0$, $\mu(b) = \alpha$ ve $\mu(c) = \beta$ şeklinde tanımlanırsa $\overline{R_\beta}(\mu_\alpha) = \{1\}$ ve $[\overline{R}^T(\mu)]_{\alpha T \beta} = \{1, 2\}$ olduğu görülür. Böylece genel anlamda Teorem 2.3.6'daki alt küme işleci eşitlik ile değiştirilemez.

Tablo 17. Örnek 2.3.7'deki R L-fuzzy bağıntısı

R	a	b	c
1	δ	β	1
2	α	0	β
3	1	α	0

Teorem 2.3.8: L tam bir kafes ve (X, Y, R)bir yaklaşım uzayı ve μ, Y'nin bir L-fuzzy kümesi olsun. T_1 ve T_2, L üzerinde birer t-norm olmak üzere $T_1 \leq T_2$ ise $\overline{R}^{T_1}(\mu) \leq \overline{R}^{T_2}(\mu)$'dir.

İspat: Her $x \in X$ için $\overline{R}^{T_1}(\mu)(x) = \bigvee_{y \in Y} R(x, y) T_1 \mu(y) \leq \bigvee_{y \in Y} R(x, y) T_2 \mu(y) = \overline{R}^{T_2}(\mu)(x)$ sıralaması doğru olduğundan $\overline{R}^{T_1}(\mu) \leq \overline{R}^{T_2}(\mu)$ elde edilir.

Teorem 2.3.9: L tam bir kafes ve (X, Y, R)bir yaklaşım uzayı ve μ, Y'nin bir L-fuzzy kümesi olsun. $\mathcal{J}_1$ ve $\mathcal{J}_2$, L üzerinde birer implikasyon olmak üzere $\mathcal{J}_1 \leq \mathcal{J}_2$ ise $\underline{R}_{\mathcal{J}_1}(\mu) \leq \underline{R}_{\mathcal{J}_2}(\mu)$ dir.

İspat: Her $x \in X$ için $\underline{R}_{\mathcal{J}_1}(\mu)(x) = \bigwedge_{y \in Y} R(x, y) \mathcal{J}_1 \mu(y) \leq \bigwedge_{y \in Y} R(x, y) \mathcal{J}_2 \mu(y) = \underline{R}_{\mathcal{J}_2}(\mu)(x)$ sıralaması doğrudur. Böylece $\underline{R}_{\mathcal{J}_1}(\mu) \leq \underline{R}_{\mathcal{J}_2}(\mu)$ elde edilir.

2.4. Yarıgruplarda $(\mathcal{J}, T)$-L-Fuzzy Kaba Kümeler

Bu bölümde $(X, \circ)$, $(Y \star)$ ve $(Z, \diamond)$ kümeleri birer yarıgrup olarak ele alınacaktır. Verilen bu yarıgruplar ile Ignjatovic, Ciric ve Bogdanovic'in [19]'da tanımladığı özel bir L-fuzzy bağıntısından yararlanılarak bir L-fuzzy yaklaşım uzayı oluşturulacaktır. Yarıgruplardan birinin bir μ L-fuzzy alt kümesinin bu yaklaşım uzayına göre T-üst ve $\mathcal{J}$-alt yaklaşım operatörlerinin bazı özellikleri araştırılacak ve açıklayıcı nitelikte bir takım örnekler verilecektir.

Tanım 2.4.1 [19]: $R \in F(X \times Y, L)$ olsun. R L-fuzzy bağıntısına bir TL-fuzzy bağıntısal homomorfi denir $:\Leftrightarrow$Her $x, a \in X$ ve her $y, b \in Y$ için $R(x, y)\ T\ R(a, b) \leq R(x \circ a, y \star b)$'dir.

Örnek 2.4.2: $X = \{a, b\}$ ve $Y = \{c, d, e\}$ kümeleri üzerinde sırasıyla "$\circ$" ve "$\star$" ikili işlemleri, sırasıyla, Tablo 18 ve Tablo 19 yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlansın:

Tablo 18. Örnek 2.4.2’deki " $\circ$ " ikili işlemi

$\circ$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}$	a	b
$\boldsymbol{b}$	b	b

Tablo 19. Örnek 2.4.2’deki " $\star$ " ikili işlemi

$\star$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{c}$	c	c	c
$\boldsymbol{d}$	c	d	d
$\boldsymbol{e}$	c	d	d

Bu durumda $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ birer yarıgruptur. $L = N_5$ tam kafesi için $R: X \times Y \to L$ L-fuzzy bağıntısı; her $t \in Y$ için $R(a,t) = \alpha$, $R(b,c) = 1$, $R(b,d) = \gamma$, $R(b,e) = 0$ olarak tanımlanırsa R, bir TL-fuzzy bağıntısal homomorfidir.

Örnek 2.4.3: $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ iki yarıgrup, $R \in F(X \times Y, L)$ ve $f: X \to Y$ bir yarıgrup homomorfisi olsun. $\lambda', \lambda \in L$ ve $\lambda' \leq \lambda$ olmak üzere $R(x,y) = \begin{cases} \lambda, & f(x) = y \\ \lambda', & f(x) \neq y \end{cases}$ şeklindeki bir L- fuzzy bağıntı, TL-fuzzy bağıntısal homomorfidir.

Teorem 2.4.4: R bir TL-fuzzy bağıntısal homomorfi ise R^{-1} de TL-fuzzy bağıntısal homomorfidir.

İspat: TL- fuzzy bağıntısal homomorfi tanımından açıktır.

Teorem 2.4.5: $R \in F(X \times Y, L)$ ve $\lambda \in L$ olsun. Bu takdirde;

(1) R L-bağıntısı TL-fuzzy bağıntısal homomorfi ise her $\lambda \in D_T$ için R_λ bağıntısal homomorfidir.

(2) Her $\lambda \in L$ için R_λ bağıntısal homomorfi ise R, L- fuzzy bağıntısı TL-fuzzy bağıntısal homomorfidir.

İspat:

(1) $(x,y), (a,b) \in R_\lambda$ olsun. $\lambda \leq R(x,y)$ ve $\lambda \leq R(a,b)$ dir. Bu takdirde $\lambda T \lambda \leq R(x,y) T R(a,b)$ yazılabilir. Böylece $\lambda = \lambda T \lambda \leq R(x,y) T R(a,b) \leq R(x \circ a, y \star b)$ elde edilir. Sonuç olarak $(x \circ a, y \star b) \in R_\lambda$ olduğundan ispat tamamlanır.

(2) $\lambda = R(x,y)TR(a,b)$ olsun. Bu takdirde $(x,y),(a,b) \in R_\lambda$ dir. Böylece $(x \circ a, y \star b) \in R_\lambda$ olur. Sonuç olarak $\lambda \leq R(x \circ a, y \star b)$ dir. R, L- fuzzy bağıntısı TL-fuzzy bağıntısal homomorfidir.

Sonuç 2.4.6: $R \in F(X \times Y, L)$ için $ResR \subseteq D_T$ olsun.

R, TL-fuzzy bağıntısal homomorfidir$\Leftrightarrow$ Her $\lambda \in D_T$ için R_λ bağıntısal homomorfidir.

Teorem 2.4.7: $R \in F(X \times Y, L)$ ve $P \in F(Y \times Z, L)$ ve T, sonsuz $\vee$ -dağılımlı bir t-norm olsun. Eğer P ve R L-bağıntıları TL-fuzzy bağıntısal homomorfi ise bu bağıntıların T-bileşkeleri olan $P \circ_T R$, L- fuzzy bağıntısı da TL –fuzzy bağıntısal homomorfidir.

İspat:

Her $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in X \times Z$ için

$$
\begin{aligned}
&(P \circ_T R)(x_1, z_1)T(P \circ_T R)(x_2, z_2) \\
&= \left(\bigvee_{t \in Y} R(x_1, t)TP(t, z_1)\right) T \left(\bigvee_{k \in Y} R(x_2, k)TP(k, z_2)\right) \\
&= \bigvee_{t \in Y} \bigvee_{k \in Y} R(x_1, t)TR(x_2, k)TP(t, z_1)TP(k, z_2) \\
&\leq \bigvee_{t \in Y} \bigvee_{k \in Y} R(x_1 \circ x_2, t \star k)TP(t \star k, z_1 \diamond z_2) \\
&\leq \bigvee_{y \in Y} R(x_1 \circ x_2, y)TP(y, z_1 \diamond z_2) = P \circ_T R(x_1 \circ x_2, z_1 \diamond z_2).
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak; $P \circ_T R(x_1, z_1)TP \circ_T R(x_2, z_2) \leq P \circ_T R(x_1 \circ x_2, z_1 \diamond z_2)$ olduğundan $P \circ_T R$ L- fuzzy bağıntısı, TL –fuzzy bağıntısal homomorfidir.

Teorem 2.4.8: $R \in F(X \times Y, L)$ ve $P \in F(Y \times Z, L)$ ve $\lambda \in L$ için R_λ ve P_λ, sırasıyla R ve P L- fuzzy bağıntılarının λ-kesimleri olsun. Bu takdirde;

(1) Her $\lambda \in D_T$ için $P_\lambda \circ R_\lambda \subseteq (P \circ_T R)_\lambda$ dir.

(2) Eğer L bir sonlu zincir ise $(P \circ_T R)_\lambda \subseteq P_\lambda \circ R_\lambda$ dir.

İspat:

(1) $(x,z) \in P_\lambda \circ R_\lambda$ olsun. Bu takdirde $(x,y) \in R_\lambda$ ve $(y,z) \in P_\lambda$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcuttur. $\lambda \leq R(x,y)$ ve $\lambda \leq P(y,z)$ olur. $\lambda = \lambda T \lambda \leq R(x,y)TP(y,z) \leq \bigvee_{y \in Y} R(x,y)TP(y,z) = (P \circ_T R)(x,z)$'dir. Buradan $\lambda \leq (P \circ_T R)(x,z)$'dir. Böylece $(x,z) \in (P \circ_T R)_\lambda$ olur. Sonuç olarak $P_\lambda \circ R_\lambda \subseteq (P \circ_T R)_\lambda$ elde edilir.

(2) $(x,z) \in (P \circ_T R)_\lambda$ olsun. Bu takdirde $\lambda \leq (P \circ_T R)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y)TP(y,z)$ yazılır. Eğer L sonlu zincir ise $\bigvee_{y \in Y} R(x,y)TP(y,z) = R(x,t)TP(t,z)$ olacak şekilde $t \in Y$ mevcuttur. Bu durumda $\lambda \leq R(x,t)TP(t,z) \leq R(x,t)$ ve $\lambda \leq R(x,t)TP(t,z) \leq P(t,z)$'dir. Böylece $(x,t) \in R_\lambda$ ve $(t,z) \in P_\lambda$'dir. Sonuç olarak $(x,z) \in P_\lambda \circ R_\lambda$ olduğundan $(P \circ_T R)_\lambda \subseteq P_\lambda \circ R_\lambda$ elde edilir.

Sonuç 2.4.9: $R \in F(X \times Y, L)$ ve $P \in F(Y \times Z, L)$ için $\lambda \in D_T$ ve L bir sonlu zincir olsun. Bu takdirde $(P \circ_T R)_\lambda = R_\lambda \circ P_\lambda$'dır.

Teorem 2.4.10: $R \in F(X \times Y, L)$, $P \in F(Y \times Z, L)$, $\mu \in F(Z, L)$ ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm olsun. Bu durumda $\overline{P \circ_T R}\,(\mu) = \overline{R}^T \left(\overline{P}(\mu)\right)$ dir.

İspat: Her $x \in X$ için

$$
\begin{aligned}
\overline{P \circ_T R}\,(\mu)(x) &= \bigvee_{z \in Z} (P \circ_T R)(x,z)T\mu(z) \\
&= \bigvee_{z \in Z} \left(\bigvee_{y \in Y} R(x,y)TP(y,z) \right) T\mu(z) \\
&= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} R(x,y)TP(y,z)T\mu(z) \\
&= \bigvee_{y \in Y} R(x,y)T \left(\bigvee_{z \in Z} P(y,z)T\mu(z) \right) \\
&= \bigvee_{y \in Y} R(x,y)T\overline{P}(\mu)(y) \\
&= \overline{R}^T \left(\overline{P}(\mu)\right)(x).
\end{aligned}
$$

Böylece $\overline{P \circ_T R}\,(\mu) = \overline{R}^T \left(\overline{P}(\mu)\right)$ elde edilir.

Teorem 2.4.11: $R \in F(X \times Y, L)$ bir TL-fuzzy bağıntısal homomorfi; μ ,Y'nin bir TL-fuzzy altyarıgrubu ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm olsun. Bu durumda $\overline{R}^T(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy alt yarıgrubudur.

İspat: Her $a, b \in X$ için

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^T(\mu)(a)T\overline{R}^T(\mu)(b) &= \left(\bigvee_{y_1 \in Y} R(a,y_1)T\mu(y_1) \right) T \left(\bigvee_{y_2 \in Y} R(b,y_2)T\mu(y_2) \right) \\
&= \bigvee_{y_1 \in Y} \bigvee_{y_2 \in Y} R(a,y_1)T\mu(y_1)TR(b,y_2)T\mu(y_2) \\
&\leq \bigvee_{y_1 \in Y} \bigvee_{y_2 \in Y} R(a \circ b, y_1 \star y_2)T\mu(y_1 \star y_2)
\end{aligned}
$$

$$\leq \bigvee_{y \in Y} R(a \circ b, y) T \mu(y) = \overline{R}^{T}(\mu)(a \circ b).$$

Sonuç olarak $\overline{R}^{T}(\mu)(a) T \overline{R}^{T}(\mu)(b) \leq \overline{R}^{T}(\mu)(a \circ b)$ elde edilir. Böylece $\overline{R}^{T}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy alt yarıgrubudur.

Teorem 2.4.11, $\underline{R}_{\mathcal{J}}(\mu)$ için genel olarak doğru olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnek yardımıyla gösterilmiştir.

Örnek 2.4.12: $X = \{a, b\}$ ve $Y = \{c, d, e\}$ kümeleri " $\circ$ " ve " $\star$ " ikili işlemleri, sırasıyla, Tablo 20 ve Tablo 21 yardımıyla tanımlansın:

Tablo 20. Örnek 2.4.12'deki " $\circ$ " ikili işlemi

$\circ$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a}$	b	b
$\boldsymbol{b}$	b	b

Tablo 21. Örnek 2.4.12'deki " $\star$ " ikili işlemi

$\star$	**c**	**d**	**e**
$\boldsymbol{c}$	c	c	c
$\boldsymbol{d}$	c	d	d
$\boldsymbol{e}$	c	d	d

Bu durumda $(X,\circ)$ ve $(Y,\star)$ birer yarıgruptur. $(Y,\star)$'nin $\mu: Y \to L$ TL-fuzzy alt yarıgrubu $\mu(c) = \gamma$, $\mu(d) = \alpha$, $\mu(e) = \beta$ olarak tanımlansın. $L = N_5$ olsun ve $R \in F(X \times Y, L)$, L-fuzzy bağıntısı olarak Örnek 2.4.2'de verilen TL-fuzzy bağıntısal homomorfi göz önüne alınsın.

Tablo 22 yardımıyla tanımlanan $\mathcal{J}: L \times L \to L$ ikili işlemi bir implikasyondur.

Tablo 22. Örnek 2.4.12'deki $\mathcal{J}$ implikasyonu

$\boldsymbol{\mathcal{J}}$	**0**	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	**1**
0	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\alpha}$	0	β	β	β	1
$\boldsymbol{\beta}$	0	α	α	α	1
$\boldsymbol{\gamma}$	0	α	α	α	1
1	1	0	0	0	1

$T = \wedge$ için $\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(a)T\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(a) = \beta T\beta = \beta \nleq 0 = \underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(b)$ olduğundan $\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy alt yarıgrubu değildir.

Örnek 2.4.13: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $(\mathbb{Z}_2, +)$ ve $(M_2(\mathbb{Z}), .)$ yarıgruplarını göz önüne alalım.

$\mu: M_2(\mathbb{Z}) \to [0,1]$ fuzzy alt kümesi, her $A \in M_2(\mathbb{Z})$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu(A) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |A| \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & |A| = 0 \end{cases}$$

$R: \mathbb{Z}_2 \times M_2(\mathbb{Z}) \to [0,1]$ fuzzy bağıntısı, her $A \in M_2(\mathbb{Z})$ için $R(\overline{0}, A) = \mu(A)$ ve $R(\overline{1}, A) = 0$ olarak tanımlanırsa bir fuzzy bağıntısal homomorfidir.

$T = T_M$ t-normunu, onun duali olan $S = S_M$ t-conormunu ve $\mathcal{N} = \mathcal{N}_S$ negatörünü göz önüne alalım. Bunlara bağlı $\mathcal{S}$-implikatör $\mathcal{J}(x, y) = S(\mathcal{N}(x), y) = (1 - x) \vee y$ şeklindedir. $\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(\overline{0}) = \frac{1}{2}$ ve $\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(\overline{1}) = 1$ olur. Buradan

$$\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(\overline{1})T\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(\overline{1}) = 1 \nleq \frac{1}{2} = \underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(\overline{0})$$

elde edilir. Böylece $\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)$, $\mathbb{Z}_2$'nin bir $T = T_M$-fuzzy alt yarıgrubu değildir.

Teorem 2.4.14: $R \in F(X \times Y, L)$ serial L-bağıntısı bir TL-fuzzy bağıntısal homomorfi; μ , Y'nin bir TL-fuzzy sol (sağ, iki yanlı) ideali ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm olsun. Bu durumda $\overline{R}^T(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy sol (sağ, iki yanlı) idealidir.

İspat: Her $a, b \in X$ için

$$\begin{aligned}
\overline{R}^T(\mu)(b) &= 1T\overline{R}(\mu)(b) = R(a, y)T\overline{R}(\mu)(b) \\
&= R(a, y)T \bigvee_{y_2 \in Y} R(b, y_2)T\mu(y_2) \\
&= \bigvee_{y_2 \in Y} R(a, y)TR(b, y_2)T\mu(y_2) \\
&\leq \bigvee_{y_2 \in Y} R(a \circ b, y \star y_2)T\mu(y \star y_2) \\
&\leq \bigvee_{t \in Y} R(a \circ b, t)T\mu(t) = \overline{R}^T(\mu)(a \circ b).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $\overline{R}^T(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy sol idealidir.

μ L-fuzzy alt kümesi , Y nin bir TL-fuzzy sağ ideali ise benzer şekilde $\overline{R}^T(\mu)$, X in bir TL-fuzzy sağ idealidir.

Teorem 2.4.15: $R \in F(X \times Y, L)$ serial L-fuzzy bağıntısı bir TL-fuzzy bağıntısal homomorfi; μ, Y'nin bir TL-fuzzy bi-ideali ve T, sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm olsun. Bu takdirde $\overline{R}^T(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy bi-idealidir.

İspat: Her $x, y \in X$ için

$$\overline{R}^T(\mu)(x)T\overline{R}^T(\mu)(y) = \bigvee_{t\in Y} R(x,t)T\mu(t)\,T \bigvee_{k\in Y} R(y,k)T\mu(k)$$
$$= \bigvee_{t\in Y}\bigvee_{k\in Y} R(x,t)T\mu(t)TR(y,k)T\mu(k).$$

R serial olduğundan her $a \in X$ için $R(a,b) = 1$ olacak şekilde $b \in Y$ mevcuttur ve μ, Y nin bir TL-fuzzy bi-ideali olduğundan işleme şöyle devam edilebilir:

$$\bigvee_{t\in Y}\bigvee_{k\in Y} R(x,t)T\mu(t)TR(y,k)T\mu(k) \le \bigvee_{t,b,k\in Y} R(x,t)TR(y,k)T\mu(t\star b\star k)$$
$$= \bigvee_{t,b,k\in Y} R(x,t)TR(a,b)TR(y,k)T\mu(t\star b\star k)$$
$$\le \bigvee_{t\star b\star k\in Y} R(x\circ a\circ y, t\star b\star k)T\mu(t\star b\star k)$$
$$\le \bigvee_{l\in Y} R(x\circ a\circ y, l)T\mu(l)$$
$$= \overline{R}^T(\mu)(x\circ a\circ y).$$

Böylece $\overline{R}^T(\mu)(x)T\overline{R}^T(\mu)(y) \le \overline{R}^T(\mu)(x\circ a\circ y)$ elde edilir. $\overline{R}^T(\mu)$, X in bir TL-fuzzy bi-idealidir.

$L = [0,1]$ kafesi üzerinde tanımlı olan, $T_P(\alpha,\beta) = \alpha.\beta$ çarpım t-normu ve $\mathcal{J}(\alpha,\beta) = 1 - \alpha + \alpha.\beta$ implikasyonu göz önüne alınmak üzere aşağıda bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 2.4.16: (x,y); x, y doğal sayılarının en büyük ortak bölenini göstermek üzere $(\mathbb{N},*)$ yarıgrubu, $x * y = (x,y)$ ikili işlemi ile tanımlansın.

$\mu\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ fuzzy alt kümesi $\mu(n) = \frac{1}{n+1}$ şeklinde alınsın. Bu durumda μ, $\mathbb{N}$'nin bir T-fuzzy alt yarıgrubudur.

$R\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0,1]$, her $x, y \in \mathbb{N}$ için $R(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y+1}, & 2|x \\ 0, & 2\nmid x \end{cases}$ olarak tanımlanan R fuzzy bağıntısı, bir T-fuzzy bağıntısal homomorfidir.

μ fuzzy kümesinin, $(\mathbb{N}, R)$ yaklaşım uzayına göre T-üst ve $\mathcal{I}$-alt fuzzy kaba yaklaşımları, sırasıyla, her $m \in \mathbb{N}$ için şöyledir:

$$\overline{R}^{T}(\mu)(m) = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} T\big(R(m,t), \mu(t)\big) = \bigvee_{\substack{t\in\mathbb{N}\\ 2|m}} T\left(\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t+1}\right) = \bigvee_{t\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{t+1}\right)^{2} = 1.$$

$$\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)(m) = \bigwedge_{t\in\mathbb{N}} \mathcal{I}\big(R(m,t), \mu(t)\big) = \bigwedge_{\substack{t\in\mathbb{N}\\ 2|m}} \mathcal{I}\left(\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t+1}\right) \wedge \bigwedge_{\substack{t\in\mathbb{N}\\ 2\nmid m}} \mathcal{I}\left(0, \frac{1}{t+1}\right) = 0.$$

$\overline{R}^{T}(\mu)$ ve $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$, $\mathbb{N}$'in birer T-fuzzy alt yarıgrubudur. Ayrıca$\overline{R}^{T}(\mu)$ ve $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$, $\mathbb{N}$'in birer T-fuzzy ideali, asal ideali ve bi-idealidir.

Örnek 2.4.17: $X = \{f | f: \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, f\ azalan\ bir\ fonksiyon\}$ şeklinde tanımlanan $(X, +)$ kümesi bir yarıgruptur.

$\mu: X \to [0,1]$ fuzzy kümesi, her $f \in X$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mu(f) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \frac{1}{f(n)}$$

Bu takdirde μ, X in bir T-fuzzy alt yarıgrubudur.

$R: \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \times X \to [0,1]$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in X$ için $R(n,f) = \frac{1}{f(n)}$ olarak tanımlanan R, bir T-fuzzy bağıntısal homomorfidir.

μ fuzzy kümesinin, $(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, X, R)$ yaklaşım uzayına göre T-üst ve $\mathcal{I}$-alt fuzzy kaba yaklaşımları, sırasıyla, her $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ için aşağıdaki şekildedir:

$$\overline{R}^{T}(\mu)(n) = \bigvee_{f\in X} T\big(R(n,f), \mu(f)\big) = \bigvee_{f\in X} T\left(\frac{1}{f(n)}, \bigwedge_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \frac{1}{f(m)}\right) = \bigvee_{f\in X} T\left(\frac{1}{f(n)}, \frac{1}{f(2)}\right)$$
$$= \bigvee_{f\in X}\left(\frac{1}{f(n)} \cdot \frac{1}{f(2)}\right) = \bigvee_{f\in X}\left(\frac{1}{f(n)\cdot f(2)}\right).$$

$$\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)(n) = \bigwedge_{f\in X} \mathcal{I}\big(R(n,t), \mu(t)\big) = \bigwedge_{f\in X} \mathcal{I}\left(\frac{1}{f(n)}, \bigwedge_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \frac{1}{f(m)}\right) = \bigwedge_{f\in X} \mathcal{I}\left(\frac{1}{f(n)}, \frac{1}{f(2)}\right)$$
$$= \bigwedge_{f\in X}\left(1 - \frac{1}{f(n)} + \frac{1}{f(n)} \cdot \frac{1}{f(2)}\right)$$

Tanım 2.4.18: $R \in F(X \times Y, L)$ ve $Y \star Y = Y$ olsun. Her $x, a \in X$ ve her $y, b \in Y$ için $R(x, y)\ T\ R(a, b) = R(x \circ a, y \star b)$ özelliği sağlanıyorsa R'ye bir TL-fuzzy tam bağıntısal homomorfi denir.

Teorem 2.4.19: $R \in F(X \times Y, L)$ bir TL-fuzzy tam bağıntısal homomorfi, $\mathfrak{I}$, bir sonsuz $\vee$ -dağılımlı T t-normuyla üretilen $\mathfrak{R}$-implikasyon ve μ, Y'nin bir TL-fuzzy alt yarıgrubu olsun. Bu takdirde $\underline{R}_{\mathfrak{I}}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy alt yarıgrubudur.

İspat: Her $a, b \in X$ için

$$\underline{R}_{\mathfrak{I}}(\mu)(a) T \underline{R}_{\mathfrak{I}}(\mu)(b) = \left(\bigwedge_{t\in Y} R(a,t)\mathfrak{I}\mu(t)\right) T \left(\bigwedge_{k\in Y} R(b,k)\mathfrak{I}\mu(k)\right)$$

$$= \bigwedge_{t\in Y}\left(\bigvee_{R(a,t)T\alpha\leq\mu(t)} \alpha\right) T \bigwedge_{t\in Y}\left(\bigvee_{R(b,k)T\beta\leq\mu(k)} \beta\right)$$

$$\leq \bigwedge_{\substack{t\in Y\\ k\in Y}}\left(\bigvee_{R(a,t)T\alpha\leq\mu(t)} \alpha\, T \bigvee_{R(b,k)T\beta\leq\mu(k)} \beta\right)$$

$$= \bigwedge_{\substack{t\in Y\\ k\in Y}}\left(\bigvee_{\substack{R(a,t)T\alpha\leq\mu(t)\\ R(b,k)T\beta\leq\mu(k)}} \alpha T\beta\right).$$

Burada $R(a, t)T\alpha \leq \mu(t)$ ve $R(b, k)T\beta \leq \mu(k)$ ise $R(a, t)TR(a, k)T\alpha T\beta \leq \mu(t)T\mu(k)$ yazılır. R tam bağıntısal homomorfi ve μ, Y'nin bir TL-fuzzy alt yarıgrubu olduğundan $R(a, t)T\alpha \leq \mu(t)$ ve $R(b, k)T\beta \leq \mu(k)$ ise $R(a \circ b, t \star k)T\alpha T\beta \leq \mu(t \star k)$ olur. Böylece $p = t \star k \in Y$ olmak üzere işleme, aşağıdaki şekilde devam edilebilir.

$$\bigwedge_{\substack{t\in Y\\ k\in Y}}\left(\bigvee_{\substack{R(a,t)T\alpha\leq\mu(t)\\ R(b,k)T\beta\leq\mu(k)}} \alpha T\beta\right) \leq \bigwedge_{p\in Y}\left(\bigvee_{R(a\circ b,p)T\alpha T\beta\leq\mu(p)} \alpha T\beta\right)$$

$$\leq \bigwedge_{p\in Y}\left(\bigvee_{R(a\circ b,p)T\gamma\leq\mu(p)} \gamma\right)$$

$$= \bigwedge_{p\in Y} R(a\circ b, p)\mathfrak{I}\mu(p) = \underline{R}_{\mathfrak{I}}(\mu)(a\circ b).$$

Sonuç olarak $\underline{R}_{\mathfrak{I}}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy alt yarıgrubudur.

Örnek 2.4.20: $(\mathbb{N},\cdot)$ ve $(\mathbb{Z},+)$ yarıgruplar olmak üzere Örnek 1.3.2' te verilen t-norm ile üretilen $\mathfrak{R}$-implikasyon aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 23. Örnek 2.4.20'deki $\mathcal{I}$ implikasyonu

$\mathcal{I}$	**0**	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\delta}$	**1**
0	1	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{\alpha}$	0	1	0	1	1	1
$\boldsymbol{\beta}$	0	α	1	1	1	1
$\boldsymbol{\gamma}$	0	α	α	1	1	1
$\boldsymbol{\delta}$	0	α	α	γ	1	1
1	0	α	β	γ	δ	1

$\mu \in F(\mathbb{Z}, L)$, L-fuzzy altkümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mu(z) = \begin{cases} \alpha, & z\ tek\ say\imath \\ \gamma, & z\ çift\ say\imath \end{cases}$$

Bu takdirde μ, $(\mathbb{Z},+)$'nin bir TL-fuzzy alt yarıgrubudur:

$R \in F(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}, L)$, L-fuzzy bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$R(n,z) = \begin{cases} \alpha, & n = 0 \\ \beta, & n > o\ ve\ z\ çift\ say\imath \\ \gamma, & n > o\ ve\ z\ tek\ say\imath \end{cases}$$

Bu takdirde R bir TL-fuzzy tam bağıntısal homomorfidir.

μ L-fuzzy altkümesinin, $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, R)$ yaklaşım uzayına göre $\overline{R}^T(\mu)$, T-üst kaba yaklaşımı $\overline{R}^T(\mu)(0) = \alpha$ ve her $m > 0$ için $\overline{R}^T(\mu)(m) = \gamma$'dır.

μ L-fuzzy altkümesinin, $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, R)$ yaklaşım uzayına göre $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$, $\mathcal{I}$-alt fuzzy kaba yaklaşımı $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)(0) = 1$ ve her $m > 0$ için $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)(m) = \alpha$ dır.

$\overline{R}^T(\mu)$ ve $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$ yaklaşımları, $\mathbb{N}$'in birer TL-fuzzy alt yarıgrubudur.

Teorem 2.4.21: $R \in F(X \times Y, L)$ bir serial TL-fuzzy tam bağıntısal homomorfi; T sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm; $\mathcal{I}$, T t-normuyla üretilen bir $\mathfrak{R}$-implikasyon ve μ, Y'nin bir TL-fuzzy sol ideali olsun. Bu takdirde $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy sol idealidir.

İspat: R serial L-fuzzy bağıntı olduğundan her $b \in X$ için $R(b,k) = 1$ olacak şekilde $k \in Y$ mevcuttur.

Her $a, b \in X$ için

$$\begin{aligned}\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(a) &= \bigwedge_{t\in Y} R(a,t)\mathcal{J}\mu(t)\\ &= \bigwedge_{t\in Y}\left(\bigvee_{R(a,t)Tu\le\mu(t)} u\right)\\ &= \bigwedge_{t\in Y}\left(\bigvee_{R(a,t)TR(b,k)Tu\le\mu(t)} u\right)\\ &\le \bigwedge_{t\in Y}\left(\bigvee_{R(a\circ b,t\star k)Tu\le\mu(t\star k)} u\right)\\ &\le \bigwedge_{p\in Y}\left(\bigvee_{R(a\circ b,p)Tu\le\mu(p)} u\right) = \underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(a\circ b).\end{aligned}$$

Böylece $\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy sol idealidir.

Teorem 2.4.22: $R \in F(X \times Y, L)$ bir serial TL-fuzzy tam bağıntısal homomorfi; T sonsuz $\vee$-dağılımlı bir t-norm; $\mathcal{J}$, T t-normuyla üretilen bir $\mathfrak{R}$-implikasyon ve μ, Y'nin bir TL-fuzzy bi-ideali olsun. Bu takdirde $\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy bi-idealidir.

İspat: R serial L-fuzzy bağıntı olduğundan her $x \in X$ için $R(x,r) = 1$ olacak şekilde $r \in Y$ mevcuttur. μ, Y'nin bir TL-fuzzy bi-ideali olduğundan her $t, r, k \in Y$ için $\mu(t)T\mu(k) \le \mu(t \star r \star k)$'dır.

Her $a, x, b \in X$ için

$$\begin{aligned}\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(a)T\underline{R_{\mathcal{J}}}(\mu)(b) &= \left(\bigwedge_{t\in Y} R(a,t)\mathcal{J}\mu(t)\right)T\left(\bigwedge_{k\in Y} R(b,k)\mathcal{J}\mu(k)\right)\\ &= \bigwedge_{t\in Y}\left(\bigvee_{R(a,t)Tu\le\mu(t)} u\right)T\bigwedge_{k\in Y}\left(\bigvee_{R(b,k)Tv\le\mu(k)} v\right)\\ &= \bigwedge_{\substack{t\in Y\\ k\in Y}}\left(\bigvee_{R(a,t)Tu\le\mu(t)} u\right)T\left(\bigvee_{R(b,k)Tv\le\mu(k)} v\right)\\ &= \bigwedge_{\substack{t\in Y\\ k\in Y}}\left(\bigvee_{\substack{R(a,t)Tu\le\mu(t)\\ R(b,k)Tv\le\mu(k)}} uTv\right)\end{aligned}$$

$$\leq \bigwedge_{t\star r\star k\in Y}\left(\bigvee_{R(a,t)TR(x,r)TR(b,k)TuTv\leq\mu(t\star r\star k)} uTv\right)$$

$$\leq \bigwedge_{t\star r\star k\in Y}\left(\bigvee_{R(a\circ x\circ b,t\star r\star k)TuTv\leq\mu(t\star r\star k)} uTv\right)$$

$$\leq \bigwedge_{p\in Y}\left(\bigvee_{R(a\circ x\circ b,p)T\lambda\leq\mu(p)} \lambda\right) = \underline{R_J}(\mu)(a\circ x\circ b).$$

Sonuç olarak $\underline{R_J}(\mu)$, X'in bir TL-fuzzy bi-idealidir.

3. SONUÇLAR

1. Kaba küme teorisiyle ilgili literatürde yapılan çalışmalarda, bir kümenin alt ve üst yaklaşımları ve bu yaklaşımların cebirsel yapıları denklik bağıntıları veya kongrüans bağıntılarına göre incelenmiştir. Bu çalışmada ise bir bağıntısal homomorfiye göre, bir kümenin alt ve üst yaklaşımlarının çeşitli özellikleri araştırılmıştır. Kongrüans bağıntısı, bağıntısal homomorfinin özel bir durumu olduğundan literatürde verilen kavramlar genelleştirilmiştir ve ek olarak bir takım yeni teoremler verilmiştir.
2. $(\mathcal{J}, T)$-L-Fuzzy kaba kümeler için, literatürde, bir fuzzy kümesinin alt ve üst yaklaşımlarının çeşitli özellikleri $L = [0,1]$ olması durumunda incelenmiştir. Bu çalışmada, evrensel küme olarak iki yarı grup seçilerek, bir fuzzy kümesinin TL-bağıntısal homomorfiye göre alt ve üst yaklaşımları herhangi bir L tam kafesi üzerinde, herhangi bir t-norm ve bu t-norma bağlı bir implikasyon için incelenmiştir. Çalışma; herhangi bir L tam kafesi için TL-bağıntısal homomorfiye göre ve yarıgruplar üzerinde yapılması bakımından literatürde yapılan çalışmalardan daha geneldir.

4. ÖNERİLER

1. $(\mathcal{I}, T)$-L-fuzzy yaklaşım uzayında bir fuzzy kümesinin alt yaklaşımıyla ilgili $\mathfrak{R}$-implikasyonlar için elde edilen bulgular, $\mathcal{S}$-implikasyonlar için de araştırılabilir.
2. TL- fuzzy asal (quasi-ideal, yarı asal) idealin, T-üst ve $\mathcal{I}$ -alt yaklaşımlarının da bu özelliklerini koruyup korumadığı araştırılabilir.
3. Yarıgruplar üzerindeki bu çalışma diğer cebirsel yapılara (gruplar, halkalar ve modüller) uyarlanabilir.
4. Bu çalışmada sunulan teoriler, aralık değerli kafeslere uygulanabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Baczynski, M. and Jayaram, B., QL-Implications:Some Properties and Intersections, Fuzzy Sets and Systems, dio: 10.1016/j.fss.2008.09.021.

2. Baczynski, M. and Jayaram, B., (U,N)-implications and their Characterizations, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 2049-2062.

3. Baczynski, M. and Jayaram, B., (S,N) -and R-implications: A State-of-the-Art Survey, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1836-1859.

4. Birkhoff, G., Lattice Theory, 3rd Edition, Providence, RI, 1967.

5. Cantor, G.,Grundlagen Einer Allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, B.G. Teubner, Leipzig, 1883.

6. Chakrabarty, K., Biswas, R. and Nanda S., Fuzziness in Rough Sets, Fuzzy Sets and Systems, 110 (2000) 247-251.

7. Chinram, R., On Quasi-Gamma-Ideals in Gamma-Semigroups, ScienceAsia, 32 (2006) 351-353.

8. Davvaz, B. and Dudek, W.A., Fuzzy n-ary Groups As a Generalızatıon of Rosenfeld's Fuzzy Groups, arXiv:0710.3884v1 2007.

9. Davvaz, B., A Short Note on Algebraic T-Rough Sets , Information Sciences, 178 (2008) 3247-3252.

10. Davvaz, B., Roughness in Rings, Information Sciences, 164 (2004) 147-163.

11. Davvaz, B., Roughness Bazed on Fuzzy ideals, Information Sciences, 176 (2006) 2417-2437.

12. Davvaz, B. and Mahdavipour M., Roughness in Modules, Information Sciences, 176 (2006) 3658-3674.

13. De Baets, B. and Mesiar, R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61–75.

14. Dubois, H. and Prade, H., Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets, International Journal of General Systems, 17 (1990) 191-208.

15. Fodor, J. and Roubens, M., Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Kluwer Academic Publishers, 1994.

16. Frege, G., Grundgesetzen der Arithmetik, 2, Verlag, von Hermann Pohle, Jena, 1903.

17. Goguen J.A., L-Fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145-174.

18. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

19. Ignjatovic, J., Ciric, M. and Bogdanovic, S., Fuzzy Homomorphism of Algebras, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 2345-2365 .

20. Jayaram, B., Contrapositive Symmetrisation of Fuzzy Implications—Revisited, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006) 2291–2310.

21. Jayaram, B. and Mesiar R., On Special Fuzzy Implications, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 2063-2085.

22. Kazancı, O. and Davvaz, B., On the Structure of Rough Prime (primary) Ideals and Rough Fuzzy Prime (Primary) Ideals in Commutative Rings, Information Science, 178 (2008) 1343-1354.

23. Kazancı, O. and Yamak, S., Generalized Fuzzy Bi-ideals of Semigroups, Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 12 (2008) 1119-1124.

24. Klement, E.P., Mesiar, R. and Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

25. Kuroki, N., Fuzzy Bi-ideals in Semigroups, Comment. Math.Univ. St. Pauli XXXVIII-1, 1979.

26. Kuroki, N., Fuzzy Congruences on Inverse Semigroups, Fuzzy Sets and Systems, 87 (1997) 335-340.

27. Kuroki, N., Rough Ideals in Semigroups, Informatin Sciences, 100 (1997) 139-163.

28. Kuroki, N. and Wang, P.P., The Lower and Upper Approximations in a Fuzzy Group, Information Sciences, 90 (1996) 203-220.

29. Lajos, S., On The Bi-ideals in Semigroups, Proceedings of the Japan Academy, 45, 8 (1969) 710-712.

30. Li, F., Yin, Y. and Lu, L., (ν, T)-Fuzzy Rough Approximation Operators And The TL-Fuzzy Rough Ideals On A Ring, Informatin Sciences, 177 (2007) 4711-4726.

31. Li, S., Yu, Y. and Wang, Z., T-Congruence L-Relations on Groups and Rings, Fuzzy Sets and Systems, 92 (1997) 365-381.

32. Li, T.-J., Rough Approximation Operators on Two Universes of Discourse and Their Fuzzy Extensions, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 3033 – 3050.

33. Mas M., Monserrat, M., Torrens, J. and Trillas, E., A Survey on Fuzzy Implication Functions, IEEE Transactions On Fuzzy Systems, 15, 6 (2007).

34. McLean, R. G. and Kumar, H., Fuzzy Ideals in Semigroups, Fuzzy Sets and Systems, 48 (1992) 137-140.

35. Mi, J. -S. and Zhang, W.-X., An Axiomatic Characterization of a Fuzzy Generalization of Rough Sets, Information Sciences, 160 (2004) 235-249.

36. Mi, J. -S., Leung, Y. , Zhao, H. -Y. and Feng T., Generalized Fuzzy Rough Sets Determined by a Triangular Norm, Information Science, 178 (2008) 3203-3213.

37. Mordeson, J. N. and Malik, D.S.,Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing 1998.

38. Morsi, N.N. and Yakout M.M., Axiomatics for Fuzzy Rough Sets, Fuzzy Sets and Systems, 100 (1998) 327-342.

39. Nguyen, T.H. and Walker, E.A., A First Course in Fuzzy Logic, 2nd ed., Charpman and Hall/CRC 2000.

40. Pawlak, Z., Rough Sets, International Journal of Computer and Information Sciences, 11 (1982) 341-356.

41. Pawlak, Z., Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

42. Pawlak, Z. and Skowron, A., Rudiments of Rough Sets, Information Sciences, 177 (2007) 3-27.

43. Pawlak, Z. and Skowron, A., Rough Sets: Some Extensions, Information Sciences, 177 (2007) 28-40.

44. Pei, D., A generalized model of fuzzy rough sets, International Journal of General Systems, 34, 5 (2005) 603-613.

45. Pei, D., On Definable Concepts of Rough Set Models, Information Sciences, 177 (2007) 4230-4239.

46. Pei, D. and Fan T., On Generalized Fuzzy Rough Sets, International Journal of General Systems, (2007) 1-17.

47. Randy, E.A., Kozae, A.,M. and Abd El-Monsef, M.M.E., Generalized Rough Sets, Chaos, Solitions and Fractals, 21 (2004) 49-53.

48. Russell, B., The Principles of Mathematics, George Allen ve Unwin Ltd., London, Great Britain, 1903, (2nd Edition in 1937).

49. Wang, Z. and Yu, Y., Pseudo-t-norms and implication operators on a complete Brouwerian lattice, Fuzzy Sets and Systems, 132 (2002) 113–124.

50. Wu W.-Z. and Zhang W.-X., ,Constructive and axiomatic approaches of fuzzy approximation operators, Information Sciences, 159 (2004) 233-254.

51. Wu, W.-Z., Leung, Y. and Mi, J.-S., On Characterizations of (φ, τ)-Fuzzy Rough Approximation Operators, Fuzzy Sets and Systems, 154 (2005) 76-102.

52. Wu, W.-Z., Mi, J.-S. and Zhang, W.-X., Generalized Fuzzy Rough Sets, Informatin Sciences, 151 (2003) 263- 282.

53. Xiao, Q. -M. and Zhang, Z. -L., Rough Prime Ideals and Rough Fuzzy Prime Ideals in Semigroups, Information Sciences, 176 (2006) 725-733.

54. Xie, X.-Y., On Prime, Quasi-prime, Weakly Quasi-prime Fuzzy Left Ideals of Semigroups, Fuzzy Sets and Systems, 123, (2001) 239-249.

55. Yao, Y.Y., Generalized rough set model, in: L. Polkovwski, A. Skowron (Eds.), Rough Sets in Knowladge Discovery 1. Methodology and Applications, Physica-Verlang, Heidelberg, 1998, 286-318.

56. Yao, Y.Y., Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators, Informatin Sciences, 111 (1998) 239-259.

57. Yeung, D. S., Chen, D., Tsang, E. , Lee, J. W. T. and Wang, X. , On The Generalization of Fuzzy Rough Sets, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 13, 3 (2005) 343-361.

58. Zhang, W.X., Wu, W.Z., Liang, J.Y. and Li, D.Y., Rough Set Theory and Approaches, Science Press, Beijing, 2001.

59. Zhu,W., Generalized Rough Sets Bazed on Relations, Information Science, 177 (2007) 4997-5011.

60. Zadeh, L.A., Fuzzy Sets, Inform. And Control, 8 (1965) 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Canan EKİZ, 20.05.1982 tarihinde Giresun'da doğdu. İlköğrenimini Yazlık Köyü İlkokulunda, orta öğrenimini Zehra Kitapçıoğlu Ortaokulu'nda, lise öğrenimini ise Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı.

2000-2001 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği programına girdi. 2005 yılında lisans eğitimini tamamladı.

2007-2008 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı. 19.10.2007 tarihinde Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmekte olan Ekiz'in yabancı dili İngilizcedir.