KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBE LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ASİMPTOTİK ÇÖZÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe KABATAŞ

HAZİRAN 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBE LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ASİMPTOTİK ÇÖZÜMLER

Ayşe KABATAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
''Yüksek Lisans (Matematik)''
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 01.06.2009
Tezin Savunma Tarihi: 26.06.2009

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Haskız COŞKUN

Jüri Üyesi: Prof. Dr. İhsan ÜNVER

Jüri Üyesi: Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Konunun belirlenmesinden, çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesine kadar yardımını ve desteğini esirgemeyen hocam Doç. Dr. Haskız COŞKUN’ a saygılarımı sunar, emeği için teşekkür ederim.

Ayrıca hep yanımda olan aileme ve başta arkadaşım Arş. Gör. Elif BEKAR olmak üzere tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayşe KABATAŞ
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ II

İÇİNDEKİLER III

ÖZET V

SUMMARY VI

SEMBOLLER DİZİNİ VII

1. GENEL BİLGİLER 1

1.1. Giriş 1

1.2. İkinci Mertebe Lineer Diferensiyel Denklemlerin Seriler Yardımıyla Asimptotik Çözümü 2

1.2.1. $X' = (\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k})X$ Formundaki Denklem Sisteminin Asimptotik Çözümü 4

1.2.2. $X' = z^r(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k})X$ Formundaki Denklem Sisteminin Asimptotik Çözümü 14

1.2.3. $X' = \mu(\sum_{k=0}^{\infty} A_k (z)\mu^{-k})X$ Formundaki Denklem Sisteminin Asimptotik Çözümü 24

1.3. Çözümler İçin Asimptotik Formüller ve Liouville Dönüşümü 31

1.3.1. Çözümler İçin Asimptotik Formüller 32

1.3.2. Liouville Dönüşümü 36

1.3.3. Liouville Dönüşümünün Uygulaması 38

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME 44

2.1. Bazı İkinci Mertebe Lineer Diferensiyel Denklemlerin Seriler Yardımıyla Asimptotik Çözümü 44

2.2. Seriler Yardımıyla Çözülemeyen Bazı İkinci Mertebe Lineer Diferensiyel Denklemler İçin Asimptotik Formüller 67

3. SONUÇLAR 88

4. ÖNERİLER 90

5. KAYNAKLAR.. 92
ÖZGEÇMİŞ

ÖZET

Bu çalışmada ikinci mertebeden

$$a_2(z)y''(z)+a_1(z)y'(z)+a_0(z)y(z)=0$$

formundaki lineer diferensiyel denklemler için asimptotik çözümler elde edilmiştir.

Birinci bölümde, denklemde verilen bağımsız değişkenin sonsuza yakınsaması halinde farklı formdaki sistemler için kullanılabilecek seri çözüm yöntemlerine yer verilmiştir. Ayrıca bu yöntemlerin uygun olmadığı durumlar için bazı asimptotik formüller ve ilgili teorik yaklaşımlar sunulmuştur.

İkinci bölümde, verilen yöntemler ve dönüşümler kullanılarak bazı özel diferensiyel denklemler için asimptotik çözümler ve formüller elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen çözümlerin yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İkinci mertebe lineer diferensiyel denklemler, asimptotik çözüm

SUMMARY

The Asymptotic Solutions of Second Order Linear Differential Equations

In this thesis, asymptotic solutions for second order linear differential equations of the form

$$a_2(z)y''(z)+a_1(z)y'(z)+a_0(z)y(z)=0$$

are obtained.

In the first part, series solutions for the systems of different forms are given to yield information about the solution for large values of the independent variable given in equation. For the case where series solutions are not suitable, some asymptotic formulas and related theoretical results are also introduced.

In the second part, asymptotic solutions and formulas for some special differential equations are obtained using the methods and transformations given in the first part. Convergence of the solutions is also investigated.

Key Words: Second order linear differential equations, asymptotic solution

SEMBOLLER DİZİNİ

e	: Euler sayısı, yaklaşık değeri 2,71828183
$\exp(x)$	: $e^{(x)}$
$\lvert x \rvert$	: x’ in mutlak değeri
$x \to x_0$	: x, x_0’ a yaklaşırken
sgn(x)	: x’in işaret fonksiyonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bilindiği üzere pratikte birçok diferensiyel ve integral denklemlerin tam çözümlerini bulmak mümkün olmayabilir. Burada tam çözümden kasıt, özellikleri veya tablo değerleri bilinen fonksiyonlarla ifade edilebilen çözümlerdir. Bunlara Bessel fonksiyonları, Legendre fonksiyonları, üstel fonksiyonlar gibi örnekler verilebilir. Bununla birlikte böyle bir çözüm, bazı özel durumlarda gerek nümerik hesaplamalar ve gerekse analitik incelemeler açısından yararlı olmayabilir. Örneğin; belirli bir problemin herhangi bir parametreye bağlı çözümünü incelemek için Bessel fonksiyonlarının yavaş yakınsayan bir sonsuz seri çözümü, nümerik veya analitik hesaplamalarda yeterli değildir.

Genel olarak asimptotik analiz, denklemdeki veya integraldeki bir parametre ya da bazı değişkenler parametrenin bir komşuluğunda analitik değilse ya da çok büyük veya çok küçük değerler alıyorsa bu tür problemler için teknik geliştirmeyi ve yaklaşık analitik çözüm bulmayı konu alır [13].

Asimptotik analiz ile ilgili bazı bilgiler 18 ve 19. yüzyıllarda bilinmesine rağmen asimptotik açılım ilk olarak, 1886' da Poincare tarafından tanımlanmıştır.

" *Bir f(z) fonksiyonu için*

$$\lim_{z\to\infty} z^n \left[f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{-k} \right] = a_n, \quad n = 0,1,2,...$$

sağlanıyor ise bu f(z) fonksiyonu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$ *asimptotik açılımına sahiptir denir. Burada* $n = 0$ *için parantez içindeki toplam sıfır(0) alınır [11].*"

Ayrıca Poincare, 1892 yılında bu konuda önemli teknikler geliştirmiştir. 20. yüzyılda akışkanlar mekaniği ile ilgili çalışmalar asimptotik analize ilgiyi daha da artırmıştır. Asimptotik tekniklerin kullanıldığı diğer bazı alanlar; fizik bilimleri, astrofizik, deniz bilimi, biyo-medikal bilimler, trafik çalışmaları vb. olarak sıralanabilir [13].

Bu çalışmada da ikinci mertebe lineer diferensiyel denklemlerin içerdiği parametre veya değişkenin çok büyük değerleri için yaklaşık çözümler bulmak amaçlanmıştır. Bu nedenle özellikle teorik yaklaşımların kullanıldığı bölümlerde genel bir çözüm formu elde edebilmek amacıyla aşağıda tanımı verilen büyük "O" notasyonu kullanılmıştır:

" *x_0' ın herhangi bir ε_0 civarındaki tüm x' ler için*

$$|f(x)| \leq M\,|g(x)|,\ x \in \varepsilon_0,\ x \neq x_0$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı varsa x, x_0' a yakınsadığında $(x \to x_0)$ f(x) fonksiyonu, g(x)'e göre sınırlıdır denir ve

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$$

şeklinde yazılır. "

Bu tanım kullanılarak aşağıdaki formüller elde edilebilir:

1) $O(O(f)) = O(f)$,

2) $O(fg) = O(f)O(g)$,

3) $O(f) + O(f) = O(f)$.

Büyük "O" ilişkisinin önemli bir sonucu da bağımsız değişkene bağlı olarak integrallenebilmesidir. Yani; $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bu aralıkta

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$$

alınırsa, bu durumda

$$\int_x^{x_0} f(t)dt = O\left(\int_x^{x_0} |g(t)|\,dt\right)$$

sağlanır [3], [8].

1.2. İkinci Mertebe Lineer Diferensiyel Denklemlerin Seriler Yardımıyla Asimptotik Çözümü

Bilindiği üzere bağımsız değişkenin sonlu olması durumunda çeşitli yöntemler kullanılarak diferensiyel denklemlerin çözümleri incelenebilir. Genel olarak bir diferensiyel denklemin çözümünü kapalı formda elde etmek her zaman mümkün değildir. Bu nedenle bağımsız değişkenin pozitif kuvvetlerini içeren seri çözümleri kullanılmaktadır. Bu çözümler bağımsız değişkenin küçük değerleri için kullanışlıdır. Ancak;

$$y' = e^{1/z}y \quad (z \to \infty)$$

formundaki bir denklem için kullanışlı değildir.

Eğer $z \to \infty$ için y çözümü araştırılmak istenirse, $e^{1/z}$ ' nin seri açılımı kullanılarak

$$y' = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots\right) y$$

elde edilir ve buradan da

$$\frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots\right) dz$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\ln y = \ln c_0 + z + \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} - \ldots .$$

Böylece çözüm,

$$y = e^{\ln c_0 + z + \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} - \ldots} = c_0 e^z z \left(1 - \frac{1}{2z} + \ldots\right)$$

şeklindedir.

Şimdi de daha genel olan

$$y' = \left(a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \ldots\right) y$$

denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemin çözümü de

$$\frac{dy}{y} = \left(a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \ldots\right) dz$$

olarak yazılırsa

$$\ln y = \ln c_0 + az + b \ln z - \frac{c}{z} + \ldots$$

Yani

$$y = e^{\ln c_0 + az + b\ln z - \frac{c}{z} + \ldots} = c_0 e^{az} z^b \left(1 - \frac{c}{z} + \ldots\right) \tag{1.1}$$

bulunur. Böylece, (1.1) çözümü kullanılarak $|z|$ ' nin büyük değerleri için y çözümünün özellikleri incelenebilir.

1.2.1. $X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}\right) X$ Formundaki Denklem Sisteminin Asimptotik Çözümü

Bu bölümde

$$X' = (\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k})X \tag{1.2}$$

denklem sisteminin seriler yardımıyla asimptotik çözümü incelenecektir. Burada A_0, A_1, A_2, …, A_k,… sabit matrislerdir. Bu sistem için (1.1) dikkate alınarak ve μ sabitler, C_k vektörler olmak üzere

$$X = e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \tag{1.3}$$

formunda çözüm araştırılır. (1.3)' teki bilinmeyenleri belirlemek için bu X değeri ve türevi, (1.2)' de yerine yazılır ve z' nin benzer kuvvetlerinin katsayıları eşitlenir. Bunun için A_0 matrisi farklı özdeğerlere sahip olmalıdır. Bu durumda

$$\lambda e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} + \mu e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k-1} - e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k C_k z^{-k-1} = e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{\ell=0}^{k} A_{k-\ell} C_{\ell}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} &(A_0 - \lambda I) C_0 = 0, \\ &(A_0 - \lambda I) C_1 = (\mu - A_1) C_0, \\ &(A_0 - \lambda I) C_k = (\mu - k + 1) C_{k-1} - \sum_{\ell=0}^{k-1} A_{k-\ell} C_{\ell}, \quad k=2,3,\ldots \end{aligned} \tag{1.4}$$

sistemi elde edilir.

Bu sistemin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için $|A_0 - \lambda I| = 0$ olması; yani λ' nın A_0 matrisinin bir özdeğeri ve C_0' ın da λ' ya karşılık gelen bir özvektör olması gerekir. Şimdi (1.4) sisteminin ikinci denklemi; yani

$$(A_0 - \lambda I) C_1 = (\mu - A_1) C_0 \tag{1.5}$$

göz önüne alınsın. Genel olarak böyle bir denklem sağ taraf belirli "uyumluluk koşullarını"nı sağlamadıkça çözüme sahip değildir. Bu uyumluluk koşulları henüz tanımlanmamış olan (1.3) eşitliğindeki μ sabitini belirler. Bu noktada λ' nın basit özdeğer olması gerekliliği ortaya çıkar. λ' nın katlı özdeğer olması durumunda söz konusu denklemi uyumlu yapabilecek bir μ sabiti mevcut değildir. Diğer bir deyişle, (1.3) formunda n tane lineer bağımsız çözümün daima mevcut olduğu söylenemez. Bu nedenle (1.3) formunda n tane lineer bağımsız çözüm elde etmek için A_0 matrisinin farklı özdeğerlere sahip olması gerekmektedir.

Bu aşamada μ' nün belirlenmesiyle C_1 de belirlenmiş olur; ancak tek türlü değildir. Daha sonra (1.4) sisteminin üçüncü denklemi; yani

$$(A_0 - \lambda I)C_2 = (\mu - 1)C_1 - A_1C_1 - A_2C_0$$

göz önüne alınır. Burada C_0 ve C_1 vektörleri yerlerine yazılır ve uyumluluk gereği C_1 tek türlü belirlenmiş olur. Kısaca C_0 hariç her bir C_k vektörü, (1.4) sisteminin (k+1). eşitliği kullanılarak tek türlü belirlenir (sabit katı hariç).

Örnek 1.1:

$$y'' + \frac{1}{z}y' + (1 - \frac{n^2}{z^2})y = 0$$

denkleminin $|z| \to \infty$ için asimptotik çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bessel denklemi olarak adlandırılan bu denklemi sisteme dönüştürmek için,

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = y'$$

alınsın. O halde,

$$x_1' = x_2,$$

$$x_2' = -\frac{1}{z}x_2 - (1 - \frac{n^2}{z^2})x_1$$

ve buradan da

$$X' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{z} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{z^2}\right]X \tag{1.6}$$

sistemi elde edilir $\left(X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$. Burada

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Baş matris A_0' ın

$$|A_0 - \lambda I| = 0$$

denklemi kullanılarak

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

eşitliğinden $\lambda_1 = i$ ve $\lambda_2 = -i$ olmak üzere iki farklı özdeğeri bulunur. O halde, (1.2) formundaki (1.6) sistemi için

$$X = e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

şeklinde çözüm araştırılır. Bilinmeyenleri belirlemek için (1.4) denklemleri kullanılır.

İlk olarak $\lambda = i$ için;

I. (1.4) sisteminin birinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)\, C_0 = 0$$

göz önüne alınsın. $C_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -ip_0 + q_0 \\ -p_0 - iq_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Burada uyumluluk gereği

$$-ip_0 + q_0 = 0 \text{ yani } q_0 = ip_0$$

alınmalıdır. O halde

$$C_0 = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

bulunur. Eğer $p_0 = i\alpha_0$ alınırsa

$$C_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir (α_0 keyfi sabit).

II. (1.4) sisteminin ikinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)\, C_1 = (\mu - A_1) C_0$$

göz önüne alınsın. $C_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \alpha_0 \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -ip_1 + q_1 \\ -p_1 - iq_1 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafını

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

nonsingüler matrisiyle çarpmak bilinmeyenleri belirlemede kolaylık sağlayacaktır:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -ip_1 + q_1 \\ -p_1 - iq_1 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\mu \\ -\mu - 1 \end{pmatrix}.$$

Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{pmatrix} -ip_1 + q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} i\mu \\ -2\mu - 1 \end{pmatrix}.$$

Burada uyumluluk gereği

$$-2\mu - 1 = 0 \ \text{ yani } \ \mu = -\frac{1}{2}$$

ve

$$q_1 = -\frac{i\alpha_0}{2} + ip_1$$

alınmalıdır. Böylece, $\alpha_0\alpha_1 = p_1$ olmak üzere

$$C_1 = \alpha_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\frac{i}{2} + i\alpha_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir (α_1 keyfi sabit).

III. (1.4) sisteminin üçüncü denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_2 = (\mu - 1)C_1 - A_2C_0 - A_1C_1$$

göz önüne alınsın. $C_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \alpha_0 \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\frac{i}{2} + i\alpha_1 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{pmatrix} -ip_2 + q_2 \\ -p_2 - iq_2 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\frac{i}{2} + i\alpha_1 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 \\ in^2 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -ip_2 + q_2 \\ -p_2 - iq_2 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha_1 \\ i(\frac{1}{4} - \frac{\alpha_1}{2} - n^2) \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bilinmeyenleri belirlemede kolaylık sağlamak için denklemin her iki tarafı (1.7) matrisiyle çarpılırsa

$$\begin{pmatrix} q_2 - ip_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha_1 \\ i(-2\alpha_1 + \frac{1}{4} - n^2) \end{bmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$-2\alpha_1 + \frac{1}{4} - n^2 = 0 \quad \text{yani} \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)$$

ve

$$q_2 = ip_2 + \frac{3}{4}\alpha_0\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)$$

alınmalıdır. O halde, $\alpha_0\alpha_2 = p_2$ olmak üzere

$$C_1 = \alpha_0 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(n^2 - \frac{1}{4}) \\ -\frac{in^2}{2} - \frac{3i}{8} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C_2 = \alpha_0 \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \frac{3}{4}(n^2 - \frac{1}{4}) + i\alpha_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (α_2 keyfi sabit).

IV. (1.4) sisteminin dördüncü denklemi

$$\left(A_0 - \lambda I\right)C_3 = \left(\mu - 2\right)C_2 - A_3C_0 - A_2C_1 - A_1C_2$$

göz önüne alınsın. $C_3=\begin{pmatrix}p_3\\q_3\end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_3\\q_3\end{pmatrix}=\alpha_0\left\{\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 0\\ 0 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \frac{3}{4}(n^2-\frac{1}{4})+i\alpha_2\end{bmatrix}-\alpha_0\begin{pmatrix}0 & 0\\ n^2 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}(n^2-\frac{1}{4})\\ -\frac{in^2}{2}-\frac{3i}{8}\end{bmatrix}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{pmatrix}-ip_3+q_3\\ -p_3-iq_3\end{pmatrix}=\alpha_0\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \frac{3}{4}(n^2-\frac{1}{4})+i\alpha_2\end{bmatrix}-\alpha_0\begin{bmatrix}0\\ -\frac{n^2}{2}(n^2-\frac{1}{4})\end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix}-ip_3+q_3\\ -p_3-iq_3\end{pmatrix}=\alpha_0\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\alpha_2\\ -\frac{9}{8}(n^2-\frac{1}{4})+\frac{n^2}{2}(n^2-\frac{1}{4})-\frac{3i}{2}\alpha_2\end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin de her iki tarafı (1.7) matrisiyle çarpılırsa

$$\begin{pmatrix}-ip_3+q_3\\ 0\end{pmatrix}=\alpha_0\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\alpha_2\\ -\frac{9}{8}(n^2-\frac{1}{4})+\frac{n^2}{2}(n^2-\frac{1}{4})-\frac{8i}{2}\alpha_2\end{bmatrix}.$$

Uyumluluk gereği,

$$\alpha_2=-\frac{i}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})$$

ve

$$q_3=ip_3+\frac{5i}{16}\alpha_0(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})$$

alınmalıdır. O halde, $\alpha_0\alpha_3=p_3$ olmak üzere

$$C_2=\alpha_0\begin{bmatrix}-\frac{i}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})\\ \frac{1}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{15}{4})\end{bmatrix}\quad \text{ve}\quad C_3=\alpha_0\begin{bmatrix}\alpha_3\\ \frac{5i}{16}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})+i\alpha_3\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (α_3 keyfi sabit).

C_k vektörleri için genelleme yapmak amacıyla sistemin birkaç denkleminin daha incelenmesi gerekmektedir. Bu nedenle;

V. (1.4) sisteminin beşinci denklemi

$$(A_0-\lambda I)C_4=(\mu-3)C_3-A_4C_0-A_3C_1-A_2C_2-A_1C_3$$

göz önüne alınsın. $C_4=\begin{pmatrix}p_4\\q_4\end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_4\\q_4\end{pmatrix}=\alpha_0\left\{\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & 0\\ 0 & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\alpha_3\\ \frac{5i}{16}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})+i\alpha_3\end{bmatrix}$$

$$-\alpha_0\begin{pmatrix}0 & 0\\ n^2 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{i}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})\\ \frac{1}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{15}{4})\end{bmatrix}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{pmatrix}-ip_4+q_4\\ -p_4-iq_4\end{pmatrix}=\alpha_0\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & 0\\ 0 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_3\\ \frac{5i}{16}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})+i\alpha_3\end{bmatrix}-\alpha_0\begin{bmatrix}0\\ -\frac{in^2}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})\end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix}-ip_4+q_4\\ -p_4-iq_4\end{pmatrix}=\alpha_0\begin{bmatrix}-\frac{7}{2}\alpha_3\\ -\frac{25i}{32}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})+\frac{in^2}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})-\frac{5i}{2}\alpha_3\end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı (1.7) matrisiyle çarpılırsa

$$\begin{pmatrix}-ip_4+q_4\\ 0\end{pmatrix}=\alpha_0\begin{bmatrix}-\frac{7}{2}\alpha_3\\ \frac{i}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})-6i\alpha_3\end{bmatrix}.$$

Uyumluluk gereği,

$$\alpha_3=\frac{1}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})$$

ve

$$q_4 = ip_4 - \frac{7}{96}\alpha_0(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})$$

alınmalıdır. O halde, $\alpha_0\alpha_4 = p_4$ olmak üzere

$$C_3 = \alpha_0\begin{bmatrix} \frac{1}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4}) \\ \frac{i}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2+\frac{35}{4}) \end{bmatrix}$$

ve

$$C_4 = \alpha_0\begin{bmatrix} \alpha_4 \\ -\frac{7}{96}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})+i\alpha_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (α_4 keyfi sabit).

VI. (1.4) sisteminin altıncı denklemi

$$\left(A_0-\lambda I\right)C_5 = \left(\mu-4\right)C_4 - A_5C_0 - A_4C_1 - A_3C_2 - A_2C_3 - A_1C_4$$

göz önüne alınsın. $C_5 = \begin{pmatrix} p_5 \\ q_5 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_5 \\ q_5 \end{pmatrix} = \alpha_0\left\{\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \alpha_4 \\ -\frac{7}{96}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})+i\alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$-\alpha_0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4}) \\ \frac{i}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2+\frac{35}{4}) \end{bmatrix}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{pmatrix} -ip_5+q_5 \\ -p_5-iq_5 \end{pmatrix} = \alpha_0\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_4 \\ -\frac{7}{96}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})+i\alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha_0\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n^2}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4}) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -ip_5+q_5 \\ -p_5-iq_5 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}\alpha_4 \\ \frac{49}{192}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})-\frac{n^2}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})-\frac{7i}{2}\alpha_4 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı (1.7) matrisiyle çarpılırsa

$$\begin{pmatrix} -ip_5+q_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}\alpha_4 \\ -\frac{1}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})(n^2-\frac{49}{4})-8i\alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Uyumluluk gereği,

$$\alpha_4 = \frac{i}{384}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})(n^2-\frac{49}{4})$$

ve

$$q_5 = ip_5 - \frac{9i}{768}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})(n^2-\frac{49}{4})$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_4 = \alpha_0 \begin{pmatrix} \frac{i}{384}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})(n^2-\frac{49}{4}) \\ -\frac{1}{384}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})(n^2-\frac{63}{4}) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Bu şekilde işlemlere devam edilirse (1.6) denklem sistemi için birinci asimptotik çözüm,

$$\begin{aligned} X_1 = \alpha_0 e^{iz} z^{-\frac{1}{2}} \{ & \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(n^2-\frac{1}{4}) \\ -\frac{i}{2}(n^2+\frac{3}{8}) \end{pmatrix}\frac{1}{z} + \begin{pmatrix} -\frac{i}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4}) \\ \frac{1}{8}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{15}{4}) \end{pmatrix}\frac{1}{z^2} \\ & + \begin{pmatrix} \frac{1}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4}) \\ \frac{i}{48}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2+\frac{35}{4}) \end{pmatrix}\frac{1}{z^3} \\ & + \begin{pmatrix} \frac{i}{384}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})(n^2-\frac{49}{4}) \\ -\frac{1}{384}(n^2-\frac{1}{4})(n^2-\frac{9}{4})(n^2-\frac{25}{4})(n^2-\frac{63}{4}) \end{pmatrix}\frac{1}{z^4} + \dots \} \end{aligned}$$

bulunur. Burada, baş terim n' den bağımsızdır. $n^2 = \frac{1}{4}$ için üçüncü ve ondan sonraki bütün terimler sıfırdır. Bu durumda kesin bir çözüm elde edilir. Ayrıca, $n^2 = \frac{m^2}{4}$ (m tek tamsayı) olması durumunda sonlu sayıda terim haricinde bütün terimler sıfırlanır. Dolayısıyla yine kesin bir çözüm elde edilir.

Diferensiyel denklem sadece reel terimler içerdiği için $\lambda_2 = -i$ özdeğerine karşılık gelen ikinci çözüm birincinin eşleniği alınarak kolayca belirlenir:

$$X_2 = \gamma_0 e^{-iz} z^{-\frac{1}{2}} \{ \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(n^2 - \frac{1}{4}) \\ \frac{i}{2}(n^2 + \frac{3}{8}) \end{pmatrix} \frac{1}{z} + \begin{pmatrix} \frac{i}{8}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{9}{4}) \\ \frac{1}{8}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{15}{4}) \end{pmatrix} \frac{1}{z^2}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{48}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{9}{4})(n^2 - \frac{25}{4}) \\ -\frac{i}{48}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{9}{4})(n^2 + \frac{35}{4}) \end{pmatrix} \frac{1}{z^3}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{i}{384}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{9}{4})(n^2 - \frac{25}{4})(n^2 - \frac{49}{4}) \\ -\frac{1}{384}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{9}{4})(n^2 - \frac{25}{4})(n^2 - \frac{63}{4}) \end{pmatrix} \frac{1}{z^4} + \ldots \}.$$

Sonuç olarak, Bessel denkleminin $|z| \to \infty$ için lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = \alpha_0 e^{iz} z^{-\frac{1}{2}} \left[i - \frac{1}{2}(n^2 - \frac{1}{4}) z^{-1} - \frac{i}{8}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{9}{4}) z^{-2} + \ldots \right]$$

ve

$$y_2 = \gamma_0 e^{-iz} z^{-\frac{1}{2}} \left[-i - \frac{1}{2}(n^2 - \frac{1}{4}) z^{-1} + \frac{i}{8}(n^2 - \frac{1}{4})(n^2 - \frac{9}{4}) z^{-2} + \ldots \right]$$

' dir. Dolayısıyla genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= \alpha e^{iz} z^{-\frac{1}{2}} \left[i - \frac{1}{2}(n^2 - \frac{1}{4}) z^{-1} + \ldots \right] + \gamma e^{-iz} z^{-\frac{1}{2}} \left[-i - \frac{1}{2}(n^2 - \frac{1}{4}) z^{-1} + \ldots \right] \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse, $z \to \infty$ için bu çözüm yakınsaktır.

Benzer şekilde, (1.2) denklem sisteminden daha genel formdaki sistemler için de asimptotik çözüm bulmak mümkündür. Ancak, sistemin yapısına göre çözüm formu da değişecektir.

1.2.2. $X' = \left(z^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \right) X$ Formundaki Denklem Sisteminin Asimptotik Çözümü

Bu bölümde

$$X' = z^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} X \qquad (1.8)$$

denklem sisteminin seriler yardımıyla asimptotik çözümü incelenecektir. Burada A_k' lar sabit matrisler olmak üzere; A_0, farklı özdeğerlere sahip bir matristir. (1.8)' deki seri toplam açılırsa

$$X' = z^r (A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + ... + \frac{A_r}{z^r} + ...)X$$

yani

$$X' = (A_0 z^r + A_1 z^{r-1} + A_2 z^{r-2} + ... + A_r + \frac{A_{r+1}}{z} + \frac{A_{r+2}}{z^2} + ...)X$$

bulunur. Bu son denklem

$$\frac{dX}{X} = (A_0 z^r + A_1 z^{r-1} + A_2 z^{r-2} + ... + A_r + \frac{A_{r+1}}{z} + \frac{A_{r+2}}{z^2} + ...)dz$$

formunda yazılırsa

$$\ln X = \ln c_0 + \frac{A_0}{r+1} z^{r+1} + \frac{A_1}{r} z^r + ... + A_r z + A_{r+1} \ln z - \frac{A_{r+2}}{z} + ...$$

veya

$$X = c_0 e^{\frac{A_0}{r+1} z^{r+1} + \frac{A_1}{r} z^r + ... + A_r z} z^{A_{r+1}} (1 - \frac{A_{r+2}}{z} + ...)$$

elde edilir. O halde, (1.8) denklem sisteminin asimptotik çözümü

$$X = e^{a_0 z^{r+1} + a_1 z^r + ... + a_r z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k} \qquad (1.9)$$

formunda olacaktır. Burada a_i' ler uygun skalerlerdir.

(1.9)' daki bilinmeyenleri belirlemek için Bölüm 1.2.1' deki gibi (1.9) ve türevi, (1.8)' de yerine yazılır ve z' nin benzer kuvvetlerinin katsayıları eşitlenir.

Örnek 1.2:

$$y'' - zy = 0$$

denkleminin $|z| \to \infty$ için asimptotik çözümünü bulunuz.

Çözüm:

"Airy Denklemi" olarak bilinen bu denklemi sisteme dönüştürmek için

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = y'$$

dönüşümü kullanılırsa

$$X' = z\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}X$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$X' = z^r\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}\right)X$$

formundadır ($r = 1$). Ancak, baş matris A_0' ın aynı iki özdeğere sahip olduğu görülür. Bu nedenle başka bir dönüşüm tanımlanır:

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = z^{-1/2}y'.$$

Bu dönüşümle

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & z^{1/2} \\ z^{1/2} & -\dfrac{1}{2z} \end{pmatrix}X \qquad (1.10)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$z^{1/2} = t \qquad (1.11)$$

olacak şekilde yeni bir t bağımsız değişkeni tanımlamak sistemi daha kullanışlı yapacaktır. (1.11) eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{1}{2}z^{-1/2}dz = dt \quad \text{yani} \quad dz = 2tdt \qquad (1.12)$$

bulunur. (1.11) ve (1.12) değerleri (1.10)' da yerine yazılırsa

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 2t^2 \\ 2t^2 & -\dfrac{1}{t} \end{pmatrix}X$$

veya

$$\dot{X} = t^2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} X \qquad (1.13)$$

şeklinde t bağımsız değişkenine bağlı bir sistem elde edilir ($\dot{X} = \frac{dX}{dt}$). Bu sistem de

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\dot{X} = t^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{-k} \right) X$$

formundadır($r = 2$). Ayrıca, A_0 matrisi farklı iki özdeğere sahiptir ($\lambda_{1,2} = \pm 2$). O halde, (1.13) sisteminin asimptotik çözümü

$$X = e^{a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t} t^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^{-k}$$

şeklinde olacaktır. Bu çözüm ve türevi (1.13)' te yerine yazılırsa gerekli işlemler ve eşleştirmeler sonucunda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$3a_0 C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_0,$$

$$3a_0 C_1 + 2a_1 C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_1,$$

$$3a_0 C_2 + 2a_1 C_1 + a_2 C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_2, \qquad (1.14)$$

$$3a_0 C_k + 2a_1 C_{k-1} + a_2 C_{k-2} + (\mu - k + 3) C_{k-3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_k + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C_{k-3}, \quad k = 3, 4, 5, \ldots.$$

Bu denklemler sırasıyla kullanılarak C_k' lar belirlenir:

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3a_0 \right\} C_0 = 0 \qquad (1.15)$$

denkleminde $C_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ alınsın. (1.14) denklem sistemindeki C_k' ların sıfırdan farklı olması için

$$\begin{vmatrix} -3a_0 & 2 \\ 2 & -3a_0 \end{vmatrix} = 0$$

alınmalıdır. Dolayısıyla, $a_0 = \pm\dfrac{2}{3}$ bulunur.

Buna göre; $a_0 = -\dfrac{2}{3}$ seçilirse, (1.15) denkleminde

$$\begin{pmatrix} 2p_0 + 2q_0 \\ 2p_0 + 2q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda, uyumluluk gereği $q_0 = -p_0$ olmalıdır. O halde,

$$C_0 = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

II. $3a_0C_1 + 2a_1C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_1$

denklemi göz önüne alınsın. Burada, $C_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_0 \begin{pmatrix} 2a_1 \\ -2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_1 + 2q_1 \\ 2p_1 + 2q_1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği,

$$2a_1 = -2a_1 \quad \text{yani} \quad a_1 = 0$$

ve

$$q_1 = -p_1$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_1 = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

III. $3a_0C_2 + 2a_1C_1 + a_2C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_2$

denklemi göz önüne alınsın. Burada, $C_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_0 \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_2 + 2q_2 \\ 2p_2 + 2q_2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$a_2 = -a_2 \quad \text{yani} \quad a_2 = 0$$

ve

$$q_2 = -p_2$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_2 = p_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

IV. $3a_0C_3 + 2a_1C_2 + a_2C_1 + \mu C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C_0$

denklemi göz önüne alınsın. Burada, $C_3 = \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_0 \begin{pmatrix} \mu \\ -\mu - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_3 + 2q_3 \\ 2p_3 + 2q_3 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$\mu = -\mu - 1 \quad \text{yani} \quad \mu = -\frac{1}{2}$$

ve buradan da

$$2(p_3 + q_3) = -\frac{p_0}{2} \tag{1.16}$$

alınmalıdır.

V. $3a_0C_4 + 2a_1C_3 + a_2C_2 + (\mu - 1)C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C_1$

denklemi göz önüne alınsın. Burada, $C_4 = \begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_1 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_4 + 2q_4 \\ 2p_4 + 2q_4 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği, $-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ olamayacağından, $p_1 = 0$ alınmalıdır. Dolayısıyla, $C_1 = 0$ bulunur. Ayrıca, $q_4 = -p_4$ olmalıdır. O halde,

$$C_4 = p_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{VI.}\quad 3a_0C_5 + 2a_1C_4 + a_2C_3 + (\mu-2)C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}C_5 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}C_2$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada, $C_5 = \begin{pmatrix} p_5 \\ q_5 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_2\begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_5 + 2q_5 \\ 2p_5 + 2q_5 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği, $-\dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2}$ olamayacağından, $p_2 = 0$ alınmalıdır. Dolayısıyla, $C_2 = 0$ bulunur. Ayrıca, $q_5 = -p_5$ olmalıdır. O halde,

$$C_5 = p_5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{VII.}\quad 3a_0C_6 + 2a_1C_5 + a_2C_4 + (\mu-3)C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}C_6 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}C_3$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada, $C_6 = \begin{pmatrix} p_6 \\ q_6 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -7/2 & 0 \\ 0 & -5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_6 \\ q_6 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{7}{2}p_3 \\ -\dfrac{5}{2}q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_6 + 2q_6 \\ 2p_6 + 2q_6 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$$-\frac{7}{2}p_3 = -\frac{5}{2}q_3 \quad \text{yani} \quad p_3 = \frac{5}{7}q_3$$

alınmalıdır. (1.16) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{5}{7}q_3 + q_3 = -\frac{p_0}{4} \quad \text{yani} \quad q_3 = -\frac{7p_0}{48}$$

ve

$$p_3 = \frac{5}{7}q_3 = -\frac{5}{7}\cdot\frac{7p_0}{48} = -\frac{5p_0}{48}$$

olmak üzere

$$C_3 = p_0\begin{pmatrix} -5/48 \\ -7/48 \end{pmatrix}.$$

Bu şekilde hesaplamalara devam edilerek $a_0 = -\frac{2}{3}$ seçimiyle (1.13) denklem sistemi için asimptotik çözüm

$$X_1 = p_0 e^{-\frac{2}{3}t^3} t^{-\frac{1}{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/48 \\ -7/48 \end{pmatrix} t^{-3} + \ldots\right]$$

bulunur. Bu çözüm, (1.11) eşitliği kullanılarak z değişkeni cinsinden

$$X_1 = p_0 e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-\frac{1}{4}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/48 \\ -7/48 \end{pmatrix} z^{-\frac{3}{2}} + \ldots\right]$$

şeklinde ifade edilir. O halde,

$$y'' - zy = 0$$

denkleminin asimptotik çözümlerinden biri

$$y_1 = p_0 e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{5}{48}z^{-\frac{3}{2}} + \ldots\right)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde, (1.14) denklemlerinde sırasıyla $a_0 = \frac{2}{3}$ alınarak C_k' lar yeniden belirlenir ve böylelikle (1.13) denklem sistemi için ikinci asimptotik çözüm elde edilmiş olur. Bunun için,

I. $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3a_0\right\}C_0 = 0$

denkleminde $C_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ alınsın. Burada, $a_0 = \frac{2}{3}$ değeri yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -2u_0 + 2v_0 \\ 2u_0 - 2v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda, $u_0 = v_0$ bulunur. O halde,

$$C_0 = u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II. $3a_0C_1 + 2a_1C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_1$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $C_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$u_0 \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1 + 2v_1 \\ 2u_1 - 2v_1 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$2a_1 = -2a_1$ yani $a_1 = 0$

ve

$u_1 = v_1$

alınmalıdır. O halde,

$$C_1 = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

III. $3a_0C_2 + 2a_1C_1 + a_2C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} C_2$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $C_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$u_0 \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + 2v_2 \\ 2u_2 - 2v_2 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$a_2 = -a_2$ yani $a_2 = 0$

ve

$u_2 = v_2$

alınmalıdır. O halde,

$$C_2 = u_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

IV. $$3a_0C_3 + 2a_1C_2 + a_2C_1 + \mu C_0 = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}C_3 + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}C_0$$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $C_3 = \begin{pmatrix}u_3\\v_3\end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$u_0\begin{pmatrix}\mu\\\mu+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2u_3 + 2v_3\\2u_3 - 2v_3\end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$$\mu = -\mu - 1 \quad \text{yani} \quad \mu = -\frac{1}{2}$$

ve buradan da

$$2(u_3 - v_3) = \frac{u_0}{2} \tag{1.17}$$

alınmalıdır.

V. $$3a_0C_4 + 2a_1C_3 + a_2C_2 + (\mu-1)C_1 = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}C_4 + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}C_1$$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $C_4 = \begin{pmatrix}u_4\\v_4\end{pmatrix}$ olmak üzere

$$u_1\begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2u_4 + 2v_4\\2u_4 - 2v_4\end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği, $-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ olamayacağından, $u_1 = 0$ alınmalıdır. Dolayısıyla, $C_1 = 0$ bulunur. Ayrıca, $u_4 = v_4$ olmalıdır. O halde,

$$C_4 = u_4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

VI. $$3a_0C_5 + 2a_1C_4 + a_2C_3 + (\mu-2)C_2 = \begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}C_5 + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}C_2$$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $C_5 = \begin{pmatrix}u_5\\v_5\end{pmatrix}$ olmak üzere

$$u_2\begin{pmatrix} -5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_5 + 2v_5 \\ 2u_5 - 2v_5 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği, $-\frac{5}{2} = \frac{3}{2}$ olamayacağından, $u_2 = 0$ alınmalıdır. Dolayısıyla, $C_2 = 0$ bulunur. Ayrıca, $u_5 = v_5$ olmalıdır. O halde,

$$C_5 = u_5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

VII. $3a_0C_6 + 2a_1C_5 + a_2C_4 + (\mu - 3)C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}C_6 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}C_3$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $C_6 = \begin{pmatrix} u_6 \\ v_6 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{2}u_3 \\ -\frac{5}{2}v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_6 + 2v_6 \\ 2u_6 - 2v_6 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$$-\frac{7}{2}u_3 = \frac{5}{2}v_3 \quad \text{yani} \quad u_3 = -\frac{5}{7}v_3$$

alınmalıdır. (1.17) eşitliği kullanılırsa

$$v_3 = -\frac{7u_0}{48}$$

ve

$$u_3 = -\frac{5}{7}v_3 = \frac{5u_0}{48}$$

olmak üzere

$$C_3 = u_0\begin{pmatrix} 5/48 \\ -7/48 \end{pmatrix}.$$

Bu şekilde hesaplamalara devam edilerek $a_0 = \frac{2}{3}$ seçimiyle (1.13) denklem sistemi için asimptotik çözüm

$$X_2 = u_0 e^{\frac{2}{3}t^3} t^{-\frac{1}{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/48 \\ -7/48 \end{pmatrix} t^{-3} + \ldots \right]$$

bulunur. Bu çözüm, (1.11) eşitliği kullanılarak z değişkeni cinsinden

$$X_2 = u_0 e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-\frac{1}{4}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/48 \\ -7/48 \end{pmatrix} z^{-\frac{3}{2}} + \ldots \right]$$

şeklinde ifade edilir. O halde,

$$y'' - zy = 0$$

denkleminin ikinci asimptotik çözümü

$$y_2 = u_0 e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{5}{48} z^{-\frac{3}{2}} + \ldots \right)$$

olarak elde edilir. Bu durumda y_1 ve y_2 lineer bağımsız çözümler olmak üzere denklemin en genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 p_0 e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{5}{48} z^{-\frac{3}{2}} + \ldots \right) + c_2 u_0 e^{\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{5}{48} z^{-\frac{3}{2}} + \ldots \right) \end{aligned}$$

şeklindedir (c_1 ve c_2 keyfi sabitler).

Bu asimptotik özellikler fizik problemlerinde büyük öneme sahiptir. Çoğu örneklerde çözümde aranan şart $z \to \infty$ için çözümün sıfıra yakınsamasıdır. Bu denklemde ise $z \to \infty$ için en genel çözüm $u_0 = 0$ olduğu takdirde sıfıra yakınsayacaktır.

Asimptotik çözümler (1.2)' deki A matrisinin keyfi bir parametre içermesi durumunda da mevcuttur.

1.2.3. $\mathbf{X' = \left(\mu \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z) \mu^{-k} \right) X}$ Formundaki Denklem Sisteminin Asimptotik Çözümü

Bu bölümde

$$X' = A(z, \mu) X \tag{1.18}$$

formundaki sistemlerin seriler yardımıyla asimptotik çözümü incelenecektir. Burada A matrisi, z bağımsız değişkenine ve μ parametresine bağlıdır.

Genellikle uygulamalarda; A matrisi, μ parametresine bağlı

$$A(z,\mu)=\mu\sum_{k=0}^{\infty}A_k(z)\mu^{-k} \tag{1.19}$$

şeklinde bir asimptotik açılıma sahiptir. Burada matris katsayıları z' nin fonksiyonlarıdır.

Şimdi, ilk olarak en basit durum incelensin; yani

$$A(z,\mu)=\mu A_0(z)$$

alınsın ve

$$A_0(z)=\begin{pmatrix} a_1(z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n(z) \end{pmatrix}$$

şeklinde diyagonal bir matris olsun. Bu durumda,

$$X'=\mu A_0(z)X$$

sistemi

$$x_i'=\mu a_i(z)x_i, \qquad i=1,2,3,\dots$$

şeklinde n tane birinci mertebe denklemden oluşan sisteme dönüşür. Bu denklemlerin her biri, c_i' ler keyfi sabitler olmak üzere

$$x_i=c_i\exp(\mu\int a_i(z)dz)$$

çözümlerine sahiptir.

Daha genel olarak, $A_0(z)$' nin diyagonal olmayan; fakat z'ye bağlı farklı özdeğerlere sahip olması durumunda (1.18) sistemi ele alınsın. $T^{-1}(z)A_0(z)T(z)$ diyagonal olacak şekilde bir nonsingüler T(z) matrisinin mevcut olması durumunda

$$X:=TY$$

olarak tanımlanırsa

$$T'Y+TY'=(\mu\sum_{k=0}^{\infty}A_k\mu^{-k})TY$$

$$=\mu A_0TY+A_1TY+(\mu\sum_{k=2}^{\infty}A_k\mu^{-k})TY$$

ve buradan da

$$TY' = [\mu A_0 T + (A_1 T - T') + (\mu \sum_{k=2}^{\infty} A_k \mu^{-k})T]Y$$

ise

$$Y' = [\mu T^{-1} A_0 T + (T^{-1} A_1 T - T^{-1} T') + \mu \sum_{k=2}^{\infty} T^{-1} A_k T \mu^{-k}]Y \tag{1.20}$$

bulunur. Bu sistemdeki ilk terim diyagonaldir ve A matrisinin açılımı (1.19)' daki gibidir. Dolayısıyla söz konusu T matrisinin mevcut olması durumunda (1.20) sistemi (1.18) formundadır. Buna göre, önceki bölümlere benzer olarak

$$X = \exp(\mu \int a_1(z)dz) \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) \mu^{-k} \tag{1.21}$$

şeklinde çözüm araştırılır. Burada $V_k(z)$' ler bilinmeyen vektör katsayılarıdır.

(1.21) değeri ve türevi (1.20)' de yerine yazılırsa gerekli işlemler ve eşleştirmeler sonucunda aşağıdaki rekürans formülleri elde edilir:

$$\begin{aligned} &(A_0 - a_1 I)V_0 = 0, \\ &(A_0 - a_1 I)V_k = V'_{k-1} - \sum_{n=0}^{k-1} A_{k-n} V_n, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.22}$$

Determinant sıfır olduğundan birinci denklem sıfırdan farklı bir çözüme sahiptir. İkinci denklemde de determinant sıfırdır. Fakat V_0 henüz tek türlü belirli değildir. İkinci denklem için uyumluluk koşulunun sağlanması V_0' ı tek türlü belirler. Bu aşamada aynı zamanda V_1 vektörü, tek türlü olmamakla birlikte, belirlenmiş olur. Benzer şekilde bir sonraki denklemin uyumluluk koşulunun sağlanması V_1 vektörünü tek türlü belirler. V_2, V_3, …, V_k, … vektörleri aynı yolla hesaplanır. $A_0(z)$' nin diğer bütün özdeğerleri kullanılarak n tane benzer seri çözümleri elde edilebilir.

Örnek 1.3:

$$y'' + [\lambda - q(z)]y = 0$$

denkleminin $\lambda \to \infty$ için asimptotik çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Hem z bağımsız değişkenine hem de λ parametresine bağlı olan bu denklemi sisteme dönüştürmek için

$$\lambda = \mu^2,$$
$$y = x_1,$$
$$y' = \mu x_2$$

alınsın. Bu durumda

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ \dfrac{1}{\mu}y' \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$X'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu x_2 \\ \dfrac{1}{\mu}\left[q(z)-\mu^2\right]x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \dfrac{1}{\mu}\left[q(z)-\mu^2\right] & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

yani

$$X'=\mu\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{\mu^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix}\right\}X \tag{1.23}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada,

$$A_0(z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2(z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.18) formunda bulunan (1.23) sisteminde A_0 matrisi $\lambda_1=i$ ve $\lambda_2=-i$ olmak üzere iki farklı özdeğere sahiptir; ancak diyagonal değildir. İşleme devam etmek için A_0 matrisi diyagonalleştirilmelidir. Bunun için

$$T=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{i}{2} \\ -\dfrac{i}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nonsingüler bir matris ve $Y=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ yeni bir bağımsız değişken olmak üzere ,

$$X:=TY \tag{1.24}$$

tanımlansın. (1.24) değeri ve türevi, (1.23) sisteminde yerine yazılırsa

$$T'Y+TY'=\left\{\mu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix}\right\}TY$$

ve buradan da

$$Y'=\left\{\mu T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}T+\frac{1}{\mu}T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q(z) & 0 \end{pmatrix}T\right\}Y$$

bulunur. T ve T^{-1} değerleri bu sistemde yerine yazıldığında ise

$$Y' = \mu\left\{\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu^2}\begin{pmatrix} iq/2 & q/2 \\ q/2 & -iq/2 \end{pmatrix}\right\}Y \qquad (1.25)$$

olacak şekilde baş matrisi diyagonal olan yeni bir denklem sistemi elde edilir $\left(T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\right)$. Burada

$$B_0(z) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{ ve } B_2(z) = \begin{pmatrix} iq/2 & q/2 \\ q/2 & -iq/2 \end{pmatrix}.$$

O halde, $B_0(z) = \begin{pmatrix} b_1(z) & 0 \\ 0 & b_2(z) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$Y_i = e^{\mu\int b_i(z)dz}\sum_{k=0}^{\infty} V_k(z)\mu^{-k}$$

formunda çözüm araştırılır $(i = 1, 2)$.

İlk olarak, $b_1(z) = -i$ için

$$Y_1 = e^{-i\mu z}\sum_{k=0}^{\infty} V_k(z)\mu^{-k}$$

bulunur. Bu çözüm ve türevi (1.25)' te yerine yazılırsa gerekli işlemler ve eşleştirmeler sonucunda aşağıdaki reküranş formülleri elde edilir:

$$\begin{aligned} (B_0 + iI)V_0 &= 0 \\ (B_0 + iI)V_1 &= V_0' \\ (B_0 + iI)V_k &= V_{k-1}' - B_2V_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots. \end{aligned} \qquad (1.26)$$

Şimdi (1.26) denklemleri sırasıyla kullanılarak $V_k(z)$' ler belirlenebilir.

I. $(B_0 + iI)V_0 = 0$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $V_0 = \begin{pmatrix} p_0(z) \\ q_0(z) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\left\{\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} p_0(z) \\ q_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2iq_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği,

$$q_0(z) = 0$$

alınmalıdır. O halde, $p_0(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V_0 = \begin{pmatrix} p_0(z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II. $(B_0 + iI)V_1 = V_0'$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $V_1 = \begin{pmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2iq_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0'(z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği,

$$p_0'(z) = 0 \quad \text{ve} \quad q_1(z) = 0$$

alınmalıdır. Açıkça $p_0(z)$ sabit bir sayı olarak bulunur. Örneğin, $p_0(z) = a$ olsun (a keyfi sabit). O halde $p_1(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } V_1 = \begin{pmatrix} p_1(z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

III. $(B_0 + iI)V_2 = V_1' - B_2 V_0$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $V_2 = \begin{pmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1'(z) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iq/2 & q/2 \\ q/2 & -iq/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2iq_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1'(z) - \dfrac{iaq}{2} \\ -\dfrac{aq}{2} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği,

$$p_1'(z)=\frac{iaq}{2} \quad \text{ve} \quad q_2(z)=\frac{iaq}{4}$$

alınmalıdır. Buradan

$$p_1(z)=\frac{ia}{2}\int qdz$$

olarak bulunur. O halde, $p_2(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V_1=\begin{pmatrix}\frac{ia}{2}\int qdz\\ 0\end{pmatrix} \text{ ve } V_2=\begin{pmatrix}p_2(z)\\ iaq/4\end{pmatrix}.$$

IV. $(B_0+iI)V_3=V_2'-B_2V_1$

denkleminde bilinenler yerine yazılırsa $V_3=\begin{pmatrix}p_3(z)\\ q_3(z)\end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_3(z)\\ q_3(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_2'(z)\\ \frac{ia}{4}q'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}iq/2 & q/2\\ q/2 & -iq/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{ia}{2}\int qdz\\ 0\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix}0\\ 2iq_3(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_2'(z)+\frac{aq}{4}\int qdz\\ \frac{iaq'}{4}-\frac{iaq}{4}\int qdz\end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği,

$$p_2'(z)=-\frac{aq}{4}\int qdz$$

eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$p_2(z)=-\frac{a}{4}\int\left[q\int qdz\right]dz \tag{1.27}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int\left[q\int qdz\right]dz=\frac{1}{2}\left(\int qdz\right)^2.$$

Bu son eşitlik (1.27)' de kullanılırsa

$$p_2(z)=-\frac{a}{8}\left(\int qdz\right)^2.$$

O halde,

$$V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{8}\left(\int qdz\right)^2 \\ \frac{iaq}{4} \end{pmatrix}.$$

Bu şekilde hesaplamalara devam edilerek $b_1(z) = -i$ için (1.25) denklem sisteminin asimptotik çözümü

$$Y_1 = ae^{-i\mu z}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\int qdz \\ 0 \end{pmatrix}\mu^{-1} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\left(\int qdz\right)^2 \\ \frac{iq}{4} \end{pmatrix}\mu^{-2} + \dots\right]$$

bulunur. O halde (1.24)' ten

$$y_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{i}{2}\alpha_2$$

$$= ae^{-i\sqrt{\lambda}z}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{i}{4}\int qdz\right)\lambda^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{16}\left(\int qdz\right)^2 + \frac{q}{8}\right)\lambda^{-1} + \dots\right\}$$

elde edilir.

Diferensiyel denklem sadece reel terimler içerdiğinden $b_2(z) = i$ için y_2 çözümü y_1' in eşleniği alınarak kolayca belirlenir:

$$y_2 = be^{i\sqrt{\lambda}z}\left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{i}{4}\int qdz\right)\lambda^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{16}\left(\int qdz\right)^2 + \frac{q}{8}\right)\lambda^{-1} + \dots\right\}.$$

Sonuç olarak;

$$y'' + [\lambda - q(z)]y = 0$$

denkleminin $\lambda \to \infty$ için en genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 ae^{-i\sqrt{\lambda}z}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{i}{4}\int qdz\right)\lambda^{-\frac{1}{2}} + \dots\right\} + c_2 be^{i\sqrt{\lambda}z}\left\{\frac{1}{2} - \left(\frac{i}{4}\int qdz\right)\lambda^{-\frac{1}{2}} + \dots\right\}$$

formundadır. Dikkat edilirse, $\lambda \to \infty$ için genel çözüm yakınsaktır.

1.3. Çözümler İçin Asimptotik Formüller ve Liouville Dönüşümü

Bazı problemler için seri çözüm yöntemi ile hesaplamalar oldukça uzun sürmektedir. Ayrıca bu yöntem her probleme uygulanamamaktadır. Örneğin; ikinci bölümde asimptotik çözümü verilen

$$y''(x)+\left\{k+(x+1)^{-d}\right\}y(x)=0$$

denkleminde $k \neq 0$ ve $d > 0$ herhangi reel sabitler olduğundan bu denklemin seriler yardımıyla çözümü mümkün değildir. Böyle durumlarda asimptotik çözümlerin bulunabilmesi için birtakım teorik yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu bölümde yine ikinci mertebe denklemler ele alınacak ve bu denklemlerin asimptotik çözümü için gerekli teorik bilgiler ile Liouville dönüşümüne yer verilecektir.

1.3.1. Çözümler İçin Asimptotik Formüller

Bu bölümde,

$$r(x) \to 0 \quad (x \to 0) \tag{1.28}$$

veya

$$\int_0^\infty |r(x)|\,dx < \infty \tag{1.29}$$

özelliklerinden birinin sağlanması durumunda

$$y''(x)+\left\{q(x)+r(x)\right\}y(x)=0\,, \quad 0 \le x < \infty \tag{1.30}$$

$$y''(x)+q(x)y(x)=0\,, \quad 0 \le x < \infty \tag{1.31}$$

şeklindeki iki denklemin çözümlerinin sınırlılık gibi bazı özellikleri karşılaştırılmıştır. Daha genel olarak "(1.30)' un çözümleri bir anlamda (1.31)' in çözümlerine nasıl bir benzerlik gösterir?" sorusunun cevabı araştırılmıştır. Örneğin;

$$q(x)=-\,\alpha^2 \quad (\alpha \neq 0 \text{ sabit})$$

olması durumunda (1.31) denklemi

$$y''(x)-\alpha^2 y(x)=0$$

denklemine dönüşür ve bu denklemin çözümleri ise bilindiği üzere $y_1=e^{\alpha x}$ ve $y_2=e^{-\alpha x}$' tir. Öte yandan r(x) fonksiyonunun (1.28) özelliğini sağlaması durumunda (1.30) denkleminin $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri $x \to \infty$ için

$$\frac{\Psi_1'(x)}{\Psi_1(x)} \to \alpha\,, \ \frac{\Psi_2'(x)}{\Psi_2(x)} \to -\alpha$$

veya integral alarak

$$\log\Psi_1(x) \sim \alpha x\ ,\ \log\Psi_2(x) \sim -\alpha x \tag{1.32}$$

ve ayrıca r(x) fonksiyonunun (1.29) özelliğini sağlaması durumunda ise $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri $x \to \infty$ için

$$\Psi_1(x) \sim e^{\alpha x}\ ,\ \Psi_2(x) \sim e^{-\alpha x} \tag{1.33}$$

şeklindedir [6]. Ancak (1.32) ve (1.33) birbirine denk değildir. Bununla birlikte, örnekten de görüldüğü üzere r(x)' in (1.29) özelliğini sağlaması durumunda (1.30) ve (1.31), aynı asimptotik çözüme sahiptir. Buradan şu sonuca varılır: (1.30)' un çözümlerinin (1.31)' in çözümlerini asimptotik anlamda tam olarak temsil etmesi r(x) fonksiyonunun sağlayacağı özelliklere bağlıdır.

Şimdi bazı temel özellikler ve teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Özellik 1.1: (1.31) denkleminin $W(\Phi_1,\Phi_2)(x)=1 \quad (x \in [0,\infty))$ özelliğini sağlayan $\Phi_1(x)$ ve $\Phi_2(x)$ çözümleri mevcuttur. Burada W(x), Wronskian fonksiyonunu göstermektedir.

Özellik 1.2: (1.31) denkleminin $W(\Phi_1,\Phi_2)(x)=1 \quad (x \in [0,\infty))$ özelliğini sağlayan $\Phi_1(x)$ ve $\Phi_2(x)$ çözümleri için (1.30) denkleminin herhangi bir $\Psi(x)$ çözümü, c_1 ve c_2 tek türlü belirlenen sabitler olmak üzere

$$\Psi(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + \int_a^x \{\Phi_1(x)\Phi_2(t) - \Phi_2(x)\Phi_1(t)\}\, r(t)\Psi(t)dt \tag{1.34}$$

eşitliğini sağlar. Burada a, $[0,\infty)$ aralığında herhangi bir noktadır. Diğer yandan, c_1 ve c_2 herhangi sabitler olmak üzere (1.30) denkleminin (1.34) eşitliğini sağlayan bir tek $\Psi(x)$ çözümü vardır.

Özellik 1.3 [6]: (1.30) denklemi bir $\Psi_1(x)$ çözümüne sahip olsun öyleki herhangi bir b>0 için $\Psi_1(x)$, $[b,\infty)$ aralığında sıfır yerine sahip olmasın ve

$$\int_b^\infty \{\Psi_1(t)\}^{-2}\, dt \tag{1.35}$$

yakınsak olsun. Bu durumda, $[b,\infty)$ aralığında (1.30) denkleminin ikinci lineer bağımsız $\Psi_2(x)$ çözümü

$$\Psi_2(x) = \Psi_1(x)\int_x^{\infty}\{\Psi_1(t)\}^{-2}\,dt \tag{1.36}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.1 [Gronwall Eşitsizliği]: f(x) ve g(x) fonksiyonları [a,b] aralığında reel değerli, sürekli ve non-negatif olsun. $c \geq 0$ bir sabit olmak üzere [a,b] aralığında

$$f(x) \leq c + \int_a^x f(t)g(t)dt \tag{1.37}$$

eşitsizliğinin mevcut olması durumunda aynı aralık üzerinde

$$f(x) \leq c\exp\{\int_a^x g(t)dt\} \tag{1.38}$$

sağlanır.

Teorem 1.2 [6]: (1.31) denkleminin bütün çözümleri $[0,\infty)$ aralığında sınırlı olsun ve (1.29) özelliği sağlansın. Bu durumda (1.30) denkleminin bütün çözümleri aynı aralıkta sınırlıdır.

Teorem 1.2, r(x) fonksiyonunun (1.29) özelliği yerine (1.28)' i sağlaması halinde beklenen sonucu vermez.

Örnek 1.4 [6]: g(x) fonksiyonu, $[0,\infty)$ aralığında sürekli türeve sahip ve

$$\Psi(x) = \left[\exp\left\{\int_0^x g(t)\cos t dt\right\}\right]\cos x$$

olsun. Bu durumda $\Psi(x)$ fonksiyonunun

$$r(x) = 3g(x)\sin x - g'(x)\cos x - g^2(x)\cos^2(x)$$

olmak üzere

$$y''(x) + \{1 + r(x)\}\,y(x) = 0$$

denklemi için bir çözüm olduğu, $\Psi'(x)$ ve $\Psi''(x)$ türevleri hesaplanıp denklemde yerine yazılarak, kolayca görülür. Eğer

$$g(x) = \frac{\cos x}{x+1}$$

alınırsa $r(x) \to 0 \ \ (x \to \infty)$ sağlanır. Ayrıca

$$y''(x) + y(x) = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri bilindiği üzere $\cos x$ ve $\sin x$ olup, bu çözümler sınırlıdır. Ancak

$$\int_0^x g(t)\cos t dt \to \infty \quad (x \to \infty)$$

olduğundan $\Psi(x)$ çözümü sınırlı değildir.

Tanım 1.3: $[0,\infty)$ aralığında sürekli bir f(x) fonksiyonu, eğer

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx$$

integrali yakınsak olacak şekilde mevcutsa bu f(x) fonksiyonuna $L^2(0,\infty)$' dadır denir.

Teorem 1.3 [6]: (1.31) denkleminin bütün çözümleri $L^2(0,\infty)$' a ait olsun ve r(x), $[0,\infty)$' da sınırlı olsun. Bu durumda (1.30) denkleminin bütün çözümleri de $L^2(0,\infty)$' a aittir.

Sonuç 1.1 [6]: λ kompleks bir parametre ve $\lambda = \lambda_0$ için

$$y''(x) + \{\lambda - Q(x)\} y(x) = 0$$

denkleminin bütün çözümleri $L^2(0,\infty)$' a ait olsun. Bu durumda söz konusu denklemin bütün çözümleri her λ değeri için $L^2(0,\infty)$' a aittir.

Aşağıda verilen teoremler, (1.30) ve (1.31) denklemlerindeki q(x) yerine reel bir k sabiti alınarak oluşturulan

$$y''(x) + \{k + r(x)\} y(x) = 0 \tag{1.39}$$

ve

$$y''(x) + ky(x) = 0 \tag{1.40}$$

denklemlerinin asimptotik çözümleriyle ilgilidir.

Teorem 1.4 [6]: $k = -\alpha^2$, $\alpha > 0$ olsun ve (1.29) sağlansın. Bu durumda (1.39) denkleminin $x \to \infty$ için $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri

$$\Psi_1(x) \sim e^{\alpha x} \quad , \quad \Psi_1'(x) \sim \alpha e^{\alpha x} \tag{1.41}$$

ve

$$\Psi_2(x) \sim e^{-\alpha x} \quad , \quad \Psi_2'(x) \sim -\alpha e^{-\alpha x} \tag{1.42}$$

olacak şekilde mevcuttur.

Teorem 1.5 [6] (1.39) denkleminde $k = 0$ olsun ve

$$\int_0^\infty x|r(x)| dx < \infty \tag{1.43}$$

sağlansın. Bu durumda (1.39)' un $x \to \infty$ için $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri

$$\Psi_1(x) \sim x \quad , \quad \Psi_1'(x) \sim 1 \tag{1.44}$$

ve

$$\Psi_2(x) \sim 1 \quad , \quad \Psi_2'(x) \sim o(x^{-1}) \tag{1.45}$$

olacak şekilde mevcuttur.

Teorem 1.6 [6]: $k = \alpha^2$, $\alpha>0$ olsun ve (1.29) sağlansın. Bu durumda (1.39)' un $x \to \infty$ için $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri

$$\Psi_1(x) \sim e^{i\alpha x} \quad , \quad \Psi_1'(x) \sim i\alpha e^{i\alpha x} \tag{1.46}$$

ve

$$\Psi_1(x) \sim e^{-i\alpha x} \quad , \quad \Psi_1'(x) \sim -\, i\alpha e^{-i\alpha x} \tag{1.47}$$

olacak şekilde mevcuttur.

Teorem 1.7 [6]: $k = -\,\alpha^2$, $\alpha>0$ olsun. r(x) reel değerli olsun ve (1.28) sağlansın. Bu durumda (1.39)' un $x \to \infty$ için $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri

$$\frac{\Psi_1'(x)}{\Psi_1(x)} \to \alpha \quad \text{ve} \quad \frac{\Psi_2'(x)}{\Psi_2(x)} \to -\alpha$$

olacak şekilde mevcuttur.

1.3.2. Liouville Dönüşümü

Bu bölümde

$$\{P(x)y'(x)\}' + \rho(x)Q(x)y(x) = 0 \tag{1.48}$$

denklemini daha basit bir denkleme dönüştüren ($P(x) = 1,\ \rho(x) = \pm 1$), Liouville dönüşümü olarak bilinen dönüşüme yer verilecektir. Bu dönüşüm yardımıyla daha karmaşık yapıdaki denklemlerin, basit forma dönüştürülerek, verilen teoremler yardımıyla asimptotik çözümleri incelenecektir.

Dönüşümün uygulanabilmesi için P(x) ve $\rho(x)$ belirli koşulları sağlamalıdır. Şöyleki; bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında P(x) ve $\rho(x)$ reel değerli, $P(x) > 0,\ \rho(x) \neq 0$ ve ayrıca $P''(x)$ ve $\rho''(x)$ mevcut ve sürekli olmalıdır.

$a \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$t = \int_a^x f(u)du \quad , \quad y(x) = g(x)z(t) \tag{1.49}$$

dönüşümü tanımlanır. Burada f(x) ve g(x) sonradan belirlenecek uygun fonksiyonlardır. t değişkenine göre alınan türev “$\cdot$ ” ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}
(Py')' + \rho Qy &= Py'' + P'y' + \rho Qy \\
&= P(g''z + g'\dot{z}f + g'\dot{z}f + g\ddot{z}f^2 + g\dot{z}f') + P'(g'z + g\dot{z}f) + \rho Qgz \\
&= (Pgf^2)\ddot{z} + (P'gf + Pg'f + Pg'f + Pgf')\dot{z} + (P'g' + Pg'' + \rho Qg)z \\
&= (Pgf^2)\ddot{z} + \{fg'P + (fgP)'\}\,\dot{z} + \{(Pg')' + \rho Qg\}\,z
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Eğer $\dot{z}$ terimi mevcut değilse

$$fg'P = -(fgP)'$$

alınmalıdır. Bu son eşitliğin her iki tarafı “fgP” ile bölünürse

$$\frac{g'}{g} = -\frac{(fgP)'}{fgP}$$

bulunur. İntegral alınır ve integral sabiti sıfır seçilirse

$$\ln g = -\ln fgP$$

veya

$$fg^2P = 1 \tag{1.51}$$

elde edilir. Ayrıca

$$f^2P := |\rho| \tag{1.52}$$

tanımlanırsa (1.50) aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
(Py')' + \rho Qy &= g|\rho|\ddot{z} + \{(g'P)' + \rho Qg\}\,z \\
&= g|\rho|[\ddot{z} + \{\pm Q + (g'P)'/g|\rho|\}\,z]
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Burada, $\pm = \mathrm{sgn}(\rho(x))$'tir. (1.52) eşitliği kullanılarak,

$$f(x) = \{|\rho(x)|/P(x)\}^{1/2} \tag{1.54}$$

bulunur. (1.51) ve (1.54)’ den de

$$g(x) = \{|\rho(x)|P(x)\}^{-1/4} \tag{1.55}$$

Böylece f(x) ve g(x) tanımlanmış olur. Bu şekildeki f(x) ve g(x) için (1.49), Liouville dönüşümü olarak bilinir. (1.53) kullanılarak (1.48)’ e karşılık gelen z(t) için denklem

$$\ddot{z}(t)+\{\pm Q_1(t)+R(t)\}\,z(t)=0 \tag{1.56}$$

olur. Burada,

$$Q_1(t)=Q(x)$$

ve

$$R(t)=P^{1/4}(x)\left|\rho(x)\right|^{-3/4}\frac{d}{dx}P(x)\frac{d}{dx}\left\{P(x)\left|\rho(x)\right|\right\}^{-1/4} \tag{1.57}.$$

Özel olarak, $P(x)=1$ olduğunda

$$R(t)=\left|\rho(x)\right|^{-3/4}\left[P'(x)g'(x)+P(x)g''(x)\right]=\left|\rho(x)\right|^{-3/4}g''(x) \tag{1.58}.$$

(1.55)'ten

$$g''(x)=\frac{5}{16}\left|\rho(x)\right|^{-9/4}\left|\rho'(x)\right|^{2}-\frac{1}{4}\left|\rho(x)\right|^{-5/4}\left|\rho''(x)\right|$$

bulunur ve bu değer (1.58)' de yerine yazılırsa

$$R(t)=\left(\frac{5}{16}\frac{\{\rho'(x)\}^{2}}{\rho^{3}(x)}-\frac{1}{4}\frac{\rho''(x)}{\rho^{2}(x)}\right)\operatorname{sgn}\rho(x).$$

1.3.3. Liouville Dönüşümünün Uygulaması

Bu bölümde, $q(x)\to\infty$ veya $q(x)\to-\infty \quad (x\to\infty)$ olması durumunda

$$y''(x)+q(x)y(x)=0 \quad (0\le x<\infty) \tag{1.59}$$

denklemi için Liouville dönüşümü ve mevcut teoremler kullanılarak bazı asimptotik çözümler verilecektir.

Teorem 1.8 [6]: $[0,\infty)$ aralığında q(x) reel değerli, $q(x)>0$, $q''(x)$ mevcut ve sürekli; ayrıca

i) $\int_0^\infty q^{1/2}(x)dx$ ıraksak,

ii) $\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^{2}}{q^{5/2}(x)}dx$ ve $\int_0^\infty \frac{\left|q''(x)\right|}{q^{3/2}(x)}dx$ yakınsak

alınsın. Bu durumda (1.59) denkleminin $\Psi_1(x)$ çözümü

$$q^{1/4}(x)\Psi_1(x) \sim \exp\left\{i\int_0^x q^{1/2}(u)du\right\}$$

ve

$$\{q^{1/4}(x)\Psi_1(x)\}' \sim iq^{1/2}(x)\exp\left\{i\int_0^x q^{1/2}(u)du\right\}$$

şeklindedir$\left(x \to \infty\right)$. $\Psi_2(x)$ için ise, i yerine –i alınır.

İspat: (1.48) denkleminde,

$$P(x) = 1,\ \rho(x) = q(x),\ Q(x) = 1$$

alınarak (1.59) denklemi elde edilir. (1.49), (1.54) ve (1.55)' ten Liouville dönüşümü

$$t = \int_0^x q^{1/2}(u)du \quad , \quad z(t) = q^{1/4}(x)y(x) \tag{1.60}$$

olur ve buradan

$$\ddot{z}(t) + \left\{1 + R(t)\right\} z(t) = 0 \tag{1.61}$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$R(t) = \frac{5}{16}\frac{\{q'(x)\}^2}{q^3(x)} - \frac{1}{4}\frac{q''(x)}{q^2(x)}.$$

Teoremde verilen (i) koşulu x aralığını ($x \in [0,\infty)$), t aralığına ($t \in [0,\infty)$) dönüştürür. (ii) koşulu ise

$$\int_0^\infty |R(t)|dt < \infty$$

olmasını sağlar. Şöyle ki;

$$\frac{\{q'(x)\}^2}{q^3(x)} \le \frac{\{q'(x)\}^2}{q^{5/2}(x)} \quad \text{ve} \quad \frac{|q''(x)|}{q^2(x)} \le \frac{|q''(x)|}{q^{3/2}(x)}$$

eşitsizlikleri kullanılarak (ii)'den

$$\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{q^3(x)}dx \le \int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{q^{5/2}(x)}dx < \infty$$

ve

$$\int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{q^2(x)}dx \le \int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{q^{3/2}(x)}dx < \infty$$

bulunur. O halde

$$\int_0^{\infty}\left|R(t)\right|dt=\frac{5}{16}\int_0^{\infty}\frac{\{q'(x)\}^2}{q^3(x)}dx-\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\left|q''(x)\right|}{q^2(x)}dx<\infty .$$

Böylece Teorem 1.6 kullanılırsa, (1.61) denkleminin $z_1(t)$ ve $z_2(t)$ çözümleri

$$z_1(t)\sim e^{it}\quad ,\quad \dot{z}_1(t)\sim ie^{it}$$

ve (1.62)

$$z_2(t)\sim e^{-it}\quad ,\quad \dot{z}_2(t)\sim -\,ie^{-it}$$

olacak şekilde mevcuttur $(x\to\infty)$. (1.62)' de (1.60) değerleri yerine yazılırsa $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$, (1.59) denkleminin asimptotik çözümleri olmak üzere $\Psi_1(x)$ çözümü

$$q^{1/4}(x)\Psi_1(x)\sim \exp\left\{i\int_0^x q^{1/2}(u)du\right\},$$

$$\{q^{1/4}(x)\Psi_1(x)\}'\sim iq^{1/2}(x)\exp\left\{i\int_0^x q^{1/2}(u)du\right\}$$

olacak şekilde mevcuttur ve $\Psi_2(x)$, i yerine –i yazılarak elde edilir.

Teoremin uygulaması olarak aşağıdaki örnekler incelensin:

Örnek 1.5 : $a>0,\ b>0$ ve $c>-2$ olmak üzere

$$q(x):=a(x+b)^c$$

alındığında (1.59) denklemi

$$y''(x)+a(x+b)^c y(x)=0 \tag{1.63}$$

denklemine dönüşür. $[0,\infty)$ aralığında q(x) reel değerli, $q(x)=a(x+b)^c>0$, $q''(x)$ mevcut ve süreklidir. Ayrıca (1.63) denklemi Teorem 1.8' de verilen (i) ve (ii) koşullarını sağlar:

i) $$\int_0^{\infty}q^{1/2}(x)dx=\int_0^{\infty}\left\{a\left(x+b\right)^c\right\}^{1/2}dx=2a^{1/2}\left.\frac{(x+b)^{\frac{c+2}{2}}}{c+2}\right|_0^{\infty}\to\infty\ ,$$

ii) $q(x)=a(x+b)^c$ ise $q'(x)=ac(x+b)^{c-1}$ ve $q''(x)=ac(c-1)(x+b)^{c-2}$' dir. Bu durumda,

$$\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{q^{5/2}(x)}dx = \int_0^\infty \frac{\left[ac(x+b)^{c-1}\right]^2}{\left[a(x+b)^c\right]^{5/2}}dx = -2a^{-1/2}c^2 \left.\frac{(x+b)^{-\frac{c+2}{2}}}{c+2}\right|_0^\infty = \frac{2b^{-\frac{c+2}{2}}}{(c+2)} < \infty$$

ve

$$\int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{q^{3/2}(x)}dx = \int_0^\infty \frac{\left|ac(c-1)(x+b)^{c-2}\right|}{a^{3/2}(x+b)^{3c/2}}dx = -2a^{-\frac{1}{2}}|c(c-1)| \left.\frac{(x+b)^{-\frac{c+2}{2}}}{c+2}\right|_0^\infty = \frac{2a^{-\frac{1}{2}}|c(c-1)|}{(c+2)b^{\frac{c+2}{2}}} < \infty .$$

Buradan Teorem 1.8' de verilen şartların sadece $q(x) \to \pm\infty \quad (x \to \infty)$ olduğunda değil, $q(x) \to 0 \quad (x \to \infty)$ olduğunda da sağlanabileceği sonucu çıkarılır. O halde (1.63) denkleminin $\Psi_1(x)$ asimptotik çözümü

$$\Psi_1(x) \sim \left[a(x+b)^c\right]^{-1/4} \exp\left\{ i\int_0^x \left[a\left(u+b\right)^c\right]^{1/2} du \right\}$$

ve

$$\left\{\left[a(x+b)^c\right]^{1/4} \Psi_1(x)\right\}' \sim i\left[a(x+b)^c\right]^{1/2} \exp\left\{ i\int_0^x \left[a\left(u+b\right)^c\right]^{1/2} du \right\}$$

şeklindedir. $\Psi_2(x)$ çözümü ise, i yerine $-i$ alınarak elde edilir.

Örnek 1.6: Özel olarak, $a > 0$, $b > 0$ ve $0 < d < 2$ olmak üzere

$$y''(x) + a(x+b)^{-d} y(x) = 0 \tag{1.64}$$

denklemi göz önüne alınsın. Burada

$$q(x) := a(x+b)^{-d}$$

olarak tanımlansın. $[0,\infty)$ aralığında q(x) reel değerli, $q(x) > 0$, $q''(x)$ mevcut ve sürekli; ayrıca

i) $$\int_0^\infty q^{1/2}(x)dx = \int_0^\infty a^{1/2}(x+b)^{-d/2}dx = 2a^{1/2} \left.\frac{(x+b)^{\frac{2-d}{2}}}{2-d}\right|_0^\infty \to \infty ,$$

ii) $q(x) = a(x+b)^{-d}$ ise $q'(x) = -ad(x+b)^{-d-1}$ ve $q''(x) = ad(d+1)(x+b)^{-d-2}$' dir. Bu durumda,

$$\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{q^{5/2}(x)}dx = \int_0^\infty -\frac{\left\{ad(x+b)^{-d-1}\right\}^2}{\left\{a\left(x+b\right)^{-d}\right\}^{5/2}}dx = -2a^{-1/2}d^2 \left.\frac{(x+b)^{\frac{d-4}{2}}}{d-4}\right|_0^\infty = \frac{2d^2 b^{\frac{d-4}{2}}}{a^{1/2}(d-4)} < \infty$$

ve

$$\int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{q^{3/2}(x)}dx = \int_0^\infty \frac{ad(d+1)(x+b)^{-d-2}}{\left\{a\left(x+b\right)^{-d}\right\}^{3/2}}dx = 2a^{-1/2}d(d+1)\left.\frac{(x+b)^{\frac{d-2}{2}}}{d-2}\right|_0^\infty = -\frac{2d(d+1)b^{\frac{d-2}{2}}}{a^{1/2}(d-2)} < \infty .$$

Dolayısıyla Teorem 1.8' de verilen tüm koşullar sağlanmaktadır. O halde (1.64) denkleminin $\Psi_1(x)$ asimptotik çözümü

$$\Psi_1(x) \sim \left[a(x+b)^{-d}\right]^{-1/4} \exp\left\{ i\int_0^x \left[a\left(u+b\right)^{-d}\right]^{1/2} du \right\}$$

ve

$$\left\{\left[a(x+b)^{-d}\right]^{1/4} \Psi_1(x)\right\}' \sim i\left[a(x+b)^{-d}\right]^{1/2} \exp\left\{ i\int_0^x \left[a\left(u+b\right)^{-d}\right]^{1/2} du \right\}$$

şeklindedir. $\Psi_2(x)$ için ise i yerine, $-i$ alınır.

Aslında (1.64) denklemi $k = 0$ ve $r(x) = a(x+b)^{-d}$ olmak üzere (1.39) formundadır. Ancak,

$$\int_0^\infty x|r(x)|dx = \int_0^\infty ax(x+b)^{-d}dx$$

integralinde

$$x + b = u$$

değişken dönüştürmesi yapılırsa

$$\int_0^\infty ax(x+b)^{-d}dx = a\int_b^\infty \frac{u-b}{u^d}du = a\left[\frac{(x+b)^{2-d}}{2-d} - \frac{b(x+b)^{1-d}}{1-d}\right]_0^\infty \to \infty$$

elde edilir. Yani, (1.43) koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla Teorem 1.5 bu denkleme asimptotik çözüm bulmada kullanılamaz.

Sonuç 1.2: Teorem 1.8' de verilen koşullar altında $x \to \infty$ için (1.59) denkleminin bütün $\Psi(x)$ çözümleri

$$\Psi(x) = O\left\{q^{-1/4}(x)\right\}$$

özelliğini sağlar. Buradan ayrıca

$$\int_0^\infty q^{-1/2}(x)dx$$

integrali yakınsak ise (1.59)' un bütün çözümlerinin $L^2(0,\infty)$ olduğu sonucu çıkartılabilir. $a > 0,\ b > 0$ ve $c > 2$ olmak üzere $q(x) = a(x+b)^c$ buna örnek olarak verilebilir.

Teorem 1.9: $[0,\infty)$ aralığında q(x) reel değerli, $q(x) < 0,\ q''(x)$ mevcut ve sürekli olsun. Ayrıca Teorem 1.8'deki (i), (ii) koşulları sağlansın ve q(x) yerine $|q(x)|$ alınsın. Bu durumda (1.59) denkleminin $\Psi_1(x)$ çözümü $x \to \infty$ için

$$|q(x)|^{1/4}\,\Psi_1(x) \sim \exp\left\{\int_0^x |q(u)|^{1/2}\,du\right\}$$

ve

$$\{|q(x)|^{1/4}\,\Psi_1(x)\}' \sim |q(x)|^{1/2}\exp\left\{\int_0^x |q(u)|^{1/2}\,du\right\}$$

şeklindedir. $\Psi_2(x)$ için benzer asimptotik çözümler sağ tarafta $|q(x)|^{1/2}$ yerine $-|q(x)|^{1/2}$ alınarak elde edilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde bazı ikinci mertebe lineer diferensiyel denklemler için asimptotik çözümler elde edilmiştir. Bu çözümlerin elde edilişinde birinci bölümde verilen seri çözüm yöntemleri ve ilgili teorik yaklaşımlar ile Liouville dönüşümü kullanılmıştır.

İlk olarak seri çözüm yöntemi yardımıyla, uygulamada çok sık rastlanan Kummer konfluent hipergeometrik denklemini de içeren bazı ikinci mertebe denklemlerin asimptotik çözümleri incelenmiş ve bu çözümlerin yakınsaklık ve ıraksaklığı araştırılmıştır (Problem 2.1- 2.2). Yine aynı yöntemle denklemlerin birden fazla fiziksel parametre içermesi durumuna örnek oluşturmak amacıyla farklı bir problem incelenmiştir (Problem 2.3).

İkinci olarak seri yöntemiyle çözümün bulunamadığı bazı problemler için çeşitli dönüşümler ve ilgili teorik bilgiler yardımıyla asimptotik çözümler elde edilmiştir. Bu tür çözümlere örnek olarak özel durumu Airy denklemi olarak bilinen diferensiyel denklemin de aralarında bulunduğu denklemlerin çözümlerine yer verilmiştir(Problem 2.4-2.5-2.6).

Son olarak, potansiyel fonksiyonunun bazı koşulları sağlaması durumunda ikinci mertebe denklemler için asimptotik formüller geliştirilmiştir. Bu sonuçların uygulanabilirliğini vurgulamak amacıyla Bessel denkleminin asimptotik çözümü tekrar incelenmiş ve elde edilen asimptotik çözüm formunun Örnek 1.1' deki seri çözüm yöntemiyle bulunan çözümle uyumlu olduğu gözlenmiştir.

2.1. Bazı İkinci Mertebe Lineer Diferensiyel Denklemlerin Seriler Yardımıyla Asimptotik Çözümü

Bu bölümde ilk olarak Kummer konfluent hipergeometrik denkleminin asimptotik çözümü incelenecektir.

Problem 2.1 (*Kummer Konfluent Hipergeometrik Denklemi*):

Konfluent hipergeometrik denklemin çözümü, konfluent hipergeometrik fonksiyondur. Konfluent hipergeometrik fonksiyonlar fizik ve matematikte son derece önemli bir role sahiptir. Uygulama alanı olarak Coulombian alanında elektron hareketi için Schrödinger denkleminin çözümü, silindirik-parabolik aynalar için yük, bir paraboloid tarafından ses dalgalarının yansıma teorisi, sarp kıyılara karşı deniz dalga hareketinin tanımı, yüksek frekansta gaz çıkışı esnasında elektronların hız dağılım fonksiyonu ile ilgili diferensiyel denklemlerin çözümü gibi örnekler verilebilir. Pek çok özel fonksiyonlar konfluent hipergeometrik fonksiyonların veya onların kombinasyonlarının özel durumları olarak kabul edilir. Örneğin; Hankel fonksiyonları, Neumann fonksiyonu, Coulomb dalga fonksiyonları, Airy fonksiyonları, Lagrange-Abel fonksiyonu, logaritmik ve üstel integral fonksiyonları vs [9]. Konfluent hipergeometrik fonksiyon olarak bilinen dört fonksiyon vardır. Bunlar;

- *Kummer fonksiyonu*($_1F_1(a,c;x)$) *ve onunla ilişkili Tricomi fonksiyonu*($U(a,c;x)$),
- *Whittaker fonksiyonları*($M_{k,m}(x), W_{k,m}(x)$).

Şimdi aşağıda verilen Kummer konfluent hipergeometrik denkleminin seri yöntemiyle asimptotik çözümü araştırılsın:

$zy'' + (c - z)y' - ay = 0$.

O halde, ilk olarak bu denklem sisteme dönüştürülmelidir. Bunun için

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = y'$$

alınırsa

$$X' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix} \right\} X \tag{2.1}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix}.$$

Baş matris A_0' ın özdeğerleri, $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = 1$ olmak üzere birbirinden farklıdır. O halde, (1.2) formundaki (2.1) sistemi için

$$X = e^{\lambda z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

şeklinde çözüm araştırılır (λ ve μ sabitler, C_k vektörler). Bilinmeyenleri belirlemek için (1.4) denklemleri kullanılır.

İlk olarak $\lambda = 0$ için;

I. (1.4) sisteminin birinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_0 = 0$$

göz önüne alınsın. $C_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = 0$$

veya

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$q_0 = 0$$

alınmalıdır. O halde, p_0 keyfi olmak üzere

$$C_0 = p_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II. (1.4) sisteminin ikinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_1 = \mu C_0 - A_1 C_0$$

göz önüne alınsın. $C_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = p_0\left\{\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = p_0\begin{pmatrix} \mu \\ -a \end{pmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$\mu = -a$$

ve

$$q_1 = -p_0 a$$

alınmalıdır. O halde, $p_0\alpha_1 = p_1$ olmak üzere

$$C_1 = p_0\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -a \end{pmatrix}.$$

III. (1.4) sisteminin üçüncü denklemi

$$\left(A_0-\lambda I\right)C_2=(\mu-1)C_1-A_1C_1$$

göz önüne alınsın. $C_2=\begin{pmatrix}p_2\\q_2\end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2\\q_2\end{pmatrix}=p_0\left[\begin{pmatrix}-a-1&0\\0&-a-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\a&-c\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\alpha_1\\-a\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix}q_2\\q_2\end{pmatrix}=p_0\begin{bmatrix}(-a-1)\alpha_1\\-a\alpha_1+(-a)(-a-1+c)\end{bmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$(-a-1)\alpha_1=-a\alpha_1+(-a)(-a-1+c)$$

veya

$$\alpha_1=-a(a-c+1)$$

ve buradan

$$q_2=p_0a\left(a+1\right)\left(a-c+1\right)$$

alınmalıdır. O halde, $p_0\alpha_2=p_2$ olmak üzere

$$C_1=p_0\begin{bmatrix}-a(a-c+1)\\-a\end{bmatrix}$$

ve

$$C_2=p_0\begin{bmatrix}\alpha_2\\a(a+1)(a-c+1)\end{bmatrix}.$$

II ve III' te kullanılan (1.4) denklemlerinden, genel denklemin

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}C_k=\left(-a-k+1\right)C_{k-1}-A_1C_{k-1}$$

formunda olduğu görülür. Buna göre;

IV. $k=3$ için

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}C_3=\left[\left(-a-2\right)I-A_1\right]C_2$$

eşitliği göz önüne alınsın. $C_3=\begin{pmatrix}p_3\\q_3\end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_0\left[\begin{pmatrix} -a-2 & 0 \\ 0 & -a-2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix}\right]\left[\begin{matrix} \alpha_2 \\ a(a+1)(a-c+1) \end{matrix}\right]$$

veya

$$\begin{pmatrix} q_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_0\left[\begin{matrix} (-a-2)\alpha_2 \\ -a\alpha_2 + (-a)(a+1)(a-c+1)(a-c+2) \end{matrix}\right].$$

Uyumluluk gereği

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}a(a+1)(a-c+1)(a-c+2)$$

ve buradan

$$q_3 = -\frac{1}{2}p_0 a(a+1)(a+2)(a-c+1)(a-c+2)$$

alınmalıdır. O halde, $p_0\alpha_3 = p_3$ olmak üzere

$$C_2 = p_0\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}a(a+1)(a-c+1)(a-c+2) \\ a(a+1)(a-c+1) \end{matrix}\right]$$

ve

$$C_3 = p_0\left[\begin{matrix} \alpha_3 \\ -\frac{1}{2}a(a+1)(a+2)(a-c+1)(a-c+2) \end{matrix}\right].$$

V. $k = 4$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_4 = \left[(-a-3)I - A_1\right] C_3$$

eşitliği göz önüne alınsın. $C_4 = \begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \end{pmatrix} = p_0\left[\begin{pmatrix} -a-3 & 0 \\ 0 & -a-3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ -\frac{1}{2}a(a+1)(a+2)(a-c+1)(a-c+2) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ q_4 \end{pmatrix} = p_0\left[\begin{matrix} (-a-3)\alpha_3 \\ -a\alpha_3 + \frac{1}{2}a(a+1)(a+2)(a-c+1)(a-c+2)(a-c+3) \end{matrix}\right].$$

Uyumluluk gereği

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2.3}a(a+1)(a+2)(a-c+1)(a-c+2)(a-c+3)$$

ve buradan

$$q_4 = \frac{1}{2.3}p_0 a(a+1)(a+2)(a+3)(a-c+1)(a-c+2)(a-c+3)$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_3 = p_0\begin{bmatrix} -\frac{1}{2.3}a(a+1)(a+2)(a-c+1)(a-c+2)(a-c+3) \\ -\frac{1}{2}a(a+1)(a+2)(a-c+1)(a-c+2) \end{bmatrix}.$$

Bu durumda

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{k!}a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k),$$

$$q_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}p_0 a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k-1)$$

olmak üzere

$$C_k = p_0\begin{pmatrix} \frac{(-1)^k}{k!}a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k) \\ \frac{(-1)^k}{(k-1)!}a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k-1) \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece $\lambda_1 = 0$ özdeğerine karşılık gelen çözüm

$$X_1 = p_0 z^{-a}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^k}{k!}a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k) \\ \frac{(-1)^k}{(k-1)!}a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k-1) \end{pmatrix}\right\}$$

olarak elde edilir. O halde

$$y_1 = p_0 z^{-a}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}\left[\frac{(-1)^k}{k!}a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k)\right]\right\}.$$

Şimdi de $\lambda = 1$ için;

I. (1.4) sisteminin birinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_0 = 0$$

göz önüne alınsın. $C_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -u_0 + v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uyumluluk koşulu gereği

$$u_0 = v_0$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_0 = u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II. (1.4) sisteminin ikinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_1 = \mu C_0 - A_1 C_0$$

göz önüne alınsın. $C_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = u_0 \left[\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -u_1 + v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} \mu \\ -a + \mu + c \end{pmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$\mu - a + c = 0 \quad \text{yani} \quad \mu = a - c$$

ve buradan

$$v_1 = u_1 + u_0(a - c)$$

alınmalıdır. O halde, $u_0\gamma_1 = u_1$ olmak üzere

$$C_1 = u_0 \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_1 + a - c \end{pmatrix}.$$

III. (1.4) sisteminin üçüncü denklemi

$$\left(A_0-\lambda I\right)C_2=(\mu-1)C_1-A_1C_1$$

göz önüne alınsın. $C_2=\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\end{pmatrix}=u_0\left[\begin{pmatrix}a-c-1 & 0\\ 0 & a-c-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & -c\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_1+a-c\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix}-u_2+v_2\\ 0\end{pmatrix}=u_0\begin{bmatrix}\left(a-c-1\right)\gamma_1\\ -a\gamma_1+(a-1)(\gamma_1+a-c)\end{bmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$\gamma_1=(a-1)(a-c)$$

ve buradan

$$v_2=u_2+u_0(a-1)(a-c)(a-c-1)$$

alınmalıdır. O halde, $u_0\gamma_2=u_2$ olmak üzere

$$C_1=u_0\begin{bmatrix}(a-1)(a-c)\\ a(a-c)\end{bmatrix}$$

ve

$$C_2=u_0\begin{bmatrix}\gamma_2\\ \gamma_2+(a-1)(a-c)(a-c-1)\end{bmatrix}.$$

II ve III' te kullanılan (1.4) denklemlerinden, genel denklemin

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}C_k=\left(a-c-k+1\right)C_{k-1}-A_1C_{k-1}$$

formunda olduğu görülür. Buna göre;

IV. $k=3$ için

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}C_3=\left(a-c-2\right)C_2-A_1C_2$$

eşitliği göz önüne alınsın. $C_3=\begin{bmatrix}u_3\\ v_3\end{bmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_3\\ v_3\end{pmatrix}=u_0\left[\begin{pmatrix}a-c-2 & 0\\ 0 & a-c-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & -c\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\gamma_2\\ \gamma_2+(a-1)(a-c)(a-c-1)\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -u_3+v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} (a-c-2)\gamma_2 \\ -a\gamma_2+(a-2)\gamma_2+(a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1) \end{bmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1)$$

ve buradan

$$v_3 = u_3 + \frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1)(a-c-2)u_0$$

alınmalıdır. O halde, $u_0\gamma_3 = u_3$ olmak üzere

$$C_2 = u_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1) \\ \frac{1}{2}a(a-1)(a-c)(a-c-1) \end{bmatrix}$$

ve

$$C_3 = u_0 \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_3 + \frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1)(a-c-2) \end{bmatrix}.$$

V. $k=4$ için

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_4 = \left(a-c-3\right)C_3 - A_1C_3$$

eşitliği göz önüne alınsın $C_4 = \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = u_0 \left[\begin{pmatrix} a-c-3 & 0 \\ 0 & a-c-3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & -c \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_3 + \frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1)(a-c-2) \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -u_4+v_4 \\ 0 \end{pmatrix} = u_0 \begin{bmatrix} (a-c-3)\gamma_3 \\ -a\gamma_3+(a-3)\gamma_3+\frac{1}{2}(a-1)(a-2)(a-3)(a-c)(a-c-1)(a-c-2) \end{bmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$\gamma_3 = \frac{1}{2.3}(a-1)(a-2)(a-3)(a-c)(a-c-1)(a-c-2)$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_3 = u_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{2.3}(a-1)(a-2)(a-3)(a-c)(a-c-1)(a-c-2) \\ \frac{1}{2.3}a(a-1)(a-2)(a-c)(a-c-1)(a-c-2) \end{bmatrix}.$$

Bu durumda

$$\gamma_k = \frac{1}{k!}(a-1)(a-2)...(a-k)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1),$$

$$v_k = \frac{1}{k!}u_0 a(a-1)...(a-k+1)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1)$$

olmak üzere

$$C_k = u_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{k!}(a-1)(a-2)...(a-k)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1) \\ \frac{1}{k!}a(a-1)...(a-k+1)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1) \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $\lambda_2 = 1$ özdeğerine karşılık gelen çözüm

$$X_2 = u_0 e^z z^{a-c} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!}(a-1)(a-2)...(a-k)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1) \\ \frac{1}{k!}a(a-1)...(a-k+1)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1) \end{pmatrix} \right\}$$

olarak elde edilir. O halde,

$$y_2 = u_0 e^z z^{a-c} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \left[\frac{1}{k!}(a-1)(a-2)...(a-k)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1) \right] \right\}.$$

Sonuç olarak, "Kummer konfluent hipergeometrik denklem" in en genel asimptotik seri çözümü

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 a_0 z^{-a} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \left[\frac{(-1)^k}{k!} a(a+1)...(a+k-1)(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k) \right] \right\} \\ &\quad + c_2 u_0 e^z z^{a-c} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \left[\frac{1}{k!}(a-1)(a-2)...(a-k)(a-c)(a-c-1)...(a-c-k+1) \right] \right\} \end{aligned}$$

formunda bulunur (c_1 ve c_2 keyfi sabitler). Kummer konfluent hipergeometrik denklemin çözümü, Kummer konfluent hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır. Bu fonksiyon olasılık ve matematiksel istatistik teorisi, pür ve uygulamalı matematik, kuantum mekaniği, atom-fizik, kuantum teorisi, nükleer fizik, esneklik teorisi, akustik, hidrodinamik, optik, dalga teorisi, fiber optik, elektromanyetik alan teorisi, plazma-fizik gibi alanlarda uygulamalara sahip olması bakımından matematiksel fiziğin özel fonksiyonlarının önemli bir sınıfına aittir [9].

Problem 2.2: Bu bölümde aşağıda verilen

$$zy'' - (1+z)y' + z^3 y = 0$$

ikinci mertebe lineer diferensiyel denkleminin, seriler yardımıyla asimptotik çözümü araştırılacaktır. Bunun için ilk olarak

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = y'$$

dönüşümü ile denklem sisteme dönüştürülür ve sonuçta

$$X' = z^2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} X$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere (1.8) formundadır ($r = 2$). Ancak, burada baş matris A_0' ın aynı iki özdeğere sahip olduğu görülür. Bu nedenle başka bir dönüşüm tanımlanır:

$$x_1 = y,$$
$$x_2 = z^{-1} y' \cdot$$

Bu dönüşümle

$$X' = z \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} X \tag{2.2}$$

denklem sistemi elde edilir . Bu sistem de

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere (1.8) formundadır ($r = 1$). Ayrıca, A_0 matrisi farklı iki özdeğere sahiptir $(\lambda_{1,2} = \pm i)$. O halde, (2.2) sisteminin asimptotik çözümü

$$X = e^{a_0 z^2 + a_1 z} z^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^{-k}$$

şeklinde olacaktır. Bu çözüm ve türevi (2.2)’ de yerine yazılırsa gerekli işlemler ve eşleştirmeler sonucunda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&2a_0C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_0 \\
&a_1C_0 + 2a_0C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_0 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_1 \\
&(\mu - k + 2)C_{k-2} + a_1C_{k-1} + 2a_0C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_{k-1} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_k \ , \quad k = 2,3,...
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Bu denklemler sırasıyla kullanılarak bilinmeyenler belirlenir:

I. $$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2a_0 \right\} C_0 = 0 \tag{2.4}$$

denkleminde $C_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ alınsın. (2.3) denklem sistemindeki C_k’ ların sıfırdan farklı olması için

$$\begin{vmatrix} -2a_0 & 1 \\ -1 & -2a_0 \end{vmatrix} = 0$$

alınmalıdır. Buradan, $a_0 = \pm \frac{i}{2}$ bulunur.

$a_0 = \frac{i}{2}$ seçilirse (2.4) denkleminden

$$\begin{pmatrix} -ip_0 + q_0 \\ -p_0 - iq_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Uyumluluk gereği $q_0 = ip_0$ olmalıdır. O halde,

$$C_0 = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

II. $$a_1C_0 + 2a_0C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_0 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_1$$

denklemi göz önüne alınsın. $C_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_0 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 i - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ip_1 + q_1 \\ -p_1 - iq_1 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ nonsingüler matrisi ile çarpmak bilinmeyenleri belirlemede kolaylık sağlayacaktır:

$$p_0 \begin{pmatrix} a_1 \\ 2ia_1 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ip_1 + q_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$p_0 i(2a_1 - 1) = 0 \quad \text{yani} \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

ve buradan da

$$q_1 = ip_1 + \frac{p_0}{2}$$

alınmalıdır. O halde, $p_1 = p_0\alpha_1$ olmak üzere

$$C_1 = p_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ i\alpha_1 + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

bulunur (α_1 keyfi sabit).

$$\text{III.} \quad \mu C_0 + a_1 C_1 + 2a_0 C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} C_2$$

denklemi göz önüne alınsın. $C_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_0 \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ i\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1}{2} \\ \dfrac{i\alpha_1}{2} + \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ i\alpha_1 + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

yani,

$$p_0 \begin{pmatrix} \mu + \dfrac{\alpha_1}{2} \\ i\mu - \dfrac{i\alpha_1}{2} - \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ip_2 + q_2 \\ -p_2 - iq_2 \end{pmatrix}.$$

Bu eşitliğin her iki tarafı $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ nonsingüler matrisiyle çarpılırsa,

$$p_0\begin{pmatrix}\mu+\dfrac{\alpha_1}{2}\\ 2i\mu-\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ip_2+q_2\\ 0\end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$\mu=-\frac{i}{8}$$

ve buradan

$$q_2=i\left(p_2-\frac{p_0}{8}\right)+\frac{p_0\alpha_1}{2}$$

alınmalıdır. O halde, $p_2=p_0\alpha_2$ olmak üzere

$$C_2=p_0\begin{bmatrix}\alpha_2\\ i(\alpha_2-\dfrac{1}{8})+\dfrac{\alpha_1}{2}\end{bmatrix} \tag{2.6}$$

bulunur (α_2 keyfi sabit).

IV. $(\mu-1)C_1+a_1C_2+2a_0C_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}C_2+\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}C_3$

denklemi göz önüne alınsın. $C_3=\begin{pmatrix}p_3\\q_3\end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_0(-1-\frac{i}{8})\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \dfrac{1}{2}+i\alpha_1\end{pmatrix}+p_0\begin{pmatrix}1/2&0\\0&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \dfrac{\alpha_1}{2}+i(\alpha_2-\dfrac{1}{8})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&1\\-1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_3\\q_3\end{pmatrix}$$

yani

$$p_0\begin{pmatrix}-\alpha_1+\dfrac{\alpha_2}{2}-\dfrac{i\alpha_1}{8}\\ -\dfrac{\alpha_1}{8}-\dfrac{1}{2}-i(\alpha_1+\dfrac{\alpha_2}{16})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_3-ip_3\\-p_3-iq_3\end{pmatrix}.$$

Bu son eşitliğin her iki tarafı $\begin{pmatrix}1&0\\i&1\end{pmatrix}$ nonsingüler matrisi ile çarpılırsa,

$$p_0\begin{pmatrix}-\alpha_1+\dfrac{\alpha_2}{2}-\dfrac{i\alpha_1}{8}\\ -\dfrac{1}{2}-2i\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_3-ip_3\\0\end{pmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$\alpha_1 = \frac{i}{4} \tag{2.7}$$

ve buradan da

$$q_3 = p_0\left(\frac{\alpha_2}{2}+\frac{1}{32}\right)+i\left(p_3-\frac{p_0}{4}\right) \tag{2.8}$$

alınmalıdır. (2.7) değeri, (2.5) ve (2.6)' da yerine konulursa

$$C_1 = p_0\begin{pmatrix} i/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C_2 = p_0\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ i\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{2.9}.$$

Ayrıca, $p_3 = p_0\alpha_3$ olmak üzere (2.8)' den

$$C_3 = p_0\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \frac{1}{32}+\frac{\alpha_2}{2}+i(\alpha_3-\frac{1}{4}) \end{bmatrix}$$

bulunur.

V. $(\mu-2)C_2 + a_1C_3 + 2a_0C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}C_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}C_4$

denklemi göz önüne alınsın. $C_4 = \begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$p_0\left(-2-\frac{i}{8}\right)\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ i\alpha_2 \end{pmatrix} + p_0\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \frac{1}{32}+\frac{\alpha_2}{2}+i(\alpha_3-\frac{1}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_4 \\ q_4 \end{pmatrix}$$

yani,

$$p_0\begin{pmatrix} -2\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}-\frac{i\alpha_2}{8} \\ -\frac{\alpha_2}{8}-\frac{1}{64}+i(-2\alpha_2-\frac{\alpha_3}{2}-\frac{1}{8}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_4-ip_4 \\ -p_4-iq_4 \end{pmatrix}.$$

Bu son eşitliğin her iki tarafı $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ nonsingüler matrisi ile çarpılırsa,

$$p_0\begin{pmatrix} -2\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}-\frac{i\alpha_2}{8} \\ -\frac{1}{64}+i(-4\alpha_2+\frac{1}{8}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_4-ip_4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uyumluluk gereği

$$\alpha_2 = \frac{8+i}{256}$$

alınmalıdır. Bu durumda (2.9)' dan

$$C_2 = p_0 \begin{pmatrix} \dfrac{8+i}{256} \\ \dfrac{-1+8i}{256} \end{pmatrix}$$

bulunur.

Bu şekilde işlemlere devam edilirse (2.2) denklem sisteminin birinci asimptotik çözümü

$$X_1 = p_0 e^{\frac{i}{2}z^2+\frac{1}{2}z} z^{-\frac{i}{8}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{i}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} z^{-1} + \begin{pmatrix} \dfrac{8+i}{256} \\ \dfrac{-1+8i}{256} \end{pmatrix} z^{-2} + \ldots \right]$$

olarak elde edilir.

Diferensiyel denklem sadece reel terimler içerdiği için $a_0 = -\frac{i}{2}$ değerine karşılık gelen ikinci çözüm birincinin eşleniği alınarak kolayca belirlenir:

$$X_2 = u_0 e^{-\frac{i}{2}z^2+\frac{1}{2}z} z^{\frac{i}{8}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} z^{-1} + \begin{pmatrix} \dfrac{8-i}{256} \\ \dfrac{-1-8i}{256} \end{pmatrix} z^{-2} + \ldots \right].$$

Sonuç olarak

$$zy'' - (1+z)y' + z^3 y = 0$$

denkleminin $z \to \infty$ için lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = p_0 e^{\frac{i}{2}z^2+\frac{1}{2}z} z^{-\frac{i}{8}} \left[1 + \frac{i}{4} z^{-1} + \frac{8+i}{256} z^{-2} + \ldots \right]$$

ve

$$y_2 = u_0 e^{-\frac{i}{2}z^2+\frac{1}{2}z} z^{\frac{i}{8}} \left[1 - \frac{i}{4} z^{-1} + \frac{8-i}{256} z^{-2} + \ldots \right]$$

'dir. Dolayısıyla genel çözüm

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$
$$= c_1 p_0 e^{\frac{i}{2}z^2+\frac{1}{2}z} z^{-\frac{i}{8}}\left[1+\frac{i}{4}z^{-1}+\frac{8+i}{256}z^{-2}+...\right]+c_2 u_0 e^{-\frac{i}{2}z^2+\frac{1}{2}z} z^{\frac{i}{8}}\left[1-\frac{i}{4}z^{-1}+\frac{8-i}{256}z^{-2}+...\right]$$

formunda bulunur. Bu çözümün $z \to \infty$ için ıraksak olduğu görülür.

Uygulamalı problemlerde karşılaşılan çoğu diferensiyel denklemler bir ya da daha fazla fiziksel sabit içerir. Böyle parametre bulunduran diferensiyel denklemlerin çözümleri pek çok ilginç teorik sonuçlar doğurur [15].

Problem 2.3:

Bu bölümde katsayıları bir parametreye bağlı analitik fonksiyonlar olan

$$y'' - \mu e^z y' - \mu y = 0$$

ikinci mertebe lineer homojen diferensiyel denkleminin $\mu \to \infty$ için asimptotik çözümü incelenecektir.

Hem z bağımsız değişkenine hem de μ parametresine bağlı bu denklemi sisteme dönüştürmek için

$$y = x_1$$
$$y' = \mu x_2$$

alınsın. Bu durumda

$$x_1' = \mu x_2$$
$$x_2' = x_1 + \mu e^z x_2$$

veya

$$X' = \mu\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}X \qquad (2.10)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix},\; A_1(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.18) formundaki (2.10) sisteminde baş matris $A_0(z)$, farklı özdeğerlere sahiptir; ancak diyagonal değildir. Bölüm 1.2.3' te verilen yöntemin kullanılabilmesi için bu matris diyagonalleştirilmelidir. Bunun için

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}$$

nonsingüler matris ve $Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ yeni bir bağımsız değişken olmak üzere

$$X := TY \tag{2.11}$$

alınsın. (2.11) eşitliği ve türevi, (2.10) sisteminde yerine yazılırsa

$$T'Y + TY' = \mu\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}TY$$

ve buradan da

$$Y' = \left\{\mu T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}T + T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T - T^{-1}T'\right\}Y$$

bulunur. T ve T^{-1} değerleri bu sistemde yerine yazıldığında ise

$$Y' = \left\{\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} + \frac{1}{e^z}\begin{pmatrix} -1 & e^z - 1 \\ 1 & 1 - e^z \end{pmatrix}\right\}Y \tag{2.12}$$

olacak şekilde baş matrisi diyagonal olan yeni bir denklem sistemi elde edilir $\left(T^{-1} = \frac{1}{e^z}\begin{pmatrix} e^z & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Burada

$$B_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix}, \; B_1(z) = \frac{1}{e^z}\begin{pmatrix} -1 & e^z - 1 \\ 1 & 1 - e^z \end{pmatrix}.$$

O halde,

$$Y_i = \exp\left[\mu \int b_i(z)dz\right]\sum_{k=0}^{\infty} V_k(z)\mu^{-k}$$

formunda çözüm araştırılır $(i = 1, 2)$.

İlk olarak, $b_1(z) = 0$ için

$$Y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z)\mu^{-k}$$

bulunur. Bu çözüm ve türevi (2.12)' de yerine yazılırsa gerekli işlemler ve eşleştirmeler sonucunda aşağıdaki reküzans formülleri elde edilir:

$$\begin{aligned} &B_0V_0 = 0 \\ &B_0V_k = V'_{k-1} - B_1V_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.13}$$

Şimdi (2.13) denklemleri sırasıyla kullanılarak $V_k(z)$' ler belirlenebilir.

I. $B_0V_0 = 0$

denkleminde, $V_0 = \begin{bmatrix} p_0(z) \\ q_0(z) \end{bmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e^z q_0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği,

$$q_0(z) = 0$$

alınmalıdır. O halde, $p_0(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V_0(z) = \begin{bmatrix} p_0(z) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

II. $B_0 V_1 = V_0' - B_1 V_0$

denkleminde, $V_1(z) = \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0'(z) \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{e^z} \begin{bmatrix} -1 & e^z - 1 \\ 1 & 1 - e^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e^z q_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0'(z) \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{e^z} \begin{bmatrix} -p_0(z) \\ p_0(z) \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği ilk olarak

$$p_0'(z) = -\frac{1}{e^z} p_0(z)$$

alınırsa integral yardımıyla

$$p_0(z) = c_0 e^{e^{-z}} \tag{2.14}$$

bulunur (c_0 integral sabiti).

İkinci olarak;

$$q_1(z) = -\frac{1}{e^{2z}} p_0(z)$$

alınmalıdır. Bu durumda (2.14)’ ten

$$q_1(z) = -c_0 e^{e^{-z} - 2z}.$$

O halde, $p_1(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V_0 = c_0 \begin{pmatrix} e^{e^{-z}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad V_1 = \begin{pmatrix} p_1(z) \\ -c_0 e^{e^{-z}-2z} \end{pmatrix}.$$

III. $B_0 V_2 = V_1' - B_1 V_1$

denkleminde, $V_2 = \begin{pmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1'(z) \\ c_0(e^{-z}+2)e^{e^{-z}-2z} \end{bmatrix} - \frac{1}{e^z} \begin{bmatrix} -1 & e^z - 1 \\ 1 & 1 - e^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ -c_0 e^{e^{-z}-2z} \end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e^z q_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1'(z) + \dfrac{p_1(z)}{e^z} + c_0(e^z - 1)e^{e^{-z}-3z} \\ c_0(e^{-z}+2)e^{e^{-z}-2z} - \dfrac{p_1(z)}{e^z} + c_0(1 - e^z)e^{e^{-z}-3z} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$$p_1'(z) + \frac{p_1(z)}{e^z} + c_0(e^z - 1)e^{e^{-z}-3z} = 0$$

veya

$$p_1'(z) + \frac{p_1(z)}{e^z} = -c_0(e^z - 1)e^{e^{-z}-3z}$$

alınmalıdır. Bu birinci mertebe lineer diferensiyel denklemi çözmek için

$$u(z) = e^{\int \frac{1}{e^z} dz} = e^{-e^{-z}}$$

dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{aligned} e^{-e^{-z}} p_1(z) &= -c_0 \int (e^z - 1)e^{e^{-z}-3z} e^{-e^{-z}} dz \\ &= c_0 \int (1 - e^z)e^{-3z} dz \\ &= -\frac{c_0}{3} e^{-3z} + \frac{c_0}{2} e^{-2z} \end{aligned}$$

yani

$$p_1(z) = \frac{c_0}{2} e^{e^{-z}-2z} - \frac{c_0}{3} e^{e^{-z}-3z}$$

bulunur. O halde,

$$V_1 = c_0\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{e^{-z}-2z} - \frac{1}{3}e^{e^{-z}-3z} \\ -e^{e^{-z}-2z} \end{pmatrix}.$$

Benzer şekilde hesaplamalara devam edilerek $b_1(z) = 0$ için (2.12) denklem sisteminin asimptotik çözümü

$$Y_1 = c_0\left\{\begin{pmatrix} e^{e^{-z}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{e^{-z}-2z} - \frac{1}{3}e^{e^{-z}-3z} \\ -e^{e^{-z}-2z} \end{pmatrix}\frac{1}{\mu} + \dots\right\}$$

şeklinde elde edilir. O halde (2.11)' den

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= c_0\left[e^{e^{-z}} + \left(-\frac{1}{2}e^{e^{-z}-2z} - \frac{1}{3}e^{e^{-z}-3z}\right)\mu^{-1} + \dots\right]. \end{aligned}$$

$b_2(z) = e^z$ için ise çözüm

$$Y_2 = e^{\mu e^z}\sum_{k=0}^{\infty} V_k(z)\mu^{-k}$$

formunda olacaktır. Bu çözüm ve türevi (2.12)' de yerine yazılırsa gerekli işlemler ve eşleştirmeler sonucunda aşağıdaki rekürans formülleri elde edilir:

$$\begin{aligned} &(B_0 - e^z I)V_0 = 0 \\ &(B_0 - e^z I)V_k = V_{k-1}' - B_1 V_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Buna göre;

I. $(B_0 - e^z I)V_0 = 0$

denkleminde, $V_0(z) = \begin{bmatrix} u_0(z) \\ v_0(z) \end{bmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^z & 0 \\ 0 & e^z \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} u_0(z) \\ v_0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{bmatrix} -e^z u_0(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$$u_0(z) = 0$$

alınmalıdır. O halde, $v_0(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V_0=\begin{bmatrix}0\\ v_0(z)\end{bmatrix}.$$

II. $\left(B_0-e^zI\right)V_1=V_0'-B_1V_0$

denkleminde, $V_1=\begin{bmatrix}u_1(z)\\ v_1(z)\end{bmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix}-e^z & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(z)\\ v_1(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ v_0'(z)\end{bmatrix}-\frac{1}{e^z}\begin{bmatrix}-1 & e^z-1\\ 1 & 1-e^z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ v_0(z)\end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{bmatrix}-e^zu_1(z)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{e^z}(e^z-1)v_0(z)\\ v_0'(z)-\frac{1}{e^z}(1-e^z)v_0(z)\end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği ilk olarak

$$v_0'(z)=\frac{1}{e^z}(1-e^z)v_0(z)$$

alınırsa, değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak

$$v_0(z)=k_0e^{-e^{-z}-z} \tag{2.15}$$

bulunur (k_0 integral sabiti).

İkinci olarak;

$$u_1(z)=\frac{1}{e^{2z}}(e^z-1)v_0(z)$$

alınmalıdır. Bu durumda (2.15)' ten

$$u_1(z)=k_0e^{-e^{-z}}(e^{-2z}-e^{-3z}).$$

O halde, $v_1(z)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$V_0=k_0\begin{bmatrix}0\\ e^{-e^{-z}-z}\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V_1=\begin{bmatrix}k_0e^{-e^{-z}}(e^{-2z}-e^{-3z})\\ v_1(z)\end{bmatrix}.$$

III. $(B_0-e^zI)V_2=V_1'-B_1V_1$

denkleminde, $V_2=\begin{bmatrix}u_2(z)\\ v_2(z)\end{bmatrix}$ olmak üzere bilinenler yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} -e^{z}u_2(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_0(e^{-e^{-z}-z}(e^{-2z}-e^{-3z}) - e^{-e^{-z}}(-2e^{-2z}+3e^{-3z})) \\ v_1'(z) \end{bmatrix} - \frac{1}{e^{z}}\begin{bmatrix} -1 & e^{z}-1 \\ 1 & 1-e^{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_0 e^{-e^{-z}}(e^{-2z}-e^{-3z}) \\ v_1(z) \end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{bmatrix} -e^{z}u_2(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_0 e^{-e^{-z}-z}(e^{-2z}-e^{-3z}) - k_0 e^{-e^{-z}}(-2e^{-2z}+3e^{-3z}) + (e^{z}-1)v_1(z) \\ v_1'(z) - k_0 e^{-e^{-z}-z}(e^{-2z}-e^{-3z}) - e^{-z}(1-e^{z})v_1(z) \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Uyumluluk gereği

$$v_1'(z) + (1-e^{-z})v_1(z) = k_0 e^{-e^{-z}}(e^{-3z}-e^{-4z})$$

alınmalıdır. Bu birinci mertebe lineer diferensiyel denklemi çözmek için

$$u(z) = e^{\int (1-e^{-z})dz} = e^{e^{-z}+z}$$

dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{aligned} e^{e^{-z}+z}v_1(z) &= k_0\int e^{-e^{-z}}(e^{-3z}-e^{-4z})e^{e^{-z}+z}dz \\ &= k_0\int (e^{-2z}-e^{-3z})dz \\ &= k_0(-\frac{e^{-2z}}{2}+\frac{e^{-3z}}{3}) \end{aligned}$$

yani

$$v_1(z) = k_0 e^{-e^{-z}}(-\frac{e^{-3z}}{2}+\frac{e^{-4z}}{3})$$

bulunur. O halde

$$V_1(z) = k_0\begin{bmatrix} e^{-e^{-z}}(e^{-2z}-e^{-3z}) \\ e^{-e^{-z}}(\frac{e^{-4z}}{3}-\frac{e^{-3z}}{2}) \end{bmatrix}.$$

Benzer şekilde hesaplamalara devam edilerek $b_2(z) = e^{z}$ için (2.12) denklem sisteminin asimptotik çözümü

$$Y_2 = k_0 e^{\mu e^{z}}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-e^{-z}-z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-e^{-z}}(e^{-2z}-e^{-3z}) \\ e^{-e^{-z}}(\frac{e^{-4z}}{3}-\frac{e^{-3z}}{2}) \end{bmatrix}\frac{1}{\mu} + \ldots\right\}$$

şeklinde elde edilir . O halde (2.11)' den

$$\begin{aligned} y_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= k_0 e^{\mu e^{z}}\left\{e^{-e^{-z}-z} + \left[e^{-e^{-z}}(e^{-2z}-\frac{3}{2}e^{-3z}+\frac{1}{3}e^{-4z})\right]\mu^{-1} + \ldots\right\}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$y'' - \mu e^{z} y' - \mu y = 0$$

denkleminin $\mu \to \infty$ için en genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 c_0 \left\{ e^{e^{-z}} + \left(-\frac{1}{2} e^{e^{-z}-2z} - \frac{1}{3} e^{e^{-z}-3z}\right)\mu^{-1} + \ldots \right\}$$

$$+ c_2 k_0 e^{\mu e^{z}} \left\{ e^{-e^{-z}-z} + \left[e^{-e^{-z}} \left(e^{-2z} - \frac{3}{2} e^{-3z} + \frac{1}{3} e^{-4z}\right) \right] \mu^{-1} + \ldots \right\}$$

formundadır. Bu çözümün ikinci terimindeki keyfi sabitin sıfır seçilmesiyle $\mu \to \infty$ için yakınsak olduğu görülür.

2.2. Seri Yardımıyla Çözülemeyen Bazı İkinci Mertebe Lineer Diferensiyel Denklemlerin Asimptotik Çözümleri

Bu bölümde dönüşümlerin asimptotik çözümlerin bulunmasındaki önemini vurgulamak amacıyla aşağıdaki problemler incelenmiştir.

Problem 2.4: k ve d reel sabitler, $k \neq 0$ ve $d > 0$ olmak üzere

$$y''(x) + \left\{ k + (x+1)^{-d} \right\} y(x) = 0 \ , \qquad 0 \leq x < \infty \tag{2.16}$$

denklemi için asimptotik çözüm araştırınız.

Çözüm:

Bu problemde d, sıfırdan büyük herhangi bir reel sayıdır ve dolayısıyla Bölüm 1.2' de bahsedilen serilerle çözüm yaklaşımını kullanmak uygun değildir.

Burada (2.16) denklemi, (1.59) denklemi formunda düşünülürse

$$q(x) := k + (x+1)^{-d} \tag{2.17}$$

alınmalıdır. $q(x) \to k \ \ (x \to \infty)$ olduğundan (2.17) fonksiyonunun işaretinin k' nın işaretine bağlı olarak değiştiği görülür. O halde, $\left[0, \infty\right)$ aralığında $k > 0$ için $q(x) > 0$, q(x) reel değerli ve $q'(x) = -d(x+1)^{-d-1}$, $q''(x) = d(d+1)(x+1)^{-d-2}$ olmak üzere $q''(x)$ mevcut ve süreklidir. Ayrıca;

i) $$\int_0^\infty q^{1/2}(x)dx = \int_0^\infty \left[k + \frac{1}{(x+1)^d} \right]^{1/2} dx \geq \int_0^\infty k^{1/2} dx = k^{1/2} x \Big|_0^\infty \to \infty$$

yani $\int_0^\infty q^{1/2}(x)dx$ ıraksak,

ii) $$\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{q^{5/2}(x)}dx = d^2\int_0^\infty \frac{(x+1)^{-2d-2}}{\{k+(x+1)^{-d}\}^{5/2}}dx \le d^2\int_0^\infty \frac{(x+1)^{-2d-2}}{k^{5/2}}dx = \frac{d^2}{k^{5/2}(2d+1)} < \infty$$

yani $\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{q^{5/2}(x)}dx$ yakınsaktır. Benzer şekilde,

$$\int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{q^{3/2}(x)}dx = \int_0^\infty \frac{d(d+1)(x+1)^{-d-2}}{\{k+(x+1)^{-d}\}^{3/2}}dx \le d(d+1)\int_0^\infty \frac{(x+1)^{-d-2}}{k^{3/2}}dx = \frac{d}{k^{3/2}} < \infty$$

yani $\int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{q^{3/2}(x)}dx$ yakınsaktır.

Bu durumda Teorem 1.8 kullanılırsa (2.16) denkleminin bir asimptotik çözümü $\Psi_1(x)$

$$\Psi_1(x) \sim \left[k+(x+1)^{-d}\right]^{-1/4} \exp\left\{ i\int_0^x \left[k+(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du \right\}$$

ve türevi de

$$\left\{\left[k+(x+1)^{-d}\right]^{1/4}\Psi_1(x)\right\}' \sim i\left[k+(x+1)^{-d}\right]^{1/2} \exp\left\{ i\int_0^x \left[k+(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du \right\}$$

olacak şekilde mevcuttur. Benzer şekilde $\Psi_2(x)$

$$\Psi_2(x) \sim \left[k+(x+1)^{-d}\right]^{-1/4} \exp\left\{ -i\int_0^x \left[k+(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du \right\}$$

ve türevi de

$$\left\{\left[k+(x+1)^{-d}\right]^{1/4}\Psi_2(x)\right\}' \sim -i\left[k+(x+1)^{-d}\right]^{1/2} \exp\left\{ -i\int_0^x \left[k+(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du \right\}$$

olacak şekilde mevcuttur.

Eğer $k<0$ ise $q(x)=k+(x+1)^{-d}<0$ $(x\to\infty)$ olur. (2.16) denklemi, (1.48) formunda düşünülürse,

$$P(x)=1,\ \rho(x)=q(x)=k+(x+1)^{-d},\ Q(x)=-1$$

olur. Bu durumda,

$$f(x) := |\rho(x)|^{1/2} = \left\{-\left[k+(x+1)^{-d}\right]\right\}^{1/2}$$

ve

$$g(x) := |\rho(x)|^{-1/4} = \left\{-\left[k+(x+1)^{-d}\right]\right\}^{-1/4}$$

olmak üzere

$$t = \int_0^x f(u)du, \quad y(x) = g(x)z(t) \tag{2.18}$$

Liouville dönüşümleriyle (2.16) denklemi

$$\ddot{z}(t) + \{-1 + R(t)\} z(t) = 0 \tag{2.19}$$

denklemine dönüşür. Burada,

$$R(t) = -\frac{5}{16}\frac{\{\rho'(x)\}^2}{\rho^3(x)} + \frac{1}{4}\frac{\rho''(x)}{\rho^2(x)}.$$

Şimdi,

$$\frac{\{\rho'(x)\}^2}{\rho^3(x)} = \frac{d^2(x+1)^{-2d-2}}{\left[k+(x+1)^{-d}\right]^3} \le \frac{d^2(x+1)^{-2d-2}}{k^3}$$

olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{\{\rho'(x)\}^2}{\rho^3(x)}dx = \int_0^\infty \frac{d^2(x+1)^{-2d-2}}{\left[k+(x+1)^{-d}\right]^3}dx \le d^2\int_0^\infty \frac{(x+1)^{-2d-2}}{k^3}dx = \frac{d^2}{(2d+1)k^3} < \infty$$

sağlanır. Ayrıca,

$$\frac{\rho''(x)}{\rho^2(x)} = \frac{d(d+1)(x+1)^{-d-2}}{\left[k+(x+1)^{-d}\right]^2} \le \frac{d(d+1)(x+1)^{-d-2}}{k^2}$$

olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{\rho''(x)}{\rho^2(x)}dx = \int_0^\infty \frac{d(d+1)(x+1)^{-d-2}}{\left[k+(x+1)^{-d}\right]^2}dx \le d(d+1)\int_0^\infty \frac{(x+1)^{-d-2}}{k^2}dx = \frac{d}{k^2} < \infty$$

bulunur. O halde, $\int_0^\infty |R(t)|dt$ yakınsaktır. Böylece Teorem 1.4' e göre (2.19) denkleminin $z_1(t)$ ve $z_2(t)$ çözümleri $t \to \infty$ için

$$\begin{aligned} z_1(t) &\sim e^t \quad , \quad \dot{z}_1(t) \sim e^t \ ; \\ z_2(t) &\sim e^{-t} \quad , \quad \dot{z}_2(t) \sim -e^{-t} \end{aligned} \tag{2.20}$$

olacak şekilde mevcuttur.

(2.20)' de (2.18) değerleri yerine yazılırsa $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$, (2.16) denkleminin lineer bağımsız asimptotik çözümleri olmak üzere

$$\varphi_1(x) \sim \left[-k-(x+1)^{-d}\right]^{-1/4} \exp\left\{\int_0^x \left[-k-(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du\right\},$$

$$\left\{\left[-k-(x+1)^{-d}\right]^{1/4} \varphi_1(x)\right\}' \sim \left[-k-(x+1)^{-d}\right]^{1/2} \exp\left\{\int_0^x \left[-k-(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du\right\}$$

ve

$$\varphi_2(x) \sim \left[-k-(x+1)^{-d}\right]^{-1/4} \exp\left\{-\int_0^x \left[-k-(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du\right\},$$

$$\left\{\left[-k-(x+1)^{-d}\right]^{1/4} \varphi_2(x)\right\}' \sim -\left[-k-(x+1)^{-d}\right]^{1/2} \exp\left\{-\int_0^x \left[-k-(u+1)^{-d}\right]^{1/2} du\right\}$$

sağlanır.

Problem 2.5: $c > 0$ ve $0 \le x < \infty$ olmak üzere

$$y''(x) - e^{cx} y(x) = 0 \tag{2.21}$$

denklemi için asimptotik çözüm araştırınız.

Çözüm:

(2.21) denklemi, (1.59) formunda düşünülürse

$$q(x) := -e^{cx}$$

alınmalıdır. Burada, $q(x) \to -\infty \ (x \to \infty)$. $[0,\infty)$ aralığında q(x) reel değerli, $q(x) < 0$ ve $q'(x) = -ce^{cx}, q''(x) = -c^2e^{cx}$ olmak üzere $q''(x)$ mevcut ve süreklidir. Ayrıca;

i) $$\int_0^\infty |q(x)|^{1/2} dx = \int_0^\infty e^{cx/2} dx = \frac{2}{c} e^{\frac{cx}{2}}\Big|_0^\infty \to \infty$$

yani $\int_0^\infty |q(x)|^{1/2} dx$ ıraksaktır,

ii) $$\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{|q(x)|^{5/2}} dx = \int_0^\infty \frac{c^2 e^{2cx}}{e^{5cx/2}} dx = \int_0^\infty c^2 e^{-cx/2} dx = -2ce^{-cx/2} = 2c < \infty$$

yani $\int_0^\infty \frac{\{q'(x)\}^2}{|q(x)|^{5/2}} dx$ yakınsaktır. Benzer şekilde,

$$\int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{|q(x)|^{3/2}}dx = \int_0^\infty \frac{c^2 e^{cx}}{e^{3cx/2}}dx = \int_0^\infty c^2 e^{-cx/2}dx = -2ce^{-cx/2}\Big|_0^\infty = 2c < \infty$$

yani $\int_0^\infty \frac{|q''(x)|}{|q(x)|^{3/2}}dx$ yakınsaktır.

Bu durumda Teorem 1.9' a göre; $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$, (2.21) denkleminin asimptotik çözümleri olmak üzere

$$e^{cx/4}\varphi_1(x) \sim \exp\left\{\int_0^x e^{cu/2}du\right\} \quad , \quad \left[e^{cx/4}\varphi_1(x)\right]' \sim e^{cx/2}\exp\left\{\int_0^x e^{cu/2}du\right\}$$

ve

$$e^{cx/4}\varphi_2(x) \sim \exp\left\{-\int_0^x e^{cu/2}du\right\} \quad , \quad \left[e^{cx/4}\varphi_2(x)\right]' \sim -e^{cx/2}\exp\left\{-\int_0^x e^{cu/2}du\right\}$$

sağlanacak şekilde mevcuttur.

Problem 2.6: $c > 0$ ve $0 \le x < \infty$ olmak üzere

$$y''(x) - x^c y(x) = 0 \tag{2.22}$$

denklemi için asimptotik çözüm araştırınız.

Çözüm: Birinci bölümde verilen yöntemlerle çözülemeyen (2.22) denklemi, uygun dönüşümler yardımıyla, asimptotik çözümü tahmin edilebilen bir denkleme dönüştürülür [2]. Bunun için ilk olarak

$$s = \int_0^x u^{c/2}du$$

dönüşümü kullanılsın. Buna göre

$$\frac{ds}{dx} = x^{c/2} \quad \text{yani} \quad dx = x^{-c/2}ds \tag{2.23}$$

ve

$$s = \frac{2}{c+2}x^{\frac{c}{2}+1} \tag{2.24}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.23) kullanılarak

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^{c/2}\frac{d}{ds}\left(x^{c/2}\frac{dy}{ds}\right)$$

yani

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{c/2}\left[x^{c/2}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{c}{2}x^{\frac{c}{2}-1}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right]$$

$$= x^{c}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{c}{2}x^{\frac{c}{2}-1}\frac{dy}{ds}$$

bulunur. Bu değer (2.22) denkleminde yerine yazılırsa

$$x^{c}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{c}{2}x^{\frac{c}{2}-1}\frac{dy}{ds} - x^{c}y = 0$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı " x^c " ile bölünürse

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{c}{2}x^{-(\frac{c}{2}+1)}\frac{dy}{ds} - y = 0$$

ve (2.24) kullanılırsa

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{c}{s(c+2)}\frac{dy}{ds} - y = 0 \qquad (2.25).$$

Bu denklemde " dy/ds " terimini yok etmek için

$$v = yx^{c/4} \qquad (2.26)$$

dönüşümü kullanılır. Buna göre

$$y = vx^{-c/4}$$

eşitliği ile (2.23)' ten

$$\frac{dy}{ds} = x^{-\frac{c}{4}}\frac{dv}{ds} - \frac{c}{4}x^{-\frac{c}{4}-1}\frac{dx}{ds}v = x^{-\frac{c}{4}}\frac{dv}{ds} - \frac{c}{4}x^{-\frac{3c}{4}-1}v$$

ve

$$\frac{d^2y}{ds^2} = x^{-\frac{c}{4}}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{c}{2}x^{-\frac{3c}{4}-1}\frac{dv}{ds} + \frac{c}{4}(\frac{3c}{4}+1)x^{-\frac{3c}{4}-2}\frac{dx}{ds}v$$

$$= x^{-\frac{c}{4}}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{c}{2}x^{-\frac{3c}{4}-1}\frac{dv}{ds} + \frac{c}{4}(\frac{3c}{4}+1)x^{-\frac{5c}{4}-2}v$$

bulunur. Bu değerler (2.25)' te yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left[-1 + \frac{c}{4}(\frac{c+4}{4})x^{-c-2}\right]v = 0$$

ve (2.24) eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \left[-1 + As^{-2}\right]v = 0 \qquad (2.27)$$

denklemi elde edilir. Burada

$$A := \frac{c(c+4)}{4(c+2)^2}.$$

Şimdi ikinci mertebeden lineer bir denklem olan (2.27), seri yöntemi kullanılarak çözülebilir:

$$x_1 = v,$$
$$x_2 = v'$$

dönüşümü ile

$$X' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} \right\} X \tag{2.28}$$

sistemine dönüştürülür. Burada

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{bmatrix}.$$

Ayrıca sistemin baş matrisinin özdeğerleri, $\lambda = \pm 1$ olmak üzere, birbirinden farklıdır. Dolayısıyla (1.2) formundaki bu sistem için

$$X = e^{\lambda s} s^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} C_k s^{-k} \tag{2.29}$$

şeklinde çözüm araştırılır (λ ve μ sabitler, C_k vektörler). Bilinmeyenleri belirlemek için (1.4) denklemleri kullanılır. $\lambda = 1$ için;

I. (1.4) sisteminin birinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_0 = 0$$

göz önüne alınsın. $C_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -p_0 + q_0 \\ p_0 - q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$p_0 = q_0$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_0 = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

II. (1.4) sisteminin ikinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_1 = (\mu - A_1)C_0$$

göz önüne alınsın. $C_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -p_1 + q_1 \\ p_1 - q_1 \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$p_1 - q_1 = -p_1 + q_1 \quad \text{yani} \quad p_1 = q_1$$

ve

$$\mu = 0$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_1 = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

III. (1.4) sisteminin üçüncü denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_2 = (\mu - 1)C_1 - A_2 C_0 - A_1 C_1$$

göz önüne alınsın. $C_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = -p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - p_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -p_2 + q_2 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_1 + Ap_0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$p_1 = -p_1 + Ap_0 \quad \text{yani} \quad p_1 = \frac{A}{2} p_0$$

ve

$$p_2 = q_2 + \frac{A}{2} p_0$$

alınmalıdır. O halde, $p_0 \alpha = q_2$ olmak üzere

$$C_1 = p_0 \begin{pmatrix} A/2 \\ A/2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C_2 = p_0 \begin{pmatrix} \alpha + \frac{A}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

IV. (1.4) sisteminin dördüncü denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_3 = (\mu - 2)C_2 - A_3 C_0 - A_2 C_1 - A_1 C_2$$

göz önüne alınsın. $C_3 = \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = -2p_0 \begin{pmatrix} \alpha + \frac{A}{2} \\ \alpha \end{pmatrix} - p_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A/2 \\ A/2 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -p_3 + q_3 \\ p_3 - q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2p_0\alpha - Ap_0 \\ -2p_0\alpha + \frac{A^2}{2} p_0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$\alpha = \frac{A(A-2)}{8}$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_2 = p_0 \begin{pmatrix} \frac{A(A+2)}{8} \\ \frac{A(A-2)}{8} \end{pmatrix}.$$

Bu şekilde işlemlere devam edilirse (2.28) denklem sistemi için birinci asimptotik çözüm

$$X_1 = p_0 e^s \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A/2 \\ A/2 \end{bmatrix} \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} \frac{A(A+2)}{8} \\ \frac{A(A-2)}{8} \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} + \ldots \right\}$$

formunda elde edilir. Dolayısıyla

$$v_1 = p_0 e^s \left\{ 1 + \frac{A}{2s} + \frac{A(A+2)}{8s^2} + \dots \right\}.$$

Burada (2.24) ve (2.26) kullanılırsa, (2.22) denkleminin y_1 çözümü

$$y_1 = p_0 e^{\frac{2}{c+2} x^{\frac{c+2}{2}}} x^{-c/4} \left[1 + \frac{A(c+2)}{4x^{c+2/2}} + \frac{A(A+2)(c+2)^2}{32x^{c+2}} + \dots \right]$$

olarak bulunur.

Şimdi $\lambda = -1$ için;

I. (1.4) sisteminin birinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_0 = 0$$

göz önüne alınsın. $C_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ u_0 + v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$u_0 = -v_0$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_0 = u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

II. (1.4) sisteminin ikinci denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_1 = (\mu - A_1)C_0$$

göz önüne alınsın. $C_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_1 + v_1 \end{pmatrix} = u_0 \begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$\mu = 0$$

ve

$$u_1 = -v_1$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_1 = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

III. (1.4) sisteminin üçüncü denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_2 = (\mu - 1)C_1 - A_2 C_0 - A_1 C_1$$

göz önüne alınsın. $C_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = -u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - u_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} u_2 + v_2 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ u_1 + Au_0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$u_1 = -\frac{A}{2} u_0$$

ve buradan da

$$u_2 = \frac{A}{2} u_0 - v_2$$

alınmalıdır. O halde, $u_0 \gamma = v_2$ olmak üzere

$$C_1 = u_0 \begin{pmatrix} -A/2 \\ A/2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C_2 = u_0 \begin{pmatrix} \frac{A}{2} - \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

IV. (1.4) sisteminin dördüncü denklemi

$$(A_0 - \lambda I)C_3 = (\mu - 2)C_2 - A_3 C_0 - A_2 C_1 - A_1 C_2$$

göz önüne alınsın. $C_3 = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$ olmak üzere bilinenler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = -2u_0\begin{pmatrix} \frac{A}{2}-\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} - u_0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A/2 \\ A/2 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} u_3+v_3 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Au_0+2\gamma u_0 \\ -2\gamma u_0 - \frac{A^2}{2}u_0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Uyumluluk gereği

$$\gamma = \frac{A(2-A)}{8}$$

alınmalıdır. O halde,

$$C_2 = u_0\begin{pmatrix} \frac{A(A+2)}{8} \\ \frac{A(2-A)}{8} \end{pmatrix}.$$

Bu şekilde işlemlere devam edilirse (2.28) denklem sistemi için ikinci asimptotik çözüm

$$X_2 = u_0 e^{-s}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A/2 \\ A/2 \end{bmatrix}\frac{1}{s} + \begin{bmatrix} \frac{A(A+2)}{8} \\ \frac{A(2-A)}{8} \end{bmatrix}\frac{1}{s^2} + \ldots\right\}$$

formunda elde edilir. Dolayısıyla

$$v_2 = u_0 e^{-s}\left[1 - \frac{A}{2s} + \frac{A(A+2)}{8s^2} + \ldots\right].$$

Burada (2.24) ve (2.26) kullanılırsa, (2.22) denkleminin y_2 çözümü

$$y_2 = u_0 e^{-\frac{2}{c+2}x^{\frac{c+2}{2}}} x^{-c/4}\left[1 - \frac{A(c+2)}{4x^{c+2/2}} + \frac{A(A+2)(c+2)^2}{32x^{c+2}} + \ldots\right]$$

olarak bulunur. Böylece genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 p_0 e^{\frac{2}{c+2}x^{\frac{c+2}{2}}} x^{-c/4}\left[1 + \frac{A(c+2)}{4x^{c+2/2}} + \frac{A(A+2)(c+2)^2}{32x^{c+2}} + \ldots\right] \\ &\quad + c_2 u_0 e^{-\frac{2}{c+2}x^{\frac{c+2}{2}}} x^{-c/4}\left[1 - \frac{A(c+2)}{4x^{c+2/2}} + \frac{A(A+2)(c+2)^2}{32x^{c+2}} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

(2.22) denklemi $c=1$ özel durumu için literatürde ‘Airy Denklemi’ olarak bilinmektedir. Yukarıda elde edilen asimptotik çözümde $c=1$ alındığında bulunan sonuç, birinci bölümdeki Örnek 1.2’ de verilen Airy denkleminin asimptotik çözümüyle uyumludur.

Bu bölümde son olarak

$$y''(x)+\{k+r(x)\}\,y(x)=0$$

denkleminin çözümleri için

$$\int_x^{\infty}|r(t)|\,dt=O(x^{-p})$$

özelliğinin sağlanması durumunda asimptotik formüller elde edilmiştir. Literatürde benzer sonuçlar farklı koşullar altında ispatlanmıştır (Teorem 1.4- 1.6).

Teorem 2.1:

$$y''(x)+\{k+r(x)\}\,y(x)=0 \tag{2.30}$$

denkleminde $k=-\alpha^2$, $\alpha>0$ ve

$$\int_x^{\infty}|r(t)|\,dt=O(x^{-p}) \quad , \quad (p>0) \tag{2.31}$$

alınsın. Bu durumda (2.30) denkleminin $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri

$$\Psi_1(x)=e^{\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right],\ \Psi_1'(x)=\alpha e^{\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right] \tag{2.32}$$

ve

$$\Psi_2(x)=e^{-\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right],\ \Psi_2'(x)=-\alpha e^{-\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right] \tag{2.33}$$

olacak şekilde mevcuttur.

İspat: $k=-\alpha^2$, $\alpha>0$ için

$$y''(x)+ky(x)=0$$

denkleminin $W(\Phi_1,\Phi_2)(x)=1$ sağlayacak şekilde iki lineer bağımsız çözümü $\Phi_1(x)=e^{\alpha x}$ ve $\Phi_2(x)=-e^{-\alpha x}/2\alpha$ olarak seçilebilir. Bu durumda Özellik 1.2’ ye göre (2.30) denkleminin $\Psi(x)$ çözümü, $c_1=1$ ve $c_2=0$ alınırsa

$$\Psi(x)=e^{\alpha x}+\frac{1}{2\alpha}\int_x^{a}\left\{e^{\alpha(x-t)}-e^{\alpha(t-x)}\right\}r(t)\Psi(t)\,dt \tag{2.34}$$

bulunur. Burada a, $[0,\infty)$ aralığında herhangi bir sabit sayıdır. (2.34)' ün her iki tarafı "$e^{-\alpha x}$" ile çarpılırsa

$$e^{-\alpha x}\Psi(x)=1+\frac{1}{2\alpha}\int_x^a\left\{1-e^{2\alpha(t-x)}\right\}r(t)e^{-\alpha t}\Psi(t)dt$$

$$\leq 1+\frac{1}{2\alpha}\int_x^a r(t)e^{-\alpha t}\Psi(t)dt \qquad .$$

Eğer $x<a$ ise

$$e^{-\alpha x}\left|\Psi(x)\right|\leq 1+\frac{1}{2\alpha}\int_x^a\left|r(t)\right|e^{-\alpha t}\left|\Psi(t)\right|dt$$

elde edilir. Teorem 1.1(Gronwall Teoremi)' e göre

$$e^{-\alpha x}\left|\Psi(x)\right|\leq \exp\left\{\frac{1}{2\alpha}\int_x^a\left|r(t)\right|dt\right\}.$$

O halde (2.31)' den

$$\int_x^a\left|r(t)\right|dt\leq\int_x^\infty\left|r(t)\right|dt=O(x^{-p}) \qquad (2.35).$$

Bu son eşitsizlik ve üstel fonksiyonun seri açılımı kullanılarak

$$e^{-\alpha x}\left|\Psi(x)\right|\leq \exp\left\{\int_x^\infty\left|r(t)\right|dt\right\}\leq \exp\left\{O(x^{-p})\right\}=1+O(x^{-p})$$

veya

$$\left|\Psi(x)\right|\leq e^{\alpha x}\left\{1+O(x^{-p})\right\} \qquad (2.36)$$

bulunur. Şimdi (2.34) eşitliğindeki

$$I_1:=\int_x^a e^{\alpha(x-t)}r(t)\Psi(t)dt$$

ve

$$I_2:=\int_x^a e^{\alpha(t-x)}r(t)\Psi(t)dt$$

integralleri ayrı ayrı incelensin. Buna göre;

- $\left|I_1\right|=\left|\int_x^a e^{\alpha(x-t)}r(t)\Psi(t)dt\right|\leq\int_x^a e^{\alpha(x-t)}\left|r(t)\right|\left|\Psi(t)\right|dt$

eşitsizliğinde (2.36) kullanılırsa

$$\left|I_1\right| \le \int_x^{\infty} e^{\alpha x}\left|r(t)\right|\{1+O(t^{-p})\}dt = e^{\alpha x}\left\{\int_x^{\infty}\left|r(t)\right|dt + O\left(\int_x^{\infty}\left|r(t)\right|t^{-p}dt\right)\right\}.$$

Son terim

$$O\left(\int_x^{\infty}\frac{\left|r(t)\right|}{t^p}dt\right) \le O\left(\int_x^{\infty}\left|r(t)\right|dt\right) = O(x^{-p}) \tag{2.37}$$

olduğundan

$$I_1 = e^{\alpha x}O(x^{-p}) \qquad \left(x\to\infty\right) \tag{2.38}$$

- $\left|I_2\right| = \left|\int_x^{a} e^{\alpha(t-x)}r(t)\Psi(t)dt\right| \le \int_x^{a} e^{\alpha(t-x)}\left|r(t)\right|\left|\Psi(t)\right|dt$

eşitsizliğinde (2.36) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|I_2\right| &\le e^{\alpha x}\int_x^{a} e^{2\alpha(t-x)}\left|r(t)\right|\{1+O(t^{-p})\}dt\\ &\le e^{\alpha x}\int_x^{a} e^{2\alpha a}\left|r(t)\right|\{1+O(t^{-p})\}dt\\ &\le e^{\alpha x}e^{2\alpha a}\left\{\int_x^{\infty}\left|r(t)\right|dt + O\left(\int_x^{\infty}t^{-p}r(t)dt\right)\right\} \qquad (x\to\infty).\end{aligned}$$

O halde, (2.31) ve (2.37)' den

$$I_2 = e^{\alpha x}O(x^{-p}) \quad \left(x\to\infty\right) \tag{2.39}$$

Elde edilen (2.38) ve (2.39) değerleri (2.34)' te yerine yazılırsa

$$\Psi(x) = e^{\alpha x}\left\{1+O(x^{-p})\right\} \qquad \left(x\to\infty\right).$$

Buna göre

$$\Psi_1(x) := \Psi(x)$$

olarak tanımlanırsa (2.32) eşitliklerinden birincisi sağlanmış olur. $\Psi_1'(x)$ ' i belirlemek için ise (2.34)' ün türevi alınır:

$$\Psi_1'(x) = \Psi'(x) = \alpha e^{\alpha x} + \frac{1}{2\alpha}\left[I_1' - I_2'\right]$$

$$= \alpha e^{\alpha x} + \frac{1}{2\alpha}\left\{\left[e^{\alpha x}\int_x^\infty e^{-\alpha t} r(t)\Psi(t)dt\right]' - \left[e^{-\alpha x}\int_x^\infty e^{\alpha t} r(t)\Psi(t)dt\right]'\right\}$$

$$= \alpha e^{\alpha x} + \frac{1}{2\alpha}\left\{\alpha e^{\alpha x}\int_x^\infty e^{-\alpha t} r(t)\Psi(t)dt - r(x)\Psi(x) + \alpha e^{-\alpha x}\int_x^\infty e^{\alpha t} r(t)\Psi(t)dt + r(x)\Psi(x)\right\}$$

$$= \alpha e^{\alpha x} + \frac{1}{2}\left[I_1 + I_2\right]$$

$$= \alpha e^{\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\}.$$

Böylece (2.32)’ nin ikinci kısmı da sağlanmış olur. Ayrıca,

$$\Psi_1(x) = e^{\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\} \quad (x \to \infty)$$

çözümünün oldukça büyük bir b sayısı için sıfır yerinin olmadığı $[b, \infty)$ aralığı tanımlanabileceğinden ve

$$\int_b^\infty \left\{\Psi_1(t)\right\}^{-2} dt = \int_b^\infty \frac{e^{-2\alpha x}}{\left\{1 + O(x^{-p})\right\}} dx \le \int_b^\infty e^{-2\alpha x} dx = -\frac{1}{2\alpha e^{2\alpha x}}\Bigg|_b^\infty = \frac{1}{2\alpha e^{2\alpha b}} < \infty$$

olduğundan Özellik 1.3’ e göre bu aralıkta (2.30) denkleminin $\Psi_2(x)$ çözümü mevcuttur:

$$\Psi_2(x) := 2\alpha\Psi_1(x)\int_x^\infty \left\{\Psi_1(t)\right\}^{-2} dt \tag{2.40}$$

$$= 2\alpha e^{\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\}\int_x^\infty e^{-2\alpha t}\left\{1 + O(t^{-p})\right\}^{-2} dt$$

$$= 2\alpha e^{\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\}\int_x^\infty \frac{e^{-2\alpha t}}{1 + O(t^{-p})} dt$$

$$\le 2\alpha e^{\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\}\int_x^\infty e^{-2\alpha t} dt$$

$$= 2\alpha e^{\alpha x}\frac{1}{2\alpha e^{2\alpha x}}\left\{1 + O(x^{-p})\right\}$$

$$= e^{-\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\}$$

Burada (2.40) eşitliği, (2.33)’ ün birinci kısmını tam olarak elde edebilmek için (1.36)’ dan sabit katı kadar farklı alınmıştır. (2.33)’ ün ikinci kısmının ispatı ise (2.40)’ ın türevi alınarak bulunur.

$$\Psi_2'(x)=2\alpha\Psi_1'(x)\int_x^\infty\{\Psi_1(t)\}^{-2}dt-2\alpha\Psi_1(x)\{\Psi_1(x)\}^{-2}$$

$$=2\alpha^2e^{\alpha x}\left\{1+O(x^{-p})\right\}\int_x^\infty e^{-2\alpha t}\left\{1+O(t^{-p})\right\}^{-2}dt-2\alpha\{\Psi_1(x)\}^{-1}$$

$$\le 2\alpha^2e^{\alpha x}\left\{1+O(x^{-p})\right\}\int_x^\infty e^{-2\alpha t}dt-2\alpha e^{-\alpha x}\left\{1+O(x^{-p})\right\}$$

$$=2\alpha^2e^{\alpha x}\frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha}\left\{1+O(x^{-p})\right\}-2\alpha e^{-\alpha x}\left\{1+O(x^{-p})\right\}$$

$$=-\alpha e^{-\alpha x}\left\{1+O(x^{-p})\right\}.$$

Teorem 2.2:

$$y''(x)+\{k+r(x)\}y(x)=0 \qquad (2.41)$$

denkleminde $k=\alpha^2$, $\alpha>0$ alınsın ve (2.31) sağlansın. Bu durumda (2.41) denkleminin $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ çözümleri

$$\Psi_1(x)=e^{i\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right],\ \Psi_1'(x)=i\alpha e^{i\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right] \qquad (2.42)$$

ve

$$\Psi_2(x)=e^{-i\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right],\ \Psi_2'(x)=-i\alpha e^{-i\alpha x}\left[1+O(x^{-p})\right] \qquad (2.43)$$

olacak şekilde mevcuttur.

İspat: $k=\alpha^2$, $\alpha>0$ için

$$y''(x)+ky(x)=0$$

denkleminin $W(\Phi_1,\Phi_2)(x)=1$ sağlayacak şekilde iki lineer bağımsız çözümü $\Phi_1(x)=e^{i\alpha x}$ ve $\Phi_2(x)=-e^{-i\alpha x}/2i\alpha$ olarak alınabilir. Bu durumda Özellik 1.2' ye göre (2.41) denkleminin $\Psi(x)$ çözümü, $c_1=1$ ve $c_2=0$ alınırsa

$$\Psi(x)=e^{i\alpha x}+\frac{1}{2i\alpha}\int_x^a\left\{e^{i\alpha(x-t)}-e^{i\alpha(t-x)}\right\}r(t)\Psi(t)dt \qquad (2.44)$$

bulunur. Burada a, $[0,\infty)$ aralığında herhangi bir sabit sayıdır. Eşitliğin her iki tarafı "$e^{-i\alpha x}$" ile çarpılırsa

$$e^{-i\alpha x}\Psi(x)=1+\frac{1}{2i\alpha}\int_x^a\left\{1-e^{2i\alpha(t-x)}\right\}e^{-i\alpha t}r(t)\Psi(t)dt \qquad (2.45).$$

Buradan mutlak değer alınarak

$$\left|\Psi(x)\right| \le 1 + \frac{1}{2\alpha}\int_x^a \left|r(t)\right|\left|\Psi(t)\right| dt$$

bulunur. Teorem 1.1(Gronwall Teoremi)' e göre

$$\left|\Psi(x)\right| \le \exp\left\{\frac{1}{2\alpha}\int_x^a \left|r(t)\right| dt\right\}.$$

O halde, (2.35) ve üstel fonksiyonun seri açılımı kullanılırsa

$$\Psi(x) = 1 + O(x^{-p})$$

olarak elde edilir.

Şimdi (2.45) eşitliğindeki

$$I_1 := \int_x^a e^{-i\alpha t} r(t)\Psi(t) dt$$

ve

$$I_2 := \int_x^a e^{i\alpha t} e^{-2i\alpha x} r(t)\Psi(t) dt$$

integralleri ayrı ayrı incelensin:

- $\left|I_1\right| = \left|\int_x^a e^{-i\alpha t} r(t)\Psi(t) dt\right| \le \int_x^a \left|r(t)\right|\left|\Psi(t)\right| dt \le \int_x^\infty \left|r(t)\right| dt + O\left(\int_x^\infty \left|r(t)\right| t^{-p} dt\right)$

eşitsizliğinde (2.31) ve (2.37) kullanılırsa

$$I_1 = O(x^{-p}) \qquad (x \to \infty) \tag{2.46.}$$

- $\left|I_2\right| = \left|\int_x^a e^{i\alpha t} e^{-2i\alpha x} r(t)\Psi(t) dt\right| \le \int_x^a \left|r(t)\right|\left|\Psi(t)\right| dt \le \int_x^\infty \left|r(t)\right| dt + O\left(\int_x^\infty \left|r(t)\right| t^{-p} dt\right)$

eşitsizliğinde (2.31) ve (2.37) kullanılırsa

$$I_2 = O(x^{-p}) \qquad (x \to \infty) \tag{2.47.}$$

Elde edilen (2.46) ve (2.47) değerleri (2.45)' te yerine yazılırsa

$$\Psi(x) = e^{i\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\} \qquad (x \to \infty) \tag{2.48.}$$

Ayrıca, Özellik 1.2' de $c_1 = 0$ ve $c_2 = -2i\alpha$ alınarak (2.41) denkleminin ikinci çözümü

$$\xi(x) = e^{-i\alpha x} + \frac{1}{2i\alpha}\int_x^a \left\{e^{i\alpha(x-t)} - e^{i\alpha(t-x)}\right\} r(t)\xi(t) dt \tag{2.49}$$

bulunur. Bu çözüme de benzer işlemler uygulanırsa

$$\xi(x) = e^{-i\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\} \qquad (x \to \infty)$$

olacak şekilde elde edilir.

Böylece, $\Psi(x)$ ve $\xi(x)$ ' in bir lineer kombinasyonu

$$\zeta(x) := \gamma\Psi(x) + \beta\xi(x)$$

olmak üzere (γ ve β keyfi sabitler); $\gamma = 1$, $\beta = 0$ alınarak (2.41) denkleminin $\Psi_1(x)$ çözümü ve $\gamma = 0$, $\beta = 1$ alınarak (2.41) denkleminin $\Psi_2(x)$ çözümü elde edilir. Böylece (2.42) ve (2.43)' ün birinci kısmı ispatlanmış olur. İkinci kısımların ispatı ise Teorem 2.1' deki gibi (2.44) ve (2.49)' un türevleri alınarak yapılır:

$$\begin{aligned}
\Psi'(x) &= i\alpha e^{i\alpha x} + \frac{1}{2i\alpha}\left\{ i\alpha e^{i\alpha x}\int_x^a e^{-i\alpha t} r(t)\Psi(t)dt + i\alpha e^{-i\alpha x}\int_x^a e^{i\alpha t} r(t)\Psi(t)dt \right\} \\
&= i\alpha e^{i\alpha x} + \frac{1}{2} e^{i\alpha x}\left\{ \int_x^a e^{-i\alpha t} r(t)\Psi(t)dt + e^{-2i\alpha x}\int_x^a e^{i\alpha t} r(t)\Psi(t)dt \right\} \\
&= i\alpha e^{i\alpha x}\left\{1 + O(x^{-p})\right\}
\end{aligned}$$

Bu teorem yardımıyla aşağıdaki problemde Bessel diferensiyel denkleminin asimptotik çözüm formu incelenecektir.

Problem 2.7:

$$x^2 w''(x) + x w'(x) + (x^2 - \gamma^2) w(x) = 0 \qquad (2.50)$$

şeklindeki Bessel diferensiyel denkleminin reel değerli çözümü w(x) olsun (γ reel sabit). Bu çözümün;

$$w(x) = x^{-1/2} y(x) \qquad (2.51)$$

dönüşümünü kullanarak, c ve θ reel sabitler olmak üzere

$$w(x) = c x^{-1/2}\sin(x + \theta) + O(x^{-3/2})$$

formunda olduğunu gösteriniz.

İspat:

Öncelikle (2.50) denklemine (2.51) dönüşümü uygulansın. Bunun için (2.51) kullanılarak $w'(x)$ ve $w''(x)$ türevleri belirlenir:

$$w'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2} y + x^{1/2} y'$$

ve

$$w''(x) = \frac{3}{4} x^{-5/2} y - x^{-3/2} y' + x^{-1/2} y''.$$

Bu değerler (2.50) denkleminde yerine yazılırsa

$$y''(x) + \left\{1 + \frac{\zeta}{x^2}\right\} y(x) = 0 \qquad (2.52)$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$\zeta := \frac{1}{4} - \gamma^2.$$

Dikkat edilirse (2.52) denklemi $k := 1$ ve $r(x) := \frac{\zeta}{x^2}$ olmak üzere (1.39) formundadır.

Ayrıca,

$$\int_x^\infty |r(t)|\, dt = \int_x^\infty \frac{\zeta}{t^2} dt = -\frac{\zeta}{t}\Big|_x^\infty = \frac{\zeta}{x} = O(x^{-1}).$$

Dolayısıyla Teorem 2.2' de verilen koşullar sağlanmaktadır. O halde, (2.52) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \Psi_1(x) + c_2 \Psi_2(x) \\ &= c_1 e^{ix} \left\{1 + O(x^{-1})\right\} + c_2 e^{-ix} \left\{1 + O(x^{-1})\right\} \end{aligned}$$

formundadır. (2.51) kullanılırsa

$$\begin{aligned} w(x) &= x^{-1/2} \left[c_1 (\cos x + i \sin x) \left\{1 + O(x^{-1})\right\} + c_2 (\cos x - i \sin x) \left\{1 + O(x^{-1})\right\} \right] \\ &= x^{-1/2} \left\{A \cos x + B \sin x\right\} + O(x^{-3/2}) \end{aligned}$$

bulunur $\left(\sin x = O(1),\ \cos x = O(1),\ \ x \to \infty\right)$. Burada,

$$\begin{aligned} A &:= (c_1 + c_2), \\ B &:= i(c_1 - c_2) \end{aligned} \qquad (2.53).$$

Biliniyorki;

$$\sin\theta := \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \quad \text{ve} \quad \cos\theta := \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

olmak üzere

$$C \cos x + D \sin x = \sqrt{C^2 + D^2} \sin(x + \theta)$$

' dır (C ve D sabitler). Buna göre (2.53)' ten

$$\sqrt{A^2+B^2}=2\sqrt{c_1c_2}$$

eşitliği elde edilir ve w(x) çözümü,

$$\begin{aligned} w(x) &= x^{-1/2}\{A\cos x + B\sin x\} + O(x^{-3/2}) \\ &= 2\sqrt{c_1c_2}\,x^{-1/2}\sin(x+\theta) + O(x^{-3/2}) \\ &= cx^{-1/2}\sin(x+\theta) + O(x^{-3/2}) \end{aligned}$$

yani

$$w(x) = cx^{-1/2}\sin(x+\theta) + O(x^{-3/2})$$

formunda bulunur. Burada

$$c := 2\sqrt{c_1c_2}\ ,$$

$$\sin\theta := \frac{c_1+c_2+O(x^{-1})}{\sqrt{4c_1c_2+O(x^{-1})}}\,,$$

$$\cos\theta := \frac{i(c_1-c_2)+O(x^{-1})}{\sqrt{4c_1c_2+O(x^{-1})}}\,.$$

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın literatüre katkıları aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1. “ Konfluent hipergeometrik denklemi ” olarak bilinen

   $$zy'' + (c - z)y' - ay = 0$$

   denkleminin $z \to \infty$ için asimptotik çözümleri seri yöntemiyle elde edilmiştir.

2. $$zy'' - (1+z)y' + z^3 y = 0$$

   denkleminin $z \to \infty$ için asimptotik çözümleri hesaplanmış ve yakınsaklığı araştırılmıştır.

3. Birden fazla parametre içeren denklemlerin asimptotik çözümleriyle ilgili olarak

   $$y'' - \mu e^z y' - \mu y = 0$$

   denkleminin $\mu \to \infty$ için asimptotik çözümü bulunmuş ve yakınsaklığı araştırılmıştır.

4. Serilerle çözümün zor ya da kullanışsız olduğu bazı durumlarda, örneğin

   $$y''(x) + \left\{k + (x+1)^{-d}\right\} y(x) = 0$$

   denklemi için Liouville dönüşümü kullanılarak asimptotik çözüm elde edilmiştir.

5. $c > 0$ ve $0 \le x < \infty$ olmak üzere

   $$y''(x) - e^{cx} y(x) = 0$$

   denkleminin Liouville dönüşümü kullanılarak asimptotik çözümünün yapısı belirlenmiştir.

6. $c > 0$ ve $0 \le x < \infty$ olmak üzere

   $$y''(x) - x^c y(x) = 0$$

   denklemi, bazı özel dönüşümler yardımıyla

   $$X' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \right) X$$

   formundaki denklem sistemine dönüştürülerek asimptotik çözümü bulunmuştur. Bu denklem $c = 1$ özel durumu için literatürde “Airy Denklemi” olarak bilinmektedir. Elde edilen çözümler $c = 1$ için Airy denkleminin mevcut asimptotik çözümleriyle uyumludur.

7. $k = -\alpha^2$, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\int_x^\infty |r(t)| dt = O\left(x^{-p}\right)$$

koşulu altında

$$y''(x) + \{k + r(x)\} y(x) = 0$$

denkleminin $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ asimptotik çözümlerinin

$$\Psi_1(x) = e^{\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right], \ \Psi_1'(x) = \alpha e^{\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right]$$

ve

$$\Psi_2(x) = e^{-\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right], \ \Psi_2'(x) = -\alpha e^{-\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right]$$

şeklinde olduğu ispatlanmıştır.

8. $k = \alpha^2$, $\alpha>0$ olmak üzere

$$\int_x^\infty |r(t)| dt = O\left(x^{-p}\right)$$

koşulu altında

$$y''(x) + \{k + r(x)\} y(x) = 0$$

denkleminin $\Psi_1(x)$ ve $\Psi_2(x)$ asimptotik çözümlerinin

$$\Psi_1(x) = e^{i\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right], \ \Psi_1'(x) = i\alpha e^{i\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right]$$

ve

$$\Psi_2(x) = e^{-i\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right], \ \Psi_2'(x) = -i\alpha e^{-i\alpha x}\left[1 + O(x^{-p})\right]$$

şeklinde olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuç kullanılarak Bessel denklemi olarak bilinen

$$x^2 w''(x) + x w'(x) + (x^2 - \gamma^2) w(x) = 0$$

diferensiyel denkleminin asimptotik çözümü,

$$w(x) = c x^{-1/2} \sin(x + \theta) + O(x^{-3/2})$$

formunda bulunmuştur.

4. ÖNERİLER

1. $$X' = z^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k} \right) X$$

   sisteminde A_0 matrisinin katlı özdeğerlere sahip olması durumunda asimptotik çözüm araştırılabilir.

2. $[C]_{n\times n}$ sabit bir matris ve $[R(x)]_{n\times n}$, $[0,\infty)$ aralığında sürekli bir matris olmak üzere

   $$R(x) \to 0 \quad (x \to \infty)$$

   ve

   $$\int_0^{\infty} \left| R^{(j)}(x) \right| dx < \infty, \quad j = 1,2$$

   alınsın. Bu koşullar altında

   $$Y'(x) = \{C + R(x)\} Y(x)$$

   sisteminin asimptotik çözüm formu incelenebilir.

3. $k \neq 0$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

   $$y''(x) + \{k + r(x)\} y(x) = 0$$

   denklemi için

   $$\int_x^{\infty} |r(t)| dt = o(x^{-p})$$

   koşulu altında asimptotik çözüm araştırılabilir.

4. c reel olmayan sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere

   $$y''(x) + \{c^2 + r(x)\} y(x) = 0$$

   denklemi için

   $$\int_0^{\infty} |r(x)|^p dx < \infty, \quad p>1$$

   koşulu altında asimptotik çözüm araştırılabilir.

5. $$y''(x) + r(x) y(x) = 0$$

denklemi için

$$\int_x^\infty t\left|r(t)\right|dt = O(x^{-p})$$

koşulu altında asimptotik çözüm araştırılabilir.

6. $$y''(x) \pm \phi^2(x)y(x) = 0$$

formundaki denklemlerde

$$\phi(x) := 1/x^a, \ 1/\log x, \ x, \ e^x, \ \log x$$

durumlarının olması halinde asimptotik çözümler araştırılabilir.

7. c_j reel sabitler olmak üzere n. mertebeden

$$y^{(n)}(x) + \{c_1 + r_1(x)\}\, y^{(n-1)}(x) + ... + \{c_n + r_n(x)\}\, y(x) = 0$$

denklemi için

$$\int_0^\infty \left|r_j(x)\right|dx < \infty \qquad (x \to \infty)$$

koşulu altında asimptotik çözüm araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Abramowitz, M. and Stegun(Eds.), I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications Inc., New York, 1965.

2. Bellman, R., Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, 1953.

3. Bleistein, N. and Handelsman, Richard A., Asymptotic Expansions of Integrals, Dover Publications Inc., New York, 1986.

4. Cesari, L., Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.

5. Coddington, Earl A. and Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, 1955.

6. Eastham, M.S.P., Theory of Ordinary Differential Equations, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

7. Eastham, M.S.P., The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems: Applications of the Levinson Theorem, Clarendon Press, Oxford, 1989.

8. Erdelyi, A., Asymptotic Expansions, Dover Publications Inc., New York, 1956.

9. Georgiev, G.N. and Georgieva-Grosse, M.N., The Kummer Confluent Hypergeometric Function and Some of Its Applications in the Theory of Azimuthally Magnetized Circular Ferrite Waveguides, www.itl.waw.pl/czasopisma/JTIT/2005/3/112.pdf, 28 Mayıs 2009.

10. Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M., Yüksek Matematik I: Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi, İkinci Basım, Literatür Yayınları, İstanbul, 2002.

11. Hochstadt, H., Differential Equations: A Modern Approach, Dover Publications Inc., New York, 1963.

12. Lit, D. and Slater, L.J., Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge at the University Press, 1960.

13. Murray, J.D., Asymptotic Analysis, Clarendon Press, Oxford, 1974.

14. Titchmarsh, E.C., Eigenfunction Expansions: Associated with Second-Order Differential Equations, Part I, Second Edition, Clarendon Press, Oxford, 1962.

15. Wasow, W., Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, A Division of John Wiley & Sons Inc., New York, London, Sidney, 1965.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Vakfıkebir’ de doğdu. İlk öğrenimi Trabzon Şalpazarı İlkokulu’ nda, orta öğrenimini Trabzon Şalpazarı Ortaokulu’ nda, lise öğrenimini ise Trabzon Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesi’ nde tamamladı.

2001-2002 eğitim-öğretim yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü Matematik Öğretmenliği programında lisans eğitimine başladı. 2002-2003 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Bölümü Matematik Öğretmenliği programına yatay geçiş yaparak lisans eğitimine burada devam etti. 2006 yılında lisans eğitiminden matematik öğretmeni unvanıyla ikincilikle mezun oldu.

2006-2007 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. Aralık 2007 tarihinde Rize Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Daha sonra Şubat 2008 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’ na Araştırma Görevlisi olarak geçiş yaptı. Halen bu görevine devam etmekte olan Ayşe KABATAŞ iyi derecede ingilizce bilmektedir.