KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇARPIM KAFESLERİ ÜZERİNDEKİ ÜÇGENSEL NORMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emel KALIN

HAZİRAN 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇARPIM KAFESLERİ ÜZERİNDEKİ ÜÇGENSEL NORMLAR

Emel KALIN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01.06.2009
Tezin Savunma Tarihi : 30.06.2009

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Funda KARAÇAL
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

"Çarpım Kafesleri Üzerindeki Üçgensel Normlar" adlı bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında "Yüksek Lisans Tezi" olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Funda KARAÇAL' a, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki hocalarıma, başım her sıkıştığında yardımını aldığım Sayın Hüsnü Anıl ÇOBAN' a, manevi anlamda desteğini her daim hissettiğim nişanlım Mustafa AŞICI' ya ve tükenmeyen ilgi ve destekleriyle yaşamıma güç katan aileme, en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Emel KALIN
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Tezde t-normlar ile ilgili aşağıdaki konular incelendi:

1. Çarpım kısmen sıralı kümeler üzerindeki t-normların direkt çarpım tanımı verilerek, çarpım t-normlarının hangi koşullar altında idempotent, nilpotent, sıfır bölen elemanlara ve Arşimedyan, Pseudo-Arşimedyan gibi özelliklere sahip olduğu incelendi.

2. $\left[0,1\right]^n$ üzerindeki herhangi sürekli bir t-normun $\left[0,1\right]$ üzerinde sürekli n tane t-normun direkt çarpımı olması gerekmediği örneklerle gösterildi.

3. $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $T\left(a,a\right) = a$ ve $T\left(b,b\right) = b$ olacak şekildeki $a,b \in L$ elemanlarının varlığının T ’ nin direkt parçalanmasını gerektirmediği örneklerle gösterildi.

4. Tam kafesler üzerindeki t-normların iç direkt çarpımının tanımı verilerek, tam kafesler üzerindeki t-normların dış ve iç direkt çarpımları arasındaki ilişki araştırıldı.

5. Bir sınırlı kısmen sıralı küme veya sınırlı kafes üzerindeki bir Pseudo-Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan bir t-normun nilpotent elemana sahip olması gerekmediği örneklerle gösterildi.

6. Bir L tam kafesi üzerindeki sonsuz $\vee$- dağılmalı t-normun direkt parçalanması ve L nin birim elemanının direkt parçalanması arasındaki ilişki incelendi.

7. $\vee$- dağılmalı veya sonsuz $\vee$- dağılmalı t-normlara sahip olmayan bazı tam kafes örnekleri verildi.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı Kısmen Sıralı Küme, Kafes, Çarpım Kafesleri, T-norm

SUMMARY

Triangular Norms on Product Lattices

In this thesis, the following questions on product lattices are studied.

These are :

1. By given definition of the direct product of t-norms on product posets, it has been investigated that on which conditions the product t-norms have idempotent, nilpotent, zero divisor elements and the properties Archimedean, Pseudo- Archimedean.

2. It has been shown by some examples that any continuous t-norm on $[0,1]^n$ does not have to be a direct product of n continuous t-norms on $[0,1]$.

3. It has been shown by some examples that the existence of $a,b \in L$ with $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $T(a,a) = a$ ve $T(b,b) = b$ don't imply the direct decomposability of T .

4. A definition of an internal direct product of t-norms on complete lattices have been given, a relation between the external and the internal direct products of t-norms on complete lattices have been studied.

5. It has been shown by some examples that a pseudo-Archimedean and non-cancallative t-norm on a bounded poset or bounded lattice does not have to be nilpotent elements.

6. A relation between direct decompositions of an infinitely $\vee$-distributive t-norms on complete lattices L and direct decompositions of the neutral element of L has been investigated.

7. Some examples of t-norms which are not $\vee$ -distributive or infinitely $\vee$-distributive have been given on some complete lattices.

Key Words: Poset, Lattice, Product lattices, Triangular Norms

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	$\{1,2,...,n,....\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	$\{....,-3,-2,-1,0,1,2,3,....\}$
$A \cap B$	A ve B kümelerinin kesişimi
$A \cup B$	A ve B kümelerinin birleşimi
$A \setminus B$	A kümesinin B kümesinden farkı
$[a,b]$	Kapalı aralık
$]a,b[$	Açık aralık
$[a,b[\,,\,]a,b]$	Yarı açık aralıklar
$a \wedge b$	a ve b elemanlarının infumumu
$a \vee b$	a ve b elemanlarının supremumu
$\underset{\tau}{\wedge} b_\tau$	$\{b_\tau : \tau \in T\}$ ailesinin infumumu
$\underset{\tau}{\vee} b_\tau$	$\{b_\tau : \tau \in T\}$ ailesinin supremumu
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \left(\in X^{\mathbb{N}}\right)$	X deki elemanların dizisi
$a \parallel b$	a ile b kıyaslanamaz
$\ell(X)$	X kümesinin alt sınırlarının kümesi
$\vartheta(X)$	X kümesinin üst sınırlarının kümesi
İnf (X)	X kümesinin infumumu
Sup (X)	X kümesinin supremumu
$\inf\limits_{i\in I} x_i$	x_i ailesinin infimumu
$\sup\limits_{i\in I} x_i$	x_i ailesinin supremumu
t-norm	Üçgensel norm
t-conorm	Üçgensel conorm
$I(T)$	T t-normunun idempotent elemanlarının kümesi

$N(T)$	T t-normunun nilpotent elemanlarının kümesi
$Z(T)$	T t-normunun sıfır bölenlerinin kümesi
T_M	Minimum t-norm
T_P	Çarpım t-norm
T_L	Lukasiewicz t-norm
T_W	Drastik çarpım t-norm
S_M	Maximum t-conorm
S_P	Probabilistic toplam t-conorm
S_L	Lukasiewicz t-conorm
S_W	Drastic toplam t-conorm
T^{nM}	Nilpotent t-norm
$\mathcal{T}([0,1])$	$[0,1]$ üzerindeki t-normların ailesi
$\hat{\prod\limits_{i\in I}} T_i$	$\{T_i \mid i\in I\}$ ailesinin iç direkt çarpımı
$[0,1]$	Reel birim aralık
$[0,1]^{\mathbb{N}}$	$[0,1]$ üzerindeki dizilerin kümesi
$\downarrow x$	$\{y : y\in P \ ve\ y\le x\}$
$\uparrow x$	$\{y : y\in P \ ve\ x\le y\}$
$\upsilon(A)$	A kümesinin komşuluklarının ailesi
$\overline{\mathrm{A}}$	A kümesinin kapanışı
2^S	S nin güç kümesi
$\varnothing$	Boş küme
♦	İspatın sonu

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normlar bazı metrik uzaylarda elemanlar arasındaki uzaklığı rakamlarla göstermek yerine, daha genel bir ifade ortaya koyma ihtiyacı ile ortaya çıkmıştır

Üçgensel normların tarihi Karl Menger tarafından 1942' de yapılan "Statistical metrics" adlı çalışmayla başlamıştır. Karl Menger, iki eleman arasındaki uzaklığın rakamlar yerine daha genel bir ifadenin kullanılabileceği metrik uzaylar inşa etmiştir. Üçgensel normlar, klasik üçgen eşitsizliğinin daha genel yapılara genelleştirilmesi için oluşturulmuştur.

Üçgensel normlar, probalistik metrik uzaylar teorisinde önemli bir rol oynar. Berthold Schweizer ve Abe Sklar, 1958, 1960, 1961 yıllarındaki çalışmalarında üçgensel normların bugünkü kullanıldığı aksiyomlarını vermişlerdir.

Fonksiyonel denklemler ile ilgili olarak, üçgensel normlar birleşmelilik denklemiyle yakından ilgilidir. Bu alanda ilk çalışma 1826 yılında N.H. Abel tarafından yapılmıştır. Daha sonraki çalışmalar 1909 da L.E.J. Brouwer, 1930 yılında Cartan, 1949 ve 1961 yıllarında J. Aczel ve 1954 yılında M. Hosszu tarafından yapılmıştır. Özellikle Janos Aczel' in monografisi (hem almanca hem İngilizce versiyonu) üçgensel normların gelişiminde çok önemli bir etkiye sahiptir.

Araştırmaların bir başka yönü, bazı doğal fonksiyonel denklemlerin çözümü olarak üçgensel normların parametrelendirilmiş ailelerinin belirlenmesidir. Bu alandaki en iyi çalışma M.J. Frank'ın 1979 yılındaki Frank'ın fonksiyonel denklemi olarak adlandırılan denklemin tek çözümü olan Frank üçgensel norm ve konormların ailesinin ispatlandığı çalışmasıdır.

Topolojik yarı gruplarla bağlantılı olarak, nilpotent elemanın mevcut olmadığı, sınır noktalarının (aynı zamanda annihilatör ve neutral elemanın) sadece idempotent elemanlar olduğu bazı yarı grupların karakterizasyonu, 1955 te W.M. Faucett tarafından yapılmıştır.

B. De Baets ve R. Mesiar $[3]$ deki çalışmalarında çarpım kafesi üzerindeki t-normların direkt çarpım kavramını araştırmışlar ve bir çarpım kafesi üzerinde t-normların direkt çarpımı olan $\vee$- dağılmalı t-normları karakterize etmişlerdir. B. De Baets ve R. Mesiar yine aynı çalışmalarında şu problemi ortaya koymuşlardır:

Problem 1: $[0,1]^2$ üzerindeki herhangi sürekli bir t-norm $[0,1]$ üzerindeki sürekli t-normların direkt çarpımı mıdır?

S. Jenei ve B. De Baets $[6]$' daki çalışmalarında B. De Baets ve R. Mesiar tarafından ortaya konulan Problem 1' i incelemişler ve $[0,1]^n$ üzerindeki herhangi sürekli bir t-normun $[0,1]$ üzerinde sürekli n tane t-normun direkt çarpımı olmadığını göstermişlerdir. S. Jenei ve B. De Baets yine aynı çalışmada şu problemi ortaya koymuşlardır:

Problem 2: T, L çarpım kafesi üzerinde bir t-norm olsun. $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $T(a,a) = a$ ve $T(b,b) = b$ olacak şekildeki $a,b \in L$ elemanlarının varlığı T' nin direkt parçalanmasını gerektirir mi?

S. Jenei ve B. De Baets' in $[6]$ de ortaya koydukları Problem 2' yi F. Karaçal ve D. Khadjiev $[8]$' deki çalışmalarında araştırmışlardır.

Yine B. De Baets ve R. Mesiar' ın $[3]$' deki çalışmalarında ortaya koydukları aşağıdaki problemi Z. Kun-Lun, L. Dong-Hai ve S. Li-Xia $[12]$ ve F. Karaçal $[9]$' daki çalışmalarında çözmüşlerdir:

Problem 3: Bir sınırlı kısmen sıralı küme veya sınırlı kafes üzerindeki bir Pseudo-Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan bir t-norm nilpotent elemana sahip midir?

Tezde bu problemlerin çözümleri de incelenmiştir.

Ayrıca tam kafesler üzerindeki $\vee$- dağılmalı ve sonsuz $\vee$- dağılmalı t-normlar üzerine birçok çalışma $[1,7,10,18]$ vardır.

Tezde t-normlar ile ilgili şu konular incelendi:

Çarpım kısmen sıralı kümeler üzerindeki t-normların direkt çarpım tanımı verilerek, çarpım t-normlarının hangi koşullar altında idempotent, nilpotent, sıfır bölen elemanlara ve Arşimedyan, Pseudo-Arşimedyan gibi özelliklere sahip olduğu incelendi.

$[0,1]^n$ üzerindeki herhangi sürekli bir t-normun $[0,1]$ üzerinde sürekli n tane t-normun direkt çarpımı olması gerekmediği örneklerle gösterildi.

$a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $T(a,a) = a$ ve $T(b,b) = b$ olacak şekildeki $a,b \in L$ elemanlarının varlığının T' nin direkt parçalanmasını gerektirmediği örneklerle gösterildi.

Tam kafesler üzerindeki t-normların iç direkt çarpımının tanımı verilerek, tam kafesler üzerindeki t-normların dış ve iç direkt çarpımları arasındaki ilişki araştırıldı.

Bir sınırlı kısmen sıralı küme veya sınırlı kafes üzerindeki bir Pseudo-Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan bir t-normun nilpotent elemana sahip olması gerekmediği örneklerle gösterildi.

Bir L tam kafesi üzerindeki sonsuz $\vee$- dağılmalı t-normun direkt parçalanması ve L nin birim elemanının direkt parçalanması arasındaki ilişki incelendi.

$\vee$- dağılmalı veya sonsuz $\vee$- dağılmalı t-normlara sahip olmayan bazı tam kafes örnekleri verildi.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler

Tanım 1 : $\varnothing \neq L$ bir küme, $\leq$, L üzerinde bir bağıntı olsun.

P1) $\forall x \in L$ için $(x,x) \in \leq$ (yansıma özelliği)

P2) $\forall x, y \in L$ için $(x,y) \in \leq$ ve $(y,x) \in \leq \;\Rightarrow\; x = y$ (ters simetri özelliği)

P3) $\forall x, y, z \in L$ $(x,y) \in \leq$ ve $(y,z) \in \leq$ için $(x,z) \in \leq$ (geçişme özelliği)

Bu üç şart sağlanırsa $(L,\leq)$ ye bir kısmen sıralı küme denir.

$(x,y) \in \leq \;\Leftrightarrow\; x \leq y$ ile gösterilir.

Tanım 2: Bir kısmen sıralı kümede herhangi x ve y elemanları için $x \leq y$ ise bu taktirde “y elemanı x elemanını içerir” denir.

Tanım 3 (Duallik Prensibi) : Herhangi bir kısmen sıralamanın terside bir kısmen sıralamadır.

Örnek 1 :

(i**)** $(\mathbb{Z},\leq)$ bir kısmen sıralı kümedir.

(ii**)** $(\mathbb{R},\leq)$ bir kısmen sıralı kümedir.

(iii**)** $X \neq \varnothing$ bir küme ise bu takdirde, $(2^X,\subseteq)$ bir kısmen sıralı kümedir.

(iv**)** G bir grup ve $A(G)=\{H \mid H \leq G\}$ ise $(A(G),\subseteq)$ bir kısmen sıralı kümedir.

(v**)** $(R,+,.)$ bir halka ve $\Lambda(R)=\{I \mid I, R \text{ de bir ideal}\}$ ise $(\Lambda(R),\subseteq)$ bir kısmen sıralı kümedir.

Tanım 4 : P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme olsun.

$P_1 \times P_2$ üzerindeki kısmi sıra bağıntısı $\leq$, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2$ ve $y_1 \leq_2 y_2$

Eğer L_1 ve L_2 iki sınırlı kafes ise onların çarpımları da bir sınırlı kafestir.

$L_1 \times L_2$ üzerindeki $\wedge, \vee$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge_1 x_2, y_1 \wedge_2 y_2)$

$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (x_1 \vee_1 x_2, y_1 \vee_2 y_2)$

$\{L_i \mid i \in I\}$ tam kafeslerin bir ailesi olsun. $\prod_{i \in I} L_i$ kartezyen çarpımı üzerindeki infumum ve supremum aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\underset{\tau \in Q}{\wedge} x_\tau = \left(\underset{\tau \in Q}{\wedge} x_{i\tau} \right)_{i \in I}$, $\underset{\tau \in Q}{\vee} x_\tau = \left(\underset{\tau \in Q}{\vee} x_{i\tau} \right)_{i \in I}$ ve $\Omega = \left\{ x_\tau = (x_{i\tau})_{i \in I} \mid \tau \in Q \right\} \subseteq \prod_{i \in I} L_i$ için,

$\prod_{i \in I} L_i$ kartezyen çarpımı yukarıdaki infumum ve supremum ile birlikte bir tam kafes formundadır. Bu kafes L_i nin direkt çarpımı olarak adlandırılır.

Tanım 5 : $(L, \leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun. $\forall x, y \in L$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(L, \leq)$ ye tam sıralı veya zincir denir.

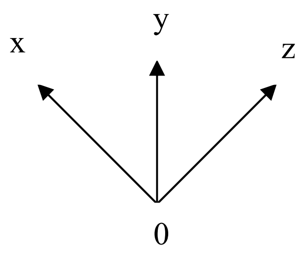
Tanım 6 : P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun.

(i**)** Eğer bir $a \in X$, $\forall x \in X$ için $a \leq x$ olacak şekilde mevcut ise bu a elemanına X kümesinin en küçük elemanı denir ve E.k.e.X ile gösterilir. X kümesinin en büyük elemanı dual olarak tanımlanır ve E.b.e.X ile gösterilir.

(ii**)** Eğer bir $a \in X$ için $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değilse, bu a elemanına bir minimal eleman denir. X kümesinde maksimal eleman dual olarak tanımlanır.

Açık olarak en küçük eleman bir minimal, en büyük eleman ise bir maksimal elemandır. Tersi doğru olmayabilir.

Örneğin; $P = \{0, x, y, z\}$ kısmen sıralı kümesi aşağıdaki gibi verilsin.



Şekil 1. $P=\{0,x,y,z\}$ kısmen sıralı kümesi

x elemanı P kümesinin maksimal elemanıdır fakat en büyük elemanı değildir.

Teorem 1 : Zincirlerde bir altkümenin minimal elemanı (varsa) ile en küçük eleman, maksimal elemanı (varsa) ile en büyük eleman çakışır. Böylece her sonlu zincir bir en küçük (ilk) ve en büyük (son) elemana sahiptir.

Tanım 7 : P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun. Eğer bir $a \in P$, $\forall x \in X$ için $x \leq a$ koşulunu sağlıyor ise a elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir. Dual olarak, $\forall x \in X$ için $b \leq x$ koşulunu sağlayan $b \in P$ elemanına ise X kümesinin bir alt sınırı denir.

Tanım 8 : $\vartheta(X)$ ile X kümesinin bütün üst sınırlarının kümesini, $\ell(X)$ ile de X kümesinin bütün alt sınırlarının kümesini gösterelim. Eğer mevcut ise;

$\vartheta(X)$ kümesinin en küçük elemanına X kümesinin supremumu,

$\ell(X)$ kümesinin en büyük elemanına X kümesinin infumumu denir ve sırasıyla SupX ve Inf X sembolleriyle gösterilir. P2 ters simetri özelliği ile, eğer mevcutsa Inf X tektir. Buna göre:

(i) $\vartheta(\mathrm{X})=\{\mathrm{a} \in \mathrm{P} : \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X} \text{ için } \mathrm{x} \leq \mathrm{a}\}$ olup $\mathrm{SupX} = \mathrm{E.k.e.}\vartheta(\mathrm{X})$ dir.

(ii) $\ell(\mathrm{X})=\{\mathrm{b} \in \mathrm{P} : \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X} \text{ için } \mathrm{b} \leq \mathrm{x}\}$ olup $\mathrm{InfX} = \mathrm{E.b.e.}\ell(\mathrm{X})$ dir.

Uyarı 1 : $\mathrm{Sup}\{x,y\}$, $\mathrm{Inf}\{x,y\}$, $\mathrm{Sup}L$ ve $\mathrm{Inf}L$ elemanları ileride sıklıkla kullanılacağı için kolaylık açısından aşağıdaki gösterimleri kullanacağız:

(i) $\mathrm{Sup}\{x,y\} = x \vee y$, $\mathrm{Inf}\{x,y\} = x \wedge y$

(ii) L bir kafes olmak üzere, eğer mevcut ise $\mathrm{Sup}L = 1$, $\mathrm{Inf}L = 0$

(iii) P, 0 ve 1 li bir kısmen sıralı küme ise P ’ ye sınırlı kısmen sıralı küme denir.

(iv) L, 0 ve 1 li bir kafes ise L ’ ye sınırlı kafes denir.

1.3. Kafesler

Tanım 9 : $(L,\leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun.

$\forall a,b \in L$ için, sup $\{a,b\}$ = E.k.e. $\vartheta\{a,b\}$ ve inf $\{a,b\}$ = E.b.e. $\ell\{a,b\}$ mevcut ise $(L,\leq)$ ye kafes denir.

Tanım 10 : $(L,\leq)$ bir kısmen sıralı küme olsun.

$\forall X \subseteq L$ için Sup (X) ve İnf (X) mevcut ise, $(L,\leq)$' ye tam kafes denir.

$X = L$ alındığında her boştan farklı tam kafesin 0 en küçük elemanına ve 1 en büyük elemanına sahip olduğu elde edilir.

Tanım 11 : $(L,\leq)$ bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun.

$\forall a,b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ ise X' e, L' nin bir alt kafesi denir.

Teorem 2 : L herhangi bir tam kafes ve S aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde L nin bir alt kümesi olsun.

(i **)** $1 \in S$

(ii **)** $T \subset S \Rightarrow \inf T \in S$

Bu takdirde, S bir tam kafestir.

Lemma 1 : Herhangi bir kısmen sıralı kümede infumum ve supremum (eğer mevcutsa) işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptirler.

(L1) : $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (idempotent özelliği)

(L2) : $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (değişme özelliği)

(L3) : $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (birleşme özelliği)

(L4) : $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (yok etme özelliği)

Ayrıca, $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ ve $x \vee y = y$' dir.

Lemma 2 : Eğer P kısmen sıralı kümesi bir sıfıra (en küçük elemana) sahip ise $\forall x \in P$ için $0 \wedge x = 0$ ve $0 \vee x = x$ dir.

Dual olarak, $\forall x \in P$ için $1 \wedge x = x$ ve $1 \vee x = 1$' dir.

Lemma 3 : Herhangi bir L kafesinde supremum ve infimum işlemleri izotondur. Yani; $y,z \in L$ olmak üzere $y \leq z \Rightarrow \forall x \in L$ için $x \wedge y \leq x \wedge z$ ve $x \vee y \leq x \vee z$ dir.

Lemma 4 : Herhangi bir kafesin elemanları modüler eşitsizliği sağlar.

$\forall x,y,z \in L$ için $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ dir.

Tanım 12 : L bir küme olsun. Eğer L üzerinde bir $*$ ikili işlemi, birleşme, değişme ve idempotent eleman özelliklerini sağlıyor ise, L ye bir yarı kafes denir.

Lemma 1' den elde edilen aşağıdaki sonuç dual olarak, supremum için de geçerlidir.

Sonuç 1 : P, herhangi iki elemanı infimuma sahip olan bir kısmen sıralı küme olsun. Bu durumda P, infimum işlemine göre bir yarıkafestir. Böyle yarıkafeslere infimum-yarıkafes denir.

Lemma 5 : $x \leq y :\Leftrightarrow x \circ y = x$ ile tanımlanan bağıntı altında, "$\circ$" ikili işlemli yarıkafes bir kısmen sıralı kümedir ve $x \circ y = \inf\{x, y\}$ dir.

Lemma 6 : Herhangi bir L kafesinde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$\forall x, y, z \in L$ için,

(*i*) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(*ii*) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

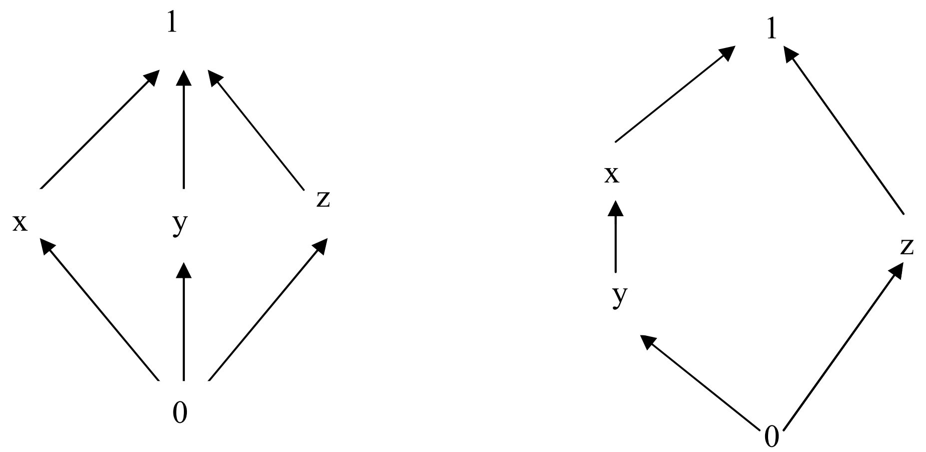
Teorem 3 : Herhangi bir kafeste aşağıdaki özellikler denktir.

(L5) $\forall x, y, z$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(L6) $\forall x, y, z$ için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Tanım 13 : Bir L kafesine dağılmalı denir $\Leftrightarrow$ L, teorem 3' teki (L5) (veya (L6)) özelliğini sağlar.

Örnek 2 :



(a) M_5

(b) N_5

Şekil 2. M_5 ve N_5 kafesleri

M_5 ve N_5 kafesleri dağılmalı değildir.

Varsayalım, M_5 dağılmalı olsun. Bu takdirde,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \wedge 1 = 0 \vee 0$$
$$x = 0$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile M_5 dağılmalı kafes değildir.

Benzer olarak, varsayalım N_5 dağılmalı olsun. Bu takdirde,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \wedge 1 = y \vee 0$$
$$x = y$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısı ile N_5 dağılmalı kafes değildir.♦

Teorem 4 : Bir dağılmalı kafeste $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ ise $x = y$ dir.

Tanım 14 : Aşağıdaki (L7) özelliğini sağlayan herhangi bir kafese modüler kafes denir.

(L7) $\forall x, y, z \in L$ için $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ dir.

Açıkça, $x \leq z$ için $z = x \vee z$ olduğundan, (L6) kuralında yerine yazılırsa her dağılmalı kafes (L7) özelliğini sağlar.

Uyarı 2 : Her dağılmalı kafes modülerdir fakat her modüler kafes dağılmalı değildir.

Örneğin; Şekil 2(a)' da verilen M_5 kafesi modülerdir fakat dağılmalı değildir.

Tanım 15 : Sınırlı bir L kafesinde $x \in L$ için $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$ olacak şekilde bir $y \in L$ mevcutsa y elemanına x elemanının komplementi denir. Eğer L' deki tüm elemanların komplementleri mevcut ise L' ye komplementli kafes denir.

Tanım 16 : Komplementli, dağılmalı bir kafese Boole Kafesi denir.

Teorem 5 : Herhangi bir Boole Kafesi' nde her x elemanı tek bir x' komplementine sahiptir ve üstelik:

(L8) $x \wedge x' = 0$, $x \vee x' = 1$

(L9) $(x')' = x$

(L10) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

özelliklerini sağlar.

Tanım 17 : L bir kafes olsun. Eğer L, $\wedge$, $\vee$, $'$ işlemleri ile (L1),...,(L10) özelliklerinin tamamını sağlıyor ise, bu taktirde L’ ye bir Boole Cebri denir.

Tanım 18 : L bir kafes (veya sup-yarı kafesi) ve $\varnothing \neq J \subseteq L$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa J’ ye L’ nin bir ideali denir.

(i**)** $a \in J$, $x \in L$ için $x \leq a$ ise $x \in J$

(ii**)** $a \in J$, $b \in J$ ise $a \vee b \in J$

Tanım 19 : L bir kafes (veya inf-yarı kafesi) ve $\varnothing \neq J \subseteq L$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa J’ ye L’ nin bir dual ideali denir.

(i'**)** $a \in J$, $x \in L$ için $a \leq x$ ise $x \in J$

(ii'**)** $a \in J$, $b \in J$ ise $a \wedge b \in J$

Uyarı 3 :

$\downarrow x$ notasyonu ile $\{y \mid y \in P \quad \text{ve} \quad y \leq x\}$ kümesi gösterilir.

$\uparrow x$ notasyonu ile $\{y \mid y \in P \quad \text{ve} \quad x \leq y\}$ kümesi gösterilir.

Tanım 20 : Bir sonlu $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$, $c_1 < c_2 < .... < c_n$, zincirinin uzunluğu n-1’ dir. Genelde bir L kafesinin $d(L)$ uzunluğu L’ deki zincirlerin uzunluklarının en küçük üst sınırıdır.

$d(L)$ sonlu olduğu zaman, L sonlu uzunluğa sahiptir denir.

$p \in L$ elemanı için $d(p) = d(\downarrow p)$ dir.

Tanım 21 : Herhangi bir L kafesinde verilen herhangi bir a,b elemanları için $a \wedge x \leq b$ koşulunu sağlayan bütün x lerin kümesi bir en büyük eleman içeriyorsa, L’ ye bir Brouwerian Kafesi denir.

Tanım 21 aşağıda verilen teorem 6 ile denktir.

Teorem 6 : Bir tam kafes Brouwerian Kafesi’dir: $\Leftrightarrow$ Herhangi bir $\{x_\alpha\}$ kümesi için $a \wedge \bigvee x_\alpha = \bigvee (a \wedge x_\alpha)$ dır.

Tanım 22 : L, bir sınırlı kafes olsun. Eğer bir $x \in L$, $L - \{0\}$ kümesinin bir minimal elemanı ise $x \in L$ elemanına bir atom denir.

Tanım 23 : $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

Eğer $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan tüm x_1 ve x_2 için $f(x_1) \leq f(x_2)$ eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyona monoton artan fonksiyon, eğer $f(x_1) < f(x_2)$ ise bu fonksiyona kesin artan fonksiyon denir.

Eğer $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan tüm x_1 ve x_2 ler için $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise bu fonksiyona monoton azalan fonksiyon, eğer $f(x_1) > f(x_2)$ ise bu fonksiyona kesin azalan fonksiyon denir.

1.4. Sıra Morfileri

Tanım 24 :

(i**)** L' de herhangi boştan farklı $\{x_i \mid i \in I\}$ ailesi için, $g\left(\inf\limits_{i\in I} x_i\right) = \inf\limits_{i\in I} g(x_i)$ ise g' ye inf - morfisi denir.

(ii**)** L' de herhangi boştan farklı $\{x_i \mid i \in I\}$ ailesi için, $g\left(\sup\limits_{i\in I} x_i\right) = \sup\limits_{i\in I} g(x_i)$ ise g' ye sup - morfisi denir.

Tanım 25 : $\varphi : L \to M$, L kafesinden M kafesine bir fonksiyon olsun.

$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$

şartı sağlanıyorsa, φ ya sıra korur veya izoton denir.

(1) $\forall x, y \in L$ için $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ ise φ ya sup-morfisi denir.

($1'$**)** $\forall x, y \in L$ için $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ ise φ ya inf-morfisi denir.

(1) ve ($1'$) nin her ikiside gerçekleşiyorsa, φ ya morfi (veya kafes morfisi) denir.

Bir $\varphi : L \to M$ morfisine;

(i) Birebir ise monomorfi,

(ii) Örten ise epimorfi,

(iii) Birebir ve örten ise yani bir bijeksiyon ise izomorfi,

(iv) $L = M$ ise endomorfi,

(v) $L = M$ olan izomorfiye otomorfi denir.

Teorem 7 : $f:[0,1]\to[0,1]$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler denktir:

(i **)** f artan dönüşüm,

(ii **)** $\forall(x,y)\in[0,1]^2$ için $f\left(\min(x,y)\right)=\min\left(f(x),f(y)\right)$,

(iii **)** $\forall(x,y)\in[0,1]^2$ için $f\left(\max(x,y)\right)=\max\left(f(x),f(y)\right)$.

L bir kafes ve $g:L\to L$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:

(i **)** g artan dönüşüm,

(ii **)** $\forall(x,y)\in L^2$ için $g(x\wedge y)\leq g(x)\wedge g(y)$,

(iii **)** $\forall(x,y)\in L^2$ için $g(x\vee y)\geq g(x)\vee g(y)$.

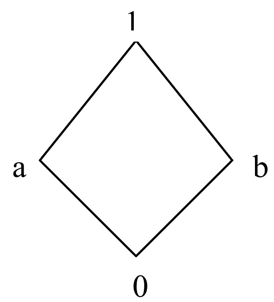
Tanım 26 :

(i) Eğer $\forall(x,y)\in L^2$ için, $g(x\wedge y)=g(x)\wedge g(y)$ ise g dönüşümüne $\wedge$- morfisi denir.

(ii) Eğer $\forall(x,y)\in L^2$ için, $g(x\vee y)=g(x)\vee g(y)$ ise g dönüşümüne $\vee$- morfisi denir.

Açıkça, $\wedge$ ve $\vee$- morfisi artan dönüşümlerdir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek olarak;



Şekil 3. $L=\{0,a,b,1\}$ kafesi

$g(0)=0=g(a)=g(b)$ ve $g(1)=1$ olsun.

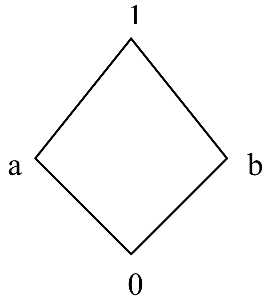
$g(a\vee b)\overset{?}{=}g(a)\vee g(b)$

$g(1)\overset{?}{=}0\vee 0$

$1\neq 0$

olduğundan g artan dönüşümü $\vee$ - morfisi değildir.

Benzer olarak;



$g^*(a) = g^*(b) = 1 = g^*(1)$ ve $g^*(0) = 0$ olsun.

$g^*(a \wedge b) \overset{?}{=} g^*(a) \wedge g^*(b)$

$g^*(0) \overset{?}{=} 1 \wedge 1$

$0 \neq 1$

olduğundan g^* artan dönüşümü $\wedge$ - morfisi değildir.

Tanım 27 : $a \not\leq b$ ve $b \not\leq a$ ise a ile b ye kıyaslanamaz denir ve $a \| b$ ile gösterilir.

1.5. Üçgensel Normlar (T-Normlar)

Tanım 28 : P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki bir t-norm T, P üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir ikili işlemdir :

(*i*) $\forall x \in P$ için $T(x,1) = x$ (birim eleman özelliği)

(*ii*) $\forall (x,y,z) \in P^3$ için $x \leq y$ *ise* $T(x,z) \leq T(y,z)$ (monotonluk özelliği)

(*iii*) $\forall (x,y) \in P^2$ için $T(x,y) = T(y,x)$ (değişme özelliği)

(*iv*) $\forall (x,y,z) \in P^3$ için $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$ (birleşme özelliği)

(*i*) ve **(*ii*)** den P üzerindeki herhangi bir T t-normu için $T(x,y) \leq x$ ve $T(x,y) \leq y$ dir.

Buradan, $\forall (x,y) \in P^2$ için $T(x,y) \in \ell(\{x,y\})$ dir.

T_1 ve T_2, P üzerindeki t-normlar olmak üzere,

$T_1 \leq T_2 :\Leftrightarrow \forall (x, y) \in P^2$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$ dir.

P bir sınırlı kısmen sıralı küme , T , P üzerinde bir t-norm ve $P_1 \subseteq P$ olsun. $T \downarrow P_1$ notasyonu T nin P_1 e kısıtlanışı için kullanılır.

1.5.1. En Büyük ve En Küçük T-Normlar

Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki en küçük t-norm;

$$T_W(x, y) = \begin{cases} x, & \text{y} = 1 \quad \text{ise} \\ y, & x = 1 \quad \text{ise} \\ 0, & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

P üzerindeki herhangi bir T t-normu için $T_W \leq T$ dir.

Bir L sınırlı kafesi üzerindeki $T_M = \wedge$ işlemi en büyük t-normdur.

Böylece, L üzerindeki herhangi bir T t-normu için $T_W \leq T \leq T_M$ dir.

Örnek 3 : Aşağıda sırasıyla $L = [0,1]$ üzerinde T_P ve T_L t-normları verilmiştir.

$T_P(x, y) = x.y$

$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$

Şimdi $T_M(x, y) = x \wedge y = \min\{x, y\}$ nin t-norm olduğunu gösterelim:

(T1) $T_M(x, y) = x \wedge y = y \wedge x = T_M(y, x)$

(T2) $T_M(x, T_M(y, z)) = T_M(x, y \wedge z)$

$$= x \wedge (y \wedge z)$$

$$= (x \wedge y) \wedge z$$

$$= T_M(T_M(x, y), z)$$

(T3) $y \leq z$ olsun.

$\Rightarrow x \wedge y \leq x \wedge z$

$\Rightarrow T_M(x, y) \leq T_M(x, z)$

(T4) $T_M(x, 1) = x \wedge 1 = x$ dir.

$T_P\left(x, y\right) = x.y$ nin t-norm olduğunu gösterelim:

(T1) $T_P\left(x, y\right) = x.y = y.x = T_P\left(y, x\right)$

(T2) $T_P\left(x, T_P\left(y, z\right)\right) = T_P\left(x, y.z\right)$

$$= x.y.z$$

$$= T_P\left(x.y, z\right)$$

$$= T_P\left(T_P\left(x, y\right), z\right)$$

(T3) $y \leq z$ olsun.

$\Rightarrow x.y \leq x.z$

$\Rightarrow T_P\left(x, y\right) \leq T_P\left(x, z\right)$

(T4) $T_P\left(x, 1\right) = x.1 = x$ ♦

Bir C sınırlı zinciri üzerindeki en küçük t-norm olan T_W şöyle yazılabilir:

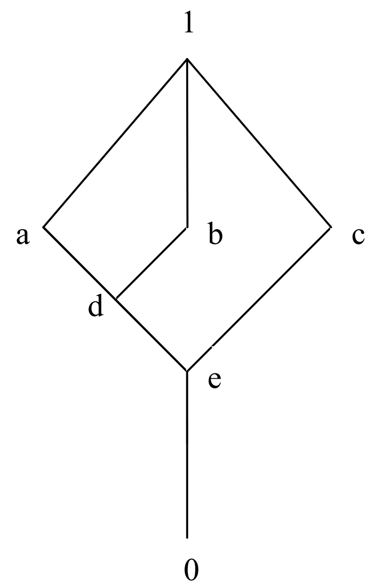
$$T_W\left(x, y\right) = \begin{cases} \min(x, y) & , \quad \max(x, y) = 1 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

Herhangi bir L sınırlı kafesi üzerindeki Z_1 ikili işlemi şöyle tanımlayalım:

$$Z_1\left(x, y\right) = \begin{cases} x \wedge y & , \quad x \vee y = 1 \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad \text{Aksi Takdirde} \end{cases}$$

Z_1 her zaman t-norm değildir.

Örneğin, $L = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$ sınırlı kafesinin Şekil 4' teki gibi verildiği düşünülürse Z_1, L üzerinde t-norm olmaz.



Şekil 4. $L=\{0,a,b,c,d,e,1\}$ kafesi

$b\vee c=1$, $b\wedge c=e$ ve $a\vee e=a<1$ olduğu için,

$Z_1\left(a,Z_1\left(b,c\right)\right)=Z_1\left(a,e\right)=0$

Diğer taraftan;

$a\vee b=1$, $a\wedge b=d$, $d\vee c=1$ ve $d\wedge c=e$ olduğu için,

$Z_1\left(Z_1\left(a,b\right),c\right)=Z_1\left(d,c\right)=e>0$

Z_1 birleşmeli değildir. Dolayısıyla Z_1, L üzerinde t-norm değildir. ♦

Fakat bir M sınırlı modüler kafesi için Z_1 ikili işlemi, M üzerinde her zaman bir t-normdur. Z_1 ’ in birleşmeliliğini göstermek ispat için yeterlidir.

$$Z_1\left(x,Z_1\left(y,z\right)\right)=\begin{cases} x\wedge y\wedge z & , \quad y\vee z=1 \quad \text{ve} \quad x\vee(y\wedge z)=1 \\ 0 & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

$$Z_1\left(Z_1\left(x,y\right),z\right)=\begin{cases} x\wedge y\wedge z & , \quad x\vee y=1 \quad \text{ve} \quad z\vee(x\wedge y)=1 \\ 0 & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

$y\vee z=1$ ve $x\vee(y\wedge z)=1$ iken $x\vee y=1$ ve $z\vee(x\wedge y)=1$ olduğunu gösterelim. Tersinin ispatı da benzer şekilde yapılır.

İlk olarak; $x\vee(y\wedge z)=1$ ve monoton özelliğinden $x\vee y=1$ elde edilir.

Daha sonra, $x\vee(y\wedge z)=1$ olduğu için, $y=y\wedge\left(x\vee(y\wedge z)\right)$ dir.

$y\wedge z\leq y$ ve monoton özelliğinden $y=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)$ elde edilir.

$y = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$ eşitliğinden $y \leq (x \wedge y) \vee z$ elde edilir.

$y \leq (x \wedge y) \vee z$ ve $z \leq (x \wedge y) \vee z$ eşitsizliklerinden de $y \vee z \leq (x \wedge y) \vee z$ elde edilir.

Sonuç olarak, $y \vee z \leq (x \wedge y) \vee z$ olduğu için $(x \wedge y) \vee z = 1$ elde edilir. ♦

L sınırlı bir kafes, e$\in L$ ve T_e, L üzerinde bir ikili işlem olsun. L üzerinde T_e aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T_e = \begin{cases} x \wedge y & , \quad x = 1 \quad veya \quad y = 1 \quad \text{ise} \\ x \wedge y \wedge e & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases} \tag{1}$$

T_e , L üzerinde bir t-normdur.

Özel olarak,

$T_0 = T_W$ ve $T_1 = T_M$ dir.

Uyarı 4 : $[0,1]$ üzerinde $T_W < T_L < T_P < T_M$ dir.

Önerme 1 : A, $]0,1[\subseteq A \subseteq [0,1]$ olacak şekilde bir küme olsun.

$* : A^2 \to A$ dönüşümünü, A üzerinde $\forall x, y, z \in A$ için tanım 28' deki **(**ii**)**, **(**iii**)** ve **(**iv**)** şartlarını sağlayacak ve

$$x * y \leq \min(x, y) \tag{2}$$

olacak şekilde bir ikili işlem olsun.

Bu takdirde, $T(x, y) = \begin{cases} x * y & , \quad (x, y) \in \left(A \setminus \{1\}\right)^2 \\ \min(x, y) & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$

ile tanımlanan $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

Tanım 29 : Bir $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonuna $\forall x, y, z \in [0,1]$ için tanım 28 deki **(**ii**)**, **(**iii**)**, **(**iv**)** ve (2) özelliklerini sağlıyorsa, F ye bir t-alt norm denir.

Her t-norm bir t-alt normdur. Fakat tersi doğru değildir.

Örneğin;

$F : [0,1]^2 \to [0,1]$, $F(x, y) = 0$ fonksiyonu alt t-normdur. Fakat t-norm değildir. Çünkü, bir $x \neq 0$ için $F(x,1) = 0 \neq x$ olduğundan birim eleman özelliğini sağlamaz.

Önerme 2 :

(i **)** $\forall x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minumum t-normdur.

(ii **)** $\forall x \in [0,1[$ için $T(x,x) = 0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_W drastik çarpımdır.

İspat :

(i **)** $\forall T$ t-normu için $T(x,y) \leq T_M(x,y) = \min(x,y)$

$\forall x, y \in [0,1]$ için $T(\min(x,y), \min(x,y)) = \min(x,y) = T_M(x,y) \leq T(x,y)$

Buradan $\forall x, y \in [0,1]^2$ için $T(x,y) = T_M(x,y) \Rightarrow T = T_M$ dir.

(ii **)** $(x,y) \in [0,1[^2$ ve $y \leq x$ olsun.

$$0 \leq T(x,y) \leq T(x,x) = 0 \Rightarrow T(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow T(x,y) = T_W(x,y)$$

$$\Rightarrow T = T_W \text{ dir. } \blacklozenge$$

Örnek 4 : $[0,1]$ üzerinde T_M, T_P, T_L ve T_W t-normlarının n-li genişlemeleri aşağıdaki gibidir:

$$T_M(x_1, x_2, ..., x_n) = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$T_P(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$$

$$T_L(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right)$$

$$T_W(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} x_i \ , & j \neq i \ için \ x_j = 1 \\ 0 \ , & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

Tanım 30: Bir üçgensel conorm (t-conorm) P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki üzerinde bir S ikili işlemidir ; yani $\forall x, y, z \in P$ için tanım 28 deki **(** ii **), (** iii **), (** iv **)** ve

(v **)** $S(x,0) = x$ (birim eleman özelliği)

sağlayan bir $S : P^2 \to P$ fonksiyonudur.

Örnek 5 : Aşağıda sırasıyla $[0,1]$ üzerindeki S_M, S_P, S_L ve S_W t-conormları verilmiştir.

$$S_M(x,y) = \max(x,y)$$

$$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$$

$$S_L(x,y) = \min(x+y,1)$$

$$S_W(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad (x,y) \in \left]0,1\right[^2 \ \ ise \\ \max(x,y) & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

Uyarı 5 : $[0,1]$ üzerinde $S_M < S_P < S_L < S_W$ dir.

Örnek 6 : $[0,1]$ üzerindeki S_M, S_P, S_L ve S_W t-conormlarının n-li genişlemeleri aşağıdaki gibidir :

$$S_M(x_1, x_2, ..., x_n) = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$S_P(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$

$$S_L(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, 1\right)$$

$$S_D(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} x_i & , \quad j \neq i \ için \ x_j = 0 \text{ ise} \\ 1 & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

1.6. Süreklilik

Tanım 31 : Bir $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu süreklidir : $\Leftrightarrow$ Her yakınsak $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi için,

$$F\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n)$$

$[0,1]^2$ birim karesi, $\mathbb{R}^2$ reel düzleminin bir kompakt alt kümesi olduğundan $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ in sürekliliği, F in düzgün sürekliliğine denktir.

Açık olarak T_M, T_P, T_L temel t-normları ve onların dualleri olan S_M, S_P, S_L t-conormları sürekli fakat T_W t-normu ve S_W t-conormu süreksizdir.

Tanım 32 : Bir $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonuna alt (üst) yarı sürekli denir: $\Leftrightarrow$ $\forall(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde mevcuttur.(sırası ile)

$$F(x,y) > F(x_0, y_0) - \varepsilon \ , \quad (x,y) \in \left]x_0 - \delta, x_0\right] \times \left]y_0 - \delta, y_0\right]$$

$$F(x,y) < F(x_0,y_0)+\varepsilon \ , \ \ (x,y)\in[x_0,x_0+\delta[\times[y_0,y_0+\delta[$$

Tanım 33 : Bir $F:[0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonuna azalmayan fonksiyon denir: $\Leftrightarrow$ $x_1,x_2,y_1,y_2\in[0,1]$ için $x_1\le x_2$ ve $y_1\le y_2 \Rightarrow F(x_1,y_1)\le F(x_2,y_2)$ dir.

Önerme 3 : Bir $F:[0,1]^2\to[0,1]$ azalmayan fonksiyonu alt yarı süreklidir $:\Leftrightarrow$ F her bir bileşene göre sol süreklidir. Yani her $(x_0,y_0)\in[0,1]$ ve her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi için,

$$\sup\{F(x_n,y_0) \ \mid \ n\in\mathbb{N}\} = F\left(\sup\{x_n \ \mid \ n\in\mathbb{N}\},y_0\right)$$

$$\sup\{F(x_0,y_n) \ \mid \ n\in\mathbb{N}\} = F\left(x_0,\sup\{y_n \ \mid \ n\in\mathbb{N}\}\right)$$

Önerme 4 : Bir $F:[0,1]^2\to[0,1]$ azalmayan fonksiyonu üst yarı süreklidir $:\Leftrightarrow$ F her bir bileşene göre sağ süreklidir. Yani her $(x_0,y_0)\in[0,1]$ ve her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi için,

$$\inf\{F(x_n,y_0) \ \mid \ n\in\mathbb{N}\} = F\left(\inf\{x_n \ \mid \ n\in\mathbb{N}\},y_0\right)$$

$$\inf\{F(x_0,y_n) \ \mid \ n\in\mathbb{N}\} = F\left(x_0,\inf\{y_n \ \mid \ n\in\mathbb{N}\}\right)$$

1.7. T-Normların Özellikleri

Tanım 34 : T, P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t- norm olsun. Bir $x\in P$ elemanına T ’ nin bir idempotent elemanı denir:$\Leftrightarrow$ $T(x,x)=x$ dir.

T ’ nin idempotent elemanlarının kümesi $I(T)$ ile gösterilir.

Her t-normun idempotentleri olan 0 ve 1 elemanlarına trivial idempotent elemanlar denir. Diğer idempotent elemanlara ise trivialden farklı idempotent elemanlar denir.

Eğer bir t-normun bütün elemanları idempotent elemanlar ise bu t-norma idempotent t-norm denir.

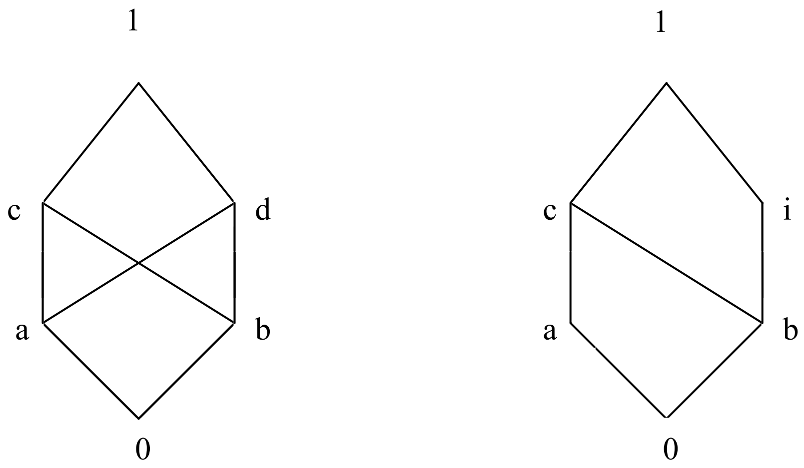
Örnek 7 :

(i) En küçük t-norm trivialden farklı bir idempotent elemana sahip değildir.

(ii) Bir sınırlı kafesin $\wedge$- işlemi (en büyük t-norm) tek idempotent t-normdur.

(*iii*) (1) de tanımlanan T_e t-normunun idempotent elemanlarının kümesi aşağıdaki şekildedir;

$I(T_e) = [0,e] \cup \{1\}$



(a) (b)

Şekil 5. $P = \{0,a,b,c,d,1\}$ kısmen sıralı kümesi ve $L = \{0,a,b,c,i,1\}$ kafesi

(*iv*) $P = \{0,a,b,c,d,1\}$ sınırlı kısmen sıralı kümesi Şekil 5(a) daki gibi verilsin.

Açıkça, P üzerinde a ve b gibi idempotent elemanlara sahip bir t-norm yoktur. Varsayalım, T, a ve b gibi idempotent elemanlara sahip bir t-norm olsun.

$T(a,a) = a$ ve $T(b,b) = b$ dir. T' nin monotonluğundan $T(a,a) \le T(c,d)$ ve $T(b,b) \le T(c,d)$ dir.

Buradan, $T(c,d) \in \vartheta(\{a,b\})$ elde edilir.

Diğer taraftan $T(c,d) \in \ell(\{c,d\})$ dir.

$\vartheta(\{a,b\}) \cap \ell(\{c,d\}) = \varnothing$ olduğundan çelişki meydana gelir. Dolayısıyla üzerinde a ve b gibi idempotent elemanlara sahip bir t-norm yoktur.

(*v*) $L = \{0,a,b,c,i,1\}$ sınırlı kafesi Şekil 5(b) deki gibi verilsin. L üzerindeki T_i t-normu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathrm{T}_i(x,y)=\begin{cases} T_W(x,y) & , \quad (x,y)\neq(i,i) \quad \text{ise} \\ i & , \quad (x,y)=(i,i) \quad \text{ise}\end{cases}$$

$I(T_i)=\{0,i,1\}$ dir.

Önerme 5 : T bir L tam üst yarı-kafesi üzerinde bir t-norm olsun. $\vee$-sınırlı kısmen sıralı kümesi $\left(I\left(T\right),\leq\right)$ bir tam üst yarı-kafestir.

İspat : $\{x_i \mid i\in I\}$, T ' nin boştan farklı idempotent elemanlarının ailesi olsun. T bir t-norm olduğu için, $\forall i\in I$ için $T(x_i,x_i)=x_i$ olur.

$$T(\sup_{i\in I} x_i,\sup_{i\in I} x_i)\leq \sup_{i\in I} x_i$$

Diğer taraftan T ' nin monotonluğundan;

$$T(\sup_{i\in I} x_i,\sup_{i\in I} x_i)\geq \sup_{i\in I} x_i$$

$$T(\sup_{i\in I} x_i,\sup_{i\in I} x_i)= \sup_{i\in I} x_i$$

$\sup_{i\in I} x_i$, T ' nin idempotent elemanıdır.

Tanım 35 : T , P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm olsun. $x\in P\setminus\{0\}$ elemanına T ' nin nilpotent elemanı denir: $\Leftrightarrow$ Bir $n\in\mathbb{N}$ sayısı $x^{(n)_T}=0$ olacak şekilde mevcuttur.

T ' nin nilpotent elemanlarının kümesi $N\left(T\right)$ ile gösterilir.

Açıkça, 1 elemanı nilpotent eleman değildir.

Örnek 8 :

(i**)** En küçük t-norm olan T_W için , $N\left(T_W\right)$ = P$\setminus\{0,1\}$

(ii**)** Bir sınırlı kafes üzerindeki en büyük t-norm olan T_M için , $N\left(T_M\right)$ = $\varnothing$

(iii**)** (1) de tanımlanan T_e t-normunun nilpotent elemanlarının kümesi

$$N\left(T_e\right) = \{x \mid x\wedge e=0\}$$

(iv**)** Şekil 5(b) deki L sınırlı kafesi üzerindeki T_i t-normu için, $N\left(T_i\right)$ = L$\setminus\{0,i,1\}$

Tanım 36 : T **,** $[0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. Bir $a\in\,]0,1[$ elemanına T ' nin bir sıfır böleni denir: $\Leftrightarrow$ $T\left(a,b\right)=0$ olacak şekilde bir $b\in\,]0,1[$ mevcuttur.

Örnek 9:

(i**)** Her $a \in \left]0,1\right[$, T_L ve T_W t-normlarının sıfır bölenidir.

(ii**)** T_M t-normu ne nilpotent elemana ne de sıfır bölene sahiptir.

(iii**)** $\left[0,1\right]$ üzerinde T_L ve T_W t-normları sadece trivial idempotent elemana sahiptirler.

(iv**)** T_P t-normu ne trivialden farklı idempotent elemana, ne nilpotent elemana ne de sıfır bölene sahip değildir.

(v**)** Eğer $a \in \left[0,1\right]$ bir T t-normunun idempotent elemanı ise tümevarım ile $a_T^{(n)} = a$ dır.

Özel olarak, bu şu anlama gelir: $\left]0,1\right[$ ’ in hiçbir elemanı hem idempotent hem de nilpotent olamaz.

(vi**)** Eğer bir T t-normu bir a nilpotent elemana sahip ise $b_T^{(2)} = 0$ olacak şekilde bir $b \in \left]0,1\right[$ elemanı daima mevcuttur.

Gerçekten $n > 1$, $a_T^{(n)} = 0$ olacak şekildeki en küçük tam sayı ise $b = a_T^{(n-1)}$ alınırsa, $b_T^{(2)} = T\left(a_T^{(n-1)}, a_T^{(n-1)}\right) \le T\left(a_T^{(n-1)}, a\right) = a_T^{(n)} = 0$ elde edilir.

(vii**)** Eğer $a \in \left[0,1\right]$ bir T t-normunun nilpotent elemanı ise her $b \in \left]0,a\right[$ sayısı aynı zamanda T nin bir nilpotent elemanıdır.

$b \le a$ olduğunda, monotonluk özelliğinden $b_T^{(n)} \le a_T^{(n)} = 0 \Rightarrow b_T^{(n)} = 0$ elde edilir.

($viii$**)** $\left[0,1\right]$ üzerindeki bir T t-normunun nilpotent elemanlarının ve sıfır bölenlerinin kümesi ya boş kümedir (T_M ve T_P) ya da $\left]0,c\right[$ veya $\left]0,c\right]$ şeklinde bir aralıktır.

Örneğin;

$$T^{nM} = \begin{cases} 0 & , \quad x + y \le 1 \\ \min\left(x,y\right) & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

göz önüne alınırsa,

T^{nM} bir t-normdur.

Nilpotent elemanlarının kümesi $= \left]0, \frac{1}{2}\right]$

Sıfır bölenlerinin kümesi $= \left]0,1\right[$ dir.

Önerme 6 : $\left[0,1\right]$ üzerindeki her T t-normu için aşağıdaki özellikler denktir:

(i**)**T sıfır bölenlidir.

(ii**)**T nilpotent elemana sahiptir.

İspat :

$(i) \Rightarrow (ii)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Eğer T**,** bir sıfır bölene sahip ise, yani bir $a > 0$ ve $b > 0$ için $T\left(a,b\right) = 0$ ise $c = \min\left(a,b\right) > 0$ alındığında $T\left(c,c\right) \leq T\left(a,b\right) = 0$ dır.

$T\left(c,c\right) = c_T^{(2)} = 0$ olduğundan c nilpotent elemandır. ♦

Tanım 37 : T, $\left[0,1\right]$ üzerinde bir t-norm olsun.

(i**)** T t-normuna kesin monoton (SM) denir: $\Leftrightarrow$ $x > 0$ ve $y < z$ ise $T\left(x,y\right) < T\left(x,z\right)$ dir.

(ii**)** T t-normu kısaltma kuralını (CL) sağlar denir: $\Leftrightarrow$ $T\left(x,y\right) = T\left(x,z\right)$ ise $x = 0$ veya $y = z$ dir.

(iii**)** T t-normu şartlı kısaltma kuralını (CCL) sağlar denir: $\Leftrightarrow$ $T\left(x,y\right) = T\left(x,z\right) > 0$ ise $y = z$ dir.

(iv**)**T t-normuna Arşimedyan (AP) denir: $\Leftrightarrow$ Her $\left(x,y\right) \in \left]0,1\right[^2$ için bir $n \in \mathbb{N}$ $x_\tau^{\,n} < y$ olacak şekilde mevcuttur.

(v**)**T t-normuna limit özelliğini (LP) sağlar denir: $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \left]0,1\right[$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x_\tau^{(n)} = 0$ dır.

Örnek 10 :

(i**)** T_M t-normu bu özelliklerden hiçbirine sahip değildir.

$x = \dfrac{1}{3}$ için $\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$ olduğundan, $T_M\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3} = T_M\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{4}\right)$ kesin monoton (SM) özelliğini sağlamaz.

Buradan kısaltma (CL) ve şartlı kısaltma (CCL) özelliğini sağlamadığı görülür.

$x = \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_T^{(n)} = \dfrac{2}{3} \not< y = \dfrac{1}{3}$ Arşimedyan (AP) özelliğini sağlamaz.

$x = \dfrac{1}{4}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x_T^{(n)} = \dfrac{1}{4} \neq 0$ limit (LP) özelliğini sağlamaz.

(*ii*) T_P t-normu bu özelliklerin hepsini sağlar. (SM) , (CL) ve (CCL) özelliklerini sağladığı kolaylıkla görülebilir. T_P t-normunun Arşimedyan (AP) özelliğini sağladığını gösterelim:

$x, y \in]0,1[$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{T_P}^{(n)} = x^n \geq y$ olsa $0 = \lim_{n\to\infty} x^n \geq y \Rightarrow y = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde $\exists m \in \mathbb{N}$ öyleki $x_{T_P}^{(m)} < y$ dir.

Dolayısıyla T_P t-normu Arşimedyan (AP) özelliğini sağlar.

(*iii*) T_L ve T_D t-normları Arşimadyandır. Şartlı kısaltma (CCL) özelliğini ve limit (LP) özelliğini sağlar. Fakat diğer özellikleri sağlamaz.

(*iv*) Eğer bir T t-normu kısaltma (CL) özelliğini sağlarsa açık olarak şartlı kısaltma (CCL) özelliğini de sağlar. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek olarak, T_L t-normu **ş**artlı kısaltma (CCL) özelliğini sağlar. Fakat kısaltma (CL) özelliğini sağlamaz.

Tanım 38 : X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subset \wp(X)$ ailesine X üzerinde bir topoloji adı verilir.

$(\tau - 1)$ $\emptyset, X \in \tau$,

$(\tau - 2)$ $G_1, ..., G_n \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_n \in \tau$ $\quad (n \in \mathbb{N})$,

$(\tau - 3)$ $G_\lambda \in \tau$ $\quad (\lambda \in \Lambda)$ ise $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \in \tau$ $\quad$ (Λ bir indis kümesi)

τ, X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay ve τ nun elemanlarına da bu topolojik uzayın açık kümeleri denir.

Tanım 39 : (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin bütünleyeni $X \setminus A$ açık ise A kümesine bu uzayda kapalıdır denir.

Teorem 8 : (X, τ) bir topolojik uzay ise,

(*i*) $\emptyset$ ve X kümeleri kapalıdır.

(*ii*) $A_1, ..., A_n$ kümeleri kapalı ise $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesi de kapalıdır.

(*iii*) $\{A_\alpha\}$ kapalı kümeler ailesi için $\bigcap_{\alpha} A_\alpha$ kümesi kapalıdır.

$G \subset X$ ise, G açıktır $\Leftrightarrow$ $X \setminus G$ kapalıdır.

Tanım 40 : (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yı içeren en dar kapalı kümeye A nın kapanışı denir ve $\overline{\mathrm{A}}$ ile gösterilir.

Yani $\overline{\mathrm{A}} := \bigcap\limits_{A \subset B} B \quad (B \text{ kapalı})$

Tanım 41 : (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $\forall x, y \in X \quad (x \neq y)$ için G ve $H \subset X$ gibi iki açık küme $x \in G$, $\mathrm{y} \notin \mathrm{G}$ ve $x \notin H, y \in H$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu (X,τ) topolojik uzayına bir $T_1 -$uzayı (veya Frechet uzayı) denir.

Teorem 9 : Bir (X,τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i**)** (X,τ) bir $T_1 -$uzayıdır.

(ii**)** Her $x \in X$ için $\{x\}$ tek noktalı kümesi kapalıdır.

(iii**)** Her $A \subset X$ için $A = \bigcap\limits_{U \in \upsilon(A)} U$ dır.

Burada $\upsilon(A)$, A kümesinin komşuluklarının ailesini göstermektedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Aralık Değerli T-Normlar

$[0,1]$ birim aralık olmak üzere;

$[0,1]^{[2]} = (\{[a,b] \mid (a,b) \in [0,1]^2 \text{ ve } a \le b\}, \le, \wedge, \vee, [0,0], [1,1])$

sıra bağıntısı $\le$, $\wedge$ ve $\vee$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$[a,b] \le [c,d] \Leftrightarrow a \le c$ ve $b \le d$

$[a,b] \wedge [c,d] = [\min(a,c), \min(b,d)]$

$[a,b] \vee [c,d] = [\max(a,c), \max(b,d)]$

$[0,1]^{[2]}$ üzerindeki değişmeli, birleşmeli bir T ikili işlemine $\forall x, y, z \in [0,1]^{[2]}$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa bir t-norm denir:

(i**)** $T(x,[1,1]) = x$

(ii**)** $T(x, y \vee z) = T(x,y) \vee T(x,z)$

(iii**)** $T(x, y \wedge z) = T(x,y) \wedge T(x,z)$

(iv**)** T ' nin D $= \{[x,x] \mid x \in [0,1]\}$ ye kısıtlaması bir t-normdur.

(v**)** $x = [a,b]$ öyleki $T([0,1],[a,b]) = [0,b]$

$[0,1]^{[2]}$ üzerindeki her t-norm T aşağıdaki gibi yazılır:

$T([a,b],[c,d]) = [T^{'}(a,c), T^{'}(b,d)]$, burada $T^{'}$ birim aralık üzerinde bir t-normdur.

2.2. Sıfır Bölenler ve Nilpotent Elemanlar

Tanım 42 : P bir sınırlı kısmen sıralı küme olsun.

$Z[P] := \{x \mid x \in P \text{ ve } \exists\, y \in P \setminus \{0\} \text{ için } \ell(\{x,y\}) = \{0\} \}$

Bir L sınırlı kafesinin $\mathrm{Z}[L]$ altkümesi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\mathrm{Z}[L] := \{x \mid x \in L \text{ ve } \exists\, y \in L\backslash\{0\} \text{ için } x \wedge y = 0\}$

Örnek 11 :

(*i*) Herhangi bir C sınırlı zinciri için $\mathrm{Z}[C] = \{0\}$ dır.

(*ii*) C_1 ve C_2 iki sınırlı zincirin yatay toplamı L olsun. $L = C_1 \cup C_2$ ve kısmi sıra bağıntısı $\le$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$x \le y \Leftrightarrow \left((x,y) \in C_1^2 \;\; ve \;\; x \le_1 y\right) \vee \left((x,y) \in C_2^2 \;\; ve \;\; x \le_2 y\right)$

Bu durumda, $\mathrm{Z}[\mathrm{L}] = L\backslash\{1\}$

(*iii*) Şekil 5(a) daki P sınırlı kısmen sıralı kümesi için $\mathrm{Z}[P] = \{0, a, b\}$

(*iv*) Şekil 5(b) deki L sınırlı kafesi için $\mathrm{Z}[L] = \{0, a, b, i\}$

(*v*) Bir B Boole kafesi için $\mathrm{Z}[B] = \mathrm{B}\backslash\{1\}$

Önerme 7 : P bir sınırlı kısmen sıralı küme ise $\mathrm{Z}[P]$, P nin bir idealidir.

($\forall x \in Z[P] \Rightarrow \downarrow x \subseteq \mathrm{Z}[P]$)

İspat : $x \in Z[P]$ olsun.

Göstermemiz gereken $\downarrow x \subseteq \mathrm{Z}[P]$ olduğudur.

$y \in \downarrow x \;\; \Rightarrow \;\; y \le x$

$x \in \mathrm{Z}[P]$ olduğundan $\exists z \in P\backslash\{0\}$ için $\ell(\{z, x\}) = \{0\}$ dır.

$k \in \ell(\{y, z\})$ alalım. $k \le y \le x$ ve $k \le z$ olduğundan, $k \in \ell(\{x, z\}) = \{0\}$ dır.

Buradan $k = 0$ dır.

$\ell(\{y, z\}) = \{0\}$ elde edildiğinden $y \in \mathrm{Z}[P]$ dir.♦

Tanım 43 : T**,** bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm olsun. $x \in P$ elemanına T ' nin sıfır böleni denir: $\Leftrightarrow$ $\ell(\{x, y\}) \ne \{0\}$ ve $T(x, y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in P$ mevcuttur.

$P = [0,1]$ olduğunda tanım 36 da verilen sıfır bölen tanımı ile yukarıda tanım 43 te verilen sıfır bölen tanımı çakışır.

T ' nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(T)$ ile gösterilir. Eğer $Z(T) = \varnothing$ ise T ' ye sıfır bölensiz bir t-norm denir. 0 ve 1 sıfır bölen değildirler.

Bir L sınırlı kafesi üzerinde $x \wedge y \neq 0$ ve $T(x, y) = 0$ olacak şekilde bir $y \in L$ mevcutsa $x \in L$ elemanına T ' nin sıfır böleni denir.

Örnek 12 :

(i **)** En küçük t-norm olan T_W için , $Z(T_W) = P \setminus \{0,1\}$

(ii **)** Bir sınırlı kafes üzerindeki $\wedge$-işlemi (en büyük t-norm) sıfır bölene sahip değildir.

(iii **)** (1) de verilen T_e t-normunun sıfır bölenlerinin kümesi aşağıdaki şekildedir.

$Z(T_e) = \{x \mid \exists y \in L,\ x \wedge y \neq 0 \text{ ve } x \wedge y \wedge e = 0\}$

Böylece, T_e sıfır bölene sahiptir $\Leftrightarrow$ $e \in Z[L]$ dir. Açıkça, $x \in Z(T_e) \Rightarrow e \in Z[L]$

Tersine, eğer $e \in Z[L]$ ise $x \wedge e = 0$ olacak şekilde $0 \neq x \neq 1$ mevcuttur.

$x \in Z(T_e)$ dir.

(iv **)** Şekil 5(b) deki L sınırlı kafesi üzerindeki T_i t-normu için $Z(T_i) = \{a, b, c, i\}$ dir.

Önerme 8 : T , bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm olsun.

(i **)** T nin trivialden farklı herhangi bir i idempotent elemanı için, $\uparrow i \cap N(T) = \varnothing$

(ii **)** T nin herhangi bir z sıfır böleni için, $\downarrow z \cap N(T) \neq \varnothing$

(iii **)** T nin herhangi bir p nilpotent elemanı için $\downarrow p \cap I(T) = \{0\}$

(iv **)** T nin her nilpotent elemanı aynı zamanda T nin bir sıfır bölenidir. Yani $N(T) \subseteq Z(T)$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örneğin,

$$T^{nM} = \begin{cases} 0 & , \quad x + y \leq 1 \\ \min(x, y) & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

t-normu göz önüne alınırsa,

$a = \dfrac{2}{3}$ için $T\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = 0$ olduğundan a sıfır bölendir. $T\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \min\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$ olduğundan a nilpotent eleman değildir.

İspat :

(i **)** i, T nin trivialden farklı bir idempotent elemanı olsun. Açıkça, $\forall n \in \mathbb{N}$ için , $i^{(n)_T} = i$ dir.

$i \le x$ ve T nin monotonluğundan $i \le x^{(n)_T}$ dir. Buradan x nilpotent eleman olamaz. Dolayısıyla, $\uparrow i \cap N(T) = \varnothing$ elde edilir.

(ii**)** z, T nin bir sıfır böleni olmak üzere ve y yi aşağıdaki gibi alalım:

$\ell(\{y,z\}) \neq \{0\}$ ve $T(z,y) = 0$

$\ell(\{y,z\})$ den alınan $p \neq 0$ için T nin monotonluğundan $T(p,p) \le T(z,y) = 0$

Böylece p T nin nilpotent elemanıdır ve $p \le z$ olduğu için, $\downarrow z \cap N(T) \neq \varnothing$ olduğu elde edilir.

(iii**)** p, T nin bir nilpotent elemanı olsun. O halde bir n$\in \mathbb{N}$ sayısı için $p^{(n)_T} = 0$ dır.

Varsayalım x, T nin trivialden farklı bir idempotent elemanı olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $x^{(n)_T} = x$ dir.

$x \le p$ ve T nin monotonluğundan $x^{(n)_T} \le p^{(n)_T} = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\downarrow p \cap I(T) = \{0\}$ dır.

(iv**)** p, T nin nilpotent elemanı ve n, $p^{(n)_T} \neq 0$ olacak şekildeki en büyük sayı olsun $(n \ge 1)$.

O halde T(p, p$^{(n)_T}$) = 0 dır. $p^{(n)_T} \in \ell\left(p, p^{(n)_T}\right)$ olduğu için $p \in$Z(T) dir. Dolayısıyla $N(T) \subseteq Z(T)$ elde edilir. ♦

2.3. Arşimedyan Özelliği

Tanım 44 : Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T t-normuna Arşimedyan denir: $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in P^2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_T} \ge y \Rightarrow x = 1$ veya $y = 0$ dır.

Önerme 9 : Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T t-normu Arşimedyandır: $\Leftrightarrow$ $\forall x \in P \setminus \{1\}$ için $\ell\left(\left\{x^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\}$ dır.

İspat :

'$\Rightarrow$' : T t-normu Arşimedyan olsun.

$\forall (x,y) \in P^2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_T} \ge y \Rightarrow$ $x = 1$ veya $y = 0$ dır. $\forall x \in P \setminus \{1\}$ olduğundan $y = 0$ dır.

$x^{(n)_T} \geq y$ olduğu için y$\in \ell\left(\left\{x^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ olur. Buradan, $\ell\left(\left\{x^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \{0\}$ elde edilir.

'$\Leftarrow$' : $\forall (x, y) \in P^2$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_T} \geq y$ olsun.

$\forall x \in P \setminus \{1\}$ için y$\in \ell\left(\left\{x^{(n)_T} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ = 0 dır. O halde $y = 0$ dır. T t-normu Arşimedyandır. ♦

Sonuç 2 : Bir L tam kafesi üzerindeki T t-normu Arşimedyandır: $\Leftrightarrow \forall x \in L \setminus \{1\}$ için $\inf_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)_T} = 0$ dır.

Önerme 10 : Bir C sınırlı zinciri üzerindeki T t-normu Arşimedyandır: $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in C \setminus \{0,1\}^2$ için $\exists n \in \mathbb{N}$ öyleki $x^{(n)_T} < y$ dir.

$C = [0,1]$ için tanım 37 (iv) de verilen Arşimedyan özelliği ile önerme 10 da verilen Arşimedyan özelliği çakışır.

P bir sınırlı kısmen sıralı küme olsun. Açıkça en küçük t-norm olan T_W her zaman Arşimedyandır. P üzerinde verilen bir T t-normu için $N(T) = P \setminus \{0,1\}$ ise T Arşimedyandır. Tersi genelde doğru değildir.

Birim aralık üzerindeki $T_P(x, y) = x \cdot y$ çarpım t-normu Arşimedyandır fakat nilpotent değildir.

P üzerindeki herhangi bir T Arşimedyan t-normu sadece trivial idempotentlere sahiptir.

Böylece T, köşegen eşitsizliğini sağlar: $\Leftrightarrow \forall x \in P \setminus \{0,1\}$ için, $T(x, x) < x$ dir. Köşegen eşitsizliği bir t-normun Arşimedyan olması için gerekli bir koşuldur.

Önerme 11 : Bir L tam kafesi üzerindeki T t-normu inf-morfisi olsun. T Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ T köşegen eşitsizliğini sağlar.

İspat :

'$\Leftarrow$': göstermek yeterlidir.

Sonuç 2 yi göz önünde bulundurarak herhangi bir $x \neq 1$ için $\inf_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)_T} = 0$ olduğunu gösterelim.

$\delta := \inf_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)_T}$ olsun.

$$T(\delta,\delta) = T(\inf_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)_T}, \inf_{m\in\mathbb{N}} x^{(m)_T})$$

T nin sıra dönüşümü inf-morfisi olduğu için,

$$T(\delta,\delta) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\in\mathbb{N}} T(x^{(n)_T}, x^{(m)_T})$$

$$= \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\in\mathbb{N}} x^{(n+m)_T}$$

$$= \inf_{k\in\mathbb{N}/\{1\}} x^{(k)_T} \geq \delta$$

$T(\delta,\delta) \leq \delta$ olduğu için, $T(\delta,\delta) = \delta$ dır. T köşegen eşitsizliğini sağladığı için $\delta \in \{0,1\}$ dir. $x < 1$ olduğu için, $\delta < 1$ elde edilir.

Dolayısıyla $\delta = 0$ dır. T Arşimedyandır. ♦

2.4. Çarpım Kısmen Sıralı Kümeleri Üzerindeki T-Normların Direkt Çarpımı

Önerme 12 : T_1, P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2, P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm olsun. T_1 ve T_2 nin direkt çarpımı $T_1 \times T_2$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T_1 \times T_2\left(\left(x_1, y_1\right),\left(x_2, y_2\right)\right) = \left(T_1\left(x_1, x_2\right), T_2\left(y_1, y_2\right)\right)$$

$T_1 \times T_2$, $P_1 \times P_2$ çarpım sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-normdur.

İspat :

(*i*) $T_1 \times T_2\left(\left(x_1, y_1\right),\left(x_2, y_2\right)\right) = \left(T_1\left(x_1, x_2\right), T_2\left(y_1, y_2\right)\right)$

$$\overset{T_1 \text{ ve } T_2\ t-norm}{=} \left(T_1\left(x_2, x_1\right), T_2\left(y_2, y_1\right)\right)$$

$$= T_1 \times T_2\left(\left(x_2, y_2\right),\left(x_1, y_1\right)\right)$$

(*ii*) $T_1 \times T_2\left(\left(x_1, y_1\right), T_1 \times T_2\left(\left(x_2, y_2\right),\left(x_3, y_3\right)\right)\right)$

$$= T_1 \times T_2\left(\left(x_1, y_1\right),\left(T_1\left(x_2, x_3\right), T_2\left(y_2, y_3\right)\right)\right)$$

$$= \left(T_1\left(x_1, T_1\left(x_2, x_3\right)\right), T_2\left(y_1, T_2\left(y_2, y_3\right)\right)\right)$$

$$\overset{T_1 \text{ ve } T_2\ t-norm}{=} \left(T_1\left(T_1\left(x_1, x_2\right), x_3\right), T_2\left(T_2\left(y_1, y_2\right), y_3\right)\right) \qquad (*)$$

$$T_1 \times T_2\left(T_1 \times T_2\left(\left(x_1, y_1\right),\left(x_2, y_2\right)\right),\left(x_3, y_3\right)\right)$$

$$= T_1 \times T_2\left(\left(T_1\left(x_1, x_2\right), T_2\left(y_1, y_2\right)\right), \left(x_3, y_3\right)\right)$$

$$=\left(T_1\left(T_1\left(x_1, x_2\right), x_3\right), T_2\left(T_2\left(y_1, y_2\right), y_3\right)\right) \qquad (**)$$

(*) = (**) olduğundan birleşme özelliği sağlanır.

(*iii*) $\left(x_1, y_1\right) \leq \left(x_2, y_2\right)$ olsun. Bu takdirde, $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ dir.

T_1 ve T_2 t-norm olduğu için, $T_1\left(x_1, x\right) \leq T_1\left(x_2, x\right)$

$$T_2\left(y_1, z\right) \leq T_2\left(y_2, z\right)$$

$$\Rightarrow \left(T_1\left(x_1, x\right), T_2\left(y_1, z\right)\right) \leq \left(T_1\left(x_2, x\right), T_2\left(y_2, z\right)\right)$$

$$\Rightarrow T_1 \times T_2\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x, z\right)\right) \leq T_1 \times T_2\left(\left(x_2, y_2\right), \left(x, z\right)\right)$$

(*iv*) $T_1 \times T_2\left(\left(x, y\right), \left(1,1\right)\right) \overset{?}{=} \left(x, y\right)$

$$T_1 \times T_2\left(\left(x, y\right), \left(1,1\right)\right) = \left(T_1\left(x,1\right), T_2\left(y,1\right)\right)$$

$$\overset{T_1 \text{ ve } T_2\ t-norm}{=} \left(x, y\right)$$

Buradan, $T_1 \times T_2$, $P_1 \times P_2$ çarpım sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-normdur.♦

Önerme 13 : T_1, P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2, P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

(*i*) $I\left(T_1 \times T_2\right) = I\left(T_1\right) \times I\left(T_2\right)$

(*ii*) $N\left(T_1 \times T_2\right) = N\left(T_1\right) \times N\left(T_2\right)$

İspat :

(*i*) $x \in I(T_1)$ ve $y \in I(T_2)$ olsun. $x \in I(T_1) \Rightarrow T_1\left(x, x\right) = x$ ve $y \in I(T_2) \Rightarrow T_2\left(y, y\right) = y$

$$T_1 \times T_2\left(\left(x, y\right), \left(x, y\right)\right) = \left(T_1\left(x, x\right), T_2\left(y, y\right)\right) = \left(x, y\right)$$

$$\Rightarrow \left(x, y\right) \in I\left(T_1 \times T_2\right)$$

(*ii*) $T = T_1 \times T_2$, $x \in N(T_1)$ ve $y \in N\left(T_2\right)$ olsun.

$x \in N(T_1)$ ve $y \in N\left(T_2\right) \Rightarrow$ $n_1 \in \mathbb{N}$; $x^{(n_1)_{T_1}} = 0_1$ ve $n_2 \in \mathbb{N}$; $\mathrm{y}^{(n_2)_{T_2}} = 0_2$

n: = $\max\left(n_1, n_2\right)$ alırsak $\left(x, y\right)^{(n)_T} = \left(0_1, 0_2\right)$ olur. Dolayısıyla, $\left(x, y\right) \in N\left(T\right)$♦

Tanım 45 : P_1 üzerindeki herhangi bir T_1 t-normu ve P_2 üzerindeki herhangi bir T_2 t-normu için $T_1 \times T_2$ direkt çarpımı $(0_1, 0_2)$ ve $(1_1, 1_2)$ idempotent elemanlara sahip olmasının yanında $(0_1, 1_2)$ ve $(1_1, 0_2)$ idempotent elemanlarına da sahiptir.

Bu trivialden farklı idempotent elemanlara t-normların direkt çarpımının doğal idempotent elemanları denir.

Lemma 7 : P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$Z[P_1 \times P_2] = (Z[P_1] \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z[P_2])$$

$$(\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2) \setminus Z[P_1 \times P_2] = (\mathrm{P}_1 \setminus Z[P_1]) \times (\mathrm{P}_2 \setminus Z[P_2])$$

İspat :

$$Z[P_1 \times P_2] = \{(x_1, y_1) \mid \exists (x_2, y_2) \in \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2 \setminus \{(0_1, 0_2)\} \text{ , } \ell(\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}) = \{0_1, 0_2\} \}$$

İlk önce $\mathrm{P}_1 \times Z[P_2]$ nin $Z[P_1 \times P_2]$ de içerildiğini gösterelim. $(x_1, y_1) \in \mathrm{P}_1 \times Z[P_2]$ keyfi olsun. $y_1 \in Z[P_2]$ olduğundan $\exists y_2 \in P_2 \setminus \{0_2\}, \ell_2(\{y_1, y_2\}) = \{0_2\}$

Açık olarak, $\ell_1(\{x_1, 0_1\}) = \{0_1\}$

Ayrıca ;

$$\begin{aligned} \ell(\{(x_1, y_1), (0_1, y_2)\}) &= \ell_1(\{x_1, 0_1\}) \times \ell_2(\{y_1, y_2\}) \\ &= \{0_1\} \times \{0_2\} \\ &= \{(0_1, 0_2)\} \end{aligned}$$

$(0_1, y_2) \neq (0_1, 0_2)$ olduğu için $(x_1, y_1) \in Z[P_1 \times P_2]$.

Tersine, keyfi $(x_1, y_1) \in Z[P_1 \times P_2]$ alalım. Bir $(x_2, y_2) \neq (0_1, 0_2)$ elemanı,

$$\begin{aligned} \ell(\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}) &= \ell_1(\{x_1, x_2\}) \times \ell_2(\{y_1, y_2\}) \\ &= \{(0_1, 0_2)\} \end{aligned}$$

sağlanacak şekilde vardır.

$x_2 \neq 0_1$ ve $\ell_1(\{x_1, x_2\}) = \{0_1\}$ olduğundan, $x_1 \in Z[P_1] \Rightarrow (x_1, y_1) \in Z[P_1] \times P_2$

Böylece, $Z[P_1 \times P_2] = (Z[P_1] \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z[P_2])$ olduğu elde edilir.♦

Örnek 13 : C_1 ve C_2 iki sınırlı zincir olsun. Bu takdirde,

$Z[C_1 \times C_2] = (\{0_1\} \times C_2) \cup (C_1 \times \{0_2\})$ dir.

Önerme 14 : T_1, P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2, P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$Z(T_1 \times T_2) = (Z(T_1) \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z(T_2))$$

İspat : $T = T_1 \times T_2$, $x \in Z(T_1)$ ve $y \in P_2$ olsun. O halde $x' \in P_1$ vardır öyleki $\ell_1(\{x, x'\}) \neq \{0_1\}$ ve $T_1(x, x') = 0_1$

$$\ell(\{(x, y), (x', 0_2)\}) = \ell_1(\{x, x'\}) \times \ell_2(\{y, 0_2\}) \neq \{(0_1, 0_2)\}$$

ve $T((x, y), (x', 0_2)) = (0_1, 0_2)$ dir.

Buradan $(x, y) \in Z(T_1 \times T_2)$ elde edilir. Ters kapsamada benzer şekilde gösterilir. ♦

Sonuç 3 : T_1 , P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2 , P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin.

$T_1 \times T_2$ t-normu sıfır bölensizdir $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 t-normları sıfır bölensizdir.

2.5. Pseudo - Arşimedyan Özelliği

P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T_1 t-normunun ve P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T_2 t-normunun direkt çarpımı $T_1 \times T_2$ olsun. Tanım 45 te bahsedildiği gibi $(0_1, 1_2)$ ve $(1_1, 0_2)$ T nin idempotent elemanlarıdır.

Böylece, $P_1 \times P_2$ deki herhangi bir $(x, 1_2)$ için T nin monotonluğundan, $(0_1, 1_2) \in \ell\left\{(x, 1_2)^{(n)_T} \mid \; n \in \mathbb{N}\right\}$ elde edilir.

Benzer şekilde $P_1 \times P_2$ deki herhangi bir $(1_1, y)$ için T nin monotonluğundan, $(1_1, 0_2) \in \ell\left\{(1_1, y)^{(n)_T} \mid \; n \in \mathbb{N}\right\}$ elde edilir.

Bu yüzden $(x,1_2)$ ve $(1_1,y)$ tipindeki elemanlar nilpotent eleman olamazlar. Önerme 9 a göre T, Arşimedyan olamaz. Bu istenmeyen durumdan kaçınmak için, t-normların direkt çarpımı için Arşimedyan özelliğinin tanımını aşağıdaki şekilde verelim;

$U[P_1\times P_2]=\{x \mid x\in P_1\times P_2 \ \ ve \ \ \exists y\in P_1\times P_2\setminus\{(1_1,1_2)\}$ için $\vartheta(\{x,y\})=\{(1_1,1_2)\}\ \}$

Ek olarak, keyfi P sınırlı kısmen sıralı kümesi için $U[P]$ kümesini düşünelim;

$U[P]=\{x \mid x\in P \ \ ve \ \ \exists y\in P\setminus\{1\} \ \ \vartheta(\{x,y\})=\{1\}\ \}$ dir.

Bir L sınırlı kafesi için bu tanım aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$U[L]=\{x \mid x\in L \ \ ve \ \ \exists y\in L\setminus\{1\}$ için $x\vee y=1\ \}$ dir.

Tanım 46 : Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T t-normuna Pseudo-Arşimedyan denir: $\Leftrightarrow$ $\forall(x,y)\in P^2,\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ için\ \ x^{(n)_T}\geq y\Rightarrow x\in U[P]$ veya $y=0$ dır.

Açıkça, bir C zinciri için, $U[C]=\{1\}$ olduğundan Pseudo-Arşimedyan özelliği Arşimedyan özelliği gibidir.

Eğer P üzerinde verilen bir T t-normu için $N(T)=P\setminus(\{0\}\cup U[P])$ ise, T Pseudo- Arşimedyandır. Tersi genelde doğru değildir.

Aşağıda verilen lemma, lemma 7 nin dualidir.

Lemma 8 : P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$U[P_1\times P_2]=(U[P_1]\times \mathrm{P}_2)\cup(\mathrm{P}_1\times U[P_2])$

$(\mathrm{P}_1\times\mathrm{P}_2)\setminus U[P_1\times P_2]=(\mathrm{P}_1\setminus U[P_1])\times(\mathrm{P}_2\setminus U[P_2])$

Önerme 15 : T_1, P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2, P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1\times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1\times T_2$ verilsin.

$T_1\times T_2$ Pseudo-Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 Pseudo-Arşimedyandır.

İspat : $T=T_1\times T_2$ alalım.

'$\Leftarrow$': T_1 ve T_2 Pseudo-Arşimedyan olsun. $\mathrm{P}_1\times\mathrm{P}_2$ deki (x,y) ve (x',y') öyleki $\forall\ n\in\mathbb{N}$ ve $(x',y')\neq(0_1,0_2)$ için $(x,y)^{(n)_T}\geq(x',y')$ dir.

Açıkça, $(x,y)^{(n)_T}=\left(x^{(n)_{T_1}},y^{(n)_{T_2}}\right)$

$x' \neq 0_1$ durumunu düşünürsek, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_{T_1}} \geq x'$ ve T_1 Pseudo-Arşimedyan olduğu için $x \in U[P_1]$dir. Lemma 8 e göre $(x, y) \in U[P_1 \times P_2]$ dir.

Böylece T Pseudo-Arşimedyandır.

'$\Rightarrow$' : $T = T_1 \times T_2$ Pseudo-Arşimedyan olsun. T_1 in Pseudo-Arşimedyan olduğunu gösterelim.

$(x, x') \in P_1^2$ keyfi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)_{T_1}} \geq x'$ olsun.

$(x, 0_2), (x', 0_2) \in P_1 \times P_2$ öyleki $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ ve $(x', 0_2) \neq (0_1, 0_2)$ için $(x, 0_2)^{(n)_T} \geq (x', 0_2)$ dır.

$T = T_1 \times T_2$ Pseudo-Arşimedyan olduğu için $(x, 0_2) \in U[P_1 \times P_2]$ dir. $0_2 \notin U[P_2]$ olduğundan lemma 8 den $(x, 0_2) \in U[P_1] \times P_2$ dir. Buradan, $x \in U[P_1]$ dir.

Böylece T_1 in Pseudo-Arşimedyan olduğu elde edilir.

Benzer şekilde, T_2 ninde Pseudo- Arşimedyan olduğu gösterilir. ♦

Sonuç 4 : T_1, C_1 sınırlı zinciri üzerinde bir t-norm, T_2, C_2 sınırlı zinciri üzerinde bir t-norm ve onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$, $C_1 \times C_2$ çarpım kısmen sıralı kümesi üzerindeki t-norm verilsin.

$T_1 \times T_2$ Pseudo-Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 Arşimedyandır.

2.6. Kısaltma Özelliği

Tanım 47 : Bir P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki bir T t-norma kısaltmalıdır denir: $\Leftrightarrow$ $\forall x \in P \setminus Z[P]$, $\forall (y, z) \in P^2$ *için* $T(x, y) = T(x, z) \Rightarrow y = z$ dir.

Açıkça, bir T t-normu için $Z(T) \setminus Z[P] \neq \varnothing$ ise T kısaltmalı olamaz. Önerme 8 (iv) den dolayı $N(T) \setminus Z[P] \neq \varnothing$ dir.

Önerme 16 : T, P sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm olsun. Eğer T kısaltmalı ise $\forall x \in P \setminus Z[P], \forall (y, z) \in P^2$ *için* $y < z \Rightarrow T(x, y) < \mathrm{T}(x, z)$ dir.

Önerme 17 : T, bir L sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1) $\forall x \in L \setminus Z[L],\ \forall (y,z) \in L^2$ *için* $y < z \Rightarrow T(x,y) < T(x,z)$

2) $\forall x \in L \setminus Z[L],\ \forall (y,z) \in L^2$ *için* $T(x,y) = T(x,z) = T(x, y \wedge z) \Rightarrow y = z$

İspat :

$(1) \Rightarrow (2)$

$\forall x \in L \setminus Z[L], \forall (y,z) \in L^2$ *için* $\mathrm{T}(x,y) = T(x,z) = T(x, y \wedge z)$ olsun.

$y < z$ *ve* $z < y$ ise (1) ile çelişir.

$y \parallel z$ yani y, z ile kıyaslanamaz olsun. $y \wedge z < y \Rightarrow T(x, y \wedge z) < T(x,y)$ çelişkisi görülür.

Böylece $y = z$ elde edilir.

$(2) \Rightarrow (1)$

Benzer şekilde gösterilir. ♦

Sonuç 5 : T, C sınırlı zinciri üzerinde bir t-norm olsun. T kısaltmalıdır: $\Leftrightarrow \forall x \in C \setminus \{0\}, \forall (y,z) \in C^2$ için $y < z \Rightarrow T(x,y) < T(x,z)$ dir.

$C = [0,1]$ için tanım 37 (ii) de verilen kısaltma özelliği ile yukarıda Sonuç 5 de verilen kısaltma özelliği çakışır.

Önerme 18 : T_1, P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2, P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin.

$T_1 \times T_2$ kısaltmalıdır $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 kısaltmalıdır.

İspat : $T = T_1 \times T_2$ olsun.

'$\Leftarrow$': T_1 ve T_2 kısaltmalı olsun. $(x,x') \in P_1 \times P_2 \setminus Z[P_1 \times P_2]$ ve $P_1 \times P_2$ deki (y,y'), (z,z') ler için $T((x,x'),(y,y')) = T((x,x'),(z,z'))$ dır.

$T_1(x,y) = T_1(x,z)$ ve $T_2(x'y') = T_2(x',z')$

Lemma 7 den dolayı $x \in P_1 \setminus Z[P_1]$ ve $x' \in P_2 \setminus Z[P_2]$ dir.

T_1 ve T_2 kısaltmalı olduğundan $y = z$ ve $y' = z'$ dir. Buradan $(y,y') = (z,z')$ dir.

Böylece $T_1 \times T_2$ kısaltmalıdır.

'$\Rightarrow$':Tersine, T kısaltmalı ve $x \in P_1 \setminus Z[P_1]$ ve $(y,z) \in P_1^2$ öyleki $T_1(x,y) = T_1(x,z)$ olsun. $(T_1(x,y), T_2(1_2,0_2)) = (T_1(x,z), T_2(1_2,0_2))$ veya $T((x,1_2),(y,0_2)) = T((x,1_2),(z,0_2))$ dır.

$x \notin Z[P_1]$ ve $1_2 \notin Z[P_2]$ olduğu için lemma 7 den $(x,1_2) \notin Z[P_1 \times P_2]$ elde edilir.

T kısaltmalı olduğu için $(y,0_2)=(z,0_2)$ ve $y=z$ dir. Buradan T_1 kısaltmalıdır.

Benzer şekilde T_2 nin de kısaltmalı olduğu gösterilir. ♦

2.7. T-Normların Direkt Çarpımlarının Karakterize Edilmesi

Teorem 10 : L_1 ve L_2 iki sınırlı kafes ve T, $L_1 \times L_2$ sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm olsun. T L_1 üzerindeki T_1 t-normu ve L_2 üzerindeki T_2 t-normunun direkt çarpımı olarak verilsin.

T_1 ve T_2 kısmi dönüşümleri sup-morfisidir $\Leftrightarrow$ T nin kısmi dönüşümü sup-morfisidir.

İspat :

'$\Leftarrow$': $(x_1,x_2) \in L_1 \times L_2$ ve $(y_1,y_2) \in L_1 \times L_2$ olsun.

$T((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = T((x_1,0_2) \vee (0_1,x_2),(y_1,0_2) \vee (0_1,y_2))$

$(x_1,0_2) \wedge (0_1,y_2) = (0_1,x_2) \wedge (y_1,0_2) = (0_1,0_2)$ olduğu için,

$T((x_1,0_2),(0_1,y_2)) = T((0_1,x_2),(y_1,0_2)) = (0_1,0_2)$ dır.

T nin kısmi dönüşümü sup-morfisi olduğu için,

$T((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = T((x_1,0_2),(y_1,0_2)) \vee T((0_1,x_2),(0_1,y_2))$ dır.

$T, \wedge$ ile üstten sınırlı olduğu için;

$T((x_1,0_2),(y_1,0_2)) \leq (x_1,0_2) \wedge (y_1,0_2) = (x_1 \wedge_1 y_1, 0_2)$

Benzer şekilde $T((0_1,x_2),(0_1,y_2)) \leq (0_1, x_2 \wedge_2 y_2)$

Böylece $T((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (T_1(x_1,y_1),T_2(x_2,y_2))$ olan T_1 ve T_2 : $[0,1]^2 \to [0,1]$ dönüşümleri elde edilir. T_1 ve T_2 dönüşümleri bir t-normdur.

T nin kısmi dönüşümü sup-morfisi olduğu için,

(x_1,x_2) , (y_1,y_2) ve $(z_1,z_2) \in L_1 \times L_2$;

$T((x_1,x_2),(y_1,y_2) \vee (z_1,z_2)) = T((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \vee T((x_1,x_2),(z_1,z_2))$

veya

$(T_1(x_1, y_1 \vee_1 z_1), T_2(x_2, y_2 \vee_2 z_2)) = (T_1(x_1,y_1) \vee_1 T_1(x_1,z_1), T_2(x_2,y_2) \vee_2 T_2(x_2,z_2))$

dur.

Böylece T_1 ve T_2 nin kısmi dönüşümü sup-morfisidir.

'$\Rightarrow$': Benzer şekilde yapılır. ♦

Teorem 11 : L_1 ve L_2 iki sınırlı kafes ve T, $L_1 \times L_2$ sınırlı kafesi üzerinde bir t-norm olsun. T L_1 üzerindeki T_1 t-normu ve L_2 üzerindeki T_2 t-normunun direkt çarpımı olarak verilsin.

T_1 ve T_2 kısmi dönüşümleri inf-morfisidir $\Leftrightarrow$ T nin kısmi dönüşümü inf-morfisidir.

2.8. Birim Aralık Üzerindeki T-Normlar

Teorem 12 : T, $\left([0,1]^2, \leq\right)$ üzerinde bir t-norm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(*i*) T, $\left([0,1], \leq\right)$ üzerindeki T_1 ve T_2 t-normlarının direkt çarpımıdır.

(*ii*) T nin kısmi dönüşümü inf-morfisidir.

(*iii*) T nin kısmi dönüşümü sup-morfisidir.

$$T_W\left(x,y\right) = \begin{cases} 0 & , \quad \left(x,y\right) \in \left[0,1\right[^2 \text{ ise,} \\ \min\left(x,y\right) & , \quad \text{Aksi takdirde} \end{cases}$$

Açık olarak, $\left([0,1]^2, \leq\right)$ üzerindeki en küçük t-norm olan T_W t-normu $\left([0,1], \leq\right)$ üzerindeki t-normların direkt çarpımı değildir. $x = 0,5$, $y = 0,7$, $z = 0,4$, $w = 1$ için;

$$T_W\left(x,y\right) \vee T_W\left(z,w\right) \overset{?}{=} T_W\left(x \vee z, y \vee w\right)$$

$$0 \vee 0,4 \overset{?}{=} T_W\left(0.5,1\right)$$

$$0,4 \neq 0,5$$

Dolayısıyla, T_W sup-morfisi değildir.

Açıkça, $\left([0,1], \leq\right)$ üzerindeki sürekli t-normların direkt çarpımları da süreklidir.

Bir P sınırlı kısmen sıralı kümenin herhangi bir sıra-korur otomorfisi olan φ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\forall\left(x,y\right) \in P^2 \ \text{\textit{için}}\ x \leq y \Leftrightarrow \varphi\left(x\right) \leq \varphi\left(y\right)$$

P üzerindeki bir T_φ t-normu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$T_\varphi(x,y)=\varphi^{-1}\left(T\left(\varphi(x),\varphi(y)\right)\right)$

Burada, φ ve φ^{-1} kesin artan otomorfilerdir.

Önerme 19 : $\varphi:[0,1]^2\to[0,1]^2$ dönüşümü $\left([0,1]^2,\leq\right)$ nin bir otomorfisidir $\Leftrightarrow$ $\left([0,1],\leq\right)$ nin φ_1 ve φ_2 otomorfileri vardır öyleki,

$\forall(x,y)\in[0,1]^2$ için $\varphi(x,y)=\left(\varphi_1(x),\varphi_2(y)\right)$

veya

$\forall(x,y)\in[0,1]^2$ için $\varphi(x,y)=\left(\varphi_1(y),\varphi_2(x)\right)$

İspat :

'$\Leftarrow$': ispatı açık olduğundan '$\Rightarrow$' gösterelim.

φ, $\left([0,1]^2,\leq\right)$ nin bir otomorfisi ve $\varphi(1,0)=(a,b)$ olsun. $(a,b)\in\{(1,0),(0,1)\}$ olduğunu gösterelim.

Varsayalım, $a\neq 0$, $b\neq 0$ olsun. Bu takdirde, $\left(a,\frac{b}{2}\right)\,||\,\left(\frac{a}{2},b\right)$ dır.

$\left(a,\frac{b}{2}\right)<(a,b)=\varphi(1,0)$ olduğu için, $\varphi^{-1}\left(a,\frac{b}{2}\right)<(1,0)$ olur. Benzer şekilde, $\varphi^{-1}\left(\frac{a}{2},b\right)<(1,0)$ dır.

Buradan $\varphi^{-1}\left(a,\frac{b}{2}\right)$ ve $\varphi^{-1}\left(\frac{a}{2},b\right)$ kıyaslanabilirdir. Bu ise $\left(a,\frac{b}{2}\right)\,||\,\left(\frac{a}{2},b\right)$ olması ile çelişir.

Böylece ya $a=0$ ya da $b=0$ dır.

Varsayalım, $b=0$ olsun. $a=1$ olduğunu gösterelim.

Varsayalım, $a\neq 1$ olsun.

$(a,0)<(1,0)$ olduğu için, $\varphi^{-1}(a,0)=(1,0)<\varphi^{-1}(1,0)$ dır.

Böylece bir $c\in\left]0,1\right]$ için $\varphi^{-1}(1,0)=(1,c)$ dir.

$\left(1,\frac{c}{2}\right)\,||\,\left(\frac{1}{2},c\right)$, $\varphi\left(1,\frac{c}{2}\right)<(1,0)$ ve $\varphi\left(\frac{1}{2},c\right)<(1,0)$ dır.

Buradan $\varphi\left(1,\frac{c}{2}\right)$ ve $\varphi\left(\frac{1}{2},c\right)$ kıyaslanabilirdir. Bu ise $\left(1,\frac{c}{2}\right)\|\left(\frac{1}{2},c\right)$ olması ile çelişir. Böylece $a=1$ dir.

Benzer şekilde $b=1$ olduğu zaman $a=0$ olduğu gösterilir.

İspattan şimdiye kadar elde ettiklerimizden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz:

φ nin $\{(x,0)\mid x\in[0,1]\}$ ve $\{(0,y)\mid \mathrm{y}\in[0,1]\}$e kısıtlanışı $([0,1],\leq)$ in bir otomorfisidir.

$\varphi(1,0)=(1,0)$ olduğu zaman $\varphi(0,1)=(0,1)$ dir.

φ_1 ve φ_2 ,$([0,1],\leq)$ in otomorfisi olsun öyleki bazı $x,y\in[0,1]$ için, $\varphi(x,0)=(\varphi_1(x),0)$, $\varphi(0,y)=(0,\varphi_2(y))$

$(x,y)\in\left]0,1\right]^2$ ise $(x,0)<(x,y)$ ve $(0,y)<(x,y)$ dir.

$\varphi(x,0)=(\varphi_1(x),0)<\varphi(x,y)$ ve $\varphi(0,y)=(0,\varphi_2(y))<\varphi(x,y)$ dir.

Böylece $(\varphi_1(x),\varphi_2(y))\leq\varphi(x,y)$ dir.

$(\varphi_1(x),\varphi_2(y))<\varphi(x,y)$ olduğunu varsayalım.

$\varphi^{-1}(\varphi_1(x),\varphi_2(y))=(x',y')<(x,y)$

$(\varphi_1(x),0)<(\varphi_1(x),\varphi_2(y))$ olduğu için; $\varphi^{-1}(\varphi_1(x),0)=(x,0)<\varphi^{-1}(\varphi_1(x),\varphi_2(y))$ dir.

Benzer şekilde,

$\varphi^{-1}(0,\varphi_2(y))=(0,y)<\varphi^{-1}(\varphi_1(x),\varphi_2(y))$

$(x,y)\leq\varphi^{-1}(\varphi_1(x),\varphi_2(y))$ olduğundan $\varphi(x,y)\leq(\varphi_1(x),\varphi_2(y))$ çelişkisi görülür.

Sonuç olarak bazı $(x,y)\in[0,1]^2$ için $\varphi(x,y)=(\varphi_1(x),\varphi_2(y))$ dir. ♦

Önerme 20 : T_1 ve T_2 , $([0,1],\leq)$ üzerinde t-normlar ve onların direkt çarpımları $T=T_1\times T_2$ olsun. $([0,1]^2,\leq)$ nin herhangi bir φ otomorfisi için T_φ t-normu $([0,1],\leq)$ üzerindeki t-normların direkt çarpımıdır.

İspat : $(x,y)\in[0,1]^2$ için $\varphi(x,y)=(\varphi_1(y),\varphi_2(x))$ olduğunu kullanarak ispat edelim.

$\varphi^{-1}(x,y)=(\varphi_2^{-1}(y),\varphi_1^{-1}(x))$ dir.

$\varphi \circ \varphi^{-1}(x,y) = (x,y)$ olduğunu gösterelim.

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(x,y) = \varphi\left(\varphi_2^{-1}(y), \varphi_1^{-1}(x)\right)$$
$$= \left(\varphi_1\left(\varphi_1^{-1}(x)\right), \varphi_2\left(\varphi_2^{-1}(y)\right)\right)$$
$$= (x,y)$$

Şimdi $\varphi^{-1} \circ \varphi(x,y) = (x,y)$ olduğunu gösterelim.

$$\varphi^{-1} \circ \varphi(x,y) = \varphi^{-1}\left(\varphi_1(y), \varphi_2(x)\right)$$
$$= \left(\varphi_2^{-1}\left(\varphi_2(x)\right), \varphi_1^{-1}\left(\varphi_1(y)\right)\right)$$
$$= (x,y) \text{ dir.}$$

$$T^{\varphi}\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) = \varphi^{-1}\left(T\left(\varphi(x_1,y_1), \varphi(x_2,y_2)\right)\right)$$
$$= \varphi^{-1}\left(T\left(\left(\varphi_1(y_1), \varphi_2(x_1)\right), \left(\varphi_1(y_2), \varphi_2(x_2)\right)\right)\right)$$
$$= \varphi^{-1}\left(T_1\left(\varphi_1(y_1), \varphi_1(y_2)\right), T_2\left(\varphi_2(x_1), \varphi_2(x_2)\right)\right)$$
$$= \left(\varphi_2^{-1}\left(T_2\left(\varphi_2(x_1), \varphi_2(x_2)\right)\right), \varphi_1^{-1}\left(T_1\left(\varphi_1(y_1), \varphi_1(y_2)\right)\right)\right)$$
$$= \left(T_2^{\varphi_2}(x_1,x_2), T_1^{\varphi_1}(y_1,y_2)\right)$$

Böylece T^{φ}, $T_2^{\varphi_2}$ ve $T_1^{\varphi_1}$ in direkt çarpımıdır. ♦

Şimdi aşağıdaki problemi inceleyelim:

Bir sınırlı kısmen sıralı küme veya sınırlı kafes üzerindeki bir Pseudo-Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan bir t-norm nilpotent elemana sahip midir? $(0,1)$ üzerindeki sürekli Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan t-normların tüm elemanlarının nilpotent olduğunu hatırlayalım. $[11]$

Teorem 13 : $T \in \mathcal{T}([0,1])$ olsun. Eğer $x \in N(T)$ ise T kısaltmalı değildir.

İspat : $x \in N(T)$ olduğu için, bir $k \in N$ vardır öyleki $x^{(k)_T} = 0$ ve $x^{(k-1)_T} \neq 0$ dır.

$\forall a,b \in [0,1]$ için $a \neq b$ ise,

(1) $T\left(x^{(k-1)_T}, a\right) = T\left(x^{(k-1)_T}, b\right) \Rightarrow$ T kısaltmalı değildir.

(2) $T\left(x^{(k-1)_T}, a\right) \neq T\left(x^{(k-1)_T}, b\right)$

$$T\left(x^{(k-1)_T}, T(x,a)\right) = T\left(T\left(x^{(k-1)_T}, x\right), a\right)$$
$$= T\left(x^{(k)_T}, a\right)$$
$$= T(0,a)$$
$$= 0$$
$$T\left(x^{(k-1)_T}, T(x,b)\right) = T\left(T\left(x^{(k-1)_T}, x\right), b\right)$$
$$= T\left(x^{(k)_T}, b\right)$$
$$= T(0,b)$$
$$= 0$$

Böylece $T\left(x^{(k-1)_T}, T(x,a)\right) = T\left(x^{(k-1)_T}, T(x,b)\right)$ dır. $T(x,a) \neq T(x,b)$ olduğundan T kısaltmalı değildir.

2.9. Sınırlı Dağılmalı Kafeslerin Sınıflandırılması

2.9.1. $P_{(1)}$ ve $P_{(2)}$ Sınırlı Dağılmalı Kafesleri

$P_{(1)} = \{\alpha_a = (a,0)\ ,\ \gamma_b = (0,b)\ \mid\ a,b \in [0,1]\} \subseteq [0,1]^2$ ve $P_{(1)}$ üzerindeki $\leq$ bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

(1) $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$, $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$,

(2) $P_{(1)}$ de $\alpha_a < \alpha_b$, $\gamma_a < \gamma_b$ $\left(\forall a,b \in [0,1],\ a < b\ için\right)$,

(3) $\gamma_a < \alpha_a$ $\left(\forall a \in]0,1[\right)$.

Teorem 14 : $\left(P_{(1)}, \leq\right)$ bir sınırlı dağılmalı kafestir.

İspat :

(i **)** $\alpha_a = (a,0)$ ve $\alpha_b = (b,0)$ olsun.

$\alpha_a \vee \alpha_b = (a \vee b, 0)$

$\alpha_a \wedge \alpha_b = (a \wedge b, 0)$

(ii **)** $\gamma_a = (0,a)$ ve $\gamma_b = (0,b)$ olsun.

$\gamma_a \vee \gamma_b = (0, a \vee b)$

$\gamma_a \wedge \gamma_b = (0, a \wedge b)$

(iii **)** $\alpha_a = (a,0)$ ve $\gamma_b = (0,b)$ olsun.

(a) $a \leq b$ ise,

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_a \leq \alpha_a \leq \alpha_b \\ \gamma_a \leq \gamma_b \leq \alpha_b \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_a \vee \gamma_b = \alpha_b \quad ve \quad \alpha_a \wedge \gamma_b = \gamma_a \quad \text{dır.}$$

(b) $b < a$ ise ,

$\gamma_b < \alpha_b < \alpha_a \Rightarrow \alpha_a \vee \gamma_b = \alpha_a \quad ve \quad \alpha_a \wedge \gamma_b = \gamma_b$ dır.

(a) ve (b) den,

$$\alpha_a \vee \gamma_b = \begin{cases} \alpha_b & , \ a \leq b \ \ ise \\ \alpha_a & , \ b < a \ \ ise \end{cases} \quad \text{ve} \quad \alpha_a \wedge \gamma_b = \begin{cases} \gamma_a & , \ a \leq b \ \ ise \\ \gamma_b & , \ b < a \ \ ise \end{cases}$$

elde edilir.

$\alpha_a \wedge (\alpha_b \vee \gamma_c) = (\alpha_a \wedge \alpha_b) \vee (\alpha_a \wedge \gamma_c)$ olduğunu gösterelim. $\alpha_a = (a,0)$, $\alpha_b = (b,0)$, $\gamma_c = (0,c) \in P_{(1)}$ için

(*) $a \leq b$ olsun.

(i) $b \leq c$ ise,

$\gamma_b < \alpha_b \leq \alpha_c$

$\gamma_b < \gamma_c \leq \alpha_c$

(ii) $c < b$ ise,

$\alpha_c < \alpha_b$

$\gamma_c < \gamma_b < \alpha_b$

(i) ve (ii) den aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\alpha_b \vee \gamma_c = \begin{cases} \alpha_c & , \ b \leq c \ \ ise \\ \alpha_b & , \ c < b \ ise \end{cases}$$

$$\alpha_a \wedge (\alpha_b \vee \gamma_c) = \begin{cases} \alpha_a \wedge \alpha_c & , \ a \leq b \leq c \ ise \\ \alpha_a \wedge \alpha_b & , \ c < b \ \text{ ve } \ a \leq b \ \ ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_a & , \ a \leq b \leq c \ ise \\ \alpha_a & , \ c < b \ \text{ ve } \ a \leq b \ \ ise \end{cases} \tag{3}$$

$\alpha_a \wedge \alpha_b = \alpha_a$ dır.

(i) a $\leq c$ ise,

(ii) $c < a$ ise,

$\gamma_a < \alpha_a \leq \alpha_c$ $\gamma_c < \alpha_c < \alpha_a$

$\gamma_a \leq \gamma_c$

(i) ve (ii) den aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\alpha_a \wedge \gamma_c = \begin{cases} \gamma_a \ , & a \leq c \ \ ise \\ \gamma_c \ , & c < a \ \ ise \end{cases}$$

$$(\alpha_a \wedge \alpha_b) \vee (\alpha_a \wedge \gamma_c) = \begin{cases} \alpha_a \vee \gamma_a & , \ a \leq c \ \text{ ve } \ a \leq b \ ise \\ \alpha_a \vee \gamma_c & , \ c < a \ \text{ ve } \ a \leq b \ ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_a & , \ a \leq c \ \text{ ve } \ a \leq b \ \ ise \\ \alpha_a & , \ c < a \leq b \ \ ise \end{cases} \qquad (4)$$

$(3) = (4)$ olduğundan,

$\alpha_a \wedge (\alpha_b \vee \gamma_c) = (\alpha_a \wedge \alpha_b) \vee (\alpha_a \wedge \gamma_c)$ elde edilir.

(**) $b < a$ olsun.

(i) $b \leq c$ ise, **(ii)** $c < b$ ise,

$\alpha_b \leq \alpha_c$ $\gamma_c < \gamma_b < \alpha_b$

$\gamma_b \leq \gamma_c \leq \alpha_c$

(i) ve (ii) den aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\alpha_b \vee \gamma_c = \begin{cases} \alpha_c & , \ b \leq c \ \text{ ve } \ b < a \ \ ise \\ \alpha_b & , \ c < b \ \text{ ve } \ b < a \ \ ise \end{cases}$$

$$\alpha_a \wedge (\alpha_b \vee \gamma_c) = \begin{cases} \alpha_a \wedge \alpha_c & , \ b \leq c \ \text{ ve } \ b < a \ \ ise \\ \alpha_a \wedge \alpha_b & , \ c < b \ \text{ ve } \ b < a \ \ ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_a & , \ b < a < c \ \ ise \\ \alpha_c & , \ b < c < a \ \ ise \\ \alpha_b & , \ c < b < a \ \ ise \end{cases} \qquad (5)$$

$\alpha_a \wedge \alpha_b = \alpha_b$ olduğu açıkça görülür.

(i) $a \leq c$ ise, **(ii)** $c < a$ ise,

$\gamma_a < \alpha_a \leq \alpha_c$ $\gamma_c < \gamma_a < \alpha_a$

$\gamma_a \leq \gamma_c < \alpha_c$

(i) ve (ii) den aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\alpha_a \wedge \gamma_c = \begin{cases} \gamma_a & , \ a \leq c \ \ ise \\ \gamma_c & , \ c < a \ \ ise \end{cases}$$

$$(\alpha_a \wedge \alpha_b) \vee (\alpha_a \wedge \gamma_c) = \begin{cases} \alpha_b \vee \gamma_a & , \quad a \le c \text{ ve } b < a \ \ ise \\ \alpha_b \vee \gamma_c & , \quad c < a \text{ ve } b < a \ \ ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha_a & , \quad b < a < c \quad ise \\ \alpha_c & , \quad b < c < a \quad ise \\ \alpha_b & , \quad c < b < a \quad ise \end{cases} \tag{6}$$

$(5) = (6)$ olduğundan,

$\alpha_a \wedge (\alpha_b \vee \gamma_c) = (\alpha_a \wedge \alpha_b) \vee (\alpha_a \wedge \gamma_c)$ elde edilir.

Böylece $\left(P_{(1)}, \le\right)$ dağılmalı kafestir. ♦

$A_1 = \{\alpha_a = (a,0) \mid a \in (0,1)\}$ ve $C = \{\gamma_c = (0,c) \mid c \in (0,1)\}$ olsun.

Lemma 9 : Aşağıdakiler doğrudur:

(1) $Z\left[P_{(1)}\right] = \{0\}$;

(2) $U\left[P_{(1)}\right] = \{1\}$.

İspat :

(1) $x \in Z\left[P_{(1)}\right]$ olsun. $x \in P_{(1)}$, $\exists y \in P_{(1)} \setminus \{0\}$ için $x \wedge y = 0$ olur.

(i **)** $x = \alpha_a = (a,0)$, $y = \alpha_b = (b,0)$ olsun.

$$x \wedge y = \alpha_a \wedge \alpha_b = \begin{cases} \alpha_a & , \quad a \le b \quad ise \\ \alpha_b & , \quad b < a \quad ise \end{cases}$$

$x \wedge y = 0$ olduğundan, $\begin{cases} \alpha_a = (a,0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \alpha_b = (b,0) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \textit{çelişkisi görülür} \end{cases}$

Buradan $x = 0$ dır.

Böylece $Z\left[P_{(1)}\right] = \{0\}$ olduğu elde edilir.

(ii **)** $x = \alpha_a = (a,0)$, $y = \gamma_b = (0,b)$ olsun.

$$x \wedge y = \alpha_a \wedge \gamma_b = \begin{cases} \gamma_a & , \quad a \le b \quad ise \\ \gamma_b & , \quad b < a \quad ise \end{cases}$$

$x \wedge y = 0$ olduğundan, $\begin{cases} \gamma_a = (0,a) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \gamma_b = (0,b) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = 0 \ \textit{çelişkisi görülür.} \end{cases}$

Buradan $x = 0$ dır.

Böylece $Z\left[P_{(1)}\right]=\{0\}$ olduğu elde edilir.

(*iii* **)** Benzer şekilde $x=\gamma_a=(0,a)$, $y=\gamma_b=(0,b)$ durumu içinde $x=0$ ve $Z\left[P_{(1)}\right]=\{0\}$ olduğu elde edilir.

(2) $x\in U\left[P_{(1)}\right]$ olsun.

(*i* **)** $x=\alpha_a=(a,0)$, $y=\alpha_b=(b,0)$ olsun. $x\in P_{(1)}$, $\exists y\in P_{(1)}\backslash\{1\}$ için $x\vee y=1$ dır.

$$x\vee y=\alpha_a\vee\alpha_b=\begin{cases}\alpha_b & , \quad a\le b \quad ise\\ \alpha_a & , \quad b<a \quad ise\end{cases}$$

$x\vee y=1$ olduğundan, $\begin{cases}\alpha_b=(b,0)=1\Rightarrow b=1\Rightarrow y=1 & \textit{çelişkisi görülür}\\ \alpha_a=(a,0)=1\Rightarrow a=1\Rightarrow x=1 & \end{cases}$

Buradan $x=1$ dir.

Böylece $U\left[P_{(1)}\right]=\{1\}$ olduğu elde edilir.

(*ii* **)** $x=\alpha_a=(a,0)$, $y=\gamma_b=(0,b)$ olsun.

$$x\vee y=\alpha_a\vee\gamma_b=\begin{cases}\alpha_b & , \quad a\le b \quad ise\\ \alpha_a & , \quad b<a \quad ise\end{cases}$$

$x\vee y=1$ olduğundan, $\begin{cases}\alpha_b=(b,0)=1\Rightarrow b=1\Rightarrow y=1 & \textit{çelişkisi görülür}\\ \alpha_a=(a,0)=1\Rightarrow a=1\Rightarrow x=1 & \end{cases}$

Buradan $x=1$ dir.

Böylece $U\left[P_{(1)}\right]=\{1\}$ olduğu elde edilir.

(*iii* **)** Benzer şekilde $x=\gamma_a=(0,a)$, $y=\gamma_b=(0,b)$ durumu içinde $x=1$ ve $U\left[P_{(1)}\right]=\{1\}$ elde edilir. ♦

$P_{(2)}=\{\alpha_a=(a,0,0)\ ,\beta_b=(0,b,0)\ ,\gamma_c=(0,0,c)\ \mid\ a,b,c\in[0,1]\}\subseteq[0,1]^3$ ve $P_{(2)}$ üzerindeki bağıntı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

(1) $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=0$, $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=1$,

(2) α_a , β_b kıyaslanamazdır. $\left(\forall a,b\in\,]0,1[\ \ \textit{için}\right)$

(3) $P_{(2)}$ de, $\alpha_a<\alpha_b$, $\beta_a<\beta_b$, $\gamma_a<\gamma_b$ $\left(\forall a,b\in[0,1],\ a<b\ \textit{için}\right)$,

(4) $\gamma_a < \alpha_a \quad \left(\forall a \in \left]0,1\right[\right)$,

(5) $\gamma_a < \beta_a \quad \left(\forall a \in \left]0,1\right[\right)$.

$\left(P_{(2)}, \leq\right)$ bir sınırlı dağılmalı kafestir.

İspatı $\left(P_{(1)}, \leq\right)$ e benzer şekilde gösterilir.

$A_1 = \left\{\alpha_a = (a,0,0) \mid \quad a \in (0,1)\right\}$

$A_2 = \left\{\beta_b = (0,b,0) \mid \quad b \in (0,1)\right\}$

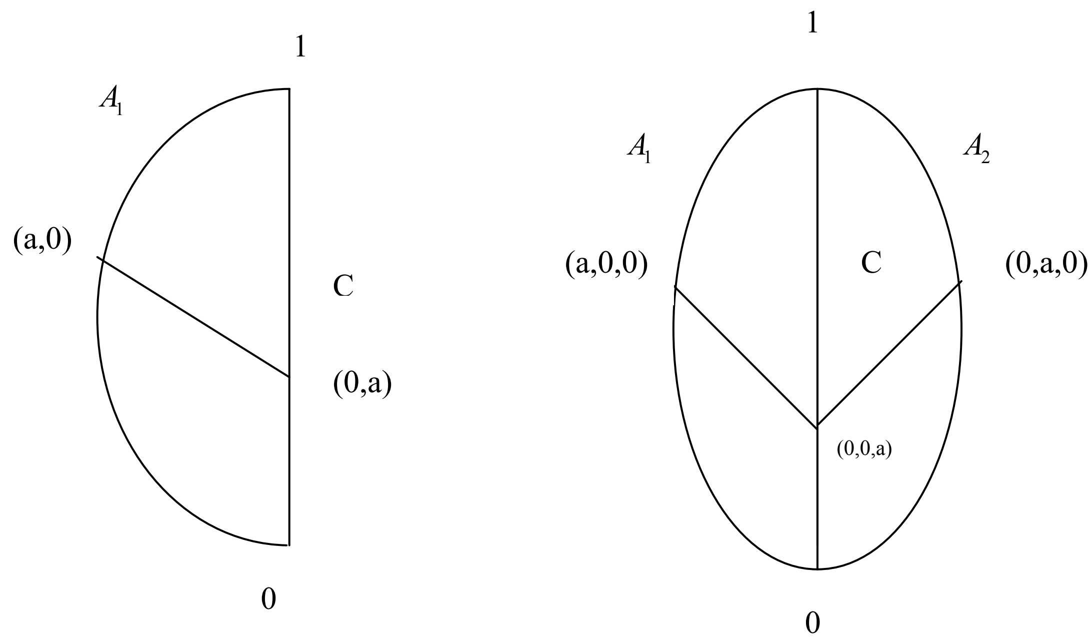
$C = \left\{\gamma_c = (0,0,c) \mid \quad \mathrm{c} \in (0,1)\right\}$ olsun.

$\forall T \in \mathcal{T}\left(P_{(2)}\right)$ için,

(1) $T(0,x) = 0$, $T(1,x) = x$, $x \in P_{(2)}$ için;

(2) $Z\left[P_{(2)}\right] = \{0\}$;

(3) $U\left[P_{(2)}\right] = \left\{\alpha_a , \beta_b \quad \mid \quad a,b \in \left]0,1\right]\right\}$



Şekil 6. $P_{(1)}$ ve $P_{(2)}$ sınırlı dağılmalı kafesleri

2.9.2 $\mathscr{T}\left(P_{(1)}\right)$ ve $\mathscr{T}\left(P_{(2)}\right)$ *T*-Norm Aileleri

Lemma 10 : $T \in \mathscr{T}\left(P_{(1)}\right)$ olsun.

(1) $T \downarrow C \cup \{0,1\} \in T\left(C \cup \{0,1\}\right)$;

(2) T sürekli bir t-norm ise, $T \downarrow A_1 \cup \{0,1\} \in T\left(A_1 \cup \{0,1\}\right)$

İspat :

(1) Açıkça, $\forall x, y \in C \cup \{0,1\}$ için $T(x,y) \le x, y$ ve $T(x,y) \notin A_1$ olduğundan, $T \downarrow C \cup \{0,1\} \in T\left(C \cup \{0,1\}\right)$dır.

(2) $M = \left\{T(x,y) \in A_1 \quad | \quad x, y \in P_{(1)}\right\}$ ve $\wedge M = \alpha$ olsun.

Varsayalım, $\alpha \ne 0$ ve $K = \left\{(x,y) \mid T(x,y) \in M,\ x, y \in P_{(1)}\right\}$ olsun.

T , $P_{(1)}$ sınırlı dağılmalı kafesi üzerinde sürekli bir t-norm olduğu için;

$$\alpha = \underset{(x,y)\in K}{\wedge} T(x,y) = T\left(\underset{(x,y)\in K}{\wedge} x, \underset{(x,y)\in K}{\wedge} y\right)$$

$(x,y) \in K \Rightarrow (y,x) \in K$ olduğu için, $\underset{(x,y)\in K}{\wedge} x = \underset{(x,y)\in K}{\wedge} y$ dir.

Böylece, $\alpha = T(b,b) \le b$

$b = \underset{(x,y)\in K}{\wedge} x = \underset{(x,y)\in K}{\wedge} y \in A_1$

Buradan, $K = \left\{(x,y) \mid x, y \in A_1 \ ve \ b \le x,\ b \le y\right\}$

Sonuç olarak, $\forall x, y \in A_1$ için, $x < b$, $y < b$ dir.

$$T(x,y) \in C \cup \{0\} \quad \text{ve} \quad T(b,b) = T\left(\underset{x\in A_1, x \prec b}{\vee} x, \underset{y\in A_1, y \prec b}{\vee} y\right) = \underset{x,y\in A_1, x,y \prec b}{\vee} T(x,y) \in C \cup \{0\}$$

$T(b,b) = \alpha \in A_1$ çelişkisi görülür.

Böylece $\alpha = 0$ dır ve (2) sağlanır. ♦

Lemma 11 : $T \in \mathscr{T}\left(P_{(1)}\right)$ olsun. $\forall x = (a,0) \in A_1$, $y = (0,b) \in C$ için, $0 \le T(x,y) \le \left(0, \min\{a,b\}\right)$

İspat : Açıkça $\forall x \in A_1$, $y \in C$ için, $0 \le T(x,y)$ dir. $x = (a,0) \in A_1$ ve $y = (0,b) \in C$ için,

$T(x,y) \le x \wedge y = (a,0) \wedge (0,b) = (0, \min\{a,b\})$ elde edilir. ♦

Örnek 14 : $t_1, t_2 \in \mathcal{T}([0,1])$ sürekli t-normları için $P_{(1)}$ üzerindeki $T_{t_1t_2}(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T_{t_1t_2}(x,y) = \begin{cases} y & , \quad x = 1 \ ise \\ x & , \quad y = 1 \ ise \\ 0 & , \quad x = 0 \ veya \ y = 0 \\ (t_1(a,b), 0) & , \quad x = (a,0) \ ve \ y = (b,0) \\ (0, t_2(a,b)) & , \quad x = (0,a) \ ve \ y = (0,b) \\ 0 & , \quad x \in C, \mathrm{y} \in \mathrm{A}_1 \ veya \ \mathrm{x} \in \mathrm{A}_1, \ y \in C \end{cases}$$

$t_1, t_2 \in \mathcal{T}([0,1])$ sürekli t-normları için, $T_{t_1t_2} \in \mathcal{T}\left(P_{(1)}\right)$ dir.

İspat : Açıkça, $T_{t_1t_2}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\forall x \in P_{(1)}$, $T_{t_1t_2}(x,1) = x$,

(ii) $\forall x,y,z \in P_{(1)}$, $x \le y \Rightarrow T_{t_1t_2}(x,z) \le T_{t_1t_2}(y,z)$,

(iii) $\forall x,y, \in P_{(1)}$, $T_{t_1t_2}(x,y) = T_{t_1t_2}(y,x)$,

(iv) $\forall x,y,z \in P_{(1)}$,

eğer $\{x,y,z\} \cap \{1,0\} \ne \varnothing$ ise, $T_{t_1t_2}\left(x, T_{t_1t_2}(y,z)\right) = T_{t_1t_2}\left(T_{t_1t_2}(x,y), z\right)$

eğer $\{x,y,z\} \cap \{1,0\} = \varnothing$ ise,

(1) $\{x,y,z\} \cap C = \varnothing$ ve $x,y,z \in A_1$ ise,

$T_{t_1t_2}\left(x, T_{t_1t_2}(y,z)\right) = t_1\left(x, t_1(y,z)\right) = t_1\left(t_1(x,y), z\right) = T_{t_1t_2}\left(T_{t_1t_2}(x,y), z\right)$

(2) $\{x,y,z\} \subseteq C$ ise,

$T_{t_1t_2}\left(x, T_{t_1t_2}(y,z)\right) = t_2\left(x, t_2(y,z)\right) = t_2\left(t_2(x,y), z\right) = T_{t_1t_2}\left(T_{t_1t_2}(x,y), z\right)$

(3) $\{x,y,z\} \cap C \ne \varnothing$ ve $\{x,y,z\} \cap A_1 \ne \varnothing$ ise,

$T_{t_1t_2}\left(x, T_{t_1t_2}(y,z)\right) = 0 = T_{t_1t_2}\left(T_{t_1t_2}(x,y), z\right)$

Sonuç olarak, $T_{t_1t_2} \in \mathcal{T}\left(P_{(1)}\right)$ dir. ♦

Teorem 15 : $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}([0,1])$ sürekli t-normları için;

(1) $T_{t_1t_2}$ t-normu kısaltmalı değildir.

(2) $T_{t_1t_2}$ t-normu pseudo- Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ t_1, t_2 t-normları Pseudo- Arşimedyandır.

Teorem 16 : $\forall T \in \mathfrak{T}\left(P_{(2)}\right)$ için,

(1) $T \downarrow C \cup \{0,1\} \in T\left(C \cup \{0,1\}\right)$;

(2) T bir sürekli t-norm ise, $T \downarrow A_i \cup \{0,1\} \in T\left(A_i \cup \{0,1\}\right) \quad (i=1,2)$

Örnek 15 : $t_1, t_2, t_3 \in \mathfrak{T}([0,1])$ için, $P_{(2)}$ üzerindeki $T_{\overline{t_1t_2t_3}}(x,y)$ ve $T_{t_1t_2t_3}(x,y)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T_{\overline{t_1t_2t_3}}(x,y)=\begin{cases} y & , \quad x=1 \ \ ise \\ x & , \quad y=1 \ \ ise \\ 0 & , \quad x=0 \ \ veya \ \ y=0 \ \ ise \\ 0 & , \quad x\in C \ \ veya \ \ y\in C \ \ ise \\ \left(t_1(a,b),0,0\right) & , \quad x=(a,0,0) \ \ ve \ \ y=(b,0,0) \ \ ise \\ \left(0,t_2(a,b),0\right) & , \quad x=(0,a,0) \ \ ve \ \ y=(0,b,0) \ \ ise \\ (0,0,0) & , \quad x=(a,0,0) \ \ ve \ \ y=(0,b,0) \ \ ise \\ (0,0,0) & , \quad x=(0,a,0) \ \ ve \ \ y=(b,0,0) \ \ ise \end{cases}$$

$$T_{t_1t_2t_3}(x,y)=\begin{cases} y & , \quad x=1 \ \ ise \\ x & , \quad y=1 \ \ ise \\ 0 & , \quad x=0 \ \ veya \ \ y=0 \ \ ise \\ 0 & , \quad x\in C,\ y\in A_1 \ \ veya \ \ x\in A_1,\ y\in C \ \ ise \\ 0 & , \quad x\in C,\ y\in A_2 \ \ veya \ \ x\in A_2,\ y\in C \ \ ise \\ 0 & , \quad x\in A_1,\ y\in A_2 \ \ veya \ \ x\in A_2,\ y\in A_1 \ \ ise \\ \left(t_1(a,b),0,0\right) & , \quad x=(a,0,0) \ \ ve \ \ y=(b,0,0) \ \ ise \\ \left(0,t_2(a,b),0\right) & , \quad x=(0,a,0) \ \ ve \ \ y=(0,b,0) \ \ ise \\ \left(0,0,t_3(a,b)\right) & , \quad x=(0,0,a) \ \ ve \ \ y=(0,0,b) \ \ ise \end{cases}$$

$t_1, t_2, t_3 \in \mathfrak{T}([0,1])$ için, $T_{t_1t_2t_3}$, $T_{\overline{t_1t_2t_3}} \in \mathfrak{T}\left(P_{(2)}\right)$ dir.

İspat : Açıkça, $T_{t_1t_2t_3}$ için şu özellikler sağlanır:

(i) $\forall x \in P_{(2)}$, $T_{t_1t_2t_3}(x,1) = x$,

(ii) $\forall x,y,z \in P_{(2)}$, $x \leq y \Rightarrow T_{t_1t_2t_3}(x,z) \leq T_{t_1t_2t_3}(y,z)$,

(iii) $\forall x,y \in P_{(2)}$, $T_{t_1t_2t_3}(x,y) = T_{t_1t_2t_3}(y,x)$,

(iv) $T_{t_1t_2t_3}\left(x, T_{t_1t_2t_3}(y,z)\right) = T_{t_1t_2t_3}\left(T_{t_1t_2t_3}(x,y), z\right)$

$\forall x,y,z \in P_{(2)}$ için,

$\{x,y,z\} \cap \{1,0\} \neq \varnothing$ ise, $T_{t_1t_2t_3}\left(x, T_{t_1t_2t_3}(y,z)\right) = T_{t_1t_2t_3}\left(T_{t_1t_2t_3}(x,y), z\right)$

$\{x,y,z\} \cap \{1,0\} = \varnothing$ ise,

(1) $\{x,y,z\} \cap C \neq \varnothing$ ise,

$T_{t_1t_2t_3}\left(x, T_{t_1t_2t_3}(y,z)\right) = 0 = T_{t_1t_2t_3}\left(T_{t_1t_2t_3}(x,y), z\right)$

(2) $\{x,y,z\} \cap C = \varnothing$ ise,

Tablo 1. $T_{t_1t_2t_3}\left(x, T_{t_1t_2t_3}(y,z)\right) = T_{t_1t_2t_3}\left(T_{t_1t_2t_3}(x,y), z\right)$

x	y	z	$T_{t_1t_2t_3}\left(x, T_{t_1t_2t_3}(y,z)\right)$	$T_{t_1t_2t_3}\left(T_{t_1t_2t_3}(x,y), z\right)$
$x = \alpha_a$	$y = \alpha_b$	$z = \alpha_c$	$\alpha_{t_1(a,t_1(b,c))}$	$\alpha_{t_1(t_1(a,b),c)}$
$x = \beta_a$	$y = \beta_b$	$z = \beta_c$	$\beta_{t_2(a,t_2(b,c))}$	$\beta_{t_2(t_2(a,b),c)}$
$x \in A_1$	$y \in A_1$	$z \in A_2$	0	0
$x \in A_1$	$y \in A_2$	$z \in A_1$	0	0
$x \in A_1$	$y \in A_2$	$z \in A_2$	0	0
$x \in A_2$	$y \in A_1$	$z \in A_2$	0	0
$x \in A_1$	$y \in A_2$	$z \in A_1$	0	0
$x \in A_2$	$y \in A_1$	$z \in A_1$	0	0

Böylece, $T_{t_1t_2t_3} \in \mathcal{T}\left(P_{(2)}\right)$ dir.

Benzer şekilde $T_{\overline{t_1t_2t_3}} \in \mathcal{T}\left(P_{(2)}\right)$ olduğu gösterilebilir. ♦

Teorem 17 : $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}([0,1])$ sürekli t-normları için, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $T_{t_1 t_2 t_3}$, $T_{\overline{t_1 t_2 t_3}}$ t-normları kısaltmalı değildir ,

(2) $T_{\overline{t_1 t_2 t_3}}$ Pseudo- Arşimedyandır ,

(3) $T_{t_1 t_2 t_3}$ Pseudo- Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ t_1, t_2, t_3 t-normları Pseudo- Arşimedyandır.

Örnek 16 : $P_{(2)}$ üzerindeki $T_z(x, y)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T_z(x,y) = \begin{cases} y & , \quad x = 1 \;\; ise \\ x & , \quad y = 1 \;\; ise \\ 0 & , \quad x = 0 \;\; veya \;\; y = 0 \;\; ise \\ 0 & , \quad x \in C \;\; veya \;\; y \in C \;\; ise \\ (ab,0,0) & , \quad x = (a,0,0) \;\; ve \;\; y = (b,0,0) \;\; ise \\ (0,ab,0) & , \quad x = (0,a,0) \;\; ve \;\; y = (0,b,0) \;\; ise \\ (0,0,0) & , \quad x = (a,0,0) \;\; ve \;\; y = (0,b,0) \;\; ise \\ (0,0,0) & , \quad x = (0,a,0) \;\; ve \;\; y = (b,0,0) \;\; ise \end{cases}$$

Açıkça, T_z için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $\forall x \in P_{(2)}$, $T_z(x,1) = x$,

(ii) $\forall x, y, z \in P_{(2)}$, $x \le y \Rightarrow T_z(x,z) \le T_z(y,z)$,

(iii) $\forall x, y \in P_{(2)}$, $T_z(x,y) = T_z(y,x)$,

(iv) $T_z(x, T_z(y,z)) = T_z(T_z(x,y), z)$

$\forall x, y, z \in P_{(2)}$ için,

$\{x,y,z\} \cap \{1,0\} \ne \varnothing$ ise, $T_z(x, T_z(y,z)) = T_z(T_z(x,y), z)$

$\{x,y,z\} \cap \{1,0\} = \varnothing$ ise,

(1) $\{x,y,z\} \cap C \ne \varnothing$ ise,

$T_z(x, T_z(y,z)) = 0 = T_z(T_z(x,y), z)$

(2) $\{x,y,z\} \cap C = \varnothing$ ise,

Tablo 2. $T_z\left(x,T_z\left(y,z\right)\right)=T_z\left(T_z\left(x,y\right),z\right)$

x	y	z	$T_z\left(x,T_z\left(y,z\right)\right)$	$T_z\left(T_z\left(x,y\right),z\right)$
$x=\alpha_a$	$y=\alpha_b$	$z=\alpha_c$	α_{abc}	α_{abc}
$x=\beta_a$	$y=\beta_b$	$z=\beta_c$	β_{abc}	β_{abc}
$x\in A_1$	$y\in A_1$	$z\in A_2$	0	0
$x\in A_1$	$y\in A_2$	$z\in A_1$	0	0
$x\in A_1$	$y\in A_2$	$z\in A_2$	0	0
$x\in A_2$	$y\in A_1$	$z\in A_2$	0	0
$x\in A_1$	$y\in A_2$	$z\in A_1$	0	0
$x\in A_2$	$y\in A_1$	$z\in A_1$	0	0

Böylece, $T_z\in \mathfrak{T}\left(P_{(2)}\right)$ dir.

(v) $\forall x\in C$ için, $T_z\left(x,y\right)=T_z\left(x,z\right)=0 \quad \left(y\in A_1, z\in A_2\right)$

Buradan T_z kısaltmalı değildir.

(vi) $x\in P_{(2)}\backslash U\left[P_{(2)}\right]$ ve $x^{(n)_{T_z}}\geq y \quad \left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$ olsun. $T_z\left(x,x\right)=0$ olduğu için, $y=0$ dır. Buradan T_z pseudo- Arşimedyandır.

(vii) $x\in A_1\cup A_2$ için, $x^{(n)_{T_z}}=\alpha_{a^n} \quad \left(x=\alpha_a \ ise\right)$ veya $x^{(n)_{T_z}}=\beta_{b^n} \quad \left(x=\beta_b \ ise\right)$ x, T_z nin nilpotent elemanı değildir.

$x\in C$ olsun. $T_z\left(x,x\right)=0$ olduğu için x, T_z nin nilpotent elemanıdır. Buradan $N\left(T_z\right)=C$ elde edilir. ♦

Örnek 17 : $[9]$ da bu problemin çözümü için aşağıdaki örnekler verilmiştir.

L_1 ve L_2 kafesleri $L_1=\{0,1\}$, $0<1$ ve $L_2=\{0,1,2\}$, $0<1<2$ olsun. $L=L_1\times L_2$ üzerindeki T t-normunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

Tablo 3. $L = L_1 \times L_2$ üzerindeki T t-normu

T	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,2)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$

T nin değişmeliliği ve monotonluğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\forall (x,y) \in L$ için, $T((x,y),(1,2)) = (x,y)$ olduğundan $(1,2)$ birim elemandır. T nin birleşmeliliğini sağlamak için aşağıdaki eşitliği göstermemiz gerekir :

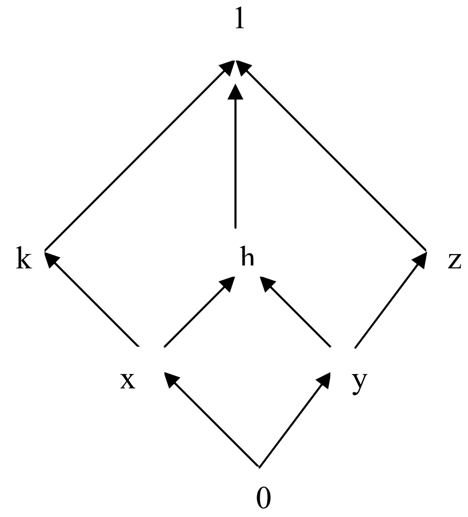
$$T\left((x,y),T\left((z,t),(k,l)\right)\right) = T\left(T\left((x,y),(z,t)\right),(k,l)\right)$$

$\forall (x,y),(z,t),(k,l) \in L$ için, $(x,y)=(z,t)=(k,l)$ veya $(x,y),(z,t),(k,l)$ den birinin $(0,0)$ veya $(x,y),(z,t),(k,l)$ den birinin $(1,2)$ olması durumunda iddia açıktır.

$(x,y),(z,t),(k,l)$ den birinin $(0,2)$ veya $(0,1)$ olması durumunda her iki eşitlikte $(0,0)$; aksi takdirde her iki eşitlikte $(1,0)$ olur. T , L üzerinde bir t-normdur.

T Pseudo-Arşimedyan, kısaltmalı olmayan bir t-normdur ve nilpotent elemanlara sahiptir.

Örnek 18 : $M=\{0,x,y,z,k,h,1\}$ kafesi şekil 7 deki gibi verilsin.



Şekil 7. $M=\{0,x,y,z,k,h,1\}$ kafesi

$T=\wedge$ t-normu M üzerinde Pseudo-Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan bir t-normdur. T nilpotent elemana sahip değildir. $x\vee z=k\vee h=y\vee k=1\vee 0=1$ ve $x,y,k,h,z,0\in M\setminus\{1\}$ olduğundan, $U[M]=\{x,k,h,y,z,1\}$ elde edilir.

$T=\wedge$ ve $U[M]=\{x,k,h,y,z,1\}$ olduğu için,

$\forall(x,y)\in M^2 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad için\ x=x^{(n)_T}\geq y\Rightarrow x\in U[M]$ veya $y=0$ dır.

Buradan, T Pseudo-Arşimedyan bir t-normdur.

$x\wedge z=k\wedge y=0\wedge 1=0$ ve $x,z,k,y,1\in M\setminus\{0\}$ olduğu için, $Z[M]=\{0,x,y,k,z\}$ ve $M\setminus Z[M]=\{h,1\}$ dir. $h\in M\setminus Z[M]$ için $T(h,h)=T(h,1)=h$ dır. $h\neq 1$ olduğu için T, M üzerinde kısaltmalı bir t-norm değildir.

$\forall a\in M\setminus\{0\}$ için, $a^{(n)_T}=a\neq 0$ dır. Böylece T nilpotent elemana sahip değildir.

2.10. Çarpım Kafesleri Üzerinde Direkt Çarpım Olmayan T-Normlar

Aksi belirtilmedikçe bu bölüm boyunca $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, L bir sınırlı kafes ve $|L|\geq 2$ alalım. L üzerindeki $\oplus$ ikili işlemi $\forall a,b,c\in L$ için aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(P1) Değişmelilik : $a\oplus b=b\oplus a$

(P2) Birim Eleman : $a \oplus 1 = 1$

(P3) $\wedge$ üzerine dağlma : $(a \wedge b) \oplus c = (a \oplus c) \wedge (b \oplus c)$

(P4) Alttan sınırlı : $a \wedge b \leq a \oplus b$

(P3) özelliği $\oplus$ ın izotonluğunu sağlar ve L nin bir zincir olması durumunda bütün özellikler denktir.

L^n de $a = (a_1, ..., a_{n-1}, a_n)$ ve $b = (b_1, ..., b_{n-1}, b_n)$ için,

$a \wedge b = (a_1 \wedge b_1, ..., a_{n-1} \wedge b_{n-1}, a_n \wedge b_n)$

ve

$$\vartheta^{\oplus}_{a,b} = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \oplus \bigwedge_{i=1}^{n} b_i \qquad (7)$$

tanımlanır.

$\oplus$ ın, $\wedge$ üzerine dağılma özelliğinden,

$\vartheta^{\oplus}_{a \wedge b,c} = \vartheta^{\oplus}_{a,c} \wedge \vartheta^{\oplus}_{b,c}$ ve $\vartheta^{\oplus}_{a,b \wedge c} = \vartheta^{\oplus}_{a,b} \wedge \vartheta^{\oplus}_{a,c}$

İlginç bir özel durum L dağılmalı kafes ve $\oplus = \vee$ olduğu zaman ortaya çıkar.

$$\vartheta_{a,b} = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \vee \bigwedge_{i=1}^{n} b_i \qquad (8)$$

2.10.1. $[0,1]^n$ Üzerindeki T-Normlar

Teorem 18 : $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ olsun. $[0,1]^n$ üzerindeki $*$ ikili işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(a_1, ..., a_{n-1}, a_n) * (b_1, ..., b_{n-1}, b_n) = (a_1 \wedge b_1, ..., a_{n-1} \wedge b_{n-1}, \vartheta_{a,b} \wedge a_n \wedge b_n)$$

$*$, $[0,1]^n$ üzerinde sürekli bir t-normdur. Fakat $*, [0,1]$ üzerindeki n tane işlemin direkt çarpımı değildir.

İspat : $*$' ın değişme ve monotonluk özelliğini sağladığı görülür.

$1 = (1, ..., 1, 1)$ in birim eleman olduğunu gösterelim.

$$\left(a_1,......,a_{n-1},a_n\right)*\left(1,.........,1,1\right)=\left(a_1\wedge 1,......,a_{n-1}\wedge 1,\vartheta_{a,1}\wedge a_n\wedge 1\right)$$

$$=\left(a_1,.........,a_{n-1},\left(\bigwedge_{i=1}^{n}a_i\vee 1\right)\wedge a_n\right)$$

$$=\left(a_1,......,a_{n-1},a_n\right)$$

$*$' ın sürekliliğini görmek kolaydır. $*$' ın, birleşme özelliğine sahip olduğunu gösterelim.

$$\left(\left(a_1,......,a_{n-1},a_n\right)*\left(b_1,......,b_{n-1},b_n\right)\right)*\left(c_1,......,c_{n-1},c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1},\vartheta_{a,b}\wedge a_n\wedge b_n\right)*\left(c_1,......,c_{n-1},c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\left[\left(\bigwedge_{i=1}^{n}a_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}b_i\wedge\vartheta_{a,b}\right)\vee\bigwedge_{i=1}^{n}\right]\wedge\vartheta_{a,b}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\left[\left(\bigwedge_{i=1}^{n}a_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}b_i\right)\vee\bigwedge_{i=1}^{n}c_i\right]\wedge\vartheta_{a,b}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\vartheta_{a\wedge b,c}\wedge\vartheta_{a,b}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\vartheta_{a,c}\wedge\vartheta_{b,c}\wedge\vartheta_{a,b}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

Benzer hesaplamalarla,

$$\left(a_1,......,a_{n-1},a_n\right)*\left(\left(b_1,......,b_{n-1},b_n\right)*\left(c_1,......,c_{n-1},c_n\right)\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\left[\bigwedge_{i=1}^{n}a_i\vee\left(\bigwedge_{i=1}^{n}b_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}c_i\wedge\vartheta_{b,c}\right)\right]\wedge\vartheta_{b,c}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\left[\bigwedge_{i=1}^{n}a_i\vee\left(\bigwedge_{i=1}^{n}b_i\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}c_i\right)\right]\wedge\vartheta_{b,c}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\vartheta_{a,b\wedge c}\wedge\vartheta_{b,c}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

$$=\left(a_1\wedge b_1\wedge c_1,......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge c_{n-1},\vartheta_{a,b}\wedge\vartheta_{a,c}\wedge\vartheta_{b,c}\wedge a_n\wedge b_n\wedge c_n\right)$$

Böylece $*$ birleşmelidir. Buradan $*$' ın $\left[0,1\right]^n$ üzerinde bir t-norm olduğu elde edilir. $*$' ın $\left[0,1\right]$ üzerindeki n tane işlemin direkt çarpımı olmadığını gösterelim.

$$\left(0,..........,0,1\right)*\left(0,..........,0,1\right)=\left(0,..........,0,0\right)$$

ve

$$\left(0,..........,0,1\right)*\left(1,..........,1,1\right)=\left(0,..........,0,1\right)$$

olduğu için $*$, $[0,1]$ üzerindeki n tane işlemin direkt çarpımı değildir.♦

Uyarı 6 :

$$(a_1,......,a_{n-1},a_n)*(b_1,......,b_{n-1},b_n)=(\vartheta_{a,b}\wedge a_1\wedge b_1,.......,\vartheta_{a,b}\wedge a_{n-1}\wedge b_{n-1},\vartheta_{a,b}\wedge a_n\wedge b_n)$$

$*$, $[0,1]^n$ üzerinde sürekli bir t-normdur. Fakat $*$, $[0,1]$ üzerindeki n tane işlemin direkt çarpımı değildir.

Örnek 19 : $[0,1]^2$ üzerindeki işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(u,v)*_1(p,q)=\big([(u\wedge v)\vee(p\wedge q)]\wedge u\wedge p, v\wedge q\big)$$

$$(u,v)*_2(p,q)=\big(u\wedge p,[(u\wedge v)\vee(p\wedge q)]\wedge v\wedge q\big)$$

$$(u,v)*_3(p,q)=\big([(u\wedge v)\vee(p\wedge q)]\wedge u\wedge p,[(u\wedge v)\vee(p\wedge q)]\wedge v\wedge q\big)$$

$$(u,v,w)*_4(p,q,r)=\big(u\wedge p,[(u\wedge v\wedge w)\vee(p\wedge q\wedge r)]\wedge v\wedge q,$$
$$[(u\wedge v\wedge w)\vee(p\wedge q\wedge r)]\wedge w\wedge r\big)$$

$$(u,v,w)*_5(p,q,r)=\big(u\wedge p,[(u\wedge v\wedge w)\oplus_L(p\wedge q\wedge r)]\wedge v\wedge q,$$
$$[(u\wedge v\wedge w)\oplus_L(p\wedge q\wedge r)]\wedge w\wedge r\big)$$

işlemleri $[0,1]^2$ üzerinde sürekli t-normlardır. Fakat bu işlemler $[0,1]$ üzerindeki işlemlerin direkt çarpımı değildir.

Teorem 19 : $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\wp$ $\{1,2,.....,n\}$ in boştan farklı alt kümesi, L bir sınırlı kafes, $|L|\geq 2$ ve $\oplus$, L üzerinde $(P_1)-(P_4)$ özelliklerini sağlayan ikili işlem olsun. Herhangi bir $i\in\{1,2,......,n\}$ için,

$$\vartheta_{a,b}^{(i)}=\begin{cases}\vartheta_{a,b}^{\oplus} & , \quad i\in\wp \ \ ise\\ 1 & , \quad \text{Aksi takdirde}\end{cases}$$

L^n üzerindeki $*$ ikili işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(a_1,......,a_{n-1},a_n)*(b_1,......,b_{n-1},b_n)=\big(a_1\wedge b_1\wedge\vartheta_{a,b}^{(1)},.......,a_{n-1}\wedge b_{n-1}\wedge\vartheta_{a,b}^{(n-1)},a_n\wedge b_n\wedge\vartheta_{a,b}^{(n)}\big)$$

$*$, L^n üzerinde bir t-normdur. Fakat $*,L$ üzerindeki n tane işlemin direkt çarpımı değildir.

İspat : $\oplus$ işleminin özelliklerinden, $*$ işleminin değişmeliliği ve monotonluğu gösterilir. (P_2) özelliğinden $*$ ' ın birim elemanının $(1,........,1,1)$ olduğu görülür. $*$ ' ın $[0,1]$ üzerinde n tane işlemin direkt çarpımı olmadığını gösterelim.

$$(0,..........,0,1)*(0,..........,0,1)=(0,..........,0,0)$$

ve

$$(0,..........,0,1)*(1,..........,1,1)=(0,..........,0,1)$$

olduğundan, $*$ $[0,1]$ üzerinde n tane işlemin direkt çarpımı değildir.

$*$ ın birleşmeli olduğunu gösterelim.

Eğer $j \notin P$ ise, $(a*b)*c$ ve $a*(b*c)$ nin j. koordinatı $a_j \wedge b_j \wedge c_j$ ye eşit olur.

Eğer $j \in P$ ise, tanımdan $(a*b)*c$ nin j. koordinatı,

$$\left[\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} b_i \wedge \vartheta_{a,b}^{\oplus}\right) \oplus \bigwedge_{i=1}^{n} c_i\right] \wedge \vartheta_{a,b}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j$$

(P_4) özelliğinden,

$$\left[\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} b_i\right) \oplus \bigwedge_{i=1}^{n} c_i\right] \wedge \vartheta_{a,b}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j = \vartheta_{a\wedge b,c}^{\oplus} \wedge \vartheta_{a,b}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j$$

(P_3) özelliğinden,

$\vartheta_{a,c}^{\oplus} \wedge \vartheta_{b,c}^{\oplus} \wedge \vartheta_{a,b}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j$ dır.

Benzer hesaplamalarla $a*(b*c)$ nin j. koordinatı,

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{n} b_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} c_i \wedge \vartheta_{b,c}^{\oplus}\right)\right] \wedge \vartheta_{b,c}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j$$

$$= \left[\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \vee \left(\bigwedge_{i=1}^{n} b_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} c_i\right)\right] \wedge \vartheta_{b,c}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j$$

$$= \vartheta_{a,b\wedge c}^{\oplus} \wedge \vartheta_{b,c}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j$$

$$= \vartheta_{a,b}^{\oplus} \wedge \vartheta_{a,c}^{\oplus} \wedge \vartheta_{b,c}^{\oplus} \wedge a_j \wedge b_j \wedge c_j \text{ dir.}$$

Böylece, $*$ işlemi birleşmelidir. $*$, L^n üzerinde bir t-normdur. ♦

2.11. Tam Kafesler Üzerindeki T-Normların İç Direkt Çarpımı

Tanım 48 :

(i) Bir L kafesi üzerindeki T t-normuna $\vee$-dağılmalı denir: $\Leftrightarrow$ $T\left(a,b_1 \vee b_2\right)=T\left(a,b_1\right)\vee T\left(a,b_2\right)$

(ii) Bir L tam kafesi üzerindeki T t-normuna sonsuz $\vee$-dağılmalı denir :$\Leftrightarrow$ L nin herhangi bir $\left\{a,b_\tau \in L \mid \tau \in Q\right\}$ alt kümesi için, $T\left(a,\underset{Q}{\vee} b_\tau\right)=\underset{Q}{\vee} T\left(a,b_\tau\right)$

Önerme 21 : Herhangi bir $i \in I$ için L bir tam kafes, $\left\{L_i \mid \mathrm{i} \in \mathrm{I}\right\}$ L nin tam altkafeslerinin bir ailesi ve T_i, L_i üzerinde bir t-norm olsun. Herhangi bir $x \in L$ için $x_i \in L_i$ ve $x=\underset{i\in I}{\vee} x_i$ $\left(x=\underset{i\in I}{\vee} x_i=\underset{i\in I}{\vee} y_i\ ,\ x_i,y_i \in L_i\ ,\ \forall i \in I\ için\ x_i=y_i\right)$ olacak şekilde bir tek $\left\{x_i \mid i \in I\right\}$ ailesi mevcut olsun.

$T: L\times L \to L$ fonksiyonunu $T\left(x,y\right)=\underset{i\in I}{\vee} T_i\left(x_i,y_i\right)$, $\underset{i\in I}{\vee} x_i=x$, $\underset{i\in I}{\vee} y_i=y$ $\left(x_i,\ y_i \in L_i \text{ için}\right)$ ile tanımlayalım.

T , L üzerinde bir t-normdur.

İspat :

(i) $T\left(x,1\right)=\underset{i\in I}{\vee} T_i\left(x_i,1\right)$

$$\overset{T_i\ t-norm}{=} \underset{i\in I}{\vee} x_i$$

$$=x \qquad \text{(birim eleman özelliği)}$$

(ii) $x,y,z \in L$ için $x \le y$ olsun.

$\underset{i\in I}{\vee} x_i \le \underset{i\in I}{\vee} y_i \Rightarrow x_i \le y_i$

$$\overset{T_i\ t-norm}{\Rightarrow} T_i\left(x_i,z_i\right)\le T_i\left(y_i,z_i\right)$$

$$\Rightarrow \underset{i\in I}{\vee} T_i\left(x_i,z_i\right)\le \underset{i\in I}{\vee} T_i\left(y_i,z_i\right)$$

$$\Rightarrow T\left(x,z\right)\le T\left(y,z\right) \qquad \text{(monotonluk özelliği)}$$

(iii) $T\left(x,y\right)=\underset{i\in I}{\vee} T_i\left(x_i,y_i\right)\overset{T_i\ t-norm}{=}\underset{i\in I}{\vee} T_i\left(y_i,x_i\right)=T\left(y,x\right)$ (değişme özelliği)

(iv) $T(x,T(y,z)) = \underset{i\in I}{\vee} T_i\left(x_i, \underset{i\in I}{\vee} T_i(y_i,z_i)\right)$

$$\overset{T_i\ t-norm}{=} \underset{i\in I}{\vee} T_i\left(T_i(x_i,y_i),z_i\right)$$

$$= T\left(T(x,y),z\right)$$ (birleşme özelliği) ♦

Tanım 49 : Önerme 21 deki T t-normu T_i t-normlarının iç direkt çarpımı olarak adlandırılır ve $\hat{\prod\limits_{i\in I}} T_i$ olarak gösterilir. $I=\{1,2\}$ durumunda $T_1 \hat{\times} T_2$ olur.

Tanım 50 : L kafesi üzerindeki T ve M kafesi üzerindeki P t-normları izomorf olarak adlandırılır: $\Leftrightarrow H: L \to M$ kafes izomorfisi $\forall a,b \in L$ için

$$H\left(T(a,b)\right) = P\left(H(a),H(b)\right)$$

olacak şekilde mevcuttur.

Önerme 22 : $i\in\{1,2\}$ için T_i, L_i kafesi üzerinde bir t-norm ve $L = L_1 \times L_2$ ve $T = T_1 \times T_2$ olsun. $T\downarrow(L_1\times\{0\})$ ve $T\downarrow(\{0\}\times L_2)$ sırasıyla $L_1\times\{0\}$ ve $\{0\}\times L_2$ üzerinde t-normlardır ve bu t-normlar sırasıyla T_1 ve T_2 ye izomorfturlar. Ek olarak,

$$T = T\downarrow(L_1\times\{0\})\ \hat{\times}\ T\downarrow(\{0\}\times L_2)$$

İspat :

$\forall a_1,b_1 \in L_1$ için $T\left((a_1,0),(b_1,0)\right) = \left(T_1(a_1,b_1),0\right)$ ve $\forall a_2,b_2\in L_2$ için $T\left((0,a_2),(0,b_2)\right) = \left(0,T_2(a_2,b_2)\right)$ dır. Böylece,

$T\downarrow(L_1\times\{0\}) = (T_1,0)$, $T\downarrow(\{0\}\times L_2) = (0,T_2)$ olur.

Dolayısıyla, $T\downarrow(L_1\times\{0\})$ ve $T\downarrow(\{0\}\times L_2)$ sırasıyla $L_1\times\{0\}$ ve $\{0\}\times L_2$ üzerinde t-normlardır ve açık olarak bu t-normların T_1 ve T_2 ye izomorf oldukları anlaşılır. T t-normların iç çarpım tanımından, $T = T\downarrow(L_1\times\{0\})\ \hat{\times}\ T\downarrow(\{0\}\times L_2)$ dır. ♦

Şimdi aşağıdaki problemi inceleyelim:

Örnek 20 : T bir L çarpım kafesi üzerinde bir t-norm olsun. $a\wedge b=0$, $a\vee b=1$, $T(a,a)=a$, $T(b,b)=b$ olacak şekildeki $a,b\in L$ elemanlarının varlığı, T nin direkt parçalanmasını gerektirir mi?

Çözüm : Bunu göstermek için Örnek 17 deki t-normu ele alalım.

$$T\left((0,2),(0,2)\right)=(0,2) \quad , \qquad T\left((1,0),(1,0)\right)=(1,0)$$

ve

$$(0,2)\wedge(1,0)=(0,0) \qquad , \qquad (0,2)\vee(1,0)=(1,2)$$

Varsayalım T, L_1 üzerindeki T_1 t-normu ve L_2 üzerindeki T_2 t-normunun direkt çarpımı olsun. Önerme 22 den $T\downarrow\left(\{0\}\times\{0,1,2\}\right)$, $\left(\{0\}\times\{0,1,2\}\right)$ üzerinde bir t-normdur. Fakat; $T\left((0,1),(0,2)\right)=(0,0)$ eşitliğinden $T\downarrow\left(\{0\}\times\{0,1,2\}\right)$ bir t-norm değildir. Bu yüzden T bir direkt parçalanma değildir. ♦

2.11.1. $\vee$-Dağılmalı ve Sonsuz $\vee$-Dağılmalı T-Normların İç Direkt Çarpımları

$(L,\leq)$ bir tam kafes, $\{a_\tau \mid \tau\in Q\}$ L nin bir altkümesi ve $\alpha\in Q$ olsun.

$Q(\alpha)=Q\setminus\{\alpha\}$ ve $\overline{a}_\alpha=\underset{\tau\in Q(\alpha)}{\vee} a_\tau$ olsun.

Tanım 51 : Bir $\{a_\tau \mid \tau\in Q\}$ altkümesi bağımsız olarak adlandırılır: $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in Q$ için, $a_\alpha\neq 0$ ve $\overline{a}_\alpha\wedge a_\alpha=0$ dır.

Tanım 52 : Bir $\{a_\tau \mid \tau\in Q\}$ altkümesi 1 in parçalanması olarak adlandırılır : $\Leftrightarrow \underset{Q}{\vee} a_\tau=1$ ve $a_\tau\neq 0$ $(\forall\tau\in Q)$

Önerme 23 : T bir L kafesi üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm ve $\{a_\tau \mid \tau\in Q\}$ 1 in bir parçalanması olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i**)** $\{a_\tau \mid \tau\in Q\}$ bağımsızdır;

(ii**)** $a_\alpha\wedge a_\beta=0$, $\forall\alpha\neq\beta$ için;

(iii**)** $T\left(a_\alpha,a_\beta\right)=0$, $\forall\alpha\neq\beta$ için.

İspat :

(i**)**$\Rightarrow$**(**ii**)** $a_\alpha\wedge a_\beta\leq\overline{a}_\beta\wedge a_\beta$, $\forall\alpha\neq\beta$ için ve $\overline{a}_\beta\wedge a_\beta=0$ $\forall\beta\in Q$ olduğundan $\forall\alpha\neq\beta$ için $a_\alpha\wedge a_\beta=0$ elde edilir.

(ii**)**$\Rightarrow$**(**iii**)** $T(x,y)\leq x\wedge y$ den $T\left(a_\alpha,a_\beta\right)\leq a_\alpha\wedge a_\beta=0$ $\Rightarrow T\left(a_\alpha,a_\beta\right)=0$ dır.

(iii**)**$\Rightarrow$**(**i**)** (iii) den,

$$T\left(a_\alpha,\overline{a}_\alpha\right)=T\left(a_\alpha,\underset{\beta\in Q(\alpha)}{\vee}a_\beta\right)=\underset{\beta\in Q(\alpha)}{\vee}T\left(a_\alpha,a_\beta\right)=0 \quad \left(\forall\alpha\in Q\right)$$

$a_\alpha\vee\overline{a}_\alpha=1$ olduğu için,

$$\begin{aligned} a_\alpha\wedge\overline{a}_\alpha &= T\left(a_\alpha\wedge\overline{a}_\alpha,1\right)\\ &= T\left(a_\alpha\wedge\overline{a}_\alpha,a_\alpha\vee\overline{a}_\alpha\right)\\ &= T\left(a_\alpha\wedge\overline{a}_\alpha,a_\alpha\right)\vee T\left(a_\alpha\wedge\overline{a}_\alpha,\overline{a}_\alpha\right)\\ &\le T\left(a_\alpha,\overline{a}_\alpha\right)=0 \end{aligned}$$

$\forall\alpha\in Q$ için, $a_\alpha\wedge\overline{a}_\alpha=0$ dır. ♦

Uyarı 7 : Eğer T sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm değilse $(ii)\Rightarrow(i)$ doğru değildir.

Örneğin; Şekil 2(b) deki N_5 kafesini göz önüne alırsak, N_5 dağılmalı değildir. $y\wedge z=0$ olduğundan, (ii) sağlanır. Fakat (i) şartı sağlanmaz. Çünkü, $\overline{y}\wedge z=0$ değildir.

$$\overline{y}=\underset{\tau\neq y}{\vee}\tau=\vee\left\{x,z,0,1\right\}$$

$$\overline{y}=x\vee z\vee 0\vee 1=1$$

$\overline{y}\wedge z=1\wedge z=z\neq 0$ dır. Dolayısıyla (i) sağlanmaz.

Tanım 53 : Bir $\left\{a_\tau \mid \tau\in Q\right\}$ altkümesi 1 in direkt parçalanması olarak adlandırılır :

$\Leftrightarrow$ $\underset{Q}{\vee}a_\tau=1$ ve $\left\{a_\tau \mid \tau\in Q\right\}$ kümesi bağımsızdır.

Önerme 24 : T bir L kafesi üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm ve $\left\{a_\tau \mid \tau\in Q\right\}$ 1 in direkt parçalanması olsun. $\forall\tau\in Q$ için a_τ, T nin idempotent elemanıdır.

İspat : $\tau\neq\beta$ için $T\left(a_\tau,a_\beta\right)=0$ eşitliğinden,

$\forall\tau\in Q$ için $\quad a_\tau=T\left(a_\tau,1\right)=T\left(a_\tau,\underset{Q}{\vee}a_\tau\right)=\underset{Q}{\vee}T\left(a_\tau,a_\beta\right)=T\left(a_\tau,a_\tau\right)$ dır. ♦

Önerme 25 : T bir L kafesi üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm ve $\left\{a_1,a_2,.......,a_n\right\}$, 1 in direkt parçalanması olsun. $\forall i\in\left\{1,2,......,n\right\}$ için a_i T nin idempotent elemanıdır.

İspat : $i\neq j$ için $T\left(a_i,a_j\right)=0$ eşitliğinden,

$$a_i = T(a_i, 1)$$

$$= T(a_i, a_1 \vee a_2 \vee ..... \vee a_n)$$

$$= T(a_i, a_1) \vee T(a_i, a_2) \vee .... \vee T(a_i, a_n)$$

$$= T(a_i, a_i) \qquad \left(\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \ için\right) \blacklozenge$$

Teorem 20 : T bir L üzerinde sonsuz $\vee$**-**dağılmalı bir t-norm, $\{a_\alpha \mid \alpha \in Q\} \subseteq L$ $L_\alpha = \downarrow a_\alpha$ ve $T_\alpha = T \downarrow L_\alpha$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i**)** $\forall \alpha \in Q$ için, T_α bir t-norm ve $T = \hat{\prod\limits_{\alpha \in Q}} T_\alpha$

(ii**)** $\{a_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ 1 in direkt parçalanmasıdır.

İspat :

(i**)**$\Rightarrow$**(**ii**)** $\forall \alpha \in Q$ için, T_α bir t-norm ve T, $\{T_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ ailesinin iç direkt çarpımı olsun.

$1 = \bigvee\limits_{\alpha \in Q} x_\alpha$, $x_\alpha \in L_\alpha$ $(\alpha \in Q)$ olacak şekilde bir tek $\{x_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ ailesi mevcuttur.

$1 = \bigvee\limits_{\alpha \in Q} x_\alpha \leq \bigvee\limits_{\alpha \in Q} a_\alpha$ ve $\{x_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ ailesinin tekliğinden $\forall \alpha \in Q$ için $x_\alpha = a_\alpha$ elde edilir. $1 = \bigvee\limits_{\alpha \in Q} x_\alpha$ dır. $(*)$

$\alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta \in L_\alpha$ ve $a_\alpha \wedge a_\beta \in L_\beta$ olduğundan $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ dır. Önerme 23 den $\{a_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ bağımsızdır. $(**)$

$(*)$ ve $(**)$ dan $\{a_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ 1 in direkt parçalanmasıdır.

(ii**)**$\Rightarrow$**(**i**)**$\{a_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ 1 in direkt parçalanması olsun. Önerme 23 ten, $\forall \alpha \neq \beta$ için $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$ dır. Özellikle $L_\alpha \cap L_\beta = \{0\}$ dır. T_α nın L_α üzerinde bir t-norm olduğunu gösterelim. Bunun için, $x, y \in L_\alpha$ olsun.

$$T(x, y) = T_\alpha(x, y) \leq x \wedge y \leq a_\alpha$$

Böylece $T_\alpha(x, y) \in L_\alpha$

$x \in L_\alpha$ ise, $x = T(x, 1) = T\left(x, \bigvee\limits_Q a_\beta\right) = \bigvee\limits_Q T(x, a_\beta) = T(x, a_\alpha)$

Bu eşitlikten a_α nın L_α nın birim elemanı olduğu elde edilir. Böylece $T_\alpha : L_\alpha \times L_\alpha \to L_\alpha$, L_α üzerinde bir t-normdur. Şimdi T nin T_α t-normlarının iç direkt çarpımı olduğunu gösterelim. $x \in L$ olsun. $\forall \alpha \in Q$ için $x_\alpha = T(a_\alpha, x)$ olarak tanımlayalım.

$$\underset{Q}{\vee} x_\alpha = \underset{Q}{\vee} T(a_\alpha, x) = T\left(\underset{Q}{\vee} a_\alpha, x\right) = T(1, x) = x$$

Varsayalım, $\forall \alpha \in Q$, $x'_\alpha \in L_\alpha$ ve bazı $\{x'_\alpha : \alpha \in Q\}$ ailesi için $x = \underset{Q}{\vee} x'_\alpha$ olsun.

$$x_\alpha = T(a_\alpha, x) = T\left(a_\alpha, \underset{Q}{\vee} x'_\tau\right) = \underset{Q}{\vee} T\left(a_\alpha, x'_\tau\right) = T\left(a_\alpha, x'_\alpha\right) = x'_\alpha$$

Sonuç olarak, herhangi bir $x \in L$ ve $x_\alpha \in L_\alpha$ için $x = \underset{Q}{\vee} x_\alpha$ olacak şekilde bir tek $\{x_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ ailesi mevcuttur.

$x, y \in L$ ve $x = \underset{Q}{\vee} x_\alpha$, $y = \underset{Q}{\vee} y_\alpha$ olsun. $\forall \alpha \neq \beta$ için $T(x_\alpha, y_\beta) = 0$ olduğundan aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$T(x, y) = T\left(\left(\underset{Q}{\vee} x_\alpha\right), \left(\underset{Q}{\vee} y_\alpha\right)\right) = \underset{\alpha \in Q}{\vee} \underset{\beta \in Q}{\vee} T(x_\alpha, y_\beta) = \underset{Q}{\vee} T(x_\alpha, y_\alpha)$$

$T(x_\alpha, y_\alpha) \in L_\alpha$ olduğu için, $T(x_\alpha, y_\alpha) = (T \downarrow L_\alpha)(x_\alpha, y_\alpha) = T_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ olduğundan $T(x, y) = \underset{Q}{\vee} T_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ elde edilir. ♦

$A = \{0, 1\}$, $0 < 1$ bir zincir ve A^*, A üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm olsun. $\forall x, y \in A$ için $A^*(x, y) = x \wedge y$

Teorem 21 : T, L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm ve L nin bütün $\{p_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ atomlarının supremumu 1 e eşit olsun. T, $L_\alpha = \downarrow p_\alpha$ üzerindeki $\vee$-dağılmalı T_α t-normlarının iç direkt çarpımıdır ve $\forall \alpha \in Q$ için T_α, A^* a izomorftur.

İspat : $\forall \alpha \in Q$ için p_α, L de bir atom ve $1 = \underset{\alpha \in Q}{\vee} p_\alpha$ olsun. $\forall \alpha \neq \beta$ için $p_\alpha \wedge p_\beta = 0$ dır. Önerme 23 ten, $\{p_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ 1 in direkt parçalanmasıdır. Teorem 20 den $L_\alpha = \{x \in L \mid x \leq p_\alpha\}$ için T, L_α üzerindeki T_α ların direkt çarpımıdır. p_α bir atom olduğu için, $\forall \alpha \in Q$ için $T_\alpha \cong A^*$ dır. ♦

2.11.2. $\vee$-Dağılmalı veya Sonsuz $\vee$-Dağılmalı T-Norma Sahip Olmayan Kafesler

Şimdi aşağıdaki problemi inceleyelim:

Verilen herhangi L tam kafesi için, L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm var mıdır?

Teorem 22 : L bir kafes öyleki atomların bir sonlu sayısının supremumu 1 ve T, L üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm olsun. Bu takdirde L sonlu Boole Kafesi ve $T = \wedge$ dur.

İspat : İspatı teorem 21 nin ispatına benzer şekilde yapılır. ♦

Örnek 21 : Şekil 2 (a) ve (b) deki $M_5 = \{0, x, y, z, 1\}$ ve $N_5 = \{0, x, y, z, 1\}$ kafeslerini düşünelim. Şekil 2 (a) da M_5 kafesinin x,y ve z atomlarının supremumu 1 dir. Varsayalım T, M_5 üzerinde bir $\vee$-dağılmalı t-norm olsun. Teorem 21 den M_5 üzerindeki T $A^* \times A^* \times A^* = \wedge$' a izomorftur. Bu ise çelişkidir. Çünkü M_5 üzerindeki $\wedge$ t-normu $\vee$-dağılmalı değildir. Buradan M_5 üzerinde $\vee$-dağılmalı t-norm olmadığı elde edilir.

Benzer şekilde N_5 üzerinde de $\vee$-dağılmalı bir t-norm olmadığı gösterilir. ♦

Örnek 22 : L bir sonlu boyutlu lineer uzayın lineer altuzaylarının kafesi ve T, L üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm olsun. Atomların bir sonlu sayısının supremumu 1 dir. Teorem 21 den $T \cong A^* \times ...... \times A^* = \wedge$ dur. Fakat $\wedge$, L üzerinde $\vee$-dağılmalı değildir. Bu yüzden, L üzerinde $\vee$-dağılmalı t-norm yoktur.

Teorem 23 : T bir L komplementli kafesi üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm olsun. L bir Boole Kafesi ve $T = \wedge$ dur.

Önerme 26 : L kafesi M_5 veya N_5 e izomorf olan bir M altkafesini içersin ve L ve M nin birim elemanları çakışsın. Bu takdirde L üzerinde $\vee$-dağılmalı t-norm yoktur.

İspat : $M = \{x, y, z, t, m\}$ L nin altkafesi, M M_5 e izomorf ve $m = 1$ olsun.
$(x < y < m\ , x < z < m\ , x < t < m\ , y \vee z = z \vee t = y \vee t = m\ , y \wedge z = z \wedge t = y \wedge t = x)$

Varsayalım T, L üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm olsun.

$T(y, z \vee t) = T(y, 1) = y$

$T(y, z) \leq y \wedge z = x$

$T(y, t) \leq y \wedge t = x$

Buradan, $y = T(y, z \vee t) = T(y, z) \vee T(y, t) \leq x$ çelişkisi görülür.

Benzer şekilde, $M=\{x,y,z,t,m\}$ L nin alt kafesi, M N_5 e izomorf ve $m=1$ olsun. $(x<y<m\ ,x<z<t\ ,z<t<m\ ,y\vee z=y\vee t=m\ ,z\vee t=t\ ,z\wedge y=y\wedge t=x\ ,z\wedge t=z)$

$T(t,y\vee z)=T(t,1)=t$

$T(t,y)\leq t\wedge y=x$

$T(t,z)\leq t\wedge z=z$

Buradan, $t=T(t,y\vee z)=T(t,y)\vee T(t,z)\leq x\vee z=z$ çelişkisi görülür. Böylece L üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-norm olmadığı elde edilir. ♦

Dağılmalı olmayan ve sonsuz $\vee$-dağılmalı t-norma sahip olan bir kafes vardır.

Örnek 23 : S boştan farklı bir küme, $|S|\geq 3$ ve $L_S=\{0,p_\tau(\tau\in S),b,1\}$, $0<p_\tau<b<1$ bir kafes olsun. $\forall\alpha\neq\beta$ için $p_\alpha\wedge p_\beta=0$ dır.

$$p_\alpha\wedge(p_\beta\vee p_\gamma)\overset{?}{=}(p_\alpha\wedge p_\beta)\vee(p_\alpha\wedge p_\gamma)$$

$$p_\alpha\wedge b\overset{?}{=}0\vee 0$$

$p_\alpha\neq 0$ olduğundan L_S dağılmalı olmayan bir kafestir.

L_S üzerindeki en küçük t-norm;

$$T_W(x,y)=\begin{cases}x & ,\ y=1\ ise\\ y & ,\ x=1\ ise\\ 0 & ,\ \text{Aksi takdirde}\end{cases}$$

$$T_W\left(x,\underset{\tau}{\vee}p_\tau\right)\overset{?}{=}\underset{\tau}{\vee}T_W(x,p_\tau)$$

(i) $x\neq 1$ ise $\underset{\tau}{\vee}p_\tau=b$ olduğundan $T_W\left(x,\underset{\tau}{\vee}p_\tau\right)=0$

$x\neq 1$ ve $p_\tau\neq 1$ olduğundan $\underset{\tau}{\vee}T_W(x,p_\tau)=0\ \Rightarrow T_W\left(x,\underset{\tau}{\vee}p_\tau\right)=\underset{\tau}{\vee}T_W(x,p_\tau)$ dır.

(ii) $x=1$ ise $T_W\left(x,\underset{\tau}{\vee}p_\tau\right)=\underset{\tau}{\vee}p_\tau$

$x=1$ ise $\underset{\tau}{\vee}T_W(x,p_\tau)=\underset{\tau}{\vee}p_\tau\ \ \Rightarrow T_W\left(x,\underset{\tau}{\vee}p_\tau\right)=\underset{\tau}{\vee}T_W(x,p_\tau)$ dır. T_W, L_S üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-normdur. ♦

Sonsuz $\vee$-dağılmalı t-norma sahip olmayan fakat $\vee$-dağılmalı t-norma sahip olan bir L kafesi mevcuttur.

Örnek 24 : S öklid topolojisine göre $[0,1]$ aralığındaki tüm kapalı kümelerin ailesi olsun. S, $2^{[0,1]}$ in bir alt kümesidir. S infumum ve supremum ile birlikte bir tam, dağılmalı kafestir.

$$\underset{Q}{\wedge} A_\tau = \underset{Q}{\cap} A_\tau \in S \text{ ve } \underset{Q}{\vee} A_\tau = \overline{\underset{Q}{\cup} A_\tau} \in S \quad \left(\left\{A_\tau \mid \tau \in Q\right\} \subseteq S \text{ için}\right)$$

$\wedge$, S üzerinde $\vee$-dağılmalı bir t-normdur. S üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı T t-norm olduğunu varsayalım. $A = \{0\}$ ve $n \in \{1,2,3,.......,\}$ için $B_n = \left[\frac{1}{n},1\right] \in S$ olsun.

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} B_n = \overline{(0,1]} = [0,1]$$

$$T\left(A, \overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} B_n\right) = T(\{0\},[0,1]) = \{0\} \text{ ve } T(A,B_n) \subseteq A \cap B_n = \{0\} \cap \left[\frac{1}{n},1\right] = \varnothing$$

$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} T(A,B_n) = \varnothing$ olduğundan, $T\left(A, \overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} B_n\right) \neq \overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} T(A,B_n)$ çelişkisi elde edilir. S, sonsuz $\vee$-dağılmalı t-norma sahip değildir.

Tanım 54 : Bir L kafesine atomik kafes denir: $\Leftrightarrow$ L nin her elemanı atomların supremumudur.

Tanım 55 : Bir T_1 kafesi duali Brouwerian Kafesi olan tam atomik kafestir.

S, bir T_1-topolojik uzayın bütün kapalı altkümelerinin kafesi olsun. Bu şartlar altında S üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm var mıdır?

Bu soruya aşağıdaki Önerme 27 ile cevap verelim:

Önerme 27 : (X,S) bir T_1-topolojik uzayı ve S, (X,S)deki bütün kapalı kümelerin ailesi olsun. S üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm vardır :$\Leftrightarrow$ (X,S) bir diskret topolojik uzaydır.

İspat :

'$\Rightarrow$' T , S üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm olsun. (X,S) bir T_1-topolojik uzayı olduğu için S bir T_1 kafesidir. Bu yüzden $x \in S$, S nin bütün $\{p_\alpha \mid \alpha \in Q\}$ atomlarının supremumudur. Teorem 21 den T, A^Q üzerindeki A^{*Q} ya izomorftur. Şimdi $S = 2^X$ olduğunu gösterelim.

$S \subset 2^X$ olduğu açık $\qquad (*)$

$C \in 2^X \setminus \{0, X\}$ ve $y \notin C$, $y \in X$ olsun. (X, S) bir T_1-uzayı olduğu için $\{y\} \in S$ dir. S, A^Q ya izomorf ve A^Q bir Boole Cebiri olduğu için $X \setminus \{y\} \in S$ dir.

$\Rightarrow C = \bigcap_{y \notin C} X \setminus \{y\} \in S$ dir. Çünkü ;

$y \notin C \Rightarrow C \subseteq X \setminus \{y\}$

$\Rightarrow C \subseteq \bigcap_{y \notin C} X \setminus \{y\}$

$\bigcap_{y \notin C} X \setminus \{y\} \subseteq C$ olduğunu gösterelim.

$k \in \bigcap_{y \notin C} X \setminus \{y\} \Rightarrow k \in X \setminus \{y\}$

$\Rightarrow \forall y \notin C \;\; için \;\; k \neq y$

$\Rightarrow k \in C$

$\Rightarrow \bigcap_{y \notin C} X \setminus \{y\} \subseteq C$

(1) ve (2) den $C = \bigcap_{y \notin C} X \setminus \{y\}$ dir. Buradan, $2^X \subseteq S$ $(**)$

$(*)$ ve $(**)$ dan $S = 2^X$ elde edilir. Buradan (X, S) diskret topolojik uzayıdır.

'$\Leftarrow$': Benzer şekilde yapılır. ♦

Teorem 21 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6 : L, atomlarının supremumu 1 olan bir tam kafes olsun. L bir sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norma sahiptir $\Leftrightarrow$ L bir tam atomik Boole Kafesidir.

Teorem 22 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7 : L bir tam komplementli kafes olsun. L bir sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norma sahiptir $\Leftrightarrow$ L bir tam atomik Boole Kafesidir.

Şimdi $d(L) = 2$ olmak üzere L üzerindeki bütün $\vee$-dağılmalı t-normların sınıflandırılmasını verelim.

$B = \{0, p, 1\}$ $0 < p < 1$, 2 uzunluklu bir zincir olsun ve B_i^*, $i = 1, 2$ $\vee$-dağılmalı t-normları şu şekilde tanımlanır:

(b_1) $\forall x \in B$ için $B_1^*(1, x) = x$ ve aksi takdirde, $B_1^*(x, y) = 0$

(b_2) $\forall x, y \in B$ için $B_2^*(x, y) = x \wedge y$

Teorem 24 : $d(L) = 2$ olan L kafesleri üzerinde sadece 3 tane izomorfi olmayan $\vee$-dağılmalı t-norm vardır. Bunlar $A^* \times A^*$, B_1^* ve B_2^* dır.

İspat : Uzunluğu 2 olan her L kafesi $L_Q = \{0, \{p_\tau \mid \tau \in Q\}, 1\}$ formuna sahiptir öyleki p_τ L de atomdur. Varsayalım, $|Q| \geq 2$ ve T, L üzerinde bir $\vee$-dağılmalı t-norm olsun. $|Q| > 2$ için L, M_5 e izomorf olan bir M altkafesini içerir. Önerme 26 dan L üzerinde $\vee$-dağılmalı t-norm yoktur. $|Q| = 2$ ise teorem 21 den $T \cong A^* \times A^*$ dır. Yine teorem 21 den, $\wedge$ t-norm, A^2 üzerindeki tek t-normdur. $|Q| = 1$ ise $L_Q = B$ ve $\{0, p, 1\}$ zinciri $0 < p < 1$ dir. Açıkça B üzerinde sadece iki tane B_1^* ve B_2^* t-normları vardır. ♦

3. BULGULAR VE SONUÇLAR

Tezde elde edilen bulguları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

1. P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T_1 ve P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T_2 t-normlarının direkt çarpımı olan $T_1 \times T_2$ nin $P_1 \times P_2$ sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm olduğu önerme 12 de gösterilmiştir.

T_1 , P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2 , P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin.

(i) $I(T_1 \times T_2) = I(T_1) \times I(T_2)$

(ii) $N(T_1 \times T_2) = N(T_1) \times N(T_2)$

eşitlikleri önerme 13 de gösterilmiştir.

2. P_1 ve P_2 iki sınırlı kısmen sıralı küme olsun.

(i) $Z[P_1 \times P_2] = (Z[P_1] \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z[P_2])$

(ii) $(\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2) \setminus Z[P_1 \times P_2] = (\mathrm{P}_1 \setminus Z[P_1]) \times (\mathrm{P}_2 \setminus Z[P_2])$

eşitlikleri lemma 7 de gösterilmiştir.

3. T_1 , P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2 , P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin.

$$Z(T_1 \times T_2) = (Z(T_1) \times \mathrm{P}_2) \cup (\mathrm{P}_1 \times Z(T_2))$$

eşitliği önerme 14 de gösterilmiştir.

4. T_1 , P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2 , P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin.

$T_1 \times T_2$ Pseudo-Arşimedyandır $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 Pseudo-Arşimedyandır.

ifadesi önerme 15 de gösterilmiştir.

5. T_1 , P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde ve T_2 , P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerinde bir t-norm, $P_1 \times P_2$ kısmen sıralı kümesi üzerinde onların direkt çarpımları $T_1 \times T_2$ verilsin.

$T_1 \times T_2$ kısaltmalıdır $\Leftrightarrow$ T_1 ve T_2 kısaltmalıdır.

ifadesi önerme 18 de gösterilmiştir.

6. $\varphi : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ dönüşümü $\left([0,1]^2, \leq\right)$ nin bir otomorfisidir. $\Leftrightarrow$ $\left([0,1], \leq\right)$ nin φ_1 ve φ_2 otomorfileri vardır:

$\forall (x,y) \in [0,1]^2$ için $\varphi(x,y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$

veya

$\forall (x,y) \in [0,1]^2$ için $\varphi(x,y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(x))$

ifadesi önerme 19 da gösterilmiştir.

7. T_1 ve T_2 , $\left([0,1], \leq\right)$ üzerinde t-normlar ve onların direkt çarpımları $T = T_1 \times T_2$ verilsin. $\left([0,1]^2, \leq\right)$ nin herhangi bir φ otomorfisi için T_φ t-normunun $\left([0,1], \leq\right)$ üzerindeki t-normların direkt çarpımı olduğu önerme 20 de gösterilmiştir.

8. $P_{(1)} = \{\alpha_a = (a,0)\ ,\ \gamma_b = (0,b) \quad | \quad a,b \in [0,1]\} \subseteq [0,1]^2$ olmak üzere $\left(P_{(1)}, \leq\right)$ in sınırlı dağılmalı kafes olduğu teorem 14 te gösterilmiştir.

9. $Z\left[P_{(1)}\right] = \{0\}$ ve $U\left[P_{(1)}\right] = \{1\}$ olduğu lemma 9 da gösterilmiştir.

10. $t_1, t_2 \in \mathfrak{T}\left([0,1]\right)$ sürekli t-normları için, $T_{t_1 t_2} \in \mathfrak{T}\left(P_{(1)}\right)$ olduğu örnek 14 te gösterilmiştir.

11. $t_1, t_2, t_3 \in \mathfrak{T}\left([0,1]\right)$ için, $T_{t_1 t_2 t_3}$, $T_{\overline{t_1 t_2 t_3}} \in \mathfrak{T}\left(P_{(2)}\right)$ olduğu örnek 15 te gösterilmiştir.

12. $P_{(2)}$ üzerindeki $T_z(x,y)$ fonksiyonu için,

(i) $T_z \in \mathfrak{T}\left(P_{(2)}\right)$ dir.

(ii) T_z kısaltmalı değildir.

(iii) T_z Pseudo-Arşimedyandır.

(iv) $N(T_z) = C$ dir.

ifadeleri örnek 16 da gösterilmiştir.

13. Pseudo-Arşimedyan, kısaltmalı olmayan ve nilpotent elemanlara sahip t-norm örneği örnek 17 de gösterilmiştir.

14. Pseudo-Arşimedyan, kısaltmalı olmayan ve nilpotent elemanlara sahip olmayan t-norm örneği örnek 18 de gösterilmiştir.

15. $\left[0,1\right]^n$ üzerinde sürekli bir t-norm olan $*$' ın , $\left[0,1\right]$ üzerindeki n tane işlemin direkt çarpımı olmadığı teorem 18 de gösterilmiştir.

16. Herhangi bir $i \in I$ için L bir tam kafes, $\left\{L_i \mid i \in \mathrm{I}\right\}$ L nin tam altkafeslerinin bir ailesi ve T_i, L_i üzerinde bir t-norm olsun. Herhangi bir $x \in L$ için $x_i \in L_i$ ve $x = \underset{i \in I}{\vee} x_i$ $\left(x = \underset{i \in I}{\vee} x_i = \underset{i \in I}{\vee} y_i \ , \ x_i, y_i \in L_i \ , \forall i \in I \ için \ x_i = y_i\right)$ olacak şekilde bir tek $\left\{x_i \mid i \in I\right\}$ ailesi mevcut olsun.

$T : L \times L \to L$ fonksiyonunun

$T\left(x,y\right) = \underset{i \in I}{\vee} T_i\left(x_i, y_i\right) \quad \underset{i \in I}{\vee} x_i = x \ , \ \underset{i \in I}{\vee} y_i = y \quad \left(x_i, \ y_i \in L_i \text{ için}\right)$;

L üzerinde bir t-norm olduğu önerme 21 de gösterilmiştir.

17. $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $T\left(a,a\right) = a$ ve $T\left(b,b\right) = b$ olacak şekildeki $a,b \in L = L_1 \times L_2$ elemanlarının varlığının T' nin direkt parçalanmasını gerektirmediği örnek 20 de gösterilmiştir.

18. T bir L kafesi üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm ve $\left\{a_\tau \mid \tau \in Q\right\}$ 1 in bir parçalanması olsun.

(i) $\left\{a_\tau \mid \tau \in Q\right\}$ bağımsızdır ;

(ii) $a_\alpha \wedge a_\beta = 0$, $\forall \alpha \neq \beta$ için ;

(iii) $T\left(a_\alpha, a_\beta\right) = 0$, $\forall \alpha \neq \beta$ için.

önermelerinin denk olduğu önerme 23 te gösterilmiştir.

19. T bir L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm, $\left\{a_\alpha \mid \alpha \in Q\right\} \subseteq L$ $L_\alpha = \downarrow a_\alpha$ ve $T_\alpha = T \downarrow L_\alpha$ olsun.

(i) $\forall \alpha \in Q$ için, T_α bir t-norm ve $T = \underset{\alpha \in Q}{\hat{\prod}} T_\alpha$;

(ii) $\left\{a_\alpha \mid \alpha \in Q\right\}$ 1 in direkt parçalanmasıdır.

önermelerinin denk olduğu teorem 20 de gösterilmiştir.

20. Dağılmalı olmayan ve sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norma sahip olan kafes örneği örnek 23 te gösterilmiştir.

21. Sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norma sahip olmayan fakat $\vee$-dağılmalı t-norma sahip olan kafes örneği örnek 24 te gösterilmiştir.

22. (X,S) bir T_1-topolojik uzayı ve S, (X,S)deki bütün kapalı kümelerin ailesi olsun. S üzerinde sonsuz $\vee$-dağılmalı bir t-norm vardır $:\Leftrightarrow$ (X,S) bir diskret topolojik uzaydır ifadesi önerme 27 de gösterilmiştir.

4. İRDELEME

B. De Baets ve R. Mesiar $[3]$ deki çalışmalarında çarpım kafesi üzerindeki t-normların direkt çarpım kavramını araştırmışlar ve bir çarpım kafesi üzerinde t-normların direkt çarpımı olan $\vee$- dağılmalı t-normları karakterize etmişlerdir. B. De Baets ve R. Mesiar yine aynı çalışmalarında şu problemi ortaya koymuşlardır:

Problem 1: $[0,1]^2$ üzerindeki herhangi sürekli bir t-norm $[0,1]$ üzerindeki sürekli t-normların direkt çarpımı mıdır?

S. Jenei ve B. De Baets $[6]$ daki çalışmalarında B. De Baets ve R. Mesiar tarafından ortaya konulan Problem 1'i incelemişler ve $[0,1]^n$ üzerindeki herhangi sürekli bir t-normun $[0,1]$ üzerinde sürekli n tane t-normun direkt çarpımı olmadığını göstermişlerdir. S. Jenei ve B. De Baets yine aynı çalışmada şu problemi ortaya koymuşlardır:

Problem 2: T, L çarpım kafesi üzerinde bir t-norm olsun. $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$, $T(a,a) = a$ ve $T(b,b) = b$ olacak şekildeki $a, b \in L$ elemanlarının varlığı T' nin direkt parçalanmasını gerektirir mi?

S. Jenei ve B. De Baets' in $[6]$ da ortaya koydukları Problem 2'yi F. Karaçal ve D. Khadjiev $[8]$ deki çalışmalarında araştırmışlardır.

Yine B. De Baets ve R. Mesiar ın $[3]$ deki çalışmalarında ortaya koydukları aşağıdaki problemi Z. Kun-Lun, L. Dong-Hai ve S. Li-Xia $[12]$ ve F. Karaçal $[9]$ daki çalışmalarında çözmüşlerdir:

Problem 3: Bir sınırlı kısmen sıralı küme veya sınırlı kafes üzerindeki bir Pseudo-Arşimedyan ve kısaltmalı olmayan bir t-norm nilpotent elemana sahip midir?

Tezde bu problemlerin çözümleri de incelenmiştir.

Ayrıca tam kafesler üzerindeki $\vee$- dağılmalı ve sonsuz $\vee$- dağılmalı t-normlar üzerine birçok çalışma $[1,7,10,18]$ vardır.

Tezde bir L tam kafesi üzerindeki sonsuz $\vee$- dağılmalı t-normun direkt parçalanması ve L nin birim elemanının direkt parçalanması arasındaki ilişki kurulmuştur. Sonsuz $\vee$- dağılmalı t-norm ile birlikte bir tam kafesin 1 birim elemanının direkt parçalanmasının özellikleri çalışılmıştır. T bir L tam kafesi üzerinde sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm ve L nin tüm atomlarının supremumu 1 ise $T = \wedge$ ve L nin atomik Boole Kafesi olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak, kafesler üzerinde $\vee$- dağılmalı veya sonsuz $\vee$- dağılmalı olmayan t-norm örnekleri verilmiştir. Z. Wang ve Y. Yu $[17]$ tarafından ortaya konulan şu probleme cevap verilmiştir:

Problem 4 : Verilen herhangi bir L tam kafesi için, L üzerinde sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t-norm var mıdır?

Verilen örneklerden birinde, bazı T_1- topolojik uzayın bütün kapalı altkümelerinin kafesi üzerinde sonsuz $\vee$- dağılmalı bir t- norm olmadığı gösterilmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada P_1 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T_1 ve P_2 sınırlı kısmen sıralı kümesi üzerindeki T_2 t-normlarının direkt çarpımı olan $T_1 \times T_2$ nin $P_1 \times P_2$ üzerinde bir t-norm olduğu gösterilmiştir. Fakat bunun tersinin doğru olmadığı $[6]$ da $[0,1]^n$ kafesleri üzerindeki t-normlar için gösterilmiştir. Yani $[0,1]^n$ üzerindeki herhangi sürekli bir t-norm $[0,1]$ üzerinde sürekli n tane t-normun direkt çarpımı değildir. Ayrıca şu problem incelenebilir:

Çarpım kafesleri üzerindeki direkt çarpım olmayan t-normları tanımlamanın başka bir yolu var mıdır?

1 elemanı her $\tau \in Q$ için $d(a_\tau) < +\infty$ olacak şekildeki a_τ elemanlarının bir direkt parçalanması ise, teorem 20 ile; bir sonsuz $\vee$ -dağılmalı t-norma sahip kafeslerin araştırılması sonlu uzunluklu kafeslerin araştırılmasına indirgenmiştir. $d(L) \leq 2$ olmak üzere L kafesleri üzerindeki bütün $\vee$-dağılmalı t-normlar belirlenmiştir. $d(L) = 3$ olmak üzere L kafesleri üzerindeki bütün $\vee$-dağılmalı t-normlar $[10]$ da belirlenmiştir. Sonlu uzunluklu kafesler üzerindeki bir $\vee$-dağılmalı T t-normu için benzer problemin çözümü ve incelemesini düşünmek (Özellikle L kafesleri için $d(L) = 4$ ve $d(L) = 5$ olmak üzere) yararlı ve ilginç olacaktır.

6. KAYNAKLAR

1. Birkhoff, G., Lattice Theory, 3. Baskı, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.

2. Bülbül, A., Genel Topoloji, 1. Baskı, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Trabzon,1994.

3. De Baets, B. ve Mesiar, R., Triangular Norms on Product Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

4. De Cooman, G. ve Kerre, E., Order Norms On Bounded Partially Ordered Sets, J. Fuzzy Math, 2 (1994) 281-310.

5. Jenei, S., A More Efficient Method for Defining Fuzzy Connectives, Fuzzy Sets and Systems, 90 (1997) 25-35

6. Jenei, S. ve De Baets, B., On the Direct Decomposability of T-Norms on Product Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 139 (2003) 699-707.

7. Jenei, S. ve Montagna, F., A General Method for Constructing Left Continuous T-Norms, Fuzzy Sets and Systems, 136 (2003) 263-282.

8. Karaçal, F. ve Khadjiev, D., $\vee$- Distributive and Infinitely $\vee$- Distributive T-Norms on Complete Lattices, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341-352.

9. Karaçal, F., A Note on Pseudo-Archimedean and Non-cancellative T-Norm, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61-75.

10. Karaçal, F. ve Khadjiev, D., The Description of All $\vee$- Distributive Triangular Norms of Lengths 2 and 3, in: B. Reusch (Ed.), Proceedings of Fuzzy Days, 2001, Lecture Notes in Computer Science, vol. 2206, Springer, Berlin, 2001, 829-833.

11. Klement, E.P., Mesiar, R. ve Pap, E., Triangular Norms. Position Paper I, Fuzzy Sets and Systems, 143 (2004) 5-26.

12. Kun-Lun, Z., Dong-Hai, L. ve Li-Xia, S., Solution of an Open Problem on Pseudo Archimedean T-Norms, Information Sciences, 178 (2008) 4542-4549.

13. Ling, C., Representation of Associative Functions, Publ. Math. Debrecen, 12 (1965) 189-212.

14. Nguyen, H. ve Walker, E., A First Course in Fuzzy Logic, CRC Press, Boca Raton, 1997.

15. Mayor, G. ve Torrens, J., On a Class of Operators for Expert Systems, Internat. J. Intel. Systems, 8 (1993) 771-778.

16. Ray, S., Representation of a Boolean Algebra by its Triangular Norms, Mathware Soft Comput, 4 (1997) 63-68.

17. Wang, Z. ve Yu, Y., Pseudo T-Norms and Implication Operators on a Complete Brouwerian Lattice, Fuzzy Sets and Systems, 132 (2002) 113-124.

18. Wang, Z. ve Yu, Y., Pseudo T-Norms and Implication Operators: Direct Products and Direct Product Decompositions, Fuzzy Sets and Systems, 139 (2003) 673-683.

19. Ward, M. ve Dilworth, R.P., Residuated Lattices, Transactions of AMS, 45 (1939) 335-354.

ÖZGEÇMİŞ

Emel KALIN, 30.08.1983 tarihinde Ankara' da doğdu. İlk öğrenimini Çizmeci İlköğretim Okulunda, ortaöğrenimini Keçiören Lisesinde tamamladı. 2001 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2005 yılında Matematik Bölümünü üçüncülükle bitirdi. Yine aynı yıl Gazi Üniversitesi Orta Öğretim Alan Öğretmenliği-Tezsiz Yüksek Lisans Matematik Öğretmenliği (pedagojik formasyon) programına kaydoldu. 2007 yılında bu programdan mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tezli yüksek lisans programına kaydoldu.

2006 yılının Aralık ayında Trabzon Gümrük ve Muhafaza Başmüdürlüğü' nde Gümrük Muhafaza Memuru olarak göreve başladı. Halen aynı kurumda Gümrük Muhafaza Memuru olarak görevine devam etmektedir. İyi derecede İngilizce bilmektedir.