KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TAM KAFESLER ÜZERİNDE NEGASYONLAR, SONSUZ SUPREMUM DAĞILMALI ÜÇGENSEL NORMLAR VE PSEUDO KOMPLEMENTLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Akif İNCE

TEMMUZ 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TAM KAFESLER ÜZERİNDE NEGASYONLAR, SONSUZ SUPREMUM DAĞILMALI ÜÇGENSEL NORMLAR VE PSEUDO KOMPLEMENTLER

Mehmet Akif İNCE

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01.06.2009
Tezin Savunma Tarihi : 01.07.2009

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Funda KARAÇAL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Coşkun AYDIN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Üçgensel normlar (kısaca t-normlar), bazı metrik uzaylarda elemanlar arasındaki uzaklığı rakamlarla göstermek yerine, daha genel bir ifade ortaya koyma ihtiyacı ile ortaya çıkmıştır. Birçok alanda uygulamaları ve kullanımları vardır. Bunlardan bazıları; fuzzy kümeleri, fuzzy logic ve uygulamaları, genelleştirilmiş ölçü teorisi, lineer olmayan denklemler ve oyun teorisi gibi.

[0,1] kapalı birim aralığı üzerinde, t-normlarla ilgili birçok aksiyom ortaya konmuştur. Ama keyfi tam kafesler üzerinde, [0,1] üzerindeki kadar ilerleme kaydedilememiştir. Son yıllarda bu konuda çalışmalar yapılmıştır [5, 6, 8, 13, 14, 15].

Bu çalışmada ise amacımız bir tam kafesin uygun tam alt kafesleri üzerinde sonsuz supremum dağılmalı t-normlar tanımlamak ve bunlar üzerinde bazı aksiyomların varlığını araştırmaktır.

Bu çalışmanın hazırlanması ve düzenlenmesinde emeğini esirgemeyen sayın Doç. Dr. Funda KARAÇAL’ a teşekkür eder, saygılarımı sınarım. Ayrıca manevi anlamda desteğini her daim hissettiren eşim Gülizar İNCE’ ye, bütün hayatım boyunca bana inanan ve güvenen aileme, bu seviyeye gelmemde katkısı olan Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi ve minnetimi sunarım.

Mehmet Akif İNCE
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa No</u>

ÖZET

Bu çalışmada pseudo komplement tanımının, sonsuz supremum dağılmalı t-normlar üzerindeki bazı aksiyomları araştırılmıştır. Bir L tam kafesinin bazı alt-yapıları üzerinde bir takım t-normlar inşa edilmiştir. Ayrıca güçlü negasyon tanımı verilip ve çarpım kafesleri üzerinde güçlü negasyonların direkt, iç direkt çarpımları ve parçalanmaları irdelenmiştir.

Birinci bölümde kafesler ve t-normlarla ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise, negasyon kavramı ve sonsuz supremum dağılmalı t-normlar incelendi, ayrıca bu fonksiyonların bazı alt yapılara indirgenmesiyle oluşan t-normlar ve pseudo komplementlerle işlemler tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonsuz supremum dağılmalı t-norm, pseudo komplement, güçlü negasyon

SUMMARY

Negations, Infinitely Supremum Distributive Triangular Norms and Pseudo Complements on Complete Lattices

In this study, some axioms of the definiton of pseudo complement is investigated which is on infinitely supremum distributive t-norms. Some t-norms have constructed on some substructures of a complete lattice L. Furthermore, the definition of strong negation is given and it is examined that direct product, internal direct product and the decompositions of strong negations which are on product lattices.

In the first part, the general information about lattices and t-norms is given. In the second part, on the concept of negation and infinitely supremum distributive t-norms are studied, in addition, operations are defined with the t-norms which are formed by the restriction of these functions to some substructure and pseudo complements.

Key Words: Infinitely supremum distributive t-norm, pseudo complement, strong negation

ŞEKİLLER DİZİNİ

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	$\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\widetilde{X}$	X kümesinin dual sırası ile tanımlı küme
$\overline{X}$	X kümesinin üst sınırlarının kümesi
$\underline{X}$	X kümesinin alt sınırlarının kümesi
$\mathrm{Sup}X$	$\overline{X}$ kümesinin en küçük elemanı
$\mathrm{Inf}X$	$\underline{X}$ kümesinin en büyük elemanı
$x \vee y$	$\mathrm{Sup}\{x, y\}$
$x \wedge y$	$\mathrm{Inf}\{x, y\}$
x'	x elemanının komplementi
$\bigvee_J x_j$	J indis kümesi üzerinden $\mathrm{Sup}\{x_j\}$
$\bigwedge_J x_j$	J indis kümesi üzerinden $\mathrm{Inf}\{x_j\}$
L^2	$L \times L$
T_M, T_P, T_L, T_D	Sırasıyla minimum, çarpım, Lukasiewicz ve drastic çarpım t-normları
S_M, S_P, S_L, S_D	Sırasıyla minimum, çarpım, Lukasiewicz ve drastic çarpım t-konormları
$n_1 \otimes n_2$	n_1 ve n_2 negasyonlarının iç direkt çarpımı
$a \rightarrow_T 0$	a elemanının pseudo komplementi
$R(a)$	a elemanının asal radikali
x^*	x elemanının pseudo komplementi
$T \downarrow L_R$	T t-normunun L_R kümesine kısıtlanması
$\uparrow a$	a elemanını içeren elemanların kümesi
$\equiv$	denklik ifade eder
$\blacksquare$	İspat sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normların tarihi Karl Menger tarafından 1942 de yapılan "İstatistiksel Metrikler [20]" adlı çalışmasıyla başlamıştır. Karl Menger, iki eleman arasındaki uzaklığın rakamlar yerine daha genel bir ifadenin kullanılabileceği metrik uzaylar inşa etti. Üçgensel normlar, klasik üçgen eşitsizliğinin daha genel yapılara genelleştirilmesi için oluşturulmuştur. Üçgensel normlar için orijinal aksiyomlar kümesi çok dardı ve bu aksiyomlar diğer fonksiyonların özellikleri içerisine dahildi.

Üçgensel normlar, probalistik metrik uzaylar teorisinde önemli bir rol oynar. Berthold Schweizer ve Abe Sklar, 1958, 1960, 1961 yıllarındaki çalışmalarında [22, 23, 21] üçgensel normların bugünkü kullanıldığı aksiyomlarını vermişlerdir.

Matematiksel anlamda üçgensel normlar teorisi (özel) fonksiyonel denklemler alanı ve (özel topolojik) yarı gruplar teorisi olarak adlandırılan iki bağımsız alana sahiptir.

Fonksiyonel denklemler ile ilgili olarak, üçgensel normlar birleşmelilik denklemiyle yakından ilgilidir. Bu alanda ilk çalışma 1826 yılında Abel tarafından yapılmıştır[1]. Daha sonraki çalışmalar 1909 da Brouwer[6], 1930 yılında Cartan, 1949 ve 1961 yıllarında Aczel[3, 4] ve 1954 yılında Hosszu[11] tarafından yapılmıştır. Özellikle Janos Aczel' in monografisi (hem almanca[4] hem İngilizce[2] versiyonu) üçgensel normların gelişiminde çok önemli bir etkiye sahiptir.

Araştırmaların bir diğer yönü, bazı doğal fonksiyonel denklemlerin çözümü olarak üçgensel normların parametrelendirilmiş ailelerinin belirlenmesidir. Bu alandaki belki de en popüler sonuç, Frank fonksiyonel denklemi olarak adlandırılan denklemin tek çözümü olan Frank üçgensel norm ve konormların ailesinin ispatlandığı 1979 yılındaki çalışmasıdır[9].

Topolojik yarı gruplarla bağlantılı olarak, nilpotent elemanın mevcut olmadığı, sınır noktalarının (aynı zamanda annihilatör ve birim elemanın) sadece idempotent elemanlar olduğu bazı yarı grupların karakterizasyonu, 1955 te Faucett tarafından yapılmıştır[8].

Üçgensel normların dilinde, bu çalışma kesin üçgensel normların tam bir tasvirini sağlamıştır.

Özetle, T_M minimum, T_P çarpım ve T_L Lukasiewich diye adlandırılan sadece üç üçgensel norm ile başlayan üçgensel normlar için izomorf dönüşümler ve sıralı çarpımlar anlamında bütün sürekli üçgensel normları inşa etmek mümkündür.

Literatürde sınırlı kafesler üzerinde birçok çalışma vardır [13, 16, 17, 18, 19, 24, 27]. Bu çalışmada amaç, keyfi tam kafesler üzerinde tanımlar ve özellikler vermektir. Buna göre aşağıdaki konular üzerinde çalışılmıştır:

1) Negasyon ve güçlü negasyon tanımı verilip, çarpım kafesleri üzerinde güçlü negasyonların direkt parçalanması için gerek ve yeter şartlar.

2) Keyfi tam kafes üzerinde her zaman bir güçlü negasyon tanımlamanın mümkün olmadığına dair örnek.

3) Sonsuz supremum dağılamlı t-norm ve pseudo komplement tanımları üzerinde bir takım işlemler.

4) T-asal radikal, T-asal eleman, T-yarıasal elemanlar.

5) L_R tam kafesi üzerinde sonsuz supremum dağılmalı t-normlar.

6) Bir a elemanı ile üretilen esas dual ideal üzerinde sonsuz supremum dağılmalı t-normlar.

7) L^* tam kafesi üzerinde sonsuz supremum dağılmalı t-normlar.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Kafesler

Bu bölümdeki temel tanım, teorem ve önermeler Birkhoff' a ait Kafes Teorisi[5] ve Gratzer' e ait Genel Kafes Teorisi[10] kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir.

1.2.1. Kısmen Sıralı Kümeler ve Zincirler

Tanım 1: Bir $x \le y$ ikili bağıntısının tanımlı olduğu ve aşağıdaki özellikleri sağlayan X kümesine bir *Kısmen Sıralı Küme* denir:

P1) $\forall x \in X$ için $x \le x$ tir.

P2) $x \le y$ ve $y \le x$ olan her $x, y \in X$ için $x = y$ dir.

P3) $x, y, z \in X$ olmak üzere $x \le y$ ve $y \le z$ ise $x \le z$ dir.

Tanım 2: P kısmen sıralı kümesine *tam sıralı* veya *zincir* denir:$\Leftrightarrow$

P4) Verilen herhangi x ve y elemanları için $x \leq y$ dir veya $y \leq x$ tir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, doğal sıralamaya göre bir zincirdir. Çünkü herhangi $a, b \in \mathbb{Z}$ alındığında ya $a \leq b$ dir, ya da $b \leq a$ dır.

Tanım 3: Bir kısmen sıralı kümede herhangi x ve y elemanları için $x \leq y$ ise, bu takdirde "*y elemanı x elemanını içerir*" denir.

Teorem 1: Bir P kısmen sıralı kümesinin herhangi S alt kümesi, aynı içerme bağıntısına göre bir kısmen sıralı kümedir.

Bir zincirin herhangi alt kümesi yine bir zincirdir.

Tanım 4: P ve Q iki kısmen sıralı küme olsun.

i) $\theta : P \to Q$ fonksiyonuna *sıra-korur* veya *izoton* denir:$\Leftrightarrow$ $x \leq y$ olduğunda $\theta(x) \leq \theta(y)$ dir.

ii) $1-1$ ve örten $\theta : P \to Q$ sıra-korur dönüşümüne *izomorfi* denir:$\Leftrightarrow$ $\theta(x) \leq \theta(y)$ olduğunda $x \leq y$ dir.

iii) Eğer $\theta : P \to P$ bir izomorfi ise, bu takdirde θ ya *otomorfi* denir.

Tanım 5: X bir kısmen sıralı küme olsun. Aynı elemanlar üzerinde ters kısmen sıralama bağıntısı ile tanımlanan $\widetilde{X}$ kısmen sıralı kümesine, X kısmen sıralı kümesinin *duali* denir.

Teorem 2 (Duallik Prensibi): Herhangi bir kısmen sıralamanın terside bir kısmen sıralamadır.

Tanım 6: P ve Q iki kısmen sıralı küme olsun.

i) $\theta : P \to Q$ fonksiyonu *ters sıra-korur dönüşüm* denir :$\Leftrightarrow$ $x \leq y$ olduğunda $\theta(x) \leq \theta(y)$ dir ve $\theta(x) \leq \theta(y)$ olduğunda $x \leq y$ dir.

ii) Eğer bir $\theta : P \to Q$ ters sıra-korur dönüşümü 1-1 örten ise, bu takdirde θ ya bir *dual izomorfi(anti izomorfi)* denir.

iii) Kendi kendisine anti izomorf olan kümeye *self dual* denir.

Örnek: X bir kısmen sıralı küme olsun. "$\leq := \subseteq$", alındığında açıkça 2^X kümesi bir kısmen sıralı kümedir. $A \subseteq X$ olmak üzere, $\theta : 2^X \to 2^X, \theta(A) := X - A$ ile tanımlanan dönüşüm bir anti izomorfidir. Çünkü $A \subseteq B$ olduğunda $X - B \subseteq X - A$ olur yani $\theta(B) \leq \theta(A)$ dır. Birebirlik ve örtenlik açıktır. Bu ise $(X, \subseteq)$ kümesinin self dual olduğunu gösterir.

Tanım 7: P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun.

i) Bir $a \in X$ elemanına X kümesinin *en küçük elemanı* denir:$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ için $a \le x$. Kısaca E.k.e.X ile gösterilir. X kümesinin *en büyük elemanı* dual olarak tanımlanır ve E.b.e.X ile gösterilir.

ii) Bir $a \in X$ elemanına *minimal eleman* denir:$\Leftrightarrow$ $x < a$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut değildir. X kümesinde *maksimal eleman* dual olarak tanımlanır.

Açık olarak en küçük eleman bir minimal, en büyük eleman ise bir maksimal elemandır. Tersi doğru olmayabilir.

Teorem 3: Bir sonlu kısmen sıralı kümenin herhangi boştan farklı alt kümesi minimal ve maksimal elemana sahiptir.

Teorem 4: Zincirlerde minimal eleman(eğer mevcutsa) ile en küçük eleman, maksimal eleman ile en büyük eleman çakışır. Böylece her sonlu zincir bir en küçük(ilk) ve en büyük(son) elemana sahiptir.

1.2.2. Kafesler

P bir kısmen sıralı küme ve $X \subseteq P$ olsun. Eğer bir $a \in P$, $\forall x \in X$ için $x \le a$ koşulunu sağlıyor ise a elemanına X kümesinin bir *üst sınırı* denir. Dual olarak, $\forall x \in X$ için $b \le x$ koşulunu sağlayan $b \in P$ elemanına ise X kümesinin bir *alt sınırı* denir.

$\overline{X}$ ile X kümesinin bütün üst sınırlarının kümesini, $\underline{X}$ ile de X kümesinin bütün alt sınırlarının kümesini gösterelim. Eğer mevcut ise;

$\overline{X}$ kümesinin en küçük elemanına X kümesinin *supremumu*,

$\underline{X}$ kümesinin en büyük elemanına X kümesinin *infimumu* denir ve sırasıyla SupX ve InfX sembolleriyle gösterilir. P2 ile, eğer mevcutsa InfX tektir. Buna göre:

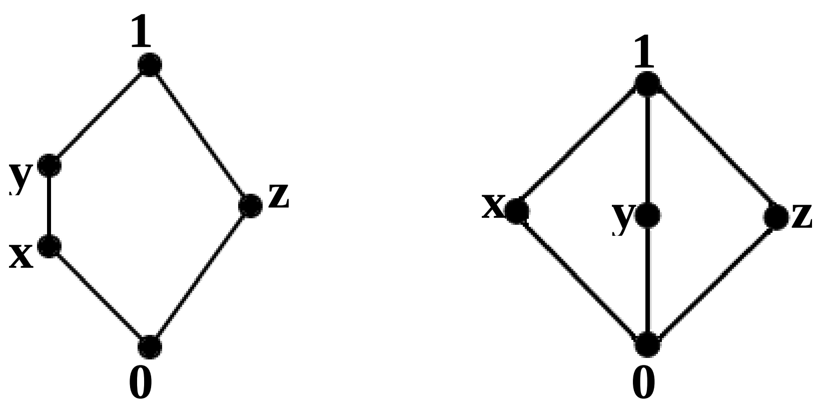
i) $\overline{X} = \{a \in P : \forall x \in X \text{ için } x \le a\}$ olup $\text{Sup}X = \text{E.k.e.}\overline{X}$ dir.

ii) $\underline{X} = \{b \in P : \forall x \in X \text{ için } b \le x\}$ olup $\text{Inf}X = \text{E.b.e.}\underline{X}$ dir.

Tanım 8: P bir kısmen sıralı küme olsun. P kısmen sıralı kümesine bir *kafes* denir:$\Leftrightarrow$ P' nin herhangi iki elemanı bir en büyük alt sınıra ve bir en küçük üst sınıra sahiptir. Yani P nin bir kafes olması için herhangi $x, y \in P$ alındığında $\text{Sup}\{x, y\}$ ve $\text{Inf}\{x, y\}$ mevcut olmalıdır.

$\mathrm{Sup}\{x,y\}$, $\mathrm{Inf}\{x,y\}$, SupL ve InfL elemanları ileride sıklıkla kullanılacağı için kolaylık açısından aşağıdaki gösterimleri kullanacağız:

- $\mathrm{Sup}\{x,y\} = x \vee y$, $\mathrm{Inf}\{x,y\} = x \wedge y$
- L bir kafes olmak üzere, eğer mevcut ise $\mathrm{SupL} = 1$ $\mathrm{InfL} = 0$
- Eğer bir kafes 0 ve 1 elemanlarına sahip ise bu kafese *sınırlı kafes* denir.



(N_5 Kafesi) (M_5 Kafesi)

Şekil 1. N_5 ve M_5 kafesleri

Tanım 9: L bir kısmen sıralı küme olsun. L kümesine bir *tam kafes* denir:⇔ $\forall X \subseteq L$ için SupX ve InfX mevcuttur.

$X = L$ alındığında görülür ki, her boştan farklı tam kafes sınırlıdır.

Örnek: Herhangi bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan 2^X kümesi, 0' ı boş küme, 1' i ise X kümesinin kendisi olan bir tam kafestir. Gerçekten, herhangi $A = \{S_\alpha : \alpha \in \Delta\} \subseteq 2^X$ için $\mathrm{InfA} = \bigcap_{\alpha\in\Delta} S_\alpha$ ve $\mathrm{SupA} = \bigcup_{\alpha\in\Delta} S_\alpha$ mevcut olup, 2^X tam kafestir.

Her kafes tam kafes olmayabilir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi göz önüne alındığında, kendi doğal sıralamasına göre kafestir ama tam kafes değildir çünkü, $\mathrm{Inf}\mathbb{R}$ ve $\mathrm{Sup}\mathbb{R}$ mevcut değildir.

Tanım 10: L bir kafes ve $X \subseteq L$ olsun. Eğer $\forall a,b \in X$ için $a \wedge b \in X$ ve $a \vee b \in X$ ise, bu takdirde X kümesine, L nin bir *alt kafesi* denir.

Teorem 5: L bir tam kafes ve S aşağıdaki özellikleri sağlayan bir alt küme olsun:

i) $1 \in S$;

ii) $T \subseteq S$ ise $\mathrm{InfT} \in S$;

Bu takdirde S bir tam kafestir.

Teorem 6: $(P,\leq_1)$ ve $(Q,\leq_2)$ iki kafes olsun. $P\times Q$ kafeslerin direkt çarpımı da aşağıda tanımlanan kısmen sıralamaya göre bir kafestir.

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in P\times Q$ olmak üzere,

$(x_1,y_1)\leq(x_2,y_2) :\Leftrightarrow x_1\leq_1 x_2$ ve $y_1\leq_2 y_2$

Lemma 1: L bir kısmen sıralı küme olsun. Bu takdirde infimum ve supremum(eğer mevcut ise) aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

L1) $x\wedge x=x$ ve $x\vee x=x$;

L2) $x\wedge y=y\wedge x$ ve $x\vee y=y\vee x$;

L3) $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$ ve $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$;

L4) $x\wedge(x\vee y)=x\vee(x\wedge y)=x$.

Ayrıca $x\leq y\equiv(x\wedge y=x \text{ ve } x\vee y=y)$ dir.

Lemma 2: Eğer P kısmen sıralı kümesi bir sıfıra sahip ise, $\forall x\in P$ için $0\wedge x=0$ ve $0\vee x=x$ tir. Dual olarak $\forall x\in P$ için $1\wedge x=x$ ve $1\vee x=1$ dir.

Lemma 3: Herhangi bir L kafesinde supremum ve infimum işlemleri sıra-korurdurlar. Yani $y,z\in L$ olmak üzere;

$y\leq z\Rightarrow\forall x\in L$ için $x\wedge y\leq x\wedge z$ ve $x\vee y\leq x\vee z$ dir.

Lemma 4: Herhangi bir L kafesinde, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$\forall x,y,z\in L$ olmak üzere,

- $x\wedge(y\vee z)\geq(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$
- $x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

Lemma 5: Herhangi bir L kafesinin elemanları aşağıda verilen modüler eşitsizliği sağlar.

$\forall x,y,z\in L$ için $x\leq z\Rightarrow x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge z$

Tanım 11: L bir küme olsun. Eğer L üzerinde bir $*$ ikili işlemi, aşağıda sırasıyla verilen asosyatiflik, değişme ve idempotent eleman özelliklerini sağlıyor ise, bu takdirde L ye bir *yarıkafes* denir.

i) $\forall x,y,z\in L$ için $x*(y*z)=(x*y)*z$

ii) $\forall x,y\in L$ için $x*y=y*x$

iii) $\forall x\in L$ için $x*x=x$

Lemma 1 aşağıdaki sonucu verir. Bu sonuç dual olarak supremum için de geçerlidir.

Sonuç: P, herhangi iki elemanı infimuma sahip olan bir kısmen sıralı küme olsun. Bu durumda P, infimum işlemine göre bir yarıkafestir. Böyle yarıkafeslere *infimum-yarıkafes* denir.

Lemma 6: L bir yarıkafes olsun. $x, y \in L$ olmak üzere $x \leq y :\Leftrightarrow x \circ y = x$ ile tanımlanan bağıntı altında, “$\circ$” ikili işlemli L yarıkafesi bir kısmen sıralı kümedir ve $x \circ y = \inf\{x, y\}$ dir.

Teorem 7: L1, L2, L3, L4 özelliklerini sağlayan herhangi ikili işlemli bir L kümesi kafestir ve terside doğrudur.

Teorem 8: L bir kafes olsun. L içinde aşağıdakiler denktir.

$\forall x, y, z \in L$ için,

L_D) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$L_{D'}$) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Tanım 12: *Teorem 8* in denk koşullarından birisini sağlayan bir kafese *dağılmalı(dağılımlı) kafes* denir. Bu şartı L6 ile gösterelim.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, aşağıdaki sonuçtan dolayı dağılmalı kafestir.

Lemma 7: Herhangi bir zincir dağılmalı kafestir. Herhangi dağılmalı kafesin duali ve herhangi alt kafesi de dağılmalıdır. Ayrıca dağılmalı kafeslerin herhangi direkt çarpımı da dağılmalıdır.

Teorem 9: L bir dağılmalı kafes olsun. Herhangi $x, y, c \in L$ için $c \wedge x = c \wedge y$ ve $c \vee x = c \vee y$ ise $x = y$ dir.

Tanım 13: L bir kafes olsun. L kafesine *modüler kafes* denir $:\Leftrightarrow$

$\forall x, y, z \in L$ için $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Bu özelliği L5 ile gösterelim.

Açıkça, $x \leq z$ olduğunda $z = x \vee z$ olduğundan, L_D kuralında yerine yazılırsa bu takdirde her dağılmalı kafes L5 özelliğini sağlar. Yani her dağılmalı kafes modülerdir.

Fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin *Şekil 1* deki M_5 kafesi modüler olmasına rağmen dağılmalı değildir.

Teorem 10: Herhangi bir *G* grubunun normal alt gruplarının kafesi bir modüler kafestir.

Teorem 11: Herhangi modüler olmayan kafes, *Şekil 1* deki N_5 kafesini alt kafes olarak içerir.

Tanım 14: L sınırlı bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. y elemanına x elemanının *komplementi* denir:$\Leftrightarrow$ $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y = 1$.

Eğer y elemanı x elemanının komplementi ise $y = x'$ ile gösterilir.

Tanım 15: L bir kafes olsun. L kafesine *komplementli kafes* denir:$\Leftrightarrow$ L kafesindeki her eleman bir komplemente sahiptir.

Örnek: *Şekil 1* de verilen M_5 kafesi bir komplementli kafestir.

Tanım 16: L bir kafes olsun. L kafesine *Bool Kafesi* denir:$\Leftrightarrow$ L kafes dağılmalı ve komplementli bir kafestir.

Teorem 9 ile, herhangi dağılmalı kafeste, komplementi mevcut olan elemanlar için komplementler tektir.

Teorem 12: L bir bool kafesi olsun. Bu takdirde her $x \in L$ elemanı bir tek x' komplementine sahiptir ve üstelik:

$\forall x, y \in L$ için,

L7) $x \wedge x' = 0, x \vee x' = 1$

L8) $(x')' = x$

L9) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

Tanım 17: L bir kafes olsun. L ye bir *Bool cebri* denir:$\Leftrightarrow$ L kafesi $\wedge, \vee, '$ işlemleri ile $L1 - L9$ özelliklerinin tamamını sağlar.

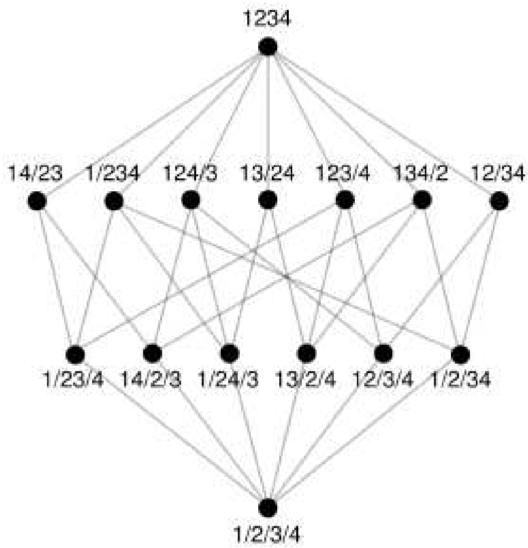
Bir A bool cebrinin bir U alt cebri, herhangi $x, y \in U$ elemanları için $x \wedge y, x \vee y, x' \in U$ olacak şekilde boştan farklı bir alt kümedir.

Teorem 13: L sınırlı bir dağılmalı kafes olsun. Bu takdirde L' nin komplementli elemanlarının kümesi bir alt kafes şeklindedir.

Tanım 18: L sınırlı bir kafes olsun.

i) $x \in L$ elemanına bir *atom* denir:$\Leftrightarrow$ $x \in L$, $L - \{0\}$ kümesinin bir minimal elemanıdır.

ii) $x \in L$ elemanına bir *koatom* denir:$\Leftrightarrow$ $x \in L$, $L - \{1\}$ kümesinin bir maksimal elemanıdır.



Şekil 2. Atomlar ve koatomlar

Yukarıda Hasse diyagramı ile verilen kafeste $1/23/4$, $14/2/3$, $1/24/3$, $13/2/4$, $12/3/4$, $1/2/34$ elemanları atom tanımı ile açıkça atom, $14/23$, $1/234$, $124/3$, $13/24$, $123/4$, $134/2$, $12/34$ elemanları ise koatom tanımına göre birer koatomdur.

Tanım 19: L bir tam kafes ve $\{a, x_j \in L\ ,\ j \in J\}$ kümesi L nin bir alt kümesi olsun. $a \in L$ elemanına *kompakt eleman* denir:$\Leftrightarrow$ $F \subseteq J$ sonlu alt kümesi için $a \leq \bigvee_J x_j$ den $a \leq \bigvee_F x_j$ elde edilir.

Tanım 20: L bir tam kafes olsun. L kafesine *cebirsel kafes* denir:$\Leftrightarrow$ L kafesinin her elemanı, kompakt elemanların bir supremumu şeklinde yazılabilir.

1.3. Üçgensel Normlar

1.3.1. Temel Tanım ve Özellikler

1.3.1.1. Üçgensel Normlar (t-normlar)

Tanım 21[7, 25, 26]**:** Bir üçgensel norm (kısaca t-norm), bir L sınırlı kafesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde bir T ikili işlemidir. Yani $\forall x, y, z \in L$ için aşağıdaki özellikleri sağlayacak bir $T : L \times L \to L$ fonksiyonudur:

(T-1) $T(x, y) = T(y, x)$ *(değişme)*

(T-2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ *(asosyatiflik)*

(T-3) $y \le z \Rightarrow T(x, y) \le T(x, z)$ *(monotonluk)*

(T-4) $T(x,1) = x$ *(birim eleman)*

Örnek: Aşağıda sırasıyla $[0,1]^2 \to [0,1]$ üzerinde T_M, T_P, T_L, T_D ile verilen fonksiyonlar birer t-normdur:

$$T_M(x, y) = \min(x, y)$$
$$T_P(x, y) = x \cdot y$$
$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$$
$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) \in [0,1[^2 \\ \min(x, y) & , \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Ayrıca sınırlı keyfi L kafesi üzerinde T_M ve T_D aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T_M(x, y) = x \wedge y$$
$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) \in (L - \{1\})^2 \\ x \wedge y & , \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Uyarı 1[26]**:** L sınırlı bir kafes ve $T : L^2 \to L$ keyfi bir t-norm olsun.

i) *Tanım 21* ile $\forall x \in L$ için aşağıdaki sınır şartları sağlanır:

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0 \qquad (2.1)$$

$$T(1, x) = x \qquad (2.2)$$

Çünkü T nin monotonluğu ve birim eleman özelliği kullanılırsa:

$T(x, 0) \le T(1, 0) = 0$ olduğundan $T(x, 0) = 0$ bulunur. T-1 değişme özelliğinden diğer özellikler açıkça sağlanır.

ii) Bir T t-normunun, (T-3) ile tanımlanan ikinci bileşenine göre monotonluğu, (T-1) değişmelilik ile birlikte her iki bileşenine göre monotonluğuna eşdeğerdir yani aşağıdaki şartı sağlar:

$$x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2) \qquad (2.3)$$

Tanım 22[19]**:** T_1 ve T_2 iki t-norm olsun.

i) T_1, T_2 *den zayıf* veya T_2, T_1 *den güçlü* denir:$\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in L^2$ için $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$. Bu durumda $T_1 \leq T_2$ yazılır.

ii) $T_1 \leq T_2$ ve $T_1 \neq T_2$ ise yani $T_1 \leq T_2$ ve bir $(x_0, y_0) \in L^2$ için $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ ise $T_1 < T_2$ yazılır.

Uyarı 2: T keyfi bir t-norm ve L sınırlı bir kafes olsun. (2.3) ün bir sonucu olarak $\forall (x, y) \in L^2$ için $T(x, y) \leq T(x,1) = x$ ve

$T(x, y) \leq T(1, y) = y$ olduğundan $T(x, y) \leq x \wedge y = T_M(x, y)$.

Ayrıca $\forall (x, y) \in (L - \{1\})^2$ için $T(x, y) \geq 0 = T_D(x, y)$. Sonuç olarak keyfi t-norm için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$T_D \leq T \leq T_M \qquad (2.4)$$

Tanım 23: L sınırlı bir kafes olmak üzere bir $F : L^2 \to L$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in L$ için (T-1), (T-2), (T-3) şartlarını ve ayrıca $\forall x, y \in L$ için $F(x, y) \leq x \wedge y$ koşulunu sağlıyor ise, bu takdirde F ye bir *t-altnorm* denir. Her t-norm t-altnormdur fakat tersi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek[19]**:** $F : [0,1]^2 \to [0,1], F(x, y) := 0$ ile tanımlı fonksiyon açıkça bir t-altnormdur. Fakat $F(x,1) = 0 \neq x$ olduğundan, F $[0,1]$ üzerinde bir t-norm değildir.

Sonuç: Eğer L sınırlı bir kafes ve F bir t-altnorm ise, bu takdirde aşağıda tanımlanan $T : L^2 \to L$ fonksiyonu bir t-normdur:

$$T(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & , (x, y) \in (L - \{1\})^2 \\ x \wedge y & , \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Önerme 1: L sınırlı bir kafes olsun.

i) $\forall x \in L$ için $T(x, x) = x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minimum t-normdur.

ii) Eğer L tam sıralı ise $\forall x \in L - \{1\}$ için $T(x, x) = 0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_D drastik çarpımıdır.

İspat:

i) T, $\forall x \in L$ için $T(x,x)=x$ eşitliğini sağlayan keyfi bir t-norm olsun. *Uyarı 2* den dolayı $\forall (x,y)\in L^2$ için $T(x,y)\le T_M(x,y)$.

$\forall (x,y)\in L^2$ için $T(x\wedge y, x\wedge y)=x\wedge y=T_M(x,y)\le T(x,y)$ olur. Bu durumda, $\forall (x,y)\in L^2$ için $T(x,y)=T_M(x,y)$ elde edilir.

ii) Açıktır ■

1.3.1.2. Üçgensel Konormlar (t-konormlar)

Tanım 24[19, 25, 27]**:** Sınırlı bir L kafesi üzerinde $\forall x,y,z\in L$ için daha önce verilen (T-1), (T-2), (T-3) özellikleri ve aşağıda verilen (S-4) özelliğini sağlayan $S: L^2\to L$ fonksiyonuna bir *üçgensel konorm(t-konorm)* denir.

(S-4) $S(x,0)=x$ *(birim eleman)*

Örnek[19]**:** $[0,1]$ birim aralığı üzerinde S_M, S_P, S_L ve S_D temel t-konormları sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir:

$$S_M(x,y)=\max(x,y)$$
$$S_P(x,y)=x+y-x\cdot y$$
$$S_L(x,y)=\min(x+y,1)$$
$$S_D(x,y)=\begin{cases}1 & ,(x,y)\in]0,1[^2\\ \max(x,y) & ,\text{aksi takdirde}\end{cases}$$

L sınırlı bir kafes olmak üzere S_M ve S_D aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$S_M(x,y)=x\vee y$$
$$S_D(x,y)=\begin{cases}1 & ,(x,y)\in (L-\{0,1\})^2\\ x\vee y & ,\text{aksi takdirde}\end{cases}$$

Önerme 2[19]**:** $[0,1]$ birim aralığı üzerinde $S:[0,1]^2\to[0,1]$ fonksiyonunun bir t-konorm olması için gerek ve yeter koşul $\forall (x,y)\in[0,1]^2$ için

$$S(x,y)=1-T(1-x,1-y) \qquad (2.5)$$

olacak şekilde bir T t-normunun mevcut olmasıdır. Burada verilen S t-konormuna T nin dual t-konormu denir. Benzer şekilde $\forall(x,y)\in[0,1]^2$ için

$$T(x,y)=1-S(1-x,1-y) \qquad (2.6)$$

ile verilen T t-normuna S nin dual t-normu denir.

Uyarı 3[26]**:** L sınırlı bir kafes olsun.

i) $\forall x\in L$ için $S(1,x)=S(x,1)=1$ dir.

ii) Eğer T_1 ve T_2 t-normları için $T_1\le T_2$ ve S_1 ve S_2, T_1 ve T_2 ye karşılık gelen dual t-konormlar iseler bu takdirde $S_2\le S_1$ dir. Sonuç olarak her S t-konorm için $S_M\le S\le S_D$ dir. Yani S_M maksimum en zayıf, S_D drastik toplama en güçlü t-konormdur.

Tanım 25: L sınırlı bir kafes ve $T:L^2\to L$ bir t-norm olsun.

Bir a elemanına *idempotent eleman* denir:$\Leftrightarrow$ $a\in L$ elemanı $T(a,a)=a$ koşulunu sağlar.

Her t-norm T nin idempotentleri olan 0 ve 1 elemanlarına T nin *trivial idempotent elemanları* denir.

Örnek: L sınırlı bir kafes olmak üzere $\forall a\in L$ elemanı, T_M minimum t-normun bir idempotent elemanıdır. Gerçekten *Önerme 1* ile idempotent elemanlar kümesi L kafesine eşit olan tek t-norm T_M minimumdur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Tam Kafesler Üzerinde Negasyonlar, Sonsuz $\vee$ – dağılmalı Üçgensel Normlar ve *Pseudo* Komplementler

Bu bölümde, şimdiye kadar bazı özelliklerini verdiğimiz t-normların özel bir durumu üzerinde bir takım çalışmalar yapacağız. Bu bölümde, aksi söylenmedikçe bütün kafesler tam kafes olarak düşünülecektir.

2.1.1. Negasyonlar

Tanım 26[15, 25]**:** L bir tam kafes olsun. $n : L \to L$ fonksiyonu bir *negasyon* denir:⇔

i) $n(0) = 1$, $n(1) = 0$;

ii) $a, b \in L$ için $a \le b$ ise $n(b) \le n(a)$.

Tanım 27[15, 25]**:** L bir tam kafes olsun. $n : L \to L$ fonksiyonu bir *güçlü negasyon* denir:⇔

(N1) $\forall a \in L$ için $n(n(a)) = a$;

(N2) $a, b \in L$ için $a \le b$ ise $n(b) \le n(a)$.

Teorem 14[25]**:** L bir tam kafes ve $\{a_j \in L, j \in J\}$ L nin bir alt kümesi olsun. Eğer n, L üzerinde bir güçlü negasyon ise, bu takdirde aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

i) $n(\bigvee_{j\in J} a_j) = \bigwedge_{j\in J} n(a_j)$

ii) $n(\bigwedge_{j\in J} a_j) = \bigvee_{j\in J} n(a_j)$

İspat:

L bir tam kafes ve n, L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. *Tanım 26* dan dolayı, $a_j \le \bigvee_{j\in J} a_j$ olduğundan $n(a_j) \ge n\left(\bigvee_{j\in J} a_j\right)$ ve $n(\bigvee_{j\in J} a_j) \le \bigwedge_{j\in J} n(a_j)$ dir ve

$n(\bigwedge_{j\in J} a_j) = n\left(\bigwedge_{j\in J} n(n(a_j))\right) \ge \bigvee_{j\in J} n(a_j)$ bulunur. Sonuç olarak,

$n\left(\bigwedge_{j\in J} n(a_j)\right) \geq \bigvee_{j\in J} a_j$ olur ve buna bağlı olarak $n(\bigvee_{j\in J} a_j) \geq n\left(n(\bigwedge_{j\in J} n(a_j))\right) = \bigwedge_{j\in J} n(a_j)$ çıkar. Buradan $n(\bigvee_{j\in J} a_j) = \bigwedge_{j\in J} n(a_j)$ olduğu elde edilmiş olur. Benzer şekilde $n(\bigwedge_{j\in J} a_j) = \bigvee_{j\in J} n(a_j)$ eşitliği gösterilir ■

Teorem 15: L bir tam kafes, $T: L^2 \to L$ bir t-norm ve $n: L \to L$ bir güçlü negasyon olsun. $S(x,y) = n(T(n(x), n(y)))$ ile tanımlı $S: L^2 \to L$ fonksiyonu bir t-konormdur.

İspat: L bir tam kafes, $T: L^2 \to L$ bir t-norm ve $n: L \to L$ bir güçlü negasyon olsun. Herhangi $x, y, z \in L$ için:

(T – 1) $S(x,y) = n\left(T(n(x), n(y))\right) = n\left(T(n(y), n(x))\right) = S(y,x)$

(T – 2) $S(x, S(y,z)) = n\left(T(n(x), n(S(y,z)))\right)$

$= n\left(T(n(x), n(n\left(T(n(y), n(z))\right)))\right)$

$= n\left(T(n(x), T(n(y), n(z)))\right)$, n güçlü olduğundan;

$= n\left(T(T(n(x), n(y)), n(z))\right)$, T bir t – norm olduğundan.

$S(S(x,y), z) = n\left(T(n(S(x,y)), n(z))\right)$

$= n\left(T(n(n\left(T(n(x), n(y))\right)), n(z))\right)$

$= n\left(T(T(n(x), n(y)), n(z))\right)$, n güçlü olduğundan.

$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$ olduğu bulunur ve böylece S birleşme özelliğini sağlar.

(T – 3) $y \leq z$ olsun. n bir güçlü negasyon olduğundan $n(z) \leq n(y)$ dir.

$\Rightarrow$ T bir t – norm olduğundan, $T(n(x), n(z)) \leq T(n(x), n(y))$

$\Rightarrow$ n güçlü olduğundan, $n\left(T(n(x), n(y))\right) \leq n\left(T(n(x), n(z))\right)$........(#)

(#) ile, $S(x,y) = n\left(T(n(x), n(y))\right) \leq n\left(T(n(x), n(z))\right) = S(x,z)$

Yani $S(x,y) \leq S(x,z)$ olup S monotondur.

(S – 4) $S(x,0) = n\left(T(n(x), n(0))\right)$

$= n\left(T(n(x), 1)\right)$, n güçlü olduğundan;

$= n\left(n(x)\right)$, T t – norm olduğudan;

$= x$

S birim eleman özelliğini sağlar. Bu durumda S nin bir t-konorm olduğu gösterilmiş olur ■

Yukarıda ispatlanan teoremdeki S t-konormuna, T nin dual t-konormu denir. Yukarıdakine benzer şekilde gösterilebilir ki, $T(x,y) = n\left(S(n(x), S(y))\right)$ şeklinde tanımlanan $T : L^2 \to L$ fonksiyonu bir t-normdur ve S t-konormunun dual t-normudur.

2.1.1.1. Çarpım Kafesleri Üzerinde Güçlü Negasyonların Direkt Parçalanması

Güçlü negasyonlar, tanım itibariyle t-normlar ve t-konormlar arasında genel bir De Morgan kuralı olmasını sağlar. Bu bölümde güçlü negasyonların direkt çarpımı ve direkt parçalanmalarını ele alacağız.

Önerme 3[15]**:** L bir tam kafes ve n, L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) Eğer x, L içinde bir atom ise, $n(x)$ L içinde bir koatomdur.

ii) Eğer x, L içinde bir koatom ise, $n(x)$ L içinde bir atomdur.

iii) $\Im$, L nin atomlarının, $\Re$ ise L nin koatomlarının kümesi olmak üzere $f : \Im \to \Re$, $x \mapsto n(x)$ dönüşümü 1 – 1 dir.

İspat:

i) $x \in L$ bir atom, $b \in L - \{1\}$ ve $n(x) < b$ olsun. n' nin bir güçlü negasyon olduğu kullanılırsa, $n(b) < n(n(x)) = x$ olur ki bu x' in atom olmasıyla çelişir. Bu durumda $n(x) < b$ olacak şekilde $b \in L - \{1\}$ mevcut değildir. Koatomun tanımından, $n(x)$ bir koatom olarak bulunur.

ii) $x \in L$ bir koatom, $a \in L - \{0\}$ ve $a < n(x)$ olsun. Bu durumda $n(a) > n(n(x)) = x$ olarak bulunur, bu ise x' in koatom olması ile çelişir. Bu durumda $n(x)$ bir atomdur.

iii) n, L üzerinde bir güçlü negasyon ve $x_1, x_2 \in \Im$ olsun. f nin iyi tanımlılığı (i) şıkkından açıktır. $f(x_1) = f(x_2)$ olsun.

$\Rightarrow n(x_1) = n(x_2)$

$\Rightarrow n(n(x_1)) = n(n(x_2))$, n' nin iyi tanımlılığından;

$\Rightarrow x_1 = x_2$

olur ki bu f nin 1 – 1 olduğunu gösterir ■

Verilen herhangi L tam kafesi üzerinde tanımlı, her zaman bir güçlü negasyon mevcut olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örnek incelenmelidir.

Örnek[15]**:** $L=\{0,x,y,z,1\}$, $0<x<z<1$, $0<y<z<1$ kafesi göz önüne alınsın. $x\wedge y=0$, $x\vee y=z$ olduğundan, L' nin atomlarının kümesi $\{x,y\}$ ve L' nin koaomlarının kümesi $\{z\}$ dir.

Varsayalım ki n, L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. Bu takdirde *Önerme 3 (iii)* ile bir $f:\{x,y\}\to\{z\}$ dönüşümü 1 – 1 olacak şekilde mevcut olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda L üzerinde bir güçlü negasyon tanımlanamaz ■

Aşağıda kafeslerin direkt çarpımının genel yapısı irdelenecektir. $L_1,L_2,...,L_n$ tam kafesler olsunlar. $L_1\times L_2\times...\times L_n$ kartezyen çarpımı üzerinde infimum ve supremum aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\Omega=\{x_\tau=(x_{1\tau},x_{2\tau},...,x_{n\tau}),\tau\in Q\}\subseteq L_1\times L_2\times...\times L_n$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{\tau\in Q} x_\tau=\left(\bigwedge_{\tau\in Q} x_{i\tau}\right)_{i\in\{1,2,...,n\}}$$

$$\bigvee_{\tau\in Q} x_\tau=\left(\bigvee_{\tau\in Q} x_{i\tau}\right)_{i\in\{1,2,...,n\}}$$

$L_1\times L_2\times...\times L_n$ kartezyen çarpımı, yukarıda tanımlanan infimum ve supremum ile bir tam kafes yapısındadır. Bu kafese, $L_1,L_2,...,L_n$ kafeslerinin *direkt çarpımı* denir.

Önerme 4[15]**:** L bir kafes, L_1 ve L_2 L' nin tam alt kafesleri, n_1 L_1 üzerinde, n_2 ise L_2 üzerinde güçlü negasyonlar olsunlar.

Kabul edelim ki her bir $x\in L$ için $x_1\in L_1, x_2\in L_2$ teklikle tanımlı olsun öyle ki $x=x_1\wedge x_2$. Bu takdirde aşağıdaki şekilde tanımlı $n:L\to L$ dönüşümü L üzerinde bir güçlü negasyondur.

$x=x_1\wedge x_2$ olduğunda $n(x):=n_1(x_1)\wedge n_2(x_2)$

İspat:

İlk olarak her $x\in L$ için $n(n(x))=x$ olduğunu göstermeliyiz. $x\in L$ keyfi olsun. Hipotez ile $x_1\in L_1, x_2\in L_2$, $x=x_1\wedge x_2$ ve $n(x)=n_1(x_1)\wedge n_2(x_2)$ olacak şekilde mevcuttur. n' nin tanımı ile,

$$n(n(x))=n(n_1(x_1)\wedge n_2(x_2))=n_1(n_1(x_1))\wedge n_2(n_2(x_2))=x_1\wedge x_2=x$$

elde edilir. Bu durumda (N1) sağlanmış olur.

$x, y \in L$ ve $x \leq y$ olsun. Bu takdirde

$x = x_1 \wedge x_2$ ve $y = y_1 \wedge y_2$, $x_1, y_1 \in L_1$, $x_2, y_2 \in L_2$. n’ nin tanımından,

$$n(y) = n_1(y_1) \wedge n_2(y_2) \leq n_1(x_1 \wedge y_1) \wedge n_2(x_2 \wedge y_2)$$
$$= n(x_1 \wedge y_1 \wedge x_2 \wedge y_2) = n(x \wedge y) = n(x)$$

elde edilir. (N2) sağlanmış olur. Bu ise n’ nin güçlü negasyon olduğunu gösterir ■

Tanım 28[15]**:** *Önerme 4* te inşa edilen güçlü negasyona n_1 ve n_2 negasyonlarının *iç direkt çarpımı* denir ve $n_1 \otimes n_2$ ile gösterilir.

Tanım 29[15, 16]**:** n bir L kafesi üzerinde, n^* ise bir M kafesi üzerinde birer güçlü negasyon olsunlar.

n ve n^* negasyonlarına *izomorftur* denir:$\Leftrightarrow$ her $a \in L$ için $H(n(a)) = n^*(H(a))$ olacak şekilde bir $H : L \to M$ kafes izomorfisi mevcuttur.

Önerme 5[15]**:** L_1, L_2 tam kafes, $L = L_1 \times L_2$ ve n, L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. Bu takdirde;

i) $n(0,1) = (1,0) \Leftrightarrow n(1,0) = (0,1)$

ii) $n(0,1) = (0,1) \Leftrightarrow n(1,0) = (1,0)$

İspat:

i) *Tanım 27* den açıktır.

ii) "$\Rightarrow$" $n(0,1) = (0,1)$ ve $n(1,0) = (k,t)$, $k \in L_1, t \in L_2$ olsun. *Teorem 14* ten dolayı

$$(0,0) = n(1,1) = n\big((1,0) \vee (0,1)\big) = n(1,0) \wedge n(0,1) = (k,t) \wedge (0,1) = (0,t)$$

$$(1,1) = n(0,0) = n\big((1,0) \wedge (0,1)\big) = n(1,0) \vee n(0,1) = (k,t) \vee (0,1) = (k,1)$$

Bu durumda $k = 1, t = 0$ olup $n(1,0) = (1,0)$

"$\Leftarrow$" Soldan sağa ispata tamamen benzer şekilde yapılır ■

Aşağıda verilecek teoremle, tam kafeslerin direkt çarpımları üzerindeki negasyonlar karakterize edilecektir:

Teorem 16[15]**:** L_1, L_2 iki tam kafes $L = L_1 \times L_2$ ve n, L üzerinde bir güçlü negasyon olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

i) $n(0,1) = (1,0)$ (veya $n(1,0) = (0,1)$);

ii) n, L_1 üzerinde tanımlı n_1 ve L_2 üzerinde tanımlı n_2 güçlü negasyonlarının direkt çarpımıdır.

iii) n, $L_1\times\{1\}$ üzerinde tanımlı bir n_1^* ve $\{1\}\times L_2$ üzerinde tanımlı bir n_2^* güçlü negasyonlarının iç direkt çarpımı şeklindedir.

İspat:

i) $\Rightarrow$ **ii):** $x_1\in L_1, a_{x_1}\in L_1$ ve $c_{x_1}\in L_2$ olmak üzere $n(x_1,1)=(a_{x_1},c_{x_1})$ olsun. $n(x_1,1)\le n(0,1)=(1,0)$ olduğundan $c_{x_1}=0$ dır ve buna bağlı olarak ise $n(x_1,1)=(a_{x_1},0)$ dır. Aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$n(x_1,1)=(a_{x_1},0)$ olduğunda $n_1:L_1\to L_1, n_1(x_1):=a_{x_1}$. n_1 iyi tanımlıdır.

Gerçekten, $x_1,y_1\in L_1, x_1=y_1$ olsun. $n(x_1,1)=(a_{x_1},0), n(y_1,1)=(a_{y_1},0)$ olduğunda, $x_1=y_1\Rightarrow(x_1,1)=(y_1,1)\Rightarrow n(x_1,1)=n(y_1,1)\Rightarrow a_{x_1}=a_{y_1}$. Şimdi herhangi $x_1\in L_1$ için $n_1(n_1(x_1))=x_1$ olduğunu gösterelim.

$n(x_1,1)=(a_{x_1},0)$ olduğunda $n_1(x_1)=a_{x_1}$ olduğunu biliyoruz. $(a_{x_1},1)>(a_{x_1},0)$ olduğundan $n(a_{x_1},1)<n(a_{x_1},0)=(x_1,1)$ …………(1)

Diğer taraftan $n(a_{x_1},1)=n(n_1(x_1),1)=\left(n_1\left(n_1(x_1)\right),0\right)$ olur. $n_1\left(n_1(x_1)\right)=k$ olarak alacak olursak, $(k,0)=n(a_{x_1},1)\overset{(1)}{<}(x_1,1)$ olur ve buradan $k\le x_1$ elde edilir.

$t\in L_1, m\in L_2$ için $n(x_1,0)=(t,m)$ olsun. $n(0,1)=(1,0)$ olduğundan *Önerme 5 (i)* ile $n(1,0)=(0,1)$ dir. Bu eşitliği kullanarak $(t,m)=n(x_1,0)\ge n(1,0)=(0,1)$ olur ve $m=1$ bulunur. Bu nedenle $n(x_1,0)=(t,1)$ olur. Diğer taraftan $n(x_1,0)>n(x_1,1)=(a_{x_1},0)$ ve bu yüzden $n(x_1,0)\ge(a_{x_1},1)$ …………(2). n' nin güçlülüğü kullanılırsa;

$$(x_1,0)=n\left(n(x_1,0)\right)\overset{(2)}{\le}n(a_{x_1},1)=(k,0)$$

Buradan $x_1\le k$ çıkar. Sonuç olark $x_1=k=n_1\left(n_1(x_1)\right)$ bulunur. Böylece (N1) gösterilmiş oldu.

$x_1,y_1\in L_1$ ve $x_1\le y_1$ olsun. $n_1(x_1)\ge n_1(y_1)$ olduğunu göstermeliyiz. $x_1\le y_1$ olduğundan $(x_1,1)\le(y_1,1)$ dir ve böylece $(a_{x_1},0)=n(x_1,1)\ge n(y_1,1)=(a_{y_1},0)$ dır. $n_1(x_1)=a_{x_1}\ge a_{y_1}=n_1(y_1)$ olur. Bu durumda (N2) sağlanır ve n_1 bir güçlü negasyondur. $n(1,0)=(0,1)$ eşitliği kullanılarak gösterilebilir ki, benzer şekilde L_2 üzerinde tanımlı n_2 dönüşümü de bir güçlü negasyondur.

$n = n_1 \times n_2$ olduğunu göstermek için $(x_1, y_1) \in L_1 \times L_2$ alındığında *Teorem 14* ile n_1 ve n_2 ' nin tanımı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} n(x_1, y_1) &= n\big((x_1,1) \wedge (1, x_2)\big) = n(x_1,1) \vee n(1, x_2) \\ &= (a_{x_1}, 0) \vee (0, b_{x_2}) = (a_{x_1}, b_{x_2}) \\ &= \big(n_1(x_1), n_2(x_2)\big) = n_1 \times n_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

ii)$\Rightarrow$iii): $n = n_1 \times n_2$ olsun. $L_1 \times \{1\}$ üzerinde $n_1^*(x_1,1) = \big(n_1(x_1),1\big)$ ile tanımlı n_1^* dönüşümü açıkça bir güçlü negasyondur. Benzer şekilde $\{1\} \times L_2$ üzerinde n_2^* güçlü negasyonu tanımlansın. $(x_1, y_1) \in L_1 \times L_2$ olmak üzere;

$$n(x_1, y_1) = \big(n_1(x_1), n_2(x_2)\big) = \big(n_1(x_1),1\big) \wedge \big(1, n_2(x_2)\big) = n_1^*(x_1,1) \wedge n_2^*(1, x_2)$$

olarak elde edilir. Bu ise $n = n_1^* \otimes n_2^*$ olduğunu gösterir.

iii)$\Rightarrow$i): n_1^* ve n_2^* sırasıyla $L_1 \times \{1\}$ ve $\{1\} \times L_2$ üzerinde güçlü negasyonlar oldukla-rından $n_1^*(0,1) = (1,1)$ ve $n_2^*(1,1) = (1,0)$ dır ve buna bağlı olarak;

$$n(0,1) = n_1^*(0,1) \wedge n_2^*(1,1) = (1,1) \wedge (1,0) = (1,0)$$

olarak elde edilir ■

Uyarı 4: Eğer *Önerme4* ün dualini kullanarak güçlü negasyonların başka bir iç çar-pımı oluşturulursa, *Teorem 16* daki sonuçların benzerleri elde edilir. Çünkü (i) ve (ii) şık-ları aynıdır. Fakat (iii) aşağıdaki şekilde değişir:

(iii) n, $L_1 \times \{0\}$ üzerinde tanımlı bir n_1' ve $\{0\} \times L_2$ üzerinde tanımlı bir n_2' güçlü negasyonlarının iç direkt çarpımı şeklindedir.

$L_1 \times \{1\}$ üzerindeki n_1^* güçlü negasyonu $L_1 \times \{0\}$ üzerinde tanımlı n_1' güçlü negasyonuna, $\{1\} \times L_2$ üzerindeki n_2^* güçlü negasyonu $\{0\} \times L_2$ üzerinde tanımlı n_2' güç-lü negasyonuna izomorf olduğundan *Önerme 4* veya onun duali ile işleyiş açısından hiçbir fark yoktur.

2.1.2. $\vee-$dağılmalı Üçgensel Normlar ve Pseudo Komplementler

Tanım 30[16, 17]**:** L bir kafes ve $T : L^2 \to L$ bir t-norm olsun. T t-normuna $\vee-$*da-ğılmalı t-norm* denir:$\Leftrightarrow$ her $x, y, z \in L$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$T(x, y \vee z) = T(x, y) \vee T(x, z)$$

Tanım 31[16, 17, 25, 26]**:** L bir tam kafes ve $T:L^2 \to L$ bir t-norm olsun. T t-normuna *sonsuz* $\vee -$ *dağılmalı t-norm* denir:$\Leftrightarrow$ L nin her $\{x, y_\tau \in L, \tau \in Q\}$ alt kümesi için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$T(x, \bigvee_{\tau \in Q} y_\tau) = \bigvee_{\tau \in Q} T(x, y_\tau)$$

Örnek[25]**:** $[0,1]$ birim aralığı üzerinde $T_L(a,b) = \max(a+b-1, 0)$ t-normu sonsuz $\vee -$ dağılmalı t-normdur.

Çözüm:

$\{a, b_\tau \in [0,1], \tau \in Q\}$ kümesi, $[0,1]$ aralığının keyfi bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $\bigvee_Q T_L(a, b_\tau) = \bigvee_Q \max(a+b_\tau - 1, 0) = \max(a + \bigvee_Q b_\tau - 1, 0) = T_L(a, \bigvee_Q b_\tau)$ elde edilir. Bu ise T_L t-normunun sonsuz $\vee -$ dağılmalı olduğunu gösterir ■

L bir tam kafes, $T:L^2 \to L$ bir t-norm olsun. Verilen herhangi $a, b \in L$ için $T(a,x) \le b$ olan bütün $x \in L$ elemanlarının kümesinin en büyük elemanı(eğer mevcut ise) $a \to_T b$ ile gösterilir.

Tanım 32[5]**:** L bir tam kafes, $T:L^2 \to L$ bir t-norm olsun. $a \in L$ olmak üzere $a \to_T 0$ elemanına $a \in L$ elemanının *pseudo-komplementi* (veya *annihilatörü*) denir ve a^* şeklinde gösterilir.

Tanım 33[5]**:** L bir kafes olsun. L kafesine bir *Brouwerian Kafesi* denir:$\Leftrightarrow$ verilen herhangi $a, b \in L$ için $a \wedge x \le b$ koşulunu sağlayan bütün $x \in L$ elemanlarının kümesi bir en büyük elemana sahiptir.

Teorem 17[5]**:** L bir tam kafes ve $T:L^2 \to L$ bir t-norm olsun.

T nin sonsuz $\vee -$ dağılmalı olması, yani $T(a, \bigvee x_\alpha) = \bigvee T(a, x_\alpha)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul, verilen herhangi $a, b \in L$ elemanları için $T(a,x) \le b$ olan bütün $x \in L$ elemanlarının kümesinin $a \to_T b$ en büyük elemanına sahip olmasıdır.

İspat:

L bir tam kafes ve $\{x_\alpha\}$ L nin herhangi alt kümesi ve $b = \bigvee T(a, x_\alpha)$ olsun. Supremumun tanımı ile her α için $T(a, x_\alpha) \le b$ dir. Bundan dolayı $x_\alpha \le a \to_T b$ dir ve supremum alınırsa $\bigvee x_\alpha \le a \to_T b$ olur.

Eşitsizlikte yerine yazılırsa, $T(a, a \to_T b) \le b$ bulunur yani $T(a, \bigvee x_\alpha) \le b = \bigvee T(a, x_\alpha)$ olduğunu elde ederiz. Ters eşitsizlik için, her α için $T(a, x_\alpha) \le T(a, \bigvee x_\alpha)$ olduğu T nin monotonluğu ve supremumun tanımından açıktır. Supremum alınırsa $\bigvee T(a, x_\alpha) \le T(a, \bigvee x_\alpha)$ olduğu elde edilir. Böylece istenen eşitlik gösterilmiş olur.

Tersine olarak verilen a ve b elemanları için yukarıdaki eşitlik herhangi bir L tam kafesinde sağlansın. $T(a, x_\alpha) \le b$ koşulunu sağlayan tüm $x_\alpha \in L$ elemanlarının kümesini $X = X(a, b)$ olarak tanımlayalım ve $a \to_T b = \bigvee_X x_\alpha$ olsun. Bu takdirde hipotezdeki eşitlik kullanılırsa, $T(a, a \to_T b) = T(a, \bigvee_X x_\alpha) = \bigvee_X T(a, x_\alpha) \le b$ bulunur ki bu, $a \to_T b \in X$ olduğunu gösterir ve böylece X kümesinin bir en büyük eleman içerdiği görülür. Açıkça $T(a, x) \le b$ dir ancak ve ancak $x \le a \to_T b$. Bundan dolayı $a \to_T b$ elemanı istenen en büyük eleman olarak bulunur ■

Uyarı 5: Eğer *Teorem 17* de $T = \wedge$ alınırsa aşağıdaki ifade doğrudur:

L bir tam kafes olsun. L nin her $\{a, b_\tau \in L, \tau \in Q\}$ altkümesi için $a \wedge (\bigvee_{\tau \in Q} b_\tau) = \bigvee_{\tau \in Q} (a \wedge b_\tau)$ olması için gerek ve yeter şart, verilen herhangi $a \wedge x \le b$ koşulunu sağlayan $x \in L$ elemanlarının kümesinin bir en büyük elemana sahip olmasıdır. Örnek olarak, L nin bir *Brouwerian Kafesi* olduğu durum göz önüne alınabilir.

İspat:

Teorem 17 nin ispatında $T = \wedge$ alındığında ispat tamamen benzer şekildedir■

2.1.3. T-asal Radikal Elemanlar

Tanım 34[17]**:** T, L kafesi üzerinde bir t-norm olsun.

i) Bir $p \in L - \{1\}$ elemanına *T-asal eleman* denir:$\Leftrightarrow$ $T(a, b) \le p$ olan her $a, b \in L$ için $a \le p$ veya $b \le p$ dir.

ii) $a \in L$ olmak üzere, a’ yı içeren T-asal elemanların kümesi boştan farklı ise, $R(a) := \wedge\{p \in L : p, T - \text{asal ve } a \le p\}$ elemanı tanımlansın.

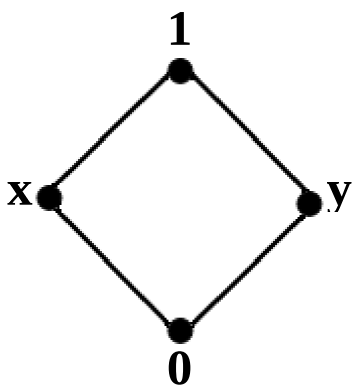
Eğer a’ yı içeren T-asal eleman yoksa $R(a)=1$ alınır. $R(a)$ elemanına, a elemanının *T-asal radikali* denir. L’ nin tüm asal radikal elemanlarının kümesi L_R ile gösterilir.

L’ nin birimi, L_R içerisinde de içerilir.

Uyarı 6: T, L kafesi üzerinde bir t-norm olmak üzere bir $T-$asal elemanın L_R kümesinin elemanı olacağı açıktır. Çünkü bir $p\in L$ $T-$asal eleman ise, onu içeren en küçük $T-$asal eleman kendisidir. Bu durumda $R(p)=p$ elde edilir ki bu $p\in L_R$ olduğunu gösterir.

Tersinin doğru olması gerekmez. Yani $R(a)=a$ olan her elemanın $T-$asal olması gerekmez. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek: Aşağıda Hasse Diyagramı ile verilen kısmen sıralı küme infimum işlemine göre açıkça bir tam kafestir.



Şekil 3. 0’ ın asal radikali

$T=\wedge$ alınırsa x ve y elemanları birer $T-$asal eleman olurlar. Çünkü $T(x,y)=x\wedge y\leq x$ için $x\leq x$ ve $T(x,y)=x\wedge y\leq y$ için $y\leq y$ olur.

$R(0)=\wedge\{p\in L : p, T-\text{asal ve } 0\leq p\}=\wedge\{x,y\}=0$ olduğundan $R(0)=0$ olarak bulunur. Fakat 0, $T-$asal eleman değildir.

Çünkü $T(x,y)=x\wedge y=0\leq 0$ olmasına rağmen $x\not\leq 0$ ve $y\not\leq 0$ dır ■

Önerme 6[17]**:** T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bazı elemanların asal radikalleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $a\leq R(a)$;

ii) $R(R(a))=R(a)$;

iii) $a\leq b$ ise $R(a)\leq R(b)$.

İspat:

i) Eğer a' yı içeren tüm T-asal elemanların kümesi boştan farklı ise, bu takdirde her $p \in \{p \in L : p, T - \text{asal ve } a \leq p\}$ için $a \leq p$ olduğundan;

$a \leq \wedge\{p \in L : p, T - \text{asal ve } a \leq p\} = R(a)$ dır.

Eğer a' yı içeren asal eleman yoksa zaten $R(a) = 1$ olarak tanımlandığından, $a \leq R(a)$ elde edilir.

ii) (i) den $R(a) \leq R(R(a))$ olduğu açıktır. Tersine olarak;

$R(a) = \wedge\{p \in L : p, T - \text{asal ve } a \leq p\}$,

$R(R(a)) = \wedge\{q \in L : q, T - \text{asal ve } R(a) \leq q\}$ için

$K := \{p \in L : p, T - \text{asal ve } a \leq p\}$ ve $L := \{q \in L : q, T - \text{asal ve } R(a) \leq q\}$ olarak tanımlayalım.

$p \in K$ keyfi alalım. $R(a) = \inf K$ olduğundan $R(a) \leq p$ dir. p, T – asal ve $R(a) \leq p$ olduğundan L nin tanımı ile $p \in L$ dir. Bu durumda $K \subseteq L$ dir. O halde $\inf L \leq \inf K$ dır. Bu ise $R(R(a)) \leq R(a)$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $R(R(a)) = R(a)$ olduğu elde edilir.

iii) $R(a)$ nın tanımı, i ve ii şıkları kullanılırsa ispat açıktır ■

Tanım 35[17]**:** T, L kafesi üzerinde bir t- norm olsun. Bir $p \in L - \{1\}$ elemanına *T-yarıasal eleman* denir:⇔ $T(a, a) \leq p$ olan her $a \in L$ için $a \leq p$ dir.

Eğer p, T-asal eleman ise p' nin T-yarıasal eleman olduğu açıktır.

Eğer $R(0) = 0$ ise açıkça 0, bir T-yarıasal elemandır.

Önerme 7: T, L kafesi üzerinde bir t-norm, 0 bir T-yarıasal eleman ve $x, y \in L$ olsun. Bu takdirde $T(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x \wedge y = 0$ olmasıdır.

İspat:

$T(x, y) = 0$ olsun.

Bu takdirde $T(x \wedge y, x \wedge y) \leq T(x, y) = 0$ dır. 0 bir T-yarıasal eleman olduğundan $x \wedge y = 0$ dır.

Tersine olarak $x \wedge y = 0$ olsun. $T(x, y) \leq x \wedge y = 0$ olduğundan $T(x, y) = 0$ dır ■

Önerme 8[17]**:** L bir tam kafes ve T sonsuz $\vee -$dağılmalı bir t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler doğrudur:

i) $T(x^*, x) = 0$

ii) $T(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x \le y^*$

iii) $x \le y$ ise $y^* \le x^*$

iv) $x \le x^{**}$

v) $x \le y^*$ ancak ve ancak $y \le x^*$

vi) $x^* = x^{***}$

vii) $(\bigvee_{\alpha\in\Delta} x_\alpha)^* = \bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha{}^*$

viii) Eğer 0 T- yarıasal eleman ise, bu takdirde $(T(x, x))^* = x^*$.

İspat:

i) $x^* = x \to_T 0 = \text{E.b.e.}\{a \in L : T(x, a) = 0\}$

$x^* \in \{a \in L : T(x, a) = 0\}$ olduğundan $T(x, x^*) = 0$

ii) $T(x, y) = 0$ olsun. Bu durumda $T(y, x) = 0$. O halde $x \in \{b \in L : T(y, b) = 0\}$.

$y^* = \text{E.b.e.}\{b \in L : T(y, b) = 0\}$ olduğundan $x \le y^*$ dır.

Tersine olarak $x \le y^*$ olsun. (i) şıkkı ve T nin monotonluğu kullanılırsa:

$0 = T(y^*, y) \ge T(x, y)$ olduğundan $T(x, y) = 0$ olarak bulunur.

iii) $x \le y$ olsun. T nin monotonluğu ile $0 = T(y^*, y) \ge T(y^*, x) = T(x, y^*)$. O halde $T(x, y^*) = 0$ olduğundan $y^* \in \{a \in L : T(x, a) = 0\}$. Bu durumda $y^* \le x^*$.

iv) $x \in L$ olsun. $x^{**} = x^* \to_T 0 = \text{E.b.e.}\{a \in L : T(x^*, a) = 0\}$.

$T(x^*, x) = 0$ olduğundan $x \in \{a \in L : T(x^*, a) = 0\}$.

Öte yandan $x^{**} = \text{E.b.e.}\{a \in L : T(x^*, a) = 0\}$ olduğundan $x \le x^{**}$ dır.

v) $x \le y^*$ olsun. T nin monotonluğu ile $0 = T(y, y^*) \ge T(y, x) = T(x, y)$. Bu durumda $T(x, y) = 0$. x^* ın tanımı ile $y \in \{a \in L : T(x, a) = 0\}$. Bu ise $y \le x^*$ olduğunu gösterir.

vi) (iv) den $x^* \le x^{***}$ ....(1) dır. Öte yandan T nin monotonluğu ve (iv) kullanılırsa $0 = T(x^{***}, x^{**}) \ge T(x^{***}, x)$. Bu durumda $x^{***} \le x^*$ ....(2) bulunur. (1) ve (2) den eşitlik elde edilir.

vii) $\beta \in \Delta$, Δ indis kümesinden bir eleman olsun. (iii) ile, $x_\beta \le \bigvee_{\alpha\in\Delta} x_\alpha$ olduğundan $(\bigvee_{\alpha\in\Delta} x_\alpha)^* \le x_\beta^*$ ve buna bağlı olarak $(\bigvee_{\alpha\in\Delta} x_\alpha)^* \le \bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^*$ ………(3) elde edilir.

Tersine olarak T, sonsuz $\vee-$dağılmalı olduğundan $T(\bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^*, \bigvee_{\beta\in\Delta} x_\beta) = \bigvee_{\beta\in\Delta}(T(\bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^*, x_\beta))$ dır. Fakat $T(\bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^*, x_\beta) \le T(x_\beta^*, x_\beta) = 0$ olduğundan $T(\bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^*, x_\beta) = 0$ dır. Bu durumda $T(\bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^*, \bigvee_{\beta\in\Delta} x_\beta) = \bigvee_{\beta\in\Delta}(T(\bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^*, x_\beta)) = \bigvee_{\beta\in\Delta} 0 = 0$. O halde $\bigwedge_{\alpha\in\Delta} x_\alpha^* \le (\bigvee_{\beta\in\Delta} x_\beta)^*$ ………(4). Sonuç olarak (3) ve (4) ten eşitlik elde edilir.

viii) $x \in L$ olsun. $T(x,x) \le x$ olduğundan (iii) ile $x^* \le (T(x,x))^*$ …(5). $T(T(x,x)^*, x) = a$ olsun. Buradan $T(a,a) \le (T(x,x))^*$ elde edilir. $a \le x$ olduğundan $T(a,a) \le T(x,x)$. Buna bağlı olarak, $T(T(a,a), T(a,a)) \le T(T(x,x), T(x,x)^*) = 0$. Bu ise $T(T(a,a), T(a,a)) = 0$ olduğunu gösterir. O halde, 0 T-yarıasal eleman olduğundan $T(a,a) = 0$ ve $a = 0$. Bu takdirde $T(T(x,x)^*, x) = 0$ dır ve $(T(x,x))^* \le x^*$ …(6) elde edilir. (5) ve (6) dan istenen eşitlik bulunur ■

Önerme 9[17]**:** L bir sınırlı kafes ve T, $\forall x \in L - \{0,1\}$ için $x^* = x$ olan bir $\vee-$dağılmalı t-norm olsun. Bu takdirde $|L| \le 3$ tür ve $T = T_D$ dir.

İspat:

$\forall x \in L - \{0,1\}$ için $x^* = x$ olduğundan $T(x,x) = 0$ dır. Öte yandan $x \vee y = 1$ olacak şekilde $x, y \in L - \{0,1\}$ mevcut değildir.

Çünkü eğer mevcut olsa, $x = T(x,1) = T(x, x\vee y) = T(x,x) \vee T(x,y) = T(x,y) \le y$ dir ve bu durumda:

$1 = x \vee y = y$ olur ki bu $y \in L - \{0,1\}$ olması ile çelişir. O halde $\forall x, y \in L - \{0,1\}$ için $T(x,y) \le T(x\vee y, x\vee y) = 0$. Bu ise $T = T_D$ olduğunu gösterir.

Varsayalım ki $|L| \ge 4$ olsun. $x \in L - \{0,1\}$ keyfi alalım. $\forall y \in L - \{0,x,1\}$ için $T(x, x\vee y) = T(x,x) \vee T(x,y) = 0$ ve sonuç olarak $x \vee y \le x^* = x$ tir ve buradan $y < x$ çıkar. Bu durumda x bir koatomdur.

Benzer şekilde y bir koatomdur. Sonuç olarak x ve y birer koatom olduğundan, $x, y \in L - \{0,1\}$ bulduk öyle ki $x \vee y = 1$. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $|L| \le 3$ ve $T = T_D$ dir ■

2.1.4. Bazı Tam Kafesler Üzerinde Sonsuz $\vee -$Dağılmalı T-normlar

2.1.4.1. L_R Tam Kafesi Üzerinde Sonsuz $\vee -$ dağılmalı T-normlar

Önerme 10[17]**:** L bir sınırlı kafes olmak üzere, L_R kümesi bir tam kafestir.

İspat:

$1 \in L_R$ olduğu açıktır. K bir indis kümesi olmak üzere $\{a_\tau : \tau \in K\} \subseteq L_R$ keyfi bir alt küme olsun. $a := \bigwedge_{\tau \in K} a_\tau \in L_R$ olduğunu göstermeliyiz.

Önerme 6 (i) ile biliyoruz ki, $a \le R(a) = \wedge\{p \in L : p, T-\text{asal ve } a \le p\}$. Q_τ bir indis kümesi olmak üzere $a_\tau \in L_R$ olduğundan $\forall \tau \in K$ için;

$a_\tau = R(a_\tau) = \wedge\{p_{\gamma\tau} \in L : p_{\gamma\tau}, T-\text{asal ve } a_\tau \le p_{\gamma\tau}; \gamma \in Q_\tau\}$. Bu durumda;

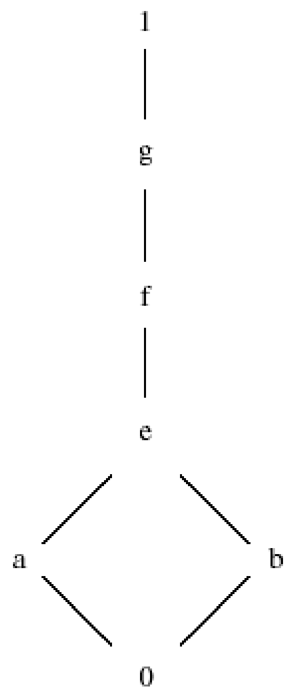
$a = \bigwedge_{\tau \in K} a_\tau = \bigwedge_{\tau \in K} \Big(\bigwedge_{\substack{a_\tau \le p_{\gamma\tau} \\ \gamma \in Q_\tau}} p_{\gamma\tau} \Big) = \bigwedge_{\tau \in K} \bigwedge_{\gamma \in Q_\tau} p_{\gamma\tau}$ ve $a \le a_\tau \le p_{\gamma\tau}$. Yani $\gamma \in Q_\tau, \tau \in K$ için $a \le p_{\gamma\tau}$ olduğunu elde ettik. O halde $p_{\gamma\tau} \in \{p \in L : p, T-\text{asal ve için } a \le p\}$.

Buna bağlı olarak $R(a) = \wedge\{p \in L : p, T-\text{asal ve } a \le p\} \le \bigwedge_{\tau \in K} \bigwedge_{\gamma \in Q_\tau} p_{\gamma\tau} = \bigwedge_{\tau \in K} a_\tau = a$ ve sonuç olarak $R(a) = a$ olduğunu göstermiş olduk. Bu da gösterir ki $a = \bigwedge_{\tau \in K} a_\tau \in L_R$ dir ve L_R bir tam kafestir ■

Uyarı 7: *Önerme 10* ile, L ve L_R kümeleri üzerindeki infimumlar çakışır. Fakat supremumlar çakışmayabilir. L_R üzerindeki supremumu $\cup$ ile gösterelim.

$\forall \{a_\tau : \tau \in Q\} \subseteq L$ için $\bigvee_Q a_\tau \le \bigcup_Q a_\tau$ olduğunu biliyoruz. Gerçekten, $a_\tau \le \bigcup_Q a_\tau$ olduğundan, $\bigvee_Q a_\tau \le \bigcup_Q a_\tau$ dur. Fakat $\bigcup_Q a_\tau \le \bigvee_Q a_\tau$ eşitsizliği doğru olmayabilir. Bu nedenle L_R, L nin bir tam alt kafesi olmayabilir.

Örneğin, $L = \{0, a, b, e, f, g, 1\}$ kafesi göz önüne alınsın. Bu kafes, Hasse diyagramı ile *Şekil 4* te gösterilmiştir.



Şekil 4. Supremumların Farklılığı

Aşağıdaki gibi bir t- norm tanımlayalım.

$$T(x,y)=\begin{cases} e & , x=f \text{ ve } y=f \\ x\wedge y & , \text{diğer durum} \end{cases}$$

Değişmelilik ve monotonluk kolayca gösterilir. $\forall x\in L$ için $T(x,1)=x\wedge 1=x$ olduğundan 1 birim elemandır.

Asosyatiflik için $\forall x,y,z\in L$, $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$ eşitliği gösterilmelidir. $x,y,z\in L-\{f\}$ alındığında, infimumun asosyatifliğinden $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$ eşitliği sağlanır. Eğer x,y,z f ye eşit olursa eşitlik trivialdir.

x,y,z den sadece ikisi f ye eşit olsun. $x=y=f$ olsun. Eğer $z>f$ olsa, her ikisi de e ye eşit olur. Eğer $z\leq e$ olsa her ikisi de z ye eşit olur.

x,y,z den birisi f ye eşit olsun. Kabul edelim ki $x=f$ olsun. Bu takdirde her ikisi de $f\wedge y\wedge z$ ye eşit olur.

a ve b T-asal elemanlar olduklarından $a,b\in L_R$ dir. Fakat $a\vee b=e\notin L_R$ dir. Çünkü $T(f,f)=e\leq e$ ama $f\not\leq e$ dir.

Bu nedenle e, T-asal eleman değildir ve bundan dolayı e, e de içerilen T-asal elemanların bir infimumu olarak yazılamaz. Sonuç olarak $e=a\vee b<a\cup b=1, 1\in L_R$ ■

Not: $T \downarrow L_R$ simgesi, T nin L_R ye kısıtlanmasını ifade eder.

Önerme 11[17]**:** T, L üzerinde bir t-norm olsun. Bu takdirde her $a, b \in L_R$ için $R(T(a,b)) = R(a) \wedge R(b)$ dir.

İspat:

K bir indis kümesi ve p_τ bir T-asal eleman öyle ki $\forall \tau \in K$ için $T(a,b) \le p_\tau$ olmak üzere, $R(T(a,b)) = \bigwedge_{\tau \in K} p_\tau$ olsun. p_τ T-asal eleman olduğundan $a \le p_\tau$ veya $b \le p_\tau$ dur. Bu durumda $R(a) \le p_\tau$ veya $R(b) \le p_\tau$ dur. Sonuç olarak $\forall \tau \in K$ için $R(a) \wedge R(b) \le p_\tau$ ve buna bağlı olarak $R(a) \wedge R(b) \le \bigwedge_{\tau \in K} p_\tau = R(T(a,b))$.

Tersine olarak, $\forall \tau \in K$ için $T(a,b) \le p_\tau$ olduğundan *Önerme 6 (iii)* den açıkça $R(T(a,b)) \le R(a) \wedge R(b)$ dir ve bu durumda istenen eşitlik elde edilir ■

Teorem 18[17]**:** $\forall a, b \in L_R$ için $T(a,b) \in L_R$ olsun. Bu takdirde $T \downarrow L_R$, L_R üzerinde bir sonsuz $\cup -$dağılmalı t-normdur.

İspat:

Önerme 11 ile her $a, b \in L$ için $R(T(a,b)) = R(a) \wedge R(b)$ dir. Hipotezden, $a, b \in L_R$ için $T(a,b) \in L_R$ olduğu biliniyor. $1 \in L_R$ olduğunu kullanarak;

$T \downarrow L_R$, L_R üzerinde bir t-normdur. $T \downarrow L_R$ nin sonsuz $\cup -$dağılmalı olduğunu göstermek için, $a, b \in L_R$ ve X, L_R nin x_α elemanlarını kümesi olsun öyle ki $T \downarrow L_R(a, x_\alpha) \le b$ ve $k := \bigcup_{\alpha \in G} x_\alpha$.

$b \in L_R$ olduğundan asal elemanların bir $M = \{p_\beta : \beta \in Q\}$ ailesi vardır öyle ki $b = \bigwedge_{\beta \in Q} p_\beta$.

Bu takdirde, herhangi $p_\beta \in M$ ve bütün $\alpha \in G$ ler için $T \downarrow L_R(a, x_\alpha) \le p_\beta$. p_β T-asal olduğundan $T \downarrow L_R(a, x_\alpha) \le p_\beta$ için $a \le p_\beta$ veya $x_\alpha \le p_\beta$ elde edilir.

Eğer $a \le p_\beta$ ise $T \downarrow L_R(a, \bigcup_{\alpha \in G} x_\alpha) \le a \le p_\beta$ dır.

Eğer $a \not\le p_\beta$ ise her $\alpha \in G$ için $x_\alpha \le p_\beta$ elde edilir. Bundan dolayı $\bigcup_{\alpha \in G} x_\alpha \le p_\beta$ dır ve $T \downarrow L_R(a, \bigcup_{\alpha \in G} x_\alpha) \le \bigcup_{\alpha \in G} x_\alpha \le p_\beta$ bulunur.

Sonuç olarak $T \downarrow L_R(a, \bigcup_{\alpha\in G} x_\alpha) \le \bigwedge_{\beta\in Q} p_\beta = b$. Böylece $k \in X$ ve dolayısı ile X en büyük elemanı içerir. *Teorem 17* ile, $T \downarrow L_R$, L_R üzerinde bir sonsuz $\cup -$dağılmalı t-normdur ■

Sonuç: T, L üzerinde bir t-norm ve L nin her elemanı T-asal radikal eleman olsun. Bu takdirde T, L üzerinde bir sonsuz $\cup -$ dağılmalı t-normdur.

Sonuç: T, L üzerinde bir t-norm ve L nin her elemanı T-asal radikal eleman olsun. Bu takdirde L bir tam *Brouwerian* kafesidir ve her $a, b \in L$ için $T(a,b) = a \wedge b$ dir.

İspat:

Her $a, b \in L$ için nin her elemanı T-asal radikal eleman olduğundan $R(T(a,b)) = R(a) \wedge R(b)$ dir.

Bu takdirde, $T(a,b) = R(T(a,b)) = R(a) \wedge R(b) = a \wedge b$. Bu ise L nin bir tam *Brouwerian* kafesi olduğunu gösterir ■

Sonuç: T, L üzerinde bir t-norm ve L nin her elemanı T-asal radikal eleman olsun. Bu takdirde her $\{a_\tau : \tau \in Q\} \subseteq L$ için $\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau = \bigcup_{\tau\in Q} a_\tau$.

İspat:

Keyfi $\{a_\tau : \tau \in Q\} \subseteq L$ için L de $a_\tau \le \bigvee_{\tau\in Q} a_\tau$ olduğunu biliyoruz. *Önerme 6 (iii)*' ye göre $R(a_\tau) \le R(\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau)$ ve L_R içinde $\bigcup_{\tau\in Q} R(a_\tau) \le R(\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau)$ dir.

$R(a_\tau), R(\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau) \in L_R = L$ olduğundan $R(a_\tau) = a_\tau$, $R(\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau) = \bigvee_{\tau\in Q} a_\tau$ dur ve sonuç olarak $\bigcup_{\tau\in Q} a_\tau = \bigcup_{\tau\in Q} R(a_\tau) \le R(\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau) = \bigvee_{\tau\in Q} a_\tau$.

Ters eşitsizlik içinse *Uyarı 7* den $\bigvee_{\tau\in Q} a_\tau \le \bigcup_{\tau\in Q} a_\tau$ olduğu biliniyor. Bu durumda istenen eşitlik elde edilir ■

Teorem 19[17]**:** L bir tam cebirsel kafes, T, L üzerinde bir t-norm olsun. Eğer L nin her kompakt elemanı idempotent ise, bu takdirde $T = \wedge$ dur.

İspat:

Herhangi $a \in L$ için kompakt elemanların bir $S = \{c_\nu : \nu \in Q\}$ ailesi vardır öyle ki $a = \bigvee_{\nu\in Q} c_\nu$.

$T(a,a) = T(\bigvee_{\nu\in Q} c_\nu, \bigvee_{\nu\in Q} c_\nu) \ge \bigvee_{\nu\in Q} T(c_\nu, c_\nu) = \bigvee_{\nu\in Q} c_\nu = a$.

Sonuç olarak her $a \in L$ için $T(a,a)=a$ olduğunu elde ettik. Her $a,b \in L$ için $a \wedge b = T(a \wedge b, a \wedge b) \leq T(a,b)$.

$T(a,b) \leq a \wedge b$ olduğu zaten biliniyor. Bu ise $T = \wedge$ olduğunu gösterir ■

2.1.4.2. Bir $a \in L$ ile Üretilen Esas Dual İdeal Üzerinde Sonsuz $\vee -$ dağılmalı T-normlar

L bir tam kafes olmak üzere, her bir $a \in L$ için $\uparrow a = \{y \in L : a \leq y\}$ kümesi, a ile üretilen esas dual idealdir. Kolayca elde edilebilir ki $\uparrow a$, L tam kafesinin bir tam alt kafesidir.

Önerme 12[17]**:** L bir tam kafes, T, L üzerinde bir sonsuz $\vee -$ dağılmalı t-norm ve $a \in L$ olsun. Bu takdirde:

$$T^{\uparrow} : \uparrow a \times \uparrow a \to \uparrow a, \quad T^{\uparrow}(u,v) = T(u,v) \vee a$$

bir sonsuz $\vee -$ dağılmalı t-normdur.

İspat:

$u, v \in (\uparrow a)$ olsun. T' nin değişme özelliği kullanılırsa,

$T^{\uparrow}(u,v) = T(u,v) \vee a = T(v,u) \vee a = T^{\uparrow}(v,u)$ olur ve böylece $T^{\uparrow}$ değişmelidir.

$u, v, k \in (\uparrow a)$ ve $v \leq k$ olsun. T' nin monotonluğu ile;

$T^{\uparrow}(u,v) = T(u,v) \vee a \leq T(u,k) \vee a = T^{\uparrow}(u,k)$ bulunur. Bu ise $T^{\uparrow}$ un monotonluğunu gösterir.

$u \in (\uparrow a)$ olsun. $T^{\uparrow}(u,1) = T(u,1) \vee a = u \vee a = u$ olduğundan, 1 birim elemandır.

$T^{\uparrow}$ un asosyatifliğini göstermek için $\forall u, v, k \in (\uparrow a)$ alındığında,

$$T^{\uparrow}(u, T^{\uparrow}(v,k)) = T^{\uparrow}(T^{\uparrow}(u,v), k)$$

eşitliği gösterilmelidir. $T^{\uparrow}$ un tanımı ve $\vee -$ dağılmalı olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T^{\uparrow}(u, T^{\uparrow}(v,k)) = T^{\uparrow}(u, T(v,k) \vee a) = T(u, T(v,k) \vee a) \vee a &= T(u, T(v,k)) \vee T(u,a) \vee a \\ &= T(u, T(v,k)) \vee a \\ &= T(T(u,v),k) \vee T(a,k) \vee a \\ &= T(T(u,v) \vee a, k) \vee a \\ &= T(T^{\uparrow}(u,v), k) \vee a \\ &= T^{\uparrow}(T^{\uparrow}(u,v), k) \end{aligned}$$

Böylece $T^{\uparrow}$ asosyatiftir. Bu durumda $T^{\uparrow}$ un bir t-norm olduğu gösterilmiş oldu.

Şimdi, sonsuz $\vee-$dağılmalı olduğunu göstermek için

$\forall\{x, y_\tau \in (\uparrow a), \tau \in Q\} \subseteq (\uparrow a)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
T^{\uparrow}(x, \bigvee_{\tau\in Q} y_\tau) = T(x, \bigvee_{\tau\in Q} y_\tau) \vee a = (\bigvee_{\tau\in Q} T(x, y_\tau)) \vee a \\
= \bigvee_{\tau\in Q}(T(x, y_\tau) \vee a) \\
= \bigvee_{\tau\in Q} T^{\uparrow}(x, y_\tau)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak $T^{\uparrow}$, bir sonsuz $\vee-$dağılmalı t-normdur ■

Önerme 13[17]**:** T, L üzerinde sonsuz $\vee-$dağılmalı bir t-norm ve 0 bir T-yarıasal eleman olsun.

Bu takdirde u^*, $\uparrow u^*$ üzerinde bir $T^{\uparrow}-$yarıasal elemandır.

İspat:

$x \in (\uparrow u^*)$ ve $T^{\uparrow}(x, x) \le u^*$ olsun. $u^*, \uparrow u^*$ kümesinin en küçük elemanı olduğundan $T^{\uparrow}(x, x) = u^*$ dır.

$k := T(T(x, u), T(x, u)) \le T(x, x) \le u^*$ ve $k = T(T(x, u), T(x, u)) \le T(u, u) \le u$ dır. Yani $k \le u^*$ ve $k \le u$ dur.

$T(k, k) \le T(u, u^*) = 0$ ve 0 bir T-yarıasal eleman olduğundan $k = 0$ dır. Bu durumda $T(x, u) \le k = 0$ olduğundan $T(x, u) = 0$ dır. O halde $x \le u^*$ dır.

Öte yandan $x \in (\uparrow u^*)$ olduğundan $u^* \le x$ tir. Buradan $x = u^*$ elde edilir. Sonuç olarak u^* bir $T^{\uparrow}-$yarıasal eleman olarak bulunur ■

Tanım 36[17]**:** L bir kafes, T L üzerinde bir t-norm ve $0 \ne u \in L$ olsun. u elemanına *T-güçlü eleman* denir:$\Leftrightarrow$ L içinde $b \vee c \le u$ olan her sıfırdan farklı b ve c elemanları için $T(b, c) \ne 0$.

Önerme 14[17]**:** T, L üzerinde bir sonsuz $\vee-$dağılmalı t-norm ve $0 \ne u \in L$ olsun. Eğer u bir T-güçlü eleman ise u^*, $\uparrow u^*$ üzerinde bir $T^{\uparrow}-$asal elemandır.

İspat:

$T^{\uparrow}(x, y) = u^*$ ve $x, y \ne u^*$ olsun. Bu takdirde $T^{\uparrow}(x, y) = T(x, y) \vee u^* = u^*$ ve buna bağlı olarak $T(x, y) \le u^*$ dır.

$x, y \ne u^*$ olmak üzere varsayalım ki $b = T(x, u) \ne 0$ ve $c = T(y, u) \ne 0$ olsun. $b \vee c = T(x, u) \vee T(y, u) \le u$.

u bir T-güçlü eleman olduğundan $T(b,c)=T(T(x,u),T(y,u))\neq 0$ dır. Diğer taraftan $T(T(x,u),T(y,u))\leq T(x,y)\leq u^*$ ve $T(T(x,u),T(y,u))\leq u$ .Bu durumda;

$T(T(x,u),T(y,u))\leq T(u,u^*)=0$ olduğundan $T(T(x,u),T(y,u))=0$ olur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak $T(x,u)=0$ veya $T(y,u)=0$. Buna bağlı olarak $x=u^*$ veya $y=u^*$ olur, bu da u^* ın $T^{\uparrow}-$asal olduğunu gösterir ■

2.1.4.3. L^* Tam Kafesi Üzerinde Sonsuz $\vee-$ dağılmalı T-normlar

L bir tam kafes olmak üzere $L^*=\{x\in L : x^{**}=x\}$ olarak tanımlayalım.

Önerme 15:[17] L bir tam kafes olsun. Bu takdirde:

i) $x\in L^*\Leftrightarrow \exists y\in L \therefore x=y^*$;

ii) $\forall\{x_i : i\in I\}\subseteq L^*$ için $\bigwedge_{i\in I} x_i\in L^*$;

iii) $1,0\in L^*$;

iv) Aşağıda verilen kesişim ve birleşim ile L^* bir tam kafestir.

$\bigcap_{i\in I}=\bigwedge_{i\in I} x_i$, $\bigcup_{i\in I} x_i=(\bigvee_{i\in I} x_i)^{**}$;

v) $x\to x^*$ dönüşümü, L^* dan L^*a bir ters sıra korur 1 – 1 örten dönüşümdür. Bu durumda L^* self dualdir.

İspat:

i) $x\in L^*$ olduğundan $x=x^{**}$ dır. Bu durumda $y=x^*$ alınırsa istenen elde edilir. Tersine olarak $x=y^*$ olsun. Bu takdirde $x^{**}=y^{***}=y^*=x$ olur. Böylece $x\in L^*$ olarak bulunur.

ii) $\{x_i : i\in I\}\subseteq L^*$ keyfi alalım. $\forall i\in I$ için $x_i\in L^*$ olduğundan

$$\bigwedge_{i\in I} x_i=\bigwedge_{i\in I} x_i^{**}=(\bigvee_{i\in I} x_i^*)^*\in L^*.$$

iii) $1=0^*\in L^*$ ve $0=1^*\in L^*$.

iv) (ii) den açıktır.

v) (iv) den açıktır ■

Önerme 16[17]**:** L bir tam kafes, T sonsuz $\vee -$dağılmalı bir t-norm ve 0 bir T-yarıasal eleman olsun.

Bu takdirde $\forall x, y \in L$ için $T(x,y)^* = T(x^{**}, y^{**})^*$.

İspat:

Aşağıdaki kümelerin eşit olduğunu göstermeliyiz:

$A := \{z : T(z, T(x,y)) = 0\}$

$B := \{z : T(z, T(x^{**}, y^{**})) = 0\}$

$z \in A$ olsun. Bu takdirde $T(z, T(x,y)) = 0$. $a := T(z, T(x^{**}, y^{**}))$ olarak tanımlayalım. Açıkça $a \leq z$ dir. Bu durumda $T(a, T(x,y)) = 0$ dır. $0 = T(a, T(x,y)) = T(T(a,x), y)$ olduğundan $T(a,x) \leq y^*$. Ama a nın tanımı ile,

$T(a,x) \leq a = T(z, T(x^{**}, y^{**})) = T(T(z, x^{**}), y^{**}) \leq y^{**}$

Yani $T(a,x) \leq y^*$ ve $T(a,x) \leq y^{**}$.

Buna bağlı olarak $T(T(a,x), T(a,x)) \leq T(y^*, y^{**}) = 0$ ve 0 T-yarıasal eleman olduğundan $T(a,x) = 0$. O halde $a \leq x^*$.

Öte yandan a nın tanımı ile $a \leq T(x^{**}, y^{**}) \leq x^{**}$ olduğundan $T(a,a) \leq T(x^*, x^{**}) = 0$.

0, T-yarıasal eleman olduğundan $a = 0$ olarak bulunur. Yani $T(z, T(x,y)) = 0$ olması, $T(z, T(x^{**}, y^{**})) = 0$ olmasını gerektirdi. O halde $z \in B$ olup, $A \subseteq B$ dir.

Ters eşitsizlik için $T(x,y)^* \geq T(x^{**}, y^{**})^*$ olduğu *Önerme 8 (iii) ve (iv)* den açıktır. Bu durumda $B \subseteq A$ bulunur. O halde $A = B$ dir. $A = B$ olduğundan $\text{E.b.e}(A) = \text{E.b.e}(B)$ dir.

Bu ise $T(x,y)^* = T(x^{**}, y^{**})^*$ olduğunu gösterir ■

Tanım 37[14, 15, 17, 25, 26]**:** L bir tam kafes olsun. Eğer $I : L^2 \to L$ fonksiyonu her $x, y, z \in L$ için aşağıdaki özellikleri sağlar ise $I : L^2 \to L$ fonksiyonuna bir *fuzzy gerektirme* denir.

i) $x \leq y$ ise $I(x,z) \geq I(y,z)$;

ii) $y \leq z$ ise $I(x,y) \leq I(x,z)$;

iii) $I(0,z) = 1$;

iv) $I(x,1) = 1$;

v) $I(1,0) = 0$.

Tanım 38[15, 25, 26]**:** $I: L^2 \to L$ fuzzy gerektirme olsun. Her $x, y, z \in L$ için;

i) I fuzzy gerektirme *"n negasyonu ile kontrapozitif simetri özelliğine sahiptir"* denir:$\Leftrightarrow$ $I(x,y) = I(n(y), n(x))$ eşitliği sağlanır.

ii) I fuzzy gerektirme *"birim eleman özelliğine sahiptir"* denir:$\Leftrightarrow$ $I(1, y) = y$ eşitliğini sağlanır.

iii) I fuzzy gerektirme *"değiştirme özelliğine sahiptir"* denir:$\Leftrightarrow$ $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$ eşitliği sağlanır.

Teorem 20[17]**:** L bir tam kafes, T sonsuz $\vee -$dağılmalı bir t-norm ve 0 bir T-yarıasal eleman olsun. Bu takdirde,

$$F(x,y) = T(x^*, y^*)^* \qquad (1)$$

L üzerinde bir t-altkonormdur.

İspat:

F nin değişmeliliği ve monotonluğu kolayca gösterilir.

Asosyatifliğini göstermek için $\forall x, y, z \in L$ için $F(x, F(y,z)) = F(F(x,y), z)$ olduğunu göstermeliyiz. *Önerme 16* ile

$$T(x^*, T(y^*, z^*))^* = T(x^*, T(y^*, z^*)^{**})^* \qquad (2)$$

elde edilir.

$F(x, F(y,z)) = F(x, T(y^*, z^*)^*) = T(x^*, T(y^*, z^*)^{**})^*$, (1) ve (2) ile.

$= T(x^*, T(y^*, z^*))^* = T(T(x^*, y^*), z^*)^* = T(T(x^*, y^*)^{**}, (z^*)^{**})^*$, *Önerme 16* ve (2) ile.

$= F(T(x^*, y^*)^*, z) = F(F(x,y), z)$

Ayrıca, $F(x,y) = T(x^*, y^*)^* \geq (x^* \wedge y^*)^* \geq x^{**} \vee y^{**} \geq x \vee y$. Böylece F bir t-altkonorm olur ■

Önerme 17[17]**:** F, (1) de verilen t-altkonorm olsun. $I_F(x,y) = F(x^*, y)$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde I_F, $*$ ile kontrapozitif simetri ve değiştirme özelliğini sağlar.

İspat:

Herhangi $x, y \in L$ için;

$$I_F(x,y) = F\left(x^*, y\right) = T\left(x^{**}, y^*\right)^*$$

$$= T\left(x^{****}, y^{***}\right)^* \quad , \quad \text{Önerme 16 dan;}$$

$$= T\left(y^{***}, x^{**}\right)^* = F\left(y^{**}, x^*\right) = I_F\left(y^*, x^*\right)$$

Böylece I_F, $*$ ile kontrapozitif simetri özelliğini sağlamış olur.

I_F nin değiştirme özelliğini sağladığını gösterelim. Herhangi $x, y, z \in L$ için;

$$
\begin{aligned}
I_F(x, I_F(y,z)) &= F\left(x^*, I_F(y,z)\right) \\
&= F\left(x^*, F(y^*, z)\right) \\
&= T\left(x^{**}, F(y^*, z)^*\right)^* \\
&= T\left(x^{**}, T(y^{**}, z^*)^{**}\right)^* \\
&= T\left(x, T(y^{**}, z^*)\right)^*, \quad \text{Önerme 16 dan;} \\
&= T\left(y^{**}, T(x, z^*)\right)^*, \quad T-1 \text{ ve } T-2 \text{ den;} \\
&= T\left(y^{**}, T(x, z^*)^{**}\right)^*, \ \text{Önerme 16 dan;} \\
&= T\left(y^{**}, \left[T(x, z^*)^*\right]^*\right)^* \\
&= T\left(y^{**}, \left[T(x^{**}, z^{***})^*\right]^*\right)^* \\
&= T\left(y^{**}, T(x^{**}, z^*)^{**}\right)^* \\
&= T\left(y^{**}, F(x^*, z)^*\right)^* \\
&= F\left(y^*, F(x^*, z)\right) \\
&= F\left(y^*, I_F(x,z)\right) \\
&= I_F(y, I_F(x,z))
\end{aligned}
$$

Böylece $I_F(x, I_F(y,z)) = I_F(y, I_F(x,z))$ olup, I_F değiştirme özelliğini sağlar ■

Not: I_F, her zaman birim eleman özelliğini sağlamayabilir.

Teorem 21[17]**:** L bir tam kafes, T sonsuz $\vee-$dağılmalı bir t-norm ve 0 bir T-yarıasal eleman olsun. F, (1) de verilen t-altkonorm olmak üzere, $I_F(x,y) = F(x^*, y)$ göz önüne alınsın.

Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

i) I_F birim eleman özelliğini sağlar;

ii) F bir t-konormdur;

iii) $F = \vee$;

iv) $T = \wedge$ ve L bir komplementli kafestir;

v) L *Bool* kafesidir;

vi) $*$ bir güçlü negasyondur.

İspat:

i) $\Rightarrow$ **ii):** I_F birim eleman özelliğini sağladığından, $\forall x \in L$ için;

$$F(0,x) = F(1^*,x) = I_F(1,x) = x$$

olur. Böylece F bir t-konormdur.

ii) $\Rightarrow$ **iii):** F bir t-konorm olsun. Bu takdirde $\forall x \in L$ için $F(0,x) = x$ olur. Bundan dolayı $x = F(0,x) = T(0^*,x^*)^* = T(1,x^*)^* = (x^*)^* = x^{**}$ olduğundan, $T(0^*,x^*)^* = x$ ve $T(1,x^*)^* = x^{**} = x$.

Diğer yandan 0 bir T-yarıasal eleman olduğundan *Önerme 8 (iii)* ve *Önerme 16* ile, $I_F(x,x^*) = F(x^*,x^*) = (T(x^{**},x^{**}))^* = T(x,x)^* = x^*$ yani $I_F(x,x^*) = x^*$ bulunur.

Bundan dolayı, $\forall x \in L$ için $F(x,x) = F(x^{**},x^{**}) = I_F(x^*,x^{**}) = x^{**} = x$. Bu ise $F = \vee$ olduğunu gösterir.

iii) $\Rightarrow$ **iv):** $\forall x \in L$ için $T(0^*,x^*)^* = F(0,x) = 0 \vee x = x$. Bundan dolayı *Önerme 16* ile,

$$T(x,x) = (T(x,x))^{**} = (T(x,x)^*)^* = (T(x^{**},x^{**})^*)^* = (F(x^*,x^*))^* \overset{F=\vee}{=} x^{**} = x .$$

Bu durumda $T = \wedge$. (1) in sonucu olarak $\forall x,y \in L$ için $x \vee y = (x^* \wedge y^*)^*$. Herhangi $x \in L$ için $y = x^*$ olarak alınırsa,

$$x \vee x^* = (x^* \wedge x^{**})^* = 0^* = 1 \text{ ve } T = \wedge \text{ olduğundan } x \wedge x^* = T(x,x^*) = 0$$

olarak bulunur ki bu ise L nin bir komplementli kafes olduğunu gösterir.

iv) $\Rightarrow$ **v):** T, L üzerinde sonsuz $\vee-$dağılmalı t-norm olduğu hipotezde veriliyor. $T = \wedge$ olduğundan infimum, supremum üzerine dağılmalıdır. Bu ise L nin dağılmalı kafes olduğunu gösterir. L nin komplementli olduğu da hipotezden biliniyor. Bu durumda L bir *Bool* Kafesidir.

v) $\Rightarrow$ **vi):** $x \in L$ ve L bir *Bool* kafesi olsun. L komplementli kafes olduğundan, $\exists x' \in L \therefore x \vee x' = 1$ ve $x \wedge x' = 0$. L dağılmalı kafes olduğundan,

$$x^* = x^* \wedge 1 = x^* \wedge (x \vee x') = (x^* \wedge x) \vee (x^* \wedge x') \overset{T=\wedge}{=} 0 \vee (x^* \wedge x') = x^* \wedge x' \leq x'$$

Yani $x^* \leq x'$ bulunur. Ayrıca x^* ın tanımından ve $T = \wedge$ olduğundan $x' \leq x^*$ bulunur. Bu durumda $x^* = x'$. Buna bağlı olarak $(x^*)^* = (x')' = x$.

Bu ise $*$ ın bir güçlü negasyon olduğunu gösterir.

vi) $\Rightarrow$ **i):** $*$ güçlü negasyon olsun. Bu takdirde,

$\forall x \in L$ için $I_F(1,x) = F(1^*, x) = (T(1^{**}, x^*))^* = x^{**} = x$

olarak bulunur. Böylece 1 birim eleman olur ■

Sonuç: L bir tam kafes, T sonsuz $\vee -$ dağılmalı bir t-norm ve 0 bir T-yarıasal eleman olsun.

F, (1) de verilen t-altkonorm olmak üzere eğer L *Teorem 21* in denk şartlarından herhangi birini gerçeklerse L bir Brouwerian Kafesi olur.

Tanım 39[17]**:** L bir tam kafes ve T bir t-norm olsun. T ye $* -$ *süreklidir* denir:$\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in L \text{ için } T(x^{**}, y) \leq T(x, y)^{**} \qquad (3)$$

Önerme 18[17]**:** L bir tam kafes, T bir sonsuz $\vee -$ dağılmalı t-norm ve 0 bir T-yarıasal eleman olsun.

Bu takdirde T nin $* -$ sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin aşağıdaki eşitsizliği gerçeklemesidir.

$$T(x^{**}, y^{**}) \leq T(x, y)^{**} \qquad (4)$$

İspat:

T $* -$ sürekli olsun. Bu takdirde,

$$T(x^{**}, y^{**}) \leq T(x, y^{**})^{**} = T(y^{**}, x)^{**} \leq T(y, x)^{****}$$
$$= (T(y, x)^{***})^* = (T(y, x)^*)^* = T(x, y)^{**}$$

Tersine olarak T, $T(x^{**}, y) \leq T(x, y)^{**}$ eşitsizliğini sağlasın. $y \leq y^{**}$ olduğundan, $T(x^{**}, y) \leq T(x^{**}, y^{**})$ dir. Hipotezden dolayı $T(x^{**}, y^{**}) \leq T(x, y)^{**}$ dir ve bundan dolayı $T(x^{**}, y) \leq T(x, y)^{**}$ elde edilir ki bu T nin $* -$ sürekli olduğunu gösterir ■

Önerme 19[17]**:** L bir tam kafes, T sonsuz $\vee -$ dağılmalı bir t-norm, T, L üzerinde $* -$ sürekli ve 0 bir T-yarıasal eleman olsun. L^* üzerinde $T'(x, y) = T(x, y)^{**}$ şeklinde bir ikili işlem tanımlansın. Bu takdirde,

i) Eğer 0 bir T-yarıasal eleman ise T', L^* üzerinde bir sonsuz $\cup -$ dağılmalı t-normdur.

ii) 0' ın, L^* ın bir T'-yarıasal elemanı olması için gerek ve yeter şart 0 ın, L nin bir T-yarıasal elemanı olmasıdır.

iii) L^* ın tüm T'-asal elemanlarının kümesi ile L nin $x = x^{**}$ koşulunu sağlayan T-asal elemanlarının kümesi çakışır.

İspat:

i) $\forall x,y,z \in L^*$ için $T'(x,1)=T(x,1)^{**}=x^{**}=x$ olduğundan T' birim eleman özelliğini sağlar.

T' nün asosyatifliğini göstermek için,

$\forall x,y,z \in L^*$ için $T'(T'(x,y),z)=T'(x,T'(y,z))$ olduğunu göstermeliyiz.

$$
\begin{aligned}
T'(T'(x,y),z) &= T'(x,T(y,z)^{**}) = T(x,T(y,z)^{**})^{**} \\
&\overset{x\in L^*}{=} T(x^{**},T(y,z)^{**})^{**} = T(x,T(y,z))^{**} \text{ , Önerme 16 ile.} \\
&= T(T(x,y),z)^{**} = T(T(x,y)^{**},z^{**})^{**} = T(T(x,y)^{**},z)^{**} \\
&= T'(T(x,y)^{**},z) = T'(T'(x,y),z)
\end{aligned}
$$

Böylece asosyatiflik gösterilmiş olur. Değişmelilik ve monotonluk açıktır.

T' nün sonsuz $\cup-$dağılmalı olduğunu göstermek için, *Önerme 15 (iv)* kullanılırsa:

$$
\begin{aligned}
T'(x, \bigcup_{i\in I} y_i) &= T'(x,(\bigvee_{i\in I} y_i)^{**}) = T(x,(\bigvee_{i\in I} y_i)^{**})^{**} \overset{(3)}{\leq} T(x,(\bigvee_{i\in I} y_i))^{**} \\
&= (\bigvee_{i\in I} T(x,y_i))^{**} \overset{x\leq x^{**}}{\leq} (\bigvee_{i\in I} T(x,y_i)^{**})^{**} = (\bigvee_{i\in I} T'(x,y_i))^{**} \\
&= \bigcup_{i\in I} T'(x,y_i) \\
&\Rightarrow T'(x, \bigcup_{i\in I} y_i) \leq \bigcup_{i\in I} T'(x,y_i)
\end{aligned}
$$

T' nün monotonluğu ile:

$$
\begin{aligned}
&\forall i\in I \text{ için } T'(x,y_i) \leq T'(x, \bigcup_{i\in I} y_i) \\
&\qquad \Rightarrow \bigcup_{i\in I} T'(x,y_i) \leq T'(x, \bigcup_{i\in I} y_i)
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak $T'(x, \bigcup_{i\in I} y_i) = \bigcup_{i\in I} T'(x,y_i)$ elde edilir. Bu ise T' nün sonsuz $\cup-$dağılmalı olduğunu gösterir.

ii) 0, L^* ın bir T'-yarıasal elemanı, $x\in L$ ve $T(x,x)=0$ olsun. Bu durumda $0=T(x,x)^{**}=T'(x,x)$. 0, T'-yarıasal eleman olduğundan $x=0$. O halde 0, T-yarıasal elemandır.

Tersine olarak 0 T-yarıasal eleman, $x\in L^*$ ve $T'(x,x)=0$ olsun. T' nün tanımından, $T(x,x)^{**}=0$. Bu durumda $0=T(x,x)^{**} \overset{(4)}{\geq} T(x^{**},x^{**})$ olduğundan $T(x^{**},x^{**})=0$.

Öte yandan $x\in L^*$ olduğundan $0=T(x^{**},x^{**})=T(x,x)$ ve 0, T-yarıasal eleman olduğundan $x=0$ olduğu bulunur. Bu ise 0 ın T'-yarıasal eleman olduğunu gösterir.

iii) Aşağıdaki kümelerin eşit olduğunu göstermeliyiz:

$C = \{p : p,\ L^{*}\ \text{ın}\ T' - \text{asal elemanı}\}$

$D = \{p : p,\ L\ \text{ın}\ T - \text{asal elemanı},\ p = p^{**}\}$

$p \in C$ olsun. Eğer $T(x,y) \leq p$ ise *Önerme 8 (iii)* den $T(x,y)^{**} \leq p^{**} = p$ bulunur ve buradan $p \geq T(x,y)^{**} \overset{(4)}{\geq} T(x^{**}, y^{**})$ olur. p, $T' -$ asal eleman olduğundan $x^{**} \leq p$ veya $y^{**} \leq p$. Bu durumda $x \leq p$ veya $y \leq p$ olur ki bu $p \in D$ olduğunu gösterir.

Tersine $p \in D$ alalım ve $T'(x,y) \leq p$ olsun. Bu takdirde;

$p \geq T'(x,y) = T(x,y)^{**} \geq T(x,y)$

p, $T -$ asal eleman olduğundan, $x \leq p$ veya $y \leq p$ olur. Bu durumda p, $T' -$ asal eleman olur ve buna bağlı olarak $p \in C$ dir.

Çift taraflı kapsamadan $C = D$ bulunur ■

3. BULGULAR VE SONUÇLAR

Bu çalışmada, tam kafesler üzerinde negasyonlar ve sonsuz supremum dağılmalı t-normlar ile çalışıldı. Herhangi bir L tam kafesi ve onun üzerinde bir T t-normu verildiğinde, verilen T t-normunun veya onun uygun şekilde değiştirilmesiyle elde edilen t-normun kendi üzerinde sonsuz supremum dağılmalı olduğu, L tam kafesinin uygun altyapıları belirlendi. Buna göre aşağıdaki sonuçlar elde edildi:

1) Her tam kafes üzerinde her zaman bir güçlü negasyon tanımlamak mümkün olmayabilir.

2) Bir tam kafesin, iki tam alt kafesi üzerinde tanımlı n_1 ve n_2 güçlü negasyonlarının iç direkt çarpımı tanımlandı ve bunun üzerinde bazı aksiyomlar verildi.

3) T – asal eleman, T – yarıasal eleman, T – asal radikal tanımları verildi ve özellikleri incelendi.

4) Pseudo komplement tanımı verilip üzerinde bir takım işlemler yapıldı, ayrıca pseudo komplementlerin sonsuz supremum dağılmalı t-normlarla olan bağlantısı araştırıldı.

5) L_R kümesinin tam kafes olduğu gösterildi. Bu tam kafes üzerindeki infimumun L kafesindeki ile çakıştığı ama supremumun çakışmadığı örneklendi.

6) T, L üzerinde bir t-norm olmak üzere, T' nin L_R kümesine kısıtlanması olan $T \downarrow L_R$ fonksiyonunun hangi şartlar altında bir sonsuz supremum dağılmalı t-norm olduğu araştırıldı.

7) Bir L tam kafesi üzerinde verilen sonsuz supremum dağılmalı bir t-norm ve bir $a \in L$ üzerinden üretilen esas dual ideal vasıtası ile yeni bir sonsuz supremum dağılmalı $T^{\uparrow}$ t-normu inşa edildi.

4. İRDELEME

Webber 1983 yılındaki çalışmasında[30], Fuzzy mantığında bir tam kafes üzerinde t-normlar, t-konormlar ve negasyonların sırasıyla "ve", "veya" ve "değil" olarak kullanıldığını ifade etmiştir.

Walker ve Gehrke' nin 1996 da yayınladıkları çalışmalarında[29], $[0,1]$ birim aralığı üzerinde her aralık değerli negasyonun, bir β negasyonu için $\eta(x,y)=(\beta(y),\beta(x))$ şeklinde olduğunu gösterdi. Tezde ise Karaçal' ın 2006 da yaptığı çalışmadan[15] faydalanılarak tam kafesler üzerinde güçlü negasyonların iç direkt çarpımı incelenmiştir. Ayrıca yine tam kafesler üzerinde güçlü negasyonların iç direkt ve dış direkt çarpımları arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur(Teorem 16). $(0,1)$ ve $(1,0)$ elemanları, güçlü negasyonların direkt parçalanmasında çok önenmli bir rol oynar. $n(0,1)=(1,0)$ koşulunun, bir güçlü negasyonun tanımlı olduğu tam kafes üzerinde parçalanabilir olması için gerek ve yeter koşul olduğu Karaçal tarafından [15] te ve tezde Teorem16 da ispatlanmıştır.

Rezidual kafesler, 1999 yılında De Baets ve Mesiar[7] tarafından ek bir özellikle verilmiştir. Bu özellik: T bir L kafesi üzerinde bir t-norm olmak üzere bir $\rightarrow_T$ ikili işlemi vardır öyle ki her $a,b,x\in L$ elemanları için $T(a,x)\le b \Leftrightarrow a\rightarrow_T b\ge x$. Bu ek özellik, T' nin sonsuz supremum dağılmalı olmasını kesinleştiren rezidasyon kuralı olarak adlandırıldı. Jenei 2003 yılında[12], Karaçal ve Khadjiev 2005 yılında[16] ve Wang 2001, 2002, 2003 yıllarında[27, 25, 26] sonsuz supremum dağılmalı t-normlar üzerine çalışmalar yayınlamışlardır. Karaçal' ın 2009 yılında yayınladığı çalışmada[17], bir tam kafeste L_R kümesi, L^* kümesi, $*-$süreklilik gibi yeni tanımlar vermiştir. Bu tezde ise Karaçal' ın 2009 da yayınlanan çalışmasından[17] yararlanılarak sonsuz supremum dağılmalı t-normların özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca T-asal eleman, T-yarıasal eleman ve bunların özellikleri üzerinde çalışılmış, tüm T-asal elemanların kümesi olan L_R kümesinin bir tam kafes olduğu ve T nin L_R' ye kısıtlanışı olan $T\downarrow L_R$ t-normunun L_R üzerinde sonsuz $\cup-$dağılmalı olduğu gösterilmiştir. [17] de tanımlandığı şekilde L^* tam kafesi üzerinde sonsuz supremum dağılmalı t-normlar çalışılmıştır. Ayrıca $*-$sürekli t-normlar ve onların bir takım özellikleri incelenmiştir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada tam kafesler üzerinde sonsuz $\vee -$ dağılmalı t-normlar incelendi. Verilen bir L tam kafesi ve onun üzerinde tanımlı bir t-norm yardımıyla, L' nin bazı alt-yapıları belirlendi. Bu alt-yapıların tam kafesler olduğu gösterildi ve bunlar üzerinde, verilen t-normun kendisinin sonsuz $\vee -$ dağılmalı olmadığı durumlarda, bu t-norm uygun şekilde kullanılarak sonsuz $\vee -$ dağılmalı yeni bir t-norm elde edildi.

Bu çalışmada verilen sonuçların benzerleri; asosyatif cebir, alternatif cebir, fuzzy grup, fuzzy halka, Jordan cebri gibi cebirsel yapılarda da elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Abel, N., Untersuchungen der Funktionen Zweier Unabhängigen Veränderlichen Größen x und y Wie $f(x, y)$, Welche die Eigenschaft Haben, daß $f(z, f(x, y))$ Eine Symmetrische Funktion Von x, y und z ist, J. Reine Angew. Math., 1 (1826) 11 – 15.

2. Aczél, J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press, New York, 1966.

3. Aczél, J., Sur Les Opérations Definies Pour Des Nombres Réels, Bull. Soc. Math. France, 76 (1949) 59 – 64.

4. Aczél, J., Vorlesungen Über Funktionalgleichhungen und Ihre Anwendungen, Birkhäuser, Basel, 1961.

5. Birkhoff, G., Lattice Theory, 3rd Edition, Providence, RI, 1967.

6. Brouwer, L. E. J., Die Theorie der Endlichen Kontinuierlichen Gruppen Unabhängig Von Den Axiomen Von Lie, Mah. Ann., 67 (1909) 246 – 267.

7. De Baets, B. and Mesiar, R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104 (1999) 61 – 75.

8. Faucett, W. M., Compact Semigroups Irreducibly Connected Between Two Idempotents, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955) 741 – 747.

9. Frank, M. J., On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, Aequations Math., 19 (1979) 194 – 226.

10. Gratzer, G., General Lattice Theory, Akademie, Berlin, 1978.

11. Hosszù, M., Some Functional Equations Related with the Associativity Law, Publ. Math. Debrecen, 3 (1954) 205 – 214.

12. Jenei, S. and De Baets, B., On the direct decomposability of t-norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 139 (2003) 699 – 707.

13. Jenei, S. and Montagna, F., A general method for constructing left continuous t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 136 (2003) 263 – 282.

14. Karaçal, F., On the direct decomposability of fuzzy connectives, negations implications based on t-norms and t-conorms on product lattices, International Conference 8th Fuzzy Days, 29/01/2004, Dortmund, Advances in Soft Computing.

15. Karaçal, F., On the direct decomposability of strong negations and $S-implication$ operators on product lattices, Information Sciences, 176 (2006) 3011 – 3025.

16. Karaçal, F. and Khadjiev, D., $\vee-$distributive and infinitely $\vee-$distributive t-norms on complete lattices, Fuzzy Sets and Systems, 151 (2005) 341 – 352.

17. Karaçal, F. and Sağiroğlu, Y., Infinitely $\vee-$distributive t-norms on complete lattices and pseudo-complements, Fuzzy Sets and Systems, 160 (2009) 32 – 43.

18. Khadjiev, Dj. and Karaçal, F., The description of all $\vee-$distributive triangular norms of lengths 2 and 3, Proceedings of Fuzzy Days, 2001, Berlin, Lecture Notes in Computer Science, 2206, 829 – 833.

19. Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

20. Menger, K., Statistical Metrics, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 8 (1942) 535 – 537.

21. Schweizer, B. and Sklar, A., Associative Fuctions and Statistical Triangle Inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8 (1961) 169 – 186.

22. Schweizer, B. and Sklar, A., Espaces Metriques Aleatories, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 247 (1958) 2092 – 2094.

23. Schweizer, B. and Sklar, A., Statistical Metric Spaces, Pasific J. Math., 10 (1960) 313 – 334.

24. Van Gasse, B., Corneils, C., Deschrijver, G. and Kere E. E., Triangle algebras: a formal logic approach to interval-valued residuated lattices, Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) 1042 – 1060

25. Wang, Z. and Yu, Y., Pseudo-t-norms and implication operators on a complete Brouwerian lattice, Fuzzy Sets and Systems, 132 (2002) 113 – 124.

26. Wang, Z. and Yu, Y., Pseudo-t-norms and implication operators: direct products and direct product decompositions, Fuzzy Sets and Systems, 139 (2003) 673 – 683.

27. Wang, Z., Dai, F. and Yu, Y., Radicals of TL-ideals, Fuzzy Sets and Systems, 121 (2001) 301 – 314.

28. Ward, M. and Dilworth, R. P., Residuated lattices, Transactions of AMS, 45 (1939) 335 – 354.

29. Walker, C., Gehrke, M. and Walker, E., Some Comments on Interval Valued Fuzzy Sets, International Journal of Intelligent Systems, 11 (1996) 751 – 756.

30. Webber, S., A General Concept of Fuzzy Connectives, Negations and Implications Based on t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and Systems, 11 (1983) 115 – 134.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Akif İNCE 22.02.1983 yılında Kırıkkale’ de doğdu. İlköğrenimini Sivas Ülkü İlkokulunda, ortaokul ve lise öğrenimini Sivas Selçuk Anadolu Lisesinde tamamlayarak 2001 yılında buradan mezun oldu. 2002 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2006 yılında bu bölümden mezun oldu. 2006 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı tezli yüksek lisans programını kazandı ve yarım yıl süreyle İngilizce hazırlık öğrenimi gördü. Aynı yıl içerisinde bir özel eğitim kurumunda matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. Halen Rize’ de çalışmaktadır. Orta seviye İngilizce bilmektedir.