KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\Gamma_0(\mathrm{N})$ NİN $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİNİN YAPISI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet BAŞ

HAZİRAN 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\Gamma_0(N)$ NİN $PSL(2,\mathbb{R})$ DEKİ NORMALLİYENİNİN YAPISI

Mehmet BAŞ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30. 04. 2009
Tezin Savunma Tarihi : 01. 06. 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Öncelikle, tez konusu seçen ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

K.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde bulunan başta sayın hocam Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ'a, tüm hocalarıma, asistan arkadaşlarıma, hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme ve manevi desteğini esirgemeyen kardeşim Emre BAŞ'a çok teşekkür ederim.

Mehmet BAŞ
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeninin bölüm gruplarının yapısı incelenerek izomorf oldukları gruplar belirlendi.

Birinci bölümde Öklid olmayan kristalize grupların genel tanımları ortaya konularak Γ modular grubu ve bu grubun $\Gamma_0(N)$ kongrüans alt grubu, temel bölgeler ve sonlu üretilmiş bir Fuchsian grubun simge tanımı verildi.

İkinci bölüm tamamı ile $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyenine ayrıldı. Bu normalliyeni daha iyi anlamak için bu grubun bazı özel alt grupları olan Atkin-Lehner grubu ve diğer bazı gruplar verildi. Ayrıca bu kısımda $\Gamma_B(N)$ normalliyeninin bölüm grubu olan $B(N)$ nin yapısı incelendi ve izomorf oldukları temel gruplar tespit edildi, ve bölüm grubunun bazı bölüm gruplarının bir direkt çarpımı olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Modüler Grup Γ, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_B(N)$, Çelenk Çarpımı, Cusp

SUMMARY

The Structure of The Normalizer of $\Gamma_0(N)$ in $PSL(2,\mathbb{R})$

In this thesis the structure of the quotient groups of the normalizer of $\Gamma_0(N)$ in $PSL(2,\mathbb{R})$ is examined and the groups that are isomorphic to these quotient groups are determined.

In chapter 1, general definitions of Non-Euclidean Crystallographie groups, the modular group Γ and its congruence subgroup $\Gamma_0(N)$, fundamental domains and the signature of the finitely generated Fuchsian groups are given.

In chapter 2, we deal exclusively with the normalizer of $\Gamma_0(N)$ in $PSL(2,\mathbb{R})$. To understand the normalizer very well, some special groups especially The Atkin-Lehner group are presented. Furthermore, the structure of the quotient group $B(N)$ of the normalizer $\Gamma_B(N)$ is given and the groups that are isomorphic to the quotient groups are determined, and finally the quotient group $B(N)$ is written as a direct product of some quotient groups of the normalizers.

Key Words: Modular Group Γ, $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_B(N)$, Wreath Product, Cusp.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$A \subset B$	A kümesi B kümesinin altındadır
$A \leq B$	A grubu B grubunun alt grubudur
$A \lhd B$	A grubu B grubunun normal alt grubudur
$A \setminus B$	A kümesinin B kümesinden farkı
$a \in A$	a noktası A kümesinin elemanıdır
$a \notin A$	a noktası A kümesinin elemanı değildir
$a \mid b$	a sayısı b sayısını böler
$a \nmid b$	a sayısı b sayısını bölmez
$a \parallel b$	a sayısı b sayısının bir tam bölenidir
$a \equiv b (\bmod n)$	n sayısı (a-b) sayısını bölmez
(a,b)	a ile b sayısının en büyük ortak böleni
$\overset{\circ}{F}$	F kümesini içi
$\overline{F}$	F kümesinin kapanışı
Gx	x noktasının G yörüngesi
G_x	x noktasının G deki sabitleyeni
$[G,X]$	Bir topolojik dönüşüm grubu
$\lvert G:H \rvert$	H alt grubunun G deki indeksi
$H \leq G$	H alt grup G
$PSL(2,\mathbb{R})$	Gerçel katsayılı, lineer, kesir dönüşümlerinin grubu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
Γ	$PSL(2,\mathbb{R})$ nin katsayıları tamsayılar olan bir alt grubu
$\Gamma_0(N)$	Γ nın $N \mid c$ olan bir alt grubu
$\Gamma_B(N)$	$\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeni
G	Gerçel katsayılı kesir dönüşümlerinin kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_2$	1 den büyük doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi

$\widehat{\mathbb{Q}}$	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	Asal sayılar kümesi
U	$\mathbb{C}$ de üst yarı düzlem
U^*	U ile Γ nın parabolik noktaları kümesinin birleşimi
U^*/Γ	Yörünge uzayı
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\eta(N)$	Parabolik sınıf sayısı
$\mu(E)$	E kümesinin hiperbolik alanı
$\sigma(\Gamma)$	Γ NEC grubunun simgesi
$\varphi(a)$	Euler fonksiyonu
∞	Sonsuz
$\forall$	Her
$\exists$	Bazı
$:=$	Tanım olarak eşittir

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Tanım 1.1. G bir grup, hem de bir topolojik uzay olsun.

i) $F: G\times G \to G$

$\left(x,y\right) \to F\left(x,y\right) := xy$

ii) $f: G \to G$

$x \to f\left(x\right) := x^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

Tanım 1.2. G bir topolojik grup olsun. Bu takdirde $V\cap G=\{x\}$ olacak şekilde bir $V := V_x$ açık kümesi varsa diğer bir ifadeyle G nin her noktası bir ayrık noktası ise, G ye ayrık grup denir.

Tanım 1.3. G bir grup ve $X \neq \varnothing$ bir küme olsun. Bir $\varphi: G\times X \to X$ fonksiyonu,

i) $\forall g_1,g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$ için $\varphi\left(g_1g_2, x\right) = \varphi\left(g_1, \varphi\left(g_2,x\right)\right)$,

ii) $1 \in G$ birim eleman ise $\forall x \in X$ için $\varphi\left(1, x\right) = x$,

şartlarını sağlıyorsa G ye X üzerinde hareket eder veya G ye X üzerinde bir hareket grubu adı verilir. $\varphi\left(g,x\right)$ yerine kısaca gx yazılır. Bu durumda

$\left(g_1g_2\right)x = g_1\left(g_2x\right)$ ve $1x=x$ dir.

Burada G bir topolojik grup, X bir topolojik uzay ve φ dönüşümü sürekli ise $\left[G,X\right]$ çiftine bir topolojik dönüşüm grubu denir.

Önerme 1.1.$\left[7\right]$**.** G,X üzerinde hareket etsin ve "$x,y \in X$ olmak üzere, $x \sim y :\Leftrightarrow gx=y$ olacak biçimde bir $g \in G$ elemanı vardır" ile tanımlı "$\sim$" bağıntısı X üzerinde bir denklik (eşdeğerlik) bağıntısıdır.

Tanım 1.4. Önerme 1.1. deki "$\sim$" bağıntısının eşdeğerlik sınıflarına hareketin yörüngeleri denir. Ayrıca $x \in X$ noktasını içeren x in yörüngesi Gx ile gösterilir. Bu tanıma göre, $Gx = \left\{gx \middle| g \in G\right\}$ dir.

Tanım 1.5. G, X üzerinde hareket etsin ve $x,y \in X$ keyfi olsun.

$gx = y$ olacak biçimde

bir $g \in G$ elemanı varsa G ye X üzerinde geçişli (transitif) olarak hareket eder denir. Bu tanıma göre hareket transitif ise

$$\forall x \in X \text{ için } Gx=X$$

elde edilir. Yani bir tek yörünge vardır.

Tanım 1.6. F üzerinde V bir vektör uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer $x,y \in W$ için $y\text{-}x \in W$ ise x elemanına modulo W ya göre y ye kongrüenttir denir ve $x \equiv y(\operatorname{mod} W)$ yazılır. Bu bağıntıya $\operatorname{mod} W$ kongrüans ı denir. Bu bağıntıya göre V nin bütün denklik sınıflarının cümlesini V/W ile göstereceğiz.

Tanım 1.7. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. $\forall g \in G$ için $Ng \leq N$ gerçeklenirse, N alt grubuna G nin normal böleni (normal alt grubu veya invaryant alt grubu) denir. N nin normal böleni olması $N \trianglelefteq G$ ile gösterilir ve $N \neq G$ ise, $N \triangleleft G$ yazılır.

Her G grubu, E ve G trivial normal bölenlerini içerir.

Trivial normal bölenden farklı bir normal bölen ihtiva etmeyen bir gruba basit denir. Buna göre, asal mertebeli her grup basittir.

Tanım 1.8. G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. N nin sınıflarının teşkil ettiği gruba, G nin N normal bölenine göre bölüm grubu denir ve bu grup G/N ile gösterilir. Açık olarak

$$|G/N|=[G:N]$$

verilir.

Önerme 1.2.[7]**.** $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu τ, X üzerinde topoloji ve

$$P: X \rightarrow X/G \ , x \rightarrow P(x)=Gx$$

olsun. Bu takdirde

$$\tau_G := \left\{A \subset X/G \,\middle|\, P^{-1}(A) \in \tau\right\}$$

ailesi X/G üzerinde P yi sürekli yapan en ince topolojidir. Genel olarak X/G bölüm uzayına yörünge uzayı adı verilir.

Tanım 1.9. G,X üzerinde hareket etsin ve $x \in X$ olsun.

$$G_x = \left\{g \in G \,\middle|\, gx=x\right\}$$

alt grubuna x in G deki sabitleyeni denir.

Açık olarak $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ dir. Dolayısıyla G,X üzerinde geçişli olarak hareket ediyorsa $\forall x,y \in X$ için G_x ve G_y eşleniktir.

Tanım 1.10. G bir grup olsun. $G=\langle a\rangle$ olacak şekilde bir $a\in G$ varsa G ye bir devirli grup denir.

Tanım 1.11. G bir grup ve $H<G$ olsun.

$$N_G(H):=\{g\in G \mid gHg^{-1}=H\}$$

kümesine H nın G deki normalliyeni denir.

Not 1.1. Normalliyen H yı normal alt grup olarak içeren en büyük kümedir.

Tanım 1.12. $N\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $p^2 \mid N$ olacak şekilde bir p asal sayısı yok ise N ye karesiz denir.

Tanm 1.13. Bir T dönüşümünün periyodu (veya mertebesi),

$$T^m=I$$

eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır. Böyle bir m tamsayısı yoksa T sonsuz periyotludur denir.

Tanım 1.14. $N\in\mathbb{Z}$ için $1\le a\le N$ ve $(a,N)=1$ olan a tamsayılarının sayısı $\varphi(N)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona Euler fonksiyonu denir.

Lemma 1.1. $[6]$**.**

$m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ ise

$$\varphi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

dir.

Tanım 1.15. $(G,.)$ bir grup, H G nin bir alt grubu olsun. $a\in G$ olmak üzere

$$a.H=\{a.x \mid x\in H\}$$

kümesine H nın G deki bir koset (yan sınıf)i denir. $(G,.)$ grubu bir abel grubu olmak zorunda olmadığından $a.H$ kümesine H nın bir sol koseti denir. Benzer şekilde sağ kosetler de tanımlanabilir.

Tanım 1.16. G bir grup ve H G nin bir altgrubu olsun. H nın G deki farklı kosetlerinin sayısına H nın G ye göre indeksi denir ve

$$|G:H|$$

ile gösterilir.

Lemma 1.2. $[14]$**.** Eğer G sonlu bir grup ise herhangi bir altgrubunun indeksi de sonludur.

Tanım 1.17. $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu olsun.

$$X=\bigcup_{g\in G} gA$$

ise A ya bir $G-$örtmesi denir.

Tanım 1.18. $[G,X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $g\in G$ ise $\{x\in X \mid gx=x\}$ kümesine *g* elemanının sabit noktalar kümesi adı verilir.

1.2. Öklid Olmayan Kristalize Gruplar

1) G ile $\sum := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlemin

(A) $z\to \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad a,b,c,d\in\mathbb{R} \quad ad\text{-}bc=1$

(B) $z\to \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ $\quad a,b,c,d\in\mathbb{R} \quad ad\text{-}bc=-1$

biçimindeki dönüşümlerin kümesini gösterelim. Burada $\Delta = ad\text{-}bc=\pm 1$ olmakla gerçel katsayılı dönüşümlerin kümesi daraltılmış değildir. Çünkü $\Delta\neq\pm 1$ durumunda dönüşümün pay ve paydası $\pm\sqrt{ad\text{-}bc}$ ile bölünerek $\Delta=\pm 1$ durumuna getirilebilir. $\Delta=0$ durumu ise, (A) ve (B) sabit olacaklarından incelemeye değer değildir. G fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. G nin her bir elemanı $U=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$ üst yarı düzlemin kendi üzerine bir konform veya ters konform homeomorfizmidir.

(A) biçimindeki dönüşümlerin kümesi, G de 2 indeksli bir alt grup meydana getirir. Bu alt grup, genelde $PSL(2,\mathbb{R})$ ile gösterilir. U nun her konform homeomorfizmi $PSL(2,\mathbb{R})$ dedir. [18]

G üzerinde bir topolojik yapı oluşturmak için ;

$\tau=\{(a,b,c,d) \mid ad\text{-}bc=\pm 1\}\subset\mathbb{R}^4$ alt kümesini alalım. τ alt kümesi üzerinde $\mathbb{R}^4$ deki adi topolojinin kondurduğu alt uzay topolojisi (rölatif topoloji) nin bulunduğunu düşünelim. Bu τ alt uzayında $(a,b,c,d)\equiv(-a,-b,-c,-d)$ özdeşlemesini yapalım ve bu bağıntıyı R_τ ile gösterelim. Şimdi ${}^{\tau}\!/_{R_\tau}$ kümesi üzerine bölüm topolojisi koyalım. G ile ${}^{\tau}\!/_{R_\tau}$ arasında birebir, üzerine bir dönüşüm vardır. G nin üzerindeki topolojiyi bu dönüşümün kondurduğu topoloji olarak alıyoruz. Böylece G bir topolojik grup yapısına sahip olur. G topolojik grubu $PSL(2,\mathbb{R})$ ve $G\setminus PSL(2,\mathbb{R})$ gibi iki bileşene sahiptir. G nin bir ayrık alt grubuna bir öklid olmayan kristalize grup, veya kısaca bir NEC grup adı verilir. $PSL(2,\mathbb{R})$ deki bir NEC grubuna ise bir Fuchsian grup denir. Eğer bir NEC grubu (B) türündeki elemanları yani ters yönlendirilmiş elemanları içeriyorsa buna bir has NEC grubu diyeceğiz.

U üst yarı düzleminde, öklid olmayan (hiperbolik) düzlemin bir modeline aşağıdaki biçimde dönüştürülebilir.Bir yay elemanının hiperbolik uzunluğu ds yi

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

ile tanımlayalım. Böylece parçalı, sürekli, diferansiyellenebilir bir C eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$l(C)=\int_C ds=\int_C \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$$

ve $\iint_E \frac{dxdy}{y^2}$ mevcut ise E kümesinin hiperbolik alanı $\mu(E)=\iint_E \frac{dxdy}{y^2}$ olarak tanımlanır. Yukarıdaki metriğin geodezikleri, reel eksene dik çemberler ve doğrulardır. Bunlar hiperbolik doğrular olarak adlandırılır.

U da iki nokta arasındaki hiberbolik uzaklık, bu iki noktayı birleştiren bir tek hiperbolik doğru parçasının uzunluğudur.

Bu metrikle tanımlanan topoloji, bilinen öklid topolojisine eşdeğerdir. Yani bir topolojideki her açık küme, diğer topolojideki bir açık kümeyi içerir.

Hiperbolik uzaklık ve alan, $PSL(2,\mathbb{R})$ nin dönüşümleri altında değişmezdir [18].

2) Şimdi G nin elemanlarını yönlendirilmelerine ve sabit nokta kümelerine göre sınıflandıralım.

$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, G nin herhangi bir elemanı olsun. $\frac{az+b}{cz+d}=z$ eşitliğini gerçekleyen noktalara, T nin sabit noktaları denir.

Önce T, (A) türünde bir dönüşüm olsun. Tanım gereği $z=\frac{az+b}{cz+d}$ yazılırsa

$$cz^2+(d-a)z-b=0 \qquad (1)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri T nin sabit noktalarıdır. Diğer yandan (1) eşitliği sıfıra özdeş olmadıkça, ki bu halde $T(z)=z$ dir, en fazla iki farklı köke sahip olur. Yani T nin en fazla iki sabit noktası vardır.

Bu sabit noktaların $\mathbb{C}_\infty$ içindeki yerlerini belirtelim. (1) denkleminin diskriminantından ;

$$\Delta=(d-a)^2+4bc=d^2+a^2-2ad+4bc=d^2+a^2-2(ad-bc)+2bc\ ,\ ad-bc=1$$

$$=d^2+a^2-2+2bc$$

diğer yandan $ad-bc=1$ den $bc=ad-1$ eşitliği yazılırsa;

$$\Delta=d^2+a^2-2+2(ad-1)=d^2+a^2+2ad-4=(a+d)^2-4$$

O halde (1) denkleminin kökleri

$$z_{1,2}=\frac{-(d-a)\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$$

dir.

Böylece aşağıdaki üç olasılık söz konusudur:

1′) $|a+d|>2$ ise, iki farklı sabit nokta vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T ye hiperbolik dönüşüm denir.

2′) $|a+d|=2$ ise, birbirine eşit iki sabit nokta vardır ve bunlar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T ye parabolik dönüşüm denir.

3′) $|a+d|<2$ ise, birbirinin eşleniği olan iki kompleks sabit nokta vardır. Açıktır ki bu sabit noktalardan sadece biri U içinde bulunur. Bu durumda T ye eliptik dönüşüm denir.

Şimdi de T, (B) türünde bir dönüşüm olsun. Tanım gereği $z=\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ yazılırsa

$$cz\overline{z}+dz-a\overline{z}-b=0 \qquad (2)$$

denklemi elde edilir. Bu eşitliğin kökleri T nin sabit noktalarıdır. Bu köklerin $\mathbb{C}_\infty$ içindeki yerlerini belirtmek için (2) denklemine denk olan bir başka eşitlik ; $z=x+iy$ ve $\overline{z}=x-iy$ alınırsa

$$c(x+iy)(x-iy)+d(x+iy)-a(x-iy)-b=0$$

$$c(x^2+y^2)+dx-ax+i(dy+ay)-b=0$$

$$\left.\begin{array}{l} c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0 \\ (d+a)y=0 \end{array}\right\}$$

biçiminde elde edilir. Böylece iki olasılık söz konusudur :

(a) $a+d\neq 0$ ise $y=0$ dır. Bu durumda $cx^2+(d-a)x-b=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin diskriminantından ;

$$\Delta = (d\text{-}a)^2 + 4bc = d^2\text{-}2ad + a^2 + 4bc$$

diğer yandan $ad\text{-}bc = -1$ den $bc = ad + 1$ eşitlikte yerine yazılırsa ;

$$\Delta = d^2\text{-}2ad + a^2 + 4(ad+1) = a^2 + d^2 + 2d + 4 = (a+d)^2 + 4 > 0 \text{ dır.}$$

Bu nedenle T nin iki farklı sabit noktası vardır ve bunlar $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerindedirler. Bu durumda T ye kayan-yansıma denir.

(b) $a+d = 0$ ise, $(a+d)y = 0$ eşitliği özdeş olarak gerçekleneceğinden $c(x^2+y^2)+(d\text{-}a)x\text{-}b = 0$ eşitliği gereği T nin sabit noktaları kümesi bir çemberdir. Bu çemberin, $a+d = 0$ ve $ad\text{-}bc = -1$ eşitlikleri yardımıyla merkezi $(a/c, 0)$ da olan, $1/|c|$ yarıçaplı bir çember olduğu anlaşılır. Bu durumda T dönüşümüne yansıma denir.

Buna göre G nin, hiperbolik, parabolik, eliptik, kayan-yansıma, ve yansıma diye adlandırılan beş tip elemanı vardır.

Tanım 1.19. T_1 ve T_2, G grubunun herhangi iki elemanı olsun. $T_1 = TT_2T^{-1}$ olacak şekilde bir $T \in G$ elemanı varsa T_1 ve T_2 birbirinin eşleniğidir, denir.

Önerme 1.3. T_1 ve T_2 birbirinin eşleniği iseler aynı tipten elemanlardır.

Önerme 1.4. i) $PSL(2,\mathbb{R})$, U üzerinde transitiftir.

ii) $PSL(2,\mathbb{R})$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde ikili (çift) transitiftir.

İspat . i) $ai+b \in U, (a > 0)$ keyfi olsun.

$$T(z) = \frac{\dfrac{az}{\sqrt{a}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}}}{\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$$

olarak tanımlanırsa $T \in PSL(2,\mathbb{R})$ dir. Ayrıca $T(i) = ai+b$ olduğundan $G := PSL(2,\mathbb{R})$ alınırsa $Gi = U$ olur. Tanım 1.5. den $PSL(2,\mathbb{R})$, U üzerinde transitiftir.

ii) Eğer $p,q \in \mathbb{R}(p > q)$ ise $T_1(z) = \dfrac{z\text{-}p}{z\text{-}q}$ dönüşümü p noktasını 0 a, q noktasını ∞ a resmeder. $T_2(z) = z+p$ ise $\{0,\infty\}$ kümesini $\{p,\infty\}$ kümesi üzerine resmeder. Böylece

$$G(0,\infty) = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, p \neq q\}$$

yörüngesi bütün sıralı çiftleri bulundurur.

G nin elemanlarını $(a+d)$ izlerine ve determinantlarına göre sınıflandırabiliriz. G nin eşlenik elemanlarının aynı tip olduğu gerçeği kullanıldığında, dönüşümlerin beş türünden her biri bir doğal gösterime sahiptir. Doğal gösterimler aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

Eleman Türü	Doğal Gösterim
Hiperbolik	$z \to \lambda z \quad (\lambda > 1)$
Eliptik	$z \to w, \quad \dfrac{w-i}{w+i} = e^{i\theta} \dfrac{z-i}{z+i}, \quad \theta \neq 2n\pi$
Parabolik	$z \to z \pm 1$
Kayan-yansıma	$z \to \lambda \bar{z} \quad (\lambda < 1)$
Yansıma	$z \to -\bar{z}$

3) $\forall z \in U$ için $g \in \Gamma$ olmak üzere $g(V) \cap V \neq \varnothing \Rightarrow gz=z$ olacak şekilde z nin bir V açık komşuluğu varsa Γ NEC grubu U üzerinde düzenli-süreksiz hareket eder, denir.

Tanım 1.20. $\mathbb{R}^2$ deki açık kümelere homeomorf kümelerle oluşturulmuş bir açık örtümü mevcut olan bir bağlantılı Hausdorff uzayına bir yüzey adı verilir.

Not 1.2. $\mathbb{R}^2$ nin delinmiş bir açık kümesi , orijin noktası kaldırılmış birim diske homeomorf bir kümedir. Bir kapalı yarı düzlemin , delinmiş bir rölatif açık kümesi , orijin noktası kaldırılmış bir yarım diske homeomorftur.

Tanım 1.21. Bir F kapalı kümesine aşağıdaki özellikleri sağladığı takdirde Γ için bir temel bölgedir denir;

i) F bir Γ-örtüdür.

ii) $\overset{\circ}{F}$ bir Γ-paketlemedir.

iii) $\mu(F-\overset{\circ}{F}) = 0$

Tanım 1.22. $\forall w \in F$ için , w nın bir V-açık komşuluğu mevcut öyle ki $\{g \in \Gamma \mid gF \cap V \neq \varnothing\}$ kümesi sonlu ise F; Γ için bir normal temel bölgedir.

F yi iki şekilde elde edebiliriz:

1-Dirichlet Bölgesi [20] **:** Γ bir NEC grup ve $p \in U$, $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ için $\gamma(p) \neq p$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. d hiperbolik metrik olmak üzere

$$F = \{z \in U \mid \forall g \in \Gamma \text{ için } d(z,p) \leq d(g(z),p)\}$$

kümesine, Γ için Dirichlet Bölgesi denir.

2-Ford Bölgesi [20]: $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$, $T \in \Gamma$ ve $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ olsun. $I(T):|cz+d|^2 = 1$ çemberi, T nin izometrik çemberi olarak adlandırılır. $|T'(z)|=1 \Leftrightarrow z \in I(T)$ olduğundan izometrik çember, diferansiyel öklid uzunluğunu değiştirmeden T ile dönüştürülen noktaların yeridir. F_∞; Γ da sonsuzun Γ_∞ sabitleyeni için bir temel bölge ve K ; Γ nın tüm izometrik çemberlerinin dışında kalan bölge ise $F=F_\infty \cap K$, Γ için bir temel bölgedir.

Tanım 1.23. [20]. F bir Γ NEC grubu için aşağıdaki koşulları sağlayan bir normal temel bölge ise F ye bir düzgün temel bölge denir:

i) $U \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ da $\overline{F}$ nin sınırı basit, kapalı bir eğridir.

ii) U da F nin sınırı üzerinde, 1. tür köşeler diye adlandırılan ve sınırı hiperbolik doğru parçalarının sonlu bir birleşimine bölen noktalar kümesi mevcuttur. Hiperbolik doğru parçalarının bu sonlu birleşimleri, $U \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ daki bitim noktalarıyla birlikte F nin 1.tür kenarları olarak adlandırılır. Burada her kenar $b \in \Gamma$ için $\overline{F} \cap b\overline{F}$ biçiminde olmak zorundadır.

iii) $g \in \Gamma \setminus \{I\}$ için $\overline{F} \cap g\overline{F} \neq \emptyset$ ise $\overline{F} \cap g\overline{F}$, ya F nin bir kenarı, ya F nin bir tek köşesi ya da $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un bir tek noktasıdır.

$\overline{F}$ nin $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ile arakesitinin bağlantılı bileşenleri ; izole noktalar ise F nin 2. tür köşeleri olarak adlandırılır, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ un kapalı aralıkları ise F nin 2. tür kenarları olarak adlandırılır ve bu durumda bu aralıkların uç noktalarına da F nin 3. tür köşeleri denir.

F nin iki köşesi, aynı Γ yörüngesinde iseler kongrüdürler; F nin 1. tür iki kenarı, birini diğerine dönüştüren bir $g \in \Gamma$ varsa, kongrüdürler.

F nin 1. tür kenarlarını aşağıdaki gibi üç gruba ayırabiliriz:

a) $\alpha = F \cap aF$, $\alpha' = F \cap a^{-1}F$ ve $a \in \Gamma$, $a^2 \neq 1$ olmak üzere, α ve α' kongrü kenarlar ise $\alpha = a\alpha'$ dür.

b) α ve α' kongrü kenarlar, yani $\alpha = a\alpha'$ ve $a \in \Gamma$ eliptik bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\alpha \cup \alpha' = \overline{F} \cap a\overline{F}$ ve α, α' kenarları a nın sabit noktası olan bir ortak köşeye sahiptir.

c) $\gamma = \overline{F} \cap a\overline{F}$ ve $a \in \Gamma$ dönüşümü bir yansıma olsun. Bu durumda γ kenarı a tarafından sabit bırakılan bir hiperbolik doğru parçasıdır ve F nin başka hiçbir kenarına kongrü değildir.

Burada sadece, U^*/Γ yörünge uzayı kompakt olmak üzere sonlu üretilmiş Γ NEC gruplarıyla ilgileneceğiz. Kısaca U^* , U ile Γ nın parabolik noktaları kümesinin birleşimidir. Bu durumda Γ için herhangi bir temel bölge , 2. tür kenarlara sahip değildir, dolayısıyla 3. tür köşeleri de yoktur. Üstelik böyle gruplar sonlu kenarlı bir temel bölgeye sahiptir.

Kompakt yörünge uzaylı NEC grupları , parabolik elemanlar içermezler. $[18,28]$.

Kompakt yüzeylerin sınıflandırılması iyi bilinmektedir. $[23]$.

Her kompakt yönlendirilebilir yüzey, g tane kulp bağlı olan bir küreye homeomorftur.

Her kompakt yönlendirilemeyen yüzey, g tane çapraz-başlıklı bir küreye homeomorftur.

Her kompakt yönlendirilebilir sınırlı yüzey, g tane kulp bağlı ve k tane disk çıkarılmış bir küreye homeomorftur.

Her kompakt yönlendirilemeyen sınırlı yüzey, g tane çapraz-başlık bağlı ve k tane disk çıkarılmış bir küreye homeomorftur.

Tanım 1.24. $[29]$**.** Γ bir NEC grup ve F, Γ için bir düzgün temel bölge olsun. $\{gF : g\in\Gamma\}$ ailesinin U da oluşturduğu şekle bir F-döşemesi (tessellation) denir. Her bir gF ye döşemenin bir yüzü ve gF lerin kenar ve köşelerine de döşemenin kenar ve köşeleri denir. Buna göre döşemenin her bir yüzü, bir tek grup elemanını belirler ve tersine olarak her bir grup elemanı da döşemenin bir tek yüzünü belirler. Bir ortak kenar olan yüzlere komşuluklar adı verilir.

F ve F' bir α kenarında komşu iki yüz, yani $\alpha = F \cap F'$ olsun. a ile F yi F' ye dönüştüren veya $aF = F'$ olan grup elemanı gösterilsin. Eğer $\hat{\alpha}$ kenarı α kenarına kongrü ise $a(\hat{\alpha}) = \alpha$ olur.

Bir düzgün temel bölgeyle (örneğin Dirichlet Bölgesi) bir yüzey sembolünü ilişkilendirmek için önce tanım1.23. de (c) tipindeki elemanları etiketlendirelim.Geriye kalan kenarlar kongrü çiftlerden oluşur ve şimdi her kongrü çiftinden bir kenarı etiketleyelim. Eğer α böyle bir kenarın etiketi ise α nın kongrü kenarını, α ya resmeden dönüşümün yön-koruyan veya yön-korumayan olması durumuna göre α' veya α'' diye etiketlendirelim. Eğer saatin dönme yönünün tersinde F nin kenarlarının etiketleri numaralandırılır ise F için bir yüzey sembolü elde edilir ki bu sembol U^*/Γ nın topolojik yapısını belirler.

Γ için bir F-düzgün temel bölgeyi esas alarak, yeni bir temel bölgeyi aşağıdaki şekilde elde edebiliriz. α ve $\hat{\alpha}$, F nin kongrü iki kenarı ve $\alpha \in F_1$, $\hat{\alpha} \in F_2$ olacak biçimde

F nin iki köşesini birleştiren bir poligon yayı ile F yi F_1 ve F_2 gibi iki bölgeye ayıralım. Bu durumda $a(\hat{\alpha})=\alpha$ ise $F_1 \cup aF_2$, Γ için farklı bir yüzey sembolüne sahip yeni bir temel bölge olacaktır. Ayrıca yansıma ekseni olan kenarlar yine hiperbolik doğrular olacaktır. Bu yolla yüzey sembollerinin bir doğal gösterimi elde edilebilir.

Yüzey sembollerinin doğal gösterimlerinin iki türü vardır. Yönlendirilebilir yörünge uzaylı gruplar için;

$$\xi_1\xi_1'\ldots\xi_r\xi_r'\varepsilon_1\gamma_{10}\gamma_{11}\ldots\gamma_{1_{s_1}}\varepsilon_1'\ldots\varepsilon_k\gamma_{k0}\ldots\gamma_{ks_k}\varepsilon_k'\alpha_1\beta_1\alpha_1'\beta_1'\ldots\alpha_g\beta_g\alpha_g'\beta_g' \qquad (3)$$

yönlendirilemeyen yörünge uzaylı gruplar için;

$$\xi_1\xi_1'\ldots\xi_r\xi_r'\varepsilon_1\gamma_{10}\gamma_{11}\ldots\gamma_{1_{s_1}}\varepsilon_1'\ldots\varepsilon_k\gamma_{k0}\ldots\gamma_{ks_k}\varepsilon_k'\delta_1\delta_1^*\ldots\delta_g\delta_g^* \qquad (4)$$

şeklindedir.Burada (3)ün (4)den farkı yalnızca sembolün son kısmıdır ve x_i $(1\le i\le r)$ eliptik veya parabolik , e_i $(1\le i\le k)$ hiperbolik veya eliptik, c_{ij} $(1\le i\le k\ ,\ 1\le j\le s_i)$ yansıma, a_i, b_i $(1\le i\le g)$ hiperbolik, d_i $(1\le i\le g)$ kayan-yansıma dönüşümleri olmak üzere;

$$x_i(\xi_i')=\xi_i;e_i\left(\varepsilon_i'\right)=\varepsilon_i;c_{ij}\left(\gamma_{ij}'\right)=\gamma_{ij};a_i\left(\alpha_i'\right)=\alpha_i;b_i\left(\beta_i'\right)=\beta_i;d_i\left(\delta_i^*\right)=\delta_i \text{ dir.}$$

Eğer (3) yüzey sembollü temel bölgenin bağlantılı kenarları üzerine karşılık gelen noktalar belirlenirse g tane kulp eklenmiş ve r tane disk çıkarılmış bir (delinmiş) küre olan sınırlı yönlendirilebilir bir (delinmiş) yüzey elde edilir.

Benzer şekilde (4) yüzey sembolüyle g tane çapraz-başlık eklenmiş ve r tane disk çıkarılmış bir (delinmiş) küre olan sınırlı yönlendirilemeyen bir (delinmiş) yüzey elde edilir. Bu yüzey üzerinde (yönlendirilemeyen durumda) α kenarları ve (yönlendirilebilir durumda) α , β kenarları bir Q temel noktasında kesişen çapraz kesimlerin bir doğal gösterimini belirler.

Yüzeyin içinde r tane seçkin $M_1,\ldots,M_r$ noktaları (delinmiş olabilir) ve $1\le i\le k$ olmak üzere i. sınır bileşeni üzerinde s_i tane seçkin $N_{i1},\ldots,N_{is_i}$ noktaları (delinmiş olabilir) vardır. ξ_i doğrusu Q noktasını M_i noktasına ve ε_i doğrusu Q noktasını N_{i1} ile N_{is_i} arasındaki, i. sınır bileşeni üzerinde bir noktaya bağlar.

F yi komşu bir yüze dönüştüren grup elemanlarının kümesinin Γ yı ürettiği gösterilebilir. Γ daki bağıntıları aşağıdaki şekilde elde ederiz. Her bir köşede ona karşılık gelen sonlu sayıda yüz mevcuttur ve her bir yüz, bir önceki yüzün bir komşuluğunu meydana getirir. Eğer F bir köşe etrafındaki yüzlerden bir tanesi ise sırasıyla

$a_1F,\ a_1a_2F,\ a_1a_2a_3F,...(a_i \in \Gamma)$ yüzlerini karşılık getireceğiz. Sonlu sayıda adımdan sonra F yi elde ederiz. Böylece $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_1a_2...a_nF=F$ ve $a_1a_2...a_n = 1$ bağıntısı elde edilir. Elde edilen bu bağıntıya söz konusu olan köşe için bir doğal bağıntı denir. Kongrü köşelerin hepsinin aynı kanonik bağıntıyı verdiği ve gruptaki her bağıntının doğal bağıntıların bir sonucu olduğu gösterilebilir. a,b,c,e,x ile F yi $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\xi$ kenarlarına resmeden dönüşümleri gösterelim. Bu durumda (3) yüzey sembolü bir grup aşağıdaki gösterime sahiptir;

Üreticiler	x_i	;	i=1,...,r
	e_i	;	i=1,...,k
	c_{ij}	;	i=1,...,k , j=0,1,...,s_i
	a_i, b_i	;	i=1,...,g
	d_i	;	i=1,...,g

Bağıntılar	$x_i^{m_i} = 1$	;	i=1,...,r
	$c_{is_i} = e^{-1}c_{i0}e_i$	;	i=1,...,k
	$c_{i,j-1}^2 = c_{ij}^2 = \left(c_{i,j-1}c_{ij}\right)^{n_{ij}} = 1$		
	$x_1...x_re_1...e_ka_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1$		
	$x_1...x_re_1...e_kd_1^2...d_g^2 = 1$		

Burada $\mathbb{N}_2 := \{2,3,...\}$ olmak üzere $m_i \in \mathbb{N}_2$ ise x_i eliptik, $m_i = \infty$ ise x_i parabolik eleman olur. Eğer $n_{ij} \in \mathbb{N}_2$ ise yukarıdaki iki yansımanın bileşkesi bir eliptik eleman, $n_{ij} \in \infty$ ise bu bileşke ya bir parabolik eleman ya da bir hiperbolik elemandır. Açık olarak $m_i, n_{ij} \in \mathbb{N}_2 \bigcup \{\infty\}$ sayıları Γ nın yön koruyan elemanlarının mertebeleridir.

Üreticileri ve bağıntıları yukarıdaki gibi verilen Γ NEC grubu için

$$\sigma(\Gamma) = \left(g;\pm;[m_1,...,m_r];\left\{\left(n_{11},...,n_{1s_1}\right),...,\left(n_{k1},...,n_{ks_k}\right)\right\}\right) \tag{5}$$

gösterimine Γ nın bir NEC -simgesi , ya da kısaca $\sigma(\Gamma)$ ya Γ nın simgesi adı verilir. Eğer U^*/Γ yörünge uzayı yönlendirilebilir ise simgenin işareti pozitif olmakla birlikte

$\mathrm{sgn}\,\sigma(\Gamma)="+"$ ile gösterilir. Eğer U^*/Γ yörünge uzayı yönlendirilemez ise simgenin işareti negatif olup $\mathrm{sgn}\,\sigma(\Gamma)="-"$ ile gösterilir.

$\forall 1 \le i \le r$ için $m_i \in \mathbb{N}_2$

ise bu doğal sayılara Γ nın doğal periyotları ,

$\forall 1 \le i \le r$ için $m_i \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty\}$

ise bu $m_1,...,m_r$ terimlerine Γ nın özel periyotları denir.

$1 \le i \le k$ için $(n_{i1},...,n_{is_i})$

parantezine i. periyodik devir veya i. sınır bileşeni ve

$n_{i1},...,n_{is_i} \in \mathbb{N}_2 \cup \{\infty\}$

terimlerine i. periyodik devirin periyotları veya Γ nın link periyotları denir. Simgedeki $g \in \mathbb{N}$ sayısına da U^*/Γ yörünge uzayının cinsi denir. Bu cins, yüzeyin bir invaryantıdır.

Bir Γ NEC grubunun bir simgesi verilir ise bu durumda Γ nın yüzey sembolü ve gösterimi tek türlü olarak belirlenir. Yüzeyden çıkarılmış bir disk, bir delik veya bir sınır bileşeni olarak adlandırılır. Simgede; bir ∞ özel periyodu yüzeyin içindeki bir iç deliğe ve bir periyodik devirdeki bir ∞ link periyodu yüzeyin sınır üzerindeki bir deliğe karşılık gelir.(3) nolu simgede; özel periyotların bir boş kümesi (yani r=0 ise) $[\ ]$, bir boş periyodik devir (yani $s_i = 0$ ise) $(\ )$ ile gösterilir. Eğer simge hiçbir periyodik devir bulundurmuyorsa (yani k=0 ise) $\{\ \}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca boş periyodik devirlerin sayısı k ise $\{(\ )^k\}$ ile sembolize edilir.

Şimdi de, bazı özel durumlar için yeni simge tanımları verelim.

A) Eğer Γ bir Fuchsian grup ise bu grup deliksiz yönlendirilebilir bir yörünge uzayı belirler, Γ nın bütün periyotları özel periyotlardır. Ayrıca Γ yansıma dönüşümü içermediğinden simgede periyodik devir yoktur. Buna göre $\sigma(\Gamma)$ simgesi;

$$(g;+;[m_1,...,m_r];\{\ \}) \quad \text{veya} \quad (g;m_1,...,m_r)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

B) Eğer bir Γ NEC grubunun periyotları ve yansıması yok ise buna yüzey grubu denir. Buna göre bu yüzey grubu için ;

i) Yörünge uzayı yönlendirilebilir ise buna yönlendirilebilir yüzey grubu (Fuchsian yüzey grubu) denir ve $\sigma(\Gamma)$ simgesi ;

$$\left(g;+;[\ ],\{\ \}\right) \text{ veya } \left(g;\_\_\_\right)$$

şeklinde gösterilir.

ii) Yörünge uzayı yönlendirilemez ise buna yönlendirilemez yüzey grubu denir ve $\sigma(\Gamma)$ simgesi;

$$\left(g;-;[\ ],\{\ \}\right)$$

şeklinde gösterilir.

C) Eğer bir Γ NEC grubunun periyodu yok, fakat yansıma dönüşümü varsa buna sınırlı yüzey grubu denir ve $\sigma(\Gamma)$ simgesi bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left(g;\pm;[\ ],\left\{(\ )^k\right\}\right)$$

şeklinde gösterilir.

i) Yörünge uzayı yönlendirilebilir ise buna yönlendirilebilir bir sınırlı yüzey grubu (k sınır bileşenli) denir ve $\sigma(\Gamma)$ simgesi;

$$\left(g;+;[\ ],\left\{(\ )^k\right\}\right)$$

şeklinde gösterilir.

ii) Yörünge uzayı yönlendirilemez ise buna yönlendirilemez bir sınırlı yüzey grubu (k sınır bileşenli) denir ve $\sigma(\Gamma)$ simgesi;

$$\left(g;-;[\ ],\left\{(\ )^k\right\}\right)$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 1.1. Γ, (5) simgeli bir NEC grup olsun. Bu takdirde Γ nın herhangi bir temel bölgesinin hiperbolik alanı $\mu(\Gamma)$ ise

$$\mu(\Gamma) = 2\pi\left[wg-2+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)+k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s_i}\left(1-\frac{1}{n_{ij}}\right)\right] \tag{6}$$

dir. Burada $w=\begin{cases} 2 & , \quad \operatorname{sgn}\sigma(\Gamma) = '+' \\ 1 & , \quad \operatorname{sgn}\sigma(\Gamma) = '-' \end{cases}$ dir $[28]$.

Teorem 1.2. [Riemann-Hurwitz Formülü] **:** Γ bir NEC grubu ve $\Lambda \leq \Gamma$ olsun. Buna göre $|\Gamma:\Lambda| < \infty$ ise $|\Gamma:\Lambda| = |\Gamma/\Lambda| = \dfrac{\mu(\Lambda)}{\mu(\Gamma)}$ dır.

Γ kompakt bölüm uzaylı bir NEC grubu olduğunda , Wilkie (1966) iki NEC grubunun izomorf olması için bazı yeter şartlar verdi ve çalışması tamamen cebirseldi. Macbeath (1967), iki NEC grubunun izomorf olması için gerek ve yeter şartları buldu ancak bu sonuçlar cebirsel olarak elde edilmedi.

Tanım 1.25. Γ_1 ve Γ_2 kompakt bölüm uzaylı iki NEC grubu olsun. $\begin{array}{c} t:U \rightarrow U \\ x \rightarrow tx=x' \end{array}$ homeomorfizmi ve $\begin{array}{c} \Phi:\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2 \\ g_1 \rightarrow tg_1t^{-1}=g_2 \end{array}$ grup izomorfizması mevcutsa bu gruplar geometrik olarak izomorftur denir.

Buna göre Γ_1 ve Γ_2 nin geometrik olarak izomorf olması için gerek ve yeter koşul U nun bütün homeomorfizimlerinin grubunda, bu iki grubun kongrü olmalarıdır. Yukarıdaki t homeomorfizminin x in Γ_1 yörüngesini, tx in Γ_2 yörüngesine resmettiği kolayca görülebilir, çünkü $t(\Gamma_1 x) = t\Gamma_1 t^{-1}(tx)$ dir.Buradan çıkan sonuç, U/Γ_1 ve U/Γ_2 kompakt bölüm uzayları arasında bir homeomorfizm vardır $[21]$.

1.3. Γ Modüler Grup

Tanım 1.26. $w(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$; $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve $ad-bc=1$ biçimindeki bütün Möbiüs dönüşümlerinin kümesine Modüler grup denir ve Γ ile gösterilir. Grup aşağıdaki gibi 2x2 lik tamsayılar matrisiyle de temsil edilebilir.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = 1$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matrisi negatifi ile eş tutacağız. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacak. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}, k \neq 0$$

matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden, matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisleri eşit gibi yazabiliriz (Burada $\det = 1$ olma şartı aranmayabilir). Aşağıdaki teorem, Γ nın $T(z)=z+1$ ve $U(z)=-\dfrac{1}{z}$ dönüşümleriyle üretildiğini göstermektedir.

Teorem 1.3. Γ modüler grubu $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $U=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerine karşılık gelen dönüşümlerle üretilir.

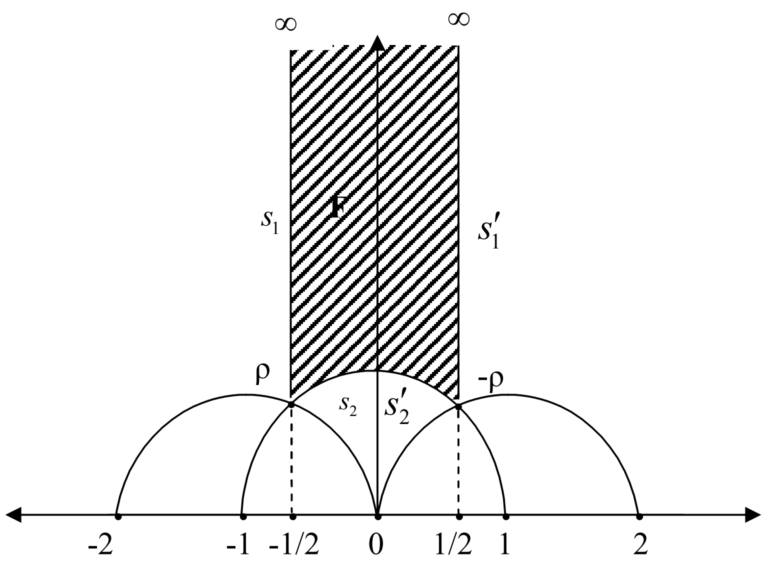
İspat : Önce Γ için Ford bölgesini bulalım. Γ da ∞ un sabitleyeni Γ_∞ ile gösterilsin. Bu durumda Γ_∞ un $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile üretilen devirli grup olduğu açıktır.

$F_\infty = \left\{ z \in U \ :|\operatorname{Re} z| \le \frac{1}{2} \right\}$ olsun.Bu F_∞ şeridi , Γ_∞ sabitleyeni için bir temel bölgedir.

En geniş izometrik çemberler 1 yarıçaplıdır ve bu çemberlerin merkezleri reel eksen üzerindeki tam sayılardır. Sadece merkezleri 0,-1,1 olan üç çember F_∞ ile kesişir. Burada $\rho = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $-\overline{\rho} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere 0-merkezi çember $\rho, -\overline{\rho}$ da ; 1-merkezli çember $-\overline{\rho}$ da; -1 merkezli çember ρ da F_∞ ile kesişir. Diğer çemberlerin yarıçapı $\frac{1}{2}$ den küçük veya eşittir. Bu nedenle şekilde görüldüğü gibi F bölgesi üzerinde bu çemberler önem taşımaz. Buna göre ;

$$F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 1 \ , |x| \le \frac{1}{2} \ , \ y>0 \right\}$$

kümesi Γ modüler grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 1.1. Γ nın F temel bölgesi

$T(z)=z+1$ için $T(s_1)=s_1'$ ve $U(z)=-\frac{1}{z}$ için $U(s_2)=s_2'$ olduğundan (s_1,s_1') ve (s_2,s_2') kongrü kenar çiftleridir. Bu nedenle T ve U dönüşümleri Γ modüler grubunu üretir. Burada T bir parabolik eleman ve U, 2. mertebeden bir eliptik elemandır. Buna göre;

$$TU=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

3. mertebeden bir eliptik eleman olduğundan, $V:=TU$ olmak üzere Γ, $U(z)=-\frac{1}{z}$ ve $V(z)=\frac{z-1}{z}$ elemanlarıyla da üretilir. Dolayısıyla da $U^2=V^3=I$ dır.

Şimdi de Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}:=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ olmak üzere $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketini inceleyelim. $\hat{\mathbb{Q}}$ nun elemanları $(x,y)=1$ olmak üzere $\frac{x}{y}$ olarak yazılabilir. Burada $\infty=\frac{1}{0}=-\frac{1}{0}$ dır. $\frac{x}{y}=\frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek türlü değildir. $T\in\Gamma$ ise

$$T\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ax+by}{cx+dy}$$

ve

$$T\left(\frac{-x}{-y}\right)=\frac{-ax-by}{-cx-dy}=\frac{ax+by}{cx+dy}=T\left(\frac{x}{y}\right)$$

olduğundan Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi iyi tanımlıdır.

Eğer $(x,y)=1$ ve $ad-bc=1$ ise $a(cx+dy)-c(ax+by)=y$ ve $d(ax+by)-b(cx+dy)=x$ olduğundan $(ax+by,cx+dy)=1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\frac{ax+by}{cx+dy}$ indirgenmiş biçimdedir.

Teorem 1.4. $\widehat{\mathbb{Q}}:=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ olmak üzere, Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat. $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\widehat{\mathbb{Q}}$; $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ ve $(a,b)=(c,d)=1$ olsun. Bu durumda $a\beta-b\alpha=1$ ve $c\delta-d\gamma=1$ olacak şekilde $\alpha,\beta,\delta,\gamma\in\mathbb{Z}$ tamsayıları vardır.

Burada $\xi(z)=\dfrac{az+\alpha}{bz+\beta}$ ve $\eta(z)=\dfrac{cz+\gamma}{dz+\delta}$ şeklinde tanımlanırsa $\xi(\infty)=\dfrac{a}{b}$ ve $\eta(\infty)=\dfrac{c}{d}$ olacak şekilde bir $\varphi\in\Gamma$ dönüşümü vardır. Dolayısıyla Γ, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

Teorem 1.5. $\widehat{\mathbb{Q}}$ nın ∞ noktasının sabitleyeni sonsuz devirli bir gruptur.

İspat. $T\in\Gamma$ ve $T(\infty)=\infty$ olsun.

$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ise $T(\infty)=\infty$ olduğundan $c=0$ ve $ad=1$ dir.

Buradan

$$T(z)=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=a^2z+m=z+m \quad (m=b \text{ veya } m=-b)$$

bulunur.

Dolayısıyla $U(z)=z+1$ olmak üzere ,

$\Gamma_\infty=\langle U\rangle$ dur.

1.4. $\Gamma(N)$ ve $\Gamma_0(N)$ Kongrüans Altgrupları

Tanım 1.27. $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma \,\middle|\, \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N\right\}$ kümesi, modüler grubunun temel kongrüans alt grubu olarak adlandırılır ve $\Gamma(N)$ ile gösterilir. Modüler grubun özel bir kongrüans altgrubu da, N bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma \,\middle|\, c\equiv 0 \bmod N\right\}$$

grubudur.

$\Gamma(N)$ ve $\Gamma_0(N)$ grupları Γ da sonlu indekse sahiptirler. Buna göre;

$$\Gamma(N) \text{ nin } \Gamma \text{ daki indeksi } \begin{cases} 6 & , \quad N=2 \\ \dfrac{N^3}{2}\prod\limits_{N|p}\left(1-\dfrac{1}{p^2}\right) & , \quad N>2 \end{cases}$$

$\Gamma_0(N)$ nin Γ daki indeksi $N\prod\limits_{N|p}\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$ dir.

$\Gamma(N)$, Γ nın aşağıdaki gibi bir normal altgrubu olsun. $\Psi:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z}_N$ doğal halka homomorfizmasından

$$\widetilde{\Psi}:\Gamma\rightarrow PSL(2,\mathbb{Z}_N)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} a_N & b_N \\ c_N & d_N \end{pmatrix}$$

grup homomorfizması elde edilir. $\widetilde{\Psi}$ nin çekirdeği $\Gamma(N)$ olduğu kolayca görülür.

1.5. $PSL(2,\mathbb{R})$ deki Parabolik ve Eliptik Alt Gruplar

Teorem 1.6. $[9]$. $PSL(2,\mathbb{R})$ nin bir parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanının $PSL(2,\mathbb{R})$ deki merkezleyeni, aynı sabit nokta kümeli tüm parabolik (eliptik, hiperbolik) elemanlardan meydana gelir.

Teorem 1.7. $[18]$. Her Abel, Fuchsian grup devirlidir.

Yukarıdaki iki teoremden $PSL(2,\mathbb{R})$ de bir Fuchsian grubunun, aşağıdaki gibi 3 tür alt grubu olduğu sonucunu elde ederiz.

C, $PSL(2,\mathbb{R})$ deki keyfi bir altgrup ise C abel $\Leftrightarrow$ C devirli; bu yüzden C nin birim olmayan bütün elemanları aynı sabit nokta kümesine sahiptir ve aynı türdendir. Ya tümü parabolik, ya tümü eliptik ya da tümü hiperboliktir.

Tanım 1.28. Λ bir Fuchsian grup olsun. Λ nın birim elemandan ve parabolik (eliptik) elemanlardan oluşan devirli bir maksimal alt grubuna Λ nın bir parabolik (eliptik) alt grubu denir.

Tanım 1.29. Bir Λ Fuchsian grubunun parabolik (eliptik) alt gruplarının eşlenik sınıflarının sayısına Λ Fuchsian grubunun parabolik (eliptik) sınıf sayısı denir.

Tanım 1.30. Λ bir Fuchsian grup olsun. Bir $r\in\widehat{\mathbb{Q}}$ noktası keyfi verildiğinde $\gamma(r)$=r olacak şekilde bir $\gamma\in\Lambda$ parabolik elemanı bulunabiliyorsa, bu noktaya Λ Fuchsian grubunun bir cusp denir. Benzer şekilde $z\in U$ noktası keyfi verildiğinde $\sigma(z)$=z olacak şekilde bir $\sigma\in\Lambda$ eliptik elemanı bulunabiliyorsa bu noktaya Λ nın bir eliptik noktası adı verilir.

$\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_B(N)$ ile göstereceğimiz $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki normalliyeninde parabolik elemanların bütün sabit noktaları ya rasyoneldir ya da ∞ dur. Tersine $\widehat{\mathbb{Q}}$ daki her eleman $\Gamma_0(N)$ ve $\Gamma_B(N)$ nin parabolik elemanlarının sabit noktalarıdır.

Lemma 1.4. $[18]$. A ve B bir G grubunun alt grupları ve $C = A \cap B$ olsun. Bu durumda $|B:C| \leq |G:A|$ dir.

İspat. C nin B deki her BC yan sınıfı için, A nın G deki bir bA yansınıfı ilişkilendirelim. Bu işlem yan sınıfı gösteriminin seçiminden bağımsızdır. $b_1C=b_2C$ ise $b_1^{-1}b_2 \in C \leq A$ olduğundan

$$b_1A=b_2A \ (b_1,b_2 \in B) \text{ ise } b_1^{-1}b_2 \in A \cap B=C$$

olduğundan $b_1C=b_2C$ elde edilir. Böylece en az C nin B deki yan sınıflarının sayısı kadar, A nın G deki yan sınıflarının sayısı kadar, A nın G de yan sınıfı mevcuttur.

Bu yüzden $\Lambda = \Gamma_0(N)$ veya $\Gamma(N)$, $G = \Gamma$, $A = \Lambda$ ve $B = \Lambda_r$ ise $C = A \cap B = \Lambda_r$ elde edilir. Böylece $|\Gamma_r : \Lambda_r| \leq |\Gamma : \Lambda|$ sonludur. Öyleyse Λ_r basit değildir (aslında sonsuzdur). $\Lambda_r = \Gamma_B(N)$ ise $\Gamma_0(N) \subset \Gamma_B(N)$ olduğundan Γ_r nin basit olmadığını elde ederiz.

Lemma 1.5. $[7]$. Bir $\Lambda \subset PSL(2,\mathbb{R})$ alt grubu ve bir $\gamma \in \Lambda$ hiperbolik elemanı verilsin. Eğer bir $\beta \in \Lambda$ elemanının γ ile sadece bir tek ortak sabit noktası varsa Λ bir Fuchsian grup değildir.

İspat. $\gamma(0) = 0$, $\gamma(\infty) = \infty$ ve $\beta(\infty) = \infty$ olduğunu varsayalım. O halde matris gösteriminde;

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}, |\alpha| \neq 0,1 \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \ ab \neq 0$$

biçimindedirler. Buradan

$$\beta\gamma^n\beta^{-1}\gamma^{-1} = \Psi_n = \begin{pmatrix} 1 & ab(1-\alpha^{2n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \Psi_n \in \Lambda$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \to \infty(|\alpha| < 1)$ ya da $n \to -\infty(|\alpha| > 1)$ için

$$\Psi_n \to \Psi = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Diğer yandan $ab \neq 0$ ve $|\alpha| \neq 0,1$ olduğundan Ψ_n ler farklıdırlar. Bu nedenle Λ Fuchsian grup değildir.

Sonuç 1.1. $[7]$. Λ nın parabolik alt grupları $\Lambda_r (r \in \widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$ sabitleyenleridir.

İspat. Her bir $C \leq \Lambda$ parabolik alt grubu tek bir $r \in \widehat{\mathbb{Q}}$ sabit noktasına sahiptir. Böylece $C \leq \Lambda_r$ dir. Diğer taraftan Λ_r nin basit değil ancak devirli olduğunu biliyoruz. C maksimal olduğundan $\Lambda_r \leq C$ dir ve bu yüzden sonuç aşağıdaki gibidir.

Sonuç 1.2. Λ nın parabolik sınıf sayısı Λ nın $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki yörüngelerinin sayısına eşittir.

İspat. $r, r' \in \hat{\mathbb{Q}}$ elemanlarının Λ nın aynı yörüngesinde olmaları için gerek ve yeter şart Λ_r v e $\Lambda_{r'}$ nün Λ da eşlenik olmalarıdır. Eliptik grupların eşlenik sınıflarının sayısı ε ile gösterilsin. ε nun aynı zamanda Λ nın özdeş olmayan eliptik noktalarının sayısı olduğunu göstereceğiz. $\Gamma_0(N)$ de her eliptik eleman 2 ya da 3 mertebelidir. Dolayısıyla $\varepsilon_i(\varepsilon_\rho)$ ile üreticileri 2(3) mertebesine sahip eliptik altgrupların eşlenik sınıflarının sayısı gösterilirse $\varepsilon=\varepsilon_i+\varepsilon_\rho$ olur.

Daha önceden olduğu gibi Γ ile, U^*/Γ kompakt olmak üzere, sonlu üretilmiş bir Fuchsian grubunu gösterelim. Burada U^*, U-üst yarı düzlemiyle Γ nın parabolik noktalarının birleşimidir.

Önerme 1.5. $[28]$. Γ yukarıdaki gibi olsun. Bu durumda Γ nın özdeş olmayan hem parabolik noktalarının hem de eliptik noktalarının sayısı sonludur.

Tanım 1.31. Bir G grubunun A ve B alt grupları verildiğinde; $A \cap B$, A ve B de sonlu indekse sahipse bu alt gruplar orantılıdır denir.

Önerme 1.6. $[28]$. Γ_1 ve Γ_2 orantılı Fuchsian grupları ise Γ_1 ve Γ_2 aynı parabolik noktaları kümesine sahiptir.

Önerme 1.7. $[28]$. Γ_1 ve Γ_2 orantılı Fuchsian grupları olsun.Bu durumda;

$$U^*/\Gamma_1 \text{ kompakt } \Leftrightarrow U^*/\Gamma_2 \text{ kompakt.}$$

Bu $U^*/\Gamma_0(N)$ nin kompakt Riemann yüzeyi olduğunu aşağıda göstereceğiz.Böylece yukarıdaki iki önermeyi kullanarak $U^*/\Gamma(N)$ ve $U^*/\Gamma_B(N)$ nin de kompakt olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi $\Gamma_0(N)$ nin özdeş olmayan parabolik noktalarının kümesini göz önüne alalım ve $\Gamma_0(N)$ nin $\eta(N)$-parabolik sınıf sayısını hesaplayalım.

Lemma 1.5. $[26, 28]$.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & , \quad 4|N \quad \text{ise} \\ \prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-1}{p}\right)\right) & , \quad 4\nmid N \quad \text{ise} \end{cases} \tag{1}$$

$$\varepsilon_\rho = \begin{cases} 0 & , \quad 9|N \quad \text{ise} \\ \prod_{p|N}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right) & , \quad 9\nmid N \quad \text{ise} \end{cases} \tag{2}$$

$$\eta(N) = \sum_{d|N}\varphi\left(\left(d, N/d\right)\right) \tag{3}$$

burada φ-Euler fonksiyonu olmak üzere,

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 0 & , \quad p=2 \\ 1 & , \quad p\equiv 1(\text{mod}4) \\ -1 & , \quad p\equiv 3(\text{mod}4) \end{cases} \quad ,$$

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 0 & , \quad p=3 \\ 1 & , \quad p\equiv 1(\text{mod}3) \\ -1 & , \quad p\equiv 2(\text{mod}3) \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Şimdi de $\hat{\mathbb{Q}}$ da keyfi bir $\Gamma_0(N)$ yörüngesinin gösterimi olarak, $d|N$ olmak üzere $\frac{a}{d}$ yi seçebileceğimizi gösterelim.

Lemma 1.6. $[7]$**.** Bir $\frac{k}{s}$ $(s\neq 0)$, $(k,s)=1$ rasyonel sayısı verildiğinde $A\left(\frac{k}{s}\right)=\left(\frac{k_1}{s_1}\right)$, $s_1|N$ koşulunu sağlayan bir $A\in\Gamma_0(N)$ vardır.

Lemma 1.7. $d_1|N$ ve $A\in\Gamma_0(N)$ için $(a_1,d_1)=(a_2,d_2)=1$ olmak üzere $A\left(\frac{a_1}{d_1}\right)=\left(\frac{a_2}{d_2}\right)$ olsun. Bu takdirde $a_1\equiv a_2\,(\text{mod}\,t)$, $t=\left(d_1,\frac{N}{d_1}\right)$ dir.

İspat . $A=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d\end{pmatrix}$ alınırsa $A\begin{pmatrix} a_1 \\ d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_1+bd_1 \\ Na_1c+dd_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 \\ d_1\end{pmatrix}$ dir. Bu yüzden

$$Na_1c+dd_1=d_1 \text{ veya } \frac{N}{d_1}a_1c+d=1$$

$$aa_1-a_2\equiv 0 \text{ (mod } d_1) \Rightarrow aa_1-a_2\equiv 0 \text{ (mod}\,t)$$

detA dan $ad \equiv 1 \pmod t$ elde edilir ve yukarıdan $d \equiv 1 \pmod t$ dir. Bu yüzden $a \equiv 1 \pmod t$. $aa_1 - a_2 \equiv 0 \pmod t$ olduğundan $a_1 \equiv a_2 \pmod t$ dir.

Lemma 1.8. $d|N$ ve $(a_1,d)=(a_2,d)=1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} a_2 \\ d \end{pmatrix} \text{ eşleniktir} \Leftrightarrow a_1 \equiv a_2 \pmod t \;, \quad t=\left(d, \frac{N}{d}\right)$$

İspat. Lemma 1.5. deki (3) ve Lemma 1.7. kullanılırsa kolayca gösterilebilir.

Teorem 1.8.$[6]$**.** G bir grup ve $M,N \lhd G$ olsun. $M \cap N = E$ (tüm grupların birim elemanlarını aynı e ile ve birim gruplarını da aynı E ile göstereceğiz.) ise, $\forall m \in M$ ve $\forall n \in N$ için $mn=nm$ dir.

Tanım 1.32.$[6]$**.** I bir indis kümesi olsun. G bir grup ve $G_i \leq G \; (i \in I)$ olsun. Aşağıdaki şartların gerçekleşmesi halinde, G grubu G_i alt gruplarının direkt çarpımıdır denir.

i) $\forall i \in I$ için $G_i \lhd G$ dir.

ii) $\forall g \in G$ elemanı, $g_i \in G_i$ ve yalnız sonlu sayıda i için $g_i \neq e$ olmak üzere $g = \prod_{i \in I} g_i$ şeklinde (faktörlerin sırası hariç olmak üzere) tek türlü olarak yazılabilir. Özellikle $i \neq j$ için $G_i \cap G_j = E$ ve dolayısıyla teorem 1.6. ya göre, $\forall g_i \in G_i$ ve $\forall g_j \in G_j$ için $g_i g_j = g_j g_i$ verilir.

G nin G_i lerin direkt çarpımı olması $G = \underset{i \in I}{\otimes} G_i$ ile gösterilir.

Tanım 1.33.$[6]$**.** Ω sonlu bir küme ve $|\Omega| = n$ olsun. Grup elemanlarından ayırt etmek için Ω kümesinin elemanlarına noktalar diyeceğiz ve bunları $1,2,...,n$ ile göstereceğiz. Ω kümesinin tüm birebir ve örten dönüşümlerinin kümesini göz önüne alalım. Ω kümesinin g ve h gibi iki birebir ve örten dönüşümünün çarpımı

$$i^{gh} = \left(i^g\right)^h, \; i \in \Omega$$

ile tanımlanırsa, sözü geçen dönüşümlerin kümesi bir grup teşkil eder ve S_n ile gösterilen bu gruba (Ω üzerinde) n inci dereceden simetrik grup denir. S_n simetrik grubunun elemanlarına, permütasyonlar denir ve bir $g \in S_n$ permütasyonu

$$g=\begin{pmatrix} 1 & 2 \; ... \; n \\ 1^g & 2^g \; ... n^g \end{pmatrix} \text{ veya kısaca } g=\begin{pmatrix} i \\ i^g \end{pmatrix}$$

ile gösterilir. Açık olarak

$$|S_n| = n!$$

dir.

Tanım 1.34.$[6]$**.** $g \in S_n$ olsun. Bu takdirde $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$\prod_{i<j}\left(i^g\text{-}j^g\right) = \varepsilon \prod_{i<j}\left(i\text{-}j\right), \quad i,j=1,2,...,n$$

verilir. ε na g permütasyonunun işareti denir ve $\varepsilon = \operatorname{sgn} g$ yazılır. $\operatorname{sgn} g = 1$ ise, g ye çift permütasyon ve $\operatorname{sgn} g = -1$ ise, g ye tek permütasyon denir.

Teorem 1.9.$[6]$**.** $\{g \mid g \in S_n\,(n>1),\ \operatorname{sgn} g = 1\} = A_n$

S_n grubunun 2 indeksli bir normal bölenidir.

Tanım 1.35.$[6]$**.** Teorem 1.9. de belirtilen A_n e, n inci dereceden alterne grup denir.

Tanım 1.36.$[6]$**.** S_n simetrik grubunun her alt grubuna, n inci dereceden bir permütasyon grubu denir.

Tanım 1.37.$[6]$**.** P_1, Ω_1 nokta kümesi üzerinde ve P_2, Ω_2 nokta kümesi üzerinde permütasyon grupları olsun. Bir $\varepsilon : \Omega_1 \to \Omega_2$ birebir ve örten dönüşümü ve bir $\Psi : P_1 \to P_2$ izomorfisi, $\forall i \in \Omega_1$ ve $\forall g \in P_1$ için

$$\left(i^g\right)^{\varepsilon} = \left(i^{\varepsilon}\right)^{g^{\Psi}}$$

olacak şekilde mevcutsa, P_1 ve P_2 ye benzer permütasyon grupları denir ve

$$P_1 \triangleq P_2$$

yazılır.

Tanım 1.38.$[18]$**.** n kenarlı bir düzgün poligonun simetri grubuna bir Dihedral Grup adı verilir ve D veya D_n ile gösterilir. Bu grup n tane rotasyon ve n tane yansımadan oluşur. Böylece de $|D| = 2n$ dir. Grup gösterimi olarak

$$D = \left\{a,b \mid a^n = b^2 = 1,\ ba = a^{-1}b\right\}$$

dir.

Tanım 1.39.$[6]$**.** G bir grup ve $H\,\Omega$ üzerinde (transitif olması gerekli olmayan) bir permütasyon grubu olsun. Ω nokta kümesini G grubuna resmeden dönüşümlerin kümesini $D(\Omega, G)$ ile gösterelim.

$$\left\{(f,h) \mid f \in D(\Omega, G), h \in H\right\}$$

kümesinde

$$\left(f_1,h_1\right)\left(f_2,h_2\right)=\left(f_{12},h_1h_2\right),\ f_{12}\left(i\right)=f_1\left(i\right)f_2\left(i^{h_1}\right),\ i\in\Omega$$

ile bir çarpma işlemi tanımlayalım. Bu küme tanımlanan çarpma işlemine göre bir gruptur:

$$\left(\left(f_1,h_1\right)\left(f_2,h_2\right)\right)\left(f_3,h_3\right)=\left(f_{12},h_1h_2\right)\left(f_3,h_3\right),\ f_{12}\left(i\right)=f_1\left(i\right)f_2\left(i^{h_1}\right)$$

$$=\left(f_{12,3},h_1h_2h_3\right),\ f_{12,3}\left(i\right)=f_{12}\left(i\right)f\left(i^{h_1h_2}\right)$$

$$\left(f_1,h_1\right)\left(\left(f_2,h_2\right)\left(f_3,h_3\right)\right)=\left(f_1,h_1\right)\left(f_{23},h_2h_3\right),\ f_{23}\left(i\right)=f_2\left(i\right)f_3\left(i^{h_2}\right)$$

$$=\left(f_{1,23},h_1h_2h_3\right),\ f_{1,23}\left(i\right)=f_1\left(i\right)f_{23}\left(i^{h_1}\right)$$

yazabiliriz.

$$f_{1,23}\left(i\right)=f_1\left(i\right)f_2\left(i^{h_1}\right)f_3\left(i^{h_1h_2}\right)=f_{12,3}\left(i\right)$$

olduğundan $f_{1,23}=f_{12,3}$ olup, asosiyatiflik gerçeklenir.

$\forall i\in\Omega$ için $e\left(i\right)=e$ olmak üzere $\left(e,e\right)$ birim elemandır:

$$\left(f,h\right)\left(e,e\right)=\left(g,h\right),\ g\left(i\right)=f\left(i\right)e\left(i^{h}\right)=f\left(i\right)$$

olduğundan $f=g$ ve dolayısıyla

$$\left(f,g\right)\left(e,e\right)=\left(f,h\right)$$

elde edilir.

$f\in D\left(\Omega,G\right)$ dönüşümünün inversini

$$f^{-1}\left(i\right)=f\left(i\right)^{-1}$$

ile tanımlayalım. Bu takdirde

$$\left(f,h\right)^{-1}=\left(g,h^{-1}\right),\ g\left(i\right)=\left(f\left(i^{h^{-1}}\right)\right)^{-1}$$

dir.

$$\left(f,g\right)\left(g,h^{-1}\right)=\left(u,e\right),\ u\left(i\right)=f\left(i\right)g\left(i^{h}\right)=f\left(i\right)\left(f\left(i\right)\right)^{-1}=e$$

olduğundan $u=e$ ve dolayısıyla

$$\left(f,h\right)\left(g,h^{-1}\right)=\left(e,e\right)$$

dir.

$G\wr H$ ile gösterilen bu gruba, G nin H ile “çelenk çarpımı” denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

2.1. $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ de $\Gamma_B(N)$ Normalliyeni

Γ modüler grubu bir çok alt gruba sahiptir. Bu alt gruplardan kongrüans alt grupları en önemlileri ve kesinlikle de en fazla bilinenleridir. Bu kongrüans alt gruplardan $\Gamma_0(N)$ grupları Klein Fricke ve bir çok matematikçi tarafından yoğun bir şekilde çalışılmış ve eliptik modüler fonksiyonlar teorisine temel teşkil etmişlerdir.

Bu bölümde $\Gamma_0(N)$'nin $PSL(2,\mathbb{R})$ de ki $\Gamma_B(N)$ normalliyenini çalışacağız ve $\Gamma_B(N) / \Gamma_0(N)$ grubu hangi N ler için grupların direk çarpım olarak yazılabileceğini göstereceğiz. Böylece ki $[5]$ de ki son teoremin diğer bir ifadesini de vermiş olacağız.

$\Gamma_0(N)$ nin modüler gruptaki normalliyeni $[24]$ da belirlenmiştir ki bu $h^2|N$ olan 24 ün en büyük böleni h olmak üzere $\Gamma_0(N/h)$ dir.

$\Gamma_B(N)$ normalliyenine gelince ilk defa $[21]$ de verildi. Fakat $[11]$ de en son şeklini aldı. $[11]$ de görüldüğü gibi normalliyen ki bunun ispatını aşağıda vereceğiz,

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix} \tag{1}$$

lere karşılık gelen dönüşümlerdir. Burada bütün semboller reel h yukarıdaki gibi e>0 N/h^2 nin bir tam böleni ve determinant e'dir (e, M nin bir tam bölenidir ancak ve ancak e/N ve $(e, M/e) = 1$ dir.). Eğer $M = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_r^{\alpha_r}$ M nin asal çarpanlarına parçalanışı ise bu takdirde M sayısı 2^r tane tam bölene sahiptir.

M nin tam bölenlerinin kümesini $Ex(M)$ ile gösterelim. $Ex(M) = \{m \in \mathbb{N} : m \| M\}$ olsun. Bu durumdaki $Ex(M)$ uygun bir işleme göre bir gruptur.

Teorem 2.1. $\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,R)$ deki normalliyeni

$$\overline{\Gamma_0}(N)=\left\{\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}:\det=e>0\right\}$$

ile tanımlanır. Buradaki bütün harfler tamsayı, $e\|N/h^2$ ve $h, h^2|N$ şartını sağlayan 24 ün en büyük bölenidir. $r\|s$ yani "r,s nin bir tam bölenidir" demek $(r,s/r)=1$ anlamındadır.

Öncelikle $\Gamma_0(N)$ nin PSL(2,Z) deki normalliyeninin nasıl elde edildiğini göstereceğiz.

Lemma 2.1. $N=\sigma^2 q^3 1$ ve q karesiz olsun. Bu durumda σ nın $\overline{\Gamma_0}=\Gamma_0(N/\Delta_1)$ eşitliğini sağlayan bir Δ_1 böleni mevcuttur.

Lemma 2.2. Her $A=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ ve σ için $\varepsilon|(d\text{-}a)$ koşulunu sağlayan bir ε-böleni mevcut olsun. Bu durumda $\varepsilon|\Delta_1$ dir.

Newman yaptığı ispatlarla $\Delta_1=h$ olduğunu göstermiş ve ayrıca yukarıdaki lemmaları kullanarak teorem 2.2. nin ispatını da yapmıştır.

Teorem 2.2. [21]. $N=2^{\alpha}3^{\beta}N_0\geq 1$, $(N_0,6)=1$ ve $u=\min\left(3,\left[\frac{\alpha}{2}\right]\right)$, $v=\min\left(1,\left[\frac{\beta}{2}\right]\right)$ ve ayrıca $[x],\leq x$ olan en büyük tam sayı olmak üzere

$\overline{\Gamma_0}=\Gamma_0(N/2^u 3^v)$ dir.

İspat. M normalliyenin keyfi bir elemanı olsun ve matris gösterimi olarak da $M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\in PSL(2,R)$ alalım. Bu takdirde

$$M\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}M^{-1}=\begin{pmatrix} 1\text{-}\alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & 1+\alpha\gamma \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N) \qquad (1)$$

$$M\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ N & 1 \end{pmatrix}M^{-1}=\begin{pmatrix} 1+N\beta\delta & -N\beta^2 \\ N\delta^2 & 1\text{-}N\beta\delta \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N) \qquad (2)$$

ve (2) den $\alpha=\sqrt{ut_1}$, $\beta=\sqrt{\frac{a}{b}\frac{I_1}{k}}$, $\xi=\sqrt{gt_2}$, $\gamma=\sqrt{s}I_2$ burada $u,t_1,a,b,I_1,k,g,t_2,s,I_2$ hepsi birer tam sayı; $(a,b)=(a,k)=(b,I_1)=1$ ve u,s,g,a,b karesizdir. (2) de $N\beta^2$ bir tam sayıdır, bu yüzden

$$bk \mid N \tag{3}$$

elde edilir. $\alpha\gamma$ bir tam sayı olduğundan $u=s$ ve $\beta\xi$ bir rasyonel sayı olduğundan $\sqrt{g\frac{a}{b}}$ bir rasyonel sayıdır, bu ise $g = ab$ eşitliğini verir, çünkü g,a,b karesizdir. Bu yüzden

$$M=\begin{pmatrix} \sqrt{u}t_1 & \sqrt{\frac{a}{b}\frac{I_1}{k}} \\ \sqrt{u}I_2 & \sqrt{ab}t_2 \end{pmatrix}$$

$$\det M=\sqrt{uab}t_1t_2-\sqrt{u\frac{a}{b}\frac{I_1}{k}}I_2=1 \tag{4}$$

dolayısıyla buradan

$$k\sqrt{uab}t_1t_2-\sqrt{u\frac{a}{b}}I_1I_2=k$$

$$k^2uabt_1^2t_2^2+u\frac{a}{b}I_1^2I_2^2-2kI_1I_2t_1t_2ua=k^2 \text{ dir.}$$

Bu $u\frac{a}{b}I_1^2I_2^2$ nin bir tamsayı olması gerektiğini söyler. Ancak $(a,b)=(a,k)=1$ olduğundan $a=1$ olmak zorundadır.

(4) kullanıldığında

$$\sqrt{ub}t_1t_2-\sqrt{\frac{u}{b}\frac{I_1}{k}}I_2=1$$

elde ederiz. Böylece

$$b\sqrt{u}t_1t_2-\sqrt{u}\frac{I_1}{k}I_2=\sqrt{b}$$

$$\sqrt{u}\left(bt_1t_2-\frac{I_1}{k}I_2\right)=\sqrt{b}$$

dolayısıyla $\sqrt{\frac{u}{b}}=\dfrac{1}{bt_1t_2-\frac{I_1I_2}{k}}$ bir rasyonel sayıdır. u ve b karesiz olduğundan $u=b$ eşitliği elde edilir. Buna göre

$$M=\begin{pmatrix} \sqrt{u}t_1 & \dfrac{I_1}{k\sqrt{u}} \\ \sqrt{u}I_2 & \sqrt{u}t_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$u=b$ olduğundan (3) den $N\equiv 0(\mathrm{mod}\,uk^2)$ dir. Öyleyse q karesiz olmak üzere $N=\sigma^2q$ dur. $\sigma^2q\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,uk^2\right)$ ve σ^2,N yi bölen en büyük karesiz olduğundan $k^2\left|\sigma^2\right.$, buradan $k\left|\sigma\right.$ dır.

uI_2^2, σ^2q ile bölünebilir olduğundan $\sigma^2\left|I_2^2\right.$ dolayısıyla $\sigma\left|I_2\right.$ dir. Buna göre z bir tam sayı olmak üzere $I_2=\sigma z$ dir. Şimdi $k\left|\sigma\right.$ olduğundan

$$\left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 q\equiv 0\left(\mathrm{mod}\,u\right)$$

$$\det M=ut_1t_2-\frac{I_1I_2}{k}=ut_1t_2-I_1\frac{\sigma}{k}z=1$$

dir. Bu yüzden $\left(u,\frac{\sigma}{k}\right)=1$, buradan $\left(u,\frac{\sigma^2}{k^2}\right)=1$ dir. Böylece $u\left|q\right.$ dur. Dolayısıyla

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} t_1 & \dfrac{I_1}{ku} \\ I_2 & t_2 \end{pmatrix}$$

dir. Yukarıdan $I_2^2=\sigma^2\frac{q}{u}q_1$ dir. Bu yüzden q_1,s bir tam sayı olmak üzere $\frac{q}{u}s^2$ biçiminde olmak zorunda, buradan $I_2=\sigma q\,s/u$ eşitliği elde edilir. Böylece

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} t_1 & \dfrac{I_1}{ku} \\ s\sigma q/u & t_2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Şimdi $t=I_1\,\sigma/k$ olsun. Bu durumda

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} t_1 & \dfrac{t}{u\sigma} \\ s\sigma q/u & t_2 \end{pmatrix}$$

M nin asıl biçimi elde etmek amacıyla $\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için $MAM^{-1} \in \Gamma_0(N)$ bağıntısını kullanalım. Matris çarpımı gerçekleştirildiğinde

$$\forall A \in \Gamma_0(N) \text{ için } (a\text{-}d)t_1 t \equiv (a\text{-}d)st_2 \equiv 0(\text{mod } \sigma)$$

elde edilir. Şimdi $\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için $\varepsilon_1=\varepsilon_1(N)=\text{EBOB}(a\text{-}d)$ tanımlayalım.

Burada EBOB ile $\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için $(a\text{-}d)$ nin en büyük ortak böleni gösterilmektedir. Daha sonra $\varepsilon_2=(\varepsilon_1,\sigma)$ yazalım. Buradan $t_1 t=st_2 \equiv 0(\text{mod } \sigma/\varepsilon_2)$ olduğu görülür. Lemma 2.1. ve Lemma 2.2. kullanıldığında $\varepsilon_2 | h$ (esasında $h=\varepsilon_2$) ve

$\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ için $a\text{-}d \equiv 0(\text{mod } h)$ sonucu çıkar.

Bu yüzden $t_1 t=st_2 \equiv 0(\text{mod } \sigma/h)$ denkliğini elde ederiz. $t_1 t \equiv 0(\text{mod } \sigma/h)$ olması $\Delta | \sigma/h$ olmak üzere $t_1=r\Delta$ olduğunu gösterir. Böylece $t=x\,\sigma/h\Delta$ dır. Benzer şekilde $st_2 \equiv 0(\text{mod } \sigma/h)$ ve $(t_1,s)=1$ olduğundan $s=y\,\sigma/h\Delta$ ve $t_2=v\Delta$, $\Delta | \sigma/h$ elde ederiz. Bu yüzden

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} r\Delta & \dfrac{x}{u\sigma\Delta} \\ \dfrac{yN}{hu\Delta} & u\Delta \end{pmatrix} \qquad (6)$$

elde edilir. (6) Lehner ve Newman tarafından 1964 te verilen biçimidir.

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} r\Delta\sqrt{u} & \dfrac{x}{h\Delta\sqrt{u}} \\ \dfrac{vN}{h} & v\Delta\sqrt{u} \end{pmatrix},\ \det M=1$$

$$M=\sqrt{u}\begin{pmatrix} ru\Delta^2 & \frac{x}{h} \\ \frac{vN}{h} & vu\Delta^2 \end{pmatrix},\ \det M=u\Delta^2$$

$\det M=rvu^2\Delta^4\text{-}xy\,N/h^2=u\Delta^2$ dir. $u|q$ ve $\Delta|\sigma/h$ olduğundan $u\Delta^2\,|\sigma^2\,q/h^2=\frac{N}{h^2}$ dir.

Diğer yandan $\det M=u\Delta^2$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $u\Delta^2\left\|\frac{N}{h^2}\right.$ dir. Dolayısıyla M

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix},\ \det=e>0,\ e\left\|\frac{N}{h^2}\right.$$

biçimindedir. Lemma 2.2. kullanıldığında, tersine olarak bu biçimdeki elemanların $PSL(2,R)$ de $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ normalliyenine ait olacağı görülebilir.

$\overline{\Gamma_0}(N)$, ilk kez 1964 yılında Lehner ve Newman tarafından $\Gamma_0(N)$ nin "Weierstrass noktaları" ile ilgili çalışmalarında kullanıldı. Daha sonra 1974 de Ogg normalliyenin "basit gruplar"la ilişkisini ortaya koydu. 1978 de Pizer Hecke'in "modüler formlar"la ilgili iddiasının normalliyenle olan bağıntısını gösterdi. 1979 yılında yine basit gruplarla ilgili bir çalışmada Conway ve Nortan $\overline{\Gamma_0}(N)$ nin yukarıda da kullandığımız bilinen en iyi tanımını verdiler $[11]$.

Lemma 2.3. $s,m\in Ex(M)$ ve $s*m=sm/(s,m)^2$ olsun. Bu takdirde $(Ex(M),*)$ bir gruptur ve bu grup, r M nin farklı asallarının sayısı ise, $C_2^{\,r}$ grubuna izomorftur.

İspat. Kolayca görülür ki 1 özdeş(birim) elemandır ve her eleman kendi tersine eşittir. Burada asosyatif özelliğini göstermek için P ve Q sırası ile s ve m nin tam asal kuvvet bölenlerinin kümeleri ise bu takdirde

$$P\Delta Q=(P\cup Q)-(P\cap Q)$$

$s*m$ nin tam asal kuvvet bölenlerinin kümesidir ve ayrıca Δ alt kümeleri üzerinde bir grup işlemidir. Grup 2^r mertebeli bir abel grubu olduğundan her eleman mertebesi 2'dir. Dolayısıyla $Ex(M)\cong C_2^{\,r}$ dir. (a(bc)=(ab)c asosyatif özelliği, birleşme özelliği)

Lemma 2.4. $ad \equiv 1 \bmod s$ den $a \equiv d \bmod s$ ancak ve ancak s, 24 ün bir bölenidir.

İspat. $(\Rightarrow)$: gereklilik: $ad \equiv 1 \quad \bmod s$ ise $a \equiv d \quad \bmod s$ elde edilsin. $U_s := \{[a] \in \mathbb{Z}_5 \mid (a,s) = 1\}$ olsun. Bu durumda $a^2 \equiv 1 \bmod s$ elde edilir. Böylece proplem $a \in U_s$ ve $a^2 \equiv 1 \bmod s$ olan s yi bulmaya indirgenmiş oldu.

Şimdi s yi $s=2^\alpha 3^\beta q_1^{\alpha_1} ... q_k^{\alpha_k}$ gibi asal çarpanlarına ayıralım. Burada $q_1,...,q_k$ 2 ve 3 ten farklı, farklı asal sayılardır. Böylece

$$U \cong U_{2^\alpha} \times U_{3^\beta} \times U_{q_1^{\alpha_1}} \times ... \times U_{q_k^{\alpha_k}}$$

dir. Şayet P bir tek asal sayı ve $e \geq 1$ ise U_{p^e} devirlidir. Böylece

$$U_{3^\beta}, U_{q_1^{\alpha_1}}, ..., U_{q_k^{\alpha_k}}$$

devirlidir. Bu grupların mertebeleri sıra ile

$$\varphi(3^\beta), \varphi(q_1^{\alpha_1}), ..., \varphi(q_k^{\alpha_k})$$

sayılarıdır. Bu grupların her elemanının mertebesi 2 olduğundan her biri 2 elemana sahiptir. Böylece β=1 ve q^α lar mevcut değildir. Bu bize β 1 veya 0 olmak üzere $s=2^\alpha 3^\beta$ yı verir. Diğer taraftan eğer

$$\alpha \geq 3 \text{ ise } U_{2^\alpha} = \{\pm 5^{\dot{I}} \mid 0 \leq \dot{I} \leq 2^{\alpha-2}\}$$

dir. 5 in m mertebesi $2^{\alpha-2}$ dir. $\alpha > 3$ ise m en azından 4 tür, fakat U_{2^α} nın her elemanı 2 mertebesine sahip olduğundan $\alpha \leq 3$ tür. Böylece $s \mid 24$ tür. s 24 ü böler.

$(\Leftarrow)$: yeter şart: $s \mid 24$ ve $ad \equiv 1 \bmod s$ olsun. Böylece

$$a,d \in \{1,5,7,11,13,17,19,23\}$$

tür. Bu bize $a^2 \equiv d^2 \equiv 1 \bmod s$ yi verir. Yani $a \equiv d \bmod s$ elde edilir.

(1) matrisi bir mobiüs dönüşümü temsil eder ve (1) de ki matrislerin kümesi matris çarpımı altında bir gruptur. Gerçekten birim eleman $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir.

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$$

matrisinin tersi

$$\begin{pmatrix} de & -b/h \\ -cN/h & ae \end{pmatrix}$$

dir ve burada $e \| N/h^2$ dir ve her iki determinantta $e>0$ dır.

$$\begin{pmatrix} ae & b/h \\ cN/h & de \end{pmatrix}$$

elemanının $\Gamma_0(N)$ de olması için gerek ve yeter şart $b \equiv c \equiv 0 \bmod h$ ve $e = 1 = ad\text{-}bc\, N/h^2$ olmasıdır. Böylece $ad \equiv 1 \bmod h$ dir ve Lemma 2.2 den $a \equiv d \bmod h$ dir. Bu grubun elemanları $\Gamma_0(N)$ nin normalliyenindedir.

Şimdi göstereceğiz ki (1) biçiminde aynı mobiüs dönüşümü temsil eden diğer matrisler verilen matrisin negatifidir. Özellikle biz aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız.

Lemma 2.5. k_1,k_2 $(k_1,k_2)=1$ olan sıfırdan farklı tamsayılar ve

$$k\begin{pmatrix} a_1e_1 & b_1/h \\ c_1N/h & d_1e_1 \end{pmatrix} = k_2\begin{pmatrix} a_1e_2 & b_2/h \\ c_2N/h & d_2e_2 \end{pmatrix}$$

ise $k_1,k_2 = \pm 1$ dir ve $e_1 = e_2$ dir.

İspat. $k_1b_1 = k_2b_2, k_1c_1 = k_2c_2$ böylece $k_2 | b_1, k_2 | c_1$ ve dolayısıyla $k_2 | b_1c_1$ dir. Determinant alırsak

$$k_1^2e_1 = k_2^2e_2$$

elde edilir ve böylece $k_2^2 | e_1$ dir.

$a_1d_1e_1\text{-}b_1c_1\, N/h^2e_1 = 1$ ve $h^2e_1 | N$, $k_2^2 | 1$ olduğundan $k_2 = \pm 1$ ve benzerlikle $k_1 = \pm 1$ dir. e_1 ve e_2 matrisler pozitif olduğundan $e_1 = e_2$ dir ispat biter.

Böylece e (1) ile verilen V dönüşümünün bir invaryantıdır. Böylece

$$E : \Gamma_B(N) \rightarrow Ex(N/h^2), E(V) = e$$

fonksiyonu tanımlayabiliriz.

Tanım 2.1. e ye V dönüşümünün eterminantı adı verilir.

Önerme 2.1. E bir epimorfizmadır.

İspat. $\begin{pmatrix} a_1e_1 & b_1/h \\ c_1N/h & d_1e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2e_2 & b_2/h \\ c_2N/h & d_2e_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B/h \\ CN/H & D \end{pmatrix}$

burada A,B,C,D (e_1,e_2) tarafından bölünür ve son matrisin determinantı e_1e_2 dir. Aynı zamanda $e_1,e_2 \in Ex(N/h^2)$ olduğundan A ve D nin her ikisi de e_1 ve e_2 nin en küçük ortak katı ile bölünür. Yani $e_1e_2 \mid (e_1,e_2)$ ile bölünür. Böylece son matris

$$(e_1,e_2) \text{ kere } \begin{pmatrix} a_3(e_1{*}e_2) & b_3/h \\ c_3N/h & d_3(e_1{*}e_2) \end{pmatrix}$$

matristir ki bu matris determinantı

$$e_1e_2 \mid (e_1,e_2)^2 = e_1{*}e_2$$

dir. Dolayısıyla çarpım dönüşümünün eterminantı $e_1{*}e_2$ dir. Böylece E bir homomorfizmadır. E nin örten olduğu (1) den kolaylıkla görülür.

Ayrıca $Ex(M) \cong C_2^r$ dir.

Sonuç 2.1. $(i)\, E(V)=E(V^{-1})$ dir.

$(ii)\, E(V_1V_2)=1$ ancak ve ancak $E(V_1)=E(V_2)$ dir.

Böylece aynı $\Gamma_0(N)$ yan sınıfına ait olan $\Gamma_B(N)$ deki matris aynı eterminanta sahiptir. Eğer

$$V_i=\begin{pmatrix} a_ie & b_i/h \\ c_iN/h & d_ie \end{pmatrix},\ i=1,2$$

matrislerin determinantı e ise $V_1V_2^{-1}$ i hesaplayarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Lemma 2.6. Yukarıdaki V_1 ve V_2 aynı $\Gamma_0(N)$ yan sınıfına aittir, ancak ve ancak $a_1b_2 \equiv a_2b_1 \bmod h,\ c_1d_2 \equiv c_2d_1 \bmod h$ dir.

İspat.

$$V_1V_2^{-1}=\begin{pmatrix} a_1e & b_1/h \\ c_1N/h & d_1e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2e & -b_2/h \\ -c_2N/h & a_2e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1d_2e^2-b_1c_2N/h^2 & -a_1b_2e/h+b_1a_2e/h \\ c_1d_2eN/h-d_1c_2eN/h & -c_1b_2N/h^2+d_1a_2e^2 \end{pmatrix}$$

Bu matristeki bütün girişler e ile bölünür. Böylece determinant 1 elde ederiz ve 2. giriş

$$(b_1a_2-a_1b_2)/h$$

ve 3. giriş

$$(c_1d_2-d_1c_2)/h$$

dir. Böylece $V_1V_2^{-1} \in \Gamma_0(N)$ ancak ve ancak $b_1a_2 \equiv a_2b_1 \bmod h$ ve $c_1d_2 \equiv d_1c_2 \bmod h$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi $\Gamma_B(N)$ normalliyenin yapısını daha iyi anlamak için bu grubun bazı önemli alt gruplarını verelim.

(A) $\Gamma_B(N)$ de determinantı 1 olan dönüşümlerin alt grubunu $\Gamma_C(N)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\Gamma_0(N/h^2)=\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Gamma_C(N)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix},$$

yani $\Gamma_C(N)$, $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile $\Gamma_0(N/h^2)$ nin eşleniğidir.

(B) $W_e=\begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix}$, $e\|N$ ve determinant $e>0$ biçimindeki matrislerin dönüşüm gruplarının kümesini $\Gamma_W(N)$ ile gösterelim. $\Gamma_W(N)$ nin elemanları Atkin-Lehner transformasyonları veya involüsyonları diye adlandırılır.

(C) Fricke Grup: $Z \to -1/NZ$ dönüşümüne Fricke transformasyonu denir ki bu normalliyendedir ve $\Gamma_0(N)$ yi Fricke Grubuna genişletilir ki bu Fricke grubunda $\Gamma_0(N)$ 2 indeksine sahiptir. Fricke transformasyonu açıkça W_N Atkin-Lehner transformasyonunun özel bir halidir.

Şimdi $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ deki indeksini hesaplayalım.

$$\Gamma_C(N), E:\Gamma_B(N)\to Ex\left(N/h^2\right)$$

çekirdeği olduğundan $\Gamma_C(N)$ $\Gamma_B(N)$ nin 2^ρ indeksi bir normal alt grubudur. Burada ρ N/h^2 nin farklı asal çarpanlarının sayısıdır. Ayrıca $\Gamma_0(N)$ alt grup $\Gamma_C(N)$ olduğu açıktır. $\Gamma_0(N)<\Gamma_C(N)$ dir.

Önerme 2.2. $\tau=(3/2)^{\varepsilon_1}(4/3)^{\varepsilon_2}$ ve

$$\varepsilon_1=\begin{cases}1,\text{eğer} 2^2,2^4,2^6\,\|\,N\\ 0,\text{aksihalde}\end{cases},\quad \varepsilon_2=\begin{cases}1,\text{eğer} 9\,\|\,N\\ 0,\text{aksihalde}\end{cases}$$

olmak üzere $\left|\Gamma_C(N):\Gamma_0(N)\right|=h^2\tau$ dur.

İspat. $\Gamma_C(N)$ determinantı 1 olan

$$\begin{pmatrix} a & b/h \\ cN/h & d \end{pmatrix}$$

dönüşümlerin (transformasyonların) kümesi olduğundan (A) yı kullanarak

$$\left|\Gamma_C(N):\Gamma_0(N)\right|=\left|\Gamma_0\left(N/h^2\right):\Gamma_0(N)\right|$$

elde edilir. $\Gamma_0(N)$ nin Γ modüler grubundaki indeksi

$$N\prod_{P|N}(1+1/P)$$

olduğundan $\tau=\prod_{p|N}(1+1/p)\Big/\prod_{p|N/h^2}(1+1/p)$ olmak üzere

$$\left|\Gamma_C(N):\Gamma_0(N)\right|=N\prod_{p|N}(1+1/p)\Big/N/h^2\prod_{p|N/h^2}(1+1/p)=h^2\tau$$

dur. Her r tamsayısı için $h(r),(h(r))^2 | r$ şartını sağlayan 24 ün büyük bölenini göstersin. Bu takdirde $(K,6)=1$ olmak üzere N yi $2^{\alpha}3^{\beta}K$ şeklinde yazabiliriz. Bu durumda $\alpha = 2,4,6$ veya $\beta = 2$ ise $\tau \neq 1$ elde edilir. Bu durum τ yu verir.

Sonuç 2.2. ρ ve τ yukarıdaki gibi ise $|\Gamma_B(N):\Gamma_0(N)|=2^{\rho}h^2\tau$ dur.

İhtarlar. 1) $[25]$ de olduğu gibi $2^{\rho}h^2\tau=2^{r}h^2 s$ dir. Burada r,ρ ve τ yukarıdaki gibi $s=s_2 s_3$ öyleki

$$s_2=\begin{cases} 3/4, \text{eğer} 2 \Big| \left(h\left(2^{\alpha}\right)\right)^2 \| N \\ 1, \text{aksihalde} \end{cases}$$

$$s_3=\begin{cases} 2/3, \text{eğer} \left(h\left(3^{\beta}\right)\right)^2 = 9 \| N \\ 1, \text{aksihalde} \end{cases} \text{ dur.}$$

2) $\Gamma_C(N)$ grubu $[11]$ de $\Gamma_0(n|h)$ şeklinde gösterilmişti. Önerme 2.1. de olduğu gibi

$$W_{e_1} \text{ ve } W_{e_2} \in \Gamma_W(N) \text{ ise } W_{e_1}W_{e_2}=W_{e_1 * e_2}$$

dir. Bu durumda çekirdeği $\Gamma_0(N)$ olan bir

$$E^{-1}:\Gamma_W(N) \to Ex(N)$$

epimorfizmasını elde ederiz. $\Gamma_W(N)/\Gamma_0(N) \cong C_2^r$ dir. Burada r N nin farklı asal bölenlerinin sayısıdır ve böylece $W_e^2 \in \Gamma_0(N)$ dir.

Önerme 2.3. $\Gamma_B(N)$ nin her V elemanı WT çarpımı olarak yazılabilir. Burada

$$W \in \Gamma_W(N) \text{ ve } T \in \Gamma_C(N)$$

dir.

İspat. $E(V)=e$, öyleki $e \| N/h^2$ olsun. $f \in Ex(N)$ bulacağız öyleki $E(W_f)=e$ olacak.

$$N=2^{\alpha}3^{\beta}N_0,\ (N_0,6)=1$$

olsun. Bu ise

$$N/h^2 = 2^{\alpha-2u}3^{\beta-2v}N_0$$

dir. $e \| N/h^2$ olduğundan $e = 2^i 3^j N_1$ dir. Öyleki

$i = \alpha-2u$ veya 0, $j = \beta-2v$ veya 0 ve $N_1 \| N_0$ dır.

$$f = \begin{cases} 2^{\alpha}3^{\beta}N_1, \text{ eğer, } i,j \neq 0 \\ 2^{\alpha}N_1, \text{ eğer, } i \neq 0,\ j = 0 \\ 3^{\beta}N_1, \text{ eğer, } i = 0,\ j \neq 0 \\ N_1, \text{ eğer, } i = j = 0 \end{cases}$$

olsun. Bu takdirde

$$E(W_f) = f/(h(f))^2 = e$$

dir. Böylece

$$E(W_f) = E(V)$$

dir. Buradan $E(W_f^{-1}V) = 1$ dir ve $W_f^{-1}V \in \Gamma_C(N)$ dir. Böylece $V = W_f T$ dir. Öyleki burada W_f bir Atkin-Lehner transformasyonu ve $T \in \Gamma_C(N)$ dir. İspat tamamlanır.

Bu verilenlerden aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_B(N) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \Gamma_W(N) \arrow[dr, dash] & & \Gamma_C(N) \arrow[dl, dash] \\ & \Gamma_0(N) & \end{tikzcd}$$

Veya $B(N) = \Gamma_B(N)/\Gamma_0(N)$, $C(N) = \Gamma_C(N)/\Gamma_0(N)$, $W(N) = \Gamma_W(N)/\Gamma_0(N)$

Tanımlanarak

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B(N) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ W(N) \arrow[dr, dash] & & C(N) \arrow[dl, dash] \\ & \{I\} & \end{tikzcd}$$

elde edilir. Böylece Önerme2.2. de olduğu gibi

$$|B(N)|=2^{\rho}h^{2}\tau=2^{r}h^{2}s$$

dir. $|C(N)|=h^{2}\tau$ ve $|W(N)|=2^{r}$ dir. Burada ρ, r ve s yukarıdaki gibidir. Böylece

$$|W(N)\cap C(N)|=2^{r-\rho}$$

dir. Bu durumda

$$3^{2}\,\|\,N \text{ ve } 2^{2\delta}\,\|\,N,\ \delta=1,2 \text{ veya } 3 \text{ ise } |W(N)\cap C(N)|=4$$

tür. Eğer $3^{2}\,\|\,N$ veya $2^{2\delta}\,\|\,N$ fakat her ikisini değil ise $|W(N)\cap C(N)|=2$

dir. Aksi halde

$$|W(N)\cap C(N)|=1$$

dir. Böylece sadece son durumda $B(N)$, $W(N)$ ve $C(N)$ nin bir yarı-direk çarpımıdır. $W(N)\cong C_2^{r}$ olduğunda $W(N)/\{I\}$ nin elemanları komütatiftir ve hepsinde mertebesi 2 dir ki bunlar Atkin-Lehner involusyonları olarak adlandırılır. Yukarıdan $2^{2}, 2^{4}, 2^{6}\,\|\,N$ veya $3^{2}\,\|\,N$ ise $C(N)$ nin Atkin-Lehner involusyonları içerir aksi halde içermez.

2.2. $B(N)$ nin Yapısı

Bu kısımda $B(N)$ sonlu gruplarının yapısını elde edeceğiz. Dikkat edilirse eğer N 4 veya 9 tarafından bölünmüyorsa $h=1$ dir ve böylece $B(N)\cong C_2^r$ dir. Biz özellikle $h>1$ durumuyla ilgileneceğiz. Buradaki temel amaç $B(N)$ nin $P\|N$ olmak üzere $B'(P^\alpha)$ gruplarının hemen hemen bir direk çarpımı olarak yazılabileceğini ve de $C(P^\alpha)$ ait gruplarının hemen hemen abel olduğunu göstermektedir.

$B(N)$ nin elemanları $\Gamma_0(N)$ nin yan sınıflarıdır. Burada $\Gamma_0(N)$ nin yan sınıfları küçük harflerle ve büyük harflerle de $\Gamma_0(B)$ de karşılık gelen dönüşümleri göstereceğiz.

Önerme 2.4. $C(N)$ grubu $\Gamma_0(N)$ nin

$$r=\begin{pmatrix}1 & 0\\ N/h & 1\end{pmatrix}, s=\begin{pmatrix}1 & 1/h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

yan sınıfları tarafından üretilir.

İspat. $r^h=s^h=1$ ve lemma2.4. ten $\langle r\rangle\cap\langle s\rangle=\{I\}$ dır. Böylece

$$\{r^i s^j \,|\, 0\le i\le h,\ \ 0\le j\le h\}$$

h^2 tane elemandan oluşur. Eğer $|C(N)|=h^2$ ise istenilen sonuç elde edilir. Önerme 2.2. den bu durum, N nin $2^2, 2^4, 2^6$ veya 3^2 ile bölünme durumları hariç, sağlanır. Böylece $\alpha=0,1,2$ veya 3, $\beta=2$ veya 1 ve $(N_1,6)=1$ olmak üzere $N=2^{2\alpha}3^{2\beta}N_1$ alalım. Bu durumda

$$h=2^\alpha 3^\beta, (h, N/h^2)=1$$

dir. Ve böylece $k,t\not\equiv 0 \bmod h$ elemanlarını bulabiliriz. Öyleki

$$1+kt\,N/h^2\equiv 0 \bmod h$$

dir. Şimdi

$$s^k r^t=\begin{pmatrix}1+kt\,N/h^2 & k/h\\ tN/h & 1\end{pmatrix}, \ r^i s^j=\begin{pmatrix}1 & j/h\\ iN/h & 1+ijN/h^2\end{pmatrix}$$

Lemma2.4. ten her i,j için $s^k r^t \neq r^i s^j$ dir. Böylece $\langle r,s\rangle$ grubu h^2 den fazla eleman içerir ve $\left|C(N)\right| \leq 2h^2$ olduğundan önerme2.2. den

$$\langle r,s\rangle = C(N)$$

elde edilir.

Sonuç 2.3. s Önerme 2.4. olduğu gibiyse $B(N)=\langle W(N),s\rangle$ dir.

İspat. Önerme 2.4. ten $C(N)=\langle r,s\rangle$ dir.

$$r=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N/h & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix},\ W=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

alırsak $r=WsW^{-1}$ elde edilir ve böylece Önerme 2.3. ten

$$B(N)=\langle W(N),s\rangle$$

elde edilir.

[25] göz önüne alınarak bir ikinci ispatta verebiliriz.

Tanım 2.2. $t=(d,N/d)|24$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ lere özel cusplar adı verilir ve bunların kümesi S ile gösterilir.

Lemma 2.7. $W(N)$ ve s yukarıdaki sonuçtaki gibi iseler $B_1(N)=\langle W(N),s\rangle$ grubu $B(N)$ ye eşittir.

İspat. İlk önce $\Gamma_0(N)$ özel cusplarının $\eta_S(N)$ sayısı

$$\sum_{d|N} j\left((d,N/d)\right)$$

ve $\eta:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$

bir çarpımsal fonksiyon olduğundan

$$\eta_S:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$$

bir çarpımsal fonksiyondur. Gerçekten $\left(N_1,N_2\right)=1$ olmak üzere $N=N_1N_2$ olsun. Bu takdirde

$$\eta_S\left(N\right)=\sum_{\substack{d/N\\(d,N/d)\|24}} j\left(\left(d,N/d\right)\right)=\sum_{\substack{kt|N_1N_2\\ d=kt,\,k|N_1,\,t|N_2\\(d,N/d)\|24}} j\left(\left(kt,N_1N_2/kt\right)\right)=\sum_{kt|N_1N_2} j\left(\left(k,N_1/k\right)\right)j\left(\left(t,N_2/t\right)\right)$$

$$\eta_S\left(N\right)=\sum_{k|N_1}\left(j\left(\left(k,N_1/k\right)\right)\sum_{t|N_2}j\left(\left(t,N_2/t\right)\right)\right)=\sum_{k|N_1}j\left(\left(k,N_1/k\right)\right)\sum_{t|N_2}j\left(\left(t,N_2/t\right)\right)=\eta_S\left(N_1\right)\eta_S\left(N_2\right)$$

Böylece $N=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}q_3^{\alpha_3}\ldots q_r^{\alpha_r}$, N nin asal çarpanlarına parçalanışı ise

$$\eta_S\left(N\right)=\eta_S\left(2^{\alpha_1}\right)\eta_S\left(3^{\alpha_2}\right)\prod_{i=3}^{r}\eta_S\left(q_i^{\alpha_i}\right)$$

dir.

i=3,...,r olduğunda $\eta_S\left(q_i^{\alpha_i}\right)=2$ dir ve bunların çarpımı 2^{r-2} dir. Genellikten bir şey kaybetmeden $\alpha_1>1$, $\alpha_2>1$ ve $\eta_S\left(2^{\alpha_1}\right)$ ve $\eta_S\left(3^{\alpha_2}\right)$ i göz önüne alalım. $\alpha\geq 3$ olduğundan $\eta_S\left(3^{\alpha}\right)=6,\eta_S\left(3^{2}\right)=4,\eta_S\left(2^{2}\right)=3,\eta_S\left(2^{3}\right)=4,\eta_S\left(2^{4}\right)=6,\eta_S\left(2^{5}\right)=2^3,\eta_S\left(2^{6}\right)=2^2 3$ ve $\alpha\geq 7$ olduğunda $\eta_S\left(2^{\alpha}\right)=2^4$ olduğundan

$$\eta_S\left(2^{\alpha_1}\right)=\begin{cases}2h\left(2^{\alpha_2}\right)\dfrac{3}{4}, \text{eğer } 2\left|\left(h\left(2^{\alpha_1}\right)\right)^2\right\|2^{\alpha_1}\\ 2h\left(2^{\alpha_1}\right), \text{aksi halde}\end{cases}$$

ve

$$\eta_S\left(3^{\alpha_2}\right)=\begin{cases}2h\left(3^{\alpha 1}\right)\dfrac{2}{3}, \text{eğer}\left(h\left(3^{\alpha_2}\right)\right)^2=9\|3^{\alpha_2}\\ 2h\left(3^{\alpha_2}\right), \text{aksi halde}\end{cases}$$

Böylece s_2 ve s_3 yukarıdaki gibi olmak üzere

$$\eta_S\left(2^{\alpha_1}\right)=2h\left(2^{\alpha_1}\right)s_2$$

ve

$$\eta_S\left(3^{\alpha_1}\right)=2h\left(3^{\alpha_2}\right)s_3$$

dür. Sonuç olarak

$\eta_S\left(N\right)=2^r hs$ böylece $\left|s\right|=2^r hs$ dir.

Şimdi gösterelim ki $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ özel cuspı $B_1\left(N\right)$ tarafından $t\left|24\right.$ ve $t^2\left|N\right.$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a_1 \\ t \end{pmatrix}$ özel cuspına gönderilir. $N_1,N_2,...,N_r$ farklı asal çarpanlar olmak üzere

$$N=N_1N_2...N_r$$

ve benzer şekilde $d_i\left|N_i\right.$ olmak üzere

$$d=d_1d_2...d_r$$

alalım. $d\nmid 24$ kabul edelim. d_i leri öyle bir sıraya koyalım ki $k\geq 1$ olmak üzere $d_k,d_{k+1},...,d_r\nmid 24$ olsun. $\left(\frac{N}{N_k},N_k\right)=1$ olduğundan

$$b\,N/N_k+cN_K=1$$

tam sayılar vardır. Böylece kolayca görebiliriz ki

$$W=\begin{pmatrix} cN_k & -b \\ N & N_k \end{pmatrix}$$

Atkin-Lehner involusyonu d_k yerine N_k/d_k gelir ve diğerleri de sabit bırakır. $\left(d,N/d\right)\left|24\right.$ olduğunda $N_k/d_k\left|24\right.$ tür. Bu şekilde r ye kadar devam edersek yeni cuspın t paydasının bütün asal kuvvetleri 24 ü ve onların karesi de N yi böler. Böylece

$t\left|24\right.$ ve $t^2\left|N\right.$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ nin $\begin{pmatrix} a_1 \\ t \end{pmatrix}$

ye götürüldüğü anlamına gelir. $s=\begin{pmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$s^{ha_1/t}=\begin{pmatrix} t & a_1 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cusp ını $\begin{pmatrix} a_1 \\ t \end{pmatrix}$ cusp ına resmeder. Kolayca görülebilir ki her özel cusp $B_1(N)$ ile bir özel kapsa gönderilir. $B(N)$ de $\infty = 1/N = 1/0$ cusp ının $B_\infty(N)$ sabitliyeni s ile üretilir ve böylece

$$B_\infty(N) \leq B_1(N) \text{ ve } |B_\infty(N)| = h$$

dir. Yörünge sabitliyen teoremi uygulanırsa

$$|B_1(N)| = |s||B_\infty(N)| = 2^r h^2 s$$

elde edilir.

Böylece $B_1(N)\text{=}B(N) = \langle W(N), s \rangle$ dir.

2.3. $\mathbf{B(p^\alpha)}$ nin Yapısı

Önerme2.2. den bütün p^α asal kuvvetleri için $B(p^\alpha)$ nın mertebesini hesaplayabiliriz. Bunun için aşağıdaki tabloyu verebiliriz.

Tablo 2.1. $B(p^\alpha)$ nın mertebesi

p^α	2	4	8	16	32	64	2^α $(\alpha \geq 7)$	3	9	3^β $(\beta \geq 3)$	p^α $(p \geq 5)$
$\lvert B(p^\alpha) \rvert$	2	6	8	24	32	96	128	2	12	18	2

$B(p^\alpha)$ da olduğu gibi yegane Atkin-Lehner involusyonu W_{p^α} Fricke involusyonudur. Bu $p^\alpha / \left(h(p^\alpha)\right)^2$ eterminantına eşittir. Bu eterminant 1 e eşit ancak ve ancak $p^\alpha = 2^2, 2^4, 2^6$ ya da 3^2 dir.

Lemma 2.8. $C(p^\alpha)$=$B(p^\alpha)$ dir ancak ve ancak $p^\alpha = 2^2, 2^4, 2^6$ ya da 3^2 dir. Diğer bütün durumlarda $C(p^\alpha)$, $B(p^\alpha)$ da 2 indeksine sahiptir.

Önerme 2.5. Her bir $B(p^\alpha)$ grubu iki eleman tarafından üretilir. Bunlardan birisi 2 mertebeden diğeri h mertebedendir.

İspat. Önerme2.4. ten sonra verilen sonuçta olduğu gibi

$$B(p^\alpha) = \left\langle W_{p^\alpha}, s \right\rangle, \; W_{p^\alpha}$$

2 mertebeli ve s de h mertebelidir.

Şimdi $C(p^\alpha)$ nin yapısını inceliyelim.

Önerme 2.6. $C(N)$ değişmelidir ancak ve ancak $h^3 | N$ dir. Bu durumlarda $C(N) \cong C_h \times C_h$ dir.

İspat. Önerme 2.4. te $C(N)$ nin r ve s tarafından üretildiğini gördük. Direk hesaplamalar gösterir ki

$$rsr^{-1}s^{-1} \in \Gamma_0(N)$$

dir ancak ve ancak $h^3 | N$ dir. Böylece

$$C(N) \cong \left\langle r,s \,|\, r^h = s^h = I, rs = sr \right\rangle \cong C_h \times C_h$$

dir.

Bu durum sadece $2, 2^3, 2^\alpha (\alpha \geq 9), 3, 3^\beta (\beta \geq 3), p^\alpha (p \geq 5)$ asal kuvvetleri için olur.

Sonuç 2.4. $N = p^\alpha$, asal kuvvetleri için $w = w_N$ olmak üzere

$\left\langle w,s \,|\, w^2 = s^h = I, (ws)^2 = (sw)^2 \right\rangle$ şeklinde verilir.

İspat. $wsw=r^{-1}$ ve r ve s de değişmeli olduğundan

$$(ws)^2=(sw)^2$$

dir. s ve r sıra ile 2 indeksi ve h^2 mertebeli bir değişmeli alt grup ürettiğinden bu yukarıdaki bize $2h^2$ mertebeli bir grup tanımlar.

Şimdi $h^2=N$ olan N asal kuvvetleri ile uğraşacağız. Yani $N=2^2,2^4,3^2$ ve 2^6 sayıları ile ilgileneceğiz. Buradan

$$w^2=s^h=(ws)^3=I$$

elde edilir. $h=2,3,4$ ve $B(N)$ nin mertebeleri sıra ile 6,12,24 olmak üzere

$$B(4)\cong D_3,\ B(9)=A_4$$

ve

$$B(16)\cong S_4$$

dür. $N=2^6$ ve $h=2^3$ ise

$$|B(N)|=96 \text{ ve } w^2=s^8=(ws)^3=I \text{ dir.}$$

Lemma 2.9. $B(2^6)=\left\langle w,s \,\middle|\, w^2=s^8=(ws)^3=(ws^{-1}ws)^3=I\right\rangle$ tür.

İspat. Kolayca gösterilebilir ki $ws^{-1}ws$ 3 mertebesine sahiptir. Böylece yukarıdaki şekilde temsil edilen grubun 96. mertebeden bir grup olduğunu görmemiz gerekir. Bu $[27]$ den iyi bilinen sonuçtur. Fakat yine de burada aşağıdaki gibi bir ispat vereceğiz. 2 mertebeli s^4 ve ws^4w elemanları ile üretilen grubu K ile gösterelim. Bağıntılardan $(s^4w)^4=I$ olduğunu elde edeceğiz.

$(ws)^3=I$ olduğundan $sws=w^{-1}sw,\ wsw=s^{-1}ws^{-1}$

ve

$(ws^{-1}ws)^3=I$ olduğundan $ws^{-1}ws=s^{-1}wsws^{-1}wsw$

dir.

$$\left(s^4w\right)^2\left(s^4w\right)^2=s\left(s^3w\right)s^4w=s\left(s^3ws\right)s^3w=s\left(s^2ws^{-1}ws\right)s^2w=s\left(swsws^{-1}wsw\right)s^2w$$
$$=sws^{-1}wws^{-1}wws^{-1}wsw=sws^{-3}wsw=sws^4ws^{-1}$$

ki bu 2. mertebedendir. Şimdi

$$K=\left\{s^4,ws^4w,\left(s^4w\right)^2,I\right\}$$

olsun. K nın herhangi bir elemanı 2. mertebedendir. Ve şimdi gösterelim ki K normaldir. Bunu göstermek için $s\left(ws^4w\right)s^{-1}\in K$ olmasını göstermek yeterlidir.

Diğer durumlar bundan ve bazı temel hesaplamalardan elde edilir. Yukarıdan

$$\left(ws^{-1}ws\right)^3=\left(sws^2\right)^3=s\left(ws^3\right)^2ws^2=I$$
$$I=\left(sw\right)^3=swsws^{-1}s^2w=swsws^{-1}sws^3ws^3ws^2s^2w$$
$$=sws^4ws^3ws^4w=sws^4ws^{-1}s^4ws^4w$$

olduğundan

$$s\left(ws^4w\right)s^{-1}=\left(s^4w\right)^2$$

elde edilir. Böylece K normal alt gruptur. s^4 tarafından üretilen K normal alt grubu 4 mertebesine sahiptir. Eğer K ile bölme yapılırsa w ve s $\bmod K$ ile üretilen grup 24 mertebeli S_4 grubuna izomorftur. Böylece yukarıda temsil edilen grup 4.24=96 mertebeli bir grup tanımlar. Böylece ispat tamamlanır.

Şu ana kadar $2^5, 2^7$ ve 2^8 asal kuvvetleri göz önüne almamıştık. Şimdi bunları sıra ile görelim.

$N=2^5$: Burada $h=2^2$ dir. Eğer

$$w=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2^5 & 0\end{pmatrix},\ s=\begin{pmatrix}1 & 1/4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

alırsak w ve s $B\left(2^5\right)$ i üretir ve aynı zamanda

$$w^2=s^4=\left(ws\right)^4=\left(ws^{-1}ws\right)^2=I$$

dır. Buna rağmen yukarıdaki üreticiler ve bağıntılar ile verilen grup 32 mertebeli bir gruptur. Bunu aşağıda görelim.

$ws^{-1}w$ ve s tarafından üretilen ve

$$\left(ws^{-1}w\right)^4=s^4=\left(ws^{-1}ws\right)^2=\left(wsws\right)^2=\left(ws\right)^4=I$$

bağıntılara sahip $C\left(2^5\right)$ grubunu bulalım. Böylece

$$C\left(2^5\right)\cong\left\langle x,y \,\middle|\, x^4=y^4=\left(xy\right)^2=\left(x^{-1}y\right)^2=I\right\rangle$$

tür $[12]$. $\left|C\left(2^5\right)\right|=16$ ve $C\left(2^5\right), B\left(2^5\right)$ de 2 indeksine sahip olduğundan $C\left(2^5\right)$ ile bölersek w ile üretilen grup C_2 ye izomorftur. Böylece yukarıdaki üreticiler ve bağıntılara sahip grup 32 mertebesine sahiptir.

$N=2^7$: Bu durumda $h=2^3$ tür. Şimdi 64 mertebesine sahip $C\left(2^7\right)$ grubunu bulalım. Bu grup

$$r=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{pmatrix},\ s=\begin{pmatrix}1 & 1/8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

iki eleman tarafından üretilir ve kolayca gösterilir ki r^2 ve s^2 değişmelidir ve de

$$\left\langle r^2\right\rangle\cap\left\langle s^2\right\rangle=\{I\}$$

dir. Böylece r^2 ve s^2 bir T abel alt grup üretir. Bu alt grup $C_4\times C_4$ e izomorftur ve de $C\left(2^7\right)$ deki indeksi 4 tür. Ayrıca

$$r^{-1}s^2r=r^4s^2 \text{ ve } s^{-1}r^2s=r^2s^4$$

dür ve böylece de T bir normal alt gruptur. Dolayısıyla $C\left(2^7\right)/T$ r ve s $\bmod T$ tarafından üretilir. $r\not\equiv s \bmod T$ olduğundan

$$C\left(2^7\right)/T\cong C_2xC_2$$

dir. $[17]$ daki gibi standart bir metot kullanarak $C\left(2^7\right)$ için aşağıdaki gösterimi bulalım.

$$\left\langle r,s \,\middle|\, r^8=s^8=I,\ r^2s^2=s^2r^2,\ r^{-1}s^2r=r^4s^2,\ s^{-1}r^2s=r^2s^4,\ r^{-1}s^{-1}rs=r^{-2}s^2\right\rangle$$

için bağıntı bir hesaplama ile görülebilir ve $C\left(2^7\right)/T$ bölüm grubunda bağıntılıdır. Bu ise bu grubun abel olduğunu gösterir. $B\left(2^7\right)$ için bir temsile gelince w üreticisini alıp $w^2=I$, $wsw=r^{-1}$ bağıntılarını göz önüne alırız. Buradan $B\left(2^7\right)$ için aşağıdaki temsil elde edilir.

$$\left\langle w,s \middle| w^2=s^8=I,\ \left(ws^2\right)^2=\left(s^2w\right)^2,\ s^2ws^{-1}w=ws^3ws^2,\ ws^2ws=s^{-3}ws^2w,\ \left(ws\right)^4=I\right\rangle$$

$N=2^8$: Yine burada $C\left(2^8\right)$ i bulmakla başlayacağız. Bu grubun üreticileri

$$r=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 32 & 1 \end{pmatrix},\ s=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca kolayca görülür ki s ve r^2 komütatif (değişmeli)dir. $r^8=s^8=I$ olduğundan s ve r^2 C_8xC_4 grubuna izomorf bir alt grup üretir ve bu grup $C\left(2^8\right)$ de 2 indeksine sahiptir.

$$r^{-1}sr=r^4s^5$$

olduğu açıkça görülür. Böylece $C\left(2^8\right)$

$$\left\langle r,s \middle| r^8=s^8=I,\ r^2s=sr^2,\ r^{-1}sr=r^4s^5\right\rangle$$

temsile sahiptir ve böylece $B\left(2^8\right)$

$$\left\langle w,s \middle| w^2=s^8=I,\ \left(s^2w\right)^2=\left(ws\right)^2,\ sws^{-1}w=ws^3ws^{-3}\right\rangle$$

şeklinde temsil edilir.

Sonuçlarımızı aşağıdaki tablo da özetleyeceğiz. Son sütunda $B\left(N\right)$ yi tanımlayacağız. $\left(t,m,n;q\right)$ notasyon

$$\left\langle A,B \middle| A^t=B^m=\left(AB\right)^n=\left(A^{-1}B^{-1}AB\right)^q=I\right\rangle;$$

grubunu gösterecektir. $C_h \wr C_2$ notasyonu Çelenk çarpımı gösterir ki bu çarpım $C_h\times C_h$ ile her bir çarpanın üreticilerini karşılıklı birbirine götüren otomorfizmanın eklenmesiyle elde edilen grubu gösterir.

Tablo 2.2. $N=p^{\alpha}$ olmak üzere $w=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ ve $s=\begin{pmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ üreteçli $B(N)$ grupları

N	h	Bağıntılar	$\lvert B(N)\rvert$	$B(N)\cong$
2	1	$w^2=s=I$	2	C_2
4	2	$w^2=s^2=(ws)^3=I$	6	D_3
8	2	$w^2=s=I$, $(ws)^2=(sw)^2$	8	D_4
16	4	$w^2=s^4=(ws)^3=I$	24	S_4
32	4	$w^2=s^4=(ws)^4=(ws^{-1}ws)^2=I$	32	$(2,4,4;2)$
64	8	$w^2=s^8=(ws)^8=(ws^{-1}ws)^3=I$	96	$(2,8,3;3)$
128	8	$\left\{\begin{matrix} w^2=s^8=(ws)^4=I, \\ (ws^2)^2=(s^2w)^2, \\ s^2ws^{-1}w=ws^3ws^2, \\ ws^2ws=s^{-3}ws^2w \end{matrix}\right\}$	128	
256	8	$\left\{\begin{matrix} w^2=s^8=I, \\ (s^2w)^2=(ws)^2, \\ sws^{-1}w=ws^3ws^{-3} \end{matrix}\right\}$	128	
2^{α} $(\alpha\geq 9)$	8	$w^2=s^8=I$, $(ws)^2=(sw)^2$	128	$C_8 \wr C_2$
3	1	$w^2=s=I$	2	C_2
9	3	$w^2=s^3=(ws)^3=I$	12	A_4

Tablo 2.2.' nin devamı

3^{β} $(\beta \geq 3)$	3	$w^2=s^3=I$, $(ws)^2=(sw)^2$	18	$C_3 \wr C_2$
p^{α} $(p \geq 5)$	1	$w^2=s=I$	2	C_2

2.4. $B(N)$ nin Çarpım Yapısı

Bu kısımda göreceğiz ki N nin bazı değerleri için $B(N)$ grubu $\otimes B'(p^{\alpha})$ direk çarpımı olarak yazılabilir. $[5]$ de $B(N)$ nin, her N değeri için, her zaman $\otimes B(p^{\alpha})$ şeklinde direk çarpım olarak yazılabileceği iddia edildi.

Şimdi bir örnekle bunun böyle olmayacağını göstereceğiz. $N=18$ olsun. $|B(18)|=24$ ve $B(N)$

$$w=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 18 & 0 \end{pmatrix},\ s=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tarafından üretilir ve bağıntılar

$$w^2=s^3=(ws)^4=I$$

dır.

$$S_4=\left\langle x,y \middle| x^2=y^3=(xy)^4=I \right\rangle$$

olduğundan $B(18) \cong S_4$ tür ki bu trivial yolun dışında direk çarpma olarak yazılamaz.

Şimdi hangi şartlarda $B(N)$ nin bir direk çarpım olacağını araştıralım. İlk önce $M\|N$ ise $B(N)$ nin $B(M)$ ye izomorf bir alt grubu içerdiğini gösterelim ve daha sonra bu grubun ne zaman normal olabileceğini bakalım.

Önerme 2.7. $M\|N$ olsun. Bu takdirde $B(N)$ nin elemanları

$$t=\begin{pmatrix} ae & b/h(M) \\ cN/h(M) & de \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Burada $h(M)$ $(h(M))^2|M$ olan 24 ün en büyük bölenidir ve

$$e\|M/(h(M))^2$$

dir ve determinant e dir. Bu biçimindeki elemanlar $B(N)$ nin $B(M)$ ye izomorf olan alt grubunu oluşturur.

İspat. $(M,K)=1$ olmak üzere $N=MK$ olsun. Bu takdirde

$$t=\begin{pmatrix} ae & bh(K)/h(N) \\ cNh(K)/h(N) & de \end{pmatrix}$$

dür ki $t\hat{I}B(N)$ olduğunu verir. Kolayca görülür ki bu biçimindeki elemanlar bir alt grup oluşturur. Bu alt grubu $B'(M)$ ile gösterelim. Ayrıca $\Gamma_{B'}(N)$ de karşılık gelen matrislerin kümesini gösterelim. $t\in B(N)$ bir $\Gamma_0(N)T$ yan sınıfını temsil eder. Şimdi

$$F:B'(M)\rightarrow B(M)$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

$$F\left(t=\Gamma_0(N)T\right)=\Gamma_0(M)T$$

$$\Gamma_0(N)\leq\Gamma_0(M)$$

olduğundan bu dönüşüm iyi tanımlıdır. F nin birebir olduğunu göstermek için aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 2.10. $\Gamma_{B'}(M)\cap\Gamma_0(M)\leq\Gamma_0(N)$ dir.

İspat. $V_1=\begin{pmatrix} \alpha e & \beta/h(M) \\ \gamma N/h(M) & \delta e \end{pmatrix}\in \Gamma_{B'}(M)\cap\Gamma_0(M)$

ise

$$h(M)|\beta, M|\gamma N/h(M)$$

dir. Buradan $M|\gamma MK/h(M)$ dir. Dolayısıyla

$$h(M)|\gamma K$$

dır. $(h(M),K)=1$ olduğundan $h(M)|\gamma$ dir. Böylece de

$$N|\gamma N/h(M)$$

ve dolayısıyla $V_1\in\Gamma_0(N)$ dir.

Bu lemma F nin çekirdeğinin trivial ve böylece F nin birebir olduğunu söyler.

F nin örten olduğunu göstermek için aşağıdaki yolu takip edelim. Önerme 2.4. ün sonucu ve Lemma 2.5. ten $B(M)$ grubu $B(M)$ de ki Atkin-Lehner involusyonları ile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/h(M) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elemanı tarafından üretilir. Önceden olduğu gibi biliyoruz ki $\Gamma_B(M)$ de $e\|M$ ile verilen herhangi iki Atkin-Lehner transformasyonu aynı $\Gamma_0(M)$ yan sınıfına aittir. Böylece herhangi bir $e\|M$ için bir tek $w_e\in B(M)$ Atkin-Lehner involusyonu vardır. $B'(M)$ nin elemanlarından kolayca görülebilir ki $B'(M)$ de ki Atkin-Lehner involusyonları $e\|M$ ve determinant e olmak üzere

$$\begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Böylece Atkin-Lehner involusyonları F altında $B(M)$ deki Atkin-Lehner involusyonlarına dönüştürülür. (sadece $N=\frac{N}{M}M$ yazmak yeterlidir.) Diğer taraftan $B'(M)$ deki

$$\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & 1/h(M)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

yan sınıf F altında $B(M)$ de

$$\Gamma_0(M)\begin{pmatrix}1 & 1/h(M)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

yan sınıfına dönüştürülür. Yani F üzerinedir.

Şimdi $B'(M)$ nin $B(N)$ nin bir normal alt grup olma şartını araştıralım. Burada $N{=}MK$ ve $(M,K){=}1$

dir. Önerme 2.4. ün sonucundan veya Lemma 2.5. ten Atkin-Lehner involusyonlar ve s matris tarafından üretilir.

$$F{:}B'(M)\rightarrow B(M)$$

izomorfizma kulanılarak $B'(M)$ $B'(M)$ deki Atkin-Lehner involusyonları ve

$$s_M=\begin{pmatrix}1 & 1/h(M)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

tarafından üretilir. Önerme 2.3. ün ispatından hemen sonraki tartışma bize $B(N)$ deki bütün Atkin-Lehner involusyonlarının değişmeli olduğunu ifade eder. Eğer $w_f s_M w_f \in B'(M)$ dir. Herhangi bir t tamsayısı için

$$\begin{pmatrix}1 & 1/h(K)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/h(M)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/h(K)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t/h(M)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

olduğundan $B'(M)$ nin normal olma şartı $e\|M$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix}1 & 1/h(K)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ae & b\\ cN & de\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/h(K)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in B'(M)$$

dir.

Burada $* = b{+}e(d\text{-}a)/h(K)\text{-}cN/(h(K))^2$ olmak üzere matrislerin çarpımı

$$\begin{pmatrix} ae+cN/h(K) & * \\ cN & -cN/h(K)+de \end{pmatrix}$$

dir.

$N/h(K)=MK/h(K)$ e ile bölünür. Böylece normallik için bir $u\in\mathbb{Z}$ için $*=u$ olmalıdır. Bu $h(K)|e(d\text{-}a)$ durumuna indirgenir ve $(h(K),e)=1$ olduğundan normallik şartı $a\equiv d \bmod h(K)$ şartına indirgenir. $h(K)|24$ olduğundan bu şarta Lemma 2.2. gereği $ade\text{-}bcN/e=1$ den $ade\equiv 1 \bmod h(K)$ ve bu durumda $ad\equiv 1 \bmod h(K)$ şartı $e\equiv 1 \bmod h(K)$ şartına denktir. Böylece aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.8. $(M,K)=1$ olmak üzere $N=MK$ ise $B'(M)\lhd B(N)$ dir ancak ve ancak M nin her e tam böleni için $e\equiv 1 \bmod h(K)$ dir.

Not: Şimdi Atkin ve Newman $[5]$ in son teoreminin doğru bir ifadesini vereceğiz. $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, N nin asal çarpanlarına parçalanışı ve $\Pi_i=N/p_i^{\alpha_i}$ olsun.

Sonuç 2.5. $B(N)=\otimes B'(p_i^{\alpha_i})$ ancak ve ancak $i=1,2,...,r$ için $p_i^{\alpha_i}\equiv 1 \bmod h(\Pi_i)$ dir.

İspat. $B(N)=\otimes B'(p_i^{\alpha_i})$ olsun. Bu takdirde $B'(p_i^{\alpha_i})$ grupları $B(N)$ de normaldir. Önerme 2.8. den

$$i=1,2,...,r \text{ için } p_i^{\alpha_i}\equiv 1 \bmod h(\Pi_i)$$

dir.

Tersine $p_i^{\alpha_i}\equiv 1 \bmod h(\Pi_i)$ olduğundan önerme 2.8. den bütün $B'(p_i^{\alpha_i})$ ler normaldir.

$$B(N)=\otimes B'(p_i^{\alpha_i})$$

olduğunu görmek için ilk önce

$$B(N)=\left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'(p_i^{\alpha_i})\right\rangle$$

ve ikinci olarak da

$$i=1,2,...,r \text{ için } B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \cap \left\langle \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} B'\left(p_j^{\alpha_j}\right) \right\rangle = \{I\}$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

Bütün $B'\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ ler $B(N)$ de olduğundan

$$\left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \right\rangle \leq B(N)$$

dir. $w_f, B(N)$ nin herhangi bir Atkin-Lehner involusyonu olsun. $f \| N$ olduğundan $k \leq r$ olmak üzere $f = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ olsun. Önerme 2.2. nin ihtar 2. yi kullanırsak

$$w_f = w_{p_1^{\alpha_1}} ... w_{p_k^{\alpha_k}}, w_{p_i^{\alpha_i}} \text{Î} B\left(p_i^{\alpha_i}\right)$$

olduğundan $w_f \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B\left(p_i^{\alpha_i}\right) \right\rangle$ dir.

Şimdi gösterelim ki

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 1/h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \right\rangle$$

dedir.

$h = h(N) = h\left(p_1^{\alpha_1}\right) ... h\left(p_r^{\alpha_r}\right)$ ve $h \mid 2^3 3$ olduğundan $k,t \leq r$ olmak üzere

$$h = h\left(p_k^{\alpha_k}\right) h\left(p_t^{\alpha_t}\right)$$

diyelim. $\left(h\left(p_k^{a_k}\right), h\left(p_t^{a_t}\right)\right) = 1$ olduğundan

$$d_1 h\left(p_t^{\alpha_t}\right) + d_2 h\left(p_k^{\alpha_k}\right) = 1$$

olacak şekilde d_1 ve d_2 tamsayıları vardır.

$$\begin{pmatrix} 1 & d_1/h\left(p_k^{\alpha_k}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B'\left(p_k^{\alpha_k}\right) \text{ ve } \begin{pmatrix} 1 & d_2/h\left(p_t^{\alpha_t}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B'\left(p_t^{\alpha_t}\right)$$

olduğundan

$$s,\left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \right\rangle$$

dedir. Dolayısıyla $B(N)$ nin üreticileri

$$\left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \right\rangle$$

grubundadır. Bu durumda

$$B(N) \leq \left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'\left(p_i^{a_i}\right) \right\rangle$$

elde edilir. Sonuç olarak $B(N) = \left\langle \bigcup_{i=1}^{r} B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \right\rangle$ vardır.

Son olarak

$$B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \cap \left\langle \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} B'\left(p_j^{\alpha_j}\right) \right\rangle = \{I\}$$

olduğunu gösterelim. Yukarıdan

$$\left\langle \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} B'\left(p_j^{\alpha_j}\right) \right\rangle = B'\left(\Pi_i\right)$$

dir.

Dolayısıyla $B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \cap B'\left(\Pi_i\right) = \{I\}$ olduğunu göstereceğiz. $A \in B'\left(p_i^{\alpha_i}\right) \cap B'\left(\Pi_i\right)$ alalım. Bu takdirde

$e_1 \left\| p_i^{\alpha_i} \middle/ \left(h\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right)^2 \right.$ ve $e_2 \left\| \Pi_i \middle/ \left(h\left(\Pi_i\right)\right)^2 \right.$ olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} a_1 e_1 & b_1 / h\left(p_i^{\alpha_i}\right) \\ c_1 N / h\left(p_i^{\alpha_i}\right) & d_1 e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 e_2 & b_2 / h\left(\Pi_i\right) \\ c_2 N / h\left(\Pi_i\right) & d_2 e_2 \end{pmatrix}$$

dir.

$h=h(N)=h\left(p_i^{\alpha_i}\right) h\left(\Pi_i\right)$ olduğundan

$$A=\begin{pmatrix} a_1e_1 & b_1h(\Pi_i)/h \\ c_1h(\Pi_i)N/h & d_1e_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2e_2 & b_2h(p_i^{\alpha_i})/h \\ c_2h(p_i^{\alpha_i})/h & d_2e_2 \end{pmatrix}$$

dir.

Lemma 2.4. ten

$a_1b_2h\left(p_i^{\alpha_i}\right)^{o}a_2b_1h\left(\Pi_i\right) \bmod h$ ve

$c_1h\left(\Pi_i\right)d_2 \equiv c_2h\left(p_i^{\alpha_i}\right)d_1 \bmod h$ dir.

Bu kongrüanslardan

$$h\left(\Pi_i\right)\big|a_1b_2, h\left(p_i^{\alpha_i}\right)\big|a_2b_1, h\left(p_i^{\alpha_i}\right)\big|c_1d_2,$$

ve

$$h\left(\Pi_i\right)\big|d_1c_2$$

elde edilir. A nın eterminantı

$$a_1d_1\text{-}b_1c_1N\Big/\left(h\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right)^2=a_2d_2\text{-}b_2c_2N\Big/\left(h\left(\Pi_i\right)\right)^2=1$$

dir. Böylece

$h\left(p_i^{\alpha_i}\right)\big|b_1, h\left(p_i^{\alpha_i}\right)\big|c_1$ ve $h\left(\Pi_i\right)\big|b_2, h\left(\Pi_i\right)\big|c_2$

elde edilir. Yani $A=I$ dır. Sonuç olarak

$$B(N)=\otimes B'\left(p_i^{\alpha_i}\right)$$

dir.

Sonuç 2.6. Eğer N bir kare ise $B(N)=\otimes B'\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ dir.

İspat. $N=2^{2\alpha_1}3^{2\alpha_2}p_3^{2\alpha_3}...p_r^{2\alpha_r}$, N nin asal çarpanlarına parçalanışı olsun. İlk önce $2^{2\alpha_1}$ i alırsak

$$\Pi_1=3^{2\alpha_2}p_3^{2\alpha_3}...p_r^{2\alpha_r} \text{ ve } h\left(\Pi_1\right)=1 \text{ veya } 3$$

tür. Böylece $2^{2\alpha_1} \equiv 1 \bmod 3$ tür. İkinci olarak $3^{2\alpha_2}$ yi alalım. Bu takdirde

$$\Pi_2 = 2^{2\alpha_1} p_3^{2\alpha_3} \ldots p_r^{2\alpha_r}$$

dir ve böylece $h(\Pi_2) = 1,2,4$ veya 8 dir. Buradan

$$3^{2\alpha_2} \equiv 1 \bmod h(\Pi_2)$$

elde edilir.

Son olarak $p_i \neq 2$ ve 3 olmak üzere $p_i^{2\alpha_i}$ yi alalım. Bu takdirde $h(\Pi_i)$ 24 ü böler. $p_i \equiv 1,3,5,7 \bmod 8$ ve $p_i \equiv 1,2 \bmod 3$ olduğundan

$$p_i^{2\alpha_i} \equiv 1 \bmod 8 \text{ ve } p_i^{2\alpha_i} \equiv 1 \bmod 3$$

tür.

Sonuç olarak $p_i^{2\alpha_i} \equiv 1 \bmod 24$ tür. Yukarıdaki sonucu kullanırsak istenilen elde edilir.

Örnekler.

1) $N = 18 = 2.3^2$ olsun. $2 \not\equiv 1 \bmod \left(h\left(3^2\right) = 3\right)$ olduğundan sonuç 2.5. e göre $B(18)$ trivial yolun dışında bir direk çarpma olarak yazılamaz.

2) $N = 2^5.127^2$,

$$2^5 \equiv 1 \bmod \left(h\left(127^2\right) = 1\right) \text{ ve}$$

$$127 \equiv 1 \bmod \left(h\left(2^5\right) = 4\right)$$

olduğundan

$$B\left(2^5, 127^2\right) \cong B'\left(2^5\right) \times B'\left(127^2\right) \text{ dir.}$$

3.İRDELEME

$PSL(2,\mathbb{R})$ lineer kesirli dönüşümlerin bir alt grubudur. Özellikle 19.yüzyılda ilk defa H.Poincare tarafından ayrık gruplar teorisine temel teşkil edecek önemli sonuçlar bulunmuştur. Öklid olmayan geometriler ve invaryant teorisinin keşfiyle büyük önem kazanmış, topolojik grup yapısına uygun olması nedeniyle gerek analiz gerekse cebirsel metotlarla derinlemesine incelenmiştir. Γ modüler grubunun kongrüans alt grupları olan $\Gamma(N), \Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ grupları üzerinde çalışılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında esas itibariyle $\Gamma_B(N)$ normalliyeninin grup yapısı detaylı şekilde incelenmiş ve direk çarpım olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

4. SONUÇLAR

$\Gamma_0(N)$ nin PSL(2,$\mathbb{R}$) deki $\Gamma_B(N)=\mathrm{Nor}(\Gamma_0(N))$ normalliyeni sonlu üretilmiş bir grup olduğundan grup yapısının bilinmesi son derece önemlidir. Bu çalışmada $\Gamma_B(N)$ normalliyeninin bölüm grubu $B(N)$ nin yapısı incelenmiş ve izomorf oldukları temel gruplar tespit edilmiştir. Ayrıca normalliyenin temel taplarından olan $\Gamma_W(N)$ Atkin-Lehner grubu ve determinantı "1" olan normalliyen elemanlarının $\Gamma_C(N)$ grubu ele alınmış bu grubun $\Gamma_0(N)$ deki indeksi hesaplanarak $\Gamma_B(N)$ normalliyeninin $\Gamma_0(N)$ deki indeksi tam olarak belirlenmiştir. Diğer taraftan normalliyenin her elemanının $\Gamma_W(N)$ Atkin-Lehner grubundaki bir eleman ile $\Gamma_C(N)$ grubundaki bir elemanın çarpımı olduğu gösterilmiş, $C(N):=\Gamma_C(N)/\Gamma_0(N)$ grubunun abel olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. $[5]$ de normalliyenin her N için bazı alt grupların bir direk çarpımı olarak verilebilir sonucunu yanlış olduğu tespit edildi ve direk çarpım olarak yazılabilmesi için N üzerindeki kısıtlamalar ortaya konularak gerek ve yeter şartlar ortaya konuldu.

5.ÖNERİLER

$\Gamma_0(N)$ nin $PSL(2,\mathbb{R})$ deki N normalliyeni özellikle $2^{46}.3^{20}.5^{9}.7^{6}.11^{2}.13^{3}.17.19.23.29.31.41.47.59.71$ mertebeli basit grup yani Monster basit grubu için önem arzetmektedir. Bu sebeble normalliyenin yapısını tam belirlemek oldukça önemlidir. Gerçekten, yukarıdaki mertebeyi bölen her p asal sayılarının 2 ağırlıklı modüler formlarla ilgili Hecke konjectürünü sağladığı tespit edilmiştir. Ayrıca, Helling $[16]$ N nin karesiz olması durumunda $\Gamma_B(N)$ normalliyenlerinin maksimal ayrık gruplar olduğunu ve Γ modüler grubu ile orantılı olan Δ ayrık grubunun bu normalliyenlerden birine eşlenik olduğunu göstermiştir. Bu sebeble normalliyenin yapısının ortaya konması bu tip problemlerin anlaşılmasında kolaylıklar sağlayacaktır. Diğer taraftan yeni bir yaklaşım olan Graf teoride de, normalliyenin yapısının ortaya konması önemli çalışma alanlarına zemin hazırlayacaktır.

6. KAYNAKLAR

1. Akbaş, M., The Normalizer of Modular Subgroups, Ph.D. Thesis, Faculty of Mathematical Studies, University of Southampton, Southampton, 1989.

2. Akbaş, M. and Singerman, D., The Signature of The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, London Math. Soc. Lecture Note series (1992) 165.

3. Akbaş, M. and Başkan, T., Suborbital Graphs For The Normalizer of $\Gamma_0(N)$, Tr.J. of Math., Tübitak, 20 (1996) 379-387.

4. Akbaş, M., On Suborbital Graphs For The Modular Group, Bull. London Math Soc., 33 (2001) 647-652.

5. Atkin, A. O. L. and Lehner, J., Hecke operators on $\Gamma_0(M)$. Nath. Ann. 185 (1970) 134- 160

6. Bayar, E., Gruplar Teorisi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayın No:96, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayın No:39, Trabzon, 1986.

7. Beşenk, M., $PSL(2,\mathbb{R})$ deki $\Gamma_0(N)$ nin $\Gamma_B(N)$ Normalliyenin Parabolik Sınıf Sayısı, Yüksek Lisans Tezi , K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

8. Beardon, A.F., The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag , New York, Heidelberg, Berlin, 1983.

9. Biggs, N.L. and White, A.T., Permutation Groups and Combinatorial Structure, London Math. Soc.Lecture Note Series, 33, 1979.

10. Büyükkaragöz, A., Fuchsian ve NEC Grupların Simgeleri, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1996.

11. Conway, J. H. and Norton, S.P., Montrous Moonshine. Bull. Londan Math. Soc. 11 (1979) 308-339

12. Coxeter, H. S. M., The abstract group $G^{m,n,p}$. Trans. Amer. Math. Soc. 45 (1939) 73-150

13. Güler, B.Ö., Özel Bir Kongrüans Grubunun Altyörüngesel Grafları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

14. Hacısalihoğlu , H.H., Lineer Cebir, Üçüncü Baskı, Gazi Üniversitesi Yayın no:65, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayın No:7, Ankara, 1985.

15. Hardy, G.H. and Wright, E.M., An Introduction To The Theory of Numbers, 5 th ed. Oxford University Pres, 1979.

16. Hellig, H., On the commensurability class of rational modular group. J. Londan Math. Soc., 2, 2 (1970) 67-72

17. Johnson, D.L., Presentations of Groups, Londan Math. Soc. Lecture notes 22, Cambridge University Pres,1976.

18. Jones, G.A. and Singerman, D., Complex Functions An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Pres, Cambridge, 1987.

19. Jones, G.A., Singerman, D. and Wicks, K., The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Notes 160 (1991) 316-318.

20. Lehner, J., Discontinuous Groups and Automorphic Functions . Math. Surveys 8, Amer. Math. Soc. (1964).

21. Lehner, J. and Newman, M., Weierstrass Points of $\Gamma_0(N)$, Annals of Mathematics 79 (1964) 2

22. Macbeath, A.M., The Classification of Non-Euclidean Crystallographic Groups, Can.J. Math., 19 (1967) 1192-1205.

23. Massey, W.S., Algebraic Topology An Introduction, Harcourt, Brace and World Inc., New York, 1967.

24. Newman, M., The Normalizer of Certain Modular Subgroups, Can.J. Math., 8 (1956) 29-31.

25. Ogg, A.P., Modular Fuctions, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 37, 1980.

26. Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

27. Sherk, F. A., The regular maps on a surface of genus three, Can. J. of Math. 11 (1959) 452-480.

28. Shimura, G., Introduction To The Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princteon Univ. Pres, 1971.

29. Singerman, D., Subgroups of Fuchsian Group and Finite Permutation Groups, Bull. London Math. Soc., 2 (1970) 319-323.

30. Tsuzuku, T., Finite Groups and Finite Geometries, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

31. Wilkie, H.C., On Non-Euclidean Crystallographic Groups, Math. Zeitschr, 91 (1966) 87-102.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Baş, 1975 yılında Mersin'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Mersin'de, lise öğrenimini Samsun Ondokuzmayıs Lisesi'nde tamamladı. 1997 yılında O.M.Ü. Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu.

1997 yılında Matematik Öğretmeni olarak Milli Eğitim Bakanlığınca atandı. 2006 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) Programına başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak görev yapmakta olup, orta derecede İngilizce bilmektedir.