KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN NORMAL FARK OPERATÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rukiye ÖZTÜRK

ŞUBAT 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN NORMAL FARK OPERATÖRLERİ

Rukiye ÖZTÜRK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20.01.2009
Tezin Savunma Tarihi : 06.02.2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zameddin İSMAYILOV

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans süresince, değerli zamanını ayırarak bilgi ve deneyimlerini paylaşan, tezin bu hale gelmesinde yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Zameddin İSMAYILOV' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu güne gelene kadar bilgilerini benden esirgemeyen tüm bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim ve öğretim hayatım süresi içerisinde maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürler.

Rukiye ÖZTÜRK
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada, dizilerin Hilbert uzayında birinci mertebeden operatör katsayılı lineer fark operatörlerinin normalliği ve spektrum yapısı incelenmiş, daha sonra ise diskret durumda alınan bulguların sürekli durumda alınan sonuçlarla örtüşüp örtüşmediği araştırılmıştır.

Birinci bölümde tezde kullanılan Fonksiyonel Analiz, Operatörler ve Spektral Teorisi'nin temel kavram ve sonuçları verilmiştir.

İkinci bölümde yukarıda söz edilen problemler dizilerin $\ell_2(\mathbb{Z})$, üçüncü bölümde ise dizilerin $\ell_2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayında incelenmiştir. Ayrıca tezde alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Selfadjoint ve Normal Operatörler; Operatör Fonksiyonları; Spektrum ve Rezolvent Küme; Ayrık, Sürekli ve Rezudial Spektrum.

SUMMARY

Normal Difference Operators For The First Order

In this study, the normality and spectral structure of the first order linear difference operators with operator coefficient in Hilbert spaces of sequences are investigated. The obtained results in discrete case are compared with the results in continuous case.

In the first part of the study basic concept and results in the Functional Analysis, Operator and Spectral Theory are summarized.

In the second and the third parts the problems mentioned above are investigated respectively in $\ell_2(\mathbb{Z})$ and $\ell_2(\mathbb{N})$.

Moreover, all results in this thesis are supported with examples.

Key Words: Selfadjoint and Normal Operators; Function of an Operator; Spectrum and Rezolvent Sets; Point, Continuous and Residual Spectrum.

SEMBOLLER DİZİNİ

$AC(A)$	A kümesi üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
A_I	A operatörünün sanal kısmı
A_R	A operatörünün reel kısmı
$B(H)$	H Hilbert uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
$C(A)$	A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
E	Birim operatör
$R_\lambda(A), R(\lambda;A)$	A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün rezudial spektrumu
$\sigma_\infty(H)$	H Hilbert uzayında kompakt operatörler uzayı
$L_2(H,(a,b))$	$[a,b]$'den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların Hilbert uzayı
$W_p^l(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$	$l,\ p \geq 1$ için $l.$ mertebeye kadar türevleri $L_p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonların Sobolev uzayı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

1950 yıllarından beri katsayıları bir Hilbert veya Banach uzayında operatör olan lineer diferensiyel operatörlerin incelenmesi büyük bir ilgiyle devam etmektedir. Bu alanda ilk sonuçları E. Hille ve R.S. Phillps [23], J.L. Lions [55], S.G. Krein [52], M.L. Gorbachuk [20], V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk [21], V.M. Bruk [10] vs. tarafından bulunmuş ve bu bir teori olarak geliştirilmiştir.

1970 yılından itibaren John von Neumann' ın yoğun tanımlı kapalı simetrik operatörlerin özeşlenik genişlemeler teorisi, vektör fonksiyonların Hilbert uzayında operatör katsayılı formal simetrik diferensiyel ifadelerin doğurduğu simetrik minimal operatörün özeşlenik genişlemeleri teorisine uygulanmaya başlanılmıştır.

İlk olarak bu problem özeşlenik operatör katsayılı Sturm-Liouville diferensiyel ifadesi için $L^2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında Prof. Dr. M.L. Gorbachuk (Ukrayna, Kiev) tarafından sınır değerler dilinde 1972 yılında sonuçlandırılmıştır [20].

Bu problem 1970 yılında Fransa'nın Nitz kentinde düzenlenen uluslararası matematikçiler konferansında B.M. Levitan tarafından ortaya atılmıştır [54].

Adi diferensiyel ifadeler için bu problemi M.G. Krein [51] ve F.S. Rofe-Beketov [62] son bir çözüme ulaştırmışlardır. Kısmi türevli diferensiyel ifadeler için bu problem R.A Aleksandran, Yu.M. Berezanskii, V.A. Ilin ve A.G. Kostyuchenko tarafından [3] çözülmüştür. Sonlu bölgelerde ise bu problem M.İ. Vischik [69] tarafından sonuçlandırılmıştır. Operatör katsayılı herhangi mertebeden lineer diferensiyel simetrik ifadelerin doğurduğu minimal operatörün özeşlenik (maksimal akkümülativ, simetrik v.s.) genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesine V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk [21] kitaplarında geniş yer vermiştir.

Hilbert uzayında sınırsız formal normal operatörlerin normal genişlemeleri teorisindeki ilk sonuçlar Y. Kilpi [47, 48, 49], R.H. Davis [13], tarafından bulunmuş, daha sonra ise bu teorinin temeli E.A. Coddington [12], G. Biriuk ve E.A. Coddington [8], B.Sz.-Nagy [11], J. Stochel ve F.H. Szafraniec [67, 68] tarafından atılmış ve bir genel teori olarak geliştirilmiştir.

E.A. Coddington [12] çalışmasında Hilbert uzayında verilen soyut formal normal sınırsız kapalı yoğun tanımlı bir lineer operatörün bütün normal genişlemeleri tanım kümeleri dilinde ifade etmiştir. E.A. Coddington bu çalışmasında 1929–1930 yılında John von Neumann' ın kapalı simetrik operatörlerin özeşlenik genişlemeleri alanında yapmış olduğu meşhur [58] sonucunu genelleştirmiştir. Ayrıca G. Biriuk ve E.A. Coddington [8,12] bu çalışmalarında lineer bağıntılar teorisinin sonuçlarından faydalanarak yoğun tanımlı olmayan kapalı formal normal operatörlerin normal genişlemelerini de tanım kümeleri dilinde ifade edebilmişlerdir.

John von Neumann teorisinde olduğu gibi E.A. Coddington' un bu buluşu da uzun yıllar, Hilbert uzayındaki diferensiyel operatörler teorisi diline dönüştürülememiştir. Nitekim bir diferensiyel operatörün herhangi genişlemeleri sınır değerleri dilinde daha kolay ifade edilebildiğinden John von Neumann teorisinden sonraki yıllarda olduğu gibi uzun yıllar bu yapılamamıştır. Bu alanda birkaç özel durum B.K. Kokebayev ve Kh.T. Otarov [50], B.N. Biyarov ve M. Otelbayev [9], vs. çalışmalarında incelenmiştir.

Vektör fonksiyonların Hilbert uzayında keyfi mertebeden selfadjoint katsayılı formal normal diferensiyel ifadelerin doğurduğu minimal operatörün bütün normal genişlemelerini, sınır değerleri dilinde Z.İ. Ismailov [26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 40, 41, 42, 43], F.G. Maksudov ve Z.İ. Ismailov [31, 33, 35] un, Z.İ. Ismailov ve H. Karatash' ın [36, 37, 38, 39] bilimsel çalışmalarında ifade edilmiştir. Ayrıca bu çalışmalarda bu genişlemelerin spektral özellikleri incelenmiştir.

Ama diskret durumda alınan sonuçlar sürekli durumda bulunan sonuçlarla örtüşmeyebilir. Bu durumu açıklamak için [16, 17, 46] çalışmalarından bir özet verelim. Örneğin, sürekli durumda

$$y'' + \left(\frac{\pi^2}{n^2}\right) y = 0,$$
$$y(0) = y(n) = 0$$

probleminin $y(t) = k\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)t,\ k \in \mathbb{C}$ şeklinde sonsuz sayıda çözümü olduğu halde diskret durumda

$$\Delta\nabla y(t) + \left(\frac{\pi^2}{n^2}\right) y(t) = 0,$$
$$y(0) = y(n) = 0$$

probleminin ancak bir $y(t) \equiv 0$ çözümü vardır.

Sürekli durumda

$$y'' + \left(\frac{\pi^2}{4n^2}\right) y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y(n) = 1$$

problemi ancak bir tek

$$y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) t$$

çözüme sahiptir. Diskret durumda da

$$\Delta\nabla y(t) + \left(\frac{\pi^2}{4n^2}\right) y(t) = 0$$
$$y(0) = 0,\ y(n) = 1$$

probleminin ancak bir tek çözümü vardır.

Sürekli durumda

$$y'' + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y(n) = \varepsilon \ \ (\varepsilon \neq 0)$$

problemi

$$y(t) = \frac{\varepsilon \sin\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)t\right]}{\sin\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)n\right]}$$

şeklinde tek çözüme sahip olduğu halde diskret durumda

$$\Delta\nabla y(t) + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) y(t) = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y(n) = \varepsilon \ \ (\varepsilon \neq 0)$$

probleminin çözümü yoktur.

Ayrıca [16, 17, 46] çalışmalarında adi diferensiyel denklemler için bakılan sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı, tekliği vesaire benzer problemlerle diskret durumdaki aynı problemler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

İkinci mertebeden bazı fark operatörlerinin selfadjointliği ve spektral özellikleri [5, 6, 7, 70] çalışmalarında incelenmiş ve sürekli durumda bilinen sonuçlarla örtüşüp örtüşmediği vurgulanmıştır.

Fark Denklemler Teorisi, fark denklemlerinin çözümlerinde kullanılan metotlar ve onların geniş uygulamaları, Uygulamalı Analizde merkezi bir pozisyon aldıktan sonra meydana gelmiştir. Aslında son beş yıldır bu konu yüzlerce bilimsel makalelerde ve bazı monografilerde, uluslararası konferanslarda ve önemli özel oturumlarda sürekli olarak tanıtılmaktadır. Şimdi bile diferensiyel denklemlerin evrenselliğine inanan bilim adamları, sürekli ve diskret durumlar arasındaki dikkat çeken farklılıkları kabul etmek zorunda kalıyorlar. Fark Denklemler Teorisinin ileride matematikte önemli bir rol oynayacağı kuşkusuzdur [2].

1992'de R.P. Agarwal tarafından "Fark Denklemleri ve Eşitsizlikler" başlıklı bir monografi yayınlandı. Bu kitap, yayın tarihine kadar derin bir alan çalışmasıydı. O zamandan beri, bu konu öyle bir gelişme hızı sağladı ki, şuan son dört yılda elde edilen sonuçları tam olarak kapsayan, yazılmış benzer bir çalışma bulmak imkânsızdır.

1.2. Lineer ve Metrik Uzaylar

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında bir vektörün uzunluğu, iki vektör arasındaki açı kavramlarını ve bu kavramların bu uzaylara kazandırdığı bazı önemli özellikler tartışılmazdır. Bu bölümde vektör uzayı tanımı verilip, bir vektör uzayı içinde iç çarpım ve norm kavramları tanımlanacak, Banach ve Hilbert Uzayları tanımlanıp, bu tanımlar örneklerle desteklenecektir. Son kısımda ise, ikinci bölüme temel teşkil eden operatör kavramı ve özellikleri, spektrum çeşitleri ve spektral ayrılış teoremi verilecektir. Ayrıca ilerleyen aşamalarında kullanılacak önemli teoremler ispatsız verilecektir.

Tanım 1.2.1 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve

$$d: X \text{ x } X \to [0,+\infty), \ (x,y) \to d(x,y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer bu d fonksiyonu her $x,y,z \in X$ için

(M$_1$) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (özdeşlik aksiyomu);

(M$_2$) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetriklik aksiyomu);

(M$_3$) $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde *uzaklık fonksiyonu* veya *metrik* adını alır ve (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir. Burada (M$_1$) – (M$_3$) özelliklerine *metrik aksiyomları* denir.

Örnek 1.2.2: X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde aşağıdaki gibi bir d fonksiyonunu tanımlayalım:

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y \text{ ise,}\\ 0, & x=y \text{ ise}\end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan d fonksiyonu X kümesi üzerinde bir metriktir. Başka bir deyişle (X,d) ikilisi bir metrik uzaydır. Bu metriğe *ayrık metrik* veya *diskret metrik* denir.

Örnek 1.2.3: X boş olmayan bir küme ve $B(X)$ de X 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların kümesi olsun.

$$d: B(X)\text{x}B(X)\to[0,+\infty),\ (f,g)\to d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|: x\in X\}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümünün $B(X)$ kümesi üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

Gerçekten de;

1) $\forall x\in X$ için

$$|f(x)-g(x)|\leq\sup\{|f(x)-g(x)|: x\in X\}=d(f,g)$$

olduğundan $d(f,g)=0$ ise $\forall x\in X$ için

$$|f(x)-g(x)|=0$$

veya $\forall x\in X$ için $f(x)=g(x)$ 'dır. Ayrıca, eğer $f=g$ ise, $d(f,g)=0$ olduğu tanımdan açıktır.

2) $\forall a\in\mathbb{R}$ için $|a|=|-a|$ olduğundan

$$d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|: x\in X\}=\sup\{|g(x)-f(x)|: x\in X\}=d(g,f).$$

3) $\forall f,g,h\in B(X)$ ve $\forall x\in X$ için

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)|=|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|&\leq|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\\ &\leq d(f,h)+d(h,g)\end{aligned}$$

ve buradan da

$$d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Örnek 1.2.4: Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$\ell_p(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\},\ \mathrm{p} \geq 1,$$

$$\ell_p(\mathbb{Z}) := \left\{ (x_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\},\ p \geq 1$$

kümeleri sırasıyla $d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $d(x,y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonları altında birer metrik uzaylardır.

Gerçekten, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n) \in \ell_p(\mathbb{N})$ için;

1) $d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p = 0$ olup $x = y$;

2) $d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n - x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d(y,x)$;

3) $d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n + z_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Yani sonuç olarak $\ell_p(\mathbb{N})$ uzayı $d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonu altında bir metrik uzayıdır.

Benzer şekilde $\ell_p(\mathbb{Z})$ uzayı da $d(x,y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonu altında bir metrik uzayıdır.

Tanım 1.2.5 (Vektör Uzayı): X boş olmayan bir küme ve K($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \text{ x } X \to X,\ (x,y) \to x + y,$$

$$\bullet : K \text{ x } X \to X,\ (a,x) \to ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x+y=y+x$;
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$;
3. $\forall x\in X$ için $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0\in X$ vardır;
4. $\forall x\in X$ için $x+(-x)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x\in X$ vardır;
5. $\forall x\in X$ için $1\cdot x=x$;
6. $a(x+y)=ax+ay$;
7. $(a+b)x=ax+bx$;
8. $(ab)x=a(bx)$.

Bu durumda X 'e K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*), elemanlarına da *vektör* veya *nokta* adı verilir. $K=\mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir *reel vektör uzayı* ve $K=\mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir *kompleks vektör uzayı* denir.

Örnek 1.2.6: $\ell_p(\mathbb{N}):=\left\{x=(x_n):\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty\right\}$, $p\geq 1$ uzayı

$x+y=(x_1+y_1,....,x_n+y_n,....)$ ve $\lambda x=(\lambda x_1,....,\lambda x_n,....)$, $x,y\in \ell_p(\mathbb{N})$, $\lambda\in \mathrm{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

Gerçekten, her $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $z=(z_n)\in \ell_p(\mathbb{N})$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ için:

1) $x+y=(x_1+y_1,....,x_n+y_n,....)=(y_1+x_1,....,y_n+x_n,....)=y+x$;

2) $x+(y+z)=(x_1+(y_1+z_1),....,x_n+(y_n+z_n),....)$

$$=((x_1+y_1)+z_1,....,(x_n+y_n)+z_n,....)=(x+y)+z;$$

3) $(0)=(0,....,0,....)$ olmak üzere,

$$x+0=(x_1+0,....,x_n+0,....)=(x_1,....,x_n,....)=x;$$

4) $(-x)=(-x_1,....,-x_n,....)$ olmak üzere,

$$x+(-x)=(x_1+(-x_1),....,x_n+(-x_n),....)=(0,....,0,....)=(0);$$

5) Her $x\in \ell_p(\mathbb{N})$ için,

$$(1)\cdot x=(1\cdot x_1,....,1\cdot x_n,....)=(x_1,....,x_n,....)=x;$$

6) $a(x+y)=a(x_1+y_1,....,x_n+y_n,....)=(a(x_1+y_1),....,a(x_n+y_n),....)$

$$=(ax_1+ay_1,....,ax_n+ay_n,....)=(ax_1,....,ax_n,....)+(ay_1,....,ay_n,....)$$

$$= a\left(x_1,....,x_n,....\right) + a = \left(y_1,....,y_n,....\right) = ax + ay \,;$$

7) $\left(a+b\right)x = \left(\left(a+b\right)x_1,....,\left(a+b\right)x_n,....\right) = \left(ax_1 + bx_1,....,ax_n + bx_n,....\right)$

$$= \left(ax_1,....,ax_n,....\right) + \left(bx_1,....,bx_n,....\right) = a\left(x_1,....,x_n,....\right) + b\left(x_1,....,x_n,....\right)$$

$$= ax + bx \,;$$

8) $\left(ab\right)x = \left(\left(ab\right)x_1,....,\left(ab\right)x_n,....\right) = \left(a\left(bx_1\right),....,a\left(bx_n\right),....\right)$

$$= a\left(bx_1,....,bx_n,....\right) = a\left(b\left(x_1,....,x_n,....\right)\right) = a\left(bx\right).$$

Aynı şekilde $\ell_p\left(\mathbb{Z}\right)$, $p \geq 1$ uzayı da bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.2.7 (Lineer Manifold): X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y , X ' in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y , X vektör uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y ' ye, X 'de bir *lineer manifold* (veya X 'in bir *lineer alt uzayı*) denir.

Örnek 1.2.8: $A \subset \ell_p\left(\mathbb{N}\right)$, $p \geq 1$ olmak üzere $A := \left\{\left(x_n\right) \in \ell_p\left(\mathbb{N}\right) : \left(x_n\right) = \left(0, x_2, x_3, ...\right)\right\}$ kümesi $\ell_p\left(\mathbb{N}\right)$'de bir lineer manifoldur.

Çözüm: $\left(x_n\right) = \left(0, x_2, x_3, ...\right)$, $\left(y_n\right) = \left(0, y_2, y_3, ...\right) \in A$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\left(\alpha x_n + \beta y_n\right) = \left(0, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, ...\right) = \left(0, \alpha x_2, \alpha x_3, ...\right) + \left(0, \beta y_2, \beta y_3, ...\right)$$

$$= \alpha\left(0, x_2, x_3, ...\right) + \beta\left(0, y_2, y_3, ...\right)$$

$$= \alpha\left(x_n\right) + \beta\left(y_n\right)$$

Dolayısıyla A kümesi lineer manifoldur.

Tanım 1.2.9: X bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ olarak verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K\left(\mathbb{R}, \mathbb{C}\right)$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n$$

şeklindeki sonlu toplama $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ elemanlarının bir *lineer kombinasyonu* denir.

$\varnothing \neq M \subset X$ ise, M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer kombinasyonlarının tümünün kümesine M ' nin *gereni* (veya *lineer örtüsü*) denir ve $spanM$ olarak gösterilir. $spanM$, X 'de bir lineer manifolddur ve M ' nin *ürettiği lineer manifold* denir.

Tanım 1.2.10: X bir vektör uzayı ve $M = \left\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right\} \subset X$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği yalnızca

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ vektörlerine *lineer bağımsız*, aksi halde *lineer bağımlı* denir.

Tanım 1.2.11: X bir vektör uzayı ve M, X 'in boş olmayan bir alt kümesi için

1) M lineer bağımsızdır.
2) $X = spanM$ ise

M 'ye X 'in bir tabanı veya bir bazı denir.

Eğer $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, X 'in bir tabanı ise her $x \in X$ vektörü

$$a_1, a_2, ..., a_n \in K$$

olmak üzere $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n$ şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

Eğer X vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa X 'e sonlu boyutlu bir vektör uzayı, aksi halde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı adı verilir. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayının bir tabanındaki vektörlerinin sayısına X 'in boyutu denir ve $\dim X$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.12: $\ell_p(\mathbb{N})$, $p \geq 1$ uzayı

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n, ...) \text{ ve } \lambda x := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n, ...),\ x, y \in \ell_p(\mathbb{N}),\ \lambda \in K$$

işlemlerine göre vektör uzayı olup,

$$e_1 = (1, 0, ..., 0, ...), e_2 = (0, 1, ..., 0, ...) \text{ ...... } , e_n = \Big(0, 0, ..., \underset{(n.)}{1}, 0, ...\Big), \text{ ......}$$

vektörler ailesi $\ell_p(\mathbb{N})$ 'nin bir tabanıdır. Buradan $\dim(\ell_p) = \infty$ 'dır. Yani $\ell_p(\mathbb{N})$ vektör uzayı sonsuz boyutludur.

1.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 1.3.1 (Normlu Vektör Uzayı): X , K cismi üzerinde bir lineer vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty),\ x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

(N₁) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(N$_2$) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(N$_3$) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$, $x \to \|x\|$ dönüşümüne X üzerinde *norm* ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* adı verilir. Yukarıda verilen (N$_1$) – (N$_3$) özelliklerine *norm aksiyomları* denir. Bu vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir. K cismine bağlı olarak, *reel normlu uzay* ve *kompleks normlu uzay* terimleri de kullanılır.

Örnek 1.3.2: $E = C([a,b], K)$ kümesi

$$\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

fonksiyonu ile bir normlu vektör uzaydır.

Gerçekten, E 'nin bir lineer vektör uzayı olduğu açıktır. $x, y \in C[a,b]$ ve $\alpha \in K$ için,

(N$_1$) $\|x\|_c = 0$ ise, $\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b]$ için $x(t) = 0$;

(N$_2$) $\|\alpha x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |(\alpha x)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |\alpha||x(t)| = |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\alpha|\|x\|_c$;

(N$_3$) $\|x+y\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \le \max_{t\in[a,b]} (|x(t)| + |y(t)|)$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\|_c + \|y\|_c .$$

Örnek 1.3.3: $\ell_2(\mathbb{N})$ vektör uzayı üzerinde tanımlı

$N_2(u) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $u = (u_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ fonksiyonu bir norm oluşturur.

Gerçekten;

(N$_1$) Her $v \in \ell_2(\mathbb{N})$ için $N_2(v) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ge 0$;

$v = (0) = (0,0,....,0,....)$ ise $N_2(v) = 0$ 'dır. Tersine $N_2(0) = 0$ ise, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$ 'dır.

Buradan $v = 0$ elde edilir.

(N$_2$) Her $\alpha \in K$ ve $v \in \ell_2(\mathbb{N})$ için

$$N_2(\alpha v) := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha v|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha|^2|v|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\alpha|^2\sum_{n=1}^{\infty}|v|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|v|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|N_2(v);$$

(N_3) Her $u, v \in \ell_2(\mathbb{N})$ için

$$N_2(u+v) := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n+v_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = N_2(u) + N_2(v).$$

Dolayısıyla $\ell_2(\mathbb{N})$ vektör uzayı ve onun üzerinde tanımlı $N_2(\bullet)$ normunun oluşturduğu $(\ell_2(\mathbb{N}), N_2)$ ikilisi bir lineer normlu uzaydır.

Benzer şekilde $\ell_2(\mathbb{Z})$ vektör uzayı üzerinde tanımlı $N_2(u) := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $u = (u_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ fonksiyonu bir norm oluşturur. Dolayısıyla $\ell_2(\mathbb{Z})$ vektör uzayı ve onun üzerinde tanımlı olan $N_2(\bullet)$ normunun oluşturduğu $(\ell_2(\mathbb{Z}), N_2)$ ikilisi de bir lineer normlu uzaydır.

Tanım 1.3.4: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$$

ise, (x_n) dizisi $\|\cdot\|$ *normuna göre* x_0 *noktasına yakınsıyor* denir ve $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\,\|_X} x_0$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ notasyonlarının biriyle gösterilir.

Tanım 1.3.5: $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun.

$(x_n) \subset X$ dizisi bir *Cauchy dizisidir* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Tanım 1.3.6 (Banach Uzayı): Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa, bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* ya da *B-uzayı* adı verilir.

Örnek 1.3.7: $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $p \ge 1$ vektör uzayı

$$\|x\|_{\ell_p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, x = (x_n) \in \ell_p(\mathbb{N})$$

normuna göre bir Banach Uzayıdır.

Gerçekten, her $n\in\mathbb{N}$ için $x^{(n)}\in\ell_p$ olup $x^{(n)}:=\left(x_1^n,x_2^n,....,x_k^n,....\right)$ şeklindedir. $x^{(n)}\in\ell_p$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}\right|^p<+\infty$. $\left\{x^{(n)}\right\}\subset\ell_p$ bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\therefore\forall r,s\in\mathbb{N},\ r$ ve $s\geq N(\varepsilon)$ için $\left\|x^{(r)}-x^{(s)}\right\|_p<\varepsilon$'dır. Yani $\forall r,s\in\mathbb{N}$ öyleki

r ve s $\geq N(\varepsilon)$ için $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(r)}-x_k^{(s)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$. (1.1)

Buradan görülüyor ki $\forall r,s,k\in\mathbb{N}$ için

$$\left\|x_k^{(r)}-x_k^{(s)}\right\|\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(r)}-x_k^{(s)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan $\forall k\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit ise $\forall r,s\in\mathbb{N}\therefore r,s\geq N(\varepsilon)$ için $\left|x_k^{(r)}-x_k^{(s)}\right|<\varepsilon$ olur. Bu gösteriyor ki $k\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit olarak alındığında $\left\{x_k^{(n)}\right\}\subset\mathbb{R}$ dizisi Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ öklid metriğine göre tam olduğundan $\left\{x_k^{(n)}\right\}$ dizisi yakınsaktır. $x:=\lim_{n\to+\infty}x_k^{(n)}$ ve $x:=\left(x_1,x_2,....,x_k,....\right)$ olsun. $\left\{x^{(n)}\right\}\subset\ell_p$ bir Cauchy dizisi olduğundan $1>0$ sayısına karşılık bir $N_0\in\mathbb{N}$ bulunabilir öyleki

$$\forall r,s\in\mathbb{N}\therefore r,s\geq N_0 \text{ için } \left\|x^{(r)}-x^{(s)}\right\|_p<1. \quad (1.2)$$

Öte yandan $x^{(N_0)}=\left(x_1^{(N_0)},x_2^{(N_0)},....,x_k^{(N_0)},....\right)\in\ell_p$ olduğundan $\left\|x^{(N_0)}\right\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $x_k:=\lim_{n\to\infty}x_k^{(n)}$ olduğundan $\frac{1}{\sqrt[p]{2^k}}>0$ sayısına karşılık $\exists N_k\in\mathbb{N}\therefore\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_k$ için $\left|x_k-x_k^{(n)}\right|<\frac{1}{\sqrt[p]{2^k}}$'dır. Yani

$$\left|x_k-x_k^{(n)}\right|^p<\frac{1}{2^k}. \quad (1.3)$$

$m\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit ve $n_k\in\mathbb{N}$ olsun. $x^{(n_k)}\in\ell_p$ olduğundan $x^{(n_k)}-x^{(N_0)}\in\ell_p$'dır. Minkowski Eşitsizliği kullanılarak $m\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit ve $n_k\in\mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k-x_k^{(n_k)}+x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k-x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k-x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)}-x_k^{(N_0)}+x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k-x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n_k)}-x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(N_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k-x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left\|x^{(n_k)}-x^{(N_0)}\right\|_p+\left\|x^{(N_0)}\right\|_p . \tag{1.4}$$

Eğer $n_k \in \mathbb{N}$ sayısı $n_k > N_k$ ve $n_k > N_0$ olacak şekilde seçilirse (1.2) ve (1.3) kullanıldığında (1.4)'den $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{p}}+1+\left\|x^{(N_0)}\right\|_p<1+1+\left\|x^{(N_0)}\right\|_p$$

$$=2+\left\|x^{(N_0)}\right\|_p .$$

Böylece $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{m}\left|x_k\right|^p<\left(2+\left\|x^{(N_0)}\right\|_p\right)^p . \tag{1.5}$$

Bu gösteriyor ki $x^{(N_0)} \in \ell_p$ sabit olduğundan $\left(2+\left\|x^{(N_0)}\right\|_p\right)^p \in \mathbb{R}_+$ sonlu bir sayıdır. Bu monoton artan $\left\{\sum_{k=1}^{m}\left|x_k\right|^p\right\}$ dizisinin üstten sınırlı bir dizi olduğunu gösterir. Monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi daima yakınsaktır. Buradan $x \in \ell_p$ olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} \overset{\|\bullet\|_p}{=} x$ olduğunu gösterelim.

$\left\{x^{(n)}\right\} \subset \ell_p$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\frac{\varepsilon}{2}>0$ için $\exists N^* \equiv N^*\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \in \mathbb{N}$

$$\therefore \forall r,s \in \mathbb{N},\ r \text{ ve } s \geq N^* \text{ için } \left\|x^{(r)}-x^{(s)}\right\|_p<\frac{\varepsilon}{4} . \tag{1.6}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k=\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ olduğundan $\exists N_k^*\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt[p]{2^k}}\right) \in \mathbb{N} \therefore \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_k$ için

$$\left|x_k^{(n)}-x_k\right|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt[p]{2^k}} . \tag{1.7}$$

$m\in\mathbb{N}$ keyfi fakat sabit bir sayı olsun. $n_k\in\mathbb{N}$ sayıları $n_k\geq\max\left\{N^*,N_1^*,N_2^*,....,N_m^*\right\}$ olacak şekilde alınır ve Minkowski Eşitsizliği kullanılırsa (1.6) ve (1.7)'den

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n)}-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n)}-x_k^{(n_k)}+x_k^{(n_k)}-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n)}-x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)}-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}-x_k^{(n_k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left|x_k^{(n_k)}-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left\|x^{(n)}-x^{(n_k)}\right\|_p+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n_k)}-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu gösteriyor ki $n\in\mathbb{N},\ n\geq N^*$ olarak seçildiğinde $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(n)}-x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

olduğundan $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N^*$ için $\left\|x^{(n)}-x\right\|_p<\varepsilon$ olur. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x^{(n)}-x\right\|_p=0$ yani $\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}\overset{\|\bullet\|_p}{=}x$'dır.

Sonuç olarak $\ell_p(\mathbb{N}),\ p\geq1$ vektör uzayı $x=(x_n)\in\ell_p(\mathbb{N})$ için

$$\|x\|_{\ell_p}:=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach Uzayıdır.

Benzer şekilde $\ell_p(\mathbb{Z}),\ p\geq1$ vektör uzayının da

$$\|x\|_{\ell_p}:=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ x=(x_n)\in\ell_p(\mathbb{Z})$$

normuna göre bir Banach Uzayı olduğu gösterilebilir.

Örnek 1.3.8: $X=L_p([a,b]),\ a,b\in\mathbb{R},\ p\geq1$ vektör uzayı

$$\|f\|_{L_p} := \|[f]\|_{L_p} = \left(\int\limits_{[a,b]} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \; f \in L_p([a,b])$$

normuna göre bir Banach Uzayıdır.

Bu $L_p([a,b])$ uzayının lineer olduğu Minkowski Eşitsizliğinin bir sonucudur. Normlu uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Tamlığı ise, Riesz-Fischer teoreminden açıktır. $L_\infty([a,b])$ uzayının da bir Banach Uzayı olduğu da kolayca gösterilebilir [4].

Örnek 1.3.9: $C([0,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı $\|\bullet\|_1 : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\|f\|_1 := \int\limits_0^1 |f(t)| dt$

normuna göre bir Banach Uzayı değildir.

Bu uzayın normlu lineer uzay olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi onun tam uzay olmadığını gösterelim.

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1 & , \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t \le \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

şeklinde bir $(f_n) \subset C[0,1]$ dizisi tanımlayıp, bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $m, n \in \mathbb{N}$ için $m < n$ sayılarını alalım. Bu durumda;

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int\limits_0^1 |f_n - f_m|(x) \, dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)} |f_n - f_m|(x) \, dx + \int\limits_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_n - f_m|(x) \, dx + \int\limits_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m|(x) \, dx$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 |f_n - f_m|(x) \, dx$$

$\left| f_n(x) \le 1, \; n \ge 1 \right|$ eşitsizliğinden,

$$\|f_m - f_n\|_1 \le \int\limits_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)} |f_m| \, dx + \int\limits_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n - f_m| \, dx$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}\to 0\,.$$

Böylece $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow[m<n]{m\to\infty} 0$ olup (f_n) bir Cauchy dizisidir. Şimdi ise (f_n) dizisinin $\|\bullet\|_1$ normunda yakınsamadığını gösterelim.

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1, & \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$ tanımlayalım.

$$\|f_n - \varphi\|_1 = \int_0^1 |f_n - \varphi|\,dx = \int_{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\frac{1}{2}} |f_n|\,dx \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Yani $\int_0^1 |f_n - \varphi|(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Keyfi bir $f \in C[0,1]$ alalım. $f \in C[0,1]$ ve $\varphi \notin C[0,1]$ olduğundan $\int_0^1 |f-\varphi|(x)\,dx \neq 0$. Öte yandan

$$0 \leq \int_0^1 |f-\varphi|(x)\,dx \leq \int_0^1 |f-f_n|(x)\,dx + \int_0^1 \leq |f_n-\varphi|(x)\,dx$$

eşitliğinden $\int_0^1 |f-f_n|(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$. Çünkü aksi halde $\int_0^1 |f-\varphi|(x)\,dx = 0$ olmalıdır, bu ise olamaz.

Sonuç olarak (f_n) dizisi $C[0,1]$ uzayında $\|\bullet\|_1$ normu altında hiçbir fonksiyona yakınsamaz. Dolayısıyla $C([0,1],\mathbb{R})$ lineer uzayı $\|\bullet\|_1$ normuna göre bir Banach Uzayı değildir.

Tanım 1.3.10 (Alt Uzay): $(X,\|\bullet\|)$ bir normlu uzay Y'de X'in bir lineer alt uzayı ise $(Y,\|\bullet\|)$'de bir normlu uzaydır. Bu uzaya $(X,\|\bullet\|)$ uzayının normlu alt uzayı denir. Eğer Y kapalı ise $(Y,\|\bullet\|)$ alt uzayına $(X,\|\bullet\|)$ normlu uzayının kapalı alt uzayı denir. Bir normlu uzayının her lineer alt uzayı normlu bir alt uzaydır.

1.4. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Tanım 1.4.1 (İç Çarpım Uzayı): $\mathrm{K}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$$(\cdot,\cdot): X \text{ x } X \to K$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)$' ye X üzerinde bir *iç çarpım*, $\left(X,(\cdot,\cdot)\right)$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* (veya *ön Hilbert uzayı*) denir.

(H_1) $\forall x\in X$ için $(x,x)\geq 0$ ve $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

(H_2) $\forall x,y\in X$ için $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (kompleks eşlenik);

(H_3) $\forall x,y\in X$ ve $\alpha\in K$ için $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

(H_4) $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

Örnek 1.4.2: $f,g\in C\left([a,b],K\right)$ fonksiyonları için

$$(f,g):=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

tanımıyla $C\left([a,b],K\right)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Gerçekten:

(H_1) $\forall f\in C\left([a,b];K\right)$ için

$$(f,f)=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b\left|f(t)\right|^2dt\geq 0,$$

eğer $(f,f)=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b\left|f(t)\right|^2dt=0 \;\Leftrightarrow\; f=\theta$;

(H_2) $\forall f,g\in C\left([a,b];K\right)$ için

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt}$$

$$=\overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)}dt}=\overline{(g,f)};$$

(H_3) $\forall f\in C\left([a,b];K\right)$ ve $\alpha\in K$ için

$$(\alpha f,g)=\int_a^b \alpha f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha(f,g);$$

(H_4) $\forall f,g,h\in C\left([a,b];K\right)$ için

$$(f+h,g)=\int_a^b\left(f(t)+h(t)\right)\overline{g(t)}dt=\int_a^b\left(f(t)\overline{g(t)}+h(t)\overline{g(t)}\right)dt$$

$$=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt+\int_a^b h(t)\overline{g(t)}dt=(f,g)+(h,g)\ .$$

Örnek 1.4.3: $x=(x_n),\ y=(y_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$ dizileri için

$$(x,y):=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$$

tanımıyla $\ell_2(\mathbb{N})$ bir iç çarpım uzayıdır.

Gerçekten;

(H_1) Her $x=(x_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$ için,

$$(x,x)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\geq 0\,;$$

$(x,x)=0$ ise, $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=0$ olup $x_n=0,\ n\geq 1$ ve buradan $x=(0)$'dır. Tersine $x=(0)$ ise, $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2=0$ olup $(x,x)=0$'dır.

(H_2) Her $x=(x_n),\ y=(y_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$ için,

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}=\lim_{n\to\infty}\overline{\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{x_i}}=\overline{\sum_{i=1}^{\infty} y_i\overline{x_i}}=\overline{(y,x)}\,;$$

(H_3) Her $x=(x_n),\ y=(y_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ için,

$$(\alpha x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha x_i\overline{y_i}=\alpha\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}=\alpha(x,y)\,;$$

(H_4) Her $x=(x_n),\ y=(y_n),\ z=(z_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$ için,

$$(x+y,z)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)\overline{z_i}=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{z_i}+y_i\overline{z_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{z_i}+\sum_{i=1}^{\infty} y_i\overline{z_i}=(x,z)+(y,z)\,.$$

Benzer şekilde $\ell_2(\mathbb{Z})$ lineer uzayının $(x,y):=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i\overline{y_i}$ tanımıyla bir iç çarpım uzayı olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.4.4: $(X,(\cdot,\cdot))$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in X$ olsun.

$$\|x\|:=(x,x)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma *iç çarpımın ürettiği norm* denir.

Tanım 1.4.5 (Hilbert uzayı): Bir $\left(X,(.,.)\right)$ iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise, yani $\left(X,(\cdot,\cdot)\right)$ içindeki her Cauchy dizisi iç çarpımın ürettiği norma göre yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Örnek 1.4.6: $l_2(\mathbb{N})$ ($l_2(\mathbb{Z})$) bir Hilbert uzayıdır [25].

1.5. Lineer Operatörler ve Temel Spektral Özellikleri

Tanım 1.5.1: X ve Y iki lineer normlu uzay olsun. $A:D(A)\subset X\rightarrow Y$ olan her dönüşüme *operatör* adı verilir.

$D(A):=\{x\in X: Ax \ \textit{tanımlı}\}\subset X$ kümesine A operatörünün *tanım kümesi* denir.

$R(A):=AD(A)=\{y=Ax:\ x\in D(A)\}\subset Y$ kümesine A operatörünün *değer kümesi* denir.

$Ker\,A:=\{x\in X: Ax=0\}\subset X$ kümesine A operatörünün *sıfır kümesi* veya *çekirdeği* denir.

Tanım 1.5.2 (Lineer Operatör): X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A:X\rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X ' de bir lineer manifold ve her $x,y\in D(A)$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

ise, A operatörüne X üzerinde bir *lineer operatör* denir.

Örnek 1.5.3: $X=Y=\ell_2(\mathbb{N})$ ve

$$S_r:\ell_2(\mathbb{N})\rightarrow\ell_2(\mathbb{N}),$$

$$S_l:\ell_2(\mathbb{N})\rightarrow\ell_2(\mathbb{N}),$$

$$S_r(x_n)=(x_{n-1})=\{0,x_1,x_2,....\},\ S_l(x_n)=(x_{n+1})=\{x_2,x_3,x_4,....\}$$

operatörlerine sırasıyla $\ell_2(\mathbb{N})$'de sağa ve sola öteleme operatörleri denir. Bunlar lineer operatörlerdir, örneğin

$\forall x=(x_n),\ y=(y_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$ ve $\forall \alpha,\beta\in K$ için,

$$S_r(\alpha x+\beta y)=S_r((\alpha x_n)+(\beta y_n))=\{0,\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,.....\}$$
$$=\{0,\alpha x_1,\alpha x_2,....\}+\{0,\beta y_1,\beta y_2,....\}$$
$$=\alpha\{0,x_1,x_2,....\}+\beta\{0,y_1,y_2,....\}=\alpha(x_{n-1})+\beta(y_{n-1})$$
$$=\alpha S_r x+\beta S_r y\ .$$

Örnek 1.5.4: $X=Y=L_2(0,1)$ ve $A:L_2(0,1)\to L_2(0,1)$, $Au=u'(t)$,

$$D(A)=\{u\in L_2(0,1):u'\in L_2(0,1)\}=W_2^1(0,1)$$

ise, A bir lineer operatördür.

Gerçekten, $\forall u,v\in W_2^1(0,1)$ ve $\forall \alpha,\beta\in K$ için

$$\alpha u+\beta v\in W_2^1(0,1)$$

olup

$$A(\alpha u+\beta v)=(\alpha u+\beta v)'(t)=(\alpha u)'(t)+(\beta v)'(t)$$
$$=\alpha u'(t)+\beta v'(t)=\alpha Au+\beta Av\ ,$$

yani A bir lineer operatördür.

Örnek 1.5.5: $X=Y=C[a,b]$, $Af(t)=f(a)+1,\ f\in C[a,b]$ şeklinde tanımlanan operatör lineer değildir.

Gerçekten, $f,g\in C[a,b],\ f(t)=g(t)=1$ ve $\alpha=\beta=1$ için $f+g\in C[a,b]$ olup

$$A(f+g)(t)=(f+g)(a)+1=f(a)+g(a)+1=1+1+1=3$$
$$\neq(f(a)+1)+(g(a)+1)=Af(t)+Ag(t)\,.$$

Tanım 1.5.6: X ve Y iki normlu uzaylar, $A:X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in X$ olsun. Eğer

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists\delta>0:\ \|x-x_0\|_X<\delta \text{ olan } \forall x\in X \text{ için } \|Ax-Ax_0\|_Y<\varepsilon$$

ise, A operatörü $x=x_0$ noktasında *süreklidir* denir. A operatörü her $x\in X$ noktasında sürekli ise, operatöre *sürekli operatör* denir.

Not: Eğer bir $A:X\to Y$ lineer operatörü bir noktada sürekli ise, her yerde süreklidir.

Tanım 1.5.7 (Sınırlı Operatör): X ve Y iki normlu uzaylar ve $A : X \to Y$ olsun.

(1) Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörüne *sınırlı operatör* denir.

(2) X ’den Y ’ye sınırlı lineer dönüşümlerin oluşturduğu uzaya sınırlı lineer uzay denir ve $B(X,Y)$ ile gösterilir.

(3) $B(X,Y)$ ’nin normu,

$$\|\bullet\| : B(X,Y) \to \mathbb{R},\ \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.5.8: X ve Y iki normlu uzaylar, $A : X \to Y$ lineer operatörü sınırlıdır ancak ve ancak süreklidir [19].

Örnek 1.5.9: $X = Y = \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$S_l : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z}),$$

$$S_r : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z}),$$

$$S_l x = S_l(x_n) = (x_{n+1}),\ x = (x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z}),\ S_r x = S_r(x_n) = (x_{n-1}),\ x = (x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

şeklinde tanımlanan lineer operatörlere $\ell_2(\mathbb{Z})$’de sırasıyla ‘sola öteleme’ ve ‘sağa öteleme’ operatörleri denir.

Bu operatörler sınırlı olup $\|S_l\| = \|S_r\| = 1$.

Gerçekten, her $(x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\|S_l(x_n)\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_n)\|,$$

$$\|S_r(x_n)\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_n)\|.$$

Örnek 1.5.10: $X = Y = L_2(0,1)$ için $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1),\ Af(t) := \int_0^1 f(t)\,dt$ lineer operatörü sınırlı bir operatör olup $\|A\| = 1$ ’dır.

Gerçekten, $\forall f \in L_2(0,1)$ için

$$\|Af\|_{L_2(0,1)}^2 = \left\| \int_0^1 f(t)\,dt \right\|_{L_2(0,1)}^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 f(t)\,dt \right|^2 dx$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt \right)^2 dx = \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2\,dt \right) \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt \right) = \|f\|_{L_2(0,1)}^2$$

olup

$$\|Af\| \leq \|f\|.$$

Buradan $\|A\| \leq 1$ olduğu çıkar. Eğer $f_*(t) = 1 \in L_2(0,1)$ alırsak

$$\|Af_*\|_{L_2(0,1)} = 1 = 1 \cdot \|f_*\|_{L_2(0,1)}$$

olup $\|A\| = 1$ bulunur.

Örnek 1.5.11: $X = Y = L_2(0,1)$, $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Af := f'$, $f \in L_2(0,1)$.

$$D(A) = \{ f \in L_2(0,1) : f' \in L_2(0,1) \}$$

şeklinde tanımlanan lineer operatör sınırlı değildir.

Gerçekten, $n = 1,2,.....$ için $\varphi_n(x) = e^{inx}$ ise, $\|\varphi_n\| = 1$, ama

$$\|A\varphi_n\| = n\|\varphi_n\| = n \to \infty.$$

Tanım 1.5.12: H bir Hilbert uzayı ve $A \in B(H)$ olsun. Eğer H 'da sınırlı her $E \subset H$ altkümesi için $A(E) \subset H$ kümesi ön kompakt ise, A^* operatörüne *kompakt operatör* denir [25].

Örnek 1.5.13: $H = \ell_2(\mathbb{N})$, $A : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$,

$A(x_n) = \{ \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ... \}$, $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$

operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ [25].

Örnek 1.5.14: $H = L_2[a,b]$, $A : H \to H$, $Af(t) := \int_a^b k(t,s) f(s)\,ds$,

burada $k \in L_2([a,b] \mathrm{x} [a,b])$ şeklinde tanımlanan operatör bir kompakt operatördür.

Çözüm : $A \in B(L_2[a,b])$ olduğu bilinir [19]. Şimdi A 'nın H 'da sonlu ranklı operatörlerin H normunda limiti olduğunu gösterelim.

Eğer $\varphi_1, \varphi_2, ...$, $L_2([a,b])$ için bir ortonormal baz ise,

$$\phi_{ij}(t,s)=\varphi_i(t)\,\mathrm{x}\,\overline{\varphi_j}(s),\ i,j=1,2,....$$

$L_2([a,b]\,\mathrm{x}\,[a,b])$ için bir ortonormal bazdır [19]. Böylece

$$k=\sum_{i,j=1}^{\infty}\langle k,\phi_{ij}\rangle\phi_{ij}\,.$$

$k_n(t,s)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle k,\phi_{ij}\rangle\phi_{ij}(t,s)$ şeklinde tanımlanırsa

$$\|k-k_n\|\to 0\,. \tag{1.8}$$

$$K_n: D(K_n)\subset L_2[a,b]\to L_2[a,b],\ (K_nf)(t):=\int_a^b k_n(t,s)f(s)\,ds$$

lineer integral operatörleri, $\Im K_n\subset span\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ olduğu için sonlu ranklıdır, yani her bir integral operatörü sınırlıdır. Böylece (1.8)'den,

$$\|K-K_n\|\le\|k-k_n\|\to 0$$

olup K operatörünün kompaktlığı elde edilir.

Tanım 1.5.15 (Kapalı Operatör): $A:X\to Y$ operatörünün grafiği $Gr(A)$, $Z=X\oplus Y$ 'de kapalı ise A operatörüne *kapalı operatör* denir.

$A:X\to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n)\subset D(A),\ \lim_{n\to\infty}(x_n,Ax_n)=(x,y)$$

koşullarından $x\in D(A)$ ve $y=Ax$ eşitliğini sağlaması demektir.

$\langle x,y\rangle\in X\mathrm{x}Y$ için $\|\langle x,y\rangle\|^2=\|x\|_X^2+\|y\|_Y^2$ olduğundan $A:X\to Y$ lineer operatörü *kapalıdır* $\Leftrightarrow (x_n)\subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ ve $\lim_{n\to\infty}Ax_n=y$ ise, $x\in D(A)$ ve $y=Ax$.

Örnek 1.5.16: $A:L_2[0,1]\to L_2[0,1],\ Af=f'$,

$D(A)=\{f\in L_2[0,1]: f\in AC,\ f'\in L_2[0,1],\ f(0)=0\}$

şeklinde tanımlanan operatör kapalıdır.

Gerçekten, $n=1,2,....$ için $f_n(t)=t^n$ ise,

$$\|f_n\|_{L_2[0,1]}^2=\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}\le 1 \text{ ve}$$

$$\|Af_n\|_{L_2[0,1]}^2=\int_0^1 n^2t^{2n-2}dt=\frac{n^2}{2n-1}\to\infty$$

olup A operatörü sınırsızdır. Şimdi A operatörünün kapalı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için, ilk önce $KerA=\{0\}$ ve $\operatorname{Im} A = L_2[0,1]$ olduğunu not edelim. $g \in L_2[0,1]$ için $f(t)=\int_0^1 g(s)\,ds$ alalım. Buradan $f \in D(A)$ ve $Af = g$ 'dır. $g \in L_2[0,1]$ için $A^{-1}g = f$ şeklinde tanımlanır.

$$\left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right| \le \int_0^1 |g(s)|\,ds \le \left(\int_0^1 |g(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|$$

olup A^{-1} sınırlı lineer operatördür. Buradan

$$\left\|A^{-1}g\right\|^2 = \int_0^1 \left|\left(A^{-1}g\right)(t)\right|^2 dt \le \int_0^1 \|g\|^2\,dt = \|g\|^2$$

olup $\left\|A^{-1}\right\| \le 1$ 'dır.

$f_n \in D(A)$ için $f_n \to f$ ve $Af_n \to h \in L_2[0,1]$

için $f_n = A^{-1}$, $Af_n = A^{-1}h$ olarak alındığında $f = A^{-1}h \in D(A)$ ve $Af = h$ 'dır. Dolayısıyla A operatörü kapalıdır.

Tanım 1.5.17 (Kapanabilir Operatör): $A : X \to Y$ operatörünün $D(A) \subset D\left(\overline{A}\right)$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = \overline{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\overline{A}$ operatörü varsa, A 'ya *kapanabilir operatör* ve $\overline{A}$ operatörüne A 'nın *kapanışı* denir.

Örnek 1.5.18: $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Tf := xf(1)$,

$$D(T) = C[0,1]$$

şeklinde tanımlanan operatör kapalı değil ve kapanışı yoktur.

Gerçekten, $\overline{C[0,1]} = L_2[0,1]$ olup

$$\left(f_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2}} u(x),$$

$$\left(h_n(x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{L_2}} u(x),\ (f_n),(h_n) \subset C[0,1],$$

ama $f_n(1)=1,\ h_n(1)=0,\ n=1,2,....$.

O halde $Tf_n = x,\ Th_n = 0$ olduğundan durum açıktır.

Tanım 1.5.19 (Eşlenik Operatör): H bir Hilbert uzayı, $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. A operatörünün A^* *Hilbert eşleniği*

$D(A^*) := \{ y \in H : \forall x \in D(A)$ için bir $z \in H$ vardır, öyleki $(Ax, y) = (x, z)\}$, $A^* y := z$

şeklinde tanımlanan operatöre denir.

A lineer operatörünün A^* eşleniği lineer ve kapalıdır [64].

Örnek 1.5.20: $H = \ell_2(\mathbb{N})$, $T_c : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$, $(c_n) \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ ve $T_c(x_n) := (c_n x_n)$ şeklinde tanımlanan operatörün eşleniğini bulalım.

Bu halde $(x_n), (y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha(x_n) + \beta(y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ olup

$$T_c(\alpha(x_n) + \beta(y_n)) = (c_n(\alpha(x_n) + \beta(y_n))) = (c_n(\alpha(x_n)) + c_n(\beta(y_n)))$$
$$= \alpha(c_n x_n) + \beta(c_n y_n) = \alpha T_c(x_n) + \beta T_c(y_n)$$

bağıntısından T_c operatörünün lineerliği açıktır.

Her $(x_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ için

$$\|T_c(x_n)\|_{\ell_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c \|(x_n)\|_{\ell_2}, \ c := \sup_{n \geq 1} |c_n| < +\infty$$

olup $T_c \in B(\ell_2(\mathbb{N}))$ olduğu açıktır. O halde T_c^* eşlenik operatörü var olup her $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ için

$$(T_c x, y)_{\ell_2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{(\overline{c_n} y_n)} = (x, T_c^* y)_{\ell_2} \quad \text{ve}$$

$$T_c^* y := (\overline{c_n} y_n), \ y = (y_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$$

olup $T_c^* = T_{\overline{c}}$.

Örnek 1.5.21: $H = L_2(0,1)$, $A : H \to H$, $Af := f'$,

$$D(A) := \{ f \in H : f \in AC(0,1), f' \in H \text{ ve } f(0) = f(1) = 0 \}$$

olsun. Bu halde

$$C_0^\infty(0,1) \subset D(A)$$

olup

$$H = \overline{C_0^\infty(0,1)} \subset \overline{D(A)} \subset H,$$

buradan

$$\overline{D(A)} = H$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$A^* g = -g',\ D(A^*) = \{g \in H \cap AC(0,1) : g' \in H\}$$

olduğunu gösterelim.

$g \in D(A^*)$ ve $A^* g = h$ olsun. O halde her $f \in D(A)$ için

$$(Af, g)_{L_2} = \int_0^1 f'(t)\overline{g(t)}dt = (f, A^* g)_{L_2} = \int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt .$$

Ayrıca $f \in D(A)$ olduğundan $f(0) = f(1) = 0$ olup

$$\int_0^1 f(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^1 f(t)d\overline{\left(\int_0^t h(s)ds + c\right)} = f(t)\overline{\left(\int_0^t h(s)ds + c\right)}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \overline{\left(\int_0^t h(s)ds + c\right)} f'(t)dt$$

$$= -\int_0^1 (H(t) + c) f'(t)dt,\ H(t) = \int_0^t \overline{h(s)}ds .$$

Yukarıdakilerden

$$0 = \int_0^1 \left(\overline{g(t)} + H(t) + c\right) f'(t)dt,\ f \in D(A).$$

Eğer $f_0(t) := \int_0^t \overline{\left(\overline{d(s)} + H(s) + c_0\right)}ds$

(c_0 sayısı $f_0(1) = 0$ bağıntısından bulunur.)

ise, $f_0 \in D(A)$, sonuncu bağıntıda f yerine f_0 alarak

$$0 = \int_0^1 \left|\overline{g(t)} + H(t) + c_0\right|^2 dt$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$g(t) = -\overline{H(t)} - c_0 = -\int_0^t h(s)ds - \overline{c_0},\ g \in AC(0,1) \text{ ve } g' = -h \in H .$$

Böylece $g \in D(A^*)$ için

$$(Af, g)_{L_2} = (f, -g') = (f, A^* g) \text{ ve } A^* g = -g' .$$

Tanım 1.5.22: A, H Hilbert uzayında bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun.

Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$, yani

$\forall f, g \in D(A)$ için $(Af, g) = (f, Ag)$

ise, A operatörüne *simetrik operatör* denir ve $A \subset A^*$ sembolüyle gösterilir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$ ise, A operatörüne *selfadjoint operatör* denir.

Teorem 1.5.23: $A : D(A) \subset H \to H$ lineer simetrik operatörünün selfadjoint olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\dim Ker\left(A^* \pm iE\right) = 0$$

olmasıdır.

Örnek 1.5.24: $H = L_2[0,+\infty)$, $A : L_2[0,+\infty) \to L_2[0,+\infty)$, $Af = if'$,

$D(A) := \{ f \in AC[0,+\infty) : f' \in L_2[0,+\infty),\ f(0) = 0 \}$

ise, $D(A) \subset L_2[0,+\infty)$ bir lineer manifold ve $\overline{D(A)} = L_2[0,+\infty)$. O halde A^* operatörü vardır. Şimdi A^* operatörünü bulalım.

$A^* = S$, $D(S) = \{ g \in AC[0,+\infty) : g' \in L_2[0,+\infty) \}$, $Sg = ig'$ olduğunu gösterelim.

$g \in D(A^*)$ ve $A^* g = h$. O halde her $f \in D(A)$ için

$$(Af, g)_{L_2[0,+\infty)} = \int_0^{+\infty} if'(t)\overline{g(t)}dt = (f, A^* g) = \int_0^{+\infty} f(t)\overline{h(t)}dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, d\left(\overline{\int_0^t h(s)\,ds + c}\right)$$

$$= f(t)\left(\int_0^t \overline{h(s)}ds + c\right)\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f'(t)\left(\int_0^t \overline{h(s)}ds + c\right)dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} f'(t)\left(\int_0^t \overline{h(s)}ds + c\right)dt\,.$$

O halde

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\left[\overline{ig(t)} + \int_0^t \overline{h(s)}ds + c\right]dt = 0\,.$$

Eğer

$$f_0(t) := \int_0^t \left(\overline{ig(s)} + \int_0^s \overline{h(t)}dt + c_0\right)ds$$

(c_0 sayısı $f_0(0) = 0$ koşulundan bulunur.)

ise, $f_0 \in D(A)$ olup bir önceki eşitlikten f yerine f_0 alırsak,

$$\int_0^{+\infty} \left| i\overline{g(t)} + \int_0^t \overline{h(s)}ds + c_0 \right|^2 dt = 0 .$$

Buradan

$$g(t) = -i\int_0^t h(s)\,ds - \overline{ic_0}$$

şeklinde olup $g \in AC[0,+\infty)$ ve $g'(t) = -ih(t) \in L_2[0,+\infty)$. Böylece $g \in D(S)$ ve

$$(Af, g) = (f, ig') = (f, Sg)$$

olup

$$D(A^*) \subseteq D(S) \text{ ve } A^* g = Sg,\ g \in D(A^*).$$

Şimdi $D(S) \subseteq D(A^*)$ olduğunu gösterelim. Verilen $v \in D(S)$ ve $u \in D(A)$ için

$$(Au, v) = \int_0^{+\infty} iu'(t)\overline{v(t)}dt = \int_0^{+\infty} u\overline{(iv')(t)}dt = (u, Sv)$$

olduğundan $v \in D(A^*)$ ve $A^* v = Sv = iv'$. Sonuç olarak

$$A \subset A^*,$$

yani A simetrik bir operatördür. Şimdi $A \neq A^*$ olduğunu gösterelim.

Bunun için $Ker(A^* \pm iE) = 0$ kümelerini bulalım. Yani $iu' \pm iu = 0,\ u \in L_2[0,+\infty)$ denkleminin çözüm kümesini bulalım. O halde $u' = \pm u,\ u \in L_2[0,+\infty)$ olup

$$u_{\pm}(t) = ce^{\pm t},\ c \in K,\ t \geq 0 .$$

Öyleyse,

$$u_-(t) \in L_2[0,+\infty)$$

$$u_+(t) \not\in L_2[0,+\infty) .$$

Bu sonuncudan

$$\dim Ker(A^* + iE) = 1 ,$$

$$\dim Ker(A^* - iE) = 0$$

bulunur. Öyleyse, Teorem 1.5.23'ye göre

$$A \neq A^* .$$

Örnek 1.5.25: $H=\ell_2(\mathbb{Z}),\ (c_n)\in \ell_\infty(\mathbb{Z}), A:\ell_2(\mathbb{Z})\to \ell_2(\mathbb{Z}),\ A(x_n)=(c_n x_n),$

$x=(x_n)\in \ell_2(\mathbb{Z})$ şeklinde tanımlanan A operatörünün eşleniğini bulalım.

A operatörünün lineer olduğu açıktır. Ayrıca her $(x_n)\in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\|Ax\|_{\ell_2}=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le c\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=c\|x\|,\ c:=\sup_{n\in\mathbb{Z}}|x_n|$$

olduğundan $A\in B(\ell_2(\mathbb{Z}))$. Her $x=(x_n),\ y=(y_n)\in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$(Ax,y)_{\ell_2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n x_n\overline{y_n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_n\overline{(\overline{c_n}y_n)}$$

olduğundan

$$A^*(y_n)=(\overline{c_n}y_n),\ y_n\in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

O halde,

$A=A^*$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall n\in\mathbb{Z}$ için $c_n=\overline{c_n}$.

Örnek 1.5.26: $H=L_2(0,1),\ A:D(A)\subset L_2(0,1)\to L_2(0,1),\ Au=-u''+au,\ a\in\mathbb{R},$

$D(A):=\{u\in L_2(0,1): u'\in AC(0,1),\ u''\in L_2(0,1),\ u'(0)=u'(1)=0\}$

operatörü için $\overline{D(A)}=L_2(0,1)$ olduğundan A^* vardır.

$A=A^*$ olduğu kolayca yoklanılabilir [20].

Tanım 1.5.27: A, H Hilbert uzayında bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun.

Eğer her $f\in H$ için $AA^*f=A^*Af=f$ ise, A operatörüne *üniter operatör* denir.

Örnek 1.5.28: $H=\ell_2(\mathbb{N}),\ A:\ell_2(\mathbb{N})\to \ell_2(\mathbb{N}),\ (c_n)\in \ell_\infty(\mathbb{N}),\ A(x_n)=(c_n x_n),$

$(x_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$ şeklinde tanımlanan operatör $B(\ell_2(\mathbb{N}))$ uzayında olup onun eşleniği

$$A^*(x_n)=(\overline{c_n}x_n),\ (x_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$$

şeklindedir. O halde

$$AA^*(x_n)=(c_n\overline{c_n}x_n)=(x_n),$$

$$A^*A(x_n)=(\overline{c_n}c_n x_n)=(x_n),\ (x_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$$

olması için, yani A'nın bir üniter operatör olması için gerekli ve yeterli koşul

$$|c_n|=1,\ n\ge 1$$

olmasıdır.

Örnek 1.5.29: $H = L_2(0,1)$, $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $\mathrm{a}(t) \in L_\infty(0,1)$, $Af(t) = a(t) f(t)$, $f \in L_2(0,1)$ şeklinde tanımlanan operatör lineer sınırlı olup

$$AA^* f(t) = a(t) a^*(t) f(t) = f(t),$$

$$A^* Af(t) = a^*(t) a(t) f(t) = f(t),\ f \in L_2(0,1)$$

olması için, yani A'nın bir üniter operatör olması için gerekli ve yeterli koşul

$$|a(t)| = 1,\ t \in [0,1]$$

olmasıdır.

Tanım 1.5.30: H bir Hilbert uzayı ve $P : H \to H$ bir lineer operatör olsun. Eğer

$$P^2 = P \text{ ve } P^* = P$$

ise P operatörüne ortogonal *projeksiyon (izdüşüm) operatörü* denir.

Eğer P, H'da bir ortogonal projeksiyon operatör ise,

$$P \in B(H) \text{ ve } \|P\| = 1$$

olduğu açıktır [25].

Örnek 1.5.31: $H = \ell_2(\mathbb{Z})$ ve $e_n = (\delta_{kn})_{k=-\infty}^{+\infty} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } k = n \text{ ise,} \\ 0, & \text{eğer } k \neq n \text{ ise} \end{cases}$

ise, $P_n x := x_n e_n$, $x = (x_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{Z}$ şeklinde tanımlanan P_n, $n \in \mathbb{Z}$ ortogonal projeksiyon operatörüdür.

Teorem 1.5.32: X bir Banach uzayı, $A \in B(X)$ ve $\|A\| < 1$ ise,

$$E - A \in B(X) \text{ ve } (E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad [64].$$

Tanım 1.5.33: H bir Hilbert uzayı ve $A \in B(H)$ olsun. Eğer

$$AA^* = A^* A$$

ise, A'ya H'da bir *normal operatör* denir. Bu durumda $AA^* = A^* A$ koşulu $A_R A_I = A_I A_R$, $A_R = \dfrac{(A + A^*)}{2}$, $A_I = \dfrac{(A - A^*)}{2i}$ koşuluna denktir.

Bir A operatörünün sınırsız olduğu durumlarda onun reel ve sanal kısımlarının komutatifliği yoklamak çok zor hesaplamalarla karşılaştırdığından [61] bu durumlarda sınırsız bir operatörün normallik kavramını başka (daha pratik) şekilde aşağıdaki biçimde tanımlanır.

Tanım 1.5.34: (1) H Hilbert uzayında lineer kapalı bir A operatörü için

(a) $D(A) \subset D(A^*)$ ve

(b) $\forall f \in D(A)$ için $\|Af\|_H = \|A^* f\|_H$

ise, A'ya H'da *formal normal operatör* denir.

(2) Eğer A H'da formal normal bir operatör ve onun trivial olmayan başka formal normal genişlemesi yoksa A'ya H'da *maksimal formal operatör* denir.

(3) Eğer A H Hilbert uzayında formal normal ve $D(A) = D(A^*)$ ise, ona H'da *normal operatör* denir.

Not: Her simetrik operatörün formal normal, her selfadjoint ve üniter operatörün ise normal olduğu açıktır.

Not: Banach uzaylarında normal operatörlerin tanımı [60] çalışmasında verilmiştir.

Örnek 1.5.35 : $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ sınırlı Lebesque ölçülebilir bir fonksiyon ve $Af(t) := a(t) f(t)$, $f \in L_2[0,1]$ ise, A bir normal operatördür.

Gerçekten, A lineer bir operatör ve her $f \in L_2[0,1]$ için

$$\|Af\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |a(t) f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \le M \|f\|_{L_2[0,1]}, \ M := \sup_{0 \le t \le 1} |a(t)|$$

olduğundan $A \in B(L_2[0,1])$.

Ayrıca her $f, g \in L_2[0,1]$ için

$$(Af, g)_{L_2[0,1]}) = \int_0^1 a(t) f(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^1 f(t) \left[\overline{a(t) g(t)} \right] dt = (f, A^* g)_{L_2[0,1]},$$

burada $A^* g(t) = a(t) g(t)$ olup her $f \in L_2[0,1]$ için

$$\|Af\|_{L_2[0,1]} = \|a(t) f(t)\|_{L_2[0,1]} = \|A^* f\|_{L_2[0,1]}$$

olduğundan A bir normal operatördür.

Örnek 1.5.36: $A:\ell_2(\mathbb{Z})\to\ell_2(\mathbb{Z})$ ve $A\{x_1,x_2,x_3,....\}=\{0,4x_1,x_2,4x_3,....\}$, $(x_n)\in\ell_2(\mathbb{Z})$ şeklinde tanımlanan operatör normal değildir.

Gerçekten, bu şekilde tanımlanan operatör lineer olup ve her $(x_n)\in\ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\|Ax\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})}=\sum_{k=1}^{\infty}|x_{2k}|^2+16\sum_{k=1}^{\infty}|x_{2k-1}|^2\le 16\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2=16\|x\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})},$$

yani $\|Ax\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}\le 4\|x\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}$ olduğundan $A\in B(\ell_2(\mathbb{Z}))$.

Şimdi A^* adjoint operatörünü bulalım. Her $x=(x_n)$, $y=(y_n)\in\ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$(Ax,y)_{\ell_2(\mathbb{Z})}=(0,y_1)+(4x_1,y_2)+(x_2,y_3)+(4x_3,y_4)+....$$

$$=(x_1,4y_2)+(x_2,y_3)+(x_3,4y_4)+(x_4,y_5)+.....=(x,A^*y),$$

burada $A^*y=\{4y_2,y_3,4y_4,y_5,....\}$, $y=(y_n)\in\ell_2(\mathbb{Z})$.

Bu durumda her $x=(x_n)\in\ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\|Ax\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})}=16\sum_{k=1}^{\infty}|x_{2k-1}|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|x_{2k}|^2,$$

$$\|A^*x\|^2_{\ell_2(\mathbb{Z})}=\sum_{k=2}^{\infty}|x_{2k-1}|^2+16\sum_{k=1}^{\infty}|x_{2k}|^2$$

olup A normal olamaz.

Örnek 1.5.37: $H=L_2[0,+\infty)$, $A:D(A)\subset H\to H$, $Au:=u'(t)$ ve

$$D(A):=\{u(t)\in L_2[0,+\infty)\cap AC[0,+\infty):u(0)=0,\ u'(t)\in L_2[0,+\infty)\}$$

ise, A $L_2[0,+\infty)$ uzayında bir formal normal operatördür.

Gerçekten, bu durumda

$$A^*u=-u'(t) \text{ ve}$$

$$D(A^*)=\{u(t)\in L_2[0,+\infty)\cap AC[0,+\infty):u'(t)\in L_2[0,+\infty)\}$$

olup (bak Örnek 1.5.21) $D(A)\subset D(A^*)$ ve her $u\in D(A)$ için

$$\|Au\|_{L_2[0,+\infty)}=\|u'(t)\|_{L_2[0,+\infty)}=\|-u'(t)\|_{L_2[0,+\infty)}=\|A^*u\|_{L_2[0,+\infty)}$$

olduğundan A bir formal normal operatördür.

Şimdi böyle tanımlanan A operatörünün maksimal normal bir operatör olduğunu gösterelim. Bu halde

$$B := iA,\ D(B) = D(A)$$

şeklinde tanımlanan kapalı B operatörü simetrik olup (bak Örnek 1.5.24) onun maksimal simetrik olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\ker\left(B^* \pm iE\right),\ D\left(B^*\right) = \left\{u \in L_2[0,+\infty) \cap AC[0,+\infty) : u'(t) \in L_2[0,+\infty)\right\}$$

kümelerini bulalım, yani

$$-iu' \mp iu = 0,\ u \in L_2[0,+\infty),$$

denkleminin çözüm kümesini araştıralım. Bu halde

$$u_\pm(t) = ce^{\pm t},\ c \in \mathbb{R}$$

olup

$$u_+ \notin L_2[0,+\infty),$$

$$u_- \in L_2[0,+\infty)$$

olduğundan B operatörünün indeks sayıları $(0,1)$ şeklindedir. Böylece B maksimal simetrik ama selfadjoint olmayan bir operatördür, yani

$$D(B) \underset{\neq}{\subset} D\left(B^*\right).$$

Bu sonuncudan

$$D(A) \underset{\neq}{\subset} D\left(A^*\right)$$

olup formal normal A operatörü maksimal formal normal, ama normal olmayan bir operatördür.

Örnek 1.5.38: $H = L_2[0,1],\ A : D(A) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Au := u'(t) + au(t),\ a \in \mathbb{R}$,

$$D(A) := \left\{u \in L_2[0,1] \cap AC[0,1] : u(1) = u(0),\ u'(t) \in L_2[0,1]\right\}$$

şeklinde tanımlanan operatör bir normal operatördür.

Gerçekten, bu durumda

$$A^*v = -v'(t) + av(t),$$

$$D\left(A^*\right) = \left\{v(t) \in L_2[0,1] \cap AC[0,1] : v(1) = v(0),\ v'(t) \in L_2[0,1]\right\}$$

olup [43],

$$D(A) = D\left(A^*\right)$$

ve her $u(t) \in L_2[0,1]$ için

$$\|Au\|_{L_2[0,1]} = \|u' + au\|_{L_2[0,1]} = \|-u' + au\|_{L_2[0,1]} = \|A^* u\|_{L_2[0,1]},$$

yani A normaldir.

Tanım 1.5.39 (Rezolvent Küme): H bir Hilbert uzayı ve $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in B(X) \right\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün *regüler noktalar kümesi* (veya *rezolvent kümesi*) denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) := (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolventası* (veya *çözücü operatörü*) adı verilir.

Tanım 1.5.40 (Spektrum): H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün *spektrumu* denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.41 (Ayrık Spektrum): $\sigma_p(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ operatörü bire bir değil} \right\}$ kümesine A operatörünün *ayrık* veya *diskret spektrumu* denir. Eğer $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ise,

$$(A - \lambda_0 E) x_0 = 0$$

denkleminin $x_0 \neq 0$ çözümü vardır. Buradaki λ_0 'a A operatörünün *öz değeri*, x_0' a ise λ_0' a uygun bir *öz vektörü* denir.

Tanım 1.5.42 (Sürekli Spektrum):

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A - \lambda E)} = H, \text{ fakat } R(A - \lambda E) \neq H \right\}$$

kümesine A operatörünün *sürekli spektrumu* denir.

Tanım 1.5.43 (Rezudial Spektrum):

$$\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A - \lambda E)} \neq H \right\}$$

kümesine A operatörünün *rezudial spektrumu* denir.

$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca spektrumun tanımından $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 1.5.44: $X = \left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty \right)$ olmak üzere, $A: X \to X$ $Ax = tx(t)$ operatörünü göz önüne alalım. $Ax = tx(t)$ operatörü için $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ ' i bulalım.

$$tx(t)-\lambda x(t)=y(t)$$

olup, $x(t)$ çözümü her $t\in[0,1]$ için yukarıdaki eşitliği sağlayan bir fonksiyondur. Eğer $\lambda\in\mathbb{R}\backslash[0,1]$ $(\lambda<0$ veya $\lambda>1)$ ise, yukarıdaki denkleminin her $y\in X$ için $[0,1]$ üzerinde sürekli tek

$$x(t)=\frac{1}{t-\lambda}y(t),\ t\in[0,1]$$

çözümü vardır. Bu nedenle $\rho(A)=\mathbb{R}\backslash[0,1]$ ve her $\lambda\in\rho(A)$ için

$$R(\lambda;A)=\frac{1}{t-\lambda}y(t),\ t\in[0,1]$$

olur. Şimdi $\lambda\in[0,1]$ sayısının A operatörünün spektrumuna dâhil olduğunu görelim.

$\lambda_0\in[0,1]$ ve $y(t)\in C[0,1]$ fonksiyonu $y(\lambda_0)=a\neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için

$$(t-\lambda_0)x(t)=y(t)$$

eşitliği hiçbir $x(t)\in C[0,1]$ fonksiyonu için sağlanamaz, çünkü $t=\lambda_0$ noktasında sol tarafı sıfır, sağ tarafı ise sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile $\lambda=\lambda_0$ olduğundan yukarıda verilen denklemin bazı $y(t)\in C[0,1]$ fonksiyonları için çözümü yoktur. Bu ise $\lambda\in\sigma(A)$ olması demektir. Ayrıca $\sigma(A)$'nın hiçbir noktası A operatörünün öz değeri olamaz, çünkü

$$(t-\lambda)x(t)=0,\ \lambda\in[0,1]$$

denkleminin çözümü her $t\neq\lambda_0$ için $x(t)$'nin süreksizliğine göre $t=\lambda$ noktasında 0 olur. Böylece $\sigma_c(A)=[0,1]$ ve $\sigma_p=\varnothing$ olduğu bulunur.

Örnek 1.5.45: $H=L_2(0,1)$ uzayında ve $A_i:L_2(0,1)\to L_2(0,1),\ i=1,..4$ operatörü için

(1) $A_1u:=u'+au,\ D(A_1)=\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$;

(2) $A_2u:=u'+au,\ D(A_2)=\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=0\}$;

(3) $A_3u:=u'+au,\ D(A_3)=\{u\in W_2^1(0,1):u(0)=u(1)\}$;

(4) $A_4u:=u'+au,\ D(A_4)=W_2^1(0,1),\ a\in\mathbb{R}$;

operatörlerinin spektrumlarını bulalım:

Çözüm: (1) $\lambda\in\mathbb{C}$ için $R(A_1-\lambda E)\perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten, her $u(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,1)$ için

$$\left(u' + au - \lambda u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} = \left(u', e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} + \left(u, \left(a - \bar{\lambda}\right) e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)}$$

$$= \left(u, e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)'_{L_2(0,1)} - \left(u, \left(a - \bar{\lambda}\right) e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)_{L_2(0,1)} + \left(u, \left(a - \bar{\lambda}\right) e^{(a-\bar{\lambda})t}\right)$$

$$= \left(u(1), e^{(a-\bar{\lambda})}\right)_{L_2(0,1)} - \left(u(0), 1\right)_{L_2(0,1)} = 0$$

olduğundan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R(A_1 - \lambda E) \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ ve buradan $\overline{R(A_1 - \lambda E)} \perp e^{(a-\bar{\lambda})t}$ bulunur. Başka sözle, $\overline{R(A_1 - \lambda E)} \neq L_2(0,1)$.

Sonuncu ve kalan spektrumunun tanımına göre

$$\sigma(A_1) = \sigma_r(A_1) = \mathbb{C}.$$

(2) $A_2 u := u' + au,\ A : L_2(0,1) \to L_2(0,1),\ D(A_2) = \left\{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = 0\right\}$.

Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$u' + au = \lambda u + f,\ f \in L_2(0,1)$$

denkleminin genel çözümü

$$u(t) = ce^{(\lambda-a)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\, ds$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşulundan $c = 0$ bulunur. Öyleyse, her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $f \in L_2(0,1)$ için

$$(A_2 - \lambda) u = f$$

denkleminin

$$u(t) = \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\, ds \in W_2^1(0,1)$$

şeklinde bir tek çözümü vardır, yani her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(A_2 - \lambda)^{-1} \in B\left(L_2(0,1)\right).$$

Başka bir ifadeyle

$$\sigma(A_2) = \varnothing,\ \rho(A_2) = \mathbb{C}.$$

(3) $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_3 u = u' + au = \lambda u, \; u \in D(A_3)$$

denkleminin çözüm kümesi

$$u_\lambda(t) = ce^{-(a-\lambda)t}, \; c \in \mathbb{C}, \; 0 \le t \le 1$$

şeklindedir. Ayrıca $u_\lambda \in W_2^1(0,1)$ olup $u(0) = u(1)$ sınır değerlerini kullanırsak,

$$c = ce^{-(a-\lambda)}$$

elde edilir. Buradan

$$c\left(1 - e^{-(a-\lambda)}\right) = 0$$

olup, $c \neq 0$ için $1 = e^{-(a-\lambda)}$'dır. Buradan ise,

$$\lambda - a = 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Sonuncu ve noktasal spektrumunun tanımından

$$\sigma_p(A_3) = \{a + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Örnek 1.5.38'den $A_3 : D(A_3) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ operatörü normal olduğundan bu operatörün rezudial spektrumu

$$\sigma_r(A_3) = \varnothing.$$

$\lambda \neq \lambda_k = a + 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}$ alalım.

$A_3 u = \lambda u + f, \; u(t), f(t) \in L_2(0,1)$ denkleminin çözüm kümesi

$$u(t) = ce^{-(a-\lambda)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)\, ds, \; c \in \mathbb{C} \tag{1.9}$$

elde edilir. $u(0) = u(1)$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c = \left(1 - e^{(\lambda-a)}\right)^{-1} \int_0^1 e^{(\lambda-a)(1-s)} f(s)\, ds$$

olup (1.9) denkleminden,

$$R_\lambda f(t) = \left(1 - e^{(\lambda-a)}\right)^{-1} \int_0^1 e^{(\lambda-a)(1+t-s)} f(s)\, ds + \int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\, ds, \; f \in L_2(0,1).$$

Yani

$$R_\lambda f(t) = \frac{1 + e^{(\lambda-a)}}{1 - e^{(\lambda-a)}} \int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\, ds + \frac{e^{(\lambda-a)}}{1 - e^{(\lambda-a)}} \int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\, ds$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi $R_\lambda f(t) \in B(L_2(0,1))$ olduğunu gösterelim.

$$\|R_\lambda f(t)\|^2 = \int_0^1 \left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds + \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds \right|^2 dt$$

$$\leq 2\int_0^1 \left(\left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \int_0^t e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds \right|^2 + \left| \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \int_t^1 e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s)\,ds \right|^2 \right) dt$$

$$\leq 2\int_0^1 \left(\left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \left(\int_0^t \left| e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s) \right| ds \right)^2 + \left| \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \left(\int_t^1 \left| e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s) \right| ds \right)^2 \right) dt$$

$$\leq 2\int_0^1 \left(\left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \left(\int_0^1 \left| e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s) \right| ds \right)^2 + \left| \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \left(\int_0^1 \left| e^{(\lambda-a)(t-s)} f(s) \right| ds \right)^2 \right) dt$$

(Cauchy-Bunyokowski Eşitsizliğinden)

$$\leq 2\int_0^1 \left(\left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \int_0^1 \left| e^{(\lambda-a)(t-s)} \right|^2 ds \int_0^1 |f(s)|^2\,ds + \left| \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \int_0^1 \left| e^{(\lambda-a)(t-s)} \right|^2 ds \int_0^1 |f(s)|^2\,ds \right) dt$$

$$\leq 2\left(\left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 + \left| \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \right) \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| e^{(\lambda-a)(t-s)} \right|^2 ds \right) dt \, \|f(t)\|^2$$

$$\leq 2\left(\left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 + \left| \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \right) \left(\frac{e^{2|a-\lambda|}-1}{2|a-\lambda|} \right)^2 \|f(t)\|^2$$

$$c_\lambda := \left(2\left| \frac{1+e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 + 2\left| \frac{e^{(\lambda-a)}}{1-e^{(\lambda-a)}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{2|\lambda-a|}-1}{2|\lambda-a|} \right)$$ olarak seçildiğinde

$$\|R_\lambda f(t)\| \leq c_\lambda \|f(t)\|$$

elde edilir. Böylece eğer $\lambda \neq \lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}$ ise, $\lambda \in \rho(A_3)$.

Sonuç olarak

$$\sigma(A_3) = \{a + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(4) Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $A_4 u = u' + au = \lambda u,\ u \in W_2^1(0,1)$ denkleminin çözüm kümesi

$$u(t) = ce^{(\lambda-a)t}$$

şeklinde olup her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$A_4 u = \lambda u$$

denkleminin $u \neq 0,\ u \in W_2^1(0,1)$ şeklinde çözümü vardır. Sonuncu ve noktasal spektrumunun tanımına göre

$$\sigma(A_4) = \sigma_p(A_4) = \mathbb{C}.$$

Örnek 1.5.46: $H = L_p[0,1],\ p \in [1,+\infty)$ uzayında,

$$T : L_p[0,1] \to L_p[0,1],\ Tf(x) = \int_0^1 \min(x,y) f(y)\,dy$$

şeklinde tanımlanan operatörün spektrumunu bulalım.

Her $f \in L_p[0,1]$ için T operatörü,

$$Tf(x) = \int_0^1 \min(x,y) f(y)\,dy = \int_0^x yf(y)\,dy + x\int_x^1 f(y)\,dy$$

şeklinde yazabiliriz. İlk önce T operatörünün noktasal spektrumunu inceleyelim.

$\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$Tf(x) = \lambda f(x),\ f \in L_p[0,1]$$

denkleminin çözümünü bulalım. Bu halde

$$\int_0^x yf(y)\,dy + x\int_x^1 f(y)\,dy = \lambda f(x)$$

denklemini çözmek için her iki tarafın türevini alırsak,

$$xf(x) + \int_x^1 f(y)\,dy - xf(x) = \lambda f'(x)$$

denklemini, yani

$$\int_x^1 f(y)\,dy = \lambda f'(x)$$

elde ederiz. Bulunan denklemin tekrar her iki tarafının türevi alınırsa,

$$-f(x) = \lambda f''(x).$$

Burada eğer $\lambda = 0$ ise, $f = 0$ bulunur. Yani

$$\lambda = 0 \notin \sigma_p(T).$$

Şimdi $\lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{C}$ olduğunu kabul edelim. O halde yukarıdaki yapılan işlemlerden bakılan problem

$$\begin{cases} f''(x) = -\dfrac{1}{\lambda} f(x), \; f \in L_p[0,1], \; \lambda \in \mathbb{C} \\ f(0) = f'(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemine dönüşür. Son denklemin çözümü

$$f(x) = c_1 e^{\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}t} + c_2 e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}t}$$

şeklindedir. $f(0) = 0$ ve $f'(1) = 0$ sınır değerleri kullanılırsa,

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ ve } c_1 \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \left(e^{\frac{i}{\sqrt{\lambda}}} + e^{-\frac{i}{\sqrt{\lambda}}} \right) = 0$$

buradan da,

$$e^{\frac{2i}{\sqrt{\lambda}}} = -1$$

elde edilir. Sonuncudan

$$\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} = \ln 1 + i \arg(-1) + 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}$$

bağıntısını ve buradan

$$\frac{2i}{\sqrt{\lambda}} = (2k+1)\pi i, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Bu sonuncudan ise, T 'nin özdeğerlerini

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} = \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right)^{-2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

olduğu bulunur, yani

$$\sigma_p(T) = \left\{ \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right)^{-2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

elde edilir.

$T : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$, $T \in \sigma_\infty(L_p[0,1])$ ve $\dim L_p[0,1] = +\infty$ [24] olduğundan T^{-1} sınırlı olamaz. Ayrıca $0 \notin \sigma_p(T)$ ve $\sigma_r(T) = \varnothing$ olduğundan $0 \in \sigma_c(T)$.

Sonuç olarak

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right)^{-2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

elde edilir.

Örnek 1.5.47: $L: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),\ Lu = -u'' + u,\ D(L) = W_2^2(\mathbb{R})$

(i) L'nın selfadjoint olup olmadığını araştırınız.

(ii) $\sigma(L) = \sigma_c(L) = [1, +\infty)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

(i) İlk önce L operatörünün simetrik olduğunu gösterelim.

Her $u, v \in W_2^2(\mathbb{R})$ için

$$(Lu, v)_{L_2(\mathbb{R})} = (-u'' + u, v)_{L_2(\mathbb{R})} = (-u'', v)_{L_2(\mathbb{R})} + (u, v)_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$= (-u', v)'_{L_2(\mathbb{R})} + (u', v')_{L_2(\mathbb{R})} + (u, v)_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$= (-u', v)'_{L_2(\mathbb{R})} + (u, v')'_{L_2(\mathbb{R})} + (u, -v'' + v)_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$= (u, -v'' + v)_{L_2(\mathbb{R})} = (u, Lv)_{L_2(\mathbb{R})}$$

olduğundan $L \subset L^*$, yani L simetrik bir operatördür.

Şimdi L'nin selfadjoint operatör olduğunu gösterelim. Bunun için L'nin defekt sayılarının $(0,0)$ şeklinde olduğunu, yani $\dim\ker\left(L^* \pm i\right) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir [19]. O halde

$$Lu \pm iu = 0,\ u \in W_2^2(\mathbb{R})$$

diferensiyel denklemlerinin lineer bağımsız çözüm kümelerini bulalım. Sonuncu diferensiyel denklemlerin karakteristik denklemleri

$$k^2 = (1 - i),\ w^2 = (1 + i)$$

şeklinde olup

$$k_{1,2} = \sqrt[4]{2}\left(\pm\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right),$$

$$w_{1,2} = \sqrt[4]{2}\left(\pm\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

şeklindedir. Ama

$$\exp(k_1 t),\ \exp(k_2 t),$$
$$\exp(w_1 t),\ \exp(w_2 t),\ t \in \mathbb{R}$$

fonksiyonları $L_2(\mathbb{R})$ olmadıklarından

$$\ker\left(L^* \pm i\right) = \{0\}$$

ve buradan

$$\dim\ker\left(L^{*}\pm i\right)=0.$$

Öyleyse, [19] sonucundan L operatörünün selfadjoint olduğu açıktır. Ayrıca $L=L^{*}$ olduğundan $\sigma_r(L)=\varnothing$ ve $\sigma(L)\subset\mathbb{R}$ [64].

Öte yandan her $u\in W_2^2(\mathbb{R})$ için

$$(Lu,u)_{L_2(\mathbb{R})}=(-u'',u)_{L_2(\mathbb{R})}+(u,u)_{L_2(\mathbb{R})}=(-u',u)'_{L_2(\mathbb{R})}+(u',v')_{L_2(\mathbb{R})}+(u,u)_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$=\|u'\|^2_{L_2(\mathbb{R})}+\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\geq\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R})},$$

yani her $u\in W_2^2(\mathbb{R})$ için $(Lu,u)_{L_2(\mathbb{R})}\geq\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$. Öyleyse $L\geq E$ olup $\sigma(L)\subset[1,+\infty)$.

Şimdi $\lambda\in[1,+\infty)$ için

$$Lu=\lambda u,\ u\in W_2^2(\mathbb{R})$$

denkleminin sıfırdan farklı çözümünün olup olmadığını araştıralım. O halde

$$u''(t)+(\lambda-1)u(t)=0,\ t\in\mathbb{R}$$

olup bu denklemin lineer bağımsız çözümleri

$$\exp\left(i\sqrt{\lambda-1}t\right),\ \exp\left(-i\sqrt{\lambda-1}t\right),\ t\in\mathbb{R}$$

şeklindedir. Fakat bu fonksiyonlar $L_2(\mathbb{R})$ olmadıklarından dolayı

$$\ker(L-\lambda)=\{0\},\ \lambda\geq 1.$$

Dolayısıyla

$$\sigma_p(L)=\varnothing.$$

Şimdi L'nin sürekli spektrumunu inceleyelim. $\lambda\in\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$ için

$$Lu=\lambda u+f,\ u,f\in L_2(\mathbb{R})$$

denklemine bakalım. Bu halde

$$R_\lambda f(t)=\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\sqrt{1-\lambda}|t-x|}f(x)\,dx \qquad [25]$$

olup $\lambda\to z\in[1,+\infty)$ iken $\|R_\lambda\|_{L_2(\mathbb{R})}\to\infty$. Öyleyse,

$$\sigma(L)=\sigma_c(L)=[1,+\infty)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 1.5.48: Eğer A lineer operatörü bir sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı olsun. Bu takdirde $\sigma_r(A)=\varnothing$ ve $\sigma_c(A)=\varnothing$ [57].

Teorem 1.5.49: **(1)** Eğer bir $A\in B(H)$ ise $\sigma(A)\neq\varnothing$, $\sigma(A)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq\|A\|\}$ ve $\sigma(A)\subset\mathbb{C}$ kapalıdır.

(2) Eğer $A\in B(H)$ ve $A=A^*$ ise, $\sigma_r(A)=\varnothing$, $\sigma(A)\subset[-\|A\|,\|A\|]$

(3) Eğer $A\in B(H)$ normal bir operatör ise, $\sigma_r(A)=\varnothing$ [57].

Teorem 1.5.50: H bir Hilbert uzayı ve $A\in\sigma_\infty(H)$. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur [24]:

(1) Eğer $\dim H=+\infty$ ise, $0\in\sigma_c(A)$;

(2) Eğer $\lambda\neq 0$, $\lambda\in\sigma(A)$ ise, λ A'nın bir öz değeridir ve λ'ya uygun gelen öz vektörlerin oluşturduğu alt uzay sonlu boyutludur.

(3) $\sigma(A)$ sayılabilir bir kümedir. Eğer $\sigma(A)$ sayılabilir sonsuz bir küme ise

$$\sigma(A)=\bigcup_{\substack{n=1\\ \lambda_n\neq 0}}^{\infty}\{\lambda_n\}\cup\{0\} \text{ ve } |\lambda_{n+1}|\leq|\lambda_n|,\ n\geq 1 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\lambda_n=0.$$

Örnek 1.5.51: $T:C([0,1])\to C([0,1])$, $Tf(x):=\int_0^{1-x}f(t)\,dt$,

her $f\in C([0,1])$ şeklinde tanımlanan T operatörü kompakttır [24]. Dolayısıyla Teorem 1.5.50'e göre

$$o\in\sigma(T)$$

olmasına rağmen sıfır T operatörünün öz değeri değildir. T operatörünün spektrumunu açık şekilde belirlemek için onun özdeğerlerini bulmak yeterlidir.

λ T'nin öz değeri, $g\in C([0,1])$'de sıfırdan farklı öz vektörü olsun öyle ki

$$\lambda g(x)=\int_0^{1-x}g(t)\,dt,\ \forall x\in C([0,1]).$$

$\lambda\neq 0$ için $g\in C^1([0,1])$ olması gerekir. Ayrıca yukarıdaki eşitlikten $g(1)=0$ ve

$$\lambda g'(x)=-g(1-x),\ \forall x\in C([0,1])$$

olduğu bulunur. Böylece $g\in C^2([0,1])$ ve

$$g \neq 0,\ g(1)=0,\ g'(0)=0,\ \lambda g'(1)=-g(0) \tag{1.10}$$

$$\lambda g''(x) = -\frac{g(x)}{\lambda},\ \forall x \in C([0,1]) \tag{1.11}$$

koşulları sağlanır. (1.11) diferensiyel denkleminin $g'(0)=0$ şartını sağlayan çözümü

$$g(x) = A\cos\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

şeklinde olup ve (1.10) sınır değerleri yardımıyla

$$\cos\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0 \text{ ve } \sin\left(\frac{1}{\lambda}\right)=1$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Dolayısıyla $\lambda = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$ ise, $g(x)=\cos\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ şeklindeki fonksiyon T operatörünün λ öz değerine karşılık gelen bir öz vektörüdür. Böylece

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklinde olduğu elde edilir.

Buradan T operatörünün tüm öz uzaylarının bir boyutlu olduğu ve T'nin spektral yarıçapının da $\dfrac{2}{\pi}$ olduğu görülür.

Ayrıca genel durumda normal operatörün spektrumu hakkında aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 1.5.52: T H Hilbert uzayında sınırlı normal bir operatör olsun. $\lambda\in\mathbb{C}$ noktasının $\sigma(T)$'de olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon>0$ için

$$\|Tx_\varepsilon - \lambda x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|$$

olacak şekilde bir $x_\varepsilon \neq 0,\ x_\varepsilon\in H$ elemanının bulunmasıdır [22].

Teorem 1.5.53 (Lineer Selfadjoint Operatör İçin Spektral Ayrılış Teoremi): $A: D(A)\subset H \to H$, H Hilbert uzayında selfadjoint bir operatör olsun. Bu halde aşağıdaki özelliklere sahip bir tek $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ortogonal projeksiyon operatörler ailesi vardır:

(1) Eğer $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ise, $E_{\lambda_1} \leq E_{\lambda_2}$;

(2) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E_{\lambda+\varepsilon} \xrightarrow{S} E_\lambda,\ \varepsilon \to 0$;

(3) $E_\lambda \xrightarrow{S} 0,\ \lambda \to -\infty;\ E_\lambda \xrightarrow{S} E,\ \lambda \to +\infty$;

(4) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için E_λ operatörü A ile komutatiftir; ayrıca $T \in B(H)$ operatörünün A ile komutatif olması için gerekli ve yeterli koşul her $\lambda \in \mathbb{R}$ için E_λ operatörünün T ile komutatif olmasıdır;

(5) $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda,\ D(A) = \left\{ x \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E_\lambda x\|^2 < +\infty \right\}$ spektral ayrılışı vardır.

Burada (1)-(3) koşullarını sağlayan $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ortogonal projeksiyon operatörler ailesine ‘birimin ayrılışı’ veya ‘spektral fonksiyon’ denir.

Tanım 1.5.54: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir Hilbert uzayında selfadjoint bir operatör için

$$D(f(A)) := \left\{ x \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) < +\infty \right\}$$

(burada E_λ, A operatörü için birimin ayrılışıdır) kümesi üzerinde

$$f(A) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda x,\ f(A) : D(f(A)) \subset H \to H$$

şeklinde tanımlanan operatöre A *operatörünün* f *fonksiyonu* denir.

Tanım 1.5.55: H bir Hilbert uzayı,

$$A : D(A) \subset H \to H\ ,$$

$$B : D(B) \subset H \to H$$

iki lineer selfadjoint operatör ve

$$E_\lambda(A),\ \lambda \in \mathbb{R},\ E_\mu(B),\ \mu \in \mathbb{R}$$

sırasıyla A ve B operatörlerinin spektral fonksiyonlar olsun.

Eğer her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $E_\lambda(A)$ ve $E_\mu(B)$ sınırlı selfadjoint operatörleri komutatif iseler, A ve B operatörlerine H Hilbert uzayında komutatif operatörler denir.

Teorem 1.5.56: $A: H \to H$ operatörü H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı normal operatör ise,

$$A = f(B)$$

olacak şekilde bir $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve bir $B: H \to H$ lineer sınırlı selfadjoint operatörü vardır [65].

Teorem 1.5.57 (Spektral Dönüşüm Teoremi): A bir lineer selfadjoint operatör ve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$$

bağıntısı doğrudur [66].

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR BULGULAR VE İRDELEME

2.1. $\ell_2(\mathbb{Z})$ Hilbert Uzayında Birinci Mertebeden Lineer Normal Fark Operatörleri ve Spektrumları

Bu bölümde vektör fonksiyonların $L_2(H,\mathbb{R})$ (H bir Hilbert uzayıdır) Hilbert uzayında birinci mertebeden operatör katsayılı diferensiyel operatörlerin diskret analogu olan

$$L := (E - S + A),\ L : D(A) \subset \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z}),$$

(burada S ve A sırasıyla $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında sağa öteleme ve lineer kapalı bir operatördür.) operatörünün normalliği ve spektral özellikleri incelenecektir.

Bu bölümün sonunda ise $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında alınan sonuçların $L_2(H,\mathbb{R})$ uzayında birinci mertebeden selfadjoint operatör katsayılı normal diferensiyel operatörler için bulunan sonuçlarla örtüştüğü gösterilecektir.

İlk önce aşağıdaki üç sonucun doğruluğunu gösterelim.

Teorem 2.1.1: $S(u_n) = (u_{n-1}),\ (u_n) \in \ell_2(\mathbb{Z}),\ S : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$

lineer operatörü üniterdir.

İspat: Bu durumda her $u \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$\|Su\| = \|(u_{n-1})\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_{n-1}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^2\right)^{1/2} = \|u\|.$$

Yani $\|S\| = 1$ ve buradan $S \in B(\ell_2(\mathbb{Z}))$.

Öte yandan her $u, v \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için,

$$(Su, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{n-1}\overline{v_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \overline{v_{n+1}} = (u, S^* v),\quad S^*(v) = (v_{n+1}).$$

Böylece, $S(u_n) = u_{n-1}$ sağa öteleme operatörünün adjointi sola öteleme S^* operatörüdür.

Ayrıca her $u \in \ell_2(\mathbb{Z})$ için

$$S^*S(u_n) = S^*(u_{n-1}) = (u_n),$$

$$SS^*(u_n) = S(u_{n+1}) = (u_n),$$

olduğundan,

$$S^*S = E,\ \ SS^* = E\,.$$

Böylece, $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında S operatörü üniter bir operatördür. Ayrıca

$$S^{-1} = S^*,\ \ \left(S^*\right)^{-1} = S$$

bağıntısının olduğunu vurgulayalım.

Teorem 2.1.2: Eğer,

$$S(u_n) = (u_{n-1}),\ u = (u_n) \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

ise ;

(a) $\sigma_p(S) = \varnothing$;

(b) $R(S - \lambda E) = \ell_2(\mathbb{Z}),\ |\lambda| > 1, \lambda \in \mathbb{C}$;

(c) $R(S - \lambda E) = \ell_2(\mathbb{Z}),\ |\lambda| < 1, \lambda \in \mathbb{C}$;

(d) $\sigma(S) = \sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$;

İspat:

(a) $Su = \lambda u,\ \lambda \in \mathbb{C},\ u \in \ell_2(\mathbb{Z})$

denkleminin çözüm kümesini bulalım. Bu halde

$$u_{n-1} = \lambda u_n\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

olup eğer, λ =0 ise,

$$u = (u_n) = (0) \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

bulunur. Eğer $\lambda \neq 0$ ise, bir önceki denklemden

$$u_n = \frac{1}{\lambda} u_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Buradan $u_0 \in \mathbb{C}$ keyfi alarak,

$$u_1 = \frac{1}{\lambda} u_0, \qquad u_{-1} = \lambda u_0,$$

$$u_2 = \frac{1}{\lambda^2} u_0, \qquad u_{-2} = \lambda^2 u_0,$$

....

$$u_n = \frac{1}{\lambda^n} u_0, \qquad u_{-n} = \lambda^n u_0,$$

....

elde edilir ki;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|u_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{0}|u_n|^2+\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}|\mathrm{u_n}|^2=\sum_{n=-\infty}^{0}|\lambda|^{2n}|u_0|^2+\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{2n}|u_0|^2.$$

Bu serinin yakınsaklığı için birinci seride $|\lambda|<1$ ve ikinci seride $|\lambda|>1$ olmalıdır veya $u_0=0$ olmalıdır.

Böylece, bu sonuncudan

$$\{u\in \ell_2(\mathbb{Z}):Su=\lambda u\}=\{0\}.$$

Bunun sonucunda $\sigma_p(S)=\varnothing$ olduğu elde edilir.

(b) $(S-\lambda E)u=v$

operatör denkleminin her $v\in \ell_2(\mathbb{Z})$ için çözümünün var olduğunu gösterelim.

Buradan

$$(S-\lambda E)=-\lambda\left(E-\frac{1}{\lambda}S\right) \text{ olup;}$$

$$\left\|\frac{1}{\lambda}S\right\|=\left|\frac{1}{\lambda}\right|\|S\|=\frac{1}{|\lambda|}<1$$

olduğundan Teorem 1.5.32'e göre,

$$\exists\left(E-\frac{1}{\lambda}S\right)^{-1}\in B(\ell_2(\mathbb{Z})).$$

Öyleyse,

$$\exists(S-\lambda E)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(E-\frac{1}{\lambda}S\right)^{-1}\in B(\ell_2(\mathbb{Z})).$$

Yani,

$$R(S-\lambda E)=\ell_2(\mathbb{Z}),|\lambda|>1.$$

(c) Şimdi

$$(S-\lambda E)u=v,\ v\in l_2(\mathbb{Z}),\ |\lambda|<1,$$

denkleminin her v için çözümünün var olduğunu gösterelim.

Sonuncu operatör denkleminden

$$(E-\lambda S^*)u=S^*v$$

alınır. Ayrıca

$$\left|\lambda S^*\right| = |\lambda|\left\|S^*\right\| = |\lambda| < 1$$

olduğundan

$$\exists\left(E-\lambda S^*\right)^{-1} \in B\left(\ell_2(\mathbb{Z})\right).$$

Öyleyse,

$$u = \left(E-\lambda S^*\right)^{-1} v \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

bulunur, yani

$$R(S-\lambda E) = \ell_2(\mathbb{Z}), |\lambda| < 1.$$

(d) Şimdi $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$ için $S-\lambda E : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ operatörünün bire bir olduğunu inceleyelim. Onun için

$$(S-\lambda E)u = 0,\ u \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

denklemine bakalım. Buradan

$$u_{n-1} = \lambda u_n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Yani,

$$u_{-n} = \lambda^n u_0,\ n \geq 1 \text{ ve } u_n = \lambda^{-n} u_0,\ n \geq 1,\ u_0 \in \mathbb{C}$$

bulunur. Öyleyse,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} \left|\lambda^n u_o\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\lambda^{-n} u_0\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} |u_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |u_0|^2$$

yakınsak olması için $u_0 = 0,$ yani $u = 0 \in \ell_2(\mathbb{Z})$ olmak zorundadır.

Böylece, $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1$ için $(S-\lambda E)$ bire birdir .

Şimdi ise $|\lambda| = 1,\ \lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(S-\lambda E)u = v,\ u, v \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

denklemine bakalım. Buradan

$$u_{n-1} - \lambda u_n = v_n, n \in \mathbb{Z},$$

yani,

$$u_n = \frac{1}{\lambda} u_{n-1} - \frac{1}{\lambda} v_n,$$

bulunur. $u_0 \in \mathbb{C}$ keyfi alalım. Buradan n ≥ 1 için,

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \lambda^{-1}u_0 - \lambda^{-1}v_1,\\
&u_2 = \lambda^{-1}u_1 - \lambda^{-1}v_2 = \lambda^{-2}u_0 - \lambda^{-2}v_1 - \lambda^{-1}v_2,\\
&u_3 = \lambda^{-3}u_0 - \lambda^{-3}v_1 - \lambda^{-2}v_2 - \lambda^{-1}v_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u_n = \lambda^{-n}u_0 - \lambda^{-n}v_1 - \lambda^{-(n-1)}v_2 - \dots\dots - \lambda^{-1}v_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

$n \le 0,\ n \in \mathbb{Z}$ için ise, $u_{n-1} = \lambda u_n + \mathrm{v}_{\mathrm{n}}$

bağıntısından

$$
\begin{aligned}
&u_{-1} = \lambda u_0 + \mathrm{v}_0,\\
&u_{-2} = \lambda u_{-1} + \mathrm{v}_{-1} = \lambda(\lambda u_0 + \mathrm{v}_0) + \mathrm{v}_{-1} = \lambda^2 u_0 + \lambda \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_{-1},\\
&u_{-3} = \lambda u_{-2} + \mathrm{v}_{-2} = \lambda\left(\lambda^2 u_0 + \lambda \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_{-1}\right) + \mathrm{v}_{-2} = \lambda^3 u_0 + \lambda^2 v_0 + \lambda \mathrm{v}_{-1} + \mathrm{v}_{-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u_{-n} = \lambda^n u_0 + \lambda^{\mathrm{n}-1} v_0 + \dots\dots + \lambda \mathrm{v}_{-(\mathrm{n}-2)} + \mathrm{v}_{-(\mathrm{n}-1)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Şimdi bir özel

$$v_* = (0,\dots\dots\dots,0,1,0,\dots\dots\dots) \in \ell_2(\mathbb{Z}),\ v_0 = 1$$

elemanını alalım. Bu halde yukarıdaki bağıntılardan

$$
\begin{aligned}
&u_{-n} = \lambda^n u_0 + \lambda^{\mathrm{n}-1}, n \le 0,\\
&u_n = \lambda^{-n} u_0 \qquad , n \ge 0
\end{aligned}
$$

olup

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\lambda^{-n}\right|^2 |u_0|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_0|^2$$

serisinin yakınsak olması için $u_0 = 0$ olmak zorundadır. Bu durumda ise,

$$\sum_{n=-\infty}^{0} |u_{-n}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} \left|\lambda^{n-1}\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 1$$

serisi ıraksaktır.

Yani, $(S - \lambda E)u = v_*$ denkleminin $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında çözümü yoktur. Buradan

$$|\lambda| = 1 \text{ için } R(S - \lambda E) \subset \ell_2(\mathbb{Z}) \text{ olup } R(S - \lambda E) \ne \ell_2(\mathbb{Z})$$

bulunur.

Böylece, $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1$ noktaları için aşağıdakiler doğrudur:

(1) $S - \lambda E : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ bire birdir;

(2) $(S - \lambda E)\ell_2(\mathbb{Z}) \neq \ell_2(\mathbb{Z})$;

(3) 1. ve 2. şıktan $\lambda \in \sigma(S)$;

(4) $\sigma_p(S) = \varnothing$;

(5) Genel teoriden $\sigma_r(S) = \varnothing$ olduğu bilinir [63];

Bu beş öneriden

$$\sigma(S) = \sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.1.3: $S : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ sağa öteleme operatörü ise,

$$\sigma(S_R) = \sigma(S_I) = [-1,1].$$

İspat: S normal ise, her $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \mathbb{C},\ \lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$ için

$$S - \lambda E : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$$

normal bir operatördür. O halde

$$\|Su - \lambda u\|^2 = \|(S_R - \lambda_r)u\|^2 + \|(S_I - \lambda_i)u\|^2 .$$

S normal ve $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ olduğundan

$$\forall \lambda^* \in \{|\lambda| : |\lambda| = 1\} \text{ ve, } \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists u_*^\varepsilon \neq 0,\ u_*^\varepsilon \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

öyle ki,

$$\|Su_*^\varepsilon - \lambda^* u_*^\varepsilon\| < \varepsilon \|u_*^\varepsilon\| \text{ [22].}$$

Sonuncu ve bir önceki bağıntıdan

$$\|(S_R - \lambda_r^*)u_*^\varepsilon\| < \varepsilon \|u_*^\varepsilon\|,$$
$$\|(S_I - \lambda_i^*)u_*^\varepsilon\| < \varepsilon \|u_*^\varepsilon\|.$$

Böylece

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall \lambda^* = \lambda_r^* + i\lambda_i^*,\ |\lambda^*| = 1 \text{ için } \exists \mathrm{u}_*^\varepsilon \neq 0,\ \mathrm{u}_*^\varepsilon \in \ell_2(\mathbb{Z}) :$$

$$\|(S_R - \lambda_r^*)u_\varepsilon^*\| < \varepsilon \|u_*^\varepsilon\|,\ \|(S_I - \lambda_i^*)u_*^\varepsilon\| < \varepsilon \|u_*^\varepsilon\|.$$

Bu sonuncu ve [22]'den

$$\lambda_r^* \in \sigma(S_R) \text{ ve } \lambda_i^* \in \sigma(S_I),$$

yani $[-1,1] \subset \sigma(S_R)$ ve $[-1,1] \subset \sigma(S_I)$ bulunur.

Ayrıca

$$\|S_R\| = \left\| \frac{S - S^*}{2} \right\| \le \frac{\|S\| + \|S^*\|}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

$$\|S_I\| = \left\| \frac{S - S^*}{2i} \right\| \le \frac{\|S\| + \|S^*\|}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

olduğundan $\|S_R\| \le 1$ ve $\|S_I\| \le 1$ olup

$$\sigma(S_R) \subset [-1,1] \text{ ve } \sigma(S_I) \subset [-1,1],$$

$$\sigma(S_R) = [-1,1] \text{ ve } \sigma(S_I) = \lfloor -1,1 \rfloor.$$

Şimdi ise, $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında

$$L = E - S + A,\ S(u_n) = (u_{n-1}),\ \ A : D(A) \subset \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z}),$$

A lineer kapalı bir operatör olmak üzere, $L : D(L) = D(A)$ operatörünün selfadjoint olduğu durumu inceleyelim.

Teorem 2.1.4: $L = E - S + A,\ A : D(A) \subset \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$, operatörünün selfadjoint olması için gerekli ve yeterli koşul

$$A_I = S_I$$

koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: Bu halde $E - S \in B(\ell_2(\mathbb{Z}))$ olduğundan [14],

$$L^* = E - S^* + A^*$$

şeklindedir. L 'nin selfadjoint olması için gerekli ve yeterli koşul $L = L^*$, yani

$$E - S + A = E - S^* + A^*$$

koşulunun sağlanmasıdır. Buradan

$$A - A^* = S - S^*,$$

yani

$$A_I = S_I.$$

Sonuç 2.1.5: Eğer $A: D(A) \subset \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ ve $A = A^*$ ise,

$$L = E - S + A$$

operatörü selfadjoint olamaz.

Sonuç 2.1.6: Eğer $L = L^*$ ise, $L = E - S_R + \mathrm{A_R}$ şeklindedir.

Şimdi $L_2(H, \mathbb{R})$ Hilbert uzayında lineer sınırlı operatör katsayılı birinci mertebeden diferensiyel operatörün diskret analogu olan

$$L = E - S + A,\ A \in B(\ell_2(\mathbb{Z})),\ L{:}\ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z}),\ \mathrm{S}(u_n) = S(u_{n-1}),\ u \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

operatörünün normallik durumunu araştıracağız.

Teorem 2.1.7: $L{=}E - S + A,\ A{=}A^* \in B(\ell_2(\mathbb{Z}))$

operatörünün normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$AS_I = S_I A$$

olmasıdır.

İspat: $L = E - S + A$ operatörünün $\ell_2(\mathbb{Z})$ 'de normallik özelliğini inceleyelim.

Bu halde,

$$LL^* = L^* L$$

koşulundan

$$(E - S + A)(E - S^* + A) = (E - S^* + A)(E - S + A)$$

olup

$$E - S^* + A - S + SS^* - SA + A - AS^* + A^2 = E - S + A - S^* + S^*S - S^*A + A - AS + A^2$$

ve buradan,

$$(S - S^*)A = A(S - S^*).$$

Yani,

$$S_{\mathrm{I}} A = AS_{\mathrm{I}}.$$

Örnekler 2.1.8:

(1) $L = E - S + A$**,** $A = S_I^{\ n}$, $n \in \mathbb{N}$ ise, L operatörü $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında normaldir.

Çözüm: $A=S_I{}^n$ olduğundan $A=A^*\in B\left(\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\right)$. Ayrıca

$$AS_I=S_I{}^nS_I=S_IS_I{}^n=S_IA$$

koşulu sağlandığından L operatörü Teorem 2.1.7'ye göre normaldir.

(2) $L=E-S+A$**,** $A=S_R{}^n$, $n\in\mathbb{N}$ ise, L operatörü $\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında normaldir.

Çözüm: $A=S_R{}^n$ olduğundan $A=A^*\in B\left(\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\right)$. Diğer taraftan

$$AS_I=S_R{}^nS_I=S_IS_R{}^n=S_IA$$

olduğundan L operatörü Teorem 2.1.7'ye göre $\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında lineer normal bir operatördür.

(3) $L=E-S+A$**,** $\left(A\left(u_n\right)\right)_n=u_{n+1}+u_{n-1}$, $n\in\mathbb{Z}$ ise, L operatörü normaldir.

Çözüm: $A=S^*+S$ olup $A=A^*$ ve $A\in B\left(\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\right)$. Öte yandan

$$AS_I=2S_RS_I=S_I\left(2S_R\right)=S_IA$$

olduğundan L operatörü $\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında normal bir operatördür.

(4) $L=E-S+A$**,** $\left(A\left(u_n\right)\right)_n=u_{n+2}+u_{n-2}$, $n\in\mathbb{Z}$ ise, L normal bir operatördür.

Çözüm: $A=\left(S^*\right)^2+S^2$ olup $A=A^*\in B\left(\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\right)$. Ayrıca

$$\left(\left(S^*\right)^2+S^2\right)S_I=S^*S^*S_I+SSS_I=S^*S_IS^*+SS_IS$$

$$=S_I\left(S^*\right)^2+S_IS^2=S_I\left(\left(S^*\right)^2+S^2\right)$$

olduğundan Teorem 2.1.7'ye göre L operatörü $\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında lineer normal bir operatördür.

(5) $L=E-S+A$ ve $A=\left(1+S_I{}^2\right)^{-1}$ ise, L operatörü $\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında normal bir operatördür.

Çözüm: Gerçekten,

$$S_I\left(1+S_I{}^2\right)=\left(1+S_I{}^2\right)S_I$$

bağıntısından

$$S_I\left(1+S_I{}^2\right)^{-1}=\left(1+S_I{}^2\right)^{-1}S_I,$$

yani $S_IA=AS_I$ koşulu sağlandığından Teorem 2.1.7'ye göre L operatörü $\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında normaldir.

Benzer şekilde, $L = E - S + A$, $A = \left(1 + S_R{}^2\right)^{-1}$ operatörünün $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında normalliği gösterilebilir.

Teorem 2.1.9: $L = E - S + A,\ A = A^* \in B\left(\ell_2(\mathbb{Z})\right)$

operatörünün $\ell_2(\mathbb{Z})$ uzayında normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$L = f(S_I) - iS_I$$

olacak şekilde bir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bulunmasıdır.

İspat: $L = E - S + A = E - S_R + A - iS_I$, $A = A^* \in B\left(\ell_2(\mathbb{Z})\right)$ olsun. Eğer L operatörü normal ise,

$$E - S_R + A = g_R(T), \tag{2.1}$$

$$S_I = g_I(T) \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $T = T^*$ ve $g_R, g_I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları vardır [65].

Şimdi (2.2)'den $\alpha \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ için

$$S_I - \alpha E = g_I(T) - \alpha E = (g_I - \alpha)(T).$$

Buradan $(S_I - \alpha E)^{-1} \in B\left(\ell_2(\mathbb{Z})\right)$ olduğundan $(g_I - \alpha)^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tersi var ve sınırlıdır. O halde

$$T = (g_I - \alpha)^{-1}(S_I - \alpha E)$$

ve böylece (2.1)'den

$$E - S_R + A = g_R(T) = g_R\left((g_I - \alpha)^{-1}(S_I - \alpha E)\right) = g_R\left((g_I - \alpha)^{-1}(\bullet - \alpha)\right)(S_I)$$

Buradan ise,

$$L = g_R(T) - ig_I(T) = g_R\left((S_I - \alpha)^{-1}(S_I - \alpha E)\right) - iS_I$$

olup

$$f(\lambda) := g_R\left((\lambda - \alpha)^{-1}(\lambda - \alpha E)\right),\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

dersek

$$L = f(S_I) - iS_I$$

olur.

Tersine, eğer $L = f\left(S_I\right) - iS_I$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ise,

$$L_R = f\left(S_I\right),\ L_I = -S_I,$$

$$L_R^* = L_R,\ L_I^* = L_I$$

ve buradan

$$L_R L_I = -f\left(S_I\right)S_I,$$
$$L_I L_R = -S_I f\left(S_I\right)$$

olduğundan L'nin normalliği açıktır.

A operatörü sınırsız selfadjoint olduğu durumda ise aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 2.1.10: $L = E - S + A,\ A = A^* : D\left(A\right)\subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right),\ S\left(u_{\mathrm{n}}\right) = \left(u_{\mathrm{n-1}}\right),$

$\left(u_{\mathrm{n}}\right)\in \ell_2\left(\mathbb{Z}\right),\ S_{\mathrm{I}}\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\subset D\left(A\right)$ olsun.

Bu halde $L: D\left(A\right)\subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ operatörünün normal olması için gerekli ve yeterli koşul A ve S_I operatörünün komutatif olmasıdır.

İspat: Eğer $A: D\left(A\right)\subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right),\quad A = A^*$ şeklinde bir operatörse,

$$L = E - S + A : D\left(L\right) = D\left(A\right)\subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$$

için $D\left(L\right) = D\left(L^*\right)$ olduğu görülür.

Ayrıca her $u\in D\left(L\right)$ için

$$\left\|\left(E - S + A\right)u\right\|^2 = \left\|\left(E - S^* + A\right)u\right\|^2$$

koşulundan,

$$\left(S_I u, Au\right) - \left(Au, S_I u\right) = 0 \text{ veya } \left(\left(S^* - S\right)u, Au\right) + \left(Au, \left(S^* - S\right)u\right) = 0$$

bulunur.

Eğer L normal ise, her $u\in D\left(L\right)$ için,

$$\left(S_I u, Au\right) - \left(Au, S_I u\right) = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan ve $S_I \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\subset D\left(A\right)$ koşulundan

$$\left(A\left(S_I u\right), u\right) - \left(S_I A u, u\right) = 0$$

olup $u\in \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ için

$$\left(\left(AS_I - S_I A \right) u, u \right) = 0 .$$

Böylece A operatörü S_I ile komutatiftir.

Tersinin doğruluğu açıktır.

Örnekler 2.1.11:

(1) $L = E - S + \left(1 + S_R\right)^{-1}$

$\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında bir lineer sınırsız normal operatördür.

Ayrıca,

$$L_1 = 1 - S + \left(z + S_R\right)^{-1},\ z \in \left[-1,1\right]$$
$$L_2 = 1 - S + \left(z + S_I\right)^{-1},\ z \in \left[-1,1\right]$$

operatörleri de $\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ uzayında lineer sınırsız normal operatördür.

Çözüm: $S : \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ ise, $-1 \in \sigma_c\left(S_R\right)$, yani $\left(1 + S_R\right)^{-1}$ bire birdir ve $\overline{\left(1 + S_R\right)\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)} = \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$, ama $\left(1 + S_R\right)\ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \neq \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$. Başka bir değişle, $A = \left(1 + S_R\right)^{-1}$ operatörü sınırsız selfadjoint bir operatör olup $AS_I = S_I A$ koşulu sağlanıyor. Öyleyse, $L = E - S + A : D\left(A\right) \subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ operatörü normal bir operatördür.

(2) $L = E - S + A,\ A = A^* : D\left(A\right) \subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ ve $\left(A\left(u_n\right)\right)_n = nu_n,\ n \in \mathbb{Z}$

ise, $A = A^*$ ve sınırsız bir operatör olup L normal değildir.

Çözüm: Bu halde $u \in D\left(A\right)$ için

$$AS_I u = A\left(\frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{2i}\right) = \left(n\frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{2i}\right),$$

$$S_I Au = S_I\left(nu_n\right) = \left(\frac{\left(n-1\right)u_{n-1} - \left(n+1\right)u_{n+1}}{2i}\right) = \left(n\frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{2i} - \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2i}\right),\ n \in \mathbb{Z}$$

şeklindedir. Ama $S_I Au = AS_I u,\ u \in D\left(A\right)$ eşitliği,

$$\left(u_n^*\right) = \left(\frac{1}{n^2}\right) \in D\left(A\right)$$

dizisi için

$$AS_I u = \left(n\frac{u_{n-1}-u_{n+1}}{2i} \right) = \left(n\frac{\dfrac{1}{\left(u_{n-1}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(u_{n+1}\right)^2}}{2i} \right) = \left(\frac{2n^2}{i\left(n+1\right)^2\left(n-1\right)^2} \right)$$

$$S_I Au = \left(n\frac{u_{n-1}-u_{n+1}}{2i} - \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2i} \right)$$

$$= \left(n\frac{\dfrac{1}{\left(n-1\right)^2}-\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}}{2i} - \frac{\dfrac{1}{\left(n-1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2}}{2i} \right) = \left(\frac{1}{i\left(n+1\right)\left(n-1\right)} \right)$$

sağlanmadığından dolayı L normal olamaz.

Şimdi $L = E - S + A,\ L{:}D\left(A\right) \subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$, S sağa öteleme operatörü, $A = A^* : D\left(A\right) \subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ operatörünün spektrum yapısını inceleyeceğiz.

Genel durumda Teorem 2.1.9 [58, 65, 66] çalışmalarından faydalanarak aşağıdaki sonuca genişletilebilir.

Teorem 2.1.12: $L = E - S + A,\ L{:}D\left(A\right) \subset \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right)$ ve $S_I \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \subset D\left(A\right)$ olsun. L normal bir operatör ise,

$$L = f\left(S_I\right) - iS_I,\ f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

şeklinde yazılabilir. Üstelik eğer $f \in C\left(\sigma\left(S_I\right)\right)$ ise, L operatörünün spektrumu

$$\sigma\left(L\right) = \left(f\left(\bullet\right) - i\bullet\right)\left(\left[-1,1\right]\right) = \left\{ f\left(\lambda\right) - i\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \left[-1,1\right] \right\}$$

$$= \left\{ \left(f\left(\lambda\right), -\lambda\right) \in \mathbb{C} : \lambda \in \left[-1,1\right] \right\}$$

şeklindedir.

Örnekler 2.1.13:

(1) $A = A^* : \ell_2\left(\mathbb{Z}\right) \to \ell_2\left(\mathbb{Z}\right),\ A = S_R \in B\left(\ell_2\left(\mathbb{Z}\right)\right)$ olsun. O halde

$$L = E - S + A = E - S_R - iS_I + S_R = E - iS_I$$

olup $f\left(\lambda\right) = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Öyleyse sonuncu teoreme göre,

$$\sigma(L)=\{1-i\lambda:\lambda\in[-1,1]\}=\{(1,-\lambda):\lambda\in[-1,1]\}.$$

(2) $A=S_R+\cos(S_I)$ veya $A=S_R+\sin(S_I)$ olarak alınırsa, her iki durumda da $A\in B(\ell_2(\mathbb{Z}))$ olup

$$L=E-S+A=E-S_R-iS_I+S_R+\cos(S_I)=E+\cos(S_I)-iS_I=f(S_I)-iS_I$$

veya

$$L=E-S+A=E-S_R-iS_I+S_R+\sin(S_I)=E+\sin(S_I)-iS_I=g(S_I)-iS_I$$

burada $f(\lambda)=1+\cos(\lambda)$, $\mathrm{g}(\lambda)=1+\sin(\lambda)$.

O halde sonuncu teoreme göre,

$$\sigma(L)=\{f(\lambda)-i\lambda:\lambda\in[-1,1]\}=\{(1+\cos(\lambda),-\lambda):\lambda\in[-1,1]\}$$

veya

$$\sigma(L)=\{g(\lambda)-i\lambda:\lambda\in[-1,1]\}=\{(1+\sin(\lambda),-\lambda):\lambda\in[-1,1]\}$$

şeklindedir.

Bu bölümde en son olarak vektör fonksiyonların $L_2(H,\mathbb{R})$ (burada H bir Hilbert uzayıdır) Hilbert uzayında birinci mertebeden selfadjoint operatör katsayılı lineer diferensiyel operatörlerin normalliğini araştıracağız.

Şimdi $A:D(A)\subset H\to H$, $A=A^*\geq E$ ve $AW_2^1(H,\mathbb{R})\subset W_2^1(H,\mathbb{R})$ olmak üzere, $T:W_2^1(H,\mathbb{R})\subset L_2(H,\mathbb{R})\to L_2(H,\mathbb{R})$, $Tu:=u'+Au$ operatörünü göz önüne alalım.

Teorem 2.1.14 : $T_0u:=-i\dfrac{d}{dt}:W_2^1(H,\mathbb{R})\subset L_2(H,\mathbb{R})\to L_2(H,\mathbb{R})$

operatörü selfadjoint bir operatördür.

İspat: Her $u,v\in W_2^1(H,\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}(T_0u,v)_{L_2(H,\mathbb{R})}&=(-iu',v)_{L_2(H,\mathbb{R})}=(-iu,v)'_{L_2(H,\mathbb{R})}+(iu,v')_{L_2(H,\mathbb{R})}\\&=-i\left[\lim_{t\to+\infty}(u(t),v(t))_H-\lim_{t\to-\infty}(u(t),v(t))_H\right]+(u,-iv')_{L_2(H,\mathbb{R})}\\&=(u,-iv')_{L_2(H,\mathbb{R})}=(u,T_0v)_{L_2(H,\mathbb{R})}\end{aligned}$$

olduğundan T_0 simetrik bir operatördür. Şimdi T_0 operatörünün defekt sayılarını hesaplayalım, yani

$$T_0 u = \pm iu,\ u \in W_2^1(H,\mathbb{R})$$

denklemlerinin lineer bağımsız çözümlerinin sayısını, başka bir değişle

$$\dim(T_0 \pm iE)$$

sayılarını bulalım. Bu halde

$$-iu' = \pm iu \text{ , yani } u' = \mp u$$

olup çözümler

$$u_\pm(t) = c_\pm e^{\pm t},\ c_\pm \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. Ama $e^{\pm t} \notin L_2(H,\mathbb{R})$ olduğundan $c_\pm = 0$ olmak zorundadır. Yani $u_\pm(t) = 0$. Böylece

$$\dim(T_0 \pm iE) = 0$$

olup T_0'ın defekt sayıları $(0,0)$ şeklindedir. Sonuçta Teorem 1.5.23'den T_0 selfadjoint bir operatördür.

Teorem 2.1.15: T operatörünün $L_2(H,\mathbb{R})$ uzayında normal olması için gerekli ve yeterli koşul T_0 ve A operatörlerinin komutatif olmasıdır.

İspat: T_0 ve A operatörleri komutatif olsun.

$$AD(T_o) = AW_2^1(H,\mathbb{R}) \subset W_2^1(H,\mathbb{R})$$

bağıntısından

$$D(T) = D(T_0) \cap D(A) = W_2^1(H,\mathbb{R}).$$

Öte yandan $T^* = A - iT_0$ olduğu ve

$$D(T^*) = D(A) \cap D(T_0) = W_2^1(H,\mathbb{R})$$

sonucundan

$$D(T^*) = D(T).$$

Ayrıca her $u \in W_2^1(H,\mathbb{R})$ için

$$AW_2^1(H,\mathbb{R}) \subset W_2^1(H,\mathbb{R})$$

koşulundan

$$\left(Au\right)' = Au' \in L_2\left(H,\mathbb{R}\right)$$

olup her $u \in W_2^1\left(H,\mathbb{R}\right)$ için

$$\left(A^{1/2}u\right)' = A^{1/2}u'.$$

Her $u \in D\left(T\right) = W_2^1\left(H,\mathbb{R}\right)$ için

$$\begin{aligned}
\left\|Tu\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 &= \left(u' + Au, u' + Au\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} \\
&= \left(u', u'\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left(u', Au\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left(Au, u'\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left(Au, Au\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} \\
&= \left\|u'\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 + \left(\left(A^{1/2}u\right)', \left(A^{1/2}u\right)\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left(\left(A^{1/2}u\right), \left(A^{1/2}u\right)'\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left\|Au\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 \\
&= \left\|u'\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 + \left(\left(A^{1/2}u\right), \left(A^{1/2}u\right)\right)'_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left\|Au\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 \\
&= \left\|u'\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 + \left\|Au\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left\|T^*u\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 &= \left\|u'\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 - \left(u', Au\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} - \left(Au, u'\right)_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left\|Au\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 \\
&= \left\|u'\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 - \left(\left(A^{1/2}u\right), \left(A^{1/2}u\right)\right)'_{L_2(H,\mathbb{R})} + \left\|Au\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 \\
&= \left\|u'\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2 + \left\|Au\right\|_{L_2(H,\mathbb{R})}^2
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı T 'nin normal bir operatör olduğu bulunur.

Şimdi, eğer T operatörü normal ise

$$T_R T_I = T_I T_R$$

koşulu sağlanır. Ayrıca bu durumda

$$T_R = A \text{ ve } T_I = T_0$$

olduğundan durum açıktır.

Not: Teorem 2.1.10 ve Teorem 2.1.15'i kıyasladığımızda birinci mertebeden fark ve diferensiyel operatörler için sonuçların örtüştüğü anlaşılır.

2.2. $\ell_2(\mathbb{N})$ Hilbert Uzayında Birinci Mertebeden Lineer Normal Fark Operatörleri ve Spektrumları

Bu bölümde H bir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ uzayında birinci mertebeden lineer selfadjoint katsayılı diferensiyel operatörün diskret analogu olan

$$L = E - S + A,$$

(burada S ve A $\ell_2(\mathbb{N})$' de sırasıyla sağa öteleme ve lineer selfadjoint operatördür) operatörünün normalliği ve bu normal operatörlerin spektrumları incelenecektir.

Bu bölümün sonunda ise $\ell_2(\mathbb{N})$ uzayında alınan sonuçların $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ uzayında birinci mertebeden selfadjoint operatör katsayılı normal diferensiyel operatörler için bulunan sonuçlarla örtüşmediği gösterilecektir.

Ama ilk önce aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösterelim.

Önerme 2.2.1: $S(u_n) = (u_{n-1})$, $u_0 = 0$, $(u_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ için

$$S^*S = 1,$$
$$SS^* = 1 - P_1$$

$\big($burada $P_1 : \{u_1, u_2, u_3, ...\} \to \{u_1, 0, 0, ...\}$, $(u_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ birinci koordinata izdüşüm operatörü$\big)$ bağıntıları doğrudur.

İspat: İlk önce $\ell_2(\mathbb{N})$ uzayında S operatörünün S^* adjointini bulalım.

Her $u, v \in \ell_2(\mathbb{N})$ için,

$$(Su, v) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}\overline{v_n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{v_{n+1}} = (u, S^*v), \quad S^*(v) = (v_{n+1}).$$

Böylece, $S(u_n) = u_{n-1}$, $(u_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ sağa öteleme operatörünün adjointi S^* sola öteleme operatörüdür, yani

$$S^*\{u_1, u_2, ...\} = \{u_2, u_3, u_4, ...\}, \ (u_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$$

olup $S^*S = 1$ bulunur.

Öte yandan,

$$\begin{aligned} SS^*(u_n) &= S\{u_2, u_3, u_4, ...\} = \{0, u_2, u_3, ...\} \\ &= \{u_1, u_2, u_3, ...\} - \{u_1, 0, 0, ...\} \\ &= 1 - P_1. \end{aligned}$$

Teorem 2.2.2: Aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$S_R^2 + S_I^2 = 1 - \frac{1}{2} P_1,$$
$$S_R S_I - S_I S_R = \frac{1}{2i} P_1.$$

İspat: Teoremin ispatı için yukarıdaki önermeyi kullanalım. O halde

$$(S_R - iS_I)(S_R + iS_I) = 1,$$
$$(S_R + iS_I)(S_R - iS_I) = 1 - P_1$$

olup bu bağıntılardan

$$S_R^2 + iS_R S_I - iS_I S_R + S_I^2 = 1,$$
$$S_R^2 - iS_R S_I + iS_I S_R + S_I^2 = 1 - P_1.$$

Sonuncu bağıntılardan istenilen sonuca ulaşılır.

Önerme 2.2.3: $S : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}),\ S(u_n) = (u_{n-1}),\ (u_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$

operatörü için aşağıdakiler doğrudur.

(1) $\rho(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$;

(2) $\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$;

(3) $\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$;

(4) $\sigma_p(S) = \varnothing$;

İspat:

(1) $\rho(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$ olduğunu gösterelim.

$(u_n), (v_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ için $(S - \lambda)(u_n) = (v_n)$ denklemine bakalım. Bu durumda

$$S - \lambda E = -\lambda\left(E - \frac{1}{\lambda} S\right)$$

olup

$$\left\| \frac{1}{\lambda} S \right\| = \frac{1}{|\lambda|} 1 < 1$$

olduğundan Teorem 1.5.32'den $S - \lambda E$ operatörünün $\ell_2(\mathbb{N})$'de tersi var,

yani $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\} \subset \rho(S)$ olduğu bulunur.

(2) Şimdi ise, $(u_n),(v_n)\in \ell_2(\mathbb{N})$, $|\lambda|=1$, $\lambda\in\mathbb{C}$ olmak üzere,

$$S(u_n)=\lambda(u_n)+(v_n),\ u_0=0$$

denklemine bakalım. O halde (u_n):

$$u_1=\frac{v_1}{\lambda},$$
$$u_2=\frac{v_1}{\lambda^2}+\frac{v_2}{\lambda},$$
$$u_3=\frac{v_1}{\lambda^3}+\frac{v_2}{\lambda^2}+\frac{v_3}{\lambda},$$
....
$$u_n=\frac{v_1}{\lambda^n}+\frac{v_2}{\lambda^{n-1}}+......+\frac{v_n}{\lambda},$$
....

şeklinde bulunur. İlk olarak $(S-\lambda E)$, $|\lambda|=1$, $\lambda\in\mathbb{C}$ operatörünün bire bir olduğu bulunur. Fakat $\operatorname{Im}(S-\lambda E)\neq \ell_2(\mathbb{N})$, $|\lambda|=1$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Gerçekten, $(v_n^*)=\{1,0,0,........\}\in \ell_2(\mathbb{N})$ için $u^*=(u_n^*)=\left(\frac{1}{\lambda^n}\right)$, $n\geq 1$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n^*|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}1=+\infty,$$

yani $u^*\notin \ell_2(\mathbb{N})$.

Sonuç olarak

$$\sigma_c(S)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}.$$

(3) Şimdi $S(u_n)=(u_{n-1})$, $u\in \ell_2(\mathbb{N})$ operatörünün normunu bulalım.

$$S^*S=E$$

eşitliğinden

$$S^*Su=u,\ u\in \ell_2(\mathbb{N})$$

olup buradan

her $u\in \ell_2(\mathbb{N})$ için $\|Su\|=\|u\|$.

Böylece $\|S\|=1$ bulunur.

Şimdi $|\lambda|<1$ olmak üzere,

$$\left\|(S-\lambda E)u\right\| \geq \left\|\|Su\| - |\lambda|\|u\|\right\| = \left\|\|u\| - |\lambda|\|u\|\right\| = (1-|\lambda|)\|u\|,\ u \in \ell_2(\mathbb{N})$$

elde edilir.

Sonuçta her $u \in \ell_2(\mathbb{N})$ ve her $\lambda : |\lambda| < 1$ için

$$\left\|(S-\lambda E)u\right\| \geq (1-|\lambda|)\|u\| \tag{3.1}$$

doğrudur.

Eğer $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1$ ise, $\operatorname{Im}(S-\lambda E)$ kümesi $\ell_2(\mathbb{N})$' de kapalı, yani

$$\overline{\operatorname{Im}(S-\lambda E)} = \operatorname{Im}(S-\lambda E)$$

olduğunu gösterelim.

Keyfi bir $(v_n^k) \subset \operatorname{Im}(S-\lambda E)$ ve $v_n^k \xrightarrow[k\to\infty]{\ell_2(\mathbb{N})} (v_n)$ olan dizi alalım. Bu halde (v_n^k) dizisi $\ell_2(\mathbb{N})$' de bir Cauchy dizisidir. Bu durumda (3.1) bağıntısından, her $k, j \geq 1$ için

$$\left\|v_n^k - v_n^j\right\| = \left\|(S-\lambda E)(u_n^k - u_n^j)\right\| \geq (1-|\lambda|)\left\|u_n^k - u_n^j\right\|. \tag{3.2}$$

Burada $(u_n^k) \in \ell_2(\mathbb{N})$ ve her $k \geq 1$ için

$$(v_n^k) = (S-\lambda E)(u_n^k)$$

koşulunu sağlayan $\ell_2(\mathbb{N})$' de bir dizidir, çünkü

$$(v_n^k)_{k=1}^{k=\infty} \subset \operatorname{Im}(S-\lambda E)$$

şeklinde alınmıştır.

Bu halde (3.2) eşitsizliğinden $(u_n^k)_{k=1}^{k=\infty}$ dizisinin $\ell_2(\mathbb{N})$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğu bulunur. Ayrıca $\ell_2(\mathbb{N})$ tam uzay olduğundan

$$\exists (u_n) \in \ell_2(\mathbb{N}) : (u_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{\ell_2(\mathbb{N})} (u_n).$$

Bu durumda

$$\left\|(S-\lambda E)(u_n^k - u_n)\right\| \leq 2\left\|u_n^k - u_n\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

olduğundan

$$(v_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (S-\lambda 1)(u_n)$$

alınır. Ayrıca $(v_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (v_n)$ olup limitin tekliğinden

$$(v_n) = (S-\lambda E)(u_n).$$

Böylece, eğer $(v_n) \subset (\mathrm{Im}(S-\lambda E))'$ ise,

$$\exists (u_n) \subset \ell_2(\mathbb{N}) : (S-\lambda E)(u_n) = (v_n)$$

bulunur.

Şimdi

$$Su = \lambda u + v,\ u, v \in \ell_2(\mathbb{N}),\ |\lambda| < 1,\ u_0 = 0$$

denklemine bakalım. Buradan

$$u_{n-1} = \lambda u_n + v_n,\ u_0 = 0,\ n \geq 1,\ |\lambda| < 1 \text{ ve } \lambda \neq 0 \text{ için}$$

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{\lambda} - \frac{u_n}{\lambda},\ n \geq 0.$$

Yani,

$$u_1 = -\frac{v_1}{\lambda},$$

$$u_2 = -\frac{v_1}{\lambda^2} - \frac{v_2}{\lambda},$$

$$u_3 = -\frac{v_1}{\lambda^3} - \frac{v_2}{\lambda^2} - \frac{v_3}{\lambda},$$

....

$$u_n = -\frac{v_1}{\lambda^n} - \frac{v_2}{\lambda^{n-1}} - \ldots\ldots - \frac{v_n}{\lambda},$$

....

şeklindedir. Yani, $|\lambda| < 1,\ \lambda \neq 0$ için $S - \lambda E$ operatörü bire birdir. Bu halde eğer $v_n^* = (-1, 0, 0, \ldots\ldots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ ise,

$$u_1^* = \frac{1}{\lambda},$$

$$u_2^* = \frac{1}{\lambda^2},$$

....

$$u_n^* = \frac{1}{\lambda^n},$$

....

yani,

$$(u_n^*) = (S - \lambda E)(v_n^*) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{\lambda^n}, \ldots\ldots\ldots \right\}$$

şeklindedir. Sonuncu eşitlikten ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^*\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^{2n}=+\infty$$

alınır ki, bu $\left(u_n^*\right)\notin \ell_2\left(\mathbb{N}\right)$ olduğu anlamına gelir.

Bunun sonucunda

$$\left(v_n^*\right)\notin \operatorname{Im}\left(S-\lambda E\right)$$

elde edilir, yani

$$\overline{\operatorname{Im}\left(S-\lambda E\right)}=\operatorname{Im}\left(S-\lambda E\right)\neq \ell_2\left(\mathbb{N}\right).$$

Eğer $\lambda=0$ ise, $Su=v$ ve $u,v\in \ell_2\left(\mathbb{N}\right)$ denkleminden

$$\begin{matrix} v_n=u_{n-1} \\ u_0=0 \end{matrix},\ n\geq 1$$

yani,

$$\begin{aligned} &v_1=0,\\ &v_2=u_1,\\ &v_3=u_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &v_n=u_{n-1}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

elde edilir. Bu halde $v_1\neq 0$ için

$$\left\{v_1,0,0,\ldots\ldots\ldots\right\}\notin \operatorname{Im}\left(S\right)=\overline{\operatorname{Im}\left(S\right)}$$

olup,

$$0\in \sigma_r\left(S\right)$$

sonucuna ulaşılır.

(4) Şimdi $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere, $\begin{cases} S\left(u_n\right)=\lambda\left(u_n\right) \\ u_0=0 \end{cases},\quad \left(u_n\right)\in \ell_2\left(\mathbb{N}\right)$

denklemine bakalım. Bu halde

$$\lambda u_1 = 0$$
$$\lambda u_2 = u_1$$
$$\lambda u_3 = u_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda u_n = u_{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

olup $(u_n) = 0$. Yani $\sigma_p(S) = \varnothing$.

Şimdi S_R ve S_I operatörlerinin $\ell_2(\mathbb{N})$ uzayında spektrum yapısını inceleyelim.

Teorem 2.2.4:

$$\sigma(S_R) = \sigma_c(S_R) = [-1,1] \text{ ve}$$
$$\sigma(S_I) = \sigma_c(S_I) = [-1,1]$$

bağıntıları doğrudur.

İspat: İkinci bağıntının doğruluğunu gösterelim. İlk önce $1 \in \sigma_p(S_I)$ olup olmadığını araştıralım.

$$u \in \ell_2(\mathbb{N}) \text{ için } S_I u = u,\ u \neq 0,\ u_0 = 0$$

denklemine bakalım. Yani,

$$u_{n-1} - u_{n+1} = 2iu_n,\ n \geq 1,\ u_0 = 0.$$

Buradan,

$$u_{n+1} = -2iu_n + u_{n-1},\ n \geq 1,\ u_0 = 0.$$

Burada $u_1 \in \mathbb{C}$ keyfi olmak üzere,

$$u_2 = -2iu_1,$$
$$u_3 = -2iu_2 + u_1 = -2i(-2i)u_1 + u_1 \quad \Rightarrow u_3 = -3u_1$$
$$u_4 = -2iu_3 + u_2 = -2i(-3)u_1 + (-2i)u_1 \Rightarrow u_4 = 4iu_1$$
$$u_5 = -2i(4iu_1) - 3u_1 = 8u_1 - 3u_1 = 5u_1 \quad \Rightarrow u_5 = 5u_1$$
$$u_6 = -2i(5u_1) + 4iu_1 = -6iu_1 \quad \Rightarrow u_6 = -6iu_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Böylece,

$$u_n = (-1)^n i^{n+1} n u_1,\ n \geq 1.$$

Buradan

$$|u_n| = n|u_1|,\ n \geq 1$$

olup

$$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}n^2|u_1|.$$

Bu serinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart $u_1=0$ olmasıdır. Bu durumda ise, $u_n=0,\ n\geq 1,$ yani

$$S_I u=u,\ u\in \ell_2(\mathbb{N})$$

denkleminin bir tek $u=0$ çözümü var, yani

$$1\notin \sigma_p(S_I), \tag{3.3}$$

dolayısıyla (S_I-E) bire birdir.

Şimdi $-1\in \sigma_p(S_I)$ olup olmadığını araştıralım.

$$S_I u=-u,\ u\in \ell_2(\mathbb{N}),\ u\neq 0,\ u_0=0$$

denklemine, yani

$$u_{n-1}-u_{n+1}=-2iu_n,\ n\geq 1,\ u_0=0$$

buradan,

$$u_{n+1}=2iu_n+u_{n-1},\ n\geq 1,\ u_0=0$$

denklemine bakalım.

Burada $u_1\in\mathbb{C}$ keyfi olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&u_2=2iu_1,\\
&u_3=2i(2iu_1)+u_1=(-4+1)u_1=-3u_1 && \Rightarrow u_3=-3u_1\\
&u_4=2iu_3+u_2=2i(-3u_1)+2iu_1=-4iu_1 && \Rightarrow u_4=-4u_1\\
&u_5=2i(-4iu_1)+(-3u_1)=5u_1 && \Rightarrow u_5=5u_1\\
&u_6=2i(5u_1)-4iu_1=6iu_1 && \Rightarrow u_6=6iu_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Böylece,

$$u_n=-i^{n+1}nu_1,\ n\geq 1$$

olup buradan

$$|u_n|=n|u_1|,\ n\geq 1.$$

Öyleyse,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}n^2|u_1|^2$$

serisinin yakınsak olması için $u_1 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$u_0 = u_1 = ... = u_n = ... = 0$$

yani,

$$-1 \notin \sigma_p\left(S_I\right). \qquad (3.4)$$

Ayrıca,

$$\left\|S_I\right\| \leq 1,\ S_I = S_I^*$$

olduğundan

$$\sigma\left(S_I\right) \subset \left[-1,1\right]$$

olduğu genel teoriden bilinir (Teorem 1.5.49).

$\lambda \in \left[-1,1\right],\ \lambda = \cos\theta,\ 0 < \theta < 2\pi,\ \theta \neq 0, \pi$ için $S_I u = \lambda u,\ u_0 = 0,\ u \in \ell_2\left(\mathbb{N}\right)$ bakalım. O halde

$$u_{n-1} - u_{n+1} = 2i\lambda u_n,\ n \geq 1,\ u_0 = 0 \text{ ve } u_1 \in \mathbb{C} \text{ keyfi olmak üzere}$$

denklemlerinden

$$u_{n+1} = -2i\lambda u_n + u_{n-1},\ n \geq 1,\ u_0 = 0$$

bulunur. Buradan,

$$u_2 = -2i\lambda u_1 + u_0 = -2i\cos\theta u_1 \qquad \Rightarrow u_2 = -i\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\, u_1,$$

$$u_3 = \left(1 - 4\cos^2\theta\right)u_1 = -\left(4\cos^2\theta - 1\right)u_1 \qquad \Rightarrow u_3 = -\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}u_1,$$

$$u_4 = -4i\cos\theta\left(1 - 2\cos^2\theta\right)u_1 = i\left[4\cos\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right)\right]u_1 \quad \Rightarrow u_4 = i\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}u_1,$$

$$u_5 = -2i\cos\theta u_4 + u_3 = \left(-2i\cos\theta i\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)u_1 \qquad \Rightarrow u_5 = \frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}u_1,$$

$$u_6 = -2i\cos\theta u_5 + u_4 = i\left(-2\cos\theta\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\right)u_1 \qquad \Rightarrow u_6 = -i\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta}u_1,$$

$$..........................$$

Böylece,

$$u_n = \left(-i\right)^{n-1}\frac{\sin\left(n\theta\right)}{\sin\theta}u_1,\ n \geq 2,\ \theta \neq 0, \pi,\ \left(u_1 \in \mathbb{C} \text{ keyfi bir sayıdır.}\right)$$

bulunur.

Bu halde $\theta \neq 0, \pi$ $, 0 < \theta < 2\pi$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\sin(n\theta)|^2\right)\left|\frac{u_1}{\sin\theta}\right|^2$$

olup $\theta\neq 0,\pi$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(\sin n\theta)$$

yoktur, yani $\theta\neq 0,\pi$,$0<\theta<2\pi$ için

$$(u_n)\notin \ell_2(\mathbb{N}).$$

Ayrıca, $\theta=0,\pi$ için ise, $1\notin \sigma_p(S_I)$ olduğu bulundu.

Böylece yukarıdaki serinin yakınsak olması için $u_1=0$ yani, $u=\{0,0,......,0,.....\}$ olmak zorundadır. Buradan, (3.3) ve (3.4)'den $\lambda\in[-1,1]\notin\sigma_p(S_I)$, yani

$$\sigma_p(S_I)=\varnothing$$

bulunur.

Öyleyse, $\sigma_r(S_I)=\varnothing$ olduğundan (Teorem 1.5.49) $\sigma_c(S_I)$ kümesini bulalım. Bunun için

$$S_I u=\lambda u+v,\ \lambda\in(-1,1),\ u_0{=}0,\ u,v\in\ell_2(\mathbb{N})$$

denklemine bakalım. Böylece

$$u_{n+1}=-2i\lambda u_n+u_{n-1}-2iv_n,\ n\geq 1,\ u_0=0$$

denklemler sistemini elde ederiz.

Buradan,

$$u_2=-2i\lambda u_1+u_0-2iv_1 \qquad \Rightarrow u_2=-2i\lambda u_1-2iv_1,$$

$$u_3=-2i\lambda u_2+u_1-2iv_2=-2i\lambda(-2i\lambda u_1-2iv_1)+u_1-2iv_2=-4\lambda^2u_1-4\lambda v_1+u_1-2iv_2\ ,$$

$$\Rightarrow u_3=(1-4\lambda^2)u_1-4\lambda v_1-2iv_2,$$

$$\Rightarrow u_4=-4i\lambda(1-2\lambda^2)u_1+2i(4\lambda^2-1)v_1-4\lambda v_2-2iv_3.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Genelde $u_1=1$ alınabilir. Ayrıca $v^*=\left\{\frac{1}{2},0,.......,0,....\right\}\in\ell_2(\mathbb{N})$ alalım. O halde $\lambda=\cos\theta$ için

$$u_2^* = -i\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} - i,$$
$$u_3^* = -\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + i\left(-i\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\right),$$
$$u_4^* = i\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} - i\left(-\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right),$$
$$u_5^* = \frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} + i\left(i\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\right),$$

....

bulunur. Buradan,

$$u_n^* = (-i)^{n-1}\left[\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} + (-1)^{n-1}\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\right],\ n \geq 2$$

elde edilir.

Eğer $u_1 = 1,\ v_1 = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$u_n^* = (-i)^{n-1}\left[\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} + (-1)^{n-1}\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}\right],\ n \geq 2\,.$$

Ayrıca $n \geq 2$ için (u_n) serisinin genel terimi,

$$u_n = \left\{\begin{array}{ll} 2(-i)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{2n\theta-\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}, & \text{n tek ise} \\ 2(-i)^{n-1}\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{2n\theta-\theta}{2}}{\sin\theta}, & \text{n çift ise} \end{array}\right\}$$

şeklindedir.

Böylece $S_I u = \lambda u + v^*$ ve $v^* = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, ...\right)$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^*\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\sin^2\theta}\left|\sin\frac{n\theta-(-1)^n(n-1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta+(-1)^n(n-1)\theta}{2}\right|^2$$

olup,bu seri ıraksaktır. Çünkü

$$u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} yok$$
$$u_{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} yok$$

ve genel terim için $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ yoktur. Bunun sonucu olarak $\lambda \in (-1,1)$ için $v^* \notin \operatorname{Im}(S_I - \lambda E)$ elde edilir. Böylece, her $\lambda \in (-1,1)$ için $(\mathrm{S_I} - \lambda E)$ bire birdir, fakat örten değildir. Yani,

$$\left(S_I-\lambda E\right)\ell_2(\mathbb{N})\subset\ell_2(\mathbb{N}) \text{ olup } \left(S_I-\lambda E\right)\ell_2(\mathbb{N})\neq\ell_2(\mathbb{N}).$$

Şimdi $\lambda=\cos\theta$ ve $\theta=0$ veya $\theta=\pi$ durumunu, yani $\pm1\in\sigma(S_I)$ olup olmadığını araştıralım.

$\pm1\notin\sigma_p(S_I)$ olduğunu daha önce göstermiştik. Şimdi ise, $\pm1\in\sigma_c(S_I)$ olduğunu gösterelim.

Bu durumda $\lambda=1$ için,

$$u_{n+1}=-2iu_n-2iv_n+u_{n-1},\ n\geq1,\ u_0=0\ \left(u_1\in\mathbb{C}\text{ keyfidir.}\right)$$

denklemine bakalım. Burada $v^*=\left(v_1,0,0,.......\right)$ olsun. O halde,

$$u_2^*=-2iu_1-2iv_1$$
$$u_3^*=-2iu_2+u_1-2iv_2=-3u_1-4v_1-2iv_2=-3u_1-4v_1$$
$$\Rightarrow u_3^*=-3u_1-4v_1$$
$$u_4^*=-2i\left(-3u_1-4v_1\right)+\left(-2iu_1-2iv_1\right)-2iv_3=4iu_1+6iv_1$$
$$\Rightarrow u_4^*=4iu_1+6iv_1$$
$$u_5^*=-2i\left(4iu_1+6iv_1\right)+\left(-3u_1-4v_1\right)=5u_1+8v_1$$
$$\Rightarrow u_5^*=5u_1+8v_1$$
$$u_6^*=-2i\left(5u_1+8v_1\right)+4iu_1+6iv_1=-6iu_1-10iv_1$$
$$\Rightarrow u_6^*=-6iu_1-10iv_1$$
$$u_7^*=-2i\left(-6iu_1-10iv_1\right)+5u_1+8v_1=-7u_1-12v_1$$
$$\Rightarrow u_7^*=-7u_1-12v_1$$
$$u_8^*=-2i\left(-7u_1-12v_1\right)-6iu_1-10iv_1=8iu_1+14iv_1$$
$$\Rightarrow u_8^*=8iu_1+14iv_1$$

....

Böylece, $n\geq2$ için

$$u_n^*=(-1)^n i^{n+1}nu_1+(-i)^{n-1}(2n-2)v_1$$

olduğu görülür. Yani,

$$u_n^*=(-1)^{n+1}i^{n-1}\left(nu_1+(2n-2)v_1\right),\ n\geq2.$$

Eğer $v_1=\dfrac{u_1}{2}$, $v_1\neq0$ ve $v^*=\left(v_1,0,0,........\right)$ olarak alındığında,

$$u_n^* = (-1)^{n+1} i^{n-1} \left(nu_1 + (n-1)u_1 \right) = (-1)^{n+1} i^{n-1} (2n-1) u_1, \; n \geq 2 .$$

Ama

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2 |u_1|^2$$

serisinin yakınsak olması için $u_1 = 0$ olmalıdır. Yani,

$$v^* = \{v_1, 0, 0, ...\} \notin \operatorname{Im}(S_I - E) .$$

Bunun sonucunda,

$$1 \in \sigma_c(S_I)$$

bulunur.

Şimdi $\theta = \pi$ durumuna uygun $\lambda = -1 \in \sigma(S_I)$ olup olmadığını araştıralım.

Bu halde,

$$u_{n+1} = 2iu_n + u_{n-1} - 2iv_n, \; n \geq 1, \; u_0 = 0, \; v^* = \{v_1, 0, 0, ...\} \in \ell_2(\mathbb{N})$$

alalım. Bu durumda,

$$u_2^* = 2iu_1 + u_0 - 2iv_1 = 2iu_2 + 2iv_1$$

$$\Rightarrow u_2^* = 2iu_2 + 2iv_1$$

$$u_3^* = 2i(2iu_1 - 2iv_1) - 2iv_2 + u_1 = -3u_1 + 4v_1$$

$$\Rightarrow u_3^* = 3u_1 + 4v_1$$

$$u_4^* = 2i(-3u_1 + 4v_1) + 2iu_1 - 2iv_1 - 2iv_3 = -4iu_1 + 6iv_1$$

$$\Rightarrow u_4^* = -4iu_1 + 6iv_1$$

$$u_5^* = 2i(-4iu_1 + 6iv_2) + (-3u_1 + 4v_1) = 5u_1 - 8v_1$$

$$\Rightarrow u_5^* = 5u_1 - 8v_1$$

$$u_6^* = 2i(5u_1 - 8v_1) + (-4iu_1 + 6iv_1) = 6iu_1 - 10iv_1$$

$$\Rightarrow u_6^* = 6iu_1 - 10iv_1$$

$$u_7^* = 2i(6iu_1 - 10iv_1) + (5u_1 - 8v_1) = -7u_1 + 12v_1$$

$$\Rightarrow u_7^* = -7u_1 + 12v_1$$

....

elde edilir. Buradan,

$$u_n^* = (i)^{n-1} nu_1 + (-1)^n (-i)^{n-1} (2n-2) v_1, \; n \geq 2$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde

$$\left(u_n^*\right) \notin \ell_2\left(\mathbb{N}\right)$$

olduğu gösterilebilir. Böylece $\operatorname{Im}\left(S+\lambda E\right) \neq \ell_2\left(\mathbb{N}\right)$, yani

$$\lambda = -1 \in \sigma_c\left(S_I\right)$$

elde edilir.

Buradan $\sigma_r\left(S_I\right) = \varnothing$ ve $\sigma_p\left(S_I\right) = \varnothing$ olduğundan

$$\sigma\left(S_I\right) = \sigma_c\left(S_I\right) = \left[-1,1\right]$$

sonucuna ulaşılır.

$\sigma\left(S_R\right) = \sigma_c\left(S_R\right) = \left[-1,1\right]$ olduğu benzer şekilde gösterilir.

Not: $\left(u_n^*\right)$ serisini incelerken $u_1 = 1,\ v_1 = \dfrac{1}{2}$ alınmıştı. Genel duruma bakalım.

Eğer her $u_1 \neq 0$ ise, $v_1 = \dfrac{u_1}{2}$ olarak alınırsa yine aynı sonuca, yani

$$S_I u = \lambda u + \left\{\frac{u_1}{2}, 0, 0, ...\right\},\ u_0 = 0,\ \left(u_n\right) \in \ell_2\left(\mathbb{N}\right)$$

denkleminin $\ell_2\left(\mathbb{N}\right)$ uzayında bir çözüme sahip olmadığı kolayca gösterilebilir.

Şimdi,

$$L = E - S + A,\ A = A^* \in B\left(\ell_2\left(\mathbb{N}\right)\right)$$

operatörünün normalliğini inceleyelim.

Teorem 2.2.5: $L = E - S + A$, $A = A^* \in B\left(\ell_2\left(\mathbb{N}\right)\right)$ (S sağa öteleme operatörüdür) operatörünün $\ell_2\left(\mathbb{N}\right)$ uzayında normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\left(A - S^*\right) \text{ ve } \left(S - S^*\right)$$

operatörlerinin komutatif olmasıdır.

İspat: Bu halde $L^* = E - S^* + A$ olup $LL^* = L^*L$ bağıntısının hangi durumlarda doğru olup olmadığını araştıralım.

$$\left(E - S + A\right)\left(E - S^* + A\right) = \left(E - S^* + A\right)\left(E - S + A\right)$$

$$E - S^{*} + A - S + SS^{*} - SA + A - AS^{*} + A^{2} = E - S + A - S^{*} + S^{*}S - S^{*}A + A - AS + A^{2}$$
$$SS^{*} - S^{*}S - SA + S^{*}A - AS^{*} + AS = 0$$
$$SS^{*} - S^{*}S - \left(S - S^{*}\right)A - A\left(S^{*} - S\right) = 0$$
$$\left(S - S^{*}\right)A + A\left(S^{*} - S\right) = SS^{*} - S^{*}S \qquad (3.5)$$
$$SS^{*} - S^{*}S = SS^{*} - S^{*2} + S^{*2} - S^{*}S = \left(S - S^{*}\right)S^{*} + S^{*}\left(S^{*} - S\right)$$

Bu halde (3.5)' den

$$\left(S - S^{*}\right)A + A\left(S^{*} - S\right) = \left(S - S^{*}\right)S^{*} + S^{*}\left(S^{*} - S\right)$$
$$\left(S - S^{*}\right)\left(A - S^{*}\right) + \left(A - S^{*}\right)\left(S^{*} - S\right) = 0$$
$$\left(S - S^{*}\right)\left(A - S^{*}\right) = \left(A - S^{*}\right)\left(S - S^{*}\right)$$

elde edilir.

Böylece yukarıdaki teoremi aşağıdaki şekilde de ifade etmek mümkündür.

Teorem 2.2.6: $L = E - S + A$, $A = A^{*} \in B\left(\ell_2(\mathbb{N})\right)$

operatörünün $\ell_2(\mathbb{N})$ uzayında normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\left(A - S\right)S_I = S_I\left(A - S\right)$$

olmasıdır.

İspat: Yukarıdaki teoremden,

$$\left(A - S\right)\left(S^{*} - S\right) = \left(S^{*} - S\right)\left(A - S\right)$$

olduğu biliniyor. Buradan,

$$\left(A - S\right)\left(S - S^{*}\right) = \left(S - S^{*}\right)\left(A - S\right)$$

veya

$$\left(A - S\right)\left(\frac{S - S^{*}}{2i}\right) = \left(\frac{S - S^{*}}{2i}\right)\left(A - S\right),$$

yani

$$\left(A - S\right)S_I = S_I\left(A - S\right)$$

elde edilir.

Örnekler 2.2.7:

(1) $A^* = A : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}),\, A = S_R$ olsun. Bu halde

$$A - S = S_R - S_R - iS_I = -iS_I$$

olup $A - S$ ve S_I operatörleri komutatiftir ve her $u = (u_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$ için

$$(Lu)_n := (E - S + A)(u)_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}),\ n \geq 1,\ u_0 = 0$$

şeklinde olup $L = E - S + A$ operatörü normaldir.

(2) $A = S_R + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{n} \alpha_j S_I{}^j$ alırsak,

$$A - S = S_R + \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{n} \alpha_j S_I^j - S_R - iS_I = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j S_I^j$$

olup, $A - S$ ile S_I komutatiftir. Böylece sonuncu teoreme göre,

$$L = E - S + A = E - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j S_I^j$$

operatörü $\ell_2(\mathbb{N})$ 'den $\ell_2(\mathbb{N})$'e lineer normal bir operatördür.

(3) $A = S_R + \cos(S_I)$ veya $A = S_R + \sin(S_I)$ olarak alınırsa,

$$A - S = S_R + \cos(S_I) - S_R - iS_I = \cos(S_I) - iS_I$$

ve

$$A - S = S_R + \sin(S_I) - S_R - iS_I = \sin(S_I) - iS_I$$

olup S_I operatörü $\cos(S_I) - iS_I$ ve $\sin(S_I) - iS_I$ operatörleri ile komutatiftir, dolayısıyla sonuncu teoreme göre L operatörü normaldir.

(4) $A = S_R + e^{aS_I},\ a \in \mathbb{R}$ alınırsa

$$A - S = S_R + e^{aS_I} - S_R - iS_I = e^{aS_I} - iS_I$$

olup $A - S$ operatörü S_I ile komutatiftir. Öyleyse $L = E - S + A$ operatörü $\ell_2(\mathbb{N})$'de normaldir.

Teorem 2.2.8: $L = E - S + A,\ A = A^* \in B(\ell_2(\mathbb{N})),\ L : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ operatörünün normal olması için gerekli ve yeterli koşul

$$L = f(S_I) - iS_I$$

olacak şekilde bir $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bulunabilmesidir.

İspat: $L = E - S + A = E - S_R + A - iS_I$, $A = A^* \in B(\ell_2(\mathbb{N}))$ olsun. Eğer L operatörü normal ise,

$$E - S_R + A = g_R(T) \qquad (3.6)$$

$$S_I = g_I(T) \qquad (3.7)$$

olacak şekilde bir $T = T^*$ ve $g_R, g_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları vardır [65]. Şimdi (3.7)'dan $\alpha \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ için

$$S_I - \alpha E = g_I(T) - \alpha E = (g_I - \alpha)(T).$$

Buradan $(S_I - \alpha E)^{-1} \in B(\ell_2(\mathbb{N}))$ olduğundan $(g_I - \alpha)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tersi var ve sınırlıdır. O halde

$$T = (g_I - \alpha)^{-1}(S_I - \alpha E)$$

ve böylece (3.6)'den

$$E - S_R + A = g_R(T) = g_R\left((g_I - \alpha)^{-1}(S_I - \alpha E)\right) = \left(g_R\left((g_I - \alpha)^{-1}(\bullet - \alpha)\right)\right)(S_I).$$

Buradan ise,

$$L = g_R(T) - ig_I(T) = g_R\left((g_I - \alpha)^{-1}(S_I - \alpha E)\right) - iS_I$$

olup

$$f(\lambda) := g_R\left((g_I - \alpha)^{-1}(\lambda - \alpha E)\right),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dersek

$$L = f(S_I) - iS_I$$

olur.

Tersine, eğer $L = f(S_I) - iS_I$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde ise,

$$L_R = f(S_I),\ L_I = -S_I$$

$$L_R^* = L_R,\ L_I^* = L_I$$

ve

$$L_R L_I = -f(S_I) S_I,$$
$$L_I L_R = -S_I f(S_I)$$

olduğundan L'nin normalliği açıktır.

Teorem 2.2.9: $L = E - S + A,\ L : D(A) \subset \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ ve $S_I \ell_2(\mathbb{N}) \subset D(A)$ olsun. L operatörünün $\ell_2(\mathbb{N})$ uzayında normal olması için gerekli ve yeterli koşul $A - S$ ve S_I operatörlerinin komutatif olmasıdır.

İspat: L operatörü normal olsun. $A = A^*$ olduğundan $L = E - S + A$ operatörünün adjointi $L^* = E - S^* + A$ olup [66],

$$D(L) = D(A)$$
$$D(L^*) = D(A)$$

ve bu sonuncu eşitliklerden,

$$D(L) = D(L^*) \subset \ell_2(\mathbb{N})$$

koşulu sağlandığı görülür.

Her $u \in D(L)$ için,

$$\begin{aligned}\|(E - S + A)u\|_{\ell_2}^2 &= (u - Su + Au, u - Su + Au)\\ &= (u,u) - (u,Su) + (u,Au) - (Su,u) + (Su,Su) - (Su,Au) + (Au,u) - (Au,Su) + (Au,Au)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|(E - S^* + A^*)u\|_{\ell_2}^2 &= (u - S^*u + Au, u - S^*u + Au)\\ &= (u,u) - (u,S^*u) + (u,Au) - (S^*u,u)\\ &\quad + (S^*u,S^*u) - (S^*u,Au) + (Au,u) - (Au,S^*u) + (Au,Au).\end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}&(u,u) - (u,Su) + (u,Au) - (Su,u) + (Su,Su) - (Su,Au) + (Au,u) - (Au,Su) + (Au,Au)\\ &\quad = (u,u) - (u,S^*u) + (u,Au) - (S^*u,u) + (S^*u,S^*u) - (S^*u,Au) + (Au,u) - (Au,S^*u) + (Au,Au)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(u,u) - (u,S^*u) + (u,S^*Su) - (u,S^*Au) - (Au,Su)\\ &\quad = -(u,S^*u) - (u,Su) + (u,SS^*u) - (u,SAu) - (Au,S^*u)\end{aligned}$$

$$(u,S^*Su) - (u,SS^*u) - (u,S^*Au) + (u,SAu) - (Au,Su) + (Au,S^*u) = 0$$

$$(u,(S^*S - SS^*)u) - (u,(S^* - S)Au) - (Au,(S - S^*)u) = 0$$

$$(u,(S^*S - SS^*)u) - ((S - S^*)u,Au) - (Au,(S - S^*)u) = 0$$

Yani, her $u \in D(L)$ için

$$\left(u,\left(S^*S-SS^*\right)u\right)+\left(\left(S^*-S\right)u,Au\right)+\left(Au,\left(S^*-S\right)u\right)=0 \qquad (3.8)$$

Ayrıca sonuncu eşitlikteki birinci terimi

$$\left(u,\left(S^*S-SS^*\right)u\right)=\left(u,\left(S^*S-S^2+S^2-SS^*\right)u\right)=\left(u,\left(S^*-S\right)Su\right)+\left(u,S\left(S-S^*\right)u\right)$$

tipinde yazılarak (3.8)' den,

$$\begin{aligned}&\left(u,\left(S^*-S\right)Su\right)+\left(u,S\left(S-S^*\right)u\right)+\left(\left(S^*-S\right)u,Au\right)+\left(Au,\left(S^*-S\right)u\right)\\ &=\left(\left(S-S^*\right)u,Su\right)+\left(S^*u,\left(S-S^*\right)u\right)+\left(\left(S^*-S\right)u,Au\right)+\left(Au,\left(S^*-S\right)u\right)\\ &=\left(\left(S^*-S\right)u,\left(A-S\right)u\right)+\left(\left(A-S^*\right)u,\left(S^*-S\right)u\right)=0\end{aligned}$$

Burada $S_I\ell_2(\mathbb{N})\subset D(A)$ koşulunu kullanırsak,

$$\left(u,\left(S-S^*\right)\left(A-S\right)u\right)+\left(u,\left(A-S\right)\left(S^*-S\right)u\right)=0$$

yani,

$$\left(u,\left(S^*-S\right)\left(A-S\right)u\right)=\left(u,\left(A-S\right)\left(S^*-S\right)u\right).$$

Buradan ise,

$$\left(S^*-S\right)\left(A-S\right)=\left(A-S\right)\left(S^*-S\right)$$

elde edilir. Bu ise $A-S$ ile S_I operatörlerinin komutatif olduğudur.

Tersine, eğer $A-S$ ile S_I komutatif ise, L'nin normal olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnekler 2.2.10:

(1) $A:=S_R+\left(S_I+\alpha\right)^{-1}$, $\alpha\in[-1,1]$ kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}A^*=\left[S_R+\left(S_I+\alpha\right)^{-1}\right]^*&=S_R+\left[\left(S_I+\alpha\right)^{-1}\right]^*=S_R+\left[\left(S_I+\alpha\right)^*\right]^{-1}\\ &=S_R+\left(S_I+\alpha\right)^{-1}=A\end{aligned}$$

yani, $A=A^*$'dır. Ayrıca $A\notin B\left(\ell_2(\mathbb{N})\right)$ olduğu açıktır. Gerçekten, eğer $A\in B\left(\ell_2(\mathbb{N})\right)$ olsaydı, o halde

$$A-S_R=\left(S_I+\alpha\right)^{-1}\in B\left(\ell_2(\mathbb{N})\right)$$

olmak zorundadır. Fakat $\alpha\in[-1,1]=\sigma_c\left(S_I\right)$ olduğundan

$$\left(S_I+\alpha\right)^{-1}\notin B\left(\ell_2(\mathbb{N})\right).$$

Öyleyse $A \notin B(\ell_2(\mathbb{N}))$'dır.

Sonuç olarak

$$A - S = S_R + (S_I + \alpha)^{-1} - S_R - iS_I = (S_I + \alpha)^{-1} - iS_I .$$

olup $A - S$ ile S_I operatörleri komutatiftir. Böylece sonuncu teoreme göre $L = E - S + A$ operatörü normaldir.

(2) $A := S_R + S_I (S_I + \alpha)^{-1}$, $\alpha \in [-1,1]$, $\alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$A^* = \left[S_R + S_I (S_I + \alpha)^{-1} \right]^* = S_R + \left[S_I (S_I + \alpha)^{-1} \right]^* = S_R + \left[(S_I + \alpha)^{-1} \right]^* S_I$$

$$= S_R + S_I \left[(S_I + \alpha)^* \right]^{-1} = S_R + S_I (S_I + \alpha)^{-1} = A$$

yani, $A = A^*$'dır.

Öte yandan

$$A = S_R + (S_I + \alpha E - \alpha E)(S_I + \alpha)^{-1} = S_R + E - \alpha (S_I + \alpha)^{-1}$$

eşitliği

$$A - S_R - E = -\alpha (S_I + \alpha)^{-1}, \ \alpha \neq 0$$

bağıntısından $A \notin B(\ell_2(\mathbb{N}))$ olduğu açıktır. Buradan

$$A - S = S_R + S_I (S_I + \alpha)^{-1} - S_R - iS_I = S_I (S_I + \alpha)^{-1} - iS_I$$

olup $A - S$ operatörü S_I ile komutatiftir. Böylece son teoreme göre $L = E - S + A$ operatörü normaldir.

A operatörünün sınırsız olduğu durumda da [58, 65, 66] çalışmalarından kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

Teorem 2.2.11: $L = E - S + A$, $L : D(A) \subset \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ ve $S_1 \ell_2(\mathbb{N}) \subset D(A)$ olsun. L normal bir operatör ise, $L = f(S_I) - iS_I$ olacak şekilde bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu mevcuttur. Üstelik, eğer $f \in C(\sigma(S_I))$ ise, L operatörünün spektrumu

$$\sigma(L) = (f(\bullet) - i\bullet)([-1,1]) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = f(\lambda) - i\lambda, \ \lambda \in [-1,1]\}$$

şeklindedir.

Örnekler 2.2.12:

(1) $A = A^* : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$, A=$S_R$ olsun. O halde

$$L = E - S + A = E - S_R - iS_I + S_R = E - iS_I$$

olup $f(\lambda) = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Öyleyse sonuncu teoreme göre,

$$\sigma(L) = \{\ (1, -\lambda) : \lambda \in [-1,1]\ \}.$$

(2) $A = S_R + \sum_{j=0}^{n} \alpha_j S_I^j,\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ j = 0,1,.....,n$ alırsak,

$$L = E - S + A = E - S_R - iS_I + S_R + \sum_{j=0}^{n} \alpha_j S_I^j = E + \sum_{j=0}^{n} \alpha_j S_I^j - iS_I = f(S_I) - iS_I,$$

burada $f(\lambda) = 1 + \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda^j,\ \alpha_j \in \mathbb{R}$.

O halde sonuncu teoreme göre,

$$\sigma(L) = \{ f(\lambda) - i\lambda : \lambda \in [-1,1]\ \} = \left\{ \left(1 + \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \lambda^j, -\lambda\right) : \lambda \in [-1,1]\ \right\}.$$

$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = ... = \alpha_n = 0$ alınırsa,

$$\sigma(L) = \{\ (\lambda, -\lambda) : \lambda \in [-1,1]\ \}.$$

$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = \alpha_4 = ... = \alpha_n = 0$ alınırsa,

$$\sigma(L) = \{\ (\lambda^2, -\lambda) : \lambda \in [-1,1]\ \}.$$

$\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_4 = ... = \alpha_n = 0$ alınırsa,

$$\sigma(L) = \{\ (\lambda^3, -\lambda) : \lambda \in [-1,1]\ \}.$$

(3) $A = S_R + \cos(S_I)$ veya $A = S_R + \sin(S_I)$ olarak alınırsa,

$$L = E - S + A = E - S_R - iS_I + S_R + \cos(S_I) = E - iS_I + \cos(S_I) = f(S_I) - iS_I$$

veya

$$L = E - S + A = E - S_R - iS_I + S_R + \sin(S_I) = E - iS_I + \sin(S_I) = g(S_I) - iS_I,$$

burada $f(\lambda) = 1 + \cos(\lambda),\ g(\lambda) = 1 + \sin(\lambda)$.

O halde sonuncu teoreme göre

$$\sigma(L) = \{ f(\lambda) - i\lambda : \lambda \in [-1,1]\ \} = \{\ (1 + \cos(\lambda), -\lambda) : \lambda \in [-1,1]\ \}$$

veya

$$\sigma(L)=\{\ g(\lambda)-i\lambda:\lambda\in[-1,1]\ \}=\{\ (1+\sin(\lambda),-\lambda):\lambda\in[-1,1]\ \}$$

şeklindedir.

(4) $A=S_R+e^{aS_I}$, $a\in\mathbb{R}$ alınırsa,

$$L=E-S+A=E-S_R-iS_I+S_R+e^{aS_I}=E-iS_I+e^{aS_I}=f(S_I)-iS_I,$$

burada $f(\lambda)=1+e^{a\lambda}$.

O halde sonuncu teoreme göre

$$\sigma(L)=\{f(\lambda)-i\lambda:\lambda\in[-1,1]\ \}=\{\ (1+e^{a\lambda},-\lambda):\lambda\in[-1,1]\ \}$$

şeklindedir.

Bu bölümde en son olarak vektör fonksiyonların $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ (burada H bir Hilbert uzayıdır) Hilbert uzayında birinci mertebeden selfadjoint operatör katsayılı lineer diferensiyel operatörlerin normalliğini araştıracağız.

Şimdi $A:D(A)\subset H\to H$, $A=A^*\geq 0$ ve $A^{1/2}W_2^1(H,\mathbb{R}_+)\subset W_2^1(H,\mathbb{R}_+)$ olmak üzere, $T:L_2(H,\mathbb{R}_+)\to L_2(H,\mathbb{R}_+)$, $\mathrm{D}(T)=\{u\in W_2^1(H,\mathbb{R}_+):u(0)=0\}$, $Tu:=u'+Au$ operatörünü göz önüne alalım.

Bu durumda aşağıdaki sonuç ispatlanabilir.

Teorem 2.2.13: T operatörü $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ uzayında maksimal formal normal bir operatördür.

İspat: İlk önce T operatörünün $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ uzayında eşleniğini bulalım.

Her $u(t)\in D(T)$ ve $v(t)\in W_2^1(H,\mathbb{R}_+)$ için

$$\begin{aligned}(Tu,v)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}&=(u'+Au,v)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}=(u',v)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+(Au,v)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}\\&=\lim_{t\to\infty}(u(t),v(t))_H-(u(0),v(0))_H+(u,-v'+Av)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}\\&=(u,T^*v)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

olup $T^*v=-v'+Av$, $T^*:L_2(H,\mathbb{R}_+)\to L_2(H,\mathbb{R}_+)$, $D(T^*)=W_2^1(H,\mathbb{R}_+)$ şeklindedir.

Böylece

$$D(T)\subset D(T^*).$$

Öte yandan her $u\in D(T)$ için

$$\|Tu\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}=(u'+Au,u'+Au)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}$$

$$=\|u'\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+(u',Au)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\left(Au,u'\right)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\|Au\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}$$

$$=\|u'\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\left(\left(A^{1/2}u\right),\left(A^{1/2}u\right)\right)'_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\|Au\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}$$

$$=\|u'\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\|Au\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}$$

ve

$$\|T^*u\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}=\|u'\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}-\left(u',Au\right)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}-\left(Au,u'\right)_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\|Au\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}$$

$$=\|u'\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}-\left(\left(A^{1/2}u\right),\left(A^{1/2}u\right)\right)'_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\|Au\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}$$

$$=\|u'\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}+\|Au\|^2_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}$$

olduğundan her $u\in D(T)$ için

$$\|Tu\|_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}=\|T^*u\|_{L_2(H,\mathbb{R}_+)}.$$

Sonuçta T operatörünün $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ uzayında formal normal olduğu bulunur. Şimdi T'nin maksimal formal normal olduğunu gösterelim. Onun ispatı için ise

$$T_0u:=-iu',\ T_0:L_2(H,\mathbb{R}_+)\to L_2(H,\mathbb{R}_+),\ D(T_0):=\left\{u\in W_2^1(H,\mathbb{R}_+):u(0)=0\right\}$$

şeklinde tanımlanan operatörün maksimal simetrik olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk aşamada T_0 operatörün defekt sayılarını hesaplayalım. $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ uzayında

$$T_0^*u=-iu'=\pm iu,$$

yani

$$u'=\pm u$$

denklemlerinin çözümleri sırasıyla

$$u_+(t)=ce^t,\ c\in\mathbb{C},$$
$$u_-(t)=ce^{-t},\ c\in\mathbb{C}$$

şeklindedir. $c \neq 0$ için $u_+ \notin L_2(H, \mathbb{R}_+)$, fakat her $c \in \mathbb{C}$ için $u_- \in L_2(H, \mathbb{R}_+)$ olduğundan T_0 operatörünün defekt sayıları $(1,0)$ şeklindedir. Sonuncu ve [15] çalışmasından T_0 operatörünün $L_2(H, \mathbb{R}_+)$ uzayında maksimal simetrik olduğu bulunur. Öyleyse, T operatörü $L_2(H, \mathbb{R}_+)$ uzayında maksimal formal normaldir [8, 9].

Not: Teorem 2.2.9 ve Teorem 2.2.13 kıyaslandığında $\mathbb{R}_+$'da birinci mertebeden fark ve diferensiyel operatörler için sonuçların örtüşmediği kolayca görülür.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın sonuçları biri ulusal ve diğeri de uluslararası olmak üzere iki konferansta sunulmuş [44, 45] ve bildiri olarak yayınlanmıştır. Bu araştırmalar çerçevesinde aşağıdakiler söylenebilir:

1. Dizilerin $\ell_2(\mathbb{Z})$ ve $\ell_2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayında birinci mertebeden selfadjoint operatör katsayılı lineer fark operatörlerinin normalliği ve spektrum yapısı incelenmiş ve kesin sonuçlara ulaşılmıştır;
2. Vektör fonksiyonların $L_2(H,\mathbb{R})$ ve $L_2(H,\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayında birinci mertebeden selfadjoint operatör katsayılı diferensiyel operatörlerin normalliği incelenmiş ve kesin sonuçlara ulaşılmıştır;
3. Diskret ve sürekli durumda alınan sonuçların örtüşüp örtüşmediği araştırılmıştır;
4. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

4. ÖNERİLER

1. Tezde alınan sonuçlar birinci mertebeden lineer fark denklemler teorisinde uygulanabilir;

2. Operatör katsayıların normal olduğu durumlarda uygun araştırmalar serbest inceleme konusu olabilir;

3. Tezde bakılan lineer fark operatörlerinin terslenebilirliği ayrıca bir inceleme konusu olarak araştırılabilir;

4. Tezde bakılan lineer normal fark operatörlerinin ayrık ve sürekli spektrum yapısının normal operatör katsayısının uygun spektrum yapısı ile ilişkisi tartışılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Agarwal, P.R., On multipoint boundary value problems for discrete equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 96 (1983) 520-534.

2. Agarwal, P.R. ve Wong, P.J.Y., Advanced Topics in Difference Equations, Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.

3. Aleksandran, R.A., Berezanskii, Yu.M., Ilin, V.A. ve Kostyuchenko, A.G., Some questions of spectral theory for equations with partial derivative, "Diff. Equ. with Partial Derivative", Moscow, Nauka, 1970.

4. Aliprantis, D. ve Burkinshaw, O., Principles of Real Analysis, Academic Pres, New York, 1998.

5. Bairamov, E. ve Adıvar, M., Spectral Properties of Non-selfadjoint Difference Operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 261 (2001) 461-478.

6. Bairamov, E. ve Cakar, O., Spectral Analysis of Non-selfadjoint Discrete Schrödinger Operators with Spectral Singularities, Math. Nachr., 231 (2001) 89-104.

7. Bairamov, E. ve Cakar, O., Non-selfadjoint Difference Operators and Jacobi Matrices With Spectral Singularities, Math. Nachr., 229 (2001) 5-14.

8. Biriuk, G. ve Coddington, E.A., Normal extensions of unbounded formally normal operators, J. Math. And Mech., 13 (1964) 617-638.

9. Biyarov, B.N. ve Otelbaev, M., Mat. Zametki, 53, 5 (1993) 21-28.

10. Bruk**,** V.M., Some problems of the Spectral theory of the linear differential equations for first order with unbounded operator coefficient, Functional Analysis and its applications (Moscow), 1 (1973) 15-25.

11. B.Sz.- Nagy, Spectraldarstellung linearen Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergeb. Math., 5 (1942) 33.

12. Coddington, E.A., Extension theory of formally normal and symetric subspaces, Mem. Amer. Math. Soc., 134 (1973) 1-80.

13. Davis, R.H., Singular normal differential operators, Tech. Rep., Dep. Math., California Univ., 10, 1955.

14. Dunford, N. ve Schwartz, J.T., Linear operators, vol. I, Interscience, New York, London, 1958.

15. Dunford, N. ve Schwartz, J.T., Linear Operators, vol. II, Interscience, New York, 1963.

16. Falb, P.L.ve De Jong, J.L., Some Succussive Approximation Methods in Control and Oscillation Theory, Academic Press, New York, 1969.

17. Gaines, R., Difference equations associated with boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations, SIAM J. Numer. Anal., 11 (1974) 411-434.

18. Gohberg, I.C. ve Krein, M.G., Introduction to the theory of linear non – self adjoint operators, Amer. Math. Soc., Providence R.I, 1969.

19. Gohberg, I.C. ve Goldberg, S., Kaashoek, M.A., Basic Classes of Linear Operators, Birkhauser, Berlin, 2003.

20. Gorbachuk, M.L., Self – adjoint boundary value problems for the differential equations for second order with the unbounded operator coefficient, Functional Analysis and its applications (Moscow), 5, 1 (1971) 10 – 21.

21. Gorbachuk, V.I. ve Gorbachuk, M.L., Boundary value problems for operator differential equations, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991.

22. Halmos, P.R., Introduction to Hilbert Space and The Theory of Spectral Multiplicity, Chelsca, New York, 1951.

23. Hille, E. ve Phillips**,** R.S., Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 31, 1957.

24. Hirsh, F. ve Lacombe, G., Elements of Functional Analysis, Verlag, New York, 1999.

25. Hunter, J.K. ve Nachtergaele, B., Applied Analysis, University of California, 2000.

26. Ismailov, Z.I., Formally-normal extensions of an operator, Differential Equation, Minsk, 28, 5 (1992) 905–907.

27. Ismailov, Z.I., Normal boundary value problem for differential operator equation for tree point, Siberian Mathematical Journal, Novosibirsk, 35, 5 (1994) 1058–1061.

28. Ismailov, Z.I., Normal extensions of differential operators for second order, Differential Equation, Moskow, 30, 10 (1994) 1823–1824.

29. Ismailov, Z.I., Normal boundary value problems of differential equation for second order with bounded operator potential, Differential Equation, Minsk, 30, 11 (1994) 2018-2019.

30. Ismailov, Z.I., Description normal extensions of unbounded formally normal operator, Inst. of Math. and Mech. AS Azerb., Baku, III, XI (1995) 128-136.

31. Ismailov, Z.I. ve Maksudov, F.G., Normal boundary value problems for differential equations of higher order, Turkish Journal of Mathematics, 20, 2 (1996) 141–151.

32. Ismailov, Z.I., Certain necessary and sufficient conditions of normality of the differential operators, Proc. Ins. Math. and Mech. AS of Azer., Baku, XII, IV, (1996) 32–38.

33. Ismailov, Z.I. ve Maksudov, F.G., Normal Boundary Value Problems for Differential Equation of First Order, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 5, 2 (1996) 659-661.

34. Ismailov, Z.I., Discreteness of the spectrum of the normal differential operators for first order, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 57, 1 (1998) 32–33.

35. Ismailov, Z.I. ve Maksudov, F.G., On the one necessary condition for normality of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 59, 3 (1999) 422-424.

36. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., On the normality problem for the first order differential operators, Proc. Ins. Math. and Mech. AS of Azer., Baku, X (1999) 61-66.

37. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., On the theory of normal extensions of differential operators of the first order, Proc. Ins. Math. and Mech. AS of Azer., Baku, XI, (1996) 86–88.

38. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., Some necessary condition for normality of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 62, 2 (2000) 277–279.

39. Ismailov, Z.I. ve Karatash, H., On a class of first order normal differential operators, Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of physical technical and mathematical sciences, XX, 4 (2000) 115–122.

40. Ismailov, Z.I., On the normality of first order differential operators, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 51, 2 (2003) 139–145.

41. Ismailov, Z.I., Discretness of the spectrum of the normal differential operators of second order, Doklady NAS of BELARUS, 49, 3 (2005) 5–7.

42. Ismailov, Z.I., On the coefficients of normal differential operators of higher order, Transactions of the Azerbaijan National Academy of Sciences, Series of physical technical and mathematical sciences, 25, 4 (2005) 55–62.

43. Ismailov, Z.I., Compact inverses of first-order normal differential operators, J. Math. Anal. And App., USA, 320, 1 (2006) 266-278.

44. Ismailov, Z.I. ve Oztürk, R., Birinci mertebeden fark operatörlerin normalliği, 3. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu, Mayıs 2008, Ankara, Bildiri Kitabı, 45.

45. Ismailov, Z.I. ve Oztürk, R., On the Spectrum of normal difference operators of first order, 14. International Conference on Difference Equations and Applications, July 2008, 117, İstanbul, Bahçeşehir University, Turkey.

46. Keller, H. B., Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems, Gınn (Blaisdell), Boston, 1968.

47. Kilpi, Y., Über lineare normale Transformationen in Hilbertschen Raumes, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI 154, 1953.

48. Kilpi, Y., Über die Anzahl der hypermaximalen normalen fort setzungen normalen Transformationen, Ann. Univ. Turkuensis. Ser. AI 65, 1963.

49. Kilpi, Y., Über das komplexeMomenten Problem, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI 236, 1957.

50. Kokebaev, B.K. ve Otarov, Kh.T., Izv. Acad. Nauk Kaz. (SSR) 5 (1985) 38-42.

51. Krein, M.G., Theory of self-adjoint extensions of lower bounded operators and its applications II, Matem. Sb., 21, 63 (1947) 365-404.

52. Krein, S.G., Linear Differential Equations in Banach Space, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971.

53. Lees, M. ve Bramble, Ed., Discrete methods for nonlinear two-point boundary value problems, Numerical Solution of Partial Differential Equations, pp.59-72, Academic Pres, New York, 1966.

54. Levitan, B.M., Some problems of spectral theory of differential operators, International congress of mathematician in Nitz, Moscow, Nauka, 1972.

55. Lions, J.L., Equations differentielles operationuelles et problems aux limites, Berlin, Springer-Verlag, 1961, 292p.

56. Lusternik, L. ve Sobolev, V.I., The Elements of Functional Analysis, Moscowa,Nauka 1965.

57. Narici, L. ve Bachman, G., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1972.

58. Neumann, J.von, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann., 102 (1929-1930) 49-131.

59. Neumann, J.von, Annals. Of Math., Uber Funktionen von Funktionaloperatoren 32, (1931).

60. Palmer, T.W., Unbounded Normal Operators on Banach Spaces, American Math. Society 133, 2 (1968) 385–414.

61. Reed, M. ve Simon, B., Methods of modern mathematical physics, Functional analysis, Academic Pres, New York, 1977.

62. Rofe-Beketov, F.S., Self-adjoint extensions differential operators in the space of vektor-functions, DAN, SSSR, 184, 5 (1969) 1034-1037.

63. Rudin, W., Functional Analysis , McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

64. Rynne, Bryan P. ve Youngson, M.A., Linear Functional Analysis, Verlag, London, 2008.

65. Smirnov, V.I., A Course of Higher Mathematics**,** Addison- Wesley Publishing Company, 5, 635, 1964.

66. Solomjak, M. Z. ve Birman, M. S., Spektral Teory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, D. Reidel Publishing Company, Holland, 1986

67. Stochel, J. ve Szafraniec, F.H., On normal extensions of unbounded operators, I, Oper. Theory Adv. Apply. 14 (1985) 31-55.

68. Stochel, J. ve Szafraniec, F.H., On normal part of an unbounded operators, Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A 92 (1989) 459-503.

69. Vischik, M.I., On the general boundary problems for eliptic differential equations, Trans. of Moscow Math. Soc., I (1952) 187-246.

70. Wilson, R.H., Non-selfadjoint difference operators and their spectrum, Proc. R. Soc. A., 461 (2005) 1505-1531.

ÖZGEÇMİŞ

Rukiye ÖZTÜRK, 17.06.1984 tarihinde Samsun'da doğdu. İlköğrenimini Samsun Fatih İlkokulu'nda, orta öğrenimini Samsun İmam Hatip Lisesi'nde, lise öğrenimini ise Samsun 19 Mayıs Lisesi'nde tamamladı.

2002–2003 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 2006 yılında Matematik Bölümü lisans eğitimini ikincilikle bitirdi.

2006–2007 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Tezli Yüksek Lisans programına kabul edildi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesinin yüksek lisans İngilizce hazırlık programını tamamladı. 2007–2008 Eğitim-Öğretim yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı. İyi derecede İngilizce bilir.