KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

n-BOYUTLU ÖKLİD VE ORTOGONAL GEOMETRİLERDE NOKTALAR SİSTEMLERİNİN DENKLİK PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülistan KAYA

ŞUBAT 2008
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

n-BOYUTLU ÖKLİD VE ORTOGONAL GEOMETRİLERDE NOKTALAR SİSTEMLERİNİN DENKLİK PROBLEMLERİ

Gülistan KAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14.01.2008
Tezin Savunma Tarihi : 06.02.2008

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ziya YAPAR
Jüri Üyesi :Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ

Enstitü Müdürü V.: Doç. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2008

ÖNSÖZ

”n-Boyutlu Öklid ve Ortogonal Geometrilerde Noktalar Sistemlerinin Denklik Problemleri” adlı bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında “Yüksek Lisans Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV (Cevat HACIEV)’e en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Çalışmalarımın yönlendirilmesinde yardımcı olan Sayın Murat KARATAŞ’a, Sayın Nurgül OKUR’a, Sayın İdris ÖREN’e , Sayın Hüsnü Anıl ÇOBAN ‘a, Sayın Muhsin İNCESU’ya ve aileme teşekkür ederim.

Gülistan KAYA

Trabzon 2008

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

n-Boyutlu Öklid ve Ortogonal Geometrilerde Noktalar Sistemlerinin Denklik Problemleri

Tezde, n-boyutlu R öklid uzayının tüm izometrileri grubu; Iz(n) ve bu grubun önemli altgrupları olan ortogonal dönüşümler grubu; O(n), dönmeler ve ötelemelerle oluşturulan; SIz(n) grubu ve dönmelerle oluşturulan SO(n) grupları ile Rn'deki noktalar sistemleri için denklik problemi incelendi. Bu problem Iz(n), O(n), SIz(2) ve SO(2) grupları için İnvaryant yöntemleri kullanılarak çözüldü. Iz(n) grubu için tezde elde edilen denklik şartı daha önce Berger'in "Geometry I" adlı kitabında verilen denklik şartından farklı olarak bulundu.

Anahtar Kelimeler: Öklid Geometrisi, İzometri, Ortogonal Grup, İnvaryant.

.

SUMMARY

Equivalence Problems of Systems of Points for n-Dimensional Euclidean and Orthogonal Geometries

In this thesis, Equivalence Problems are investigated for all isometries group of n-dimensional Euclidean spaces; Iz(n) and their important subgroups, group of orthogonal transformation; O(n), group of translation and rotation; SIz(n), group of rotation SO(n) with systems of points in Rn. The equivalence problem has been solved for following groups Iz(n), O(n), SIz(2), SO(2) with respect to invariant theory.Equivalence condition of Iz(n) in this thesis was found differently given equivalance condition in the book that the name is “ Geometry I “ of Berger.

Key Words: Euclidean Geometry, Isometry, Orthogonal Group, Invariant.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\left(a_{ij}\right);\ i, j = 1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ a_{ij} \in \mathbb{R}$	$n \times n$ tipinde reel katsayılı bir matris
$A^T = \left(a_{ji}\right)$	$A = \left(a_{ij}\right)$ matrisinin transpozesi
$boyE$	E reel vektör uzayının boyutu
$D_{yx} f$	Polarizasyon operatörü
$\det G(x_1, x_2, ..., x_m)$	Gram matrisinin determinantı
E	$n \geq 1$ boyutlu reel vektör uzayı
$\varepsilon(n)$	Öklid izometrileri grubu
f^*	$= \rho^*.D_{x^{\beta_1} x^{\alpha_1}} f$
$G(x_1, x_2, ..., x_m)$	$\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \ldots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix};\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m \in \mathbb{R}^n$ 'lerin Gram matrisi
$G(E)$	$= \{A : E \to E \mid A$ tersi mevcut olan lineer operatör$\}$
$G(x)$	x noktasının G - *yörünge*'si
$G : K$	G grubunun K kümesi üzerindeki etkisi
$GL(n,\ \mathbb{R})$	$n \times n$ tipideki determinantı sıfır olmayan tüm matrislerin oluşturduğu küme
$Iz(n)$	Tüm izometriler kümesi
$LIz(n)$	Tüm lineer izometriler kümesi
M_F	Ortonormal sisteme göre F dönüşümünün matrisi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	Sayma sayılar kümesi
$O(n)$	Ortogonal dönüşümler grubu
$O_-(n)$	$= \{g \in O(n) : \det g = -1\}$
$O_+(n)$	$= \{g \in O(n) : \det g = 1\}$
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	2 boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$	$=\{(x,\ y): x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n\}$
$\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$ (m tane)	$=\{(x_1,\ ...,\ x_n): x_i \in \mathbb{R}^n,\ \ i=1,\ 2,\ ...,\ n\}$
$\mathbb{R}[x]$	x bilinmeyenli polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x)$	x bilinmeyenli rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[x]^G$	G - *invaryant* polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x)^G$	G - *invaryant* rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[x_1,\ ...,\ x_n]$	n tane bilinmeyenli reel katsayılı polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x_1,\ ...,\ x_n)$	n tane bilinmeyenli reel katsayılı rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}[x_1,\ ...,\ x_n]^G$	n tane bilinmeyenli reel katsayılı G - *invaryant* polinomlar halkası
$\mathbb{R}(x_1,\ ...,\ x_n)^G$	n tane bilinmeyenli reel katsayılı G - *invaryant* rasyonel fonksiyonlar cismi
$\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^G$	m tane noktalar sisteminin reel katsayılı G - *invaryant* polinomlar halkası
$\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)^G$	m tane noktalar sisteminin reel katsayılı G - *invaryant* rasyonel fonksiyonlar cismi
$\operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_n)$	$(i_1,\ ...,\ i_n)$ permütasyonunun çift ya da tek olmasına göre 1 ya da -1'e eşittir.
$SO(n)$	Özel ortogonal dönüşümler grubu
S_r	$=\{(r_1,\ ...,\ r_m): r = r_1 + ... + r_m,\ r_i \geq 0,\ i=1,\ ...,\ m\}$
$T(n)$	Tüm ötelemelerin oluşturduğu küme

$T(r_1, r_2, ..., r_m)$	$(r_1, r_2, ..., r_m)$'lere bağlı olan bir açık önerme
$X_1 \cup X_2$	X_1 ve X_2 kümelerinin birleşimi
$\lVert x_1 ... x_m \rVert$	$x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\begin{array}{l} x_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}) \\ x_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}) \\ \vdots \\ x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}) \end{array}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$ matrisi
$[x_1 ... x_n]$	$\lVert x_1 ... x_n \rVert$ matrisinin determinantı
$x \perp y$	İki vektörün ortogonalliği
$x \overset{G}{\sim} y$	x elemanı y elemanına G-*denk* 'tir
$\{x_\tau, \ \tau \in T\}$	T kümesiyle indekslenen noktalar ailesi
$\{x_\tau, \ \tau \in T\} \overset{G}{\sim} \{y_\tau, \ \tau \in T\}$	$\{x_\tau, \ \tau \in T\}$ ailesi $\{y_\tau, \ \tau \in T\}$ ailesine G-*denk* 'tir
$\Delta_{yx} f$	$= \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$
Ωf	$\sum_{i_1, ..., i_n} \operatorname{sgn}(i_1, ..., i_n) \cdot \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)} ... \partial x_{i_1}^{(1)}}$
$\wp$	$= D_{x^{\beta_q} x^{\alpha_q}} ... D_{x^{\beta_2} x^{\alpha_2}}$
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
♦	İspatın sonu

1.GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Öklid (M.Ö.365 – M.Ö.300) matematik kültürünü matematiğin özlerini çıkarıp sistemli bir hale getiren matematikçilerden biridir. “Temel Öğeler” adlı yapıtıyla, son zamanlara kadar geçerliliğini koruyan matematiğin temellerini atmıştır. Öklid, kendinden önce gelenlerin eserleriyle kendi öz yapıtlarını da derleyerek bugün Öklid geometrisi adıyla bilinen geometriyi aksiyomlarına dayanarak geliştirmiştir.

Invaryant kavramı ve invaryantlar teorisi 1850 yılından itibaren gelişmeye başlamıştır. Invaryantlar teorisi, özel olarak, cebirsel yöntemlerle geometri problemleriyle uğraşıyor.

1872’de F. Klein “Erlanger Programı ‘ ndaki konuşmasından geometrilerin bu geometri grubunun invaryant teorisi olduğunu ileri sürmüştür. Bu açıdan Öklid geometrisi aslında Öklid uzayındaki tüm izometriler grubunun invaryant teorisidir. Afin geometri ise n-boyutlu afin uzayındaki tüm afin dönüşümler grubunun invaryant teorisidir.

Invaryant teorisinin gelişimi 1850’ lerden başlamıştır. Bu teorinin gelişmesinde İngiliz matematikçisi; Keyley, Alman matematikçileri; Boole, Gordan, David Hilbert, H.Weyl, Fransız matemakçisi Hermit gibi matematikçilerinin çalışmaları çok önemlidir. Invaryant teorisinin gelişmesi halen devam etmektedir.

Birbirine G –denk olan iki nokta ailesi aldığımızda bunların herhangi bir G-invaryant polinomlar (rasyonel fonksiyonlar) için değerleri eşit çıkmaktadır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Bunun ne zaman doğru olduğu problemi denklik problemidir.

Tezde, Öklid geometrisi gruplar açısından incelenerek, bu geometriyi ortaya çıkaran 0(n) SO(n), Iz(n), SIz(n) gruplarının denklik problemi incelenmiştir.

Tezde aşağıdaki problemler araştırılmıştır:

1- $\{x_1,...,x_m\}$ ve $\{y_1,...,y_m\}$ noktalar sisteminin 0(n) grubuna göre denklik problemi.

2- $\{x_1,...,x_m\}$ ve $\{y_1,...,y_m\}$ noktalar sisteminin SO(2) grubuna göre denklik problemi.

3- $\{x_1,...,x_m\}$ ve $\{y_1,...,y_m\}$ noktalar sisteminin Iz(n) grubuna göre denklik problemi.

4- $\{x_1,...,x_m\}$ ve $\{y_1,...,y_m\}$ noktalar sisteminin SIz(2) grubuna göre denklik problemi.

Konunun güncelliği:

1-Ortogonal geometride noktaların denklik problemi teorem 18 ‘de incelenmiştir. Bu yöntemin önemi, Öklid geometrisi, benzerlik geometrisi ve diğer geometrilerde de kullanılabilmesidir.

2- Noktaların denklik probleminin çözümü, doğrular, eğriler, yüzeyler sisteminin denklik problemlerinin incelenmesinde önemlidir.

3- Noktaların denklik probleminin çözümü nesne tanıma problemlerinde ve bilgisayar ile ilgili tanıma problemlerinde önemlidir.

1.2. Öklid Uzayı

Tanım 1: E, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

$\forall x,\ y,\ z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için;

1) $\varphi(x+y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

2) $\varphi(\lambda.x, y) = \lambda.\varphi(x, y)$

3) $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

4) $\varphi(x, x) \geq 0$

5) $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bu şekilde tanımlanan φ dönüşümüne E 'de skaler (iç) çarpım denir. (E, φ) ikilisine de iç çarpımlı vektör uzayı denir.

Tanım 2: Sonlu boyutlu iç çarpımlı vektör uzayına öklid uzayı denir.

Örnek 1: $E = \mathbb{R}$ alalım. $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x,\ y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi(x, y) = x.y$ dönüşümü tanımlayalım. $(\mathbb{R},\ \varphi)$ 'nin öklid uzayı olduğunu gösterelim:

$\forall x,\ y,\ z, \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

1) $\varphi(x+y, z) = (x+y).z = x.z + y.z = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

2) $\varphi(\lambda.x, y) = (\lambda.x).y = \lambda.(x.y) = \lambda.\varphi(x, y)$

3) $\varphi(x, y) = x.y = y.x = \varphi(y, x)$

4) $\varphi(x, x) = x.x = x^2 \geq 0$

5) $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x.x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow \varphi(x, x) = 0$ olduğu açıktır.

Örnek 2: $E = \mathbb{R}^2$ alalım. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1,\ y_1)$, $y = (y_1,\ y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\varphi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_2$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R}^2,\ \varphi)$ 'nin öklid olduğunu gösterelim.

1)**φ(x**+y,z)=($x_1 + y_1, z_1) + (x_2 + y_2, z_2) = (x_1, z_1) + (y_1, z_1) + (x_2, z_2) + (y_2, z_2)$

=**{(** $x_1, z_1) + (x_2, z_2)\} + \{(y_1, z_1) + (y_2, z_2)\} = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

2) $\varphi(\lambda x, y) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 = \lambda[x_1 y_1 + x_2 y_2] = \lambda\varphi(x, y)$

3) $\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \varphi(y, x)$

4) $\varphi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$

5) $\varphi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

olduğundan $(\mathbb{R}^2,\ \varphi)$ öklid uzayıdır.

Örnek 3: $E = \mathbb{R}^n$ alalım. $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n),\ y = (y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R}^n,\ \varphi)$ öklid uzayıdır.

Örnek 4: $E = \mathbb{R}$ alalım. $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\phi(x, y) = x^2 . y$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R},\ \phi)$'nin öklid uzayı olmadığını gösterelim:

Gerçekten $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$\phi(x + y, z) = (x + y)^2 . z = x^2 . z + y^2 . z + 2.x.y.z$ olur. Ama iç çarpım tanımına göre $\phi(x + y, z) = x^2 . z + y^2 . z$ olmalıdır. Bunun için $2.x.y.z = 0$ olması gerekir. Buradan $x = 0$ veya $y = 0$ veya $z = 0$'dır. Fakat bu şart tüm x, y ve z'ler için sağlanmadığından, $\phi(x + y, z) \neq x^2 . z + y^2 . z$ olup, ϕ iç çarpım değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{R},\ \phi)$ öklid uzayı değildir.

Tanım 3: (E_1, φ_1) ve (E_2, φ_2) öklid uzayları olmak üzere, $F : E_1 \to E_2$ dönüşümü için;

i) F, birebir ve örten

ii) F, lineer

iii) $(F(x), F(y))_2 = (x, y)_1$

ise (E_1, φ_1) ve (E_2, φ_2) öklid uzaylarına izomorf denir.

Önerme 1: (E_1, φ_1) ve (E_2, φ_2) öklid uzaylarının izomorf olması için gerek ve yeter şart $boyE_1 = boyE_2$ olmasıdır.

Sonuç 1: (E, φ) öklid uzayı ve $boyE = n$ olsun. O halde (E, φ) öklid uzayı, $(E^n,\ \varphi)$ öklid uzayına izomorftur.

Tanım 4: E^n öklid uzayında $x \in E^n$ için $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ sayısına x vektörünün normu denir ve $\|x\|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 5: $\|x\| = 1$ ise, x vektörüne birim vektör denir.

Tanım 6: E^n öklid uzayında $\langle x, \mathrm{y}\rangle = 0$ ise x ve y vektörlerine ortogonal denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Lemma 1: E^n 'de tanımlanan norm aşağıdaki aksiyomları sağlar:

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\lambda . x\| = |\lambda| . \|x\|$

İspat:

i) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ olduğu açıktır.

iii) $\|\lambda . x\| = \sqrt{\langle \lambda . x, \lambda . x\rangle} = \sqrt{(\lambda . x_1)^2 + (\lambda . x_2)^2 + \ldots + (\lambda . x_n)^2} =$

$$= \sqrt{\lambda^2 . x_1^2 + \lambda^2 . x_2^2 + \ldots + \lambda^2 . x_n^2} = \sqrt{\lambda^2 . (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} =$$

$$= |\lambda| . \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = |\lambda| . \|x\| \ \blacklozenge$$

Tanım 7: $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere, $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset E^n$ sistemine ortogonal sistem denir.

Teorem 1: $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset E^n$ ortogonal sistem olsun. Bu takdirde;

$\left\| \sum_{i=1}^{m} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2$ (Pisagor Teoremi)'dir.

İspat: $m = 2$ alalım.

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + 2.\underbrace{\langle x_1, x_2\rangle}_{0} + \langle x_2, x_2\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle =$$

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

$m = k$ için;

$\left\|x_1 + x_2 + ... + x_k\right\|^2 = \left\|x_1\right\|^2 + \left\|x_2\right\|^2 + ... + \left\|x_k\right\|^2$ eşitliği doğru olsun.

$m = k+1$ için de doğruluğunu gösterirsek ispat biter. Şimdi bunu gösterelim:

$$\left\|\underbrace{x_1 + x_2 + ... + x_k}_{A} + x_{k+1}\right\|^2 = \left\|A + x_{k+1}\right\|^2 = \left\langle A + x_{k+1}, A + x_{k+1}\right\rangle =$$

$$= \left\langle A, A\right\rangle + 2.\underbrace{\left\langle A, x_{k+1}\right\rangle}_{0} + \left\langle x_{k+1}, x_{k+1}\right\rangle = \left\|A\right\|^2 + \left\|x_{k+1}\right\|^2 =$$

$$= \left\|x_1 + x_2 + ... + x_k\right\|^2 + \left\|x_{k+1}\right\|^2 =$$

$$= \left\|x_1\right\|^2 + \left\|x_2\right\|^2 + ... + \left\|x_k\right\|^2 + \left\|x_{k+1}\right\|^2$$

$Burada, A \perp x_{k+1}$

$\langle A, x_{k+1}\rangle = \langle x_1 + x_2 + ... + x_k, x_{k+1}\rangle = \langle x_1, x_k\rangle + ... + \langle x_k, x_{k+1}\rangle = 0$

♦

Önerme 2: $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ortogonal sistem ve $x_i \neq 0, i = 1, 2, ..., m$ ise $x_1, x_2, ..., x_m$ vektörleri lineer bağımsızdır.

İspat: Farz edelim, bazı $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ için $\lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + ... + \lambda_m.x_m = 0$ olsun. $\left\langle x_i, \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + ... + \lambda_m.x_m\right\rangle = \lambda_i.\left\langle x_i, x_i\right\rangle$ olur. Burada $x_i \neq 0,\ i = 1, 2, ..., m$ olduğundan $\left\langle x_i, x_i\right\rangle \neq 0$ 'dır. O halde; $\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, ..., m$ olur. Bu bize $x_1, x_2, ..., x_m$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterir. ♦

Tanım 8:

$$\left\langle x_i, x_j\right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \qquad i, j = 1, 2, ..., m$$

ise sisteme ortonormal sistem denir.

Örnek 5: $x, y \in \mathbb{R}^2$ alalım. x=(1,0) ve y=(0,1) seçelim. Bu takdirde $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ olduğundan $\langle x, x\rangle = 1, \langle x, y\rangle = 0, \langle y, y\rangle = 1$ olarak bulunur. Burada $\langle x, y\rangle$ ortonormal bir sistem oluşturur.

Teorem 2: Keyfi öklid uzayında ortonormal taban vardır.

İspat: E keyfi bir öklid uzayı $boyE = m$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ bu uzayın bir tabanı olsun. $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri yardımıyla $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ortonormal sistemini elde edeceğiz.

1) $m=1$ için teorem doğrudur. Çünkü x_1 lineer bağımsız olduğundan $x_1 \neq 0$ olup; $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ ortonormal tabanı vardır.

2) $m=2$ alalım. $x_1 \neq 0$ olup; $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ birim vektördür. $y_2 = \beta_{21}.e_1 + x_2$ seçelim ve $\langle e_1, y_2 \rangle = 0$ olacak şekilde β_{21}'i bulalım:

$\langle e_1, y_2 \rangle = \langle e_1, \beta_{21}.e_1 + x_2 \rangle = 0 \Rightarrow \beta_{21}.\underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{1} + \langle e_1, x_2 \rangle = 0 \Rightarrow \beta_{21} = -\langle e_1, x_2 \rangle$ bulunur. $y_2 \neq 0$ olduğunu gösterelim. Bu durumda, $y_2 = 0$ ise e_1 ve x_2 vektörleri lineer bağımlı olur. Bu ise baştaki seçimimizle çelişir. O halde $y_2 \neq 0$ olup; $e_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$ birim vektör ve $\{e_1,\ e_2\}$ ortonormal sistemdir.

3) $k < m$ alalım. $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ vektörlerinin ilk k tanesi yardımıyla $e_1, e_2, ..., e_k$ gibi bir ortonormal sistem elde edildiğini kabul edelim. Yani; $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \quad 1 \leq i \leq k \\ 1, & i = j \quad 1 \leq j \leq k \end{cases}$'dir.

Şimdi bu ortonormal sistemle verilen $(k+1)$'inci vektör olan x_{k+1} yardımıyla $y_{k+1} = \beta_{(k+1)1}.e_1 + ... + \beta_{(k+1)k}.e_k + x_{k+1}$ vektörünü tanımlayalım ve buradan $\langle y_{k+1}, e_i \rangle = 0\ (i = 1, 2, ..., k)$ olacak şekilde $\beta_{(k+1)i}$'yi bulalım:

$$\langle y_{k+1}, e_i \rangle = 0 \Rightarrow \langle \beta_{(k+1)1}.e_1 + ... + \beta_{(k+1)k}.e_k + x_{k+1}, e_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \beta_{(k+1)i}.\underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{1} + \langle x_{k+1}, e_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \beta_{(k+1)i} = -\langle x_{k+1}, e_i \rangle \text{ bulunur.}$$

$y_{k+1} = 0$ olamaz. Çünkü $y_{k+1} = 0$ ise $e_1, e_2, ..., e_k, x_{k+1}$ ve dolayısıyla $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ vektörleri lineer bağımlı olurdu. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $y_{k+1} \neq 0$'dır. Böylece $e_{k+1} = \dfrac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$ olup; $e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}$ vektörleri ortonormal bir sistemdir.

Bu şekilde devam edilerek $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri yardımıyla $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ortonormal sistemi elde edilir. ♦

Teorem 3: Sonlu boyutlu uzayda, keyfi ortonormal sistem ortonormal tabana kadar genişletilebilir.

İspat: E, sonlu boyutlu uzay ve $boyE = n$, $r < n$ olmak üzere, $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ E'de bir ortonormal sistem olsun. Amacımız $\{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_r,\ e_{r+1},\ ...,\ e_n\}$ ortonormal taban olacak şekilde $e_{r+1},\ e_{r+2},\ ...,\ e_n$ elemanları bulmak. $r < n$ olduğundan, $\exists x \neq 0$ için $e_1, e_2, ..., e_r, x$ vektörleri lineer bağımsızdır. $y = \lambda_1.e_1 + ... + \lambda_r.e_r + x$ vektörünü tanımlayalım.

$$\langle y, e_i \rangle = 0, i = 1, 2, ..., r$$

$$\langle \lambda_1.e_1 + ... + \lambda_r.e_r + x, e_i \rangle = 0$$

$$\langle \lambda_1.e_1, e_i \rangle + ... + \langle \lambda_r.e_r, e_i \rangle + \langle x, e_i \rangle = 0$$

$$\lambda_1.\langle e_1,\ e_i \rangle + ... + \lambda_{i-1}.\langle e_{i-1},\ e_i \rangle + \lambda_i.\underbrace{\langle e_i,\ e_i \rangle}_{1} + \lambda_{i+1}.\langle e_{i+1},\ e_i \rangle + ... + \lambda_r.\langle e_r,\ e_i \rangle + \langle x,\ e_i \rangle = 0$$

$\lambda_i + \langle x, e_i \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i = -\langle x, e_i \rangle, i = 1, 2, ..., r$ elde edilir. $y \neq 0$'dır. Çünkü $y = 0$ ise $e_1, e_2, ..., e_r, x$ vektörleri lineer bağımlı olurdu. Bu ise baştaki seçimimizle çelişir. Böylece $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ ortonormal sistemini $e_{r+1} = \dfrac{y}{\|y\|}$ ile $\{e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}\}$ ortonormal sistemine genişlettik. Benzer şekilde devam edilerek $\{e_{r+1}, e_{r+2}, ..., e_n\}$ ortonormal tabanı elde edilir.

♦

Teorem 4: E bir öklid uzayı, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sistemi E'de bir ortonormal taban ve $x \in E$ olsun. Bu takdirde; $x = \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + ... + \lambda_n.e_n$ öyleki $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle, i = 1, 2, ..., n$'dir.

İspat: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, E'de bir taban olduğundan $x = \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + ... + \lambda_n.e_n$ için $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle x,\ e_i \rangle$ iç çarpımını alalım.

$$\langle x, e_i \rangle = \langle \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + ... + \lambda_n.e_n, e_i \rangle = \lambda_i.\underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{1} = \lambda_i, i = 1, 2, ..., n \text{ olur.}$$

Böylece, $\lambda_i = \langle x,\ e_i \rangle$ olduğunu buluruz.♦

Sonuç 2: E bir öklid uzayı, E'de bir ortonormal taban $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere keyfi $x, y \in E$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $\langle x, e_1\rangle^2 + \langle x, e_2\rangle^2 + ... + \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2$

ii) $x = 0 \Leftrightarrow \langle x, e_i\rangle = 0, i = 1, 2, ..., n$

iii) $x = y \Leftrightarrow \langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle, i = 1, 2, ..., n$

İspat:

i) $x = \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + ... + \lambda_n.e_n$ ve $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle, i = 1, 2, ..., n$'dir.

Pisagor teoremini kullanırsak;

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i.e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.\underbrace{\|e_i\|^2}_{1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 \text{ olur.}$$

ii) $x = 0 \Rightarrow \langle x, e_i\rangle = 0, i = 1, 2, ..., n$

$$\langle x, e_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + ... + \lambda_n.e_n, e_i\rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i.\underbrace{\langle e_i, e_i\rangle}_{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0, i = 1, 2, ..., n \Rightarrow x = 0$$

iii) $x = y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \langle x - y, e_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle$

$\langle x, e_i\rangle = \langle y, e_i\rangle \Rightarrow x = y$ olduğu açıktır. ♦

Sonuç 3: E bir öklid uzayı ve $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ E'de bir ortonormal sistem olmak üzere keyfi $x \in E$ için aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\langle x, e_1\rangle^2 + \langle x, e_2\rangle^2 + ... + \langle x, e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2 \text{ (Bessel Eşitsizliği)}$$

İspat: $\langle x, e_i\rangle = c_i$, $i = 1, 2, ..., k$ olarak alalım.

$$0 \leq \left\langle x - \sum_{i=1}^{k} c_i.e_i,\ x - \sum_{i=1}^{k} c_i.e_i \right\rangle$$

$$= \langle x,\ x\rangle - 2.\left\langle x,\ \sum_{i=1}^{k} c_i.e_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 = \langle x,\ x\rangle - \sum_{i=1}^{k} 2.c_i.\underbrace{\langle x,\ e_i\rangle}_{c_i} + \sum_{i=1}^{k} c_i^2$$

$$= \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{k} 2.c_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \ ; \quad 0 \leq \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \leq \|x\|^2 \ ♦$$

1.3. Gram Matrisi ve Gram Determinantı

Tanım 9: E^n öklid uzayı ve $x_1,\ x_2,\ ...,x_m \in E^n$ olsun.

$\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_m\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m, x_1\rangle & \cdots & \langle x_m, x_m\rangle \end{pmatrix}$ matrisine $x_1, x_2, ..., x_m$ vektörlerinin Gram matrisi denir. Bu matris $G(x_1, x_2, ..., x_m)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 10: Gram matrisinin determinantına Gram determinantı denir. Bu determinant $\det G(x_1, x_2, ..., x_m)$ şeklinde gösterilir. Yani;

$$\det G(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_m\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m, x_1\rangle & \cdots & \langle x_m, x_m\rangle \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

Not: $x_1,\ x_2,\ ...,x_m \in \mathbb{R}^n$ ise,

$\begin{array}{l} x_1 = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}) \\ x_2 = (x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}) \\ \vdots \\ x_m = (x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}) \end{array}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$ matrisini $\|x_1 ... x_m\|$ şeklinde gösterelim.

Tanım 11: $A = (a_{ij})$ bir matris olsun. $A^T = (a_{ji})$ matrisine A matrisinin transpozesi denir.

Önerme 3: $x_1, x_2, ..., x_m$ ve $y_1, y_2, ..., y_k \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu takdirde;

$$\|x_1 ... x_m\| . \|y_1 ... y_k\|^T = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1\rangle & \cdots & \langle x_1, y_k\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m, \mathrm{y}_1\rangle & \cdots & \langle x_m, y_k\rangle \end{pmatrix} \text{ ‘dır.}$$

İspat:

$$\|x_1 ... x_m\| . \|y_1 ... y_k\|^T = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ y_{k1} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix}^T =$$

$$=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{k1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & y_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}.y_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}.y_{ki} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{mi}.y_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{mi}.y_{ki} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_k \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_m, y_k \rangle \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Not: $\|x_1 ... x_n\|$ matrisinin determinantını, $\det\|x_1 ... x_n\| = [x_1 ... x_n]$ şeklinde gösterelim.

Sonuç 4: $x_1, x_2, ..., x_n$ ve $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$[x_1 ... x_n].[y_1 ... y_n] = \begin{vmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, y_n \rangle \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

İspat: Önerme 3'te $m = k = n$ alınırsa,

$$\|x_1 ... x_n\|.\|y_1 ... y_n\|^T = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n, \mathrm{y}_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, y_n \rangle \end{pmatrix}$$

olur ve burada eşitliğin her iki yanının determinantını alalım:

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, y_n \rangle \end{vmatrix} = \det\left(\|x_1 ... x_n\|.\|y_1 ... y_n\|^T\right) = \det\left(\|x_1 ... x_n\|\right).\det\left(\|y_1 ... y_n\|^T\right) =$$

$$= [x_1 ... x_n].\det\left(\|y_1 ... y_n\|\right) = [x_1 ... x_n].[y_1 ... y_n] \ \blacklozenge$$

Sonuç 5: $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\det G(x_1, x_2, ..., x_n) = [x_1 ... x_n]^2$ dir.

İspat: Sonuç 4'te $y_1, y_2, ..., y_n$ yerine $x_1, x_2, ..., x_n$ alınırsa;

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} = [x_1 ... x_n]^2 \text{ olur. } \blacklozenge$$

Önerme 4: $\forall x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m \in E^n$ için;

i) $\det G(x_1, x_2, ..., x_m) \geq 0$

ii) $\det G(x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_m$ lineer bağımlıdır.

İspat: Bu önermenin ispatını üç durumda inceleyeceğiz:

1) $m = n$ olsun.

i) $\det G(x_1, x_2, ..., x_n) = [x_1 ... x_n]^2 \geq 0$ 'dır.

ii) $\det G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Rightarrow [x_1 ... x_n]^2 = 0 \Rightarrow [x_1 ... x_n] = 0 \Rightarrow x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlıdır. Şimdi de $x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlı iken $\det G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ olduğunu gösterelim. $x_1, x_2, ..., x_n$ lineer bağımlı olduğundan $\exists k = 1, 2, ..., n$ için bir x_k vektörünü diğer vektörlerin bir lineer toplamı şeklinde yazmak mümkündür. Genelliği bozmadan $k = n$ alıp, $x_n = \lambda_1.x_1 + ... + \lambda_{n-1}.x_{n-1}$ yazalım.

$$\det G(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \langle x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \ddots & \langle x_{n-1}, x_n \rangle \\ \langle \lambda_1.x_1 + ... + \lambda_{n-1}.x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle \lambda_1.x_1 + ... + \lambda_{n-1}.x_{n-1}, x_n \rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \langle x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \ddots & \langle x_{n-1}, x_n \rangle \\ \lambda_1.\langle x_1, x_1 \rangle + ... + \lambda_{n-1}.\langle x_{n-1}, x_1 \rangle & \cdots & \cdots & \lambda_1.\langle x_1, x_n \rangle + ... + \lambda_{n-1}.\langle x_{n-1}, x_n \rangle \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Çünkü matrisin son satırı diğer satırların bir lineer toplamı olduğundan sonuç sıfırdır.

2) $m > n$ olsun.

i) n-boyutlu uzayda n'den daha büyük sayıda m tane vektör olduğundan $x_1, x_2, ..., x_m$ vektörleri lineer bağımlıdır. O halde, $\exists \lambda \neq 0$ için $\lambda_1.x_1 + ... + \lambda_m.x_m = 0$'dır. Farz edelim $\lambda_i \neq 0$ olsun. O halde, $-\lambda_i.x_i = \lambda_1.x_1 + ... + \lambda_{i-1}.x_{i-1} + \lambda_{i+1}.x_{i+1} + ... + \lambda_m.x_m$ olup, $x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \cdot x_1 - ... - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \cdot x_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \cdot x_{i+1} - ... - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \cdot x_m$'dir. $-\frac{\lambda_k}{\lambda_i} = \mu_k$, $k = 1, 2, ..., m$ ile gösterelim. Buradan $x_i = \mu_1.x_1 + ... + \mu_{i-1}.x_{i-1} + \mu_{i+1}.x_{i+1} + ... + \mu_m.x_m$ olup, x_i aşağıdaki determinantta yerine yazılırsa $i.$ satır diğer satırların bir lineer toplamı olacağından;

$$\det G(x_1,...,x_m)=\begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle x_1,x_m\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle x_i,x_1\rangle & \cdots & \ddots & \cdots & \langle x_i,x_m\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m,x_1\rangle & \cdots & \cdots & \cdots & \langle x_m,x_m\rangle \end{vmatrix}=0 \text{ olur.}$$

ii) Bu durumda keyfi m tane vektör her koşulda lineer bağımlıdır. Yani keyfi $x_1,x_2,...,x_m$ vektörleri için $\det G(x_1,\ x_2,\ ...,x_m)=0$ 'dır. $x_1,x_2,...,x_m$ lineer bağımlı olduğundan yukarıdaki durumda yaptığımız gibi $\det G(x_1,x_2,...,x_n)=0$ olduğu görülür.

3) $m<n$ olsun. $x_1,x_2,...,x_m$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğu durumda $x_1,x_2,...,x_m$ vektörleriyle üretilen alt uzayı W ile gösterelim. $W\subset\mathbb{R}^n$ 'dir. W, $\langle x,y\rangle$ iç çarpımına göre bir öklid uzayıdır. Keyfi m-boyutlu öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ Öklid uzayına izomorftur. Yani; $\langle x,\ y\rangle_W=\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}^m}$ olacak şekilde $\exists F:W\to\mathbb{R}^m$ dönüşümü bire bir, örten ve lineerdir.

$$\det G(x_1,\ ...,x_m)_{\mathbb{R}^n}=\begin{vmatrix} \langle x_1,\ x_1\rangle_W & \cdots & \langle x_1,\ x_m\rangle_W \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_m,\ x_1\rangle_W & \cdots & \langle x_m,\ x_m\rangle_W \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \langle F(x_1),\ F(x_1)\rangle_{\mathbb{R}^m} & \cdots & \langle F(x_1),\ F(x_m)\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle F(x_m),\ F(x_1)\rangle_{\mathbb{R}^m} & \cdots & \langle F(x_m),\ F(x_m)\rangle_{\mathbb{R}^m} \end{vmatrix}$$

olduğu görülür. Böylece $\det G(x_1,\ ...,x_m)_{\mathbb{R}^n}=\det G(F(x_1),\ ...,F(x_m))_{\mathbb{R}^m}$ elde edilir. Şimdi ispata geçelim:

i) m-boyutlu uzayda m tane noktanın Gram determinantının sıfır veya pozitif olduğu $m=n$ durumunda gösterilmişti.

ii) $\det G(x_1,x_2,...,x_m)=0$ olsun. $x_1,x_2,...,x_m$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu gösterelim. Farz edelim $x_1,x_2,...,x_m$ lineer bağımsız olsun. Bu durumda yukarıda verildiği gibi bir izomorfizma vardır. $x_1,x_2,...,x_m$ lineer bağımsız ise $F(x_1),F(x_2),...,F(x_m)$ $\mathbb{R}^m$ 'de lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\det G(F(x_1),...,F(x_m))\neq 0$ olur. Bunun sonucu olarak da $\det G(x_1,...,x_m)\neq 0$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $\det G(x_1,x_2,...,x_m)=0\Rightarrow x_1,x_2,...,x_m$ vektörleri lineer bağımlıdır. $x_1,x_2,...,x_m$ vektörleri lineer bağımlı iken $\det G(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$ olduğu yukarıda diğer koşullarda verildiği gibi benzer şekilde gösterilir. ♦

Teorem 5: Keyfi $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|.\|y\|$ (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)'dir.

İspat:

$$\det G(x, y) = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix} \ge 0$$

$$\Rightarrow \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle - \langle y, x\rangle.\langle x, y\rangle \ge 0 \Rightarrow \|x\|^2.\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow |\langle x, y\rangle| \le \|x\|.\|y\| \ ♦$$

Sonuç: x ve y vektörleri lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow$ $|\langle x,\ y\rangle| = \|x\|.\|y\|$ 'dır.

İspat:

$$\langle x, y\rangle^2 = \|x\|^2.\|y\|^2$$
$$\langle x, y\rangle\langle x, y\rangle - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = 0$$
$$\begin{vmatrix} \langle x,\ x\rangle & \langle x,\ y\rangle \\ \langle y,\ x\rangle & \langle y,\ y\rangle \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

x ve y vektörleri lineer bağımlı.

Teorem 6: Keyfi $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Minkowski Eşitsizliği)'dir.

İspat:

$$\left|\|x + y\|^2\right| = |\langle x + y, x + y\rangle| = |\langle x, x\rangle + 2.\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle|$$
$$\le |\langle x, x\rangle| + 2.|\langle x, y\rangle| + |\langle y, y\rangle|$$
$$\le \|x\|^2 + 2.\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$
$$\|x + y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \ ♦$$

Sonuç : x ve y vektörleri lineer bağımlı ve y= λ x , $\lambda \ge 0$ $\Leftrightarrow$ $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ 'dır.

İspat:

$(\|x+y\|)^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$

$\langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

$\langle x,\ y\rangle = \|x\|.\|y\| \Leftrightarrow$ x ve y'ler lineer bağımlıdır.

y= λ x , $\langle x, \lambda x\rangle = \|x\|\|\lambda x\|$

$\lambda\langle x, x\rangle = \|x\|^2 |\lambda|$

$\lambda = |\lambda|, \lambda \geq 0$.

1.4. İzometriler ve Ortogonal Dönüşümler

Tanım 12: X bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin.Eğer

i) $d(x,\ y) \geq 0$ ve $d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,\ y) = d(y,\ x)$

iii) $d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$

özellikleri sağlanıyorsa d 'ye X kümesi üzerinde bir metrik denir. $(X,\ d)$ ifadesine de metrik uzay denir.

Örnek 7: $X = \mathbb{R}$ alalım. $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$ için $d(x,\ y) = |x-y|$ bir metriktir.

Örnek 8: $X = \mathbb{R}^2$ alalım. $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^2$ için $x = (x_1,\ x_2)$ ve $y = (y_1,\ y_2)$ olmak üzere $d(x,\ y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ bir metriktir.

Örnek 9: $X = \mathbb{R}^n$ alalım. $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $x = (x_1,\ ...,\ x_n)$ ve $y = (y_1,\ ...,\ y_n)$ olmak üzere $d(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ bir metriktir.

Sonuç 6: $(\mathbb{R}^n,\ d)$ bir metrik uzaydır.

Tanım 13: $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ öklid uzayında iki vektör olmak üzere, $d(x, y) = \|x - y\|$ ifadesine x ve y vektörleri arasındaki uzaklık denir.

Tanım 14: $\mathbb{R}^n$ öklid uzayı olmak üzere, $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n$ için $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ olan $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne izometri denir.

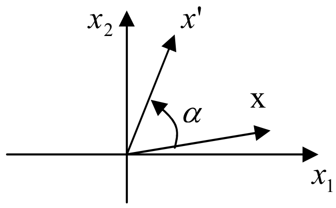
Örnek 8: $\mathbb{R}^n$ 'de öteleme dönüşümünü alalım. $\forall x,\, a \in \mathbb{R}^n$ için $F(x) = x + a$ dönüşümü için F bir izometridir. Gerçekten; $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$d(F(x), F(y)) = d(x + a, y + a) = \|(x + a) - (y + a)\| = \|x + a - y - a\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

olur.

Örnek 10: $\mathbb{R}^2$ 'de F dönme hareketini alalım. F bir izometridir. Gerçekten $\forall\, x = (x_1,\, x_2),\; x' = (x_1',\, x_2') \in \mathbb{R}^2$ ve $F(x) = x'$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1.\cos\alpha - x_2.\sin\alpha \\ x_2' &= x_1.\sin\alpha + x_2.\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|F(x)\| = \|x\|$$



$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^2$ için,

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\|^2 &= \langle F(x) - F(y),\; F(x) - F(y) \rangle \\ &= \langle (x_1 - y_1).\cos\alpha - (x_2 - y_2).\sin\alpha,\; (x_1 - y_1).\sin\alpha + (x_2 - y_2).\cos\alpha \rangle \\ &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

$$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$$

olup, F izometridir.

Örnek 11: Birim dönüşüm izometridir.

Gerçekten; $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n$ için, $\|I(x) - I(y)\| = \|x - y\|$ 'dir.

Not: $\mathbb{R}^n$ 'nin tüm izometriler kümesini $Iz(n)$ ile gösterelim. $Iz(n) \neq \varnothing$ 'dir. Çünkü, $I \in Iz(n)$ 'dir.

Önerme 5: $F_1, F_2 \in Iz(n)$ olmak üzere $(F_1 \circ F_2) \in Iz(n)$ 'dir.

İspat: $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$d((F_1 \circ F_2)(x), (F_1 \circ F_2)(y)) = d(F_1(F_2(x)), F_1(F_2(y)))$ F_1 'in izometri olduğu kullanılarak,

$= d\big(F_2(x), F_2(y)\big)$ olur. F_2 de izometri olduğundan,

$= d(x, y)$ elde edilir. Bunun anlamı $(F_1 \circ F_2) \in Iz(n)$ 'dir. ♦

Sonuç 7: $(Iz(n), \circ)$ birimli yarı gruptur yani monoiddir.

İspat: $\forall\, F_1, F_2, F_3 \in Iz(n)$ olsun.

$$\big(F_1 \circ (F_2 \circ F_3)(x)\big) = F_1 \circ \big(F_2(F_3(x))\big) = F_1\big(F_2(F_3(x))\big) = (F_1 \circ F_2)(F_3(x)) = \big((F_1 \circ F_2) \circ F_3\big)(x)$$

Birim dönüşüm izometri olduğundan, $I \in Iz(n)$ 'dir. O halde, $(Iz(n), \circ)$ monoiddir. ♦

Önerme 6: Keyfi izometri birebirdir.

İspat: Farz edelim, $\exists x,\, y \in \mathbb{R}^n$ için $F(x) = F(y)$ olsun. Bu takdirde;

F 'nin izometri olduğu kullanılarak,

$$d\big(F(x), F(y)\big) = \Big\| \underbrace{F(x) - F(y)}_{0} \Big\| = \|x - y\| \Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y$$

bulunur. Bu ise bize F 'nin birebir olduğunu verir. ♦

Tanım 15: $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için;

i) $F(x + y) = F(x) + F(y)$

ii) $F(\lambda.x) = \lambda.F(x)$

ise F 'ye lineer operatör denir

Örnek 12: I – Birim dönüşüm lineerdir.

$$\mathrm{I}(x + y) = x + y = \mathrm{I}(x) + \mathrm{I}(y)$$

$$\mathrm{I}(\lambda x) = \lambda x = \lambda \mathrm{I}(x)$$

Örnek 13: Dönme dönüşümü lineerdir.

$$D_\alpha(x) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$$
$$D_\alpha(x + y) = [(x_1 + y_1)\cos\alpha - (x_2 + y_2)\sin\alpha, (x_1 + y_1)\sin\alpha + (x_2 + y_2)\cos\alpha]$$
$$= [x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha] + [y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha]$$
$$= D_\alpha(x) + D_\alpha(y)$$

$$D_\alpha(\lambda x) = [(\lambda x_1)\cos\alpha - (\lambda x_2)\sin\alpha, (\lambda x_1)\sin\alpha + (\lambda x_2)\cos\alpha]$$
$$= \lambda(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha), \lambda(x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$$
$$= \lambda(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$$
$$= \lambda D_\alpha(x)$$

Örnek 14: T_a – öteleme dönüşümü lineerdir $\Leftrightarrow$ a=0 ise.

$T_a(x+y)=T_a(x)+T_a(y)$
$(x+y)+a=(x+a)+(y+a)$
$x+y+a=x+a+y+a$
$a=2a \Leftrightarrow a=0.$

Tanım 16: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü lineer ve izometri ise F dönüşümüne lineer izometri denir.

Not: $\mathbb{R}^n$'nin tüm lineer izometriler kümesini $LIz(n)$ ile gösterelim.

Örnek 15: $\mathbb{R}^2$'deki dönmeler lineer izometridir.

Önerme 7: $F_1, F_2 \in LIz(n)$ olmak üzere, $(F_1 \circ F_2) \in LIz(n)$'dir.

İspat: $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

i) $(F_1 \circ F_2)(x+y)=F_1(F_2(x+y))=F_1(F_2(x)+F_2(y))=(F_1 \circ F_2)(x)+(F_1 \circ F_2)(y)$

ii) $(F_1 \circ F_2)(\lambda.x)=F_1(F_2(\lambda.x))=F_1(\lambda.F_2(x))=\lambda.(F_1 \circ F_2)(x)$

olup, $(F_1 \circ F_2) \in LIz(n)$'dir. ♦

Sonuç 8: $(LIz(n),\circ)$, $(Iz(n),\circ)$'nin bir alt monoididir.

Önerme 8: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü lineer ve birebir ise örtendir.

İspat: F lineer ve birebir olsun. $\mathbb{R}^n$'de $\{e_1,...,e_n\}$ tabanını alalım. $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$'nin de $\mathbb{R}^n$'de bir taban olduğunu gösterelim:

Bunun için $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$'nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim: Farz edelim $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ lineer bağımlı olsun. O halde en az biri sıfırdan faklı olan $\lambda_1,\ ...,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ vardır ve $\lambda_1.F(e_1)+...+\lambda_n.F(e_n)=0$'dır. F'nin lineer olduğunu kullanarak $F(\lambda_1.e_1+...+\lambda_n.e_n)=0$ olur. Burada F birebir olduğundan $\lambda_1.e_1+...+\lambda_n.e_n=0$'dır. $\lambda_i,\ i=1,\ 2,\ ...,\ n$'lerden en az biri sıfırdan farklı olduğundan $\{e_1,...,e_n\}$ lineer bağımlıdır. Bu ise seçimimizle çelişir. O halde $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ lineer bağımsızdır. $\mathbb{R}^n$'nin boyutu n olduğundan $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ $\mathbb{R}^n$'de bir tabandır. Şimdi $\mathbb{R}^n$'de keyfi bir y elemanını alalım. $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir taban olduğundan dolayı $\mu_1,\ ...,\ \mu_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

y elemanını $y=\mu_1.F(e_1)+...+\mu_n.F(e_n)$ şeklinde yazabiliriz. Bu şekilde yazılabilen keyfi $y\in\mathbb{R}^n$ için $\exists x=\mu_1.e_1+...+\mu_n.e_n\in\mathbb{R}^n$ vardır:

$$y=\mu_1.F(e_1)+...+\mu_n.F(e_n)=F(\mu_1.e_1+...+\mu_n.e_n)\Rightarrow y=F(x)$$

olup, bu bize F 'nin örten olduğunu gösterir. ♦

Önerme 9: Keyfi lineer izometri F olmak üzere, F 'nin ters dönüşümü F^{-1} vardır ve F^{-1} de lineer izometridir.

İspat: Sonuç 9'dan F örten ve Önerme 6'dan F birebirdir. Bundan dolayı F 'nin ters dönüşümü F^{-1} vardır.

$\forall\mu,\ \eta\in\mathbb{R}^n$ alalım. F örten olduğundan $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ vardır öyleki $F(x)=\mu$ ve $F(y)=\eta$ 'dır. Buradan $x=F^{-1}(\mu)$ ve $y=F^{-1}(\eta)$ olur.

i) F lineer olduğundan $F(x+y)=F(x)+F(y)$

$$F(F^{-1}(\mu)+F^{-1}(\eta))=\mu+\eta \text{ 'dir.}$$

Buradan,

$$F^{-1}(\mu)+F^{-1}(\eta)=F^{-1}(\mu+\eta)$$

olur.

ii) F lineer olduğundan $F(\lambda.x)=\lambda.F(x)$

$$F(\lambda.F^{-1}(\mu))=\lambda.\mu \text{ 'dir.}$$

Buradan,

$$\lambda.F^{-1}(\mu)=F^{-1}(\lambda.\mu)$$

olur. O halde, F^{-1} lineerdir. Şimdi de F^{-1} 'in izometri olduğunu gösterelim: $\forall\mu,\ \eta\in\mathbb{R}^n$ alalım. F örten olduğundan $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ vardır öyleki $F(x)=\mu$ ve $F(y)=\eta$ 'dır. Buradan $x=F^{-1}(\mu)$ ve $y=F^{-1}(\eta)$ olur. F izometri olduğundan,

$$\|x-y\|=\|F(x)-F(y)\|\Rightarrow\|F^{-1}(\mu)-F^{-1}(\eta)\|=\|\mu-\eta\|$$

olur, bunun anlamı F^{-1} dönüşümünün izometri olduğudur. ♦

Sonuç 10: $(LIz(n),\circ)$ bir gruptur.

İspat: Sonuç 8'den $\left(LIz(n),\circ\right)$ monoiddir. Keyfi elemanın tersi vardır ve o da lineer izometri olduğundan $\left(LIz(n),\circ\right)$ bir gruptur. ♦

Not: $\mathbb{R}^n$'de tüm ötelemelerin oluşturduğu kümeyi $T(n)$ ile gösterelim. Yani $T(n)=\left\{F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,\ F(x)=x+a,\ a\in\mathbb{R}^n\right\}$'dir.

Önerme 10: $\left(T(n),\ \circ\right)$ bir gruptur.

İspat: $T_a(x)\circ T_b(x)=T_a\left(T_b(x)\right)=\left(x+b\right)+a=x+\left(a+b\right)=T_{a+b}(x)$'dir. Şimdi grup aksiyomlarını gösterelim: $\forall T_a,\ T_b,\ T_c\in T$ ve $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^n$ olsun.

1) $$\left(T_a\circ\left(T_b\circ T_c\right)(x)\right)=T_a\circ\left(T_b\left(T_c(x)\right)\right)=T_a\left(T_b\left(T_c(x)\right)\right)=$$
$$=\left(T_a\circ T_b\right)\left(T_c(x)\right)=\left(\left(T_a\circ T_b\right)\circ T_c\right)(x)$$

2) $T_a(x)\circ T_0(x)=T_0(x)\circ T_a(x)=T_a(x)$ olup, $T_0(x)$ birim elemandır.

3) $T_a(x)\circ T_{-a}(x)=T_{-a}(x)\circ T_a(x)=T_0(x)$ olup, $T_{-a}(x)=T_a^{-1}(x)$, T_a'nın tersidir.

Böylece $\left(T(n),\ \circ\right)$ bir gruptur. ♦

Sonuç 10 ve Önerme 10'dan iki grubumuz var. Şimdi bu iki grup arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Önerme 11: $LIz(n)\cap T(n)=\left\{I\right\}$'dır.

İspat: $F\in\left(LIz(n)\cap T(n)\right)$ olsun. Bunun anlamı F lineer dönüşüm ve aynı zamanda ötelemedir. $F=I$ olduğunu gösterelim: F öteleme olduğundan $\exists a\in\mathbb{R}^n$ için $F(x)=x+a$'dır. F lineer olduğundan $F\left(x+y\right)=F(x)+F(y)$'dir. $F\left(x+y\right)=\left(x+y\right)+a$ ve $F(x)+F(y)=\left(x+a\right)+\left(y+a\right)$ yazabiliriz. Burada F'nin lineer olduğu kullanılarak sol tarafların eşitliğinden $\left(x+y\right)+a=\left(x+a\right)+\left(y+a\right)$ olup $a=2a$ elde edilir. Buradan $a=0$'dır. Yani $F(x)=x$ olup F birim dönüşümdür. ♦

Tanım 17: $\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ için $\left\langle F(x),F(y)\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle$ ise $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne ortogonal dönüşüm denir.

Teorem 7: $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dönüşümü için aşağıdaki üç şart denktir:

i) F, ortogonal dönüşümdür.

ii) F, lineer izometridir.

iii) F, izometridir ve $F(0)=0$'dır.

İspat:

"i)$\Rightarrow$ii)" F, ortogonal dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^n$'de $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal tabanını alalım. O halde,

$$\langle F(e_i), F(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},\ i,j=1,2,,...,n$$

yazabiliriz. Buradan $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ $\mathbb{R}^n$'de ortonormal sistem olur. Keyfi ortonormal sistem lineer bağımsız olduğundan $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ $\mathbb{R}^n$'de bir taban oluşturur.

$\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ alalım.

$$x=\sum_{i=1}^{n}\beta_i.e_i \text{ ve } y=\sum_{i=1}^{n}\mu_i.e_i$$

şeklinde yazalım. $e_i, i=1,2,...,n$ ortonormal olduğundan,

$$\beta_i=\langle x,e_i\rangle \text{ ve } \mu_i=\langle y,e_i\rangle\ \ i=1,2,...,n$$

yazabiliriz. $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ ortonormal taban olduğundan,

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i.F(e_i) \text{ ve } F(y)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i.F(e_i)$$

yazılabilir. Yukarıdakine benzer şekilde $\eta_i=\langle F(x),F(e_i)\rangle$ ve $\gamma_i=\langle F(y),F(e_i)\rangle$, $i=1,2,...,n$ eşitlikleri alınır. F'nin ortogonal olduğu kullanılarak,

$\beta_i=\langle x,e_i\rangle=\langle F(x),F(e_i)\rangle=\eta_i, i=1,2,...,n$

$\mu_i=\langle y,e_i\rangle=\langle F(y),F(e_i)\rangle=\gamma_i, i=1,2,...,n$ olur.

$$F(x+y)=F\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i.e_i+\sum_{i=1}^{n}\mu_i.e_i\right)=F\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i).e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\chi_i.F(e_i) \text{ ......(1) olur.}$$

Burada χ_i,

$$\chi_i=\left\langle F\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i).e_i\right),\ F(e_i)\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i).e_i,\ e_i\right\rangle=\beta_i+\mu_i\text{'dır.}$$

(1) ifadesinden devam edersek;

$$F(x+y)=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i).F(e_i)=\sum_{i=1}^{n}(\langle x,\ e_i\rangle+\langle y,\ e_i\rangle).F(e_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle F(x),F(e_i)\right\rangle .F(e_i)+\left\langle F(y),F(e_i)\right\rangle .F(e_i)\right)=$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\eta_i.F(e_i)}_{F(x)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i.F(e_i)}_{F(y)}=F(x)+F(y)\text{......(2) 'dır.}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ alalım. Bu durumda

$$F(\lambda.x)=F\left(\lambda.\sum_{i=1}^{n}\beta_i.e_i\right)=F\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda.\beta_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\kappa_i.F(e_i)\text{......(3) olur.}$$

Burada κ_i

$$\kappa_i=\left\langle F\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda.\beta_i).e_i\right),\ F(e_i)\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}(\lambda.\beta_i).e_i,\ e_i\right\rangle=\lambda.\beta_i\text{ 'dır.}$$

(3) ifadesinden devam edersek;

$$F(\lambda.x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda.\beta_i.F(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda.\left\langle x,\ e_i\right\rangle .F(e_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda.\left\langle F(x),F(e_i)\right\rangle .F(e_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda.\eta_i.F(e_i)=\lambda.\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\eta_i.F(e_i)}_{F(x)}=\lambda.F(x)\text{......(4)}$$

dır.Böylece

(2) ve (4)'ten F lineerdir.

Şimdi de F 'nin izometri olduğunu gösterelim: $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için,

$\left\langle F(x),F(x)\right\rangle=\left\langle x,x\right\rangle\Rightarrow\|F(x)\|^2=\|x\|^2\Rightarrow\|F(x)\|=\|x\|$ 'dir. F lineer olduğundan, $\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ için,

$\|F(x)-F(y)\|=\|F(x-y)\|=\|x-y\|$ olup, F izometridir.

"ii)$\Rightarrow$iii)" F lineer izometri olduğundan F izometridir.

$$F(0)=F(0+0)=F(0)+F(0)\Rightarrow F(0)=0$$

"iii)$\Rightarrow$i)" F izometri ve $F(0)=0$ olduğundan, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için

$\|F(x)\|=\|F(x)-F(0)\|=\|x-0\|=\|x\|$ 'dir. Buradan,

$\|F(x)\|=\|x\|\Rightarrow\|F(x)\|^2=\|x\|^2\Rightarrow\left\langle F(x),F(x)\right\rangle=\left\langle x,x\right\rangle$ olur.

$\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ alalım. F izometri olduğundan,

$$\|F(x)-F(y)\| = \|x-y\|$$

$$\|F(x)-F(y)\|^2 = \|x-y\|^2$$

$$\langle F(x)-F(y), F(x)-F(y)\rangle = \langle x-y, x-y\rangle$$

$$\langle F(x), F(x)\rangle - \langle F(x), F(y)\rangle - \langle F(y), F(x)\rangle + \langle F(y), F(y)\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

yazabiliriz. $\langle F(x), F(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ ve $\langle F(y), F(y)\rangle = \langle y, y\rangle$ olduğundan, $-2.\langle F(x), F(y)\rangle = -2.\langle x, y\rangle$ elde edilir. Buradan da; $\langle F(x), F(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ olup, F ortogonaldır. ♦

Teorem 8: F, keyfi izometrisi için tek türlü T_a ötelemesi ve H ortogonal dönüşümü vardır öyleki $F = T_a \circ H$ 'dir.

İspat: F, $\mathbb{R}^n$ 'de keyfi izometri olsun. $F(0) = a$ diyelim. T_a ve T_{-a} ötelemelerini göz önüne alalım. $(T_{-a} \circ F)(0) = T_{-a}(F(0)) = T_{-a}(a) = a + (-a) = 0$ olup, buradan $T_{-a} \circ F$ bir izometridir ve $(T_{-a} \circ F)(0) = 0$ 'dır. Bunun anlamı Teorem 7'den $T_{-a} \circ F$ ortogonaldır. Bunu $H = T_{-a} \circ F$ ile gösterelim.

$T_a \circ H = T_a \circ (T_{-a} \circ F) = (T_a \circ T_{-a}) \circ F = I \circ F = F \Rightarrow F = T_a \circ H$ olur. Şimdi tekliğini gösterelim:

Farz edelim, $F = T_a \circ H_1$ ve $F = T_b \circ H_2$ şeklinde iki türlü olsun. Buradan,

$H_1 = T_a^{-1} \circ F = T_a^{-1} \circ (T_b \circ H_2) = (T_a^{-1} \circ T_b) \circ H_2$ elde edilir. Ortogonal dönüşüm lineer olduğundan $H_1(0) = H_2(0) = 0$ yazılabilir.

$$0 = H_1(0) = ((T_{-a} \circ T_b) \circ H_2)(0) = (T_{-a} \circ T_b)(0) = T_{-a}(T_b(0)) = T_{-a}(b+0)$$

$= T_{-a}(b) = b + (-a) = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow T_a = T_b$ olup, T_a tektir.

$T_a = T_b \Rightarrow T_a \circ H_1 = T_a \circ H_2 \Rightarrow H_1 = H_2$ olup, H de tektir. ♦

Sonuç 11: Keyfi F izometrisi için F^{-1} ters dönüşümü vardır ve F^{-1} de izometridir.

İspat: $F = T_a \circ H$ olduğundan $(H^{-1} \circ T_a^{-1})$'in, $(T_a \circ H)$'nin tersi olduğunu gösterirsek F^{-1} ters dönüşümünün varlığını göstermiş oluruz. Önceki teoremlere göre H orthogonal dönüşüm olduğundan lineer izometridir. Keyfi lineer izometrinin tersi mevcut olduğundan H^{-1} orthogonaldir. Bunun için;

$\left(T_a \circ H\right) \circ \left(H^{-1} \circ T_a^{-1}\right) = T_a\left(H \circ H^{-1}\right) \circ T_a^{-1} = T_a \circ T_a^{-1} = I$ olur. Şimdi de F^{-1}'in izometri olduğunu gösterelim: $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için F izometri olduğundan,

$\left\| F^{-1}(x) - F^{-1}(y) \right\| = \left\| F\left(F^{-1}(x)\right) - F\left(F^{-1}(y)\right) \right\| = \|x - y\|$ olup, F^{-1} izometridir. ♦

Sonuç 12: $\left(Iz(n), \circ\right)$ bir gruptur.

İspat: Sonuç 6'dan $\left(Iz(n), \circ\right)$ monoid ve Sonuç 11'den $\forall F \in Iz(n)$ için $F^{-1} \in Iz(n)$ olduğundan, $\left(Iz(n), \circ\right)$ bir gruptur. ♦

Not: $Iz(n)$, tüm izometriler kümesini buradan itibaren $\varepsilon(n)$ ile işaretliyoruz.

Tanım 18: $\varepsilon(n)$ grubuna öklid hareketleri grubu denir.

Not: $LIz(n)$, tüm lineer izometriler kümesini buradan itibaren $O(n)$ ile işaretliyoruz.

Tanım 19: $O(n)$ grubuna ortogonal dönüşümler grubu ya da lineer izometriler grubu denir.

Önerme 12: $\mathbb{R}^n$ öklid uzayı olmak üzere, $F \in O(n)$ ve $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal sistem ise $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ de ortonormal sistemdir.

İspat: F ortogonal dönüşüm olduğundan, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$'dir. Buradan; $\langle F(e_i), F(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, ..., n$ olur. ♦

Önerme 13: F, $\mathbb{R}^n$'de lineer dönüşüm ve bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal sistemi için $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ ortonormal sistem olsun. Bu takdirde F ortogonaldır.

İspat: $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i . e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j . e_j$ $i, j = 1, ..., n$ olsun.

$$\langle F(x), F(y) \rangle = \left\langle F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i . e_i\right), F\left(\sum_{j=1}^{n} y_j . e_j\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i . F(e_i), \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} y_j . F(e_j) \right\rangle =$$

.

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i . y_j . \underbrace{\langle F(e_i),\ F(e_j) \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i = \langle x,\ y \rangle$$ olup, F ortogonaldır. ♦

Tanım 20: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşüm, $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal sistem olsun.

$$\left.\begin{array}{l} F(e_1)=a_{11}.e_1+...+a_{1n}.e_n \\ \vdots \\ F(e_n)=a_{n1}.e_1+...+a_{nn}.e_n \end{array}\right\} \Rightarrow F\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \Rightarrow M_F=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

olmak üzere M_F matrisine, $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal sistemine göre F 'nin matrisi denir

Önerme 14: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşüm olsun. F 'nin ortogonal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart M_F 'nin ortogonal matris olmasıdır.

İspat: F ortogonal dönüşüm olsun.

$\left\langle F(e_i), F(e_j)\right\rangle = \left\langle e_i, e_j\right\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1,...,n$ olduğundan,

$$\left\langle F(e_i),\ F(e_j)\right\rangle=\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.e_k,\ \sum_{m=1}^{n} a_{jm}.e_m \right\rangle=\sum_{k,\ m=1}^{n} a_{ik}.a_{jm}.\underbrace{\left\langle e_k,\ e_m\right\rangle}_{\delta_{km}}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.a_{jk}=\delta_{ij} \text{ olur.}$$

$$M_F.M_F^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.a_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.a_{nk} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.a_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.a_{nk} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}.a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}.a_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}.a_{nk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=I$$

olup, M_F ortogonaldır. Şimdi tersini gösterelim. Yani $M_F.M_F^T = I$ olsun.

$$F(x)=F\left(x_1.e_1+...+x_n.e_n\right)=x_1.F(e_1)+...+x_n.F(e_n)$$

$$F(y)=F\left(y_1.e_1+...+y_n.e_n\right)=y_1.F(e_1)+...+y_n.F(e_n)$$

olmak üzere,

$$\left\langle F(x), F(y)\right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i.F(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j.F(e_j)\right\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i.\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.e_k\right), \sum_{j=1}^{n} y_j.\left(\sum_{m=1}^{n} a_{jm}.e_m\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i.a_{ik}.e_k,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} y_j.a_{jm}.e_m\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} x_i.y_j.a_{ik}.a_{jm}.\underbrace{\left\langle e_k,\ e_m\right\rangle}_{\delta_{km}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_i.y_j.a_{ik}.a_{jk}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i.y_j.\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}.a_{jk}\right)}_{\delta_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}x_i.y_i=\langle x,\ y\rangle$$

olup, F ortogonaldır. ♦

Önerme 15: $\mathbb{R}^n$ 'nin keyfi ortonormal sistemleri $\{e_1,...,e_n\}$ ve $\{f_1,...,f_n\}$ olmak üzere, $F(e_i)=f_i, i=1,...,n$ olan tek F ortogonal dönüşüm vardır.

İspat: $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal sistem olduğundan, $\{e_1,...,e_n\}$ $\mathbb{R}^n$ 'de bir tabandır. Bundan dolayı;

$$\left.\begin{array}{l} f_1=a_{11}.e_1+...+a_{1n}.e_n \\ \vdots \\ f_n=a_{n1}.e_1+...+a_{nn}.e_n \end{array}\right\}\Rightarrow A=\left(a_{ij}\right)$$ yazabiliriz. $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ lineer dönüşümünü göz önüne alırsak;

$$F(x)=F(x_1.e_1+...+x_n.e_n)=x_1.F(e_1)+...+x_n.F(e_n)$$

olduğundan $F(e_1),\ ...,F(e_n)$ 'ler belirlenirse F belirlenir. Şimdi $F(e_1),\ ...,F(e_n)$ 'leri aşağıdaki gibi alalım:

$$\left.\begin{array}{l} F(e_1)=a_{11}.e_1+...+a_{1n}.e_n \\ \vdots \\ F(e_n)=a_{n1}.e_1+...+a_{nn}.e_n \end{array}\right\}\Rightarrow A=\left(a_{ij}\right)$$ olup, $F(e_i)=f_i, i=1,...,n$ 'dir.

Önerme 13'te olduğu gibi F 'nin ortogonal olduğu benzer şekilde gösterilir. Şimdi tekliğine geçelim. Farz edelim; $F_1(e_i)=f_i$ ve $F_2(e_i)=f_i$, $i=1,...,n$ şeklinde iki türlü olsun. Buradan;

$$F_1(x)=F_1\left(\sum_{i=1}^{n}x_i.e_i\right)=\sum_{i=}^{n}x_i.F_1(e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i.f_i\ ......(1)$$

$$F_2(x)=F_2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i.e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i.F_2(e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i.f_i\ ......(2)$$

(1) ve (2)'den $F_1=F_2$ olup, F tek türlüdür. ♦

Önerme 16: A matrisi ortogonal matris olsun. Bu taktirde det(A)= $\pm$ 1.

İspat:

$$\left.\begin{array}{l} A^T.A = \mathrm{I} \\ \det(A^T.A) = \det(\mathrm{I}) \\ \det(A^T).\det(A) = \det(\mathrm{I}) \\ (\det A)^2 = 1 \Leftrightarrow \det(A) = \pm 1. \end{array}\right. \quad \text{olur.}$$

Not: $O_-(n) = \{g \in O(n) : \det g = -1\}$ ve $O_+(n) = \{g \in O(n) : \det g = 1\}$ olacak şekilde $O(n) = O_-(n) \cup O_+(n)$, $O_+(n) \cap O_-(n) = \varnothing$.

Not: F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşüm $\{e_1, e_2, ...e_n\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir taban ve $M_{F,e}$ de, F'nin $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ tabanına göre matrisi olsun.

$f_1, f_2, ...f_n$ tabanını alalım. $M_{F,e}$ ve $M_{F,f}$ arasındaki bağlantıyı bulalım. Bunun için, $f_1, f_2, ...f_n$ ‘ nin $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ tabanına göre ifadesini aldığımızda

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + ...b_{1n}e_n \\ . \\ . \\ f_n = b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + ...b_{nn}e \end{array}\right. \quad \text{olur.}$$

$\det(B) \neq 0$ olmak üzere $B = (b_{ij}), i, j = 1, 2, ...n$ matrisini alalım. Bunu kullanarak $M_{F,f} = B^{-1}M_{F,e}B$ olur.

$$\begin{aligned} \det(M_{F,f}) &= \det(B^{-1}M_{F,e}B) \\ &= \det(B^{-1})\det(M_{F,e})\det(B) \\ &= \frac{1}{\det(B)}\det(M_{F,e})\det(B) \end{aligned}$$

$\det(M_{F,f}) = \det(M_{F,e})$ bulunur. Böylece aralarındaki bağıntı bulunmuş olur. Yani, $M_{F,f}$ matrisi, tabana bağlı değildir. Sadece F' ye bağlıdır.Bundan dolayı,det($M_{F,f}$)'ye F'nin determinantı denir ve det(F) olrak gösterilir.

Not: Özel oarak $O_+(n) = \{g \in O(n) : \det g = 1\}$ =SO(n) ile işaretliyelim.

Önerme 17: $SO(n)$, matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

İspat: $\forall g_1,\ g_2 \in SO(n)$ olsun.

$\det(g_1.g_2) = \underbrace{\det g_1}_{1}.\underbrace{\det g_2}_{1} = 1.1 = 1$ olup, $g_1.g_2 \in SO(n)$ 'dir.

Şimdi grup aksiyomlarına geçelim:

1) $\forall g_1,\ g_2,\ g_3 \in SO(n)$ olsun. $\left(g_1.g_2\right).g_3 = g_1.\left(g_2.g_3\right)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Ancak $SO(n) \subset O(n)$ olduğundan bu özellik özel olarak sağlanır.

2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. $I \in O(n)$ ve $\det I = 1$ olduğundan $I \in SO(n)$'dir. $\forall g \in SO(n)$ için $g.I = I.g = g$ olup, $I \in SO(n)$ birim elemandır.

3) $g \in SO(n)$ alalım. $g \in SO(n)$ olduğundan $\det g = 1$'dir. $\det g \neq 0$ olduğundan g matrisinin tersi vardır ve bunu g^{-1} ile işaretleyelim. Biz $g^{-1} \in SO(n)$ olduğunu göstermek istiyoruz. $g \in O(n)$ olduğundan $g.g^{-1} = I$'dır. Bu eşitliğin her iki yanının determinantını alalım.

$$\det\left(g.g^{-1}\right) = \underbrace{\det I}_{1} \Rightarrow \underbrace{\det g}_{1}.\det g^{-1} = 1 \Rightarrow \det g^{-1} = 1$$

olur. Bunun anlamı $g^{-1} \in SO(n)$'dir. Böylece $SO(n)$ matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur. ♦

1.5. Cebirler

Tanım 22: C, cebir olmak üzere

i) $\left(C,\ +,\ \cdot\right)$ halka,

ii) $\left(C,\ +,\ \lambda\cdot\right)$ $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı,

iii) $\lambda.\left(x.y\right) = \left(\lambda.x\right).y = x.\left(\lambda.y\right)$, $\forall x,\ y \in C$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

ise $\left\{C,\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ sistemine $\mathbb{R}$-*cebir* denir.

Örnek 16: $\left\{\mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, $\mathbb{R}$-*cebir*'dir.

Örnek 17: Katsayıları $\mathbb{R}$ ’den olan tüm polinomlar kümesini $\mathbb{R}[x]$ ile gösterelim. $\{\mathbb{R}[x],\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ’dir.

Örnek 18: Tüm rasyonel fonksiyonlar kümesini $\mathbb{R}(x)$ ile gösterelim.

$\{\mathbb{R}(x),\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ’dir.

Örnek 19: $\{\mathbb{R}[x_1,\ ...,x_n],\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ ve $\{\mathbb{R}(x_1,\ ...,x_n),\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}$-*cebir* ’dir.

Tanım 23: C, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $C_1\subset C$ olsun. $\{C_1,\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ise C_1 alt kümesine $\mathbb{R}$-*altcebir* denir.

Önerme 18: $\{C,+,.,\lambda.,\lambda\in\mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $\{C_\tau,\ \tau\in T\}$, C ’nin $\mathbb{R}$-*altcebirler* ’inin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{\tau\in T}C_\tau$ da $\mathbb{R}$-*cebir* ’dir.

İspat: $x,\ y\in\bigcap_{\tau\in T}C_\tau$ olsun. Buradan $\forall\tau\in T$ için $x,\ y\in C_\tau$ ’dur. C_τ, $\mathbb{R}$-*cebir* olduğu için;

$\left.\begin{array}{l} x-y\in C_\tau,\ \forall\tau\in T\\ x.y\in C_\tau,\ \forall\tau\in T\end{array}\right\}\bigcap_{\tau\in T}C_\tau$, C ’nin alt halkasıdır. Benzer şekilde $\bigcap_{\tau\in T}C_\tau$, C ’nin lineer altuzayıdır. $\lambda\in\mathbb{R}, x,y\in\bigcap_{\tau\in T}C_\tau$ olsun.

$$x,y\in C_\tau,\forall\tau\in T\xrightarrow{C_\tau altcebir}\lambda.(x.y)\in C_\tau,(\lambda.x).y\in C_\tau,x.(\lambda.y)\in C_\tau \text{ ve}$$

$$\lambda.(x.y)=(\lambda.x).y=x.(\lambda.y)\xrightarrow{\forall\tau\in T}\lambda.(x.y)=(\lambda.x).y=x.(\lambda.y)\in\bigcap_{\tau\in T}C_\tau$$

O halde $\bigcap_{\tau\in T}C_\tau$ da $\mathbb{R}$-*cebir* 'dir. ♦

Not: C, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $S\subset C$ olsun. $[S]_{\mathbb{R}}=\bigcap_{S\subset C}C_\tau$ şeklinde gösterelim. Burada C_τ, C ’nin $\mathbb{R}$-*altcebir* ’idir. S ’yi kapsayan en az bir tane $\mathbb{R}$-*altcebir* vardır. Bu ise C ’nin kendisidir.

Tanım 24: C, $\mathbb{R}$-*cebir* ve $S\subset C$ olsun. $[S]_{\mathbb{R}}=C$ ise S ’ye C ’nin üreteç sistemi denir.

Örnek 20: $C=\mathbb{R}[x]$ olsun. $S=\{1,\ x\}$ alalım. Burada 1, C ’nin birimidir.

$[S]_{\mathbb{R}}=\{a_0+a_1.x+a_2.x^2+...+a_n.x_n,\ a_i\in\mathbb{R},\ i=0,\ 1,\ ...,\ n\}$ olup, $[S]_{\mathbb{R}}=C$ ’dir.

Burada, $a_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow a_0.1 \in [S]_{\mathbb{R}}$

$$1 \in S \subset [S]_{\mathbb{R}}, 1 \in [S]$$
$$[S]_{\mathbb{R}} - \mathbb{R}cebir \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.1 \in [S]_{\mathbb{R}} \Rightarrow$$
$$a_0.1 \in [S]_{\mathbb{R}}\ ve S \subset [S]_{\mathbb{R}} \Rightarrow x \in [S]_{\mathbb{R}} \xrightarrow{[S]_{\mathbb{R}} - \mathbb{R}cebir} a_1.x \in [S]_{\mathbb{R}}, a_1 \in \mathbb{R}.$$

$$x \in [S]_{\mathbb{R}}$$
$$\forall x, y \in [S]_{\mathbb{R}} \Rightarrow x.y \in [S]_{\mathbb{R}}$$
$$x.x = x^2 \in [S]_{\mathbb{R}} \xrightarrow{tüme\ var\imath mla} x^n \in [S]_{\mathbb{R}} \xrightarrow{a_n \in \mathbb{R}} a_n x^n \in [S]_{\mathbb{R}}$$

$$a_0, a_1 x, \ldots\ldots.., a_n x^n \in [S]_{\mathbb{R}} \Rightarrow a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots + a_n x^n \in [S]_{\mathbb{R}}$$

Örnek 21: $C = \mathbb{R}[x]$ olsun. $S = \{x\}$ alalım.

$[S]_{\mathbb{R}} = \{a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_n.x_n,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$ olup, $[S]_{\mathbb{R}} \neq C$'dir.

Örnek 22: $C = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ olsun. $S = \{1, x_1, \ldots, x_n\}$ alınırsa $[S]_{\mathbb{R}} = C$ olur.

Not: C, $\mathbb{R}$-*cebir* olsun. C'nin sonlu üreteci var olsa da C'nin $\mathbb{R}$-*altcebirler*'i sonlu üreteçli olmayabilir.

Örnek 23: $C = \mathbb{R}[x, y]$ olsun. $S = \{x, xy, xy^2, \ldots, xy^n, \ldots\}$ alırsak $C_1 = [S]_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-*altcebir*'inin sonlu tane üreteci yoktur. Bunu gösterelim:

Farz edelim C_1 sonlu üreteçli ve C_1'in üreteç sistemi $\{f_1, \ldots, f_m\}$ olsun. Buradan $\{f_1, \ldots, f_m\}$ üreteç sistemi olduğundan $\forall f \in C_1$ için bir polinom $P(t_1, \ldots, t_m)$ vardır öyle ki $f = P(f_1, \ldots, f_m)$'dir. $f_1, \ldots, f_m \in [S]_{\mathbb{R}}$ olduğundan bazı Q_i $i = 1, \ldots, m$ polinomlarını;

$$f_1 = Q_1\left(x, xy, \ldots, xy^{n_1}\right)$$
$$\vdots$$
$$f_m = Q_m\left(x, xy, \ldots, xy^{n_m}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $n = \max(n_1, \ldots, n_m)$ olsun. Özel olarak xy^{n+1} elemanını alalım.

$$\{f_1,\ ...,\ f_m\} \subset \{x, xy, ..., xy^n\}_{\mathbb{R}} \to \{f_1,\ ...,\ f_m\}_{\mathbb{R}} \subseteq \{x, xy, ..., xy^n\}_{\mathbb{R}}$$
$$\xrightarrow{\{f_1,\ ...,f_m\}=[S]_{\mathbb{R}}} [S]_{\mathbb{R}} \subseteq \{x, xy, ..., xy^n\}_{\mathbb{R}}.$$

$$\{x, xy, ..., xy^n\}_{\mathbb{R}} \subset [S]_{\mathbb{R}} \to \{x, xy, ..., xy^n\}_{\mathbb{R}} \subset [S]_{\mathbb{R}} \Rightarrow [S]_{\mathbb{R}} = \{x, xy, ..., xy^n\}_{\mathbb{R}}.$$

$P_{n+1}(t_1, t_2, ..., t_m)$ polimomu için $xy^{n+1} \in [S]_{\mathbb{R}}$ olduğundan, $P_{n+1}(x, xy, ..., xy^n)$ vardır öyleki ; $xy^{n+1} = P(x, xy, ..., xy^n)$ 'dir.

$$\begin{aligned} xy^{n+1} &= P_{n+1}(f_1,\ ..., f_m) = P_{n+1}\left(Q_1\left(x,\ xy,\ ..., xy^{n_1}\right),\ ...,\ Q_m\left(x,\ xy,\ ..., xy^{n_m}\right)\right) \\ &= Q\left(x,\ xy,\ ..., xy^n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy^{n+1} &= \sum a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha_0+...+\alpha_n\le 1} a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n} + \sum_{\alpha_0+...+\alpha_n>1} a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Bu iki polinom eşit ise dereceleri eşit olmalıdır. O halde;

$$xy^{n+1} = \sum_{\alpha_0+...+\alpha_n=1} a_{\alpha_0,\ ...,\ \alpha_n}.x^{\alpha_0}.(xy)^{\alpha_1}...\left(xy^n\right)^{\alpha_n}$$

$xy^{n+1} = a_0.x + a_1.xy + ... + a_n.xy^n$ olur.

Polinomlar teorisinden böyle bir eşitlik olamaz. Böylece bir çelişki bulduk. Bu çelişkiden C_1 'in sonlu üretecinin olmadığını söyleyebiliriz.

Tanım 25: K değişmeli halka olmak üzere, $\forall f,\ g \in K$ için $g \neq 0$ olduğunda $\dfrac{f}{g} \in K$ ise K 'ya cisim denir.

Örnek 24: $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi bir cisimdir.

Tanım 26: K cisim, $H \subset K$ olmak üzere $\forall f,\ g \in H$ için $g \neq 0$ olduğunda $\dfrac{f}{g} \in H$ ise H 'ye K cisminin alt cismi denir.

Örnek 25: $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'nin alt cismidir.

Önerme 18: C, cisim ve $\{C_\tau,\ \tau \in T\}$, C 'nin alt cisimlerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{\tau \in T} C_\tau$ da alt cisimdir.

İspat: $\forall f,\, g \in \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olsun. $f \in \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olduğundan $\forall \tau \in T$ için $f \in C_\tau$'dur. $g \in \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olduğundan $\forall \tau \in T$ için $g \in C_\tau$'dur. C_τ, alt cisim olduğundan $f+g \in C_\tau$, $\forall \tau \in T$ olup, $f+g \in \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ olur. Yukarıdakine benzer şekilde, $f.g \in \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda.f \in \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ ve $\frac{f}{g} \in \bigcap_{\tau\in T} C_\tau$, $(g \neq 0)$ olduğu da gösterilir. Böylece $\bigcap_{\tau\in T} C_\tau$ bir alt cisimdir. ♦

Not: C, cisim ve $S \subset C$ olsun. $(S) = \bigcap_{C_\tau \subset C} C_\tau$ şeklinde işaretleyelim. Burada C_τ, C'nin alt cismidir. S'yi kapsayan en az bir alt cisim vardır ve bu C'nin kendisidir.

Tanım 27: C, cisim ve $S \subset C$ olsun. $(S) = C$ ise S'ye C'nin üreteç sistemi denir.

Örnek 26: $\mathbb{R}(x)$, rasyonel fonksiyonlar cismini alalım. $S = \{\mathbb{R},\, x\}$, $\mathbb{R}(x)$'in cisim olarak üreteç sistemidir. Fakat $S = \{\mathbb{R},\, x\}$, $\mathbb{R}(x)$'in cebir olarak üreteç sistemi değildir. Çünkü, $[S]_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[x] \neq \mathbb{R}(x)$'dir.

1.6. Küme Üzerinde Grup Hareketi

Tanım 28: G bir grup ve K bir küme olsun. Bir $\phi : G \times K \to K$ dönüşümü verilsin. $g \in G, x \in K$ için $\phi(g, x) = g.x$ şeklinde yazalım. $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall x \in K$ için;

a) $(g_1.g_2).x = g_1.(g_2.x)$

b) e, G'nin birimi olmak üzere; $e.x = x$

koşulları sağlanıyorsa, ϕ'ye G'nin K üzerindeki hareketi (etkisi) denir. G'nin K üzerindeki hareketi $G : K$ şeklinde gösterilir.

Örnek 27: $GL(n,\, \mathbb{R})$, $n \times n$ tipideki determinantı sıfır olmayan tüm matrislerin oluşturduğu küme olsun. $GL(n,\, \mathbb{R})$ bir gruptur. $GL(n,\, \mathbb{R})$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki hareketi $g=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n,\ \mathbb{R})$ ve $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$g.x=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ olarak verilir. Gerçekten;

$g,\ h\in GL(n,\ \mathbb{R})$ ve $x\in\mathbb{R}^n$ için;

a) $$\left(g.h\right).x=\left(\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11}.h_{11}+...+g_{1n}.h_{n1} & \cdots & g_{11}.h_{1n}+...+g_{1n}.h_{nn} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ g_{n1}.h_{11}+...+g_{nn}.h_{n1} & \cdots & g_{n1}.h_{1n}+...+g_{nn}.h_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} (g_{11}.h_{11}+...+g_{1n}.h_{n1}).x_1+...+(g_{11}.h_{1n}+...+g_{1n}.h_{nn}).x_n \\ \vdots \\ (g_{n1}.h_{11}+...+g_{nn}.h_{n1}).x_1+...+(g_{n1}.h_{1n}+...+g_{nn}.h_{nn}).x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11}.(h_{11}.x_1+...+h_{1n}.x_n)+...+g_{1n}.(h_{n1}.x_1+...+h_{nn}.x_n) \\ \vdots \\ g_{n1}.(h_{11}.x_1+...+h_{1n}.x_n)+...+g_{nn}.(h_{n1}.x_1+...+h_{nn}.x_n) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} (h_{11}.x_1+...+h_{1n}.x_n) \\ \vdots \\ (h_{n1}.x_1+...+h_{nn}.x_n) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)=g.\left(h.x\right).$$

b) $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\in GL(n,\ \mathbb{R})$ birim elemanını alalım. $\forall x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ için;

$$I.x=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\ddots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.x_1+0.x_2+0.x_3+...+0.x_n\\0.x_1+1.x_2+0.x_3+...+0.x_n\\\vdots\\0.x_1+0.x_2+0.x_3+...+1.x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

olacağından, $I.x=x$ elde edilir.

Örnek 28: $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki hareketi $g=\|a_{ij}\|\in O(n)$ ve $x=\|x_j\|\in\mathbb{R}^n$ $(i,j=1,...,n)$ olmak üzere; $g.x=\|a_{ij}\|.\|x_j\|=\left\|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}.x_j\right\|$ olarak verilir. Gerçekten;

$g=\|a_{ij}\|, h=\|b_{jk}\|\in O(n)$ ve $x=\|x_k\|\in\mathbb{R}^n$ için;

a) $(g.h).x=(\|a_{ij}\|.\|b_{jk}\|).\|x_k\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.b_{jk}\right\|.\|x_k\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ij}.b_{jk}).x_k\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}.(b_{jk}.x_k)\right\|=$

$$=\|a_{ij}\|.\left\|\sum_{k=1}^{n}b_{jk}.x_k\right\|=\|a_{ij}\|.(\|b_{jk}\|.\|x_k\|)=g.(h.x)$$

elde edilir.

b) $I=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\ddots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\in O(n)$ birim elemanını alalım. $\forall x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ için;

$$I.x=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\ddots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.x_1+0.x_2+0.x_3+...+0.x_n\\0.x_1+1.x_2+0.x_3+...+0.x_n\\\vdots\\0.x_1+0.x_2+0.x_3+...+1.x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

olacağından, $I.x=x$ elde edilir.

Örnek 29: $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ üzerindeki hareketi $g\in O(n)$ ve $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $g.(x,y)=(g.x,g.y)$ olarak verilir. Gerçekten;

a) $\forall g_1,g_2\in O(n)$ ve $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ için $g_1.g_2\in O(n)$ olacağından;

$$(g_1.g_2)(x,y)=((g_1.g_2).x,(g_1.g_2).y)=(g_1.(g_2.x),g_1.(g_2.y))=g_1.(g_2.x,g_2.y)=$$
$$=g_1.(g_2.(x,y))$$

elde edilir.

b) $I \in O(n)$ birim eleman olmak üzere, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için;

$I.(x, y) = (I.x, I.y) = (x, y)$ olup, istenen sağlanır.

1.7. Noktalar Sisteminin G-Denkliği ve G-Yörünge

Tanım 29: G bir grup olmak üzere, G 'nin X kümesi üzerindeki etkisi verilsin. $x, y \in X$ olmak üzere, $\exists g \in G$ için $y = g.x$ ise x, y 'ye G-*denk* 'tir denir ve bu durum $x \overset{G}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Önerme 20: G grubunun bir X kümesi üzerindeki etkisi verilsin. Bu takdirde $\forall x, y \in X$ için $x \overset{G}{\sim} y$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: "$\sim$" bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekir. Şimdi bunları gösterelim:

i) $\forall x \in X$ için $x \overset{G}{\sim} x$ 'dir. $x \in X$ ve $g = e \in G$ alalım.

$x = g.x = e.x = x$ olup, $x \overset{G}{\sim} x$ 'dir.

ii) $\forall x, y \in X$ için $x \overset{G}{\sim} y \Leftrightarrow y \overset{G}{\sim} x$ 'dir. $x, y \in X$ alalım. $x \overset{G}{\sim} y \Rightarrow \exists g \in G$ öyleki $y = g.x$ 'dir. Burada eşitliğin her iki tarafı soldan $g^{-1} \in G$ ile çarpılırsa

$y = g.x \Rightarrow g^{-1}.y = g^{-1}.g.x \Rightarrow g^{-1}.y = e.x = x$ olup, $y \overset{G}{\sim} x$ 'dir.

iii) $\forall x, y, z \in X$ için $x \overset{G}{\sim} y$ ve $y \overset{G}{\sim} z \Rightarrow x \overset{G}{\sim} z$ 'dir. $x, y, z \in X$ alalım.

$x \overset{G}{\sim} y$ olduğundan $\exists g_1 \in G$ öyle ki $y = g_1.x$ 'dir. ......(1)

$y \overset{G}{\sim} z$ olduğundan $\exists g_2 \in G$ öyle ki $z = g_2.y$ 'dir. ......(2)

(2)'de y yerine (1)'deki eşiti yazılırsa $z = g_2.g_1.x$ elde edilir. Ancak $g_2.g_1 \in G$ olduğu için $x \overset{G}{\sim} z$ 'dir. ♦

Örnek 30: $G = O(1) = \{-1, 1\}$ olsun. $O(1)$ grubunun $\mathbb{R}$ üzerindeki etkisini alalım. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $y = \pm x$ ise $x \overset{O(1)}{\sim} y$ 'dir.

Örnek 31: $G=\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ \alpha\in[0,\ 2\pi]\right\}$ olsun. G grubunun $\mathbb{R}^2$ üzerindeki etkisini alalım. $\forall x,\ y\in\mathbb{R}^2$ için $\exists g\in G$ öyle ki $y=g.x$ ise $x\overset{G}{\sim}y$ 'dir.

Örnek 32: $G=O(n)$ olsun. $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım.

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ için; $\exists A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\in O(n)$ öyle ki,

$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ ise $x\overset{O(n)}{\sim}y$ 'dir.

Tanım 30: $\{x_\tau,\tau\in T\}$ ve $\{y_\tau,\tau\in T\}$ iki vektör ailesi olsun. $\exists g\in G$ olmak üzere $y_\tau=g.x_\tau$, $\forall\tau\in T$ ise bu vektör ailelerine G-*denk* 'tir denir. İki vektör ailesinin denkliği $\{x_\tau,\ \tau\in T\}\overset{G}{\sim}\{y_\tau,\ \tau\in T\}$ ile gösterilir.

Önerme 20: $\{x_\tau,\tau\in T\}$ ve $\{y_\tau,\tau\in T\}$ iki vektör ailesi olsun. Bu takdirde $\{x_\tau,\ \tau\in T\}\overset{G}{\sim}\{y_\tau,\ \tau\in T\}$ bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Önerme 19'daki gibi benzer şekilde yapılır. ♦

Tanım 31: Bir G grubunun bir X kümesi üzerindeki etkisi verilsin ve $x\in X$ olsun. $G(x)=\{g.x:g\in G\}$ kümesine x noktasının G-*yörünge* 'si denir.

Örnek 33: $G=O(1)=\{-1,\ 1\}$ ve $X=\mathbb{R}$ alalım. Bir $x\in\mathbb{R}$ noktasının $O(1)$-*yörünge* 'si $O(1)(x)=\{\pm x,\ x\in\mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Örnek 34: $G=\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ \alpha\in[0,\ 2\pi]\right\}$ ve $X=\mathbb{R}^2$ alalım. $x,\ y\in\mathbb{R}^2$ noktalarının G-*yörünge* 'si $G(x)=\{y\in\mathbb{R}^2:\|y\|=\|x\|\}$ şeklindedir.

Not: Yörüngeler, G-*denklik* bağıntısının denklik sınıflarıdır.

1.8. G-İnvaryant Fonksiyonlar

Tanım 32: Bir G grubunun X kümesi üzerindeki etkisini alalım. $f : X \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall g \in G$ için $f(g.x) = f(x)$, $\forall x \in X$ ise f reel fonksiyonuna G-*invaryant* denir.

Örnek 35 : G={1,-1} ve {G,.} alalım.X=R .

1.x=x

(-1).x=-x

f(1.x)=f(x)

f((-1).x)=f(-x)=f(x)

Örnek 36: f(x)= $x^2 = (-x)^2$

Not: Tüm G-*invaryant* polinomlar kümesi $\mathbb{R}[x]^G$ ve tüm G-*invaryant* rasyonel fonksiyonlar kümesi ise $\mathbb{R}(x)^G$ şeklinde gösterilir.

Önerme 22**:** $x \overset{G}{\sim} y$ olsun. Bu takdirde $\forall f \in \mathbb{R}[x]^G$ için $f(x) = f(y)$'dir.

İspat: $x \overset{G}{\sim} y$ olduğundan $\exists g \in G$ için $y = g.x$'dir. Keyfi f G-*invaryant* polinomu için $f(y) = f(g.x) = f(x)$ olduğundan $f(x) = f(y)$'dir. ♦

Not: Keyfi f G-*invaryant* polinomu için $f(y) = f(x)$ ise $y \overset{G}{\sim} x$ olmayabilir.

Örnek 37: $G = O(n)$ olsun. $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım. $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f(x) = \langle x, x \rangle$ alınırsa bu $O(n)$-*invaryant*'tır. Gerçekten, $\forall g \in O(n)$ için;

$$f(g.x) = \langle g.x, g.x \rangle = \langle x, x \rangle = f(x) \text{ olur.}$$

Örnek 38: $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım. $x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, x_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\left|[x_1 \ldots x_n]\right| = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$ için $f(x_1, \ldots, x_n) = \left|[x_1 \ldots x_n]\right|$ alınırsa, bu $O(n)$-*invaryant*'tır. Gerçekten, $\forall g \in O(n)$ için;

$$\left|[g.x_1 \ldots g.x_n]\right| = \left|[g].[x_1 \ldots x_n]\right| = \left|[g]\right|.\left|[x_1 \ldots x_n]\right| = \left|[x_1 \ldots x_n]\right| \text{ elde edilir.}$$

Örnek 39: $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım. $x_1,\ ...,\ x_n \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$\det G(x_1,...,x_n) = \det\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}$ alınırsa bu $O(n)$-*invaryant*'tır. Gerçekten,

$\forall g \in O(n)$ için;

$$\det G(g.x_1,\ ...,\ g.x_n) = \det\begin{pmatrix} \langle g.x_1,\ g.x_1\rangle & \dots & \langle g.x_1,\ g.x_n\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle g.x_n,\ g.x_1\rangle & \dots & \langle g.x_n,\ g.x_n\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix} = \det G(x_1,...,x_n)$$

elde edilir.

Önerme 23: $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$ polinomlar $\mathbb{R}$-*cebir*'inin birimli $\mathbb{R}$-*altcebir*'idir.

İspat: $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x]^G$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall g \in G$ için;

$$(f_1 + f_2)(g.x) = f_1(g.x) + f_2(g.x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$$

$$(f_1.f_2)(g.x) = f_1(g.x).f_2(g.x) = f_1(x).f_2(x) = (f_1.f_2)(x)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(\lambda.f_1)(g.x) = \lambda.f_1(g.x) = \lambda.f_1(x) = (\lambda.f_1)(x)$

$1(x) = 1 \in \mathbb{R}[x]$ birim elemanı için, $(1.f_1)(g.x) = 1.(g.x).f_1(g.x) = 1.f_1(x) = f_1(x)$

olup, $f_1 + f_2,\ f_1.f_2,\ \lambda.f_1,\ 1 \in \mathbb{R}[x]^G$'dir. Yani $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$'in birimli $\mathbb{R}$-*altcebir*'idir. ♦

Tanım 33: H grubunun X kümesi üzerindeki etkisini alalım. f, X kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\exists\lambda(h)$ $(h \in H)$ fonksiyonu için $f(h.x) = \lambda(h).f(x)$, $\forall h \in H$, $\forall x \in X$ ise f'ye nispi invaryant, $\lambda(h)$ fonksiyonuna ise f'nin çarpanı denir.

Önerme 24: $x \in X$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere f, λ çarpanına sahip en az bir noktada sıfırdan farklı bir nispi invaryant fonksiyon olsun. Bu takdirde $\lambda(h_1.h_2) = \lambda(h_1).\lambda(h_2)$'dir.

İspat: $f\left((h_1.h_2).x\right) = f\left(h_1.(h_2.x)\right) = \lambda(h_1).f(h_2.x) = \lambda(h_1).\lambda(h_2).f(x)$

$$f\left((h_1.h_2).x\right) = \lambda(h_1.h_2).f(x)$$

olup, her iki tarafın eşitliğinden $\lambda(h_1.h_2) = \lambda(h_1).\lambda(h_2)$ elde edilir. ♦

Örnek 40: $H = O(n)$ ve $x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n \in \mathbb{R}^n$ olsun. $O(n)$'nin $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisi Örnek 32'deki gibi olmak üzere $f\left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right) = \left[x_1 x_2 ... x_n\right]$ polinomunu alalım. $\forall g \in H$ için;

$$f\left(g.x_1,\, g.x_2,\, ...,\, g.x_n\right) = \left[g.x_1\ g.x_2\ ...\ g.x_n\right] = \det g.\left[x_1 x_2 ... x_n\right]$$

olup, $\lambda\left(g\right) = \det g$ olur. $\det\left(g_1.g_2\right) = \det g_1.\det g_2$ olduğundan determinant $O(n)$ grubuna göre nispi invaryanttır.

Önerme 25: $H \subset GL(n,\, \mathbb{R})$ alt grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde etkisi verilsin. $f \in \mathbb{R}\left(x\right)^H$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; $Q(x) \neq 0$ olacak şekilde çarpanları eşit olan iki nispi H *- invaryant* polinomun bölümü şeklinde yazılabilir.

İspat: Keyfi $f \in \mathbb{R}\left(x\right)$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$ şeklinde yazılabilir. $P(x)$ ve $Q(x)$'in en büyük ortak böleni 1 olarak alınabilir. Eğer en büyük ortak bölen 1 değilse, en büyük ortak bölene böldüğümüzde bu polinomlar aralarında asal olur.

f, H *- invaryant* olduğundan $\forall h \in H$ için $f(h.x) = f(x)$'dir. Buradan;

$$f(h.x) = \frac{P(h.x)}{Q(h.x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

olur. İçler dışlar çarpımı yapılırsa $P(h.x).Q(x) = P(x).Q(h.x)$ elde edilir. $P(x)$ ve $Q(x)$'i aralarında asal olarak alabiliriz. Bu durumda $P(h.x) = \dfrac{P(x).Q(h.x)}{Q(x)}$ olacağından $Q(h.x)$, $Q(x)$'e bölünecektir. Yani $\exists \varphi\left(x, h\right)$ polinomu için $Q(h.x) = \varphi\left(x, h\right).Q(x)$ olacaktır. Polinomların eşitliğinden her iki tarafın derecesi eşit olmalıdır. Bu durumda $\varphi\left(x, h\right)$ polinomu sadece h'ye bağlı olmalıdır. O halde $Q(h.x) = \varphi\left(h\right).Q(x)$'dir. Bu eşitliği yukarıda yerine yazarsak; $P(h.x) = \dfrac{P(x).Q(h.x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x).\varphi\left(h\right).Q(x)}{Q(x)} = \varphi\left(h\right).P(x)$ olacaktır. ♦

Önerme 26: $\mathbb{R}$'de yukarıdaki önermedeki $\varphi\left(h\right)$ polinomu $\exists r \in \mathbb{N}^+$ için $\varphi\left(h\right) = h^r$ biçimindedir.

İspat: $\varphi\left(h\right)$, r dereceli bir polinom, yani $\varphi\left(h\right) = a_0 + a_1.h^1 + ... + a_r.h^r$ biçiminde olsun.

$$\varphi\left(k\right) = a_0 + a_1.k^1 + ... + a_r.k^r,\ \varphi\left(h.k\right) = a_0 + a_1.\left(h.k\right)^1 + ... + a_r.\left(h.k\right)^r$$

olur. $\varphi\left(h.k\right) = \varphi\left(h\right).\varphi\left(k\right)$ olduğundan bunları yerine yazarsak;

$$a_0 + a_1.(h.k)^1 + ... + a_r.(h.k)^r = \left(a_0 + a_1.h^1 + ... + a_r.h^r\right).\left(a_0 + a_1.k^1 + ... + a_r.k^r\right)$$

$$= a_0^{\ 2} + a_0.a_1.h + a_0.a_1.k + ... + a_r^{\ 2}.h^r.k^r$$

elde edilir. Her iki tarafın eşitliğinden $a_i^{\ 2} = a_i$, $i \neq j$ için $a_i.a_j = 0$ $i, j = 0,1,...,r$ elde edilir. r için de $a_r^{\ 2} = a_r$'dir. Buradan $a_r = 0$ veya $a_r = 1$'dir. Polinomun derecesi r olduğundan $a_r \neq 0$'dır. Yani $a_r = 1$'dir. $a_i.a_r = 0$, $i = 0,1,...,r-1$ olduğundan $\forall i$ için $a_i = 0$ olmalıdır. Buradan $\varphi(h) = a_r.h^r$ biçimindedir. $a_r = 1$ olduğundan $\varphi(h) = h^r$ olduğu elde edilir. ♦

Önerme 27: $g \in O(n)$ olmak üzere $\lambda(g)$ bir rasyonel fonksiyon ve $\forall g_1,\ g_2 \in O(n)$ için $\lambda(g_1.g_2) = \lambda(g_1).\lambda(g_2)$ olsun. Bu takdirde $\exists k \in \mathbb{Z}$ için $\lambda(g) = (\det g)^k$'dır. ($g = \|a_{ij}\|, \lambda(g)$ a_{ij}'lere göre rasyonel fonksiyon, (i,j=1,…,n)).

Önerme 28: $\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^H$, $\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)$ cisminin alt cismidir.

İspat: $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^H$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall g \in H$ için;

$$(f_1 + f_2)(g.x) = f_1(g.x) + f_2(g.x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$$

$$(f_1.f_2)(g.x) = f_1(g.x).f_2(g.x) = f_1(x).f_2(x) = (f_1.f_2)(x)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(\lambda.f_1)(g.x) = \lambda.f_1(g.x) = \lambda.f_1(x) = (\lambda.f_1)(x)$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(g.x) = \frac{f_1(g.x)}{f_2(g.x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x),\ f_2(g.x) = f_2(x) \neq 0$$

olup, $f_1 + f_2, f_1.f_2,\ \lambda.f_1,\ \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \in \mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^H$'dir.

Yani, $\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^H$, $\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)$ cisminin alt cismidir. ♦

Not: S, $\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^H$'nin bir alt kümesi olsun. S'yi ve $\mathbb{R}$'yi kapsayan en küçük alt cismi $(S)_{\mathbb{R}}$ şeklinde gösterelim.

Tanım 34: $(S)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^H$ ise S'ye $\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^H$ cisminin üreteç kümesi denir.

1.9. Polarizasyon Operatörü

Tanım 35:

$$D_{yx}f(x) = y_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + y_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

şeklinde tanımlı

$$D_{yx} : \mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,x_n] \to \mathbb{R}[x_1,\ x_2,\ ...,x_n;\ y_1,\ y_2,\ ...,y_n]$$

dönüşümüne polarizasyon operatörü denir.

Örnek 41: $D_{yx} : \mathbb{R}[x_1,\ x_2] \to \mathbb{R}[x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2]$ polarizasyon operatörü olmak üzere $O(2)$ grubunun $\mathbb{R}^2$ 'deki etkisini alalım. $\forall x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ noktasının invaryant fonksiyonunu $f(x) = \langle x,\ x\rangle = x_1^2 - x_2^2$ alalım. Burada f 'ye polarizasyon operatörünü uygulayalım:

$$D_{yx}f(x) = 2.x_1.y_1 - 2.x_2.y_2 = 2.(x_1.y_1 - x_2.y_2) = 2.\langle x,\ y\rangle$$

elde edilir.

Tanım 36: H bir grup ve E, n-boyutlu vektör uzayı olsun.

$$G(E) = \{A : E \to E \mid A \text{ tersi mevcut olan lineer operatör}\}$$

kümesi dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir grup olmak üzere bir $\psi : H \to G(E)$ homomorfizmasına H 'nin E 'deki bir lineer gösterimi denir.

Örnek 42: $E = \mathbb{R}^2$ ve $H = O(2)$ alalım. $\psi : O(2) \to G(\mathbb{R}^2)$, $g \to \psi_g$ olsun. ψ_g, $\forall x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ için;

$$\psi_g(x) = g.x = g.(x_1,\ x_2) = (g.x_1,\ g.x_2)$$

olarak tanımlayalım. $\forall x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $g_1,\ g_2 \in O(2)$ olmak üzere;

$$\psi_{g_1.g_2}(x) = (g_1,\ g_2).x = (g_1.g_2.x_1,\ g_1.g_2.x_2) ......(1)$$

$$(\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2})(x) = \psi_{g_1}(\psi_{g_2}(x)) = \psi_{g_1}(g_2.x) = \psi_{g_1}(g_2.x_1,\ g_2.x_2) = g_1.(g_2.x_1,\ g_2.x_2)$$

$$= \left(g_1.\left(g_2.x_1\right),\ g_1.\left(g_2.x_2\right)\right) = \left(g_1.g_2.x_1,\ g_1.g_2.x_2\right)......(2)$$

olup, (1) ve (2)'nin eşitliğinden $\psi_{g_1.g_2} = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}$ elde edilir. Dolayısıyla ψ, $O(2)$'nin $\mathbb{R}^2$'deki bir lineer gösterimidir.

Örnek 43: $E = \mathbb{R}^n$ ve $H = \mathbb{R} - \{0\}$ alalım. $\varpi : H \to G\left(\mathbb{R}^n\right)$, $h \to \varpi_h$ olsun. ϖ_h, $\forall x = \left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right) \in \mathbb{R}^n$ için;

$$\varpi_h(x) = h.x = h.\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right) = \left(h.x_1,\ h.x_2,\ ...,\ h.x_n\right)$$

olarak tanımlayalım. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $h_1,\ h_2 \in H$ olmak üzere;

$$\varpi_{h_1.h_2}(x) = \left(h_1.h_2\right).x = \left(h_1.h_2.x_1,\ h_1.h_2.x_2,\ ...,\ h_1.h_2.x_n\right)......(1)$$

$$\left(\varpi_{h_1} \circ \varpi_{h_2}\right).x = \varpi_{h_1}\left(\varpi_{h_2}(x)\right) = \varpi_{h_1}\left(h_2.\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)\right) = \varpi_{h_1}\left(h_2.x_1,\ h_2.x_2,\ ...,\ h_2.x_n\right) =$$

$$= \left(h_1.\left(h_2.x_1\right),\ h_1.\left(h_2.x_2\right),\ ...,\ h_1.\left(h_2.x_n\right)\right) = \left(h_1.h_2.x_1,\ h_1.h_2.x_2,\ ...,\ h_1.h_2.x_n\right)......(2)$$

olup, (1) ve (2)'nin eşitliğinden $\varpi_{h_1.h_2} = \varpi_{h_1} \circ \varpi_{h_2}$ elde edilir. Dolayısıyla ϖ, H'nin $\mathbb{R}^n$'deki bir lineer gösterimidir.

Tanım 37**:** H bir grup; E_1, n-boyutlu ve E_2, m-boyutlu iki vektör uzayı olsun. $\psi : H \to G\left(E_1\right)$, $\phi : H \to G\left(E_2\right)$ H'nin iki lineer gösterimi ve $\rho : E_1 \to E_2$ sıfırdan farklı bir lineer operatör olmak üzere $\forall k \in E_1$, $\forall h \in H$ için $\left(\rho \circ \psi(h)\right)(k) = \left(\phi(h) \circ \rho\right)(k)$ ise ρ'ya H-*ekuvaryant* operatör denir. $H \subset O(n)$ bir alt grup olmak üzere $\psi : H \to O(n)$, $\forall h \in H$ için $\psi(h) = h$ birim homomorfizmasını alalım. Bu gösterim yardımıyla $E_2 = \mathbb{R}\left[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right]$ polinomlar halkasında bir gösterim tanımlayacağız.

$$\left(T_h^{(1)} f\right)(x) = f\left(\psi(h^{-1})x\right) = f(h^{-1}x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

olarak alalım. Bu bir lineer gösterimdir. Gerçekten;

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathbb{R}\left[x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right]$, $h_1,\ h_2 \in H$ için;

$$\left(T_{h_1h_2}^{(1)} f\right)(x) = f\left((h_1h_2)^{-1}x\right) = f\left(h_2^{-1}h_1^{-1}x\right)$$

$f(h_2^{-1}x) = \omega(x)$ dersek;

$$\left(T_{h_1h_2}^{(1)} f\right)(x) = f\left(h_2^{-1}h_1^{-1}x\right) = T_{h_1}^{(1)}\omega(x) = T_{h_1}^{(1)}\left(\left(T_{h_2}^{(1)} f\right)(x)\right) = \left(T_{h_1}^{(1)}\left(T_{h_2}^{(1)} f\right)\right)(x)$$

olur. $\mathbb{R}\left[x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n;\, y_1,\, y_2,\, ...,\, y_n\right]$'de başka bir $T_h^{(2)}$ gösterimini aşağıdaki gibi tanımlayalım: $\sigma \in \mathbb{R}\left[x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n;\, y_1,\, y_2,\, ...,\, y_n\right]$ için;

$$\left(T_h^{(2)}\sigma\right)(x,\, y) = \sigma\left(\psi(h^{-1})x,\ \psi(h^{-1})y\right) = \sigma\left(h^{-1}x,\ h^{-1}y\right),\ (x,\, y) \in \mathbb{R}^n$$

olarak verilirse bunun lineer gösterim olduğu yukarıdakine benzer şekilde yapılır.

Önerme 29: $D_{yx} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x,\, y]$ olmak üzere $\forall h \in H$ için, $D_{yx}\left(T_h^{(1)} f\right) = T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\right)$'dir.

İspat: Aşağıda verilen P polinomunun MacLaurin açılımını göz önüne alalım:

$$P(\lambda) = P(0) + \lambda.P'(0) + \frac{\lambda^2}{2!}\cdot P''(0) + ... + \frac{\lambda^k}{k!}\cdot P^{(k)}(0)\,,\ \exists k \in \mathbb{N}$$

$$P(\lambda) = f\left(x + \lambda.y\right) = f(x) + \lambda \cdot \left.\frac{\partial f\left(x+\lambda.y\right)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} + ...$$

elde edilir.

$$\left.\frac{\partial f\left(x+\lambda.y\right)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{\partial f\left(x_1+\lambda.y_1,\, ...,\, x_n+\lambda.y_n\right)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} =$$

$$= \left.\left(y_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial\left(x_1+\lambda.y_1\right)} + ... + y_n \cdot \frac{\partial f}{\partial\left(x_n+\lambda.y_n\right)}\right)\right|_{\lambda=0} =$$

$$= y_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + y_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} =$$

$$= D_{yx} f$$

olur. Dolayısıyla,

$$f\left(x+\lambda.y\right) = f(x) + \lambda.D_{yx} f(x) + ...$$

elde edilir. $D_{yx} f = f_1\left(x,\, y\right)$ olsun. O halde;

$$f\left(h^{-1}.\left(x+\lambda.y\right)\right) = f\left(h^{-1}.x + \lambda.h^{-1}.y\right) = f\left(h^{-1}.x\right) + \lambda.f_1\left(h^{-1}.x,\ h^{-1}.y\right) + ...$$

elde edilir. Diğer taraftan $q(x) = f\left(h^{-1}.x\right)$ olarak alırsak bu polinom için;

$$q\left(x+\lambda.y\right) = q(x) + \lambda.q_1\left(x,\, y\right) + ...$$

olur. Dolayısıyla;

$$T_h^{(2)}\left(D_{yx} f(x)\right) = T_h^{(2)} f_1\left(x,\, y\right) = f_1\left(h^{-1}.x,\ h^{-1}.y\right) = D_{yx} q(x) = D_{yx} f\left(h^{-1}.x\right) = D_{yx}\left(T_h^{(1)} f\right)$$

olup,

$$D_{yx}\left(T_h^{(1)} f\right) = T_h^{(2)}\left(D_{yx} f\right)$$

elde edilir. Yani D_{yx} polarizasyon operatörü H - *ekuvaryant* operatördür. ♦

Sonuç 13: Eğer f, H - *invaryant* ise $D_{yx}f$ de H - *invaryant* 'tır.

İspat**:** $\forall h \in H$ için $T_h^{(1)} f(x) = f\left(h^{-1}.x\right) = f(x)$ 'dir. Buradan;

$$D_{yx} f(x) = D_{yx} f\left(h^{-1}.x\right) = D_{yx} T_h^{(1)} f(x) = T_h^{(2)} D_{yx} f(x)$$

olup, $D_{yx}f$, H - *invaryant* 'tır. ♦

Sonuç 14**:** $D_{y^{(m)}x} ... D_{y^{(1)}x}$ operatörü H - *ekuvaryant* operatördür.

Sonuç 15: f, H - *invaryant* ise $D_{y^{(m)}x} ... D_{y^{(1)}x} f$ de H - *invaryant* 'tır.

1.10. Kapelli Denklikleri

$x', x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $x' = (x_1', x_2')$ ve $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere;

$$D_{x'x} f = \sum_{i=1}^{n} x_i ' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{ve} \qquad \Delta_{x'x} f = \sum_{i=1}^{n} x_i ' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

olarak tanımlanır. Burada f, hangi değişkene göre türev alınıyorsa o değişkenlere bağlı polinom olarak alıyoruz. Bu takdirde $x' \neq y$ ise;

$$D_{y'y} D_{x'x} f = D_{y'y} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i ' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} y_j ' \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i ' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \overset{x' \neq y \text{ ise}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} y_j '.x_i ' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j}$$

olarak tanımlanır. Hiçbir koşul yoksa;

$$\Delta_{y'y} \Delta_{x'x} f := \sum_{i,j=1}^{n} y_j '.x_i ' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j}$$

olarak tanımlanır.

Üç tane vektör için bu aşağıdaki şekilde ifade edilir: $x' \neq y,\ x' \neq z,\ y' \neq z$ ise;

$$D_{z'z} D_{y'y} D_{x'x} f = D_{z'z} \sum_{i,j=1}^{n} y_j '.x_i ' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j} = \sum_{i,j,k=1}^{n} z_k '.y_j '.x_i ' \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i . \partial y_j . \partial z_k}$$

olur. Hiçbir koşul yoksa;

$$\Delta_{z'z} \Delta_{y'y} \Delta_{x'x} f := \sum_{i,j,k=1}^{n} z_k '.y_j '.x_i ' \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i . \partial y_j . \partial z_k}$$

olarak ifade edilir

$x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}$, m tane vektör için $k<r$ olmak üzere $\overline{x}^{(k)} \neq x^{(r)}$ ise;

$$D_{\overline{x}^{(m)}x^{m}} D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} ... D_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum_{i_1,\ ...,\ i_m=1}^{n} \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{(m)} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_m}^{(m)}}$$

olarak ifade edilir. Hiçbir koşul yoksa;

$$\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum_{i_1,\ ...,\ i_m=1}^{n} \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{(m)} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_m}^{(m)}}$$

olarak ifade edilir. $D_{y'y}\Delta_{x'x} f$ olarak aldığımızda bu aşağıdaki gibi değişir:

$$D_{y'y}\Delta_{x'x} f = \sum_{j=1}^{n} y_j{}' \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,\,j=1}^{n} y_j{}'.x_i{}' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j} + \delta_{yx'} . \sum_{i,\,j=1}^{n} y_j{}' \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f + \delta_{yx'} . \Delta_{y'x} f = \begin{cases} \Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f + \Delta_{y'x} f, & y = x' \\ \Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f, & y \neq x' \end{cases}$$

Üç vektör için bunu yazarsak;

$$D_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f = \sum_{k=1}^{n} z_k{}' \cdot \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} y_j{}'.x_i{}' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j}\right)$$

$$= \sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} z_k{}'.y_j{}'.x_i{}' \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i . \partial y_j . \partial z_k} + \delta_{zx'} . \sum_{i,\,j=1}^{n} z_i{}'.y_j{}' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j} + \delta_{zy'} . \sum_{i,\,j=1}^{n} z_j{}'.x_i{}' \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial y_j}$$

$$= \Delta_{z'z}\Delta_{y'y}\Delta_{x'x} f + \delta_{zx'} . \Delta_{y'y}\Delta_{z'x} f + \delta_{zy'} . \Delta_{x'x}\Delta_{z'y} f$$

şeklinde olur. m tane vektör için yazarsak;

$$D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} ... \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_m}^{(m)}} \left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right)$$

$$= \sum \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_m}^{(m)} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_m}^{(m)}} + \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(1)}} \cdot \left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(m)} ... \overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right) +$$

$$+ \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(2)}} \cdot \left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(1)} . \overline{x}_{i_2}^{(2)} ... \overline{x}_{i_{m-1}}^{(m-1)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right) + ... +$$

$$+ \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(m-1)}} \cdot \left(\sum \overline{x}_{i_1}^{(1)} ... \overline{x}_{i_{m-2}}^{(m-2)} . \overline{x}_{i_{m-1}}^{(m)} \cdot \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{i_1}^{(1)} ... \partial x_{i_{m-1}}^{(m-1)}} \right)$$

$$= \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}}\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f + \delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(1)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f +$$
$$+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(2)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(2)}}\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f + ... +$$
$$+\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(m-1)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}}...\Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}}\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}}f$$

şeklinde olur. Bir alterne toplam şu şekilde açılır:

$$\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2).D_{\overline{x}^{(i_1)}\overline{x}^{(i_2)}} = D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}} - D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}}$$
$$\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ i_3).D_{\overline{x}^{(i_1)}\overline{x}^{(i_2)}\overline{x}^{(i_3)}} = D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(3)}} + D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(2)}} + D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(1)}} -$$
$$- D_{\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}} - D_{\overline{x}^{(2)}\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(3)}} - D_{\overline{x}^{(1)}\overline{x}^{(3)}\overline{x}^{(2)}}$$

Burada $\operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ i_3)$, permütasyonun çift ya da tek olmasına göre 1 ya da -1'e eşittir. $\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f$ alterne toplamını alalım. Bu ifadeyi determinant olarak şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$$\sum_{\overline{x}^{(m)},\ ...,\ \overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f$$
$$= \sum_{\overline{x}^{(m)},\ ...,\ \overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f +$$
$$+ \sum_{\overline{x}^{(m)},\ ...,\ \overline{x}^{(1)}} \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).\left(\sum_{k=1}^{m-1}\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(i_k)}}.\left(\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_k)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f\right)\right)$$
$$= \sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f - (m-1).\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).\delta_{x^{(m)}\overline{x}^{(i_m)}}.\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f$$

Buradan;

$$\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).\left(D_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}\right)\Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(i_{m-1})}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f$$
$$= \sum \operatorname{sgn}(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m).\Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(i_m)}}...\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(i_1)}}f \text{ ......(1)}$$

elde edilir. Bu eşitliği determinantlar yardımıyla şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} + (m-1).\delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\overline{x}^{(k)} = x^{(k)}$ ve $x^{(k)} \neq x^{(l)}$, $k \neq l$ $(k,\ l = 1,\ ...,\ m)$ olarak alırsak aşağıdaki determinantı elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\overline{x}^{(m)} = x^{(m+1)}$, $\overline{x}^{(m-1)} = x^{(m)}$, ..., $\overline{x}^{(1)} = x^{(2)}$ olarak alırsak aşağıdaki determinantı elde ederiz:

$$\begin{vmatrix} D_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\overline{x}^{(2)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(m)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(m)}} & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

Bunların hepsini sembolik olarak şöyle ifade edebiliriz:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$m \geq 1$ için keyfi minörler karşılıklı olarak birbirine eşittir. Bunu kullanarak aşağıdaki eşitliği göstermek istiyoruz:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

ifadesini F şeklinde işaretleyelim. Buradan;

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m+1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m+1)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = F \text{ ......(2)}$$

eşitliği elde edilir. Bunun anlamı keyfi $m.$dereceli minörlerinin eşit olması demektir.

Önerme 30: $\begin{vmatrix} \vdots \\ D_{zx} \\ D_{yx} \\ D_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots \\ \Delta_{zx} \\ \Delta_{yx} \\ \Delta_{xx} \end{vmatrix} f$ dir.

Bunun anlamı karşılık gelen minörlerin eşit olmasıdır. Yani;

$$D_{xx}f = \Delta_{xx}f \ , \ D_{yx}f = \Delta_{yx}f \ , \ D_{zx}f = \Delta_{zx}f \ , \ ...$$

İspat: $D_{zx}f = \sum_{i=1}^{n} z_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ve $\Delta_{zx}f = \sum_{i=1}^{n} z_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}$ olduğundan $D_{zx}f = \Delta_{zx}f$ elde edilir. Özel olarak $D_{xx}f = \Delta_{xx}f$ 'dir. ♦

Önerme 31: $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots \\ \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f$ 'dir. Bunun anlamı;

$$\begin{vmatrix} D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f \ , \ \left(\left(D_{yy}+1\right).\Delta_{xx} - D_{xy}.\Delta_{yx}\right) f = \left(\Delta_{yy}.\Delta_{xx} - \Delta_{xy}.\Delta_{yx}\right) f$$

$\begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f$, $\begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f$, ... demektir.

İspat: (1) eşitliğinden $m=2$ durumunda,

$$\sum \pm \left(D_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}} + \delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}} \right).\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f = \sum \pm \Delta_{\overline{x}^{(2)}x^{(2)}}.\Delta_{\overline{x}^{(1)}x^{(1)}} f$$

elde edilir. Burada $\overline{x}^{(2)} = y$, $x^{(2)} = y$, $\overline{x}^{(1)} = x$, $x^{(1)} = x$ olarak alırsak yukarıdaki eşitliği şu şekilde yazabiliriz:

$$\sum \pm \left(\left(D_{yy} + 1 \right).\Delta_{xx} \right) f = \sum \pm \left(\Delta_{yy}.\Delta_{xx} \right) f$$

Bu ifadenin determinant olarak ifadesi şu şekildedir:

$$\begin{vmatrix} D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \\ D_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \\ \Delta_{xy} & \Delta_{xx} \end{vmatrix} f,\ \left(D_{yy}+1 \right).\Delta_{xx} f - D_{xy}.\Delta_{yx} f = \Delta_{yy}.\Delta_{xx} f - \Delta_{xy}.\Delta_{yx} f$$

$m=2$ genel durumunda $\overline{x}^{(2)} = z$, $x^{(2)} = y$, $\overline{x}^{(1)} = y$, $x^{(1)} = x$ olarak alırsak;

$$\sum \pm \left(D_{zy} + \delta_{zy} \right).\Delta_{yx} f = \sum \pm \left(\Delta_{zy}.\Delta_{yx} \right) f$$

elde ederiz. Alterne toplam açılırsa;

$$\left(D_{zy}.\Delta_{yx} - \left(D_{yy}+1 \right).\Delta_{zx} \right) f = \left(\Delta_{zy}.\Delta_{yx} - \Delta_{yy}.\Delta_{zx} \right) f$$

elde edilir. Bunun determinant olarak yazılışı şöyledir:

$$\begin{vmatrix} D_{zy} & \Delta_{zx} \\ D_{yy}+1 & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{zy} & \Delta_{zx} \\ \Delta_{yy} & \Delta_{yx} \end{vmatrix} f$$

Üçüncü determinant $\overline{x}^{(2)} = z$, $x^{(2)} = y$, $\overline{x}^{(1)} = y$, $x^{(1)} = x$ alınarak benzer şekilde yapılabilir. Bu şekilde bütün determinantların eşitliği görülür. ♦

Şimdi (2) eşitliğini göstermeye çalışalım:

$m=1$ için bu eşitlik;

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \vdots \\ D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \vdots \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \vdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

$\forall i, j \in \mathbb{N}^{+}$ için $D_{x^{(i)}x^{(j)}} f = \Delta_{x^{(i)}x^{(j)}} f$ olduğundan yukarıdaki ilk önermeden dolayı eşitlik doğrudur.

$m-1$ için doğru olsun. Yani;

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & D_{x^{(m)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} + (m-2) & D_{x^{(m-1)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-2)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-2)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

olsun.

m için bu eşitliği gösterelim:

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1) & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m)}} & \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f$$

olduğunu biliyoruz. Buradan şunu elde ederiz:

$$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1)\right).M_{x^{(m)}x^{(m)}} + D_{x^{(m-1)}x^{(m)}}.M_{x^{(m-1)}x^{(m)}} + \ldots + D_{x^{(1)}x^{(m)}}.M_{x^{(1)}x^{(m)}} =$$

$$= \left(D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1)\right).M^{D}_{x^{(m)}x^{(m)}} + D_{x^{(m-1)}x^{(m)}}.M^{D}_{x^{(m-1)}x^{(m)}} + \ldots + D_{x^{(1)}x^{(m)}}.M^{D}_{x^{(1)}x^{(m)}}$$

Burada $M_{x^{(i)}x^{(m)}} = \begin{vmatrix} \Delta_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(i+1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(i+1)}x^{(1)}} \\ \Delta_{x^{(i-1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(i-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix}$, $i = 1, \ldots, m$'dir. M^{D} ise bu determinantın D operatörüne göre yazılmış halidir. Bununla eşitlik gösterilmiş olur.

$$\sum_{x^{(m)}, \ldots, x^{(1)}} \pm \Delta_{x^{(m)}x^{(m)}} \ldots \Delta_{x^{(1)}x^{(1)}} f = \sum_{x^{(m)}, \ldots, x^{(1)}} \pm \left(\sum_{i_1, \ldots, i_m} x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(m)}_{i_m} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x^{(1)}_{i_1} \ldots \partial x^{(m)}_{i_m}} \right)$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_m} \left(\sum_{x^{(m)}, \ldots, x^{(1)}} \pm x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(m)}_{i_m} \right) \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x^{(1)}_{i_1} \ldots \partial x^{(m)}_{i_m}}$$

Burada $\sum_{x^{(m)}, \ldots, x^{(1)}} \pm x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(m)}_{i_m}$ şudur:

$$\sum_{x^{(m)}, \ldots, x^{(1)}} \pm x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(m)}_{i_m} = \begin{vmatrix} x^{(1)}_{i_1} & x^{(2)}_{i_1} & \cdots & x^{(m)}_{i_1} \\ x^{(1)}_{i_2} & x^{(2)}_{i_2} & \cdots & x^{(m)}_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(1)}_{i_m} & x^{(2)}_{i_m} & \cdots & x^{(m)}_{i_m} \end{vmatrix}$$

i_k, $(k=1,\ ...,\ m)$'lar farklı değilse bu determinant sıfır olur. Eğer $m>n$ ise i_k'lar farklı olamaz ve determinant sıfır olur. $m=n$ ve içinde eşit olanlar varsa yine determinant sıfıra eşit olur. $m=n$ ve i_k'lar farklı ise $(i_1,\ i_2,\ ...,\ i_n)$'nin bir permütasyonudur. Buradan;

$$\begin{vmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_1}^{(2)} & \cdots & x_{i_1}^{(n)} \\ x_{i_2}^{(1)} & x_{i_2}^{(2)} & \cdots & x_{i_2}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_n}^{(1)} & x_{i_n}^{(2)} & \cdots & x_{i_n}^{(n)} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_n). \begin{vmatrix} x_{i_1}^{(1)} & x_{i_1}^{(2)} & \cdots & x_{i_1}^{(n)} \\ x_{i_2}^{(1)} & x_{i_2}^{(2)} & \cdots & x_{i_2}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_n}^{(1)} & x_{i_n}^{(2)} & \cdots & x_{i_n}^{(n)} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_n).\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]$$

olur. Buradan;

$$\sum_{i_1,\ ...,\ i_m=1}^{n}\left(\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_m).x_{i_m}^{(m)}...x_{i_1}^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}^{(m)}...\partial x_{i_1}^{(1)}} = \sum_{i_1,\ ...,\ i_n=1}^{n}\operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_n).\left[x^{(1)}...x^{(n)}\right]\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}...\partial x_{i_1}^{(1)}} =$$

$$=\left[x^{(1)}...x^{(n)}\right].\sum_{i_1,\ ...,\ i_n}\operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_n)\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}...\partial x_{i_1}^{(1)}}$$

$\sum_{i_1,\ ...,\ i_n}\operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_n)\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}^{(n)}...\partial x_{i_1}^{(1)}}$ operatörüne Cayley operatörü denir ve Ωf şeklinde gösterilir. O halde yukarıdaki eşitlik şu hali alır:

$$\sum_{i_1,\ ...,\ i_m=1}^{n}\left(\sum \operatorname{sgn}(i_1,\ ...,\ i_m).x_{i_m}^{(m)}...x_{i_1}^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}^{(m)}...\partial x_{i_1}^{(1)}} = \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right].\Omega f$$

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

Teorem 9:

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \cdots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \cdots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{cases} 0, & m>n \\ \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right].\Omega f, & m=n \end{cases} \quad ......(3)$$

Teorem 10: Eğer f, derecesi m olan homojen bir polinom ise $(D_{yx}f)_{y=x}=m.f$'dir.

İspat: $(D_{yx}f)_{y=x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}$ olduğunu biliyoruz. $\lambda\in\mathbb{R}$ için f, m. dereceden bir polinom olduğundan;

$$f(\lambda.x_1,\ \lambda.x_2,\ ...,\ \lambda.x_n)=\lambda^m.f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$$

olur. Buradan her iki tarafın türevi alalım: $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için;

$$\frac{\partial f\left(\lambda.x_1,\ ...,\ \lambda.x_n\right)}{\partial\lambda}=\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda.x_1\right)}\left(\lambda.x_1\right)_\lambda{}'+...+\frac{\partial f}{\partial\left(\lambda.x_n\right)}\left(\lambda.x_n\right)_\lambda{}'=m.\lambda^{m-1}.f\left(x_1,\ ...,\ x_n\right)$$

ve $\lambda=1$ için $x_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}+...+x_n\cdot\frac{\partial f}{\partial x_n}=m.f\left(x_1,\ ...,\ x_n\right)$ elde edilir. ♦

Önerme 32: f, m dereceli homojen bir polinom olsun. Bu takdirde;

$D_{y^{(m)}x}.D_{y^{(m-1)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\,|_{y^{(m)}=...=y^{(1)}=x}=m!.f(x)$ 'dir.

İspat: f, x değişkenine göre m dereceli olduğundan;

$D_{y^{(1)}x}f(x)$ x değişkenine göre $m-1$ dereceli,

$D_{y^{(2)}x}D_{y^{(1)}x}f(x)$ x değişkenine göre $m-2$ dereceli,

....

$D_{y^{(m)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)$ x değişkenine göre 0 derecelidir.

Buradan Teorem 9'dan dolayı;

$$\begin{aligned}
&D_{y^{(m)}x}\left(D_{y^{(m-1)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\right)|_{y^{(m)}=x}=1.D_{y^{(m-1)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\\
&D_{y^{(m-1)}x}\left(D_{y^{(m-2)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\right)|_{y^{(m-1)}=x}=2.D_{y^{(m-2)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\\
&D_{y^{(m-2)}x}\left(D_{y^{(m-3)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\right)|_{y^{(m-2)}=x}=3.D_{y^{(m-3)}x}...D_{y^{(1)}x}f(x)\\
&\vdots\\
&D_{y^{(1)}x}f(x)\,|_{y^{(1)}=x}=m.f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
&D_{y^{(m)}x}\left(D_{y^{(m-1)}x}\left(D_{y^{(m-2)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)\right)|_{y^{(m)}=...=y^{(1)}=x}=\\
&\qquad=1.\left(D_{y^{(m-1)}x}\left(D_{y^{(m-2)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)\right)|_{y^{(m-1)}=...=y^{(1)}=x}\\
&\qquad=1.2.\left(D_{y^{(m-2)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)|_{y^{(m-2)}=...=y^{(1)}=x}\\
&\qquad=1.2.3.\left(D_{y^{(m-3)}x}\left(\ldots\left(D_{y^{(1)}x}f(x)\right)\right)\right)|_{y^{(m-3)}=...=y^{(1)}=x}\\
&\qquad=\ldots\\
&\qquad=1.2.3...m.f(x)\\
&\qquad=m!.f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. ♦

1.11. Kapelli Denklikleri Yardımıyla 1.Esas Teoremin İndirgenmesi

$r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m$ sonlu doğal sayılar olsunlar.

$$S_r := \left\{ \left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) : r = r_1 + r_2 + ... + r_m,\ r_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ m \right\}$$

olarak alalım. $\left| S_r \right| \leq \left(r+1 \right)^m$ olduğundan S_r sonlu kümedir. S_r üzerinde bir sıralama tanımlayacağız:

Tanım 38: $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right),\ \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right) \in S_r$ olsun. Bir $k\ \left(1 \leq k \leq m \right)$ için;

$$r_1 = s_1,\ ...,\ r_{k-1} = s_{k-1} \text{ ve } r_k < s_k$$

ise $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) < \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right)$ denir. $\forall i = 1,\ 2,\ ...,\ m$ için; $r_i = s_i$ ise $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right)$’ye $\left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right)$ ‘den küçüktür denir.

Eğer $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) < \left(s_1,\ \mathrm{s}_2,\ ...,\ \mathrm{s}_m \right)$ veya $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) = \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right)$ ise $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) \leq \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right)$ denir.

Önerme 33: “$\leq$” bağıntısı S_r üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.

İspat: “$\leq$” bağıntısının sıralama bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermemiz gerekir. Şimdi bunları gösterelim:

1) $\forall \left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) \in S_r$ için;

$\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) = \left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right)$ olduğundan $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) \leq \left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right)$’dir.

2) $\forall \left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right),\ \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right) \in S_r$ için;

$\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) \leq \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right)$ ve $\left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right) \leq \left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right)$ olsun. Farz edelim; $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m \right) \neq \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m \right)$ olsun. Bu durumda en küçük bir $i = 1,\ ...,\ m$ mevcuttur ki

$r_i \neq s_i$'dir. Yani $(r_1,\ ...,r_{i-1},\ r_i,...,r_m) \neq (s_1,\ ...,s_{i-1},\ s_i,...,s_m)$'dir. $r_i \neq s_i$ olduğundan $r_i < s_i$ veya $s_i < r_i$'dir.

$r_i < s_i$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) < (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$'dir. Fakat $(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) \leq (r_1,\ r_2,\ ...,r_m)$ koşulu sağlanmadığından bu bir çelişkidir.

$s_i < r_i$ ise $(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) < (r_1,\ r_2,\ ...,r_m)$'dir. Fakat $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) \leq (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ koşulu sağlanmadığından bu da bir çelişkidir.

Dolayısıyla $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) = (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ olmak zorundadır.

3) $\forall (r_1,\ r_2,\ ...,r_m),\ (s_1,\ s_2,\ ...,s_m),\ (t_1,\ t_2,\ ...,t_m) \in S_r$ için;

❖ $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) \leq (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ ve $(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) \leq (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olsun.

i) $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) = (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ ve $(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) = (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ ise; $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) = (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olup, $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) \leq (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olur.

ii) $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) = (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ ve $(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) < (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ ise; $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) < (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olup, $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) \leq (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olur.

iii) $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) < (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ ve $(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) = (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ ise; $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) < (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olup, $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) \leq (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olur.

❖ $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) < (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ ve $(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) < (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olsun.

$(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) < (s_1,\ s_2,\ ...,s_m)$ olduğundan $\exists k \in \mathbb{N}$ için $r_1 = s_1,\ r_2 = s_2,\ ...,\ r_{k-1} = s_{k-1}$ ve $r_k < s_k$'dır.

$(s_1,\ s_2,\ ...,s_m) < (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ olduğundan $\exists l \in \mathbb{N}$ için $s_1 = t_1,\ s_2 = t_2,\ ...,\ s_{l-1} = t_{l-1}$ ve $s_l < t_l$'dir.

i) $k = l$ ise

$(r_1,\ r_2,...,r_{k-1},\ r_k,\ r_{k+1},...,r_m) < (r_1,\ r_2,...,r_{k-1},\ s_k,\ s_{k+1},...,s_m)$ ve $(r_1,\ r_2,...,r_{k-1},\ s_k,\ s_{k+1},...,s_m) < (r_1,\ r_2,...,r_{k-1},\ t_k,\ t_{k+1},...,t_m)$ olur.

$r_i = s_i = t_i$, $i = 1,\ 2,\ ...,k-1$ ve $r_k < s_k < t_k$ olduğundan $r_k < t_k$'dır. Buradan $(r_1,\ r_2,\ ...,r_m) < (t_1,\ t_2,\ ...,t_m)$ elde edilir.

ii) $k<l$ ise

$(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{k-1},\ r_k,\ r_{k+1},\ ...,\ r_l,\ ...,\ r_m)<(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{k-1},\ s_k,\ s_{k+1},\ ...,\ s_l,\ ...,\ s_m)$ ve $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{k-1},\ s_k,\ ...,\ s_{l-1},\ s_l,\ s_{l+1},\ ...,\ s_m)<(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{k-1},\ s_k,\ ...,\ s_{l-1},\ t_l,\ t_{l+1},\ ...,\ t_m)$ olur. k. bileşen için $r_i=s_i=t_i$, $i=1,\ 2,\ ...,\ k-1$ ve $r_k<s_k=t_k$ olduğundan $r_k<t_k$ elde edilir ki buradan $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)<(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m)$ olur.

iii) $k>l$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{l-1},\ r_l,\ ...,\ r_{k-1},\ r_k,\ ...,\ r_m)<(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{l-1},\ r_l,\ ...,\ r_{k-1},s_k,\ ...,\ s_m)$ ve $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{l-1},\ r_l,\ ...,\ r_{k-1},\ s_k,\ s_{k+1},\ ...,\ s_m)<(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_{l-1},\ t_l,\ t_{l+1},\ ...,\ t_m)$'dir. l.bileşen için $r_i=s_i=t_i$, $i=1,\ 2,\ ...,\ l-1$ ve $r_l=s_l<t_l$ olup, $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)<(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m)$ elde edilir. ♦

Önerme 34: $(S_r,\ \leq)$ iyi sıralı bir kümedir.

İspat: $\forall(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m),\ (s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)\in S_r$ için $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\neq(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ olsun. Bu takdirde öyle bir en küçük k vardır ki $r_k\neq s_k$'dır. Buradan $r_k<s_k$ veya $s_k<r_k$'dır.

$r_k<s_k$ ise $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)<(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ olur.

$s_k<r_k$ ise $(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)<(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ olur.

Dolayısıyla $(S_r,\ \leq)$ iyi sıralı bir kümedir. ♦

Önerme 35: $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\in S_r$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ bir önerme olsun.

1) $T(0,\ 0,\ ...,\ r)$ doğru olsun.

2) $(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)<(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$'nin doğru olmasından $T(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m)$ doğru oluyorsa $\forall(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\in S_r$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ doğrudur.

İspat**:** Farz edelim; $\exists(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\in S_r$ için $T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)$ doğru olmasın.

$$B=\{(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\in S_r:T(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m)\text{ doğru değil}\}\subset S_r$$

olarak alalım. Varsayımımıza göre $B \neq \varnothing$ 'dir. S_r sonlu ve iyi sıralı olduğundan B 'nin bir en küçük elemanı vardır. $\left(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,\ r_m^0\right) \in B$, B 'nin en küçük elemanı olsun.

$\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) < \left(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,\ r_m^0\right)$ olan $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) \in S_r$ 'ler için $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) \notin B$ olduğundan $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ doğrudur. Hipoteze göre $T\left(r_1^0,\ r_2^0,\ ...,\ r_m^0\right)$ doğru olmalıdır. Fakat bu bir çelişkidir. ♦

Önerme 36: $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) \in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ bir önerme olsun.

1) $r_1 = r_2 = ... = r_{m-n} = 0$ olmak üzere $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) = \left(0,\ 0,\ ...,\ 0,\ r_{m-n+1},\ ...,\ r_m\right) \in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ doğru olsun.

2) $\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) < \left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m\right)$ olan $\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) \in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$'nin doğru olmasından $T\left(s_1,\ s_2,\ ...,\ s_m\right)$ doğru oluyorsa $\forall\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right) \in S_r$ için $T\left(r_1,\ r_2,\ ...,\ r_m\right)$ doğrudur.

İspat: Önerme 35'e benzer şekilde yapılır. ♦

Teorem 11: $H \subset O(n)$ bir alt grup ve $x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}$ $\mathbb{R}^n$ 'de m tane bilinmeyen vektör olsun.

$m = n$ için $\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N$, $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$ 'nin üreteç kümesi ise;

$m > n$ durumunda,

$$\left\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N,\ D_{x^{(i)}x^{(j)}}\varphi_k,\ i,j = 1,\ 2,\ ...,\ m,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ N,\ D_{x^{(i)}x^{(j)}}\left(D_{x^{(s)}x^{(t)}}.\varphi_k\right),\ ...\right\} \text{......(4)}$$

kümesi, $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^H$ 'nin üreteç kümesidir.

İspat: Her polinom homojen polinomların toplamı şeklinde tek türlü olarak yazılabileceğinden biz burada homojen polinomları göz önüne alabiliriz. Her homojen polinom da her $x^{(i)}$ 'ye $(i = 1, 2, ..., m)$ göre homojen olan polinomların toplamı olarak tek türlü yazılabilir. İnvaryant polinomların keyfi homojen kısmı da invaryanttır. Teoremi $x^{(i)}$ 'ye göre homojen olan invaryant polinomlar için ispat edersek keyfi invaryant polinom için de ispatlamış oluruz.

$f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)$, $x^{(1)}$'e göre derecesi r_1, $x^{(2)}$'ye göre derecesi r_2, …., $x^{(m)}$'ye göre derecesi r_m olan her bir $x^{(i)}$'ye $(i = 1, 2, ..., m)$ göre homojen olan bir invaryant polinom olsun. Buradan f'nin derecesi $r = r_1 + r_2 + ... + r_m$ olur.

Kapelli denkliklerindeki operatör determinantının ilk elemanı;

$$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1)...\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}} + 1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}\right)$$

şeklindedir. Bunun f'deki görüntüsü şu şekildedir:

$$\left(D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1)...\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}} + 1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}}\right)f = (r_m + m - 1)...(r_2 + 1).r_1 f$$

$\rho = (r_m + m - 1)...(r_2 + 1).r_1$ olarak alalım. f, $x^{(1)}$ değişkenine bağlı ise $r_1 > 0$ olur. Bu durumda $\rho \neq 0$'dır.

Operatör determinantının diğer elemanlarında $D_{x^{(\alpha)}x^{(\alpha)}} + \alpha - 1$ diyagonal elemanlarını bırakabiliriz. Onların etkisi f'nin bir sayı ile çarpımını verir. Bunların hepsini ρ^* şeklinde gösterelim. Bu takdirde böyle bir eleman şu şekilde olur:

$$\rho^*.D_{x^{\beta_q}x^{\alpha_q}}...D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}}.$$

Burada $\alpha_q > \alpha_{q-1} > ... > \alpha_2 > \alpha_1$, $\beta_i \neq \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., q$ ve $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$'lar α_1, α_2, ..., α_q'ların bir permütasyonudur. Buradan $q \geq 2$ ve $\beta_1 > \alpha_1$ elde edilir. Çünkü $q = 1$ ise yukarıdaki ifade $\rho^*.D_{x^{\beta}x^{\alpha}}$ biçiminde olup, $\beta = \alpha$ elde edilir. O halde $q \geq 2$ olmalıdır. α_1 en küçük ve $\beta_1 \neq \alpha_1$ olduğundan $\beta_1 > \alpha_1$ olmalıdır. Bu durumda;

$$\rho.f = \left(D_{x^{(m)}x^{(m)}} + (m-1)\right)...\left(D_{x^{(2)}x^{(2)}} + 1\right).D_{x^{(1)}x^{(1)}} f$$
$$f^* = \rho^*.D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$$
$$\wp = D_{x^{\beta_q}x^{\alpha_q}}...D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}}$$

olarak alırsak Kapelli denkliklerinin sol tarafı $\rho.f - \sum \wp.f^*$ halini alır. $D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$, x^{α_1}'e göre f'den daha küçük dereceye sahiptir.

Şimdi Kapelli denkliklerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\rho.f = \sum \wp.f^* \qquad (m > n)......(5)$$
$$\rho.f = \sum \wp.f^* + \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]\Omega f \qquad (\mathrm{m = n})......(6)$$

$m > n$ için $\rho.f = \sum \wp.f^*$ 'dır. f, $x^{(1)}$'e bağlı ise $\rho \neq 0$ olacağından $f = \frac{1}{\rho} \cdot \sum \wp.f^*$ olur.

Tümevarımla iddiamızı ispatlamaya çalışalım. En küçük durum vektör sayısının n tane olduğu durumdur.

$m = n$ için $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$, $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç kümesi olsun. Bu durumda $m > n$ için;

$$\left\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N, D_{x^{(i)}x^{(j)}} \varphi_1, ..., D_{x^{(k)}x^{(k)}} ... D_{x^{(1)}x^{(1)}} \varphi_1, ...\right\}$$

kümesinin $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^H$ için üreteç kümesi olduğunu gösterelim.

$m = n$ tane vektör için yukarıdaki kabul gereği (4) kümesinin üreteç kümesi olduğu açıktır.

$m-1$ tane vektör için (4) kümesi üreteç kümesi olsun. Şimdi m tane vektör durumuna bakalım. $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$ vektörleri için $r_1 = 0$ ise $m-1$ vektöre dönüştüğünden iddia geçerli olur. $r_1 \neq 0$ olsun. Polinomun derecesi $r = r_1 + r_2 + ... + r_m$ olduğundan bunlardan biri sıfır ise $m-1$ vektör durumuna geleceğinden iddia geçerli olur. Dolayısıyla hepsi sıfırdan farklı olsun.

"$\leq$" sıralamasına göre $(r_1, r_2, ..., r_m)$'den küçük olanlar için iddia doğru olsun. $D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$ 'nin x^{α_1}'e göre derecesi f'den küçük olduğundan $D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f$ (4) kümesi ile üretilebilir. Yani $\exists \psi$ için;

$$D_{x^{\beta_1}x^{\alpha_1}} f = \psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N . D\varphi_1, D\varphi_2, ..., D\varphi_N, ...)$$

$$f = \frac{1}{\rho} \cdot \sum D_{x^{\beta_k}x^{\alpha_k}} ... D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}} \psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N . D\varphi_1, D\varphi_2, ..., D\varphi_N, ...)$$

olur. Sondaki ifadeyi açarsak:

$$D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}} \psi\left(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N . D\phi_1, D\phi_2, ..., D\phi_N, ...\right)$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}} \varphi_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_2} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}} \varphi_2 + ... + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_N} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}} \varphi_N + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1} D_{x^{\beta_2}x^{\alpha_2}} \varphi_1 (D\varphi_1) + ... \text{ olur.}$$

Bu şekilde devam edilirse f fonksiyonu da (4) kümesinin elemanları cinsinden yazılmış olur. Dolayısıyla $\forall m > n$ için (4) kümesi $\mathbb{R}\left[x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right]^{H}$'nin üreteç kümesi olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ♦

Not: $S = \bigcup_{r=-1}^{\infty} S_r$ olarak alalım. Burada;

$$
\begin{aligned}
&S_{-1} = \{\overline{0}\} \\
&S_0 = \{(0, 0, 0, ..., 0)\} \\
&S_1 = \{(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, 0, ..., 1)\} \\
&\vdots \\
&S_r = \{(r_1, r_2, r_3, ..., r_m) : r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_m = r, r_i \in N, i = 1, 2, 3, ..., m\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olarak alınmaktadır. Bu S kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlayalım.

Tanım 39: $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ olsun. Eğer $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ için;

$r < s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir.

$r = s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S_r$ olacağından S_r'deki sıralama bağıntısı alınır.

$(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ veya $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir.

Bu şekilde tanımlanan "$\le$" bağıntısı S üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. Şimdi bunu gösterelim:

1) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) = (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$'dir.

2) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$ olsun. Bu elemanlar için $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ olsun. $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ olduğundan $r \le s$'dir. $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $s \le r$'dir. O halde $r = s$'dir. Buradan $(r_1, r_2, ..., r_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m)$ S_r'nin elemanlarıdır. Lemma 2'den $(S_r, \le)$ iyi sıralı küme

olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (r_1, r_2, ..., r_m)$ olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) = (s_1, s_2, ..., s_m)$ elde edilir.

3) $\forall (r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m), (t_1, t_2, ..., t_m) \in S$ için $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ ve $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (t_1, t_2, ..., t_m)$ olsun. Bunlar için $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$, $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ ve $t_1 + t_2 + ... + t_m = t$ olsun. $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (s_1, s_2, ..., s_m)$ olduğundan $r \le s$'dir. $(s_1, s_2, ..., s_m) \le (t_1, t_2, ..., t_m)$ olduğundan $s \le t$'dir. Buradan $r \le t$ olur. $r < t$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (t_1, t_2, ..., t_m)$ elde edilir. $r = t$ ise S_r'deki sıralama geçerli olacağından yine $(r_1, r_2, ..., r_m) \le (t_1, t_2, ..., t_m)$ olur. ♦

Önerme 37: $(S, \le)$ iyi sıralı bir kümedir.

İspat: $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S$ için;

$(r_1, r_2, ..., r_m) \ne (s_1, s_2, ..., s_m)$, $r_1 + r_2 + ... + r_m = r$ ve $s_1 + s_2 + ... + s_m = s$ olsun.

i) $r = s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m), (s_1, s_2, ..., s_m) \in S_r$ olur. Lemma 2'den $(S_r, \le)$ iyi sıralı küme olduğundan $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$ veya $(s_1, s_2, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_m)$ elde edilir.

ii) $r \ne s$ ise $r < s$ veya $s < r$'dir. $r < s$ ise $(r_1, r_2, ..., r_m) < (s_1, s_2, ..., s_m)$'dir. $s < r$ ise $(s_1, s_2, ..., s_m) < (r_1, r_2, ..., r_m)$'dir.

Dolayısıyla $(S, \le)$ iyi sıralı bir kümedir. ♦

Teorem 12: $H \subset SO(n)$ bir alt grup olmak üzere $n-1$ tane bilinmeyen vektör için $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-1)}\right]^H$'nin üreteç kümesi $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ olsun. Bu durumda $m > n-1$ için $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç kümesi;

$$\left\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ ...,\ \varphi_N,\ D\varphi_1,\ D\varphi_2,\ ...,\ D\varphi_N,\ DD\varphi_1,\ ...,\ \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right],\ D\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right],\ ...\right\} ......(7)$$

biçimindedir.

İspat: $(r_1, r_2, ..., r_m) \in S$ için $T(r_1, r_2, ..., r_m)$ önermesi yukarıdaki ifade olsun.

$m > n$ için Teorem 11'e göre H grubu için (7) kümesi $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç kümesidir.

$m=n$ durumunu göz önüne alalım. $\forall(0, r_2, ..., r_n) \in S$ için $T(0, r_2, ..., r_n)$ doğrudur. $(s_1, s_2, ..., s_n) \leq (r_1, r_2, ..., r_n)$ olan $\forall(s_1, s_2, ..., s_n)$'ler için $T(s_1, s_2, ..., s_n)$ doğru olsun. $T(r_1, r_2, ..., r_n)$'nin doğru olduğunu gösterelim:

$f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-1)}\right)$, H - *invaryant* polinomunu göz önüne alalım.

$m=n$ için;

$$\rho.f = \sum \wp.f^* + \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]\Omega f$$

olduğunu biliyoruz. f, $x^{(1)}$'e bağlı değilse tümevarım hipotezi gereği f, (7) kümesinin elemanları cinsinden üretilebilir. f, $x^{(1)}$'e bağlı olsun. Bu durumda $\rho \neq 0$'dır ve

$$f = \frac{1}{\rho} \cdot \sum \wp.f^* + \frac{1}{\rho} \cdot \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right]\Omega f$$

dir. f^*'ın $x^{(1)}$'e göre derecesi S_r'deki sıralamaya göre f'den küçüktür. Ωf'nin derecesi ise $r-n$'dir. Tümevarım hipotezine göre bunların toplamı da (7) kümesinin elemanları cinsinden yazılabilir. Dolayısıyla f, (7) kümesinin elemanları cinsinden yazılabilir. Bundan dolayı $\forall m > n-1$ için f, (7) kümesinin elemanları cinsinden yazılabilir. O halde $\forall m > n-1$ için (7) kümesi $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^H$'nin üreteç kümesidir. ♦

2.1. $O(n)$ ve $SO(n)$ Grupları İçin 1. Temel Teorem

Tanım 40: $O(n)$ grubunun $\mathbb{R}^n$ üzerindeki etkisini alalım. f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir polinom olsun. $f\left(g.x^{(1)}, g.x^{(2)}, ..., g.x^{(m)}\right) = \lambda(g).f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)$, $\forall g \in O(n)$ olacak şekilde $\exists\lambda(g)$ fonksiyonu varsa $f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\right)$ polinomuna nispi $O(n)$- *invaryant* denir.

Not: Yukarıdaki $\lambda(g)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Ağırlık fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir: $\forall g, g_1, g_2 \in O(n)$ için;

1) $\lambda(g_1.g_2) = \lambda(g_1).\lambda(g_2)$ (Önerme 23'ten)

2) $\lambda(g) = \pm 1$

Gerçekten, Önerme 26'ya göre $\lambda(g)=(\det g)^k$ 'dır. Keyfi $g\in O(n)$ için $\det g=\pm 1$ olduğundan $\lambda(g)=\pm 1$ 'dir.

Tanım 42: f, nispi $O(n)$ - *invaryant* polinom olmak üzere $\forall g\in O(n)$ için $\lambda(g)=1$ ise f 'ye çift (mutlak) invaryant polinom denir.

Tanım 42: f, nispi $O(n)$ - *invaryant* polinom olmak üzere $\forall g\in SO(n)$ için $\lambda(g)=1$ ve $g\in O(n)$ için $\lambda(g)=\det g=-1$ ise f 'ye tek invaryant polinom denir.

Örnek 44: $O(1)=\{1,-1\}$ grubunun $\mathbb{R}$ üzerindeki etkisini alalım. $f\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$\lambda(1)=1$ ve $\lambda(-1)=1$ ise $f(-x)=f(x)$ olup; f, çift invaryant polinomdur.

$\lambda(1)=1$ ve $\lambda(-1)=-1$ ise $f(-x)=-f(x)$ olup; f, tek invaryant polinomdur.

Önerme 38:

1) Çift invaryant polinomların toplamı çift invaryant polinomdur.

2) f, çift invaryant polinom ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda.f$ polinomu çift invaryant polinomdur.

3) Çift invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur

İspat:

1) f_1, f_2 çift invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$$f_1(g.x)=\lambda(g).f_1(x),\ f_2(g.x)=\lambda(g).f_2(x),\ \forall g\in O(n),\ \lambda(g)=1$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $f_1(x)+f_2(x)$'in çift olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} f_1(g.x)+f_2(g.x) &= \lambda(g).f_1(x)+\lambda(g).f_2(x)= \\ &= \lambda(g).\left(f_1(x)+f_2(x)\right) \end{aligned}$$

olup, $\lambda(g)=1$ olduğundan $f_1(x)+f_2(x)$ çifttir.

2) f, çift invaryant polinom ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. f çift olduğundan,

$$f(g.x)=\lambda(g).f(x),\ \lambda(g)=1$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\lambda.f(g.x)=\lambda.\left(\lambda(g).f(x)\right)=\lambda.\lambda(g).f(x)=\lambda(g).\lambda.f(x)$$

olup, $\lambda(g)=1$ olduğundan $\lambda.f(x)$ çifttir.

3) f_1, f_2 çift invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$$f_1(g.x)=\lambda(g).f_1(x),\ f_2(g.x)=\lambda(g).f_2(x),\ \forall g\in O(n),\ \lambda(g)=1$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$f_1(g.x).f_2(g.x)=\left(\lambda(g).f_1(x)\right).\left(\lambda(g).f_2(x)\right)=\lambda(g).\lambda(g).f_1(x).f_2(x)$$

olup, $\lambda(g)=1$ olduğundan $f_1.f_2$ çifttir. ♦

Önerme 39:

1) Tek invaryant polinomların toplamı tek invaryanttır.

2) f, tek invaryant polinom ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda.f$ polinomu tek invaryant polinomdur.

3) Tek invaryant polinomların çarpımı çift invaryant polinomdur.

4) Tek ve çift invaryant polinomun çarpımı tek invaryant polinomdur.

İspat:

1) f_1, f_2 tek invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$$f_1(g.x)=\det g.f_1(x),\ f_2(g.x)=\det g.f_2(x),\ \forall g\in O(n),\ \det g=-1$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_1(g.x)+f_2(g.x) &= \det g.f_1(x)+\det g.f_2(x)= \\ &= \det g.\left(f_1(x)+f_2(x)\right) \end{aligned}$$

olup, $\det g=-1$ olduğundan $f_1(x)+f_2(x)$ tektir.

2) f, tek invaryant polinom ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. f tek olduğundan,

$$f(g.x)=\det g.f(x),\ \det g=-1$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\lambda.f(g.x)=\lambda.\left(\det g.f(x)\right)=\lambda.\det g.f(x)=\det g.\lambda.f(x)$$

olup, $\det g=-1$ olduğundan $\lambda.f(x)$ tektir.

3) f_1, f_2 tek invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$$f_1(g.x)=\det g.f_1(x),\ f_2(g.x)=\det g.f_2(x),\ \det g=-1$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$f_1(g.x).f_2(g.x)=\left(\det g.f_1(x)\right).\left(\det g.f_2(x)\right)=\left(\det g\right)^2.f_1(x).f_2(x)$$

olup, $\det g=-1$ olduğundan $f_1.f_2$ çifttir.

4) f_1 tek ve f_2 çift invaryant polinomlar olsun. Bu takdirde,

$$f_1(g.x)=\det g.f_1(x),\ f_2(g.x)=\lambda\left(g\right).f_2(x),\ \lambda\left(g\right)=1,\ \det g=-1$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}f_1(g.x).f_2(g.x)&=\left(\det g.f_1(x)\right).\left(\lambda\left(g\right).f_2(x)\right)=\det g.f_1(x).\lambda\left(g\right).f_2(x)\\&=\det g.\left(f_1(x).f_2(x)\right)\end{aligned}$$

olup, $\det g=-1$ olduğundan $f_1.f_2$ tektir. ♦

Örnek 45: $f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(n)}\right)=\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]$ invaryant polinomunu alalım.

$$f\left(g.x^{(1)},\ g.x^{(2)},\ ...,\ g.x^{(m)}\right)=\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}...g.x^{(m)}\right]=\det g.\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]$$

olduğundan $\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]$ polinomu tek invaryant polinomdur.

Önerme 40:

1) f, çift invaryant polinom ise Ωf tek invaryant polinomdur.

2) f, tek invaryant polinom ise Ωf çift invaryant polinomdur.

İspat: Kapelli denkliklerinin $m=n$ durumunu hatırlayalım:

$$\begin{vmatrix} D_{x^{(m)}x^{(m)}}+(m-1) & D_{x^{(m)}x^{(m-1)}} & \dots & D_{x^{(m)}x^{(1)}} \\ D_{x^{(m-1)}x^{(m)}} & D_{x^{(m-1)}x^{(m-1)}}+(m-2) & \dots & D_{x^{(m-1)}x^{(1)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{x^{(1)}x^{(m)}} & D_{x^{(1)}x^{(m-1)}} & \dots & D_{x^{(1)}x^{(1)}} \end{vmatrix} f = \begin{cases} 0, & m>n \\ \left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right].\Omega f, & m=n \end{cases}$$

Şimdi önermenin ispatına geçelim:

1) f, çift invaryant polinom olsun. Bu takdirde Sonuç 13'ten $D_{yx}f$ de çift invaryant polinomdur. Buradan;

$$\begin{aligned} T_g^{(2)}D_{yx^{(i)}}f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right) &= D_{yx^{(i)}}T_g^{(1)}f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)= \\ &= D_{yx^{(i)}}f\left(g.x^{(1)},\ g.x^{(2)},\ ...,g.x^{(m)}\right)= \\ &= D_{yx^{(i)}}f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right) \end{aligned}$$

olur.

$$T_g^{(2)}\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]\Omega f=\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}...g.x^{(m)}\right]\Omega f=\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f$$

yazılır.

$$\begin{aligned} &\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}...g.x^{(m)}\right]\Omega f=\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f \\ &\qquad\Rightarrow \det g.\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f=\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(m)}\right]\Omega f \end{aligned}$$

olduğundan;

$$T_g^{(1)}\Omega f=\det g.\Omega f$$

olup; Ωf, tek invaryant polinomdur.

2) f, tek invaryant polinom olsun. Bu takdirde Önerme 28'den $D_{yx}f$ de tek invaryant polinomdur. Gerçekten, $h\in O(n)$ olsun. $h\in SO(n)$ ise,

$$\left(T_h^{(1)}f\right)(x)=f\left(h^{-1}.x\right)=f(x)$$

olur. Buradan,

$$T_h^{(2)}\left(D_{yx}f\right)=D_{yx}f$$

olup, $D_{yx}f$ polinomu $SO(n)$-*invaryant*'tır.

Şimdi $h\in O_{-}(n)$ yani $\det h=-1$ olsun. Buradan,

$$\left(T_h^{(1)}f\right)(x)=f\left(h^{-1}.x\right)=\lambda\left(g\right).f(x)=-1.f(x)=-f(x)$$

olur.

$$T_h^{(2)}\left(D_{yx}f\right)=D_{yx}\left(-f\right)=T_h^{(2)}\left(D_{yx}f\right)=-D_{yx}f$$

olup, $D_{yx}f$ tek invaryant polinomdur.

Buradan;

$$\begin{aligned} T_g^{(2)} D_{yx^{(i)}} f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) &= D_{yx^{(i)}} T_g^{(1)} f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) \\ &= D_{yx^{(i)}} f\left(g.x^{(1)},\ g.x^{(2)},\ \ldots,\ g.x^{(m)}\right) \\ &= D_{yx^{(i)}} \lambda\left(g\right) f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) \end{aligned}$$

olur.

$$T_g^{(2)}\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f = \left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}\ldots g.x^{(m)}\right]\Omega f = \det g.\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f$$

$$\left[g.x^{(1)}g.x^{(2)}\ldots g.x^{(m)}\right]T_g^{(1)}\Omega f = \det g.\left[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\right]\Omega f$$

olduğundan;

$$T_g^{(1)}\Omega f = \Omega f$$

olup; Ωf , çift invaryant polinomdur. ♦

Önerme 41: $f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right)$, $SO(n)$ - *invaryant* polinom olsun. Bu takdirde;

$$f\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) = f_1\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right) + f_2\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right)$$

şeklinde f_1 çift ve f_2 tek $SO(n)$ - *invaryant* polinomların toplamı şeklinde yazılabilir.

İspat: $f(x) = \left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)}\right)$, keyfi $SO(n)$ - *invaryant* polinom olsun.

$$h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $h \in O(n)$ alalım. Burada $\det h = -1$ ve $h^{-1} = h$ 'dir. Bu takdirde;

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) + f(h.x)\right)$$

çift polinom,

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) - f(h.x)\right)$$

tek polinomdur.

Gerçekten; $g \in O(n)$ ve $\det g = -1$ için,

$$g = g_1.h = h.g_2$$

olacak şekilde $g_1,\ g_2 \in SO(n)$ mevcuttur ve $g_1 = g.h^{-1},\ g_2 = h^{-1}.g$ 'dir. Buradan;

$g \in SO(n)$ ise,

$$\varphi(g.x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(g.x) + f(h.g.x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) + f(h.g.h^{-1}.h.x\right)$$

Burada $h.g.h^{-1} \in SO(n)$ ve f, $SO(n)$ - *invaryant* olduğundan,

$$\varphi(g.x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) + f(h.x)\right) = \varphi(x)$$

olur.

$g \in O(n)$ ve $\det g = -1$ ise,

$$\varphi(g.x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(g.x) + f(h.g.x)\right)$$

Burada; $g = g_1.h$ olacak şekilde $g_1 \in SO(n)$ mevcuttur.

$$\varphi(g.x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(g_1.h.x) + f(h.g.x)\right)$$

yazarız. Burada f 'nin $SO(n)$ - *invaryant* ve $h.g \in SO(n)$ olduğu kullanılarak,

$$\varphi(g.x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(h.x) + f(x)\right) = \varphi(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\varphi(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) + f(h.x)\right)$, $O(n)$ - *invaryant* 'tır. Yani çifttir.

Şimdi $\psi(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) - f(h.x)\right)$ 'in tek invaryant olduğunu gösterelim: Bunun için önce bunun $SO(n)$ - *invaryant* olduğunu gösterelim:

$g \in SO(n)$ ise,

$$\psi(g.x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(g.x) - f(h.g.x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) - f(h.g.h^{-1}.x)\right)$$

$h.g.h^{-1} \in SO(n)$ ve f, $SO(n)$ - *invaryant* olduğundan,

$$\psi(g.x) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(x) - f(h.x)\right) = \psi(x)$$

elde edilir.

$g \in O(n)$ ve $\det g = -1$ ise,

$$\psi(g.x) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(g.x) - f(h.g.x) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(g_1.h.x) - f(h.g.x) \right)$$

yazarız. Burada $h.g \in SO(n)$ ve f 'nin $SO(n)$-*invaryant* olduğu kullanılarak,

$$\psi(g.x) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(h.x) - f(x) \right) = -\psi(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\psi(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(x) - f(h.x) \right)$ tek invaryanttır. ♦

Teorem 13:

1) Keyfi çift invaryant polinom;

$$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)} \right\rangle;\ i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ m \text{'lerin}$$

polinomu olarak ifade edilebilir.

2) Keyfi tek invaryant polinom, $\varphi\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)$ çift invaryant polinom olmak üzere;

$$\left[x^{(i_1)} x^{(i_2)} ... x^{(i_n)} \right] . \varphi\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right);\ i_1,\ i_2,\ ...,\ i_n = 1;\ i_1 < i_2 < ... < i_n$$

şeklindeki tek invaryant polinomların toplamı olarak ifade edilebilir.

İspat: T_n^m ile n-boyutlu uzayda m tane noktaya bağlı bu teoremi gösterelim. Teoremin 1. kısmı Kapelli denklikleri kullanılarak $m > n$ halinde T_n^m, T_n^n 'nin ispatına indirilir. Şimdi T_n^n 'yi n 'ye göre tümevarımla ispat edelim:

$n = 1$ için T_1^1 'i ispatlayalım. $n = 1$ durumunda $O(1) = \{-1,\ 1\}$ ve $SO(1) = \{1\}$ 'dir. Bu durumda $\langle x,\ x \rangle = x^2$ ve $[x] = x$ 'dir.

$SO(1) = \{1\}$ olduğundan dolayı keyfi $f(x)$ polinom $SO(1)$-*invaryant* 'tır. Bu durumda çift polinom $f(x) = f(-x)$ eşitliğini sağlar. Yani analizde tanımladığımız çift polinomdur. Keyfi çift polinom,

$$f(x) = a_0 + a_2.x^2 + ... + a_{2k}.x^{2k}$$

şeklindedir. Dolayısıyla h polinomu,

$$f(x) = \varphi(x^2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece T_1^1 'in 1. kısmı ispat edildi.

$n = 1$ durumunda tek polinom $f(-x) = -f(x)$ şeklindedir. Yani analizde kullandığımız tek polinomdur. Keyfi tek polinom,

$$f(x)=a_1.x+a_3.x^3+...+a_{2k+1}.x^{2k+1}$$

şeklindedir. Bu polinom,

$$f(x)=x.\left(a_1+a_3.x^2+...+a_{2k+1}.x^{2k}\right)=x.\varphi(x^2)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece T_1^1'in 2. kısmı da ispat edildi.

Sonuçta tümevarımın $n=1$ durumunda doğru olduğunu gösterdik.

Farz edelim T_{n-1}^{n-1} doğru olsun. Bunu kullanarak T_n^n'nin doğru olduğunu göstereceğiz: $f\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, ...,\, x^{(n)}\right)$ çift polinom yani $O(n)$-*invaryant* polinom olsun. Böyle bir polinom,

$$f\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, ...,\, x^{(n)}\right)=\sum\varphi_{r_1r_2...r_n}\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, ...,\, x^{(n)}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\varphi_{r_1r_2...r_n}\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, ...,\, x^{(n)}\right)$;

$x^{(1)}$'e göre r_1 dereceli,

$x^{(2)}$'ye göre r_2 dereceli,

....

$x^{(n)}$'ye göre r_n dereceli,

homojen $O(n)$-*invaryant* polinomdur. Böyle polinomlara kısaca $\left(r_1,\, r_2,\, ...,\, r_n\right)$ dereceli homojen polinomlar diyeceğiz. Böylece T_n^n'nin 1. kısmının ispatı için;

$x^{(1)}$'e göre derecesi r_1,

$x^{(2)}$'ye göre derecesi r_2,

....

$x^{(n)}$'ye göre derecesi r_n,

olan homojen çift polinomlar olmak üzere T_n^n'nin 1. kısmının ispat edilmesi yeter. Benzer şekilde T_n^n'nin 2. kısmının da ispatı derecesi $\left(r_1,\, r_2,\, ...,\, r_n\right)$ olan homojen tek polinomlar için ispat edilmesine indiriliyor. Böylece T_n^n'nin derecesi $\left(r_1,\, r_2,\, ...,\, r_n\right)$ olan homojen polinomların ispatına indirdik.

Şimdi $f\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, ...,\, x^{(n)}\right)$, derecesi $\left(r_1,\, r_2,\, ...,\, r_n\right)$ olan homojen çift veya tek polinom olsun. $r=r_1+r_2+...r_n$ sayısını göz önüne alalım. Bölüm 1.12'de tanımlanan,

$$S_r:=\left\{\left(r_1,\, r_2,\, ...,\, r_n\right):r=r_1+r_2+...+r_n,\ r_i\geq 0,\ i=1,\ 2,\ ...,\ n\right\}$$

kümesini ele alalım. T_n^n'yi, S_r'nin $(r_1, r_2, ..., r_n)$ elemanlarına göre tümevarımla ispat edeceğiz. Bunun için önce $r < n$ durumunda T_n^n'nin doğru olduğunu gösterelim:

$r < n$ ise, $r_1, r_2, ..., r_n$'lerin içinde en az biri için $r_i = 0$'dır. Çünkü tüm $i = 1, 2, ..., n$ için $r_i \geq 1$ ise $r \geq n$ olur. Bundan dolayı $r < n$ ise $f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\right)$ aslında en fazla $n-1$ tane vektörlerin polinomudur. Şimdi farz edelim,

$$f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\right) = f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-1)}\right)$$

çift polinom ve

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_{n-1}^{(1)}, x_n^{(1)}\right) \\ x^{(2)} &= \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_{n-1}^{(2)}, x_n^{(2)}\right) \\ &\vdots \\ x^{(n-1)} &= \left(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, ..., x_{n-1}^{(n-1)}, x_n^{(n-1)}\right) \end{aligned}$$

olsun. Bu $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-1)}$'lerle üretilen alt uzayı V ile gösterelim.Bu takdirde,

$$\begin{aligned} g.x^{(1)} &= y^{(1)} = \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, ..., y_{n-1}^{(1)}, 0\right) \\ g.x^{(2)} &= y^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, ..., y_{n-1}^{(2)}, 0\right) \\ &\vdots \\ g.x^{(n-1)} &= y^{(n-1)} = \left(y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, ..., y_{n-1}^{(n-1)}, 0\right) \end{aligned}$$

olacak şekilde $g \in O(n)$ vardır. f polinomu $O(n)$-*invaryant* olduğundan,

$$f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n-1)}\right) = f\left(g.x^{(1)}, g.x^{(2)}, ..., g.x^{(n-1)}\right) = f\left(y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}\right)$$

olur. $g \in O(n)$ olduğundan,

$$\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle = \left\langle g.x^{(i)}, g.x^{(j)}\right\rangle = \left\langle y^{(i)}, y^{(j)}\right\rangle$$

olur. Dolayısıyla $f\left(y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}\right)$, $\mathbb{R}^{n-1}$ uzayındaki $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}$ vektörlerinin $O(n-1)$-*invaryant* polinomudur. ($g \in O(n)$'ler, $g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_1 \in O(n-1)$ şeklinde alınabilir.) Yani $n-1$ tane vektörlerin çift polinomudur. T_{n-1}^{n-1}'e göre $f\left(y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}\right)$ polinomu $\left\langle y^{(i)}, y^{(j)}\right\rangle$'lerin bir polinomudur. Buradan,

$$f\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, \dots, x^{(n-1)}\right) = f\left(y^{(1)},\, y^{(2)},\, \dots, y^{(n-1)}\right)$$
$$= \varphi\left(\left\langle y^{(1)},\, y^{(1)}\right\rangle,\, \left\langle y^{(1)},\, y^{(2)}\right\rangle,\, \dots,\, \left\langle y^{(n-1)},\, y^{(n-1)}\right\rangle\right)$$
$$= \varphi\left(\left\langle x^{(1)},\, x^{(1)}\right\rangle,\, \left\langle x^{(1)},\, x^{(2)}\right\rangle,\, \dots,\, \left\langle x^{(n-1)},\, x^{(n-1)}\right\rangle\right)$$

olur. Bununla $r < n$ durumunda T_n^n'nin çift polinomlar için doğru olduğunu gösterdik. Şimdi $r < n$ durumunda T_n^n'nin tek polinomlar için doğru olduğunu gösterelim:

f, tek polinom olsun. Bu durumda $f = 0$ olduğunu gösterelim:

Yukarıdaki gibi,

$$f\left(x^{(1)},\, x^{(2)},\, \dots, x^{(n-1)}\right) = f\left(g.x^{(1)},\, g.x^{(2)},\, \dots, g.x^{(n-1)}\right) = f\left(y^{(1)},\, y^{(2)},\, \dots, y^{(n-1)}\right)$$

olacak şekilde $g \in O(n)$ mevcuttur. Burada,

$$g.x^{(1)} = y^{(1)} = \left(y_1^{(1)},\, y_2^{(1)},\, \dots, y_{n-1}^{(1)},\, 0\right)$$
$$g.x^{(2)} = y^{(2)} = \left(y_1^{(2)},\, y_2^{(2)},\, \dots, y_{n-1}^{(2)},\, 0\right)$$
$$\vdots$$
$$g.x^{(n-1)} = y^{(n-1)} = \left(y_1^{(n-1)},\, y_2^{(n-1)},\, \dots, y_{n-1}^{(n-1)},\, 0\right)$$

şeklindedir.

$z \in \mathbb{R}^n$, $z = \left(z_1,\, z_2,\, \dots, z_{n-1},\, z_n\right)$ olsun. $h.z = \left(z_1,\, z_2,\, \dots, z_{n-1},\, -z_n\right)$ dönüşümünü alalım.

$$\left\langle g.x,\, g.z\right\rangle = x_1.z_1 + x_2.z_2 + \dots + x_{n-1}.z_{n-1} + \left(-x_n\right).\left(-z_n\right)$$
$$= x_1.z_1 + x_2.z_2 + \dots + x_{n-1}.z_{n-1} + x_n.z_n = \left\langle x,\, z\right\rangle$$

olduğundan $h \in O(n)$ ve $\det h = -1$'dir. f, tek polinom olduğundan,

$$f\left(h.y^{(1)},\, h.y^{(2)},\, \dots, h.y^{(n-1)}\right) = -f\left(y^{(1)},\, y^{(2)},\, \dots, y^{(n-1)}\right)$$

olur. İkinci taraftan h'nin tanımına göre,

$$g.y^{(1)} = y^{(1)},\; g.y^{(2)} = y^{(2)},\; \dots,\; g.y^{(n-1)} = y^{(n-1)}$$

olur. Buna göre,

$$f\left(h.y^{(1)},\, h.y^{(2)},\, \dots, h.y^{(n-1)}\right) = f\left(y^{(1)},\, y^{(2)},\, \dots, y^{(n-1)}\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$f\left(y^{(1)},\, y^{(2)},\, \dots, y^{(n-1)}\right) = -f\left(y^{(1)},\, y^{(2)},\, \dots, y^{(n-1)}\right)$$

olup, buradan $f = 0$ olur.

Sonuçta $r < n$ durumunda $f = 0$'dır. Buna göre böyle polinom için T_n^n doğrudur. Dolayısıyla $r < n$ durumunda T_n^n doğrudur.

Farz edelim T_n^n,

$$s_1 + s_2 + ... + s_n \leq r - 1 \text{ veya } (s_1, s_2, ..., s_n) < (r_1, r_2, ..., r_n)$$

olacak şekilde tüm $(s_1, s_2, ..., s_n)$ homojen polinomlar için doğru olsun. Bunu kullanarak genel derecesi $r_1 + r_2 + ...r_n = r$ olan polinomlar için doğru olduğunu gösterelim:

Kapelli denkliğinin $m = n$ olan durumunu f'ye kullanalım:

$$f = \frac{1}{\rho} \sum P.f + \left[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)} \right] .\Omega f \text{ ......(1)}$$

S_r'deki sıraya göre $P.f$ polinomu f'den küçüktür ve keyfi $P.f$ polinomu çifttir. ($P.f$'ler $D_{\alpha^{(i)}\beta^{(i)}} ... D_{\alpha^{(1)}\beta^{(1)}} f$ şeklindedir.) Buna göre $P.f$'ler için T_n^n doğrudur.

$\left[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)} \right] .\Omega f$ terimini inceleyelim:

Ωf'nin $(s_1, s_2, ..., s_n)$ derecesi $s = s_1 + s_2 + ... + s_n = r - n$ olduğundan Ωf için T_n^n doğrudur.

f, çift ise Ωf tektir. Ωf için T_n^n doğru olduğundan,

$$\Omega f = \left[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)} \right] .\varphi$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada φ, çifttir. Dolayısıyla,

$$\left[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)} \right] .\Omega f = \left[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)} \right] . \left[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)} \right] .\varphi = \begin{vmatrix} \left\langle x^{(1)}, x^{(1)} \right\rangle & \dots & \left\langle x^{(1)}, x^{(n)} \right\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \left\langle x^{(n)}, x^{(1)} \right\rangle & \dots & \left\langle x^{(n)}, x^{(n)} \right\rangle \end{vmatrix} .\varphi$$

şeklinde yazılabilir. Burada φ, çift ve S_r'deki sırası f'den küçük (derecesi küçük) olduğundan φ polinomu $\left\langle x^{(i)}, x^{(j)} \right\rangle$'ler cinsinden ifade ediliyor. Bundan dolayı f'nin çift olduğu durumda f için T_n^n doğrudur.

Şimdi f, tek olsun. Bu takdirde (1) eşitliğindeki $P.f$'ler de tektir. $P.f$'lerin S_r'deki sırası f'den küçüktür. Buna göre $P.f$'ler için T_n^n doğrudur.

Şimdi $\left[x^{(1)} x^{(2)} ... x^{(n)} \right] .\Omega f$ terimini inceleyelim:

f, tek olduğundan Ωf çifttir. Dolayısıyla f polinomu $\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right].\varphi$ polinomlarının toplamı şeklindedir. Burada φ, çifttir. Sonuçta f için T_n^n doğrudur. ♦

Teorem 14: $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$'ler $\mathbb{R}^n$'de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde;

$$\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle;\ i, j = 1,\ 2,\ ...,\ m;\ i \le j$$

sistemi, $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^{O(n)}$ $\mathbb{R}$-*cebir*'inin üreteç sistemidir.

İspat: Bu aslında Teorem 13'ün 1. kısmıdır. ♦

Teorem 15: $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}$'ler $\mathbb{R}^n$'de bilinmeyen vektörler olsun. Bu takdirde;

$$\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle; \qquad i, j = 1,\ 2,\ ...,\ m$$

$$\left[x^{(i_1)}x^{(i_2)}...x^{(i_n)}\right];\ 1 \le i_1 \le i_2 \le ... \le i_n \le m$$

sistemi, $\mathbb{R}\left[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right]^{SO(n)}$ $\mathbb{R}$-*cebir*'inin üreteç sistemidir.

İspat: Bu teorem, Teorem 13'ün ve Önerme 37'in bir sonucudur. ♦

2.2. $O(n)$ ve $SO(n)$ Grupları İçin $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^G$ Cisminin Üreteçleri

Teorem 16: $G = O(n)$ olsun. Bu takdirde;

i) $m \le n$ ise,

$$\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle;\ \ i, j = 1,\ 2,\ ...,\ m;\ \ i \le j$$

sistemi, $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^{O(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

ii) $m > n$ ise,

$$\left\langle x^{(i)}, x^{(j)}\right\rangle;\ i, j = 1,\ 2,\ ...,\ n;\ i \le j$$

$$\left\langle x^{(i)}, x^{(p)}\right\rangle;\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n;\ p = n+1,\ n+2,\ ...,\ m$$

sistemi, $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^{O(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

İspat: Önerme 24'e göre keyfi $O(n)$-*invaryant* rasyonel f fonksiyonu $f=\frac{P}{Q}$ şeklinde yazılabilir. Burada P ve Q polinomları ağırlık fonksiyonu aynı olan nispi $O(n)$-*invaryant* polinomlardır. $O(n)$ grubunun keyfi $\lambda(g)$ ağırlık fonksiyonu sadece aşağıdaki gibidir: $\forall g\in O(n)$ için,

1) $\lambda(g)=1$ veya

2) $\lambda(g)=\det g$

1. durumda P ve Q polinomları $O(n)$-*invaryant* polinomlardır.

2. durumda P ve Q polinomları ağırlık fonksiyonu $\lambda(g)=\det g$ olan nispi invaryant polinomlardır. Bu durumda,

$$f=\frac{P}{Q}=\frac{P.Q}{Q^2}$$

eşitliğinden f'nin ağırlık fonksiyonu $(\det g)^2=1$ olan yani $O(n)$-*invaryant* polinomların nispeti şeklinde ifade edilebileceği gösterildi. Her iki durumda da keyfi f $O(n)$-*invaryant* rasyonel fonksiyonun $O(n)$-*invaryant* polinomların bölünmesi şeklinde ifade edilebileceği gösterildi.

Teoremi ispat etmek için, keyfi $O(n)$-*invaryant* polinomun teoremdeki üreteç sistemleri yardımıyla rasyonel fonksiyon olarak ifade edilebileceğini göstermek yetecektir. Şimdi bunu gösterelim:

Teorem 14'e göre keyfi $O(n)$-*invaryant* polinom,

$$\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\rangle;\ i,j=1,\ 2,\ldots,m;\ i\le j\text{'lerin}$$

bir polinomu şeklinde ifade edilebilir. Buna göre teoremi ispat etmek için keyfi

$$\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\rangle;\ i,j=1,\ 2,\ldots,m;\ i\le j\text{'yi}$$

teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla rasyonel fonksiyon şeklinde ifade edebilmek yeterdir.

$m<n$ durumunda teoremdeki üreteç sistemi,

$$\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\rangle;\ i,j=1,\ 2,\ldots,m;\ i\le j$$

sistemiyle çakışıyor. Bundan dolayı teorem $m<n$ durumunda ispat edildi.

Şimdi $m>n$ olsun. Keyfi $p>n$ alalım. $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n,\ x_p$'ler $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu uzayda olduğundan dolayı Gram determinantı sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle & \langle x_1, x_p\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle x_n, x_p\rangle \\ \langle x_p, x_1\rangle & \cdots & \langle x_p, x_n\rangle & \langle x_p, x_p\rangle \end{vmatrix} = 0 .$$

Bu determinantta $\langle x_p, x_p\rangle$'nin dışındaki tüm elemanlar teoremde gösterilen üreteç sistemindedir. Bundan dolayı $\langle x_p, x_p\rangle$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$A_{p1}.\langle x_p, x_1\rangle + A_{p2}.\langle x_p, x_2\rangle + ... + A_{pn}.\langle x_p, x_n\rangle + A_{pp}.\langle x_p, x_p\rangle = 0 .$$

Buradan,

$$\langle x_p, x_p\rangle = \frac{-A_{p1}.\langle x_p, x_1\rangle - A_{p2}.\langle x_p, x_2\rangle - ... - A_{pn}.\langle x_p, x_n\rangle}{A_{pp}}$$

olur. Buradaki A_{pp} ifadesi $x_1, x_2, ..., x_n$'lerin Gram matrisidir. Yani,

$$A_{pp} = G(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$$

şeklindedir. Çünkü $x_1, x_2, ..., x_n$'lere lineer bağımsız olarak bakılabilir. Yani $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ polinom olarak sıfırdan farklıdır. Benzer şekilde keyfi,

$$\langle x_p, x_q\rangle; \ p, q = n+1, n+2, ..., m \text{'ler}$$

teoremdeki üreteçler yardımıyla ifade edilebilirler:

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle & \langle x_1, x_p\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle x_n, x_p\rangle \\ \langle x_q, x_1\rangle & \cdots & \langle x_q, x_n\rangle & \langle x_p, x_q\rangle \end{vmatrix} = 0 .$$

Buradan $\langle x_p, x_q\rangle$ teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla ifade ediliyor. ♦

Teorem 17: $G = SO(n)$ olsun. Bu takdirde;

i) $m < n$ ise,

$$\langle x^{(i)}, x^{(j)}\rangle; \quad i, j = 1, 2, ..., m; \quad i \leq j$$

sistemi, $\mathbb{R}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(m)}\right)^{SO(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

ii) $m \geq n$ ise,

$$\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)}\right];$$
$$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\right\rangle;\ \ i,j=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ i\le j;\ \ i+j<2n$$
$$\left\langle x^{(i)},\ x^{(p)}\right\rangle;\ \ i=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ p>n$$

sistemi, $\mathbb{R}\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(m)}\right)^{SO(n)}$ cisminin üreteç sistemidir.

İspat: Önceki teoremin ispatındaki gibi keyfi G-*invaryant* rasyonel fonksiyon G-*invaryant* P ve Q polinomlarının nispeti şeklinde ifade edilebilir. Bundan dolayı eğer keyfi G-*invaryant* polinom teoremdeki üreteçlerin rasyonel fonksiyonu şeklinde ifade edilebildiğini gösterirsek teoremi ispat etmiş oluruz. Şimdi bunu gösterelim:

$m<n$ durumunu inceleyelim. Bu durumda Teorem 13'ün ispatında gösterildi ki tek $SO(n)$-*invaryant* $P\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,\ x^{(m)}\right)$ polinomu mevcut değildir. Bundan dolayı burada keyfi $SO(n)$-*invaryant* polinom çift polinomdur. Teorem 13'e göre böyle bir polinom,

$$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\right\rangle;\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ m\text{'lerin}$$

bir polinomu olarak ifade edilebiliyor. Böylece $m<n$ durumunda ispat etmiş olduk.

$m\ge n$ durumunu inceleyelim. Önerme 38'e göre keyfi $SO(n)$-*invaryant* polinom çift ve tek polinomların toplamı şeklinde ifade edilebiliyor. Buna göre ayrı ayrı çift ve tek $SO(n)$-*invaryant* polinomları teoremdeki sistem yardımıyla rasyonel fonksiyon olarak ifade edebilirsek teoremi ispatlamış oluruz. Şimdi bunu gösterelim:

P, çift polinom olsun. Bu takdirde önceki teoreme göre bu polinom,

$$\left\langle x^{(i)},\ x^{(j)}\right\rangle;\ \ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ i\le j$$
$$\left\langle x^{(i)},\ x^{(p)}\right\rangle;\ \ i=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ p=n+1,\ n+2,\ ...,\ m$$

yardımıyla ifade edilebiliyor. Buradaki $\left\langle x^{(n)},\ x^{(n)}\right\rangle$'nin teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla ifade edilebileceğini gösterelim:

Sonuç 5'e göre,

$$\left[x_1...x_n\right]^2=\begin{vmatrix}\left\langle x^{(1)},\ x^{(1)}\right\rangle & \dots & \left\langle x^{(1)},\ x^{(n)}\right\rangle\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ \left\langle x^{(n)},\ x^{(1)}\right\rangle & \dots & \left\langle x^{(n)},\ x^{(n)}\right\rangle\end{vmatrix}=$$
$$=B_{n1}.\left\langle x^{(n)},\ x^{(1)}\right\rangle+B_{n2}.\left\langle x^{(n)},\ x^{(2)}\right\rangle+...+B_{nn-1}.\left\langle x^{(n)},\ x^{(n-1)}\right\rangle+B_{nn}.\left\langle x^{(n)},\ x^{(n)}\right\rangle$$

olur. $B_{nn}=G\left(x^{(1)},\ x^{(2)},\ ...,x^{(n-1)}\right)$ olduğundan $B_{nn}\neq 0$'dır. Buradan,

$$\left\langle x^{(n)},\ x^{(n)} \right\rangle = \frac{\left[x^{(1)}x^{(2)}...x^{(n)} \right]^2 - B_{n1}.\left\langle x^{(n)},\ x^{(1)} \right\rangle - B_{n2}.\left\langle x^{(n)},\ x^{(2)} \right\rangle - ... - B_{nn-1}.\left\langle x^{(n)},\ x^{(n-1)} \right\rangle}{B_{nn}}$$

olur. Dolayısıyla $\left\langle x^{(n)},\ x^{(n)} \right\rangle$ teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla ifade edildi. Böylece keyfi çift invaryant, teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla ifade edildi.

Şimdi P tek olsun. Teorem 13'e göre bu polinom,

$$\left[x^{(i_1)}x^{(i_2)}...x^{(i_n)} \right].\varphi$$

şeklinde ifadelerin toplamı olarak ifade edilebilir. Burada φ çift invaryanttır. φ çift invaryant olarak önceki gibi teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla ifade ediliyor.

Şimdi de $\left[x^{(i_1)}x^{(i_2)}...x^{(i_n)} \right].\varphi$'nin teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla ifade edilebileceğini gösterelim:

Sonuç 4'e göre,

$$\left[x^{(i_1)}...x^{(i_n)} \right].\left[x^{(1)}...x^{(n)} \right] = \begin{vmatrix} \left\langle x^{(i_1)},\ x^{(1)} \right\rangle & \cdots & \left\langle x^{(i_1)},\ x^{(n)} \right\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \left\langle x^{(i_n)},\ x^{(1)} \right\rangle & \cdots & \left\langle x^{(i_n)},\ x^{(n)} \right\rangle \end{vmatrix}$$

olur. Buradan,

$$\left[x^{(i_1)}...x^{(i_n)} \right] = \frac{\begin{vmatrix} \left\langle x^{(i_1)},\ x^{(1)} \right\rangle & \cdots & \left\langle x^{(i_1)},\ x^{(n)} \right\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \left\langle x^{(i_n)},\ x^{(1)} \right\rangle & \cdots & \left\langle x^{(i_n)},\ x^{(n)} \right\rangle \end{vmatrix}}{\left[x^{(1)}...x^{(n)} \right]}$$

olur. Keyfi $\left\langle x^{(i_k)},\ x^{(r)} \right\rangle$, çift invaryant olarak, teoremdeki üreteç sistemi yardımıyla rasyonel fonksiyon olarak ifade ediliyor. Dolayısıyla $\left[x^{(i_1)}x^{(i_2)}...x^{(i_n)} \right]$ de ifade ediliyor. ♦

2.YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. O(n) İçin Denklik Problemi

Teorem 18 : $\{x_1,.......,x_m\}$ ve $\{y_1,......,y_m\}$, R^n 'deki vektörlerin iki sistemi olsun.Bu taktirde; $\forall$ i,j=1,2,….,m için. $\{x_1,.......,x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1,......,y_m\} \Leftrightarrow (x_i,x_j)=(y_i,y_j)$ 'dir.

İspat: ($\Rightarrow$:) $\{x_1,.......,x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1,......,y_m\} \Rightarrow \exists\, g\in$ O(n) öyleki $y_i = gx_i$,i,j=1,2,….,m. g ortogonal olduğundan

$(y_i,y_j)=(gx_i,gx_j)=(x_i,x_j)$,i,j=1,2,….,m

($\Leftarrow$:) $(x_i,x_j)=(y_i,y_j)$ olsun. i,j=1,2,….,m

$\{x_1,.......,x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$ olduğunu ispatlayacağız.

1) m=n olsun. $x_1,.....,x_n$ ' ler lineer bağımsız olsun. $\{x_1,.....,x_n\}$' ler Önerme[4]'e göre lineer bağımsız olduğundan detGr($x_1,.....,x_n$)$\neq 0$' dır.

$$\text{detGr}(x_1,.....,x_n)=\begin{vmatrix} \langle x_1,\, x_1\rangle & \dots & \langle x_1,\, x_n\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n,\, x_1\rangle & \dots & \langle x_n,\, x_n\rangle \end{vmatrix} \text{ ve } (x_i,x_j)=(y_i,y_j)\ \ \forall \text{ i,j=1,2,….,m}$$

olduğundan detGr($x_1,.....,x_n$)=detGr($y_1,......,y_n$) olur. detGr($x_1,.....,x_n$)$\neq 0$ olduğundan detGr($y_1,......,y_n$)$\neq 0$ olur. Bundan dolayı, $y_1,......,y_m$ ' ler lineer bağımsız olur.Sonuç5'e göre,

$$\text{detGr}(x_1,.....,x_n)=\begin{vmatrix} \langle x_1,\, x_1\rangle & \dots & \langle x_1,\, x_n\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n,\, x_1\rangle & \dots & \langle x_n,\, x_n\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}^2 \neq 0$$

olduğundan $X=\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ matrisi için detX$\neq 0$' dır.

det$X \neq 0$ olduğundan X^{-1} mevcuttur. Benzer şekilde Y= $\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$ matrisi için

det$Y \neq 0$' dır. det$X \neq 0$ ve det$Y \neq 0$ olduğundan A=(a_{ij}) ,i,j=1,2,….,n matrisi mevcut öyleki Y=AX' dir. Gerçekten, A=Y. X^{-1} alınırsa Y=AX olur. X^T.X ve Y^T.Y matrislerinin görüntüsü:

$$X^T.X=\begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{pmatrix}=\mathrm{Gr}(x_1,.....,x_n)\text{' dir.}$$

Benzer şekilde , Y^T.Y=Gr($y_1,......,y_n$)' dir. Gr($x_1,.....,x_n$)=Gr($y_1,......,y_n$) olduğundan X^T.X = Y^T.Y' dir. Y yerine Y=AX yerleştirelim.

$(AX)^T$.(AX)= X^T.X'dır.

Buradan, $X^T.A^T$.A.X=X^T.X'dır. Bu denklemi soldan $(X^T)^{-1}$ ile ve sağdan X^{-1} ile çarpalım.

$(X^T)^{-1}.X^T.A^T.A.X.X^{-1}=(X^T)^{-1}.X^T.X.X^{-1}$'dır.

$A^T.A = \mathrm{I}$ olur. Bu ise, $A \in O(n)$ olduğunu gösterir. Buradan,Y=AX ve $A \in O(n)$ alınıyor.Buna göre, $y_i = Ax_i$,i=1,2,…,n olur. Böylece, $\{x_1,.....,x_n\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1,......,y_n\}$ olur.

2) m>n ve rank$\{x_1,.....,x_n\}$=n olsun. Burada, lineer bağımsız n tane vektör olarak $x_1,.....,x_n$ alınabilir. m>n olsun. $\{x_1,.....,x_n\}$' ler lineer bağımsız olduğundan 1. durumdaki gibi $\{y_1,......,y_n\}$'lerin de lineer bağımsız olduğu gösteriliyor. Dolayısıyla. 1. durumdaki gibi, $\exists A \in O(n)$ vardır öyleki $y_i = Ax_i$,i=1,2,…,n'dır. Şimdi;

$$X_J = \begin{pmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{jn} \end{pmatrix}, \text{ J=n+1,…..,m. Ve X=} X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Burada, $X_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$'dır. i=1,2,…,n alalım. Buradan;

$$X^T.X_J=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{jn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}x_{j1}+x_{12}x_{j2}+ & \cdots & x_{1n}x_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}x_{j1}+x_{n2}x_{j2}+ & \cdots & x_{nn}x_{jn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle x_1,x_j\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n,x_j\rangle \end{pmatrix}$$

Ve

$$\begin{pmatrix} \langle x_1,x_j\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n,x_j\rangle \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle y_1,y_j\rangle \\ \vdots \\ \langle y_n,y_j\rangle \end{pmatrix}=Y^T.Y_J$$

eşitliklerinden,

$X^T.X_J \;=Y^T.Y_J$, j=n+1,….,m'dır.

Y=AX kullanarak bu denklikten $X^T.X_J=(AX)^T.Y_J$ alıyoruz. Buradan; $X^T.X_J=X^T.A^T.Y_J$'dır.

Her iki tarafı $(X^T)^{-1}$ ile çarparsak $AX_j=A.A^T.Y_J$ olur. $A.A^T=\mathrm{I}$ olduğundan $AX_j=Y_J$ j=n+1,….,m'dir. Dolayısıyla, $Y_J=A.X_J$, j=n+1,….,m'dir. Böylece,

$$\{x_1,.....,x_m\}\overset{O(n)}{\sim}\{y_1,......,y_m\}$$

olur.

3) $\{x_1,.....,x_m\}$ sisteminin rankını r ile gösterelim. Rank$\{x_1,.....,x_m\}$= r olsun. r = n olduğu durum incelendi. Şimdi, r < n olsun. Lineer bağımsız r tane vektörler olarak , $x_1,.....,x_r$ vektörleri alınabilir ve keyfi x_J vektörü $x_1,.....,x_r$ ile ifade edilsin.

$\exists b_{1j},.....,b_{rj}\in\mathrm{R}$ öyleki $x_J=\sum_{k=1}^{r}b_{kj}x_k$ 'dir.

$y_1,.....,y_r$'leri alalım.

Gr($x_1,.....,x_r$)=$\begin{pmatrix} (x_1,x_1) & \cdots & (x_1,x_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_r,x_1) & \cdots & (x_r,x_r) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (y_1,y_1) & \cdots & (y_1,y_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_r,y_1) & \cdots & (y_r,y_r) \end{pmatrix}$=Gr($y_1,.....,y_r$)'dır.

$x_1,.....,x_r$'ler lineer bağımsız olduğundan detGr($x_1,.....,x_r$)$\neq$0'dır. $\Rightarrow$detGr($y_1,.....,y_r$)$\neq$0'dır. Yani; $y_1,.....,y_r$'ler lineer bağımsızdır. $\{x_1,.....,x_m\}$ sisteminin rankı r ve $x_1,.....,x_r$'ler lineer bağımsız olduğundan $\{x_1,.....,x_r,x_j\}$ sistemi lineer bağımlıdır. detGr($x_1,.....,x_r,x_j$)=0'dır. detGr($x_1,.....,x_r,x_j$)=detGr($y_1,.....,y_r,y_j$) olduğundan detGr($y_1,.....,y_r,y_j$)=0 olur. Yani; $y_1,.....,y_r,y_j$'ler lineer bağımlıdır. $y_1,.....,y_r$'ler lineer bağımsız olduğundan $y_j=\sum_{k=1}^{r}c_{kj}y_k$ şeklinde ifade edilir. $\exists c_1,...,c_r,c_{r+1}\in$ R öyleki $c_1,...,c_r,c_{r+1}$'lerden en az biri sıfırdan farklıdır öyleki

$$c_1y_1+.....+c_ry_r+c_{r+1}y_j=0$$

denkleminden

$$y_j=-c_1y_1-.....-c_ry_r$$

$$y_j=-\frac{c_1}{c_{r+1}}y_1-......-\frac{c_r}{c_{r+1}}y_r \text{ 'dir.}$$

Yani; keyfi y_j, j$\neq i_1,...,i_r$, $y_1,.....,y_r$'ler ile ifade edilebilir. $x_1,.....,x_r$ 'ler lineer bağımsız olur. $x_j,x_1,.....,x_r$'lerle ifade edilebilir. $\{x_1,.....,x_m\}$'lerle üretilen alt uzayı V_x ile gösterelim.$\{y_1,...,y_m\}$'lerle üretilen alt uzayı V_y ile gösterelim.boyV_x=rank$\{x_1,.....,x_m\}$=r boyV_y=rank$\{y_1,...,y_m\}$=r olduğundan boyV_x =boyV_y=r olur. Keyfi boyV=r olan altuzayı alalım. Bu taktirde, $\exists$ F $\in$O(n) mevcut öyleki F(V)=$R^r\subset R^n$'dir. boyV=r olduğundan V'de $e_1,...,e_r$ ortonormal tabanı mevcuttur. Bu taban, R^n'deki bir orthonormal tabana kadar genişletilebilir. Bunu, $e_1,...,e_r,e_{r+1},...,e_n$ şeklinde gösterebiliriz. R^n'de ;

$$f_1=(1,0,...,0), f_2=(0,1,0,...,0),......., f_r(0,0,...,0,1,0,...,0), f_{r+1}=(0,....0,0,1,0,...,0),......., f_n=(0,........,0,1)$$

leri alalım. $Fe_i=f_i$ olan F $\in$O(n) vardır. Böylece, FV= R^r olur.Benzer şekilde, $F_1V_x=R^r, F_1\in O(n), F_2V_y=R^r, F_2\in O(n)$ olur. Buradan,

$$\{F_1x_1,......,F_1x_m\}\subseteq R^r$$

$$\{F_2x_1,......,F_2x_m\}\subseteq R^r \text{ 'dir.}$$

r = r, rank r olduğundan $r\leq m$ .Bu durum, 1.ve 2. durumlara indirgenmiş oldu.

$$\{F_1x_1,......,F_1x_m\}=\{x_1',....,x_m'\} \text{ olsun.}$$

$$\{F_2y_1,......,F_2y_m\}=\{y_1',....,y_m'\} \text{ olsun.}$$

$\exists F_3$ vardır öyleki $y_i' = F_3 x_i'$'dir. $F_2 y_i = F_3(F_1 x_i)$ eşitliğinde heriki tarafı F_2^{-1} ile çarparsak, $F_2^{-1} F_2 y_i = F_2^{-1} F_3 (F_1 x_i)$ olur. $y_i = (F_2^{-1} F_3 F_1)(x_i)$ eşitliğinde $(F_2^{-1} F_3 F_1)$ $\in$O(n)'dir. Bu nedenle;

$$\{x_1,.....,x_n\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1,......,y_n\}$$

olur. ♦

2.2. SO(2) İçin Denklik Problemi

Teorem 19 : $\{x_1,.......,x_m\}$ ve $\{y_1,......,y_m\}$, R^2'deki vektörlerin iki sistemi olsun. Bu taktirde, $\{x_1,.....,x_n\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1,......,y_n\}$ $\Leftrightarrow$ $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ ve $[x_i, x_j] = [y_i, y_j]$, i<j , i,j=1,2,…,m'dir.

İspat : ($\Rightarrow$:) $\{x_1,.....,x_n\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1,......,y_n\}$ olsun.Buna göre, $\exists$ g$\in$SO(2) öyleki $y_i = gx_i$ i,j=1,2,….,m olur. g ortogonal olduğundan $(y_i, y_j) = (gx_i, gx_j) = (x_i, x_j)$'dir. i,j=1,2,….,m. Örnek 38'e göre $\exists$ g$\in$O(2) için $[gx_1, gx_2] = \det g[x_1, x_2]$'dir.g$\in$SO(2) ise detg=1 olduğundan $[gx_1, gx_2] = [x_1, x_2]$, tüm SO(2)'ler için $[x_1, x_2]$, SO(2) grubuna göre invaryanttır . Bu nedenle, $[y_i, y_j] = [gx_i, gx_j] = [x_i, x_j]$'dir. i,j=1,2,…,m.

($\Leftarrow$:) 1) rank$\{x_1,...,x_m\}$=2 olsun . Bu taktirde Gram matrisi kullanarak rank$\{y_1,..., y_m\}$= 2

olduğu ispat edilir. $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ olsun. i , j=1,2,….,m eşitliğinden O(2) için G-denklik teoremine göre $\exists$ g$\in$O(2) öyleki $y_i = gx_i$, i=1,2,…,m. x_1, x_2 ve y_1, y_2 olarak lineer bağımsız vektörler alalım. $[x_1, x_2] = [y_1, y_2]$'dir. x_1, x_2 lineer bağımsız olduğundan $[x_1, x_2] \neq 0$'dır. Benzer şekilde , $[y_1, y_2] \neq 0$'dır.

$$[x_1, x_2] = [y_1, y_2] \Rightarrow [gx_1, gx_2] = [x_1, x_2]$$

olduğundan, örnek 38'e göre $[gx_1, gx_2] = \det g[x_1, x_2]$'dir. Yukarıdaki iki eşitlikten $\det g[x_1, x_2] = [x_1, x_2]$ olur. $[x_1, x_2] \neq 0$ olduğundan bu eşitlik $[x_1, x_2]$'ye bölünebilir. Dolayısıyla, detg=1 olur. Yani, g$\in$SO(2)'dir. Bu nedenle , $y_i = gx_i$, i=1,2,…,m ifadesinde g$\in$SO(2) olur.

2) rank$\{x_1,..., x_m\}$=1 ve $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j]$ $\forall$ i,j=1,2,…,m olsun.

$$\{x_1,.......,x_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$$

olduğunu göstereceğiz. rank$\{x_1,...,x_m\}$=1 olduğundan gram matris kullanarak rank$\{y_1,......,y_m\}$=1 olur. V_x, $\{x_1,...,x_m\}$ tarafından ve V_y, $\{y_1,......,y_m\}$ tarafından üretilen R^2 'nin altuzayları olsun.

$V_x = \prec x_1,.......,x_m \succ$

$V_y = \prec y_1,.......,y_m \succ$ 'dır.

V_x ve V_y 'ler düzlemdeki doğrular olduğundan, bu doğrular $F = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$ ve α ve β açıları yardımıyla dönme ile R doğrusu ile çakıştırılabilir. boyV_x=boyV_y=1 olduğundan $\exists g_1 \in SO(2)$ öyleki g_1V_x=R ve $\exists g_2 \in SO(2)$ öyleki g_2V_y=R'dir. $g_1x_1,...,g_1x_m$ ve $g_2y_1,...,g_2y_m$ sistemlerini alalım ve $g_1x_i = x_i', g_2y_i = y_i'$ olarak gösterelim.

$(g_1x_i, g_1x_j) = (x_i, x_j), g_1 \in SO(2) \subset O(2)$

$(g_2y_i, g_2y_j) = (y_i, y_j), g_2 \in SO(2) \subset O(2)$ 'dır.

Bu eşitliklerden ; $(x_i', x_i') = (y_i', y_j{}'), \forall$ i,j=1,2,…,m olur. O(1)'nin G-denklik teoremine göre bu eşitliklerden;

1) $y_i' = x_i'$ i=1,…,m veya

2) $y_i' = -x_i'$ i=1,…,m'dir.

1) $y_i' = x_i'$ eşitliğinde her iki tarafa $y_i' = g_2y_i$ ve $x_i' = g_1x_i$ 'leri yazarsak $g_2y_i = g_1x_i$ eşitliği elde edilir. $g_2y_i = g_1x_i$ eşitliğinde her iki tarafı g_2^{-1} ile çarparsak, $y_i = g_2^{-1}g_1x_i$ elde edilir. Buradan, $g_2^{-1} \in SO(2), g_1 \in SO(2) \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in SO(2)$ olur. Dolayısıyla ,

$$\{x_1,.......,x_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$$

olur.

2) $y_i' = -x_i'$ eşitliğini alalım. $g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(2)$ alalım. Bu durumda,

$$g_3x_i' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_i' \\ 0 \end{pmatrix} = -x_i'$$

olur. Dolayısıyla, $y_i{}' = g_3x_i{}'$, i=1,…,m'dir. $y_i' = g_3x_i'$, $g_3 \in SO(2)$ eşitliğinde her iki tarafa $y_i' = g_2y_i$ ve $x_i' = g_1x_i$ 'leri yazarsak $g_2y_i = g_3(g_1x_i)$ eşitliğinde her iki tarafı g_2^{-1} ile çarparsak,

$(g_2^{-1}g_2)y_i = (g_2^{-1}g_3g_1)x_i$

olur. Burada, $g_1 \in SO(2), g_2 \in SO(2), g_2^{-1} \in SO(2), g_3 \in SO(2)$ olduğundan $g_2^{-1}g_3g_1 = g$ aldığımızda $g \in SO(2)$ olur. Böylece , $y_i = gx_i$ olur. Bu nedenle ;

$$\{x_1,.......,x_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$$

olur. ♦

2.3. Iz(1) İçin Denklik Problemi

Teorem 20**:** m > 1 olsun. Bu taktirde, R'de , $\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(1)}{\sim} \{y_1,......,y_m\} \Leftrightarrow \{x_1\text{-}x_m,....,x_{m-1}\text{-}x_m\} \overset{O(1)}{\sim} \{y_1\text{-}y_m,....,y_{m-1}\text{-}y_m\}$ i=1,…,m-1'dir.

İspat : ($\Rightarrow$:) $\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(1)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$ olsun. Bu taktirde; $\exists \varepsilon \in O(1), \exists b \in R$ öyleki $y_i = \varepsilon x_i + b$, i=1,…,m-1'dir.Buradan,

$$y_i - y_m = (\varepsilon x_i + b) - (\varepsilon x_m + b)$$
$$y_i - y_m = \varepsilon x_i + b - \varepsilon x_m - b$$
$$y_i - y_m = \varepsilon x_i - \varepsilon x_m$$
$$y_i - y_m = \varepsilon (x_i - x_m)$$

i=1,…,m-1'dir.Bunun anlamı ;

$\{x_1\text{-}x_m,....,x_{m-1}\text{-}x_m\} \overset{O(1)}{\sim} \{y_1\text{-}y_m,....,y_{m-1}\text{-}y_m\}$
olur.

($\Leftarrow$:) $\{x_1\text{-}x_m,....,x_{m-1}\text{-}x_m\} \overset{O(1)}{\sim} \{y_1\text{-}y_m,....,y_{m-1}\text{-}y_m\}$ olsun. Bu taktirde ; $\exists \varepsilon \in O(1), \exists b \in R$ öyleki $y_i - y_m = \varepsilon (x_i - x_m)$ 'dir.

$$y_i - y_m = \varepsilon x_i - \varepsilon x_m$$
$$y_i = \varepsilon x_i + (y_m - \varepsilon x_m) \text{ ‘dır.}$$

Burada, $y_m - \varepsilon x_m = b$ ile işaretlediğimizde $y_m = \varepsilon x_m + b$ ve $y_i = \varepsilon x_i + b$ olur. Böylece, $\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(1)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$
olur. ♦

Teorem 21: m > 1 olsun. $\{x_1,.......,x_m\}$ ve $\{y_1,......,y_m\}$, R^n'deki vektörlerin iki sistemi olsun. Bu taktirde, $\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(1)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$ $\Leftrightarrow (x_i\text{-}x_m, x_j\text{-}x_m) = (y_i\text{-}y_m, y_j\text{-}y_m), \forall$ i,j=1,…,m-1'dir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 18 ve Teorem 20'lerin sonucudur. ♦

2.4. Iz(n) İçin Denklik Problemi

Teorem 22: m > 1 olsun. Bu taktirde , R^n 'de , $\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$
$\Leftrightarrow \{x_1\text{-}x_m,....,x_{m-1}\text{-}x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1\text{-}y_m,....,y_{m-1}\text{-}y_m\}$,i=1,…,m-1'dir.

İspat : (⇒:) $\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$ olsun. $\exists g \in O(n), \exists b \in R^n$ öyleki $y_i = gx_i + b$, i=1,…,m-1.

$$y_i - y_m = (gx_i + b) - (gx_m + b)$$
$$y_i - y_m = gx_i + b - gx_m - b$$
$$y_i - y_m = gx_i - gx_m$$
$$y_i - y_m = g(x_i - x_m)$$

, i=1,….,m-1 'dir. Bunun anlamı ;

$\{x_1\text{-x}_m,....,\text{x}_{m-1}\text{-x}_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1\text{-y}_m,....,\text{y}_{m-1}\text{-y}_m\}$
olur.

(⇐:) $\{x_1\text{-x}_m,....,\text{x}_{m-1}\text{-x}_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1\text{-y}_m,....,\text{y}_{m-1}\text{-y}_m\}$ olsun. $\exists g \in O(n), \exists b \in R^n$ öyleki $y_i - y_m = gx_i - gx_m$ 'dir.

$$y_i - y_m = gx_i - gx_m$$
$$y_i = gx_i + y_m - gx_m \text{'dir.}$$

Burada $y_m - gx_m = b$ ile işaretlediğimizde $y_m = gx_m + b$ ve $y_i = gx_i + b$ olur.Bu nedenle
$\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$
olur.

Teorem 23**:** m > 1 olsun. $\{x_1,.......,x_m\}$ ve $\{y_1,......,y_m\}$, R^n'deki vektörlerin iki sistemi olsun. Bu taktirde, $\{x_1,.......,x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$ $\Leftrightarrow (x_i\text{-x}_m,\text{x}_j\text{-x}_m)=(y_i\text{-y}_m,\text{y}_j\text{-y}_m), \forall$ i,j=1,…,m-1'dir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 18 ve Teorem 22'lerin sonucudur.♦

2.5. SIz(2) İçin Denklik Problemi

Teorem 24: m > 1 olsun. Bu taktirde, $\{x_1,.......,x_m\} \overset{SIz(2)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$ $\Leftrightarrow \{x_1\text{-x}_m,....,\text{x}_{m-1}\text{-x}_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1\text{-y}_m,....,\text{y}_{m-1}\text{-y}_m\}$, i=1,…,m-1'dir.

İspat : (⇒:) $\{x_1,.......,x_m\} \overset{SIz(2)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$ olsun. $\exists g \in SO(2), \exists b \in R^2$ öyleki $y_i = gx_i + b$, i=1,…,m-1.

$$y_i - y_m = (gx_i + b) - (gx_m + b)$$
$$y_i - y_m = gx_i + b - gx_m - b$$
$$y_i - y_m = gx_i - gx_m$$
$$y_i - y_m = g(x_i - x_m)$$

, i=1,….,m-1 'dir. Bunun anlamı ;

$\{x_1\text{-x}_m,....,\text{x}_{m-1}\text{-x}_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1\text{-y}_m,....,\text{y}_{m-1}\text{-y}_m\}$
olur.

($\Leftarrow$:) $\{x_1\text{-x}_m,....,\text{x}_{m-1}\text{-x}_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1\text{-y}_m,....,\text{y}_{m-1}\text{-y}_m\}$ olsun. $\exists g \in SO(2), \exists b \in R^2$ öyleki $y_i - y_m = gx_i - gx_m$ ‘dir.

$$y_i - y_m = gx_i - gx_m$$

$$y_i = gx_i + y_m - gx_m \text{ 'dir.}$$

Burada $y_m - gx_m = b$ ile işaretlediğimizde $y_m = gx_m + b$ ve $y_i = gx_i + b$ olur. Bu nedenle ;

$$\{x_1,.......,x_m\} \overset{SIz(2)}{\sim} \{y_1,......,y_m\}$$

olur. ♦

Teorem 25: m > 1 olsun. $\{x_1,.......,x_m\}$ ve $\{y_1,......,y_m\}$, R^2 ’deki vektörlerin iki sistemi olsun. Bu taktirde, $\{x_1,.......,x_m\} \overset{SIz(2)}{\sim} \{y_1,......,y_m\} \Leftrightarrow (x_i\text{-x}_m,\text{x}_j\text{-x}_m)=(y_i\text{-y}_m,\text{y}_j\text{-y}_m)$ ve $[x_i - x_m, x_j - x_m] = [y_i - y_m, y_j - y_m]$,i,j=1,…,m-1’dir.

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 18 ve Teorem 24’lerin sonucudur. ♦

3. BULGULAR

Tezde elde edilen bulguları şu şekilde sıralayabiliriz

1. O(n) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ noktalar sisteminin grubuna denklik problemi $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i, x_j) = (y_i, y_j), i, j = 1, 2, ...m$, şeklinde bulunduğu Teorem[18]'de gösterilmiştir.

2. SO(2) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ noktalar sisteminin denklik problemi $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ ve $[x_i, x_j] = [y_i, y_j]$ $, i, j = 1, 2, ...m$, şeklinde bulunduğu Teorem[19]'de gösterilmiştir.

3. Iz(1) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ noktalar sisteminin denklik problemi $\{x_1-x_m, ..., x_{m-1}-x_m\}$ ve $\{y_1-y_m, ..., y_{m-1}-y_m\}$ vektörler sisteminin O(1) denklik problemine indirilmiştir. Teorem[20]'de gösterilmiştir.

4. Iz(1) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ noktalar sisteminin denklik problemi $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{Iz(1)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i - x_m, x_j - x_m) = (y_i - y_m, y_j - y_m)$,i,j=1,2, …,m-1, şeklinde bulunduğu Teorem[21]'de gösterilmiştir.

5. Iz(n) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ noktalar sisteminin denklik problemi $\{x_1-x_m, ..., x_{m-1}-x_m\}$ ve $\{y_1-y_m, ..., y_{m-1}-y_m\}$ vektörler sisteminin O(n) denklik problemine indirilmiştir. Teorem[22]'de gösterilmiştir

6. Iz(n) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ noktalar sisteminin denklik problemi $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i - x_m, x_j - x_m) = (y_i - y_m, y_j - y_m)$,i,j=1,2, …,m-1, şeklinde bulunduğu Teorem[23]'de gösterilmiştir.

7. SIz(2) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ noktalar sisteminin denklik problemi $\{x_1-x_m, ..., x_{m-1}-x_m\}$ ve $\{y_1-y_m, ..., y_{m-1}-y_m\}$ vektörler sisteminin SO(2) denklik problemine indirilmiştir. Teorem[24]'de gösterilmiştir

8. SIz(2) grubuna göre $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ve $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$, noktalar sisteminin denklik problemi $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{SIz(2)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i - x_m, x_j - x_m) = (y_i - y_m, y_j - y_m)$ ve $[x_i - x_m, x_j - x_m] = [y_i - y_m, y_j - y_m]$,i,j=1,2,…m-1, şeklinde bulunduğu Teorem[25]'de gösterilmiştir.

4. İRDELEME

1946 yılında Hermann WEYL [1], $O(n)$ ve $SO(n)$ grupları için noktaların üreteç invaryantları üzerine çalışma yapmıştır. Tezde; $O(n)$ ve $SO(n)$ grupları için 1. temel teoremin oluşturulması için gereken tüm tanımlar verilmiş, gerekli tüm önerme ve teoremler ayrıntılı olarak ispatlanmıştır.

R^n uzayında n+1 tane vektör için Iz(n) grubuna göre denklik problemi M. Berger [12] ‘in kitabında çözümü verilmiştir. R. Höfer de Reel Geometri’ lerde m tane noktanın invaryantları bulma ile uğraşmış ve bu noktaların yörüngelerini Gram matrisler ve daha başka denklikler yardımıyla ifade etmiştir.

2-boyutlu Minkowski uzay zamanı geometrisinde noktaların invaryantlarını bulma problemi ve denklik problemi İdris Ören [6] ‘ in yüksek lisans tezinde çözülmüştür. İdris Ören[7]’in doktora tezinde 0 (3,1) – invaryant polinomlar halkasının üreteçleri , 0(3,1) grubunun yörüngeleri ve 0(3,1)-psevda orthogonal grubu için noktaların denklik şartlarını bulma problemleri çözülmüştür.

Afin Geometri’ de noktaların denklik problemi Yasemin Bahar [10] ‘un doktora tezinde incelenmiştir. Karakteristiği 2 olan cisim üzerinde ortogonal matrisler grubunun invaryantları [11] makalede incelenmiştir.

Tezde, O(n), SO(n), Iz(n) ve SIz(n) grupları için G-denklik tanımları verilmiştir ve denklik problemleri, gerekli olan tüm önerme ve teoremlerle ayrıntılı olarak hesaplanmıştır. 0(n), SO(2), Iz(n) ve SIz(2) grupları için denklik problemleri çözülmüştür.

5. SONUÇLAR

1. $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\}, \Leftrightarrow (x_i, x_j) = (y_i, y_j), i, j = 1, 2, ...m$ .O(n) grubuna göre denklik problemi Teorem[18]'de gösterildi.

2. $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{SO(2)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ ve $[x_i, x_j] = [y_i, y_j]$ $i, j = 1, 2, ...m$ .SO(2) grubuna göre denklik problemi Teorem[19]'de gösterildi.

3. $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i - x_m, x_j - x_m) = (y_i - y_m, y_j - y_m)$,i,j=1,2,…m-1. Iz(n) grubuna göre denklik problemi Teorem[23]'de gösterildi.

4. $\{x_1, x_2, ..., x_m\} \overset{SIz(2)}{\sim} \{y_1, y_2, ..., y_m\} \Leftrightarrow (x_i - x_m, x_j - x_m) = (y_i - y_m, y_j - y_m)$ ve $[x_i - x_m, x_j - x_m] = [y_i - y_m, y_j - y_m]$,i,j=1,…,m-1 SIz(2) grubuna göre denklik problemi Teorem[25]'de gösterildi.

6. ÖNERİLER

n-boyutlu Öklid geometrisi için noktaların, eğrilerin ve yüzeylerin G-denklik probleminin çözülmesi Öklid ve Benzerlik geometrilerinde çok önemlidir.Bu geometrilerde noktalar için denklik probleminin çözülmesi; noktalar, eğriler, ve yüzeylerden oluşan geometrik sistemlerinin G-denklik problemlerinde çok yararlıdır.Örneğin; Afin geometrisindeki eğriler için G-denklik problemi invaryant teorisi yöntemiyle Khadjiev , Dj. , Peşken , Ö.'lerin makalelerinde ve Y. Bahar'ın doktora tezinde çözülmüştür.

Tez çalışmasının önemi:

1. Öklid geometrisinde noktaların denklik probleminin çözülmesinde invaryant teorisi yöntemlerinin önemli olduğunu göstermek.

2. Tezde kullanılan yöntemler başka geometrilerin (projektif, simplektik, üniter, minkowski ve diğerleri) noktalarının denklik probleminin çözümünde önemlidir.

3. Tezde kullanılan yöntemler doğruların, eğrilerin ve yüzeylerin denklik probleminin çözümünde önemlidir.

7. KAYNAKLAR

1. Weyl, H., The Classical Groups, Their Invariants And Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1946.

2. Khadjiev, Dj., An Application Of The Invariant Theory To The Differential Geometry of Curves , Fan Publ., Tashkent, 1988.

3. Springer, T.A., Invariant Theory, Springer-Verlag, New York, 1977.

4. Greub, W.H., Linear Algebra, Third Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

5. Akbulut, F., Lineer Cebir, Cilt I, 4.Baskı, Birsen Kitabevi, İstanbul, 1985.

6. Ören, İ., Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

7. Ören, İ., O(3.1) Orthogonal Grubu İçin Noktaların İnvaryantları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2007.

8. Bahar, Y., Parametrik Eğrilerin Afin Diferansiyel İnvaryantları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2002.

9. Khadjiev, Dj., Pekşen, Ö., The complete system of global integral and differantial invariants for equi-affine curves, Differantial Geometry And Its App. J., 20 (2004) 167-175.

10. Pekşen, Ö., Khadjiev, Dj., On invariants of curves in centro-affine geometry, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 44, 3 (2004) 204-213.

11. Domokos, M., Frenkel, P.E., On orthogonal invariants in characteristic 2, Journal of Algebra, 274, 2 (2004) 662-688.

12. M.Berger,Geometry-I. 2 volumes , Springer – Verlag , Berlin Heidelberg , 1987.

13. Karataş , M. , Öklid Geometrisinde Noktaların Invaryantları , Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. ,Fen Bilimleri Enstitüsü , Trabzon , 2005

14. Euclid , Elements , Volume 2 of Britannia Great Books , Encyclopedia Britannia , Chicago , 1982 .tr . T.L.Heath.

ÖZGEÇMİŞ

Gülistan KAYA, 17.02.1983 tarihinde Giresun'un Dereli ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Yeşilgiresun İlköğretim Okulu'nda ve Şehit İsa Yüksel İlköğretim Okulu'nda, orta öğrenimini Ordu Fen Lisesi'nde tamamlandı. 2000 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2005 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Giresun Bilim Dershanesi'nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2006 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tezli yüksek lisans programına kaydoldu . Halen Giresun Bilim Dershanesi'nde matematik öğretmenliği görevine devam etmektedir. Yabancı dili İngilizce'dir.