KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TENSÖR ÇARPIMLARI ve NÜKLEER C*- CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet KUNT

OCAK 2008
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TENSÖR ÇARPIMLARI ve NÜKLEER C*- CEBİRLERİ

Mehmet KUNT

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce "Yüksek Lisans (Matematik)" Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06. 11. 2007
Tezin Savunma Tarihi : 10. 01. 2008

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abdugafur RAKHİMOV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ

Enstitü Müdürü Vekili: Doç. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2008

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, tensör çarpımları ve nükleer C*-cebirleri incelendi.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine kadar yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof. Dr. Abdugafur RAHİMOV' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca KTÜ Matematik Bölümü'nün tüm hocalarına, moral desteklerinden ve yardımlarından dolayı KTÜ Matematik Bölümü'nün tüm Araştırma Görevlisi arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Mehmet KUNT

Trabzon 2008

İÇİNDEKİLER

SAYFA NO

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Operatör Cebirleri ile ilgili bazı temel kavramlar ele alınmış ve Nükleer C*- Cebirleri incelenmiştir.

Birinci bölümde, Normlu Uzaylar, Banach Uzayları, Hilbert Uzayları, Banach Cebirleri, Banach *- Cebirleri ve C*- cebirleri ile ilgili temel tanımlar, özellikler ve örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde, Modüllerin tensör çarpımı, Banach uzaylarının tensör çarpımı ve C*-cebirlerinin tensör çarpımı tanımlanmıştır. Ayrıca Nükleer C*- cebiri tanımlanmış ve sonlu boyutlu C*- cebirleri ile değişmeli C*- cebirlerinin nükleer C*- cebiri olup olmadıkları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Banach Uzayları, C*-cebirleri, Tensör Çarpımları, C*-Norm, Çapraz Norm, Nükleer C*- cebirleri.

SUMMARY

Tensor Products and Nuclear C*- Algebras

In the thesis, some basic notions of operator algebras are considered; the nuclear C*-algebras are investigated.

In first chapter, basic definitions, properties and examples about normed spaces, banach spaces, hilbert spaces, banach algebras, banach *- algebras and C*- algebras are given.

In second chapter, the tensor products of modules, banach spaces and C*- algebras are described. Moreover, the nuclear C*- Algebras are described. Finally, we investigate whether the finite dimensional C*- algebras and abelian C*- algebras are nuclear C*-algebras or not.

Key Words: Banach Spaces, C*- Algebras, Tensor Products, C*-Norm, Cross Norm, Nuclear C*- Algebras.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>SAYFA NO</u>

SEMBOLLER DİZİNİ

$\in$	Elemanıdır,
$\notin$	Elemanı değildir,
θ	Lineer uzayın toplamaya göre birim elemanı,
$\subset$	Alt kümesidir,
$\not\subset$	Alt kümesi değildir,
$\bigcap$	Arakesit,
$\cong$	İzomorfizm,
$\forall$	Her,
$\exists$	Bazı,
$\Rightarrow$	İse,
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak,
∞	Sonsuz,
$\bigoplus$	Direk toplam,
$\otimes$	Elemanların tensör çarpımı,
$\bigotimes$	Kümelerin tensör çarpımı,
$\times$	Kümelerin kartezyen çarpımı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi,
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi,
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi,
${}_R M$	Sol R-modül M,
M_R	Sağ R- modül M,
$M_n(\cdot)$	$n \times n$ tipli matrisler uzayı,
A^t	A matrisinin transpozesi,
$\overline{A}$	A matrisinin eşleniği,
C (A)	A' dan $\mathbb{C}$' ye sürekli fonksiyonellerin kümesi,
B (A)	A' dan A' ya lineer sınırlı fonksiyonellerin kümesi,
A^*	A' dan $\mathbb{C}$' ye lineer sürekli fonksiyonellerin kümesi,
$\rho_{\vert B}$	ρ operatörünün B' ye kısıtlanışı,
$\blacksquare$	İspat bitti.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Normlu uzay

1.1.1. Lineer uzay

L boş olmayan bir küme ve $(F,\oplus,.)$ bir cisim olmak üzere L de toplama adı verilen ve $+:\mathrm{L}\times\mathrm{L}\to\mathrm{L}$, $(x,y)\xrightarrow{+}x+y$ ile gösterilen bir işlem ile skalerle çarpma adı verilen ve $\bullet:\mathrm{F}\times\mathrm{L}\to\mathrm{L}$, $(\alpha,x)\xrightarrow{\bullet}\alpha.x$ ile gösterilen bir işlem aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu L kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay denir ve $(\mathrm{L},\mathrm{F}),(\mathrm{L},+,\ \bullet)$ veya L ile gösterilir.

A) L, + işlemine göre değişmeli gruptur. Yani ;

G1) Her $x,y,z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir.

G2) Her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta\in L$ vardır.

G3) Her $x\in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $(-x)\in L$ vardır.

G4) Her $x,y\in L$ için $x+y=y+x$ dir.

B) $x,y\in L$ ve $\alpha,\beta\in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanacaktır.

L1) $\alpha\bullet(x+y)=\alpha\bullet x+\alpha\bullet y$ dir.

L2) $(\alpha\oplus\beta)\bullet x=\alpha\bullet x+\beta\bullet x$ dir.

L3) $(\alpha.\beta)\bullet x=\alpha\bullet(\beta\bullet x)$ dir.

L4) $1\bullet x=x$ dir. (Burada 1, F' nin birimidir.)

Burada L2 'nin birinci tarafındaki $\oplus$ işareti F deki toplamayı; ikinci tarafındaki + işareti ise L deki toplamayı belirtmektedir. Aynı şekilde L3 eşitliğinde de iki tane çarpmanın olduğuna dikkat edilmelidir.

Lineer uzayın tanımında geçen F cismine (lineer uzayın) skaler cismi, F' nin elemanlarına ise skaler denir. Lineer uzay deyimi yerine vektör uzayı deyimi de kullanılır. Bu halde L' nin elemanlarına genelde vektör denir. θ özdeş elemanı bazen 0 ile de gösterilir. Ancak bu gösteriliş genelde $\mathrm{L}=\mathbb{R}$ veya $\mathrm{L}=\mathbb{C}$ olması halinde tercih edilir. Bu θ elemanına orjin veya sıfır denir.

$F=\mathbb{R}$ olması halinde L' ye reel; $F=\mathbb{C}$ olması halinde ise L' ye kompleks vektör uzayı denir.

(L, F) bir vektör uzayı ve $A\subset \mathrm{L}$ olsun. Eğer $A+A\subset A$ ve $F\bullet A\subset A$ ise, A' ya L nin bir alt vektör uzayı denir.

Örnek 1. $(F,\oplus,\cdot)$ bir cisim, $n\in\mathbb{N}$ ve $\mathrm{L}=F^n=\{x=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n):\alpha_i\in F\}$ olsun. $x,y\in \mathrm{L}$ ve $\alpha\in F$ olmak üzere lineer uzay işlemleri;

$$x+y=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n):=(\alpha_1\oplus\beta_1,\alpha_2\oplus\beta_2,...,\alpha_n\oplus\beta_n) \quad \text{ve}$$

$$\alpha\bullet x=\alpha\bullet(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n):=(\alpha\cdot\alpha_1,\alpha\cdot\alpha_2,...,\alpha\cdot\alpha_n)$$

olarak tanımlanırsa kolaylıkla görülebilir ki $\mathrm{L}=F^n$, F cismi üzerinde bir vektör uzaydır. Buradaki işlemlere bileşen bileşene toplama ve skalerle çarpma denir. Gerçekten lineer uzay şartlarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Bu örnekten $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,...ve\ \mathbb{C},\mathbb{C}^2,...$ uzayları sırasıyla $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır. Ayrıca $\mathbb{C}^n,\mathbb{R}$ üzerinde de bir vektör uzayı olup $\mathbb{R}^n$ ise $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı değildir. Çünkü $\mathbb{C}.\mathbb{R}\not\subset\mathbb{R}$ dir.

Örnek 2. Determinantı 1 olan kompleks ve reel matrisler kümesi bir vektör uzayı değildir. Çünkü bu matrisleri bir λ sayısı ile çarparsak $\det\neq 1$ olabilir.

Örnek 3. A bir topolojik uzay ve A da tanımlı reel (veya kompleks) değerli sürekli fonksiyonların $C(A):=\{f\,|\,f:A\to K\ \textit{sürekli}\}$ kümesini göz önüne alalım, burada $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ ve $f,g\in C(A)$ ve $\alpha\in K$ olmak üzere, $+:C(A)\times C(A)\to C(A)$ ve $\cdot:K\times C(A)\to C(A)$ dönüşümlerini $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x):=\alpha f(x)$ olarak tanımlayalım. Bu işlemlere göre $C(A)$ kümesi bir vektör uzayıdır. Gerçekten;

Her $f,g\in C(A)$ ve $\alpha\in K$ için $f+g$ ve αf nin sürekli olduğu analizden bilindiği için $f+g,\alpha f\in C(A)$'dır.

Şimdi vektör uzayı ile ilgili diğer koşulların sağlandığını gösterelim.

1) Her $f,g,h\in C(A)$ ve her $x\in A$ için

$$[f+(g+h)](x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]=[f(x)+g(x)]+h(x)$$

$$=(f+g)(x)+h(x)=\left[(f+g)+h\right](x)$$

dir. O halde $f+(g+h)=(f+g)+h$ dir.

2) $\theta : A \to K$, $x \to \theta(x) := 0$ olarak alınırsa, $\forall f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$$(f+\theta)(x)=f(x)+\theta(x)=f(x)+0=f(x)$$

dir. O halde $f+\theta=f$ dir.

3) Her $f \in C(A)$ için $-f \in C(A)$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in A$ için

$$\left[f+(-f)\right](x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)-f(x)=0$$

dir. O halde $f+(-f)=0$ dir.

4) Her $f, g \in C(A)$ ve her $x \in A$ için

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

dir. O halde $f+g=g+f$ dir.

5) Her $f, g \in C(A)$, $\alpha \in K$ ve $\forall x \in A$ için

$$\left[\alpha(f+g)\right](x)=\alpha(f+g)(x)=\alpha\big(f(x)+g(x)\big)=\alpha f(x)+\alpha g(x)=(\alpha f+\alpha g)(x)$$

dir. O halde $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$ dir.

6) Her $\alpha, \beta \in K$, $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$$\left[(\alpha+\beta) f\right](x)=(\alpha+\beta) f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x)=(\alpha f)(x)+(\beta f)(x)=(\alpha f+\beta f)(x)$$

dir. O halde $(\alpha+\beta) f=\alpha f+\beta f$ dir.

7) Her $\alpha, \beta \in K$, $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$$\left[(\alpha\beta) f\right](x)=(\alpha\beta) f(x)=\alpha\big(\beta f(x)\big)=\alpha(\beta f)(x)=\left[\alpha(\beta f)\right](x)$$

dir. O halde $(\alpha\beta) f=\alpha(\beta f)$ dir.

8) Her $f \in C(A)$ ve $\forall x \in A$ için

$$(1f)(x)=1f(x)=f(x)$$

dir. O halde $1f=f$ dir.

Sonuç olarak $C(A)$ bir vektör uzayıdır.

$C(A)$ kümesi bazen $C(A,K)$ ile de gösterilir. Buradaki A kümesi yerine özel olarak $[\mathrm{a,b}]$ kapalı aralığını alırsak $C([\mathrm{a,b}])$ yerine kolaylık olması için $\mathrm{C}[\mathrm{a,b}]$ yazabiliriz.

Tanım 1

L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ olsun. $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \in F$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa, $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerine (F üzerinde) lineer bağımsızdır denir. Lineer bağımsız olmayan vektörlere de lineer bağımlı denir. Eğer bir $A \subset \mathrm{L}$ alt kümesinin her sonlu sayıda elemanları lineer bağımsız ise, A ya lineer bağımsızdır denir.

Tanım 2

X bir vektör uzayı olmak üzere $A \subset X$ için A lineer bağımsız olup $\forall x \in X$ elemanı A nın sonlu sayıda elemanlarının lineer kombinasyonu (toplamı) şeklinde yazılabiliyorsa yani, $\forall x \in X$ için $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \,, \alpha_i \in F \,, a_i \in A$ ise, A ya X' in bir Hamel Tabanı, A' nın eleman sayısı olan n sayısına $(n = |A|)$ ise, X vektör uzayının boyutu denir ve $\dim_F(X) := n$ (veya $Boy_F(X) := n$) ile gösterilir. Yani, bir uzaydaki lineer bağımsız elemanların maksimal sayısına bu uzayın boyutu denir.

Açıkça, eğer A lineer bağımsız ise, $\theta \notin A$' dır. Dolayısıyla uzayın kendisi ve herhangi alt vektör uzayı bu uzay için bir Hamel tabanı olamaz.

$\forall x \in X$ ve $x \neq \theta$ için $A = \{x\}$ kümesi her zaman lineer bağımsızdır, çünkü $\lambda x = \theta \overset{x \neq \theta}{\Leftrightarrow} \lambda = 0$ dır. Dolayısıyla $X \neq \{\theta\}$ uzayı için $\dim_F X \geq 1$ dir.

Bir vektör uzayının boyutu için $n < \infty$ ise, bu vektör uzayına sonlu boyutlu, aksi takdirde sonsuz boyutlu denir.

Tanım 3

Y_1 ve Y_2, X vektör uzayının iki alt vektör uzayı olsun. Eğer $\forall x \in X$ elemanı için $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ olmak üzere $x = y_1 + y_2$ olacak şekilde bir tek $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ varsa veya denk bir ifade ile $Y_1 \cap Y_2 = \{\theta\}$ ise, X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 uzaylarının direkt toplamıdır denir ve $X = Y_1 \bigoplus Y_2$ şeklinde yazılır.

Tersine, A ve B bir F cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bu uzayların $X := A \bigoplus B$ direkt toplamında toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\forall x, y \in X \Rightarrow x = (a,b)\ ve\ y = (c,d)$ için;

i) $x + y = (a+c, b+d)$,

ii) $\lambda x = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in F$ 'dir.

O halde $A \bigoplus B$ uzayı bu işlemlere göre bir vektör uzayıdır.

Örnek 4. $\mathbb{R}^2$ reel lineer uzayının $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ ve $Y = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ alt uzaylarını göz önüne alalım. $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ olup $\mathbb{R}^2 = X + Y$ dir. $X \cap Y = (\theta)$ olduğundan $\mathbb{R}^2 = X \bigoplus Y$ dir.

Örnek 5. $V = R^3$ olmak üzere $U = \{(a,b,0,) : a,b \in R\}$, $W = \{(0,b,c,) : b,c \in R\}$ alt uzaylarını göz önüne alalım. $V = U \oplus W$ mıdır?

V, U ve W alt uzaylarının direkt toplamı değildir. Çünkü $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ olup; $V = U + W = (a,b,0) + (0,b,c) = (a,2b,c)$ yazılır. Bu yazılış tek değildir. Gerçekten, örneğin $(-5,6,3) = (-5,2,0) + (0,4,3) = (-5,5,0) + (0,1,3)$ olur.

1.1.2. Normlu Uzay

N, bir reel veya kompleks vektör uzay olsun. $\|.\| : N \to R$ bir fonksiyon olmak üzere x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

N1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $(\alpha \in \mathbb{R}\ veya\ \alpha \in \mathbb{C})$ ve

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği) şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(N,\|.\|)$ ile gösterilir.

Örnek 6. $\|.\|: R^2 \to R, \|\vec{x}\| = |x| + |y|, \vec{x} = (x, y) \in R^2$ şeklinde tanımlanan $\|.\|$ bir normdur. Bunu gösterelim:

i) $\|\vec{x}\| = |x| + |y|$ olup $|x| \geq 0, |y| \geq 0$ olduğundan $\|\vec{x}\| \geq 0$ dır.

ii) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \; ve \; |y| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ve \; y = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \theta = (0,0)$

iii) $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda|\|\vec{x}\|$

iv) $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|(x, y) + (x', y')\| = \|(x + x', y + y')\| = |x + x'| + |y + y'|$

$$\leq (|x| + |y|) + (|x'| + |y'|) = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

elde edilir.

Örnek 7. Örnek 3 de $C[a,b]$' nin bir vektör uzayı olduğunu gördük. Şimdi $C[a,b]$ uzayında tanımlanan $\|f\| := \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ dönüşümünün bir norm olduğunu gösterelim.

1) $\|f\| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| \geq 0$ olduğu açıktır.

2) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \, için \, |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \, için \; f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f = 0$$

3) $\|\alpha f\| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |(\alpha f)(x)| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |\alpha f(x)| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |\alpha||f(x)| = |\alpha| \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)| = |\alpha|\|f\|$

4) $\|f + g\| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |(f + g)(x)| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)|$

$$\leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

Dolayısıyla $C[a,b]$ bu norma göre bir normlu uzaydır.

Bir normlu uzayda norm fonksiyonu için $\|x - y\| = \|y - x\|$ dir. Gerçekten; $\alpha = -1$ alınırsa N2' den dolayı $\|-x\| = \|x\|$ ve özellikle $\|x - y\| = \|y - x\|$' dir.

1.1.3. Öklid Uzayı

Tanım 4

X, $F=\{R\ veya\ \mathbb{C}\}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir $\langle .,. \rangle : X\times X\to F$ fonksiyonu,

i) $\langle x,x\rangle \geq 0,\ \langle x,x\rangle =0\Leftrightarrow x=\theta$

ii) $\langle x+y,z\rangle =\langle x,z\rangle +\langle y,z\rangle$

iii) $\langle \alpha x,y\rangle =\alpha \langle x,y\rangle \ \ (\alpha \in F)$

iv) $\langle x,y\rangle =\overline{\langle y,x\rangle }$

şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona X uzayında bir iç çarpım (veya iç çarpım fonksiyonu) denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına Öklid uzayı (veya iç çarpım uzayı) denir. İç çarpım uzayını $(X,\langle .,.\rangle)$ veya kısaca X ile göstereceğiz.

Örnek 8. $x=(x_1,x_2,...,x_n),y=(y_1,y_2,...,y_n)\in \mathbb{R}^n$ $(n\in \mathbb{N})$ olmak üzere $\langle .,.\rangle :\mathbb{R}^n\times \mathbb{R}^n\to \mathbb{R}$ $\langle x,y\rangle =x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ olarak tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım uzayıdır. Gerçekten iç çarpım aksiyomlarının sağlandığını aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

i) $\langle x,x\rangle =x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}\geq 0$ ve $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+...+x_n^{\ 2}=0\Leftrightarrow x_i=0$

ii) $\langle x+y,z\rangle =(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+...+(x_n+y_n)z_n$

$$=x_1z_1+y_1z_1+x_2z_2+y_2z_2+...+x_nz_n+y_nz_n$$

$$=x_1z_1+x_2z_2+...+x_nz_n+y_1z_1+y_2z_2+...+y_nz_n$$

$$=\langle x,z\rangle +\langle y,z\rangle$$

iii) $\langle \alpha x,y\rangle =(\alpha x_1)y_1+(\alpha x_2)y_2+...+(\alpha x_n)y_n\ =\alpha (x_1y_1)+\alpha (x_2y_2)+...+\alpha (x_ny_n)$

$$=\alpha \langle x,y\rangle$$

iv) $\langle x,y\rangle =x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n\ =y_1x_1+y_2x_2+...+y_nx_n\ =\overline{y_1x_1+...+y_nx_n}\ =\overline{\langle y,x\rangle }$

olduğundan $\langle .,. \rangle$ iç çarpım dönüşümüdür. Dolayısıyla $\left(\mathbb{R}^n, \langle .,. \rangle\right)$ bir öklid uzayıdır. Aynı düşünce ile $\mathbb{C}^n$ uzayı $\left\langle z, z^{'} \right\rangle := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z_i}$ ye göre bir kompleks öklid uzayıdır. Aşağıdaki teoremde iç çarpımın bazı özelliklerini ispatlayacağız.

Teorem 1: X bir iç çarpım uzayı, $x, y, z \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

2) $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle y, z \rangle$

4) $\langle x, \theta \rangle = \langle \theta, y \rangle = 0$ dır.

İspat: Teoremi ispat etmek için iç çarpımın özelliklerini kullanmak yeterlidir.

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

2) $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z, x \rangle} = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} + \overline{\langle \beta z, x \rangle} = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle$

4) $\langle x, \theta \rangle = \langle x, \theta + \theta \rangle = \langle x, \theta \rangle + \langle x, \theta \rangle \Rightarrow \langle x, \theta \rangle = 0$

$\langle \theta, y \rangle = \langle \theta + \theta, y \rangle = \langle \theta, y \rangle + \langle \theta, y \rangle \Rightarrow \langle \theta, y \rangle = 0$

olduğu görülür. ■

İç çarpım ile norm arasında aşağıdaki ilişki vardır.

Teorem 2: Bir öklid uzayı normlu uzaydır.

İspat: $\| . \| : X \to \mathbb{R}, \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanan $\| . \|$ dönüşümünü ele alalım.

i) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ olduğu açıktır.

ii) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

iii) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ olduğunu gösterelim.

$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2$

yazılır. $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ eşitliği göz önüne alınırsa

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2$

ve $\operatorname{Re} z \le |z|$ eşitsizliği kullanılırsa

$\le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \overset{schwartz}{\le} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$

elde edilir. Buradan

$\|x+y\|^2 \le (\|x\|+\|y\|)^2$ olup $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

bulunur. ■

$\|.\|: X \to \mathbb{R}, \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ normuna iç çarpım tarafından tanımlanan norm denir.

Uyarı 1: Teorem 2' nin tersi, genelde doğru değildir. Buna sayfa 15'de örnek verilecektir.

Örnek 9. Örnek 8' de ki $\mathbb{R}^n$ uzayı $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ ' e göre bir öklid uzayıdır. Teorem 2' ye göre bu uzay $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + ... + x_n^{\,2}}$ ye göre bir normlu uzaydır.

1.2. Banach ve Hilbert Uzayı

1.2.1. Tam Uzay

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Bazen bu uzayda verilen bir dizinin limiti uzayın dışında olabilir. Örneğin $(0,1)$ uzayında $\left(x_n = \dfrac{1}{n}\right)$ dizisinin limiti bu uzayın dışındadır. Bu takdirde bu uzay belli bir anlamda tam olmuyor. Bu yüzden aşağıdaki alt paragraflarda uzayın tamlığı ile ilgili kavramları tanımlayacağız.

Tanım 5

$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n,m \ge N$ *için* $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ ise, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Bu ifade $m,n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ olmasına denktir.

Örnek 10. $X=(0,1)$ kümesinde $\left(x_n=\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir cauchy dizisidir. Gerçekten; $m,n\to\infty$ iken $\|x_n-x_m\|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\xrightarrow[m,n\to\infty]{}0$ olduğundan (x_n) dizisi bir cauchy dizisidir.

Örnek 11. Açıkça, $(x_n=n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir cauchy dizisi değildir. Çünkü, örneğin $m=n+1$, $n\to\infty$ için $\|x_n-x_m\|=\|n-m\|=|n-n-1|=1\not\to 0$ dır.

Tanım 6

$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$ bir dizi olmak üzere, eğer $\forall\varepsilon>0$ *için* $\exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geq N$ *için* $\|x_n-x\|<\varepsilon$ ise x' e (x_n) dizisinin limiti denir ve $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ ile gösterilir. (x_n) dizisine ise yakınsaktır denir. Bu ifade $n\to\infty$ iken $\|x_n-x\|\to 0$ olmasına denktir.

Örnek 12. Örnek 10 daki (x_n) dizisi $\mathbb{R}$ de 0 noktasına yakınsaktır. Gerçekten ; $n\to\infty$ iken $\|x_n-0\|=\left|\frac{1}{n}-0\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ olduğundan (x_n) dizisi 0 noktasına yakınsaktır.

Teorem 3: Her yakınsak dizi bir cauchy dizisidir.

İspat : (x_n) dizisi x' e yakınsak olsun. O halde tanımdan, $\forall\varepsilon>0$ için $\exists N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n\geq\mathbb{N}$ için $\|x_n-x\|<\frac{\varepsilon}{2}$ dir. Buradan $\forall n,m\geq N$ için $\|x_n-x_m\|=\|x_n-x+x-x_m\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ elde edilir. Yani (x_n) bir cauchy dizisidir. ■

Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani her cauchy dizisi yakınsak değildir. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir.

Örnek 13. $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \subset X = (0,1)$ dizini ele alalım. Örnek 10' dan bu dizi bir cauchy dizisidir. Fakat $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olup $0 \notin (0,1)$ dir. Yani $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $X = (0,1)$ uzayında yakınsak bir dizi değildir.

Tanım 7

Eğer bir normlu uzayın her cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, bu uzaya tamdır denir.

Örnek 14. Analizden bilindiği gibi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ uzayları tamdır. Genel olarak $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ nin tam olduğunu kullanarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için$\left(\mathbb{R}^n, \|.\|\right)$ ve $\left(\mathbb{C}^n, \|.\|\right)$ uzaylarının da tam olduğu gösterilebilir.

Örnek 15. Örnek 7' de $C[a,b]$ uzayında $\|f\| = \sup\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$ dönüşümünün bir norm olduğunu gördük. Şimdi $C[a,b]$ uzayının bu norma göre tam olduğunu gösterelim.

$\forall \{f_n\} \subset C[a,b] : (f_n)$ cauchy dizisini alalım, yani $\|f_n - f_n\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ olsun. Buradan $\sup\limits_{a\le x\le b} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0$ ' dır. Yani $\forall x \in [a,b]$ için $|f_n(x) - f_m(x)| \to 0$ dır. Keyfi sabit x için ve her n için $a_n^{\ x} := f_n(x)$ olsun. Bu halde $|a_n^{\ x} - a_m^{\ x}| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$ dır. Yani her x için elde edilen $\{a_n^{\ x}\}_{n=1}^{\infty}$ sayısal dizisi $\mathbb{R}$ de bir cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ ' de her cauchy dizisi yakınsak olduğundan $\exists a^x \in \mathbb{R} : a_n^{\ x} \to a^x$ dir, yani $|a_n^{\ x} - a^x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: $f(x) := a^x$. Burada f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

$\forall x \in [a,b]$ için $|f_n(x) - f(x)| = |a_n^{\ x} - a^x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ olduğundan bu yakınsaklık düzgündür. O halde her n için f_n sürekli olduğundan düzgün yakınsaklık limit teoremine göre f süreklidir. Yani $f \in C[a,b]$ dir. (Her x için $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ olduğundan

$\sup_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|\to 0$. Dolayısıyla $\left\|f_n-f\right\|\to 0$, yani $f_n\to f$ 'dir). Buradan $C[a,b]$ uzayı tamdır.

1.2.2. Banach Uzayı

N normlu vektör uzay olsun. Eğer bu uzay tam ise, N' ye Banach Uzayı denir. N' nin normlu reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

Örnek 15' e göre $C[a,b]$ uzayı bir Banach uzayıdır. Aşağıda bir başka örneği inceleyelim.

Örnek 16. p , $1\le p<\infty$ olmak üzere;

$$l_p=\left\{(x_n)=(x_1,x_2,...)\,\middle|\,x_i\in F\ ve\ \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty\right\}\quad (F=\mathbb{R}\ veya\ \mathbb{C})$$

kümesinde bileşen bileşen toplama ve skalerle çarpma işlemlerini ele alalım. Bu işlemlere göre l_p' nin bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir. Bu uzayın $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ normuna göre Banach Uzayı olduğunu gösterelim.

$(x_m)=(x_1^m,x_2^m,...)$ olmak üzere (x_m), l_p' de keyfi bir cauchy dizisi olsun. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ için $m,n>m_0$ olduğunda

$$\|x_m-x_n\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^m-x_i^n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon \tag{1}$$

olacak şekilde m_0>0 sayısı vardır. Buradan anlaşılır ki $i=1,2,...$ için;

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^m-x_i^n\right|^p<\varepsilon^p\Rightarrow\left|x_i^m-x_i^n\right|<\varepsilon\ ;\ m,n>m_0\ ,\ \forall i$$

dir. Demek ki keyfi fakat sabit her bir i için $(x_i^n)=(x_i^1,x_i^2,...)$ dizisi F de (yani $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$' de) bir cauchy dizisidir. F tam olduğundan bu cauchy dizisi yakınsaktır. $\lim_{n\to\infty}x_i^n=x_i$ olsun. Her i için bu limitler yardımıyla teşkil ettiğimiz diziyi x ile gösterelim. Yani $x=(x_1,x_2,...)$ olsun.

Şimdi $k=1,2,...$ için (1)' den $\sum_{i=1}^{k}\left|x_i^{\,m}-x_i^{\,n}\right|^p<\varepsilon^p$ yazılabilir. $n\to\infty$ için;

$$\sum_{i=1}^{k}\left|x_i^{\,m}-x_i\right|^p<\varepsilon^p \quad ; \ m>m_0$$

yazılabilir. $k\to\infty$ için;

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^{\,m}-x_i\right|^p<\varepsilon^p \qquad (2)$$

elde edilir. Bu gösteriyor ki

$$\left(x_m-x\right)=\left(x_1^{\,m}-x_1,x_2^{\,m}-x_2,...\right)\in l_p$$

dir. $\left(x_m\right)\in l_p$ olduğundan $x=x_m+\left(x-x_m\right)\in l_p$ olur. (1)' e dikkat edilirse (2)' nin sol tarafı $\left\|x_m-x\right\|_p$ olur. Buradan $x_m\to x$ dir. Yani l_p içindeki $\left(x_m\right)$ cauchy dizisi bir $x\in l_p$ noktasına yakınsadığından l_p tamdır. O halde l_p bir Banach uzayıdır.

1.2.3. Hilbert Uzayı

X bir Öklid uzayı olsun. Teorem 2 ye göre X bir normlu uzaydır. Eğer bu uzay tam ise, X' e bir Hilbert Uzayı denir.

Örnek 17. Örnek 10 da $\langle .,.\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ olarak tanımlanan $\mathbb{R}^n$' nin bir öklid uzayı olduğunu gördük. Şimdi $\mathbb{R}^n$' in tam olduğunu gösterelim. İç çarpım normunun tanımından $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+...+x_n^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$ yazılabilir ve böylece $\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}\;=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+...+\left(x_n-y_n\right)^2}$ normunu elde ederiz. $\mathbb{R}^n$' nin $\|x-y\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ normuna göre tam olduğunu gösterelim.

$x_m=\left(x_1^{\,m},x_2^{\,m},...,x_n^{\,m}\right)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ de $\left(x_m\right)$ cauchy dizisini alalım. (Burada $x_i^{\,m}$' deki m üst indis olarak alınmıştır.) O halde $\varepsilon>0$ için $m,r>n_0$ olduğunda

$$\left\|x_m-x_r\right\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{\,m}-x_i^{\,r}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon \qquad (3)$$

olacak şekilde bir n_0 tamsayısı vardır. $i=1,2,...,n$ için buradan

$$\left|x_i^m - x_i^r\right|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \left|x_i^m - x_i^r\right| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ifade her bir i için $\left(x_i^r\right) = \left(x_i^1, x_i^2, ...\right)$'nin reel sayıların bir cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. $r \to \infty$ için $x_i^r \to x_i$ olduğunu kabul edelim. $i=1,2,...,n$ için bu limitler yardımıyla (n tane limit) x noktasını $x = \left(x_1, x_2, .., x_n\right)$ olarak tanımlayalım. Açıkça $x \in \mathbb{R}^n$ dir. $r \to \infty$ için (3)' den $\left\|x_m - x\right\|_2 \le \varepsilon$ elde edilir. Bu, $\left(x_m\right)$ nin limitinin x olduğunu gösterir. $\left(x_m\right)$ keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

Sonuç olarak $\mathbb{R}^n$ bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 2' den bir öklid uzayı bir normlu uzay olduğundan aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4: Bir Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır [2].

Uyarı 2: Bunun tersi genelde doğru değildir.

Buna bir örnek vermeden önce aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 5 (Paralel kenar kanunu): Bir $\left(X, \|.\|\right)$ normlu uzayda $\|.\|$ normunun bir iç çarpımla tanımlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$ için;

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

olmasıdır.

İspat : $(\Rightarrow)$ açıktır.

$(\Leftarrow)$ $\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$. $\langle x, y\rangle$ bir iç çarpım olup, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$. ■

Not 1: Teoremden anlaşılacağı gibi, eğer bir norm paralel kenar kanununu sağlamıyorsa bu norm iç çarpım normu olamaz. Dolayısıyla her normlu uzay bir Öklid Uzayı (iç çarpım uzayı) değildir.

Şimdi bunu bir örnekle gösterelim:

Örnek 18. Örnek 7' den $\left(C\left[a,b\right],\|.\|\right)$ uzayının bir normlu uzay olduğunu biliyoruz. Buna göre $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ve $\|f\|=\max\limits_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|f\left(x\right)\right|$ olmak üzere $\left(C\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\|f\|\right)$ uzayı bir normlu uzaydır. Bu uzayda paralel kenar kanununun sağlanmadığını gösterelim.

$f\left(x\right):=Cosx$, $g\left(x\right):=Sinx$ fonksiyonları için $f,g\in C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ olup;

$$\|f+g\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|Cosx+Sinx\right| \overset{x=\frac{\pi}{4}}{=} Cos\frac{\pi}{4}+Sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$\|f-g\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|Cosx-Sinx\right|=1-0=1,\ \|f\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|Cosx\right|=1,\ \|g\|=\max_{0\le x\le\frac{\pi}{2}}\left|Sinx\right|=1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2=3\\ 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)=2\left(1+1\right)=4\end{array}\right\}\Rightarrow 3\ne 4\Rightarrow \|x+y\|^2+\|x-y\|^2\ne 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

$\Rightarrow$ Teorem 5' e göre $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ normlu uzayı bir öklid uzayı değildir.

1.3. Banach Cebiri

1.3.1. Cebir

C, F cismi üzerinde bir vektör uzay ve $.:C\times C\to C$ bir dönüşüm olsun. Eğer bu $.:C\times C\to C$ dönüşümü her $x,y,z\in C$ ve her $\alpha\in F$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa C' ye (F üzerinde) cebir denir.

C1) $\alpha\left(x.y\right)=\left(\alpha x\right).y=x.\left(\alpha y\right)$

C2) $x.\left(y+z\right)=x.y+x.z$ ve $\left(x+y\right).z=x.z+y.z$

C3) $\left(x.y\right).z=x.\left(y.z\right)$

Cebirin tanımında geçen F cisminin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olması halinde C' ye sırası ile reel veya kompleks cebir denir. Şayet C bir cebir ve her $x,y\in C$ için $x.y=y.x$ ise C' ye değişmeli veya komütatif cebir denir. C' nin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa, yani her $x\in C$ için $x.e=e.x=x$ olacak şekilde $e\in C$ varsa C' ye birim elemanlı cebir ve e' yede birim eleman denir. Bu birim eleman bazen 1 veya 1_C ile de gösterilir.

Örnek 19. Örnek 3' de $C(X,\mathbb{R})$ nin bir vektör uzay olduğunu gördük. Ayrıca $(f.g)(x):=f(x)g(x)$ olarak tanımlanan $f.g$ çarpımı da reel sürekli bir fonksiyon olduğundan $f.g\in C(X,\mathbb{R})$' dir. Demek ki tanımlanan bu işlemlere göre $C(X,\mathbb{R})$ kapalıdır. $C(X,\mathbb{R})$' nin cebirle ilgili diğer şartları sağladığını da gösterebiliriz. Gerçekten;

$\forall f,g,h\in C(X,\mathbb{R})$ için , $\left[\alpha(f.g)\right](x)=\alpha(f.g)(x)=\alpha\left[f(x)g(x)\right]$

$$=\left[\alpha f(x)\right]g(x)\ =(\alpha f)(x)g(x)$$

$$=\left[(\alpha f).g\right](x)$$

Olduğundan $\alpha(f.g)=(\alpha f).g$ ' dir.

$$\left[\alpha(f.g)\right](x)=\alpha(f.g)(x)=\alpha\left[f(x)g(x)\right]=\left[\alpha f(x)g(x)\right]=\left[f(x)\alpha g(x)\right]$$

$$=f(x)\left[\alpha g(x)\right]=\left[f.(\alpha g)\right](x)$$

Olduğundan $\alpha(f.g)=f.(\alpha g)$' dir. Yani $\alpha(f.g)=(\alpha f).g=f.(\alpha g)$ dir.

$$\left[f.(g+h)\right](x)=f(x)\left[g(x)+h(x)\right]=f(x)g(x)+f(x)h(x)$$

$$=\left[f.g+f.h\right](x)$$

Olduğu için $f.(g+h)=f.g+f.h$ dir.

$$\left[(f+g).h\right](x)=\left[f(x)+g(x)\right].h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$$

$$=\left[f.h+g.h\right](x)$$

olduğu için $(f+g).h=f.h+g.h$ dır.

$$\left[f.(g.h)\right](x)=f(x)\left[g.h\right](x)\ =f(x)g(x)h(x)=\left[f.g\right](x)h(x)=\left[(f.g).h\right](x)$$

olduğundan $f.(g.h)=(f.g).h$ dır.

Sonuç olarak $C(X,\mathbb{R})$ reel cebirdir. Aynı zamanda $e:X\to\mathbb{R}$, $\mathrm{e}(x):=1$ olarak tanımlanırsa her $f\in C(X,\mathbb{R})$ için $e.f=f.e=f$ ve

$$(f.g)(x)=f(x)g(x)=g(x)f(x)=(g.f)(x)\Rightarrow f.g=g.f$$

Olduğundan $C(X,\mathbb{R})$ birim elemanlı ve değişmeli bir cebirdir.

Tanım 8

C bir cebir ve A, C' nin boş olmayan alt kümesi olsun. C' deki işlemlere göre A bir cebir ise A' ya C' nin alt cebiri denir. Kısaca C' nin boş olmayan bir A alt kümesinin alt cebir olması için gerek ve yeter şart,

1) A' nın lineer alt uzay ve

2) Her $x,y \in A$ için $x \bullet y \in A$

olmasıdır.

Açıkça $\mathbb{R}$ uzayı kompleks sayılar cebirinin bir reel alt cebiri olup, bir kompleks alt cebiri değildir.

Tanım 9

Tanım 3 de iki vektör uzayının direkt toplamı tanımını vermiştik. Eğer burada X bir cebir ise i ve ii şıklarına ilave olarak, yani;

i) $x+y=(a+c,b+d)$

ii) $\lambda x=(\lambda a,\lambda b), \lambda \in F$ şıklarına ilave olarak bu uzayda keyfi iki $x=(a,b)$ ve $y=(c,d)$ elemanları için çarpımı şöyle tanımlayalım:

iii) $x \bullet y=(ac,bd)$

dir. O halde X ve Y gibi iki cebirin direkt çarpımı da cebirdir.

1.3.2. Normlu Cebir

C bir cebir ve C' de bir $\|.\|$ normu tanımlanmış olsun. Yani kısaca $(C,\|.\|)$ bir normlu uzay ve aynı zamanda cebir olsun. Bu norm her $x,y \in C$ için $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ şartını sağlıyorsa ve C' nin birim elemanlı olması halinde de $\|e\|=1$ ise C' ye normlu cebir denir.

Örnek 20. Örnek 19 da $C[a,b]$'nin cebir olduğunu gördük. $C[a,b]$' nin Banach Cebiri olduğunu gösterelim. Örnek 7' den $\|f\| = \sup\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$ nin bir norm olduğunu biliyoruz. Şimdi $\|fg\| \le \|f\|\|g\|$ olduğunu gösterelim:

$\forall u,v \in \mathbb{R}$ için $|uv| = |u||v|$ olduğundan $\|f.g\| = \sup\limits_{a\le x\le b}\{|f(x)g(x)|\} =$

$= \sup\limits_{a\le x\le b}\{|f(x)||g(x)|\} = \sup\limits_{a\le x\le b}\{|f(x)|\}\sup\limits_{a\le x\le b}\{|g(x)|\} = \|f\|.\|g\|$' dir.

Diğer taraftan $f(x) := 1 \in C[a,b]$ olup $\|f\| = \sup\limits_{a\le x\le b}\{|f(x)|\} = \sup\limits_{a\le x\le b}\{1\} = 1$

$\Rightarrow (C[a,b], \|.\|)$ bir normlu cebirdir.

1.3.3. Operatör

İki uzay arasındaki dönüşümlere operatör adı verilir.

Tanım 10

X ve Y aynı bir F cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $A: X \to Y$ operatörü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için;

i) $A(x+y) = A(x) + A(y)$

ii) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$

şartlarını sağlıyorsa, A' ya lineer operatör denir. Bu iki şart, $\forall x, y \in A$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ şartına denktir.

Örnek 21. $\lambda \in F$ olmak üzere $A: X \to Y$, $A(x) := \lambda x$ için A lineerdir.

Örnek 22. $A_1, A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A_1(x_1,...,x_n) := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $A_2(x_1,...,x_n) := x_1.x_2...x_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ olsun. Açıkça, A_1 lineer, A_2 lineer değildir.

Tanım 11

$\left(X, \|.\|_x\right)$ ve $\left(Y, \|.\|_y\right)$ iki normlu uzay ve $A: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Öyle bir $K>0$ sayısı varsa öyleki her $x \in X$ için $\|A(x)\|_y \leq K\|x\|_x$ ise, A ya sınırlı operatör denir.

Örnek 23. $A: X \rightarrow Y$ olmak üzere A sabit yani, $\forall x \in X$ için $c \in Y$ olmak üzere $A(x) := c$ olsun. Eğer $c \neq \theta_y$ ise $x = \theta_x$ için ve $\forall K > 0$ sayısı için $\|A(x)\|_y = \|c\|_y > K\|\theta_x\|_x = 0$ olup $A: X \rightarrow Y$ sınırlı değildir. Eğer $c = \theta_y$ ise $\forall x \in X$ için $K := 1 > 0$ dersek $0 = \|A(x)\|_y = \|c\|_y = \|\theta_y\|_y \leq K\|x\|_x = 1\|x\|_x = \|x\|_x$ olup $A: X \rightarrow Y$ sınırlıdır.

Örnek 24. $A: X \rightarrow X$ ve $A = id$ ise, $\forall x \in X$ için $\|A(x)\| = \|x\|$ olduğundan $K = 1$ olup, A sınırlıdır.

Şimdi lineer, sınırlı bir operatörün normunu tanımlayalım.

Tanım 12

$A: \left(X, \|.\|_x\right) \rightarrow \left(Y, \|.\|_y\right)$ lineer sınırlı bir operatör olsun. Bu takdirde;

$\|A\| := \inf\left\{c > 0 : \|Ax\|_y \leq c\|x\|_x, \forall x \in X\right\}$ bir norm olduğu kolayca gösterilebilir. $\|A\|$ ya A' nın normu denir.

Teorem 6: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_y = \sup\limits_{x \neq \theta} \dfrac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x}$ dir.

İspat :

$$\alpha := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_y \overset{x \rightarrow \frac{x}{\|x\|_x}, x \neq \theta}{=} \sup_{x \neq \theta} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_x}\right) \right\|_y = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} \Rightarrow \alpha = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_x} \Rightarrow \|Ax\|_y \leq \alpha\|x\|_x \Rightarrow \|A\| \leq \alpha$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists x_0 \in X : \alpha - \varepsilon \leq \frac{\|Ax_0\|_y}{\|x_0\|_x} \Rightarrow (\alpha - \varepsilon)\|x_0\|_x \leq \|Ax_0\|_y \leq \alpha\|x_0\|_x$$

$$\Rightarrow (\alpha - \varepsilon)\cancel{\|x_0\|_x} \leq \|Ax_0\|_y \leq \|A\|\cancel{\|x_0\|_x} \Rightarrow (\alpha - \varepsilon) \leq \|A\| \overset{\forall \varepsilon}{\Rightarrow} \alpha \leq \|A\| \Rightarrow \|A\| = \alpha . \blacksquare$$

Teorem 7: X ve Y normlu uzaylar ve $A: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) A süreklidir.

ii) $\{\|A(x)\| : \|x\| \le 1\}$ sınırlıdır.

İspat : $(\text{i} \Rightarrow \text{ii})$ A, $\theta \in X$ noktasında sürekli olsun. Bu takdirde $\{\|A(x)\| : \|x\| \le 1\}$ kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim. A nın $\theta \in X$ de sürekliliğini kabul edip $\{\|A(x)\| : \|x\| \le 1\}$ kümesinin sınırlı olmadığını varsayalım. Bu takdirde $\|x_n\| \le 1$ için $\|A(x_n)\| \ge n$ olacak şekilde bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ dizisi vardır. $y_n := \frac{1}{n} x_n$ denirse $\|y_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\| \le \frac{1}{n}$ olacağından $n \to \infty$ için $\|y_n\| \to 0$ olup $y_n \to \theta$ dır. A, $\theta \in X$ de sürekli olduğundan $A(y_n) \to \theta'$ olmalıdır. Fakat

$$\|A(y_n)\| = \left\|A\left(\frac{1}{n} x_n\right)\right\|' = \frac{1}{n}\|A(x_n)\| \ge \frac{1}{n} n = 1$$

olduğundan $\|A(y_n)\| \ge 1$ elde edilir. Bu ise $A(y_n) \to \theta'$ olmasıyla çelişir. Bu çelişki $\|A(x_n)\| \ge n$ kabulümüzden kaynaklandı. O halde $\{\|A(x)\|' : \|x\| \le 1\}$ kümesi sınırlıdır.

$(\text{ii} \Rightarrow \text{i})$ A sınırlı ise A nın sürekli olduğunu gösterelim. $x \in X$ keyfi ve $x_n \to x$ olsun. Bu takdirde A nın lineer ve sınırlı olduğu göz önüne alınırsa

$$\|A(x_n) - A(x)\| \overset{A lineer}{=} \|A(x_n - x)\| \overset{A sınırlı}{\le} \|A\|\|x_n - x\| \to 0$$

elde edilir. O halde $A(x_n) \to A(x)$ olup A, $x \in X$ de süreklidir. $x \in X$ keyfi olduğundan A, X de süreklidir. ■

Sonuç 1: A süreklidir $\Leftrightarrow$ $\|A\|$ sınırlıdır.

Örnek 25. X bir Banach uzayı ve $B(X)$, X den X e tanımlı tüm lineer sınırlı dönüşümler kümesi olsun. Yani $B(X) := \{A = X \to X : A\, \textit{bir lineer, sınırlı operatördür}\}$ dir. $B(X)$ uzayının aşağıdaki işlemlere göre bir vektör uzayı olduğu gösterilebilir:

$(A+B)(x):=A(x)+B(x),(\lambda A)(x):=\lambda A(x),\lambda\in\mathbb{R}(veya\,\mathbb{C}),\forall x,y\in X$.

Bu uzayın $\bullet:(AB)(x):=A(B(x))$ işlemine göre bir cebir olduğu kolayca ispatlanabilir. $B(X)$ üzerinde A nın normunu $\|A\|:=\inf\{c:\|Ax\|\le c\|x\|\}$ olarak tanımlayalım. Böyle bir norm vardır, çünkü A sınırlı olduğundan $\forall x\in X$ için $\|Ax\|\le c\|x\|$ olacak şekilde bir pozitif c sayısı vardır. Teorem 6' dan bu tanım $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|=\sup\limits_{x\ne\theta}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ifadesine denktir. Dolayısıyla $(B(X),\|.\|)$ uzayı normlu uzaydır. Şimdi biz $(B(X),\|.\|)$' nin bir normlu cebir olduğunu gösterelim. Yani $\forall A,B\in B(X)$ için $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$ olduğunu gösterelim. $\forall x\in X$ için;

$$\|AB(x)\|=\|A(B(x))\|=\frac{\|A(B(x))\|}{\|B(x)\|}\|B(x)\|\le\left(\sup_{x\ne\theta}\frac{\|A(B(x))\|}{\|B(x)\|}\right)\|B(x)\|=\|A\|\|B(x)\|=\|A\|\frac{\|B(x)\|}{\|x\|}\|x\|$$

$$\le\|A\|\|x\|\sup_{x\ne\theta}\frac{\|B(x)\|}{\|x\|}=\|A\|\|B\|\|x\|$$

Yani $\|AB(x)\|\le\|A\|\|B\|\|x\|$ dir. Buradan;

$$\|AB\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|AB(x)\|\le\sup_{\|x\|\le 1}\|A\|\|B\|\|x\|=\|A\|\|B\|\Rightarrow\|AB\|\le\|A\|\|B\|$$

olup $(B(X),\|.\|)$ bir normlu cebirdir.

1.3.4. Banach Cebiri

$(C,\|.\|)$ normlu cebiri tam uzay ise, bu normlu cebire Banach Cebiri adı verilir. Bu tanıma göre $(C,\|.\|)$ Banach cebiri ise C' nin birim elemanlı olması gerekmez. Fakat C birim elemanlı ise Banach cebiri olabilmesi için, şartlardan biri de $\|e\|=1$ olmasıdır.

Örnek 26. Örnek 15' e göre $C[a,b]$ bir Banach uzayıdır. Örnek 19' a göre ise bu uzay bir cebirdir. Dolayısıyla $(C[a,b],\|.\|)$ bir Banach Cebiridir.

Örnek 27. Örnek 25 de $\left(B(X),\|.\|\right)$ nin normlu cebir olduğunu gördük. Ayrıca $B(X)$ uzayı bu norma göre tamdır, yani $\left(B(X),\|.\|\right)$ bir Banach cebiridir. Gösterelim ; $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(X)$ bir cauchy dizisi olsun. O halde $m,n \to \infty$ iken $\|A_n - A_m\| \to 0$ dır. Buradan $\forall x \in X$ için $\|(A_n - A_m)(x)\| \to 0$ yani;

$$\|A_n(x) - A_m(x)\| \to 0 \tag{4}$$

dir. $\forall x \in X$ bir sabit ve $x_n := A_n(x)$ olsun. O halde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, X de bir dizidir. (4) den $m,n \to \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \to 0$ dır. Bu yüzden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, X de bir cauchy dizisidir. X bir Banach uzayı yani tam olduğundan bu dizi X' in bir elemanına yakınsar. Bu elemanı a_x ile gösterelim. Bu durumda $n \to \infty$ iken $x_n \to a_x$ yani $n \to \infty$ iken

$$\|x_n - a_x\| \to 0 \tag{5}$$

dir. Burada a_x elemanı x' e bağımlıdır. $A: X \to X$ operatörünü $\forall x \in X$ için $A(x) := a_x$ şeklinde tanımlayalım. $A \in B(X)$ olduğunu yani A' nın lineer, sınırlı olduğunu gösterelim. $\forall x \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $A(\lambda x) = a_{\lambda x}$ dir, ve A_n lineer olduğundan $A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x) = \lambda x_n$ olup buradan $(\lambda x)_n = \lambda x_n$ dir. Benzer şekilde $A_n(x+y) = A_n(x) + A_n(y) = x_n + y_n$ buradan $(x+y)_n = x_n + y_n$ dir. O halde (5)' den $\|(\lambda x)_n - a_{\lambda x}\| \to 0, \|(x+y)_n - a_{x+y}\| \to 0$ olup, $a_{\lambda x} = \lambda a_x$ ve $a_{x+y} = a_x + a_y$ olduğunu görmek zor değildir. Buradan

$A(\lambda x) = a_{\lambda x} = \lambda a_x = \lambda A(x)$, $A(x+y) = a_{x+y} = a_x + a_y = A(x) + A(y)$' dir.

Yani A lineerdir. Şimdi A' nın sınırlı olduğunu gösterelim. A' nın sınırsız olduğunu varsayalım. O halde $k \to \infty$ iken $\|A(y_k)\| \to \infty$ olacak şekilde bir $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ dizisi vardır. Bu yüzden $k \to \infty$ iken $\|a_{y_k}\| \to \infty$ dır. Buradan n sabit ve $k \to \infty$ iken $\|(y_k)_n - a_{y_k}\| \to \infty$ olup bu (5) ile çelişir. Bu yüzden A sınırlıdır. O halde $A \in B(X)$ dir. Üstelik (5)' den $\forall x \in X$ ve $n \to \infty$ iken $\|x_n - a_x\| = \|A_n(x) - A(x)\| = \|(A_n - A)(x)\| \to 0$ dir. Buradan $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(A_n - A)(x)\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ olduğundan $\|A_n - A\| \to 0$ yani $A_n \to A$ dır.

Böylece $B(X)$ uzayındaki keyfi bir cauchy dizisi yine $B(X)$ uzayında bir elemana yakınsamaktadır. Bu yüzden $\left(B(X),\|.\|\right)$ tamdır yani $B(X)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 13

C bir Banach Cebiri ve A, C nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Şayet C deki işlemlere göre A nın kendisi bir Banach Cebiri ise A ya C nin Alt Banach Cebiri denir.

Örnek 28. $X=(\mathbb{C},\mathbb{R})$ ve $A:=(\mathbb{R},\mathbb{R})$ olmak üzere $A\subset X$ bir alt reel Banach cebiridir.

1.4. Banach * - Cebirleri

1.4.1. İnvolusyon

X bir cebir olsun. $*: X\to X$ dönüşümü için $x,y\in X$, $\lambda\in\mathbb{C}$ *veya* $\mathbb{R}$ olmak üzere

1) $\left(x^*\right)^*=x$

2) $(x+y)^*=x^*+y^*$

3) $(x.y)^*=y^*.x^*$

4) $(\lambda x)^*=\overline{\lambda}.x^*$,koşulları sağlanıyorsa, * - dönüşümüne involusyon denir.

Örnek 29. $X=\mathbb{C}$ için $z\in\mathbb{C}$ elemanının eşleniğini $z^*:=\overline{z}$ olarak tanımlarsak yukarıdaki 4 koşulun sağlandığı açıktır.

Örnek 30. $X=M_2(\mathbb{C})=\left\{A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{2}:a_{ij}\in\mathbb{C}\right\}$ 2×2 tipli matrisler uzayında $A\in X$ için $A^*:=\overline{A^t}$ alalım, burada $\overline{A^t}$, A matrisinin transpozesinin eşleniği anlamındadır.

$\left(A^*\right)^*=\overline{\left(\overline{A^t}\right)^t}=A$, $(A+B)^*=\overline{(A+B)^t}=\overline{A^t}+\overline{B^t}=A^*+B^*$, $(\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*$ olduğu açıktır. $(AB)^*=B^*.A^*$ olduğunu gösterelim.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ olsun. Bu takdirde

$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}, B^* = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{21}} \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_{22}} \end{pmatrix}$ dır.

$$(A.B)^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}b_{11}} + \overline{a_{12}b_{21}} & \overline{a_{21}b_{11}} + \overline{a_{22}b_{21}} \\ \overline{a_{11}b_{12}} + \overline{a_{12}b_{22}} & \overline{a_{21}b_{12}} + \overline{a_{22}b_{22}} \end{pmatrix}$$

$$B^*.A^* = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}a_{11}} + \overline{b_{21}a_{12}} & \overline{b_{11}a_{21}} + \overline{b_{21}a_{22}} \\ \overline{b_{12}a_{11}} + \overline{b_{22}a_{12}} & \overline{b_{12}a_{21}} + \overline{b_{22}a_{22}} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (A.B)^* = B^*.A^* \Rightarrow * : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}), A^* := \overline{A^t}$ dönüşümü involusyondur.

Bu örnek $M_n(\mathbb{C})$ uzayında $A^* := \overline{A^t}$ olarak genişletilebilir.

1.4.2. Banach * - Cebiri

X cebirinde * - involusyon tanımlı ise, X’ e * - Cebiri denir. Eğer X Banach cebiri olup, bu uzayda bir * - involusyon tanımlı ise, bu uzaya Banach * - Cebiri denir.

Örnek 31 $M_n(\mathbb{C}) := \left\{ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ $n \times n$ tipli matrisler uzayını göz önüne alalım. Açıkça her $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi $\mathbb{C}^n$ uzayında bir lineer, sınırlı operatördür: $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Tersine, $B(\mathbb{C}^n)'$ nin keyfi elemanının matrissel gösteriminin var olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)'$ dir. Örnek 27’ ye göre $B(\mathbb{C}^n)$ bir Banach cebiridir. O halde $M_n(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^n)$ cebiri $A^* = \overline{A^t}$ $(A \in M_n(\mathbb{C}))$’ ye göre bir Banach * - cebiridir.

Örnek 32. Örnek 26’ a göre $(C[a,b], \|.\|)$ bir Banach cebiridir. Bu cebirde $f^*(x) := \overline{f(x)}$ olarak tanımlanan $* : C[a,b] \to C[a,b]$ dönüşümü bir involusyon olup, bu involusyona göre $C[a,b]$ bir Banach * - cebiridir.

1.5. C*- Cebirleri

X bir kompleks Banach * - cebiri olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\|x^* x\| = \|x\|^2$ koşulu sağlanıyorsa, X uzayına bir C^* - Cebiri denir.

Örnek 33. $X = \mathbb{C}$ uzayında $\|z\| = |z|, z^* := \overline{z}$ olarak tanımlanırsa, $\mathbb{C}$ bir C^* - cebiridir. $\|z\|^2 = \|z^* z\|$ olduğunu gösterelim. $z = x + iy$ olsun.

$$\|z\|^2 = |z|^2 = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$$

$$\|z^* z\| = |(x-iy)(x+iy)| = |x^2 + y^2| = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \|z^* z\| = \|z\|^2 \text{ dir.}$$

Örnek 34. $C[a,b]$ uzayını ele alalım. Örnek 32' ye göre bu uzay bir Banach * - cebiridir. $\forall f \in C[a,b]$ için

$$\|f^* f\| = \max_{a \le x \le b} |(f^* f)(x)| = \max_{a \le x \le b} |f^*(x).f(x)| = \max_{a \le x \le b} |f^*(x)|.|f(x)| = \max_{a \le x \le b} \left|\overline{f(x)}\right|.|f(x)|$$

$$\overset{|\overline{z}|=|z|}{=} \max_{a \le x \le b} |f(x)|^2 = \|f\|^2$$

olduğundan $C[a,b]$ bir C^* - cebiridir.

Bu örnek aşağıdaki gibi genişletilebilir:

X bir yerel kompakt uzay olmak üzere $C_0(X) := \{f : X \to \mathbb{R}, f \textit{ sürekli}, f(\infty) = 0\}$ uzayını ele alalım. Burada $f(\infty) = 0$ eşitliği şu anlamdadır:

$$f(\infty) = 0 :\Leftrightarrow \forall f \in C_0(X), \forall \varepsilon > 0 \textit{ için } \exists K \subset X, K \textit{ kompakt} : |f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X \setminus K.$$

$C_0(X)$' de cebirsel işlemleri şöyle tanımlayalım:

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x), (f+g)(x) := f(x) + g(x), (fg)(x) := f(x) g(x), f^*(x) := \overline{f(x)}.$$

Normu ise $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ olarak tanımlayalım. O halde $C_0(X)$ uzayı bir C^* - cebiridir.

1.5.1. Hilbert Uzayında Dual Operatör

İki Banach uzayı arasındaki bir operatörün duali Banach uzaylarının duali yardımıyla tanımlanır. Burada Hilbert uzayları için bir başka tanımı vereceğiz.

Hilbert uzayları için şu teoremden yararlanalım.

Teorem 8: H ve $H^{'}$ iki Hilbert uzayı olmak üzere $A : H \to H^{'}$ bir lineer, sürekli operatör olsun. Bu takdirde keyfi $\mu \in H^{'}$ ve $\xi \in H$ için $\langle B\mu, \xi \rangle_1 = \langle \mu, A\xi \rangle_2$ olacak şekilde $B : H^{'} \to H$ lineer sürekli operatörü vardır [3].

Tanım 14

$(H, \langle .,. \rangle)$ bir Hilbert uzayı ve $A : H \to H$ bir operatör olsun. Teorem 8' de ki $B : H \to H$ operatörüne A operatörünün duali denir ve $B := A^*$ ile gösterilir. Şu halde; $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ dir.

Dual operatörüne bir örnek verelim.

Örnek 35. $H = \mathbb{C}^2$ olsun. $M_2(\mathbb{C}) = B(\mathbb{C}^2)$ olduğundan $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2} \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ olarak bir lineer sürekli operatördür. $\forall x \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow x = (x_1, x_2), x_i \in \mathbb{C}$, $Ax = y = (y_1, y_2), y_i \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow y = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$\mathbb{C}^n$ de $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + ... + x_n \overline{y_n}$ olduğu göz önüne alınırsa;

$\langle Ax, y \rangle = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\overline{y_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\overline{y_2}$ dir.

$A^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ olsun. Bu taktirde $A^* y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{pmatrix}$ dir.

Buradan;

$\langle x, A^* y \rangle = x_1 \left(\overline{b_{11}}\,\overline{y_1} + \overline{b_{12}}\,\overline{y_2} \right) + x_2 \left(\overline{b_{21}}\,\overline{y_1} + \overline{b_{22}}\,\overline{y_2} \right)$ bulunur. Buna göre

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle \overset{\forall x,y}{\Rightarrow} a_{11}=\overline{b_{11}}, a_{12}=\overline{b_{21}}, a_{21}=\overline{b_{12}}, a_{22}=\overline{b_{22}} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix}\overline{a_{11}} & \overline{a_{21}}\\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}}\end{pmatrix} \Rightarrow A^*=\overline{A^t}$$

dir.

Sonuç olarak; $M_2(\mathbb{C})=B(\mathbb{C}^2)$ cebirinde bir A operatörünün duali $\overline{A^t}$ ’ ne eşittir, yani A operatörünün duali, transpozesinin eşleniğidir.

Benzer şekilde $B(\mathbb{R}^n)$ veya $B(\mathbb{C}^n)$ uzaylarında bir A operatörünün dualinin $A^*=\overline{A^t}$ olduğu gösterilebilir.

Bir H Hilbert uzayında A^*, A’ nın duali olmak üzere $*:B(H)\to B(H)$ dönüşümü bir involusyondur. Gerçekten; burada $\langle T\xi,\mu\rangle \overset{\forall \xi,\mu}{=} \langle P\xi,\mu\rangle \Leftrightarrow T=P$ olduğunu kullanacağız.

i) $\left\langle A^{**}\xi,\mu\right\rangle=\left\langle \xi,A^*\mu\right\rangle=\langle A\xi,\mu\rangle \Leftrightarrow A^{**}=A$

ii) $\left\langle (\lambda A)^*\xi,\mu\right\rangle=\langle \xi,\lambda A\mu\rangle=\overline{\lambda}\langle \xi,A\mu\rangle=\overline{\lambda}\left\langle A^*\xi,\mu\right\rangle=\left\langle \overline{\lambda}A^*\xi,\mu\right\rangle \Leftrightarrow (\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*$

iii)
$$\begin{aligned}\left\langle (A+B)^*\xi,\mu\right\rangle &=\langle \xi,(A+B)\mu\rangle=\langle \xi,A\mu+B\mu\rangle\\ &=\langle \xi,A\mu\rangle+\langle \xi,B\mu\rangle\\ &=\left\langle A^*\xi,\mu\right\rangle+\left\langle B^*\xi,\mu\right\rangle\\ &=\left\langle (A^*+B^*)\xi,\mu\right\rangle\\ &\Leftrightarrow (A+B)^*=A^*+B^*\end{aligned}$$

iv) $\left\langle (AB)^*\xi,\mu\right\rangle=\langle \xi,AB\mu\rangle=\left\langle \xi,A\underbrace{(B\mu)}_{\mu'}\right\rangle=\left\langle \underbrace{A^*\xi}_{\xi'},B\mu\right\rangle=\left\langle B^*A^*\xi,\mu\right\rangle$

$\Leftrightarrow (AB)^*=B^*A^*$

Yani A’ nın A^* duali * - involusyon koşullarını sağlıyor.

Şimdi dual operatörü kullanarak C^* - cebirine iki örnek daha verelim.

Örnek 36. $M_n(\mathbb{C})=B(\mathbb{C}^n)$ cebirini ele alalım. Örnek 31’ e göre bu cebir $A^*:=\overline{A^t}$ ’ ye göre bir Banach * - cebiridir. Örnek 35’ e göre bu $*:B(\mathbb{C}^n)\to B(\mathbb{C}^n)$ dönüşümü operatörün dualine eşittir. Dolayısıyla $B(\mathbb{C}^n)$ dual involusyona göre de bir Banach * -

cebiridir. Bu cebir için $\left\|A^{*}A\right\| = \left\|A\right\|^{2}$ koşulunun sağlandığı aşağıdaki örnekte genel durumda gösterilmektedir. Dolayısıyla $M_{n}\left(\mathbb{C}\right) = B\left(\mathbb{C}^{n}\right)$ bir C^{*} - cebiridir.

Örnek 37. Örnek 27 de ki $B\left(X\right)$ Banach cebirini $X = H$ için ele alalım. Yani bir H Hilbert uzayı olmak üzere $B\left(H\right) := \left\{A : H \to H, lineer, sınırlı\right\}$ olsun. Bu uzayda involusyon A' nın duali olarak tanımlanırsa, $B\left(H\right)$ bir C* - cebiridir. Gösterelim:

$\left\|A^{*}A\right\| = \left\|A\right\|^{2}$ olduğunu gösterelim. Örnek 25 de A' nın normunun $\left\|A\right\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\left\|Ax\right\|$ olduğu gösterilmiştir. O halde;

$$\left\|A\right\|^{2} = \sup_{\|x\|=1}\left\|Ax\right\|^{2} = \sup_{\|x\|=1}\left\langle Ax, Ax\right\rangle = \sup_{\|x\|=1}\left\langle x, A^{*}Ax\right\rangle \tag{6}$$

$$\left\langle x, A^{*}Ax\right\rangle^{2} \overset{\substack{cauchy \\ eşts.}}{\leq} \left\langle x, x\right\rangle . \left\langle A^{*}Ax, A^{*}Ax\right\rangle = \left\|x\right\|^{2} . \left\|A^{*}Ax\right\|^{2} \qquad \left(\begin{matrix} \left\langle x, y\right\rangle^{2} \leq \left\langle x, x\right\rangle . \left\langle y, y\right\rangle \\ \left|\left\langle x, y\right\rangle\right| \leq \left\|x\right\| . \left\|y\right\| \end{matrix}\right)$$

(6)' ya göre;

$$\left\|A\right\|^{2} = \sup_{\|x\|=1}\left\langle x, A^{*}Ax\right\rangle \leq \sup_{\|x\|=1}\left(\left\|x\right\| . \left\|A^{*}Ax\right\|\right) = \sup_{\|x\|=1}\left\|A^{*}Ax\right\| = \left\|A^{*}A\right\| \quad \text{Yani; } \left\|A\right\|^{2} \leq \left\|A^{*}A\right\| \text{ dir.}$$

$B\left(H\right)$ Banach * - cebiri olduğundan $\left\|AB\right\| \leq \left\|A\right\| . \left\|B\right\|$ dir.

$\Rightarrow \left\|A\right\|^{2} \leq \left\|A^{*}A\right\| \leq \left\|A^{*}\right\| . \left\|A\right\| = \left\|A\right\| . \left\|A\right\| = \left\|A\right\|^{2} \Rightarrow \left\|A^{*}A\right\| = \left\|A\right\|^{2}$ olur.

1.5.2. Cebirlerin * - Gösterimi

Bu paragrafta bir C^{*}– cebirinin bir $B\left(H\right)$ uzayındaki gösterimi ele alınacaktır.

1.5.2.1. * - Morfizmi

X ve Y iki * - cebiri olsun. Eğer $\pi : X \to Y$ için;

1) $\pi\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha\pi\left(x\right) + \beta\pi\left(y\right)$

2) $\pi\left(xy\right) = \pi\left(x\right)\pi\left(y\right)$

3) $\pi\left(x^{*}\right) = \pi\left(x\right)^{*}$

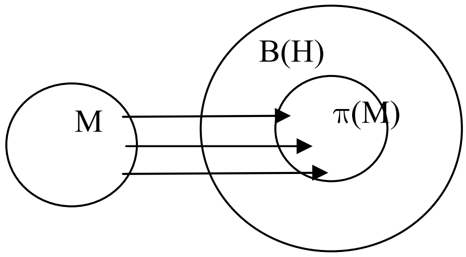
Koşulları sağlanıyorsa, π ye bir * - morfizmi denir.

1.5.2.2. * - İzomorfizm

$\pi : X \to Y$ bir * - morfizm olsun. Eğer π, bire bir ve örten ise π' ye * - izomorfizm denir. Bu durumda π *–izomorfizm $:\Leftrightarrow \ker(\pi) = \{x \in X : \pi(x) = \theta_y\} = \{\theta_x\}$ ve π örtendir.

1.5.2.3. C*- Cebirlerinin * - Gösterimi

M bir C^* - cebiri olsun. Eğer $\exists H$ Hilbert (kompleks) uzayı ve $\exists \pi$ * - morfizm için $\pi : M \to B(H)$ ise, (H,π) ikilisine M' nin bir * - gösterimi denir.



Şekil 1. M' nin bir * - gösterimi

Eğer $\pi : M \to \pi(M)$ olarak bir * - izomorfizm ise, yani $\ker(\pi) = \{\theta_x\}$ ise, (H,π) gösterimine M' nin aşikar gösterimi denir.

Örnek 38. Örnek 34' deki $C_0(X)$, C^* - cebirini ele alalım, burada X bir yerel kompakt uzaydır. m, X' de bir ölçü olmak üzere $H := L_2(X,m)$ olsun. Her $f_0 \in C_0(X)$ için $\overline{f_0} : H \to H$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$\overline{f_0}(f_0) := f_0 f \ , \ \forall f \in H$$

O halde $\overline{f_0} \in B(H)$ dir. Açıkça

$$\pi : C_0(X) \to B(H) : \pi(f_0) := \overline{f_0}$$

Dönüşümü bir * - morfizm olup, $\pi(C_0(X)) \subset B(H)$ dir. Dolayısıyla (H,π), $C_0(X)$' in bir * - gösterimidir.

1.5.2.4. C*- Cebirlerinin GNS Gösterimi

A Bir C*- cebiri olmak üzere

$S(A) := \left\{ \varphi : A \to \mathbb{C} \;\middle|\; \varphi \geq 0,\ \varphi \text{ lineer},\ \|\varphi\| = 1,\ \forall a,b \in A \text{ için } \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \right\}$ A ‘nın durumlar uzayı olsun.

$\forall \varphi \in S(A)$ Keyfi durum ve $\forall a,b \in A$ için $\langle a,b \rangle := \varphi(a^* b)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(A, \langle .,. \rangle)$ bir öklid uzayıdır.

$L_\varphi := \left\{ a \in A \;\middle|\; \varphi(a^* a) = 0 \right\}$, $\varphi_a := \left\{ \overline{a} \;\middle|\; \overline{a} : a + a',\ a' \in L_\varphi \right\}$ şeklinde tanımlanırsa $\varphi_a = \{a\} + L_\varphi$ olup $\{\varphi_a\}_{a \in A} = A/_{L_\varphi}$ ’dır. Ayrıca $(\varphi_a)^* = \left(\{a\} + L_\varphi\right)^* = \{a^*\} + L_\varphi = \varphi_{a^*}$ dır.

Teorem 9: $\forall \varphi_a, \varphi_b \in A/_{L_\varphi}$, $\mu \in \mathbb{C}$ için $\varphi_a + \varphi_b := \varphi_{a+b}$, $\mu\varphi_a = \varphi_{\mu a}$ işlemlerine göre $A/_{L_\varphi}$ bir kompleks vektör uzayı olup $(\varphi_a, \varphi_b) := \langle a,b \rangle = \varphi(a^* b)$ bir iç çarpımdır.

Dolayısıyla $\left(A/_{L_\varphi}, (.,.)\right)$ bir öklid uzayıdır. Bu durumda $\overline{A/_{L_\varphi}}^{(.,.)}$ bir Hilbert uzayıdır.

$\overline{A/_{L_\varphi}}^{(.,.)} := H_\varphi$ ile gösterelim. $\pi_\varphi : A \to B(H_\varphi)$ şöyle tanımlayalım $\forall a \in A$ için $\pi_\varphi(a) : H_\varphi \to H_\varphi$ olup $\forall \varphi_b \in H_\varphi$ için $\pi_\varphi(a)(\varphi_b) := \varphi_{ab}$

Lemma 1: $\pi_\varphi : A \to B(H_\varphi)$ bir*- gösterimidir. Diğer taraftan $\pi_\varphi(a) \in B(H_\varphi)$ olduğundan $\|\pi_\varphi(a)\|^2 = \sup\limits_{b \in A} \dfrac{\|\pi_\varphi(a)\varphi_b\|^2}{\|\varphi_b\|^2} = \sup\limits_{b \in A} \dfrac{\|\varphi_{ab}\|^2}{\|\varphi_b\|^2} = \sup\limits_{b \in A} \dfrac{(\varphi_{ab}, \varphi_{ab})}{(\varphi_b, \varphi_b)} =$

$= \sup\limits_{b \in A} \dfrac{\varphi\left((ab)^* ab\right)}{\varphi(b^* b)} = \sup\limits_{b \in A} \dfrac{\varphi(b^* a^* ab)}{\varphi(b^* b)}$ ’dir. Buradan

$$\|\pi_\varphi(a)\|^2 = \sup_{b \in A} \frac{\varphi(b^* a^* ab)}{\varphi(b^* b)} \tag{7}$$

Teorem 10: $\{\pi_\varphi, H_\varphi\}$ ikilisi A' nın indirgenemez *- gösterimi olup $\xi_\varphi := \varphi_1 \ \pi_\varphi(A)$' nın çembersel vektörüdür. Yani $\overline{\pi_\varphi(A)\xi_\varphi} = H_\varphi$' dir.

$\{\pi_\varphi, H_\varphi, \xi_\varphi\}$ Üçlüsüne A C*- cebirinin GNS gösterimi denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR ve İRDELEME

2.1. Tensör Çarpımı

2.1.1. Modüllerde Tensör Çarpımı

Modüllerde tensör çarpımı tanımını vermeden önce bazı kavramları verelim.

Tanım 15

R bir halka, $(M,+)$ bir değişmeli grup olmak üzere $.: R\times M \to M$, $.(r,m)\to r.m$ dönüşümü $\forall m,m_1,m_2 \in M, \forall r,r_1,r_2 \in R$ için

i) $r.(m_1+m_2)=r.m_1+r.m_2$,

ii) $(r_1+r_2).m=r_1.m+r_2.m$,

iii) $(r_1r_2).m=r_1.(r_2.m)$,

iv) $1_R \in R$ ise $1_R.m=m$

koşulları gerçekleniyorsa M ' ye sol R-modül veya kısaca R-modül denir ve ${}_RM$ ile gösterilir. Benzer şekilde halka elemanlar ile çarpım sağdan tanımlanarak sağ R-modül tanımı da verilir ve M_R ile gösterilir.

Tanım 16

$\varnothing \neq N \subset {}_RM$ olmak üzere $\forall a,b\in N, r\in R$ için $a-b\in N, r.a\in N$ ise N ' ye ${}_RM$ 'nin sol R-alt modülü veya kısaca R-alt modülü denir.

Tanım 1

$S\subset {}_RM$ olsun, $\mathrm{A} := \{N \mid N, {}_RM \text{'nin } S\text{'yi içeren } R- \text{ alt modülü}\}$ olsun $(\mathrm{A} \neq \varnothing$'dir. Çünkü $M\in \mathrm{A}$ 'dır.$)$. $K := \bigcap_{N\in \mathrm{A}} N$, M 'nin S ' yi içeren en küçük R-alt modüldür. K' ya S ile üretilen R-alt modül denir ve $\langle S\rangle = K = \bigcap_{N\in \mathrm{A}} N$ ile gösterilir.

Tanım 18

N, M 'nin R-alt modülü olsun, $a_1, a_2 \in M$ için $a_1 \equiv a_2 \left(\bmod N\right) \Leftrightarrow a_1 - a_2 \in N$ bir denklik bağıntısı olup "$\equiv$" denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi olan $M/_N := \left\{ a + N \,\middle|\, a \in M \right\}$ kümesine M 'nin N 'ye göre bölüm kümesi denir. Ayrıca bu küme bir R- modül olup M 'nin N 'ye göre bölüm modülü denir.

Tanım 19

${}_R M$ 'ye serbest R- modül denir, eğer $\exists S \subset {}_R M$ öyleki ${}_R M = \langle S \rangle$ olup S lineer bağımsızdır.

Şimdi modüllerde tensör çarpımı kavramını verelim.

A_R sağ R Modül A, ${}_R U$ sol R Modül U olmak üzere A_R ve ${}_R U$ Modüllerinin tensör çarpımı A_R ve ${}_R U$ modüllerini yeni bir modül oluşturacak şekilde birleştirir ve bu tensör çarpımı $A \bigotimes_R U$ şeklinde gösterilir. Bu tanımı aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 20

$A \times U := \left\{ (a,u) \,\middle|\, a \in A_R, u \in {}_R U \right\}$ kümesi A_R ve ${}_R U$ Modüllerinin kartezyen çarpımı olsun, $F := A \times U$ olmak üzere F bir serbest $\mathbb{Z}$ Modüldür.

$$D_1 := \left\{ (a + a', u) - (a,u) - (a',u) \,\middle|\, a, a' \in A_R, u \in {}_R U \right\},$$

$$D_2 := \left\{ (a, u + u') - (a,u) - (a,u') \,\middle|\, a \in A_R, u, u' \in {}_R U \right\},$$

$$T := \left\{ (ar, u) - (a, ru) \,\middle|\, a \in A_R, u \in {}_R U, r \in R \right\},$$

olmak üzere,

$$K := \langle D_1 \cup D_2 \cup T \rangle$$

olarak tanımlarsak K, F 'nin Alt Modülüdür. Bu durumda A_R ve ${}_R U$ Modüllerinin tensör çarpımı

$$A \bigotimes_R U := F/_K$$

ile tanımlanır. Bu durumda $(a,u) \in F$ elemanının $F \to F/_K$ doğal epimorfizim altındaki görüntüsüne a ve u elemanlarının tensör çarpımı denir.

Yani $a \otimes u := (a,u) + K$ Şeklindedir

Tanımdan faydalanarak aşağıdaki özelliklerin doğruluğu gösterilebilir.

$\forall a, a' \in A_R,\ u, u' \in {}_R U,\ z \in \mathbb{Z},\ r \in R$ için

1) $(a + a') \otimes u = (a \otimes u) + (a' \otimes u)$, (8)

2) $a \otimes (u + u') = (a \otimes u) + (a \otimes u')$,

3) $(ar \otimes u) = (a \otimes ru)$,

4) $0 \otimes u = a \otimes 0 = 0$,

5) $-(a \otimes u) = (-a) \otimes u = a \otimes (-u)$,

6) $z(a \otimes u) = (za) \otimes u = a \otimes (zu)$.

Örnek 39. $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{|n\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Z}_{|m\mathbb{Z}}$ modülleri için n ve m' nin durumlarına göre $\mathbb{Z}_{|n\mathbb{Z}} \bigotimes \mathbb{Z}_{|m\mathbb{Z}}$ tensör çarpımını araştıralım.

$a \in \mathbb{Z}_{|n\mathbb{Z}}$ ve $b \in \mathbb{Z}_{|m\mathbb{Z}}$ keyfi olmak üzere

$$\theta \otimes \theta = (a \otimes \theta) - (\theta \otimes u) = (a \otimes (mu)) - ((na) \otimes u) = m(a \otimes u) - n(a \otimes u) = (m-n)(a \otimes u)$$

$\Rightarrow \theta \otimes \theta = (m-n)(a \otimes u)$' dir. $\Rightarrow$ $m \neq n$ için $\mathbb{Z}_{|n\mathbb{Z}} \bigotimes \mathbb{Z}_{|m\mathbb{Z}} = \{\theta \otimes \theta\}$ dır. Bu durumda sadece $n = m$ için $\mathbb{Z}_{|n\mathbb{Z}} \bigotimes \mathbb{Z}_{|m\mathbb{Z}} \neq \{\theta \otimes \theta\}$ olabilir.

2.1.2. Banach Uzaylarında Tensör Çarpımı

Tanım 21

Banach uzaylarında ki tensör çarpımı, modüllerdeki tensör çarpımı ile aynı şekilde tanımlanmaktadır. $X_1, X_2, ..., X_n$'ler banach uzayları olmak üzere $X_1 \bigotimes X_2 \bigotimes ... \bigotimes X_n$'ye $X_1, X_2, ..., X_n$'nin cebirsel tensör çarpımı denir ve $X_1 \bigotimes X_2 \bigotimes ... \bigotimes X_n := \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ şeklinde gösterilir.

$\|.\|_\alpha$, $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ üzerinde bir norm olmak üzere $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$' nin $\|.\|_\alpha$' ya göre tamlaştırılmasına $X_1, X_2, ..., X_n$ banach uzaylarının tensör çarpımı denir ve $\|.\|_\alpha - \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ ile gösterilir.

$\Lambda \subset \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sonlu elemanlı alt kümesi olmak üzere $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için $x_j^{(i)} \in X_i$ olmak üzere,

$$u := \sum_{j \in \Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} x_j^{(i)}$$

şeklindedir. $\forall u := \sum_{j \in \Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} x_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için

$$u = \theta \Leftrightarrow \forall f_i \in X_i^* \text{ için } \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i \right)(u) = \sum_{j \in \Lambda} \prod_{i=1}^{n} f_i\left(x_j^{(i)}\right) = 0 . \tag{9}$$

Teorem 11: $X_1, X_2, ..., X_n$'ler banach uzayları olmak üzere $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ aşağıdaki işlemlere göre bir lineer uzaydır. $\forall u = \sum_{j \in \Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_{k \in \Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$, $\mu \in \mathbb{C}$ için

$$u \oplus v := \sum_{j \in \Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \oplus \sum_{k \in \Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} = \sum_{s} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)} \text{ olup burada } w_s^{(i)} := \begin{cases} u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda \quad ise, \\ v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda' \quad ise, \end{cases}$$

$$\mu.u := \mu.\sum_{j} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} := \sum_{j} \mu.\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} := \sum_{j} \left(\mu u_j^{(1)} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \right) \text{ 'dir.}$$

İspat: 1) $\forall u = \sum_{j \in \Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_{k \in \Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ olmak üzere,

$$u \oplus v := \sum_{j \in \Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \oplus \sum_{k \in \Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} = \sum_{s} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)}, \quad \text{burada} \quad w_s^{(i)} := \begin{cases} u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda \quad ise, \\ v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda' \quad ise, \end{cases}$$

$$= \sum_{l} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} r_l^{(i)} \text{ , burada } r_l^{(i)} := \begin{cases} v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad l \in \Lambda' \quad ise, \\ u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad l \in \Lambda \quad ise, \end{cases}$$

$$= \sum_{k \in \Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \oplus \sum_{j \in \Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} = v \oplus u$$

$\Rightarrow\ u\oplus v=v\oplus u$ 'dir.

2) $\forall u=\sum_{j\in\Lambda}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)},\ v=\sum_{k\in\Lambda'}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)},\ t=\sum_{p\in\Lambda''}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$ olmak üzere

$$u\oplus(v\oplus t)=\sum_{j\in\Lambda}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\oplus\left(\sum_{k\in\Lambda'}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\oplus\sum_{p\in\Lambda''}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}\right)=$$

$$=\sum_{j\in\Lambda}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\oplus\sum_{s\in\Lambda'''}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}w_s^{(i)},\text{burada }w_s^{(i)}:=\begin{cases}v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad s\in\Lambda'\quad ise,\\ t_p^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad s\in\Lambda''\quad ise,\end{cases}$$

$$=\sum_{l}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}r_l^{(i)}\ ,\text{ burada }r_l^{(i)}:=\begin{cases}u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad l\in\Lambda\quad ise,\\ w_s^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad l\in\Lambda'''\quad ise,\end{cases}$$

$$=\sum_{l}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}r_l^{(i)}\ ,\text{ burada }r_l^{(i)}:=\begin{cases}u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad l\in\Lambda\quad ise,\\ v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad l\in\Lambda'\quad ise,\\ t_p^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad l\in\Lambda''\quad ise,\end{cases}$$

$$=\sum_{q\in\Lambda''''}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\xi_q^{(i)}\oplus\sum_{p\in\Lambda''}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}\ ,\text{ burada }\xi_q^{(i)}=\begin{cases}u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad q\in\Lambda\quad ise\\ v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer\quad q\in\Lambda'\quad ise\end{cases}$$

$$=\left(\sum_{j\in\Lambda}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\oplus\sum_{k\in\Lambda'}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\right)\oplus\sum_{p\in\Lambda''}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}=(u\oplus v)\oplus t\ \text{ 'dir.}$$

$\Rightarrow\ u\oplus(v\oplus t)=(u\oplus v)\oplus t$ 'dir.

3) X_1 banach uzayı olduğundan $\forall x_j^{(1)}\in X_1$ için $\exists\theta_1\in X_1$ öyleki $x_j^{(1)}+\theta_1=\theta_1+x_j^{(1)}=x_j^{(1)}$'dir. $\theta:=\sum_j\left(\theta_1\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}}x_j^{(i)}\right)\right)\in\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$ şeklinde tanımlarsak $\forall f_i\in X_i^*$ için

$$\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}f_i\right)(\theta)=\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}f_i\right)\left(\sum_j\left(\theta_1\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}}x_j^{(i)}\right)\right)\right)=\sum_j\left(f_1(\theta_1)\prod_{i=2}^{n}f_i\left(x_j^{(i)}\right)\right)\xlongequal{f_1\,lineer\,old.}0$$

$$\Rightarrow\ \forall v=\sum_k\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^{n}X_i\text{ için }\theta\oplus v=\sum_s\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}w_s^{(i)}\text{ olsun}$$

$$\Rightarrow\ \forall f_i\in X_i^*\text{ için }\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}f_i\right)(\theta\oplus v)=\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}f_i\right)\left(\sum_s\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}w_s^{(i)}\right)=\sum_s\prod_{i=1}^{n}f_i\left(w_s^{(i)}\right)=$$

$$=\sum_j\left(f_1(\theta_1)\prod_{i=2}^{n}f_i\left(x_j^{(i)}\right)\right)+\sum_k\prod_{i=1}^{n}f_i\left(v_k^{(i)}\right)=0+\sum_k\prod_{i=1}^{n}f_i\left(v_k^{(i)}\right)=\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}f_i\right)(v)\text{ olup}$$

$\forall f_i\in X_i^*$ için $\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}f_i\right)(\theta\oplus v)=\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}f_i\right)(v)$ 'dir.

$\Rightarrow\ \theta \oplus v = v$ ‘ dir. Benzer şekilde $v \oplus \theta = v$ olduğu da gösterilebilir.

4) $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için $u_j^{(1)} \in X_1$ olup X_1 banach uzayı olduğundan $\exists \left(u_j^{(1)}\right)^{-1} \in X_1$ öyleki $u_j^{(1)} + \left(u_j^{(1)}\right)^{-1} = \left(u_j^{(1)}\right)^{-1} + u_j^{(1)} = \theta_1$ ‘dir.

$$\Rightarrow\ u^{-1} := \sum_j \left(\left(u_j^{(1)}\right)^{-1} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} \left(u_j^{(i)}\right) \right) \right) \text{ olarak tanımlarsak}$$

$$u \oplus u^{-1} = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \oplus \sum_j \left(\left(u_j^{(1)}\right)^{-1} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} \left(u_j^{(i)}\right) \right) \right) \text{ olup}$$

$$\forall f_i \in X_i^* \text{ için } \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i \right)\left(u \oplus u^{-1}\right) = \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i \right)\left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \oplus \sum_j \left(\left(u_j^{(1)}\right)^{-1} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} \left(u_j^{(i)}\right) \right) \right) \right) =$$

$$= \sum_j \prod_{i=1}^{n} f_i\left(u_j^{(i)}\right) + \sum_j \left(f_1\left(\left(u_j^{(1)}\right)^{-1}\right) \prod_{i=2}^{n} f_i\left(u_j^{(i)}\right) \right) = \sum_j \left(\left(f_1\left(u_j^{(1)}\right) + f_1\left(\left(u_j^{(1)}\right)^{-1}\right) \right) \prod_{i=2}^{n} f_i\left(u_j^{(i)}\right) \right) =$$

$$\xlongequal{f_1\ lineer\ old.} \sum_j \left(f_1\left(u_j^{(1)} + \left(u_j^{(1)}\right)^{-1} \right) \prod_{i=2}^{n} f_i\left(u_j^{(i)}\right) \right) = \sum_j \left(f_1(\theta_1) \prod_{i=2}^{n} f_i\left(u_j^{(i)}\right) \right) =$$

$$\xlongequal{f_1\ lineer\ old.} \sum_j \left(0 \prod_{i=2}^{n} f_i\left(u_j^{(i)}\right) \right) = 0 \text{ ‘dır.}$$

$$\Rightarrow \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i \right)\left(u \oplus u^{-1}\right) = 0 \text{ olup } u \oplus u^{-1} = \theta \text{ ‘dır.}$$

Benzer şekilde $u^{-1} \otimes u = \theta$ olduğu gösterilir.

5) $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$, $\mu \in \mathbb{C}$ için

$$\mu.(u \oplus v) = \mu. \left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \oplus \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \right) = \mu. \sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)} = \sum_s \left(\mu w_s^{(1)} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} w_s^{(i)} \right) \right) =$$

$$= \sum_j \left(\mu u_j^{(1)} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \right) + \sum_k \left(\mu v_k^{(1)} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} v_k^{(i)} \right) \right) = \mu.u \oplus \mu.v$$

$$\Rightarrow\ \mu.(u \oplus v) = \mu.u \oplus \mu.v \text{ ‘dir.}$$

6) $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\left(\mu_1\mu_2\right).u=\left(\mu_1\mu_2\right).\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}=\sum_j\left(\left(\mu_1\mu_2\right)u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)\overset{X_1\ B.U.old.}{=\!=\!=\!=}\sum_j\left(\mu_1\left(\mu_2 u_j^{(1)}\right)\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)=$$

$$\overset{Tanımdan}{=\!=\!=}\mu_1.\left(\sum_j\left(\mu_2 u_j^{(1)}\right)\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)\overset{Tanımdan}{=\!=\!=}\mu_1.\left(\mu_2.\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)=\mu_1.\left(\mu_2.u\right)$$

$\Rightarrow$ $\left(\mu_1\mu_2\right).u=\mu_1.\left(\mu_2.u\right)$ ‘dir.

7) $\forall u=\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$, $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$ için

$$\left(\mu_1+\mu_2\right).u=\left(\mu_1+\mu_2\right).\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}=\sum_j\left(\left(\mu_1+\mu_2\right)u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)\overset{X_1\ B.U.old.}{=\!=\!=\!=}$$

$$\sum_j\left(\left(\mu_1 u_j^{(1)}+\mu_2 u_j^{(1)}\right)\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)\overset{(8)}{=\!=}\sum_j\left(\mu_1 u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\oplus\mu_2 u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)=$$

$$=\sum_j\left(\mu_1 u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)\oplus\sum_j\left(\mu_2 u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)=\left(\mu_1.u\right)\oplus\left(\mu_2.u\right)$$

$\Rightarrow$ $\left(\mu_1+\mu_2\right).u=\left(\mu_1.u\right)\oplus\left(\mu_2.u\right)$ ‘dir.

8) $\forall u=\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$ için ve $1\in\mathbb{C}$ için

$$1.u=1.\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}=\sum_j\left(1u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)\overset{X_1\ B.U.old.}{=\!=\!=\!=}\sum_j\left(1u_j^{(1)}\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)=\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}=u \text{ ‘dir}$$

$\Rightarrow$ $1.u=u$ ‘dir.

$\Rightarrow$ 1, 2, …,8 ‘ den $\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$ bir lineer uzaydır. ■

Tanım 22

$X_1,X_2,....,X_n$’ ler banach uzayları olsunlar. Eğer $\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$ uzayında $\|\,.\,\|_\alpha:\bigotimes_{i=1}^{n}X_i\longrightarrow[0,+\infty)$ dönüşümü normun özelliklerini sağlayıp $\forall u=\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i\in\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$ için $\|u\|_\alpha=\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i\right\|_\alpha=\|u_1\|_1.\|u_2\|_2...\|u_n\|_n$ ise $\|\,.\,\|_\alpha$ ya $\bigotimes_{i=1}^{n}X_i$ ’ de Çapraz Norm denir.

Teorem 12: $X_1, X_2, ..., X_n$ ' ler banach uzayları ve $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ onların cebirsel tensör çarpımı olsun.

1) $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için $\|u\|_\lambda := \sup\left\{ \left| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u) \right| \;\middle|\; f_i \in X_i^*, \|f_i\|_i^* \le 1, 1 \le i \le n \right\}$ ise $\|.\|_\lambda$ bir norm olup bu norm $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ üzerinde bir çapraz normdur.

2) $\|v\|_\gamma := \inf\left\{ \sum_k \prod_{i=1}^{n} \left\|v_k^{(i)}\right\|_i \;\middle|\; v = \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \right\} \left(\forall v \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i \right)$ bir norm olup $\|.\|_\gamma$ normu $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ üzerindeki en büyük çapraz normdur.

Teoremin ispatını vermeden önce aşağıdaki uyarıyı göz önüne alalım.

Uyarı 3: $\|.\|_\gamma$ 'da infimum $u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ 'nin bütün gösterimleri üzerinden alınmaktadır. Örneğin Teorem 11'in 3. şıkkından $\theta := \sum_j \left(\theta_1 \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} x_j^{(i)} \right) \right) \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ olduğunu biliyoruz. Teorem 11'in 4. şıkkından $\forall v = \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i \setminus \{\theta\}$ için

$v^{-1} := \sum_k \left(\left(v_k^{(1)} \right)^{-1} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} \left(v_k^{(i)} \right) \right) \right)$ şeklinde tanımlandığında $v \oplus v^{-1} = \theta$ olduğunu biliyoruz.

Buna göre $v \oplus v^{-1} = \left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \right) \oplus \left(\sum_k \left(\left(v_k^{(1)} \right)^{-1} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} \left(v_k^{(i)} \right) \right) \right) \right) = \sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)}$ olup

$$\sum_s \prod_{i=1}^{n} \left\|w_s^{(i)}\right\|_i = \sum_k \prod_{i=1}^{n} \left\|v_k^{(i)}\right\|_i + \sum_k \left(\left\| \left(v_k^{(1)} \right)^{-1} \right\|_1 \prod_{i=2}^{n} \left\|v_k^{(i)}\right\|_i \right) = \sum_k \prod_{i=1}^{n} \left\|v_k^{(i)}\right\|_i + \sum_k \prod_{i=1}^{n} \left\|v_k^{(i)}\right\|_i =$$

$$= 2 \sum_k \prod_{i=1}^{n} \left\|v_k^{(i)}\right\|_i \ne 0 = \sum_j \|\theta_1\|_1 \prod_{i=2}^{n} \left\|x_j^{(i)}\right\|_i \text{ olup}$$

$\theta = \sum_j \left(\theta_1 \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} x_j^{(i)} \right) \right) = \sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)}$ şeklinde farklı iki gösterim için

$\sum_s \prod_{i=1}^{n} \left\|w_s^{(i)}\right\|_i \ne \sum_j \|\theta_1\|_1 \prod_{i=2}^{n} \left\|x_j^{(i)}\right\|_i$ şeklinde farklıdır. Dolayısıyla bütün gösterimler üzerinden infimum almak doğaldır.

Ayrıca $u=\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} x_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$, $\|u\|_\gamma := \inf\left\{\sum_j \prod_{i=1}^{n} \left\|x_j^{(i)}\right\|_i\right\}$ için $\exists\ u=\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$

gösterimi öyleki $\|u\|_\gamma := \sum_k \prod_{i=1}^{n} \left\|u_k^{(i)}\right\|_i$ şeklindedir.

İspat:

1) Önce $\|.\|_\lambda$ 'nın bir norm olduğunu gösterelim.

N1) $\forall u=\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için $\|u\|_\lambda := \sup\left\{\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u)\right| \;\middle|\; f_i \in X_i^*, \|f_i\|_i^* \le 1, 1 \le i \le n\right\} \ge 0$

olduğu açıktır.

N2) $\forall u=\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ keyfi olsun

$$\|u\|_\lambda = 0 \;\Leftrightarrow \sup\left\{\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u)\right| \;\middle|\; f_i \in X_i^*, \|f_i\|_i^* \le 1, 1 \le i \le n\right\} = 0 \Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,}$$

$$\forall f_i \in X_i^*, \|f_i\|_i^* \le 1 \text{ için} \left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u)\right| = 0 \Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,} \forall f_i \in X_i^*, \|f_i\|_i^* \le 1 \text{ için} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,} \forall f_i \in X_i^*, \|f_i\|_i^* \le 1 \text{ için } \sum_j \prod_{i=1}^{n} f_i\left(x_j^{(i)}\right) = 0 \qquad (10)$$

$$\Rightarrow \forall g_i\left(\neq \theta_i\right) \in X_i^* \text{ için } f_i := \frac{g_i}{\|g_i\|_i^*} \text{ şeklinde tanımlarsak } \|f_i\|_i^* = \left\|\frac{g_i}{\|g_i\|_i^*}\right\|_i^* = \frac{\|g_i\|_i^*}{\|g_i\|_i^*} = 1 \quad (10)$$

koşulunu sağlar.

$$\Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,} \forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i\}, \text{ için } \sum_j \prod_{i=1}^{n} \frac{g_i}{\|g_i\|_i^*}\left(u_j^{(i)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,} \forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i\} \text{ için } \sum_j \left(\prod_{i=}^{n} \frac{1}{\|g_i\|_i^*} \prod_{i=1}^{n} g_i\left(u_j^{(i)}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,} \forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i\} \text{ için } \prod_{i=}^{n} \frac{1}{\|g_i\|_i^*} \sum_j \prod_{i=1}^{n} g_i\left(u_j^{(i)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,} \forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i\} \text{ için } \sum_j \prod_{i=1}^{n} g_i\left(u_j^{(i)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere,} \forall g_i \in X_i^* \text{ için } \sum_j \prod_{i=1}^{n} g_i\left(u_j^{(i)}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le i \le n \text{ olmak üzere}, \forall\, g_i \in X_i^* \text{ için } \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} g_i \left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

N3) $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ ve $\forall \mu \in \mathbb{C}$ için

$$\|\mu.u\|_\lambda = \left\| \mu.\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right\|_\lambda = \left\| \sum_j \left(\mu u_j^{(1)} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \right) \right\|_\lambda = \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} \left| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i \left(\sum_j \left(\mu u_j^{(1)} \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \right) \right) \right| =$$

$$= \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} \left| \sum_j \left(f_i\left(\mu u_j^{(1)} \right) \prod_{i=2}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) \right) \right| \overset{f_1\, lin.old.}{=\!=\!=\!=} \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} \left| \sum_j \left(\mu f_i\left(u_j^{(1)} \right) \prod_{i=2}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) \right) \right| =$$

$$= \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} \left| \sum_j \left(\mu \prod_{i=1}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) \right) \right| = \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} \left| \sum_j \left(\mu \prod_{i=1}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) \right) \right| = \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} \left| \mu \sum_j \prod_{i=1}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) \right| =$$

$$= \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} |\mu| \left| \sum_j \prod_{i=1}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) \right| = |\mu| \sup_{\substack{f_i \in X_i^* \\ \|f_i\|_i^* \le 1}} \left| \sum_j \prod_{i=1}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) \right| = |\mu|.\|u\|_\lambda$$

$\Rightarrow \|\mu.u\|_\lambda = |\mu|.\|u\|_\lambda$ 'dir.

N4) $\forall u = \sum_{j\in\Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_{k\in\Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için $\forall f_i \in X_i^*$ için

$$u \oplus v := \sum_{j\in\Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \oplus \sum_{k\in\Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} = \sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)} \text{ olmak üzere } w_s^{(i)} := \begin{cases} u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda \quad ise, \\ v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda' \quad ise, \end{cases}$$

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i (u \oplus v) = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f \left(\sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)} \right) = \sum_s \prod_{i=1}^{n} f_i\left(w_s^{(i)} \right) \ldots,\ldots\ w_s^{(i)} := \begin{cases} u_j^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda \quad ise, \\ v_k^{(i)}\text{'}dir, & eğer \quad s \in \Lambda' \quad ise, \end{cases}$$

$$= \sum_j \prod_{i=1}^{n} f_i\left(u_j^{(i)} \right) + \sum_k \prod_{i=1}^{n} f_i\left(v_k^{(i)} \right) = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u) + \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(v) \text{ olup}$$

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i (u \oplus v) = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u) + \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(v) \text{' dir} \qquad (11)$$

$\Rightarrow \forall u = \sum_{j\in\Lambda} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_{k\in\Lambda'} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için

$$\|u\oplus v\|_\lambda=\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u\oplus v)\right|\overset{(11)}{=\!=}\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u)+\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(v)\right|\le\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left(\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u)\right|+\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(v)\right|\right)=$$

$$=\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u)\right|+\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(v)\right|=\|u\|_\lambda+\|v\|_\lambda \text{ yani}$$

$$\|u\oplus v\|_\lambda\le\|u\|_\lambda+\|v\|_\lambda \text{ olup}$$

N1, N2, N3, N4' den $\|.\|_\lambda$ bir normdur.

Şimdi çapraz norm olduğunu gösterelim. $\forall u=\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} x_i\in\bigotimes_{i=1}^n X_i$ keyfi olsun

$$\|u\|_\lambda=\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} x_i\right)\right|=\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|\prod_{i=1}^n f_i(x_i)\right|=\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\prod_{i=1}^n\left|f_i(x_i)\right|=\prod_{i=1}^n\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|f_i(x_i)\right|=$$

$$=\prod_{i=1}^n\|x_i\|_i=\|x_1\|_1.\|x_2\|_2.....\|x_n\|_n$$

$\Rightarrow$ $\|u\|_\lambda=\|x_1\|_1.\|x_2\|_2.....\|x_n\|_n$ olup $\|.\|_\lambda$, $\bigotimes_{i=1}^n X_i$ 'de çapraz normdur.

2) Öncelikle $\|u\|_\gamma:=\inf\left\{\sum_j\prod_{i=1}^n\left\|u_j^{(i)}\right\|_i \;\middle|\; u=\sum_j\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}\right\}\left(\forall u\in\bigotimes_{i=1}^n X_i\right)$ 'nın bir norm olduğunu gösterelim.

N1) $\forall u\in\bigotimes_{i=1}^n X_i$ *için* $\|u\|_\gamma\ge 0$ olduğu açıktır.

N2) $\forall u=\sum_k\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} x_k^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^n X_i$ olsun öyleki $\|u\|_\gamma=0$ olsun. Gösterilmesi gereken $\forall g_i\in X_i^*$ için $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} g_i(u)=0$ olduğudur.

$\|u\|_\gamma=0\Leftrightarrow\inf\left\{\sum_k\prod_{i=1}^n\left\|x_k^{(i)}\right\|_i\right\}=0\overset{Uyarı3}{\Leftrightarrow}\exists u=\sum_j\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} x_j^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^n X_i$ gösterimi öyleki $\sum_j\prod_{i=1}^n\left\|x_j^{(i)}\right\|_i=0$

$\Leftrightarrow\forall j$ için $\prod_{i=1}^n\left\|x_j^{(i)}\right\|_i=0\Leftrightarrow\forall j$ için $\exists i_j\in\{1,2,...,n\}$ öyleki $\left\|x_j^{(i_j)}\right\|_{i_j}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall j$ için $\exists i_j\in\{1,2,...,n\}$ öyleki $\sup_{\substack{f_i\in X_i^*\\ \|f_i\|_i^*\le 1}}\left|f_i\left(x_j^{(i_j)}\right)\right|=0\Leftrightarrow\forall j$ için $\exists i_j\in\{1,2,...,n\}$ öyleki

$\|f_i\|_i^*\le 1$ olan $\forall f_i\in X_i^*$ için $\left|f_i\left(x_j^{(i_j)}\right)\right|=0$

Şimdi $\forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i^*\}$ için $f_i := \dfrac{g_i}{\|g_i\|_i^*}$ şeklinde tanımlarsak $\|f_i\|_i^* = \left\|\dfrac{g_i}{\|g_i\|_i^*}\right\|_i^* = \dfrac{\|g_i\|_i^*}{\|g_i\|_i^*} = 1$

olup bu şekilde tanımladığımız $f_i := \dfrac{g_i}{\|g_i\|_i^*}$ yukarıdaki koşulu sağlar ,buradan

$\Leftrightarrow \forall j$ için $\exists i_j \in \{1,2,...,n\}$ öyleki $\forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i^*\}$ için $\left|\dfrac{g_i}{\|g_i\|_i^*}\left(x_j^{(i_j)}\right)\right| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall j$ için $\exists i_j \in \{1,2,...,n\}$ öyleki $\forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i^*\}$ için $\left|g_i\left(x_j^{(i_j)}\right)\right| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall j$ için $\exists i_j \in \{1,2,...,n\}$ öyleki $\forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i^*\}$ için $g_i\left(x_j^{(i_j)}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall j$ için ve $\forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i^*\}$ için $\prod_{i=1}^{n} g_i\left(x_j^{(i_j)}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall g_i \in X_i^* \setminus \{\theta_i\}$ için $\sum_j \prod_{i=1}^{n} g_i\left(x_j^{(i_j)}\right) = 0$

Diğer taraftan $g_i = \theta_i^*$ ise $\sum_j \prod_{i=1}^{n} g_i\left(x_j^{(i_j)}\right) = 0$ olduğu açıktır.

$\Leftrightarrow \forall g_i \in X_i^*$ için $\sum_j \prod_{i=1}^{n} g_i\left(x_j^{(i_j)}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall g_i \in X_i^*$ için $\underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} g_i(u) = 0 \overset{(9)}{\Leftrightarrow} u = \theta$

Yani $\|u\|_\gamma = 0 \Leftrightarrow u = \theta$ ’dır.

N3) $\forall u = \sum_j \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ ve $\forall \mu \in \mathbb{C}$ için

$$\|\mu.u\|_\gamma = \left\|\mu.\sum_j \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} u_j^{(i)}\right\|_\gamma = \left\|\sum_j\left(\mu u_j^{(1)} \otimes \left(\underset{i=2}{\overset{n}{\otimes}} u_j^{(i)}\right)\right)\right\|_\gamma = \inf\left\{\sum_j \left\|\mu u_j^{(1)}\right\|_1^* \prod_{i=2}^{n}\left\|u_j^{(i)}\right\|_i^*\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_j |\mu| \prod_{i=1}^{n}\left\|u_j^{(i)}\right\|_i^*\right\} = |\mu| \inf\left\{\sum_j \prod_{i=1}^{n}\left\|u_j^{(i)}\right\|_i^*\right\} = |\mu|\|u\|_\gamma$$

N4) $\forall u = \sum_{j\in\Lambda} \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_{k\in\Lambda'} \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için

$$\|u \oplus v\|_\gamma = \left\|\sum_{j\in\Lambda} \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} u_j^{(i)} \oplus \sum_{k\in\Lambda'} \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} v_k^{(i)}\right\|_\gamma = \left\|\sum_s \underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} w_s^{(i)}\right\|_\gamma = \inf\left\{\sum_s \prod_{i=1}^{n}\left\|w_s^{(i)}\right\|_i\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_j \prod_{i=1}^{n}\left\|u_j^{(i)}\right\|_i + \sum_k \prod_{i=1}^{n}\left\|v_k^{(i)}\right\|_i\right\} = \inf\left\{\sum_j \prod_{i=1}^{n}\left\|u_j^{(i)}\right\|_i\right\} + \inf\left\{\sum_k \prod_{i=1}^{n}\left\|v_k^{(i)}\right\|_i\right\} = \|u\|_\gamma + \|v\|_\gamma$$

$\Rightarrow \|u \oplus v\|_\gamma = \|u\|_\gamma + \|v\|_\gamma \Rightarrow \|u \oplus v\|_\gamma \le \|u\|_\gamma + \|v\|_\gamma$ ’dir.

N1, N2, N3, N4 'den $\|.\|_\gamma$, $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ üzerinde bir normdur.

Şimdi $\|.\|_\gamma$ 'nın bir çapraz norm olduğunu gösterelim.

$\forall u = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için $\|u\|_\gamma = \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_i \right\|_\gamma = \inf \left\{ \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_i \right\}$ ' dir. $\Rightarrow$ Uyarı 3' den

$\exists u = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_i \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ gösterimi öyleki $\|u\|_\gamma = \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|_i$ ' dir.

$\Rightarrow$ $\|.\|_\gamma$ bir çapraz normdur.

Şimdi $\|.\|_\gamma$ 'nın $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ üzerindeki en büyük çapraz norm olduğunu gösterelim.

$\|.\|_\alpha : \bigotimes_{i=1}^{n} X_i \to [0,+\infty)$ keyfi bir çapraz norm olsun

$\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ için ve u ' nun $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ gösterimi için

$$\|u\|_\alpha = \left\| \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right\|_\alpha \leq \sum_j \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right\|_\alpha \overset{\|.\|_\alpha \text{ çapraz norm old.}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \sum_j \prod_{i=1}^{n} \left\| u_j^{(i)} \right\|_i$$

$$\Rightarrow \|u\|_\alpha \leq \inf \left\{ \sum_j \prod_{i=1}^{n} \left\| u_j^{(i)} \right\|_i \right\} = \|u\|_\gamma$$

$\|.\|_\alpha \leq \|.\|_\gamma$ 'dır. $\|.\|_\alpha$ keyfi bir çapraz norm olduğundan $\|.\|_\gamma$, $\bigotimes_{i=1}^{n} X_i$ üzerindeki en büyük çapraz normdur. ■

2.1.3. C*-Cebirlerinin Tensör Çarpımı

Tanım 23

$A_1, A_2, ..., A_n$ ler C*-cebirleri olsunlar, bu takdirde $A_1, A_2, ..., A_n$ ler banach uzaylarıdır. Bu durumda $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ tensör çarpımı banach uzaylarında ki tensör çarpımı ile aynı şekilde tanımlanır. Dolayısıyla $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde $\|.\|_\lambda$ ve $\|.\|_\gamma$ şeklinde en az iki norm mevcuttur ve $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ ' nin bu normlara göre tamlaştırılması da banach uzayıdır.

Teorem 13 : $A_1, A_2, ..., A_n$ 'ler C*-cebirleri olsunlar, bu takdirde $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ aşağıda tanımlanan işlemlere göre bir *-cebiridir.

$$\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \text{ için}$$

$$u \circ v := \left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \circ \left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \right) := \sum_j \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} v_k^{(i)}$$

$$\forall u^* = \left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right)^* := \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \left(u_j^{(i)} \right)^*$$

İspat:

C1) $\forall \mu \in \mathbb{C}$ için

$$\mu.(u \circ v) = \mu.\left(\left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \circ \left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \right) \right) = \mu.\left(\sum_j \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} v_k^{(i)} \right) = \sum_j \sum_k \mu.\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} v_k^{(i)} \right) =$$

$$= \sum_j \sum_k \left(\left(\mu \left(u_j^{(1)} v_k^{(1)} \right) \right) \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} v_k^{(i)} \right) \right) \overset{A_1\, C^*-Ceb.}{=\!=\!=\!=} \sum_j \sum_k \left(\left(\mu u_j^{(1)} \left(v_k^{(1)} \right) \right) \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} v_k^{(i)} \right) \right) =$$

$$= \left(\sum_j \left(\left(\mu u_j^{(1)} \right) \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \right) \right) \circ \left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(1)} \right) = \left(\mu.\left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \right) \circ \left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(1)} \right) = (\mu.u) \circ v$$

$\Rightarrow \mu.(u \circ v) = (\mu.u) \circ v$ 'dir. Benzer şekilde $\mu.(u \circ v) = u \circ (\mu.v)$ 'da gösterilebilir.

C2) $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)}, t = \sum_p \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} t_p^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için

$$u \circ (v \oplus t) = \left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \circ \left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \oplus \sum_p \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} t_p^{(i)} \right) = \left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \circ \left(\sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)} \right) = \sum_j \sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} w_s^{(i)} =$$

$$= \left(\sum_j \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} v_k^{(i)} \right) \oplus \left(\sum_j \sum_p \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} t_p^{(i)} \right) = (u \circ v) \oplus (u \circ t)$$

$\Rightarrow\ u\circ(v\oplus t)=(u\circ v)\oplus(u\circ t)$ ‘dir. Benzer şekilde $(u\oplus v)\circ t=(u\circ t)\oplus(v\circ t)$ olduğu gösterilir.

C3) $\forall u=\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)},\ v=\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)},\ t=\sum_{p}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ için

$$u\circ(v\circ t)=\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)\circ\left(\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\circ\sum_{p}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}\right)=\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)\circ\left(\sum_{k}\sum_{p}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}t_p^{(i)}\right)=$$

$$=\sum_{j}\sum_{k}\sum_{p}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\left(v_k^{(i)}t_p^{(i)}\right)\overset{A_1C*-Ceb.}{=\!=\!=}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{p}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)t_p^{(i)}=\left(\sum_{j}\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)\right)\circ\left(\sum_{p}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}\right)=$$

$$=\left(\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)\circ\left(\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\right)\right)\circ\left(\sum_{p}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}t_p^{(i)}\right)=(u\circ v)\circ t \text{ ‘dir}$$

$\Rightarrow u\circ(v\circ t)=(u\circ v)\circ t$ ‘dir.

$*:\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\to\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ Dönüşümünün involusyonun şartlarını sağladığını gösterelim.

$$(*\text{-}1)\ (u^*)^*=\left(\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)^*\right)^*:=\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^*\right)^*=\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(\left(u_j^{(i)}\right)^*\right)^*=$$

$$\overset{A_i-C*}{=}\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}=u\Rightarrow(u^*)^*=u \text{ ’dur}$$

$$(*\text{-}2)\ (\mu.u)^*=\left(\mu.\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)^*=\left(\sum_{j}\mu.\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)^*=\left(\sum_{j}\left(\left(\mu.u_j^{(1)}\right)\otimes\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)\right)^*=$$

$$=\left(\sum_{j}\left(\left(\mu.u_j^{(1)}\right)^*\otimes\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^*\right)\right)\overset{A_1-C*cebiri}{=\!=\!=}\left(\sum_{j}\left(\overline{\mu}.\left(u_j^{(1)}\right)^*\otimes\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^*\right)\right)=$$

$$=\sum_{j}\left(\overline{\mu}.\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^*\right)=\overline{\mu}.\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^*=\overline{\mu}.\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)^*=\overline{\mu}.u$$

Yani $(\mu.u)^*=\overline{\mu}.u$ ’ dir.

$$(*\text{-}3)\ (u\oplus v)^*=\left(\sum_{j\in\Lambda}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\oplus\sum_{k\in\Lambda'}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\right)^*=\left(\sum_{s}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}w_s^{(i)}\right)^*=\sum_{s}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(w_s^{(i)}\right)^*=$$

$$=\left(\sum_{j\in\Lambda}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^*\oplus\sum_{k\in\Lambda'}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(v_k^{(i)}\right)^*\right)=u^*\oplus v^* \text{ yani } (u\oplus v)^*=u^*\oplus v^*$$

$$(*\text{-}4)\left(u\circ v\right)^{*}:=\left(\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)\circ\left(\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\right)\right)^{*}:=\left(\sum_{j}\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)^{*}=\sum_{j}\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)^{*}\ \underline{\underline{A_iC*ceb}}$$

$$=\sum_{j}\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^{*}\left(v_k^{(i)}\right)^{*}=\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^{*}\right)\circ\left(\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(v_k^{(i)}\right)^{*}\right)=\left(\sum_{j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)^{*}\circ\left(\sum_{k}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\right)^{*}=u^{*}\circ v^{*}$$

Yani $\left(u\circ v\right)^{*}=u^{*}\circ v^{*}$ ' dır.

$\Rightarrow$ C1, C2, C3 ve *-1, *-2, *-3, *-4 den $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ bir *-cebiridir. ■

Tanım 24

$A_1,A_2,...,A_n$ 'ler C*-cebirleri olsunlar, $\left\|.\right\|_{\alpha}:\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\rightarrow\left[0,+\infty\right)$ bir norm olsun, eğer $\forall u,v\in\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}A_i$ için $\left\|u\circ v\right\|_{\alpha}\leq\left\|u\right\|_{\alpha}.\left\|v\right\|_{\alpha}$, $\left\|u\right\|_{\alpha}^{2}=\left\|u^{*}u\right\|_{\alpha}$ ise $\left\|.\right\|_{\alpha}$ ' ya $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ üzerinde C*- norm denir.

Genelde $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ tam olmayabilir. $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ 'nin $\left\|.\right\|_{\alpha}$ ' ya göre tamlaştırılmasına $A_1,A_2,...,A_n$ C*- cebirlerinin tensör çarpımı denir. $\left\|.\right\|_{\alpha}-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ Şeklinde gösterilir ve $\left\|.\right\|_{\alpha}-\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ bir C*- cebiridir.

Lemma 2: A bir C*-cebiri olsun bu takdirde $\forall a\in A_+$ için $\left\|a\right\|\leq 1'\text{dir}\Leftrightarrow a^2\leq a'$ dır .

Teorem 14 : $\left\|.\right\|_{\alpha}$, $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ ' de bir C*- norm olsun, bu durumda $\left\|.\right\|_{\alpha}\leq\left\|.\right\|_{\gamma}$ 'dır.

İspat: $\forall b_i\in A_i$ keyfi olsun ve $0\leq b_i\leq 1_i$ olsun. Eşitsizliğin her tarafından norm alırsak $0\leq\left\|b_i\right\|_i\leq 1$ elde edilir. Lemma 2'den $b_i^2\leq b_i$ 'dir.

$$\Rightarrow\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}b_i^2=b_1^2\otimes b_2^2\otimes...\otimes b_n^2\leq b_1\otimes b_2\otimes...\otimes b_n=\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}b_i \text{ olup}$$

$\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}b_i^2\leq\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}b_i$ 'dir. Tekrar Lemma 2'yi kullanırsak $\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}b_i\right\|_{\alpha}\leq 1$ 'dir. (12)

Şimdi $\forall a_i \in A_i$ keyfi olsun. Eğer $\exists i_0 \in \{1,2,...,n\}$ için $a_{i_0} = \theta_{i_0}$ ise $\left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right\|_\alpha = 0 = \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right\|_\gamma$ olup $\|.\|_\alpha \le \|.\|_\gamma$ eşitsizliği doğrudur.

$\forall a_i \in A_i \setminus \{\theta_i\}$ için $b_i := \dfrac{a_i^* a_i}{\|a_i^* a_i\|_i}$ şeklinde tanımlarsak b_i' ler Lemma 2' nin şartlarını sağlar ve (12)'den $\left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \dfrac{a_i^* a_i}{\|a_i^* a_i\|_i} \right\|_\alpha \le 1$ 'dir. Buradan

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \|a_i^* a_i\|_i} \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i^* a_i \right\|_\alpha \le 1 \text{ 'dir.}$$

$$\Rightarrow \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i^* a_i \right\|_\alpha \le \prod_{i=1}^{n} \|a_i^* a_i\|_i = \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i^* a_i \right\|_\gamma$$

$$\Rightarrow \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right)^* \circ \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right) \right\|_\alpha \le \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right)^* \circ \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right) \right\|_\gamma$$ 'dır. $\|.\|_\alpha$ ve $\|.\|_\gamma$ C*- norm olduklarından

$$\Rightarrow \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right) \right\|_\alpha^2 \le \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right) \right\|_\gamma^2 \Rightarrow \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right) \right\|_\alpha \le \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right) \right\|_\gamma \text{ 'dır.} \tag{13}$$

$\Rightarrow \forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için ve u 'nun $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}$ gösterimi için

$$\|u\|_\alpha = \left\| \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right\|_\alpha \le \sum_j \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right\|_\alpha \overset{(13)}{\le} \sum_j \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right\|_\gamma = \sum_j \prod_{i=1}^{n} \left\| u_j^{(i)} \right\|_i$$

$$\Rightarrow \|u\|_\alpha \le \inf \left\{ \sum_j \prod_{i=1}^{n} \left\| u_j^{(i)} \right\|_i \right\} = \|u\|_\gamma \quad \Rightarrow \|u\|_\alpha \le \|u\|_\gamma . \blacksquare$$

Tanım 25

$A_1, A_2, ..., A_n$ 'ler C*-cebirleri olsunlar $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ onların cebirsel tensör çarpımı olsun, bu takdirde,

1) $u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ olmak üzere $\exists\, u_1, u_2, ..., u_m \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ öyleki $u = \sum_{j=1}^{m} u_j^* \circ u_j$ ise u' ya $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ da Pozitif eleman denir ve $u \ge 0$ ile gösterilir.

$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ ' nın pozitif elemanlarının kümesi $\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+ := \left\{ u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \mid u \geq 0 \right\}$ şeklinde gösterilir.

2) $\varphi : \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \to \mathbb{C}$ lineer dönüşüm olmak üzere φ ye pozitif dönüşümdür denir $:\Leftrightarrow$ $\forall u \in \left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+$ için $\varphi(u) \geq 0$ ' dır. Bu durum $\varphi \geq 0$ şeklinde gösterilir .

Eğer $\varphi \geq 0$ ise $\forall u, v \in \left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)_+$ için

i) $\varphi(u^*) = \overline{\varphi(u)}$,

ii) $\left|\varphi(v^* u)\right|^2 \leq \varphi(u^* u).\varphi(v^* v)$' dir.

İkinci eşitsizliğe Schwartz eşitsizliği denir.

Teorem 15: $A_1, A_2, ..., A_n$ 'ler C*-cebirleri olsunlar, $\varphi_i : A_i \to \mathbb{C}$ pozitif lineer dönüşüm olsun

$\varphi := \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i : \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \to \mathbb{C}$, $\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için

$\varphi(u) := \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i \left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) := \sum_j \prod_{i=1}^{n} \varphi_i\left(u_j^{(i)}\right)$ şeklinde tanımlansın, bu takdirde φ pozitif lineer bir dönüşümdür.

İspat: Öncelikle $\varphi : \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \to \mathbb{C}$ lineer olduğunu gösterelim

$\forall u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ ve $\forall \mu \in \mathbb{C}$ için

$$\varphi(u \oplus v) = \varphi\left(\left(\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \oplus \left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \right) \right) = \varphi\left(\sum_s \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} w_s^{(i)} \right) = \sum_s \prod_{i=1}^{n} \varphi_i\left(w_s^{(i)}\right) =$$

$$= \sum_j \prod_{i=1}^{n} \varphi_i\left(u_j^{(i)}\right) + \sum_k \prod_{i=1}^{n} \varphi_i\left(v_k^{(i)}\right) = \varphi(u) + \varphi(v) \text{ ‘dir.}$$

$$\Rightarrow \varphi(u \oplus v) = \varphi(u) + \varphi(v) \text{ ‘ dir.}$$

$$\varphi(\mu.u) = \varphi\left(\mu.\sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) = \varphi\left(\sum_j \mu.\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) = \varphi\left(\sum_j \left(\mu u_j^{(1)}\right) \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}} u_j^{(i)} \right) \right) =$$

$$=\sum_j\left(\varphi_1\left(\mu u_j^{(1)}\right)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i\left(u_j^{(i)}\right)\right)\overset{\varphi_1\, lin.old.}{=\!=\!=\!=}\sum_j\mu\prod_{i=1}^{n}\varphi_i\left(u_j^{(i)}\right)=\mu\sum_j\prod_{i=1}^{n}\varphi_i\left(u_j^{(i)}\right)=\mu\varphi(u)$$

$$\Rightarrow \varphi(\mu.u)=\mu\varphi(u)$$

$\Rightarrow\varphi$ Lineerdir.

Şimdi φ ’nin pozitif olduğunu gösterelim.

$u\geq 0$ keyfi olsun $\Rightarrow \exists u_1,u_2,...,u_m\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ öyleki $u=\sum_{j=1}^{m}u_j^*u_j$ ’ dir. Öte yandan $u_j\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ olduğundan $u_j=\sum_{k_j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}x_{k_j}^{(i)}$ şeklindedir. Dolayısıyla

$$u=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k_j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}x_{k_j}^{(i)}\right)^*\circ\left(\sum_{k_j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}x_{k_j}^{(i)}\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_j}\sum_{k_j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(x_{k_j}^{(i)}\right)^*\left(x_{k_j}^{(i)}\right) \text{ Şeklindedir.}$$

$$\Rightarrow\varphi(u)=\varphi\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_j}\sum_{k_j}\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(x_{k_j}^{(i)}\right)^*\left(x_{k_j}^{(i)}\right)\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_j}\sum_{k_j}\prod_{i=1}^{n}\varphi_i\left(\left(x_{k_j}^{(i)}\right)^*\left(x_{k_j}^{(i)}\right)\right)\overset{\varphi_i\, lin.old.}{\geq}0$$

$\Rightarrow\varphi(u)\geq 0\quad\Rightarrow\varphi$ Pozitiftir. ■

Teorem 16 : $A_1,A_2,...,A_n$ ’ler C*-cebirleri olmak üzere

$S_i:=S(A_i):=\left\{\varphi_i:A_i\to\mathbb{C}\ \middle|\ \varphi_i \text{ lineer, pozitif ve } \|\varphi_i\|=1\right\}$ olsun.

$\|.\|_{\alpha_0}:\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\to[0,+\infty)$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım $\forall\ u\in\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}A_i$ için

$$\|u\|_{\alpha_0}:=\sup_{\substack{\varphi_i\in S_i\\ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(v^*v)>0\\ v\in\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}A_i}}\left(\frac{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*u^*uv\right)}{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*v\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$ o halde $\|.\|_{\alpha_0}$ bir C*-normdur ve $\|.\|_{\lambda}\leq\|.\|_{\alpha_0}\leq\|.\|_{\gamma}$ dır.

Özel olarak $\|.\|_{\alpha_0}$, $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$' de çapraz normdur.

Not 2: Buradaki $S_i:=S(A_i)$ ’ye A_i ’ nin durumlar uzayı denir. S_i ’nin elemanlarına A_i ’de durumdur denir.

İspat: $\forall i \in \{1,2,...,n\}$ için $\{\pi_{\varphi_i}, H_{\varphi_i}, \xi_{\varphi_i}\}$ A_i' nin GNS gösterimi olsun $\left\{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}, \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}H_{\varphi_i}\right\}$ $\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ ' nin *- gösterimi olsun, bu takdirde (7)'den bilindiği gibi $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ için

$$\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}(u)\right\|^2 = \sup_{\substack{v\in \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} A_i \\ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(v^*v)>0}} \left(\frac{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(v^*u^*uv)}{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(v^*v)}\right) \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{\alpha_0} = \sup_{\varphi_i\in S_i}\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}(u)\right\| \text{ 'dir.} \tag{14}$$

Operatör teorisinden A bir operatör olmak üzere $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|\xi\|\le 1\\ \|\eta\|\le 1}}\langle A\xi,\eta\rangle \overset{\forall \xi_0}{\geq} \langle A\xi_0,\xi_0\rangle$ (15)

Şimdi $\|.\|_{\alpha_0}$ 'ın bir norm olduğunu gösterelim.

N1) $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ için $\|u\|_{\alpha_0} \geq 0$ olduğu açıktır.

N2) $u \in \bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ keyfi olmak üzere $\|u\|_{\alpha_0} = 0$ olsun $\overset{(14)}{\Leftrightarrow} \sup\limits_{\varphi_i\in S_i}\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}(u)\right\| = 0$ 'dır. $\Leftrightarrow \forall\varphi_i \in S_i$ için $\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}(u)\right\| = 0$ 'dır $\Leftrightarrow$ $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}(u)$ bir operatör olduğundan ve **(15)'** den

$$\left\langle \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}\underbrace{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\xi_{\varphi_i}}_{\xi_0}, \underbrace{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\xi_{\varphi_i}}_{\xi_0}\right\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\varphi_i \in S_i \text{ için } \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(u) = 0 \overset{(9)}{\Leftrightarrow} u = \theta$$

N3) $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ ve $\forall \mu \in \mathbb{C}$ keyfi olsun

$\Rightarrow \forall\varphi_i \in S_i$ ve $\forall v \in \bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ için

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*(\mu.u)^*(\mu.u)v\right) = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*\left(\overline{\mu}.u^*\right)(\mu.u)v\right) \overset{Teorem\ 13}{=\!=\!=\!=} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(\left(\overline{\mu}\mu\right).v^*u^*uv\right) =$$

$$= \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(|\mu|^2.v^*u^*uv\right) = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(|\mu|^2.\left(\sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(v_k^{(i)}\right)^* \circ \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(u_j^{(i)}\right)^* \circ \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)} \circ \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\right)\right) =$$

$$=\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(|\mu|^2.\sum_k\sum_j\sum_j\sum_k\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(v_k^{(i)}\right)^*\left(u_j^{(i)}\right)^*u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)=\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(\sum_k\sum_j\sum_j\sum_k|\mu|^2.\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\left(v_k^{(i)}\right)^*\left(u_j^{(i)}\right)^*u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)=$$

$$=\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(\sum_k\sum_j\sum_j\sum_k\left(|\mu|^2\left(v_k^{(1)}\right)^*\left(u_j^{(1)}\right)^*u_j^{(1)}v_k^{(1)}\right)\otimes\left(\overset{n}{\underset{i=2}{\otimes}}\left(v_k^{(i)}\right)^*\left(u_j^{(i)}\right)^*u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)\right)=$$

$$=\sum_k\sum_j\sum_j\sum_k\left(\varphi_1\left(|\mu|^2\left(v_k^{(1)}\right)^*\left(u_j^{(1)}\right)^*u_j^{(1)}v_k^{(1)}\right)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i\left(\left(v_k^{(i)}\right)^*\left(u_j^{(i)}\right)^*u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)\right)=$$

$$\overset{\varphi_1\, lin.old.}{=\!=\!=}\sum_k\sum_j\sum_j\sum_k\left(|\mu|^2\varphi_1\left(\left(v_k^{(1)}\right)^*\left(u_j^{(1)}\right)^*u_j^{(1)}v_k^{(1)}\right)\prod_{i=2}^{n}\varphi_i\left(\left(v_k^{(i)}\right)^*\left(u_j^{(i)}\right)^*u_j^{(i)}v_k^{(i)}\right)\right)=$$

$$=|\mu|^2\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(.v^*u^*uv\right)\ \Rightarrow\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*\left(\mu.u\right)^*\left(\mu.u\right)v\right)=|\mu|^2\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(.v^*u^*uv\right)\text{'dir.}\qquad(16)$$

Şimdi $\Rightarrow\ \|\mu.u\|_{\alpha_0}^2:=\sup\limits_{\substack{\varphi_i\in S_i\\ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(v^*v)>0\\ v\in\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}A_i}}\left(\dfrac{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*\left(\mu.u\right)*\left(\mu.u\right)v\right)}{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*v\right)}\right)\overset{(16)}{=\!=}\sup\limits_{\substack{\varphi_i\in S_i\\ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(v^*v)>0\\ v\in\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}A_i}}\left(\dfrac{|\mu|^2\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(.v^*u^*uv\right)}{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*v\right)}\right)=$

$$=|\mu|^2\sup\limits_{\substack{\varphi_i\in S_i\\ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i(v^*v)>0\\ v\in\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}A_i}}\left(\frac{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(.v^*u^*uv\right)}{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(v^*v\right)}\right)=|\mu|^2\|u\|_{\alpha_0}^2=\left(|\mu|\|u\|_{\alpha_0}\right)^2$$

$\Rightarrow\ \|\mu.u\|_{\alpha_0}^2=\left(|\mu|\|u\|_{\alpha_0}\right)^2\ \Rightarrow\ \|\mu.u\|_{\alpha_0}=|\mu|\|u\|_{\alpha_0}$ ‘dir.

N4) $\forall\ u=\sum_j\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)},\ v=\sum_k\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\in\bigotimes_{i=1}^{n}A_i$ için

$$\|u\oplus v\|_{\alpha_0}=\left\|\left(\sum_j\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}u_j^{(i)}\right)\oplus\left(\sum_k\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}v_k^{(i)}\right)\right\|_{\alpha_0}=\left\|\sum_s\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}w_s^{(i)}\right\|_{\alpha_0}\overset{(14)}{=\!=\!=}\sup_{\varphi_i\in S_i}\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}\left(\sum_s\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}w_s^{(i)}\right)\right\|=$$

$$=\sup_{\varphi_i\in S_i}\left\|\left(\sum_s\prod_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}\left(w_s^{(i)}\right)\right)\right\|=\sup_{\varphi_i\in S_i}\left\|\left(\sum_j\prod_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}\left(u_j^{(i)}\right)\right)+\left(\sum_k\prod_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}\left(v_k^{(i)}\right)\right)\right\|\le$$

$$\le\sup_{\varphi_i\in S_i}\left\{\left\|\sum_j\prod_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}\left(u_j^{(i)}\right)\right\|+\left\|\sum_k\prod_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}\left(v_k^{(i)}\right)\right\|\right\}=\sup_{\varphi_i\in S_i}\left\|\sum_j\prod_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}\left(u_j^{(i)}\right)\right\|+\sup_{\varphi_i\in S_i}\left\|\sum_k\prod_{i=1}^{n}\pi_{\varphi_i}\left(v_k^{(i)}\right)\right\|=$$

$\overset{(14)}{=\!=\!=}\|u\|_{\alpha_0}+\|v\|_{\alpha_0}$ ’ dir.

$\Rightarrow\|u\oplus v\|_{\alpha_0}\le\ \|u\|_{\alpha_0}+\|v\|_{\alpha_0}$ ’ dir.

N1, N2, N3, N4'den $\|\,.\,\|_{\alpha_0}$, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde bir normdur.

Şimdi $\|\,.\,\|_{\alpha_0}$ 'ın bir C*- norm olduğunu gösterelim. $\forall u, v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için

C*1) $\forall\ u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)}, v = \sum_k \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} v_k^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için

$$\|u \circ v\|_{\alpha_0} \overset{(14)}{=\!=} \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u \circ v) \right\| = \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(v) \right\| =$$

$$= \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\{ \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right\| \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(v) \right\| \right\} == \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right\| \ \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(v) \right\| = \|u\|_{\alpha_0} \|v\|_{\alpha_0} \text{ 'dir.}$$

$$\Rightarrow \ \|u \circ v\|_{\alpha_0} = \|u\|_{\alpha_0} \|v\|_{\alpha_0} \quad \Rightarrow \ \|u \circ v\|_{\alpha_0} \le \|u\|_{\alpha_0} \|v\|_{\alpha_0}$$

C*2) $\forall\ u = \sum_j \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} u_j^{(i)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için

$$\|u^* \circ u\|_{\alpha_0} \overset{(14)}{=\!=} \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u^* \circ u) \right\| = \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u^*) \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right\| = \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right)^* \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right\| =$$

$$= \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right)^2 \right\| = \sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right) \right\|^2 = \left(\sup_{\varphi_i \in S_i} \left\| \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \pi_{\varphi_i}(u) \right) \right\| \right)^2 \overset{(14)}{=\!=} \|u\|_{\alpha_0}^2$$

$$\Rightarrow \ \|u^* u\|_{\alpha_0} = \|u\|_{\alpha_0}^2 \text{ 'dir.}$$

C*1, C*2 ' den $\|\,.\,\|_{\alpha_0}$ bir C*- normdur.

Şimdi $\|\,.\,\|_{\lambda} \le \|\,.\,\|_{\alpha_0} \le \|\,.\,\|_{\gamma}$ olduğunu gösterelim. Teorem 14 'den $\|\,.\,\|_{\alpha_0} \le \|\,.\,\|_{\gamma}$ olduğu biliniyor $\|\,.\,\|_{\lambda} \le \|\,.\,\|_{\alpha_0}$ olduğunu gösterelim. $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için

$$\|u\|_{\lambda}^2 = \sup \left\{ \left| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u) \right|^2 \ \middle| \ f_i \in X_i^*, \|f_i\|_i^* \le 1, 1 \le i \le n \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \left| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i \left(u \circ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} a_i \right) \right|^2 \ \middle| \ \varphi_i \in S_i, a_i \in A_i, \|a_i\|_i \le 1, 1 \le i \le n \right\} \overset{Schwartz\, eş.}{\le}$$

$$\le \sup \left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i (u \circ u^*) \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} (a_i)^* a_i \right) \ \middle| \ \varphi_i \in S_i, a_i \in A_i, \|a_i\| \le 1, 1 \le i \le n \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i (u \circ u^*) \ \middle| \ \varphi_i \in S_i \right\} \sup \left\{ \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} (a_i)^* a_i \right) \ \middle| \ \varphi_i \in S_i, a_i \in A_i, \|a_i\| \le 1, 1 \le i \le n \right\} \text{' dir.}$$

Diğer taraftan $\varphi : X \to \mathbb{C}$ bir durum ise

$$1=\|\varphi\|=\sup\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}\geq\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}\Rightarrow|\varphi(x)|\leq\|x\|\Rightarrow\varphi(x)\leq\|x\|$$

buradan eğer x bir izometri ise $\varphi(x^*x)\leq\|x^*x\|\leq 1$ olduğundan

$$\Rightarrow\|u\|_{\lambda}^{2}\leq\sup\left\{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\varphi_i\left(u\circ u^*\right)\mid\varphi_i\in S_i\right\}\leq\sup\left\{\left\langle\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}\left(u^*\circ u\right)\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\xi_{\varphi_i},\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\xi_{\varphi_i}\right\rangle\mid\varphi_i\in S_i\right\}=$$

$$=\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}}\pi_{\varphi_i}\left(u^*\circ u\right)\right\|^2\overset{(14)}{=\!=}\|u\|_{\alpha_0}^2\quad\Rightarrow\|u\|_{\lambda}^2\leq\|u\|_{\alpha_0}^2\Rightarrow\|u\|_{\lambda}\leq\|u\|_{\alpha_0}\Rightarrow\|u\|_{\lambda}\leq\|u\|_{\alpha_0}\leq\|u\|_{\gamma}\text{ ' dır.}\ \blacksquare$$

Sonuç 2. $A_1, A_2, ..., A_n$ 'ler C*-Cebirleri ve $1 \leq i \leq n$ için $f_i \in A_i^*$ olsun, bu takdirde $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerindeki $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i$ lineer fonksiyoneli $\left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i\right\| := \prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_i^*$ normuna göre $\overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\|\cdot\|_{\alpha_0}}$ uzayına bir tek lineer dönüşüm olarak genişletilebilir.

İspat: $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için $\left|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u)\right| \leq \left\|\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i\right\|\|u\|_{\lambda} \overset{Teorem16}{\leq} \prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_i^*\|u\|_{\alpha_0}$ ' dır.

$\Rightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i, \overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\|\cdot\|_{\alpha_0}}$ ' a genişletilebilir. $\blacksquare$

2. 2. Nükleer C*- Cebirleri

Tanım 26

A Bir C*-cebiri olsun. Eğer $\forall$ B C*-cebir i için $A\bigotimes B$ 'nin yalnız bir tek C*-normu varsa A 'ya Nükleer C*-cebiri denir.

Bilindiği gibi $A\bigotimes B$ de en az bir tane C*-norm $\left(\|.\|_{\alpha_0}\right)$ mevcuttur. Dolayısıyla tanıma göre, A Nükleerdir $\Leftrightarrow$ $\forall B$ C*-cebiri için $A\bigotimes B$ nin her C* normu $\|.\|_{\alpha_0}$ normuna denktir.

2.2.1. Sonlu Boyutlu C*- Cebirleri

M bir C^*- cebiri olsun. Eğer M bir vektör uzayı olarak sonlu boyutlu ise, M ye sonlu boyutlu C^*- cebiri denir.

Teorem 17: A bir C*-cebiri, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde $M_n(\mathbb{C}) \bigotimes A$'nin bir tek C*-norm u mevcuttur ve $\overline{M_n(\mathbb{C}) \bigotimes A}^{\|\cdot\|_{\alpha_0}} = M_n(\mathbb{C}) \bigotimes A$'dır.

Üstelik $A \subseteq B(H)$ ise $M_n(\mathbb{C}) \bigotimes A = M_n(A) \subseteq B\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} H\right)$' dır.

İspat: W*- cebirlerinden bildiğimiz gibi

X W*- cebiri I_n -tiptendir $\Leftrightarrow \exists \{e_{ij}\}_{i,j=1}^n \subseteq X$ elemanlar ailesi mevcuttur öyleki

$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ (yani kendi aralarında ortogonal) ve $e_{ij}{}^* = e_{ij}$ 'dir. $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$, X'in kanonik Hamel tabanıdır. Öte yandan $M_n(\mathbb{C})$ I_n-tipten olduğundan $\forall x \in M_n(\mathbb{C})$ için $\exists \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n \subseteq \mathbb{C}$ öyleki $x = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_{ij}$'dir. Burada $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ $M_n(\mathbb{C})$'nin yukarıdaki şartları sağlayan kanonik Hamel tabanıdır. $\forall u \in M_n(\mathbb{C}) \bigotimes A$ için $u = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}$ şeklindedir.

$\phi : M_n(\mathbb{C}) \bigotimes A \to M_n(A)$, $\phi(u) := (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ile tanımlana ϕ dönüşümü bir *-izomorfizmidir.

Gerçekten $\forall u = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}, v = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes b_{ij} \in M_n(\mathbb{C}) \bigotimes A, \forall \mu \in \mathbb{C}$ için

$$1)\ \phi(u \oplus v) = \phi\left(\left(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}\right) \oplus \left(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes b_{ij}\right)\right) = \phi\left(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes \left(a_{ij} + b_{ij}\right)\right) =$$

$$= \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n + \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \phi\left(a_{ij}\right) + \phi\left(b_{ij}\right)$$

$\Rightarrow \phi(u \oplus v) = \phi(a_{ij}) + \phi(b_{ij})$ 'dir.

$$2)\ \phi(\mu.u) = \phi\left(\mu.\sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}\right) = \phi\left(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes \left(\mu a_{ij}\right)\right) = \left(\mu a_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \mu\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \mu\phi(u)$$

$\Rightarrow \phi(\mu.u) = \mu\phi(u)$' dir.

3) $\phi(u\circ v)=\phi\left(\left(\sum_{i,j}e_{ij}\otimes a_{ij}\right)\circ\left(\sum_{s,t}e_{st}\otimes b_{st}\right)\right)=\phi\left(\sum_{i,j}\sum_{s,t}\left(e_{ij}\otimes a_{ij}\right)\circ\left(e_{st}\otimes b_{st}\right)\right)=$

$$=\phi\left(\sum_{i,j,t}e_{ij}e_{jt}\otimes\underbrace{a_{ij}b_{jt}}_{c_{it}}\right)=\phi\left(\sum_{i,j,t}e_{it}\otimes c_{it}\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}c_{it}\right)_{i,t=1}^{n}=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jt}\right)_{i,t=1}^{n}=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\left(b_{jt}\right)_{j,t=1}^{n}=\phi(u)\phi(v)$$

$\Rightarrow \phi(u\circ v)=\phi(u)\phi(v)$ 'dir.

4) $\phi(u^*)=\phi\left(\left(\sum_{i,j}e_{ij}\otimes a_{ij}\right)^*\right)=\phi\left(\sum_{i,j}e_{ij}^*\otimes a_{ij}^*\right)=\phi\left(\sum_{i,j}e_{ij}\otimes a_{ij}^*\right)=\left(a_{ij}^*\right)_{i,j=1}^{n}=$

$=\left(\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\right)^*=\phi(u)^* \quad \Rightarrow \phi(u^*)=\phi(u)^*$ 'dir.

5) $\phi(u)=\phi(v)$ olsun, $\Rightarrow \phi\left(\sum_{i,j}e_{ij}\otimes a_{ij}\right)=\phi\left(\sum_{i,j}e_{ij}\otimes b_{ij}\right)$'dir.$\Rightarrow$ $\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}=\left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$

$\Rightarrow$ $\forall i,j$ için $a_{ij}=b_{ij}$ ' dir.$\Rightarrow\sum_{i,j}e_{ij}\otimes a_{ij}=\sum_{i,j}e_{ij}\otimes b_{ij}$ 'dir. $\Rightarrow$ $u=v$ 'dir. $\Rightarrow \phi$ Birebirdir.

6) $\forall\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}\in M_n(A)$ için $u=\sum_{i,j}e_{ij}\otimes a_{ij}\in M_n(\mathbb{C})\bigotimes A$ olup

$\phi\left(\sum_{i,j}e_{ij}\otimes a_{ij}\right)=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$'dir.

$\Rightarrow \phi$ Örtendir.

1, 2, … ,6' dan ϕ bir *- izomorfizmidir.

Öte yandan $M_n(A)$ bir C*- cebiri olduğundan ve ϕ bir *- izomorfizmi olduğundan $M_n(\mathbb{C})\bigotimes A$ 'da bir C*- cebiridir.$\|.\|_{\alpha_0}$ C*- norm olduğundan Teorem 21 'den

$\overline{M_n(\mathbb{C})\bigotimes A}^{\|.\|_{\alpha_0}}=M_n(\mathbb{C})\bigotimes A$' dır. ■

Sonuç 3: $\forall\ n\in\mathbb{N}$ için $M_n(\mathbb{C})$ C*-cebiri nükleerdir.

Teorem 18: A sonlu boyutlu bir C^* cebiri olsun. O halde $A\cong\bigoplus_{i=1}^{r}M_{n_i}(\mathbb{C})$' dir.

Not 3: Burada $\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} M_{n_i}(\mathbb{C})$'deki $\oplus$ toplamı direkt toplam veya matrislerdeki toplamdan farklıdır. $\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} M_{n_i}(\mathbb{C}) := \left\{ \left(a_{jk}^{(1)}\right)_{n_1\times n_1} \oplus \left(a_{jk}^{(2)}\right)_{n_2\times n_2} \oplus ... \oplus \left(a_{jk}^{(r)}\right)_{n_r\times n_r} \;\middle|\; \left(a_{jk}^{(i)}\right)_{n_i\times n_i} \in M_{n_i}(\mathbb{C}) \right\}$ şeklinde bir gösterimden ibarettir.

Sonuç 4: A sonlu boyutlu C*-cebiri olsun, o halde A nükleerdir.

İspat : A sonlu boyutlu C*-cebiri olduğundan Teorem 18'den $A \cong \overset{r}{\underset{j=1}{\oplus}} M_{n_j}(\mathbb{C})$ ' dir.

$\forall B$ C*- cebiri için $A \bigotimes B = \overset{r}{\underset{j=1}{\oplus}} M_{n_j}(\mathbb{C}) \bigotimes B = \left(M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus M_{n_r}(\mathbb{C}) \right) \bigotimes B \overset{(8)}{=}$

$= \left(M_{n_1}(\mathbb{C}) \bigotimes B \right) \oplus \left(M_{n_2}(\mathbb{C}) \bigotimes B \right) \oplus ... \oplus \left(M_{n_r}(\mathbb{C}) \bigotimes B \right) \underline{\underline{Teorem 17}}$

$= \left(M_{n_1}(B) \right) \oplus \left(M_{n_2}(B) \right) \oplus ... \oplus \left(M_{n_r}(B) \right) = \overset{r}{\underset{j=1}{\oplus}} M_{n_j}(B)$ 'dir.

$\Rightarrow$ $\forall u \in A \bigotimes B$ için $\left(B_j\right) \in M_{n_j}(B)$ olmak üzere $u = \overset{r}{\underset{j=1}{\oplus}} \left(B_j\right)$ şeklindedir.

Diğer taraftan Sonuç3'den $M_n(\mathbb{C})$ C*-cebiri nükleer olduğundan $\forall j$ için $M_{n_j}(B)$'nin C*- normu tektir. Bu norm $\|.\|_{M_{n_j}(B)}$ olsun, bu durumda

$\|u\|_{A\otimes B} := \sum_{j=1}^{n} \left\| \left(B_j\right) \right\|_{M_{n_j}(B)}$ şeklinde tanımlanan $\|.\|_{A\otimes B}$ normu $A \bigotimes B$'de bir C*- norm olup tektir. $\Rightarrow$ A Nükleerdir. ■

2.2.2. Değişmeli C*-Cebirleri

Ω yerel kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere

$$C_0^{\infty}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \textit{ sürekli ve } f(\infty) = 0 \right\}$$

olsun. Yerel kompakt uzayda maksimum ve supremum mevcut olup eşit olduğundan f fonksiyonelinin normu

$\|f\| = \max_{x\in\Omega} |f(x)|$ şeklindedir.

Burada $f(\infty)=0 :\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ için $\exists K\subset\Omega$ öyle ki K kompakt ve $\forall x\in\Omega\setminus K$ için $\left|f(x)\right|<\varepsilon$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 27

A bir C*-cebiri olsun,

$\Omega:=\left\{\omega:A\to\mathbb{C}\ \middle|\ \omega\neq 0,\omega\ lineer,\omega(a.b)=\omega(a)\omega(b),\forall a,b\in A için\right\}$ kümesine A C*-cebirinin spektral uzayı denir.

Tanım 28

A bir C*-cebiri olsun,

$P(A):=\left\{\varphi\in S(A)\ \middle|\ \varphi=\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2 : \varphi=\varphi_1=\varphi_2\ ,\ \lambda\in[0,1],\varphi_1,\varphi_2\in S(A)\right\}$ olmak üzere $P(A)\subseteq S(A)$' ya A' nın saf durumlar uzayı denir.

Teorem 19: Fonksiyonel analizden bilindiği gibi

1) Ω kompakt' tır $\Leftrightarrow$ $1\in C_0^\infty(\Omega)$ dır.

2) $C_0^\infty(\Omega)$ değişmeli bir C* cebirdir [1, s71].

Teorem 20: A bir değişmeli C*-cebir i olsun, $A\cong C_0^\infty(\Omega)$ *-izometrik izomorftur[1, s73].

Teorem 21: A bir C*-cebiri olsun $\left(\|\,.\,\|\text{normuna göre}\right),\|\,.\,\|_1$ A da $\|\,.\,\|$ normundan farklı bir norm olsun öyle ki $\forall\, a,b\in A$ için

$\|a\circ b\|_1\le\|a\|_1\|b\|_1$, $\|a*a\|_1=\|a\|_1^2$ olsun, bu takdirde $\|\,.\,\|_1=\|\,.\,\|$' dur.

İspat : $1\in A$ olduğu kabul edilebilir.

$\forall b\in A$ keyfi olsun öyleki $b=b^*$ olsun, $B:=\langle 1,b\rangle$ A' nın 1 ve b ile üretilen C*- alt cebiri olsun, Ω, B' nin spektral uzayı olsun, $B_1:=\overline{B}^{\|\cdot\|_1}$ ve Ω_1, B_1'in spektral uzayı olsun

$\Rightarrow \overline{\left\{\rho_{|B}\ \middle|\ \rho\in\Omega_1\right\}}=\Omega$' dir. $\Rightarrow \|b\|_1=\max\limits_{\rho\in\Omega_1}\left|\rho(b)\right|=\max\limits_{f\in\Omega}\left|f(b)\right|=\|b\|$ ‘ dir.

$$\|b\|_1=\|b\| \tag{17}$$

$\Rightarrow\ \forall a\in A$ için $\|a\|^2=\Big\|\underbrace{a^*a}_{b}\Big\|\overset{(17)}{=}\Big\|\underbrace{a^*a}_{b}\Big\|_1=\|a\|_1^2$ ' dir.

$\Rightarrow\ \|a\|=\|a\|_1$ ' dir. ■

Teorem 22: $A_1,A_2,...,A_n$ 'ler C*- cebirleri $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_n$ 'ler kompakt hausdorff uzayları ve $A_i\cong C(\Omega_i)$ olsun, bu takdirde $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ ' nin C*- normu tektir.

İspat: Gerçekten $\forall\ i\in\{1,2,...,n\}$ için $A_i\cong C(\Omega_i)$ olduğundan ve Ω_i kompakt olduğundan Teorem19 ve Teorem 20'den A_i 'ler değişmeli ve birim elemanlı C*- cebirleridir. Bu durumda $\overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_{\alpha_0}}$ değişmeli ve birim elemanlı C*- cebir olduğu gösterilebilir. $\|.\|_\alpha$, $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 'de keyfi bir C*- norm ise $\overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_\alpha}$ ' da değişmeli ve birim elemanlı C*- cebirdir. Ω, $\overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_\alpha}$ ' nın spektral uzayı olsun, $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times...\times\Omega_n$ 'dir. Bu durumda

$\overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_\alpha}\cong C(\Omega)=C(\Omega_1\times\Omega_2\times...\times\Omega_n)$ 'dir. Diğer taraftan $\|.\|_{\alpha_0}$ $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ 'de C*- norm olduğundan $\overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_{\alpha_0}}\cong C(\Omega)=C(\Omega_1\times\Omega_2\times...\times\Omega_n)$ 'dir.

$\Rightarrow\ \overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_{\alpha_0}}\cong\overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_\alpha}\overset{\text{Teorem21}}{\Longrightarrow}\|.\|_{\alpha_0}=\|.\|_\alpha$ 'dir. $\Rightarrow\ \bigotimes_{i=1}^n A_i$ ' nin C*- normu tektir. ■

Teorem 23 : $_i\in A_i$, $1\le i\le n$ birim elemanlı C*- cebirleri olsunlar, $\|.\|_\alpha$, $\bigotimes_{i=1}^n A_i$ ' de C*- norm olsun. Varsayalım ki $\|.\|_\beta$,$\|.\|_\alpha$ ' nın ${}_1\bigotimes\bigotimes_{i=2}^n A_i$ ' ye kısıtlanışı olsun. Eğer φ , $\overline{\bigotimes_{i=1}^n A_i}^{\|\cdot\|_\alpha}$ üzerinde bir durum olup $f(.):=\varphi\left(.\otimes\bigotimes_{i=2}^n {}_i\right)$, A_1 üzerinde saf durum ise $\overline{\bigotimes_{i=2}^n A_i}^{\|\cdot\|_\beta}$ üzerinde bir tek ψ durumu mevcuttur öyle ki $\varphi=f\otimes\psi$ ' dir [1].

Sonuç 5: ${}_i \in A_i$, $1 \le i \le n$ birim elemanlı C*- cebirleri olsunlar, φ, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ ' de bir durum olsun. Eğer $1 \le i \le k$ için $f_i(.) := \varphi\left(. \otimes \underset{j \neq i}{\otimes}\ {}_j\right)$, $(k \le n)$ A_i üzerinde saf durum ise $\varphi = \overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i \otimes \psi$ şeklindedir. Burada ψ, $\bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ üzerinde durumdur.

Ayrıca φ fonksiyoneli $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde $\|.\|_\alpha$ normuna göre sürekli ise ψ, $\bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ üzerinde $\|v\|_\beta := \left\| \overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}}\ {}_i \otimes v \right\|_\alpha$ normuna göre süreklidir [1].

Teorem 24: ${}_i \in A_i$, $1 \le i \le n$ birim elemanlı C*- cebirleri olsunlar, $k \le n$ olmak üzere $A_1, A_2, ..., A_k$ 'lar değişmeli C*- cebirleri olsunlar. Varsayalım ki $\|.\|_\alpha$, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde C*-norm, φ, $\overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\|\cdot\|_\alpha}$ üzerinde saf durum olsun. Bu takdirde $\varphi = f_1 \otimes f_2 \otimes ... \otimes f_k \otimes \psi$ şeklindedir. Burada $1 \le i \le k$ için $f_i(.) := \varphi\left(. \otimes \underset{j \neq i}{\otimes}\ {}_j\right)$, A_i üzerinde saf durumdur.

$\Rightarrow \forall v \in \bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i$ için $\|v\|_\beta = \left\| \overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}}\ {}_i \otimes v \right\|_\alpha$ olmak üzere $\psi(v) = \varphi\left(\overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}}\ {}_i \otimes v \right)$ bir tek saf durum olarak $\overline{\bigotimes_{i=k+1}^{n} A_i}^{\|\cdot\|_\beta}$ ' ya genişletilebilir [13].

Lemma 3: A birim elemanlı C*- cebiri ve $S(A)$ onun durumlar uzayı olsun. $E \subseteq S(A)$ öyle ki E , $\sigma(A^*, A)$ kompakt konveks ve $\forall h = h^* \in A$ için $\exists\, \varphi \in E$ öyle ki $\varphi(h) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(h)} \{\lambda\}$ olsun. Bu durumda $E = S(A)$'dır[1, s183].

Lemma 4: A_i , $1 \le i \le n$ C*- cebirleri olsunlar, $\|.\|_\alpha$, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde C*-norm olsun. Bu takdirde $\|.\|_\alpha \ge \|.\|_{\alpha_0} \Leftrightarrow \forall \varphi_i \in S(A_i), 1 \le i \le n$ için $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i$, $\|.\|_\alpha$ ' ya göre süreklidir.

İspat: "$\Rightarrow$" $\|.\|_{\alpha} \geq \|.\|_{\alpha_0}$ olsun, $\Rightarrow \forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için ve $\forall \varphi_i \in S(A_i), 1 \leq i \leq n$ için

$\left| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i(u) \right| \overset{sonuç2}{\leq} \prod_{i=1}^{n} \|\varphi_i\| \|u\|_{\alpha_0} \overset{\varphi_i\, durum}{=} \|u\|_{\alpha_0} \leq \|u\|_{\alpha} \quad \Rightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i$, $\|.\|_{\alpha}$’ ya göre sınırlıdır.

$\Rightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i$, $\|.\|_{\alpha}$’ ya göre süreklidir.

"$\Leftarrow$" $\forall \varphi_i \in S(A_i), 1 \leq i \leq n$ için $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i$, $\|.\|_{\alpha}$’ ya göre sürekli olsun,

$\Rightarrow \forall u, v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$, $v \neq \theta$ için $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i\left(v^*\left(\|u^*u\|_{\alpha} - u^*u\right)v\right) \geq 0$’dır. Teorem 15’den $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i$ lineer olduğundan

$\Rightarrow \|u^*u\|_{\alpha} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i(v^*v) - \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i(v^*u^*uv) \geq 0$’dır.

$\Rightarrow \|u^*u\|_{\alpha} \geq \dfrac{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i(v^*u^*uv)}{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i(v^*v)}$, $\forall v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \setminus \{\theta\}$ keyfi olduğundan

$\|u^*u\|_{\alpha} \geq \sup\limits_{\substack{v \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \\ v \neq \theta}} \dfrac{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i(v^*u^*uv)}{\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i(v^*v)} \overset{Teorem16}{=} \|u\|_{\alpha_0}^2 \quad \Rightarrow \|.\|_{\alpha}$ C*- norm olduğundan

$\|u\|_{\alpha}^2 \geq \|u\|_{\alpha_0}^2 \Rightarrow \|.\|_{\alpha} \geq \|.\|_{\alpha_0}$’dır.■

Teorem 25: $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_{n-1}$’ler kompakt hausdorff uzayları olmak üzere $1 \leq i \leq n-1$ için $A_i \cong C(\Omega_i)$ olsun, $_n \in A_n$, birim elemanlı C* -Cebiri olsun o halde $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde bir tek $\|.\|_{\alpha_0}$ C*-normu mevcut dur.

İspat : $\|.\|_{\alpha}$, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde keyfi bir C*-norm olsun, $\forall f_i \in \Omega_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ keyfi ve sabit olmak üzere

$$E := \left\{ f_n \in S(A_n) \;\middle|\; \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i \in S\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right), \|.\|_{\alpha} \text{ ' ya göre sürekli} \right\}$$ olsun.

$\forall h = h^* \in A_n$ alalım B, $\{\ _n, h\}$ ile üretilen alt cebir olsun, yani $B := \langle\{\ _n, h\}\rangle$ olsun $\Rightarrow B, A_n$ C*-Cebirinin değişmeli *alt cebiridir. $\psi_B(h) := \max_{\lambda\in\sigma(h)}\{\lambda\}$ şeklinde tanımlanan ψ_B dönüşümünün tüm B' ye genişlemesi $\overline{\psi_B}$ olsun. Bu durumda $\forall\, b = \sum_i \mu_i h^{k_i} \in B$ için $\overline{\psi_B}(b) = \sum_i \mu_i (\psi_B(h))^{k_i}$ olup B üzerinde bir durumdur. Ayrıca B değişmeli olduğundan Teorem 22' den $\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i \bigotimes B$' nin bir tek $\|.\|_{\alpha_0}$ C*-normu vardır. (18)

Diğer taraftan $\|.\|_\alpha$, $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde bir C*-norm olup (18)' den

$\overline{\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i \bigotimes B}^{\|\cdot\|_{\alpha_0}} = \overline{\bigotimes_{i=1}^{n-1} A_i \bigotimes B}^{\|\cdot\|_{\alpha}}$ ‘ dır.

$\overline{\psi_B}$, B üzerinde bir durum olup B , A_n'nin alt vektör üzayı olduğundan Hahn-Banach genişletim teoremine göre $\overline{\psi_B}$ 'nin , B' den A_n 'ye durm olarak tek bir genişlemesi mevcuttur. Bu genişlemeyi f_n ile gösterelim.

$f_n \in S(A_n) \subseteq A_{n_*} \subseteq A_n^*$' dir. $1 \le i \le n-1$ için $f_i \in \Omega_i \subseteq S(A_i) \subseteq A_{i_*} \subseteq A_i^*$ olduğundan sonuç 2'den $\otimes_{i=1}^{n} f_i$ dönüşümünün $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ ' den $\overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\|\cdot\|_\alpha}$ ‘ ya tek bir genişlemesi mevcuttur. Bu genişlemeyi φ ile gösterelim, yani $\varphi : \overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\|\cdot\|_\alpha} \to \mathbb{C}$ bir durumdur.

Açıkça $1 \le i \le n-1$ için $f_i(.) := \varphi\Big(.\otimes \bigotimes_{j\ne i}\ _j\Big)'$ dir. Diğer taraftan $f_i(.) \in \Omega_i$ olup $1 \le i \le n-1$ için A_i değişmeli olduğundan $f_i \in P(A_i)$ saf durumdur ve $\varphi : \overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\|\cdot\|_\alpha} \longrightarrow \mathbb{C}$ durum olduğundan φ , $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ üzerinde $\|\,.\,\|_\alpha$ 'ya göre süreklidir. (19)

f_n , A_n 'de durum olduğundan $f_n \in S(A_n)'$ dir. Sonuç 5' den f_n süreklidir. Diğer taraftan (19)'dan $f_n \in E$ 'dir. $E \subseteq S(A_n)$, $\sigma(A^*, A)$ kompakt ve konveks olup Lemma 3' den $E = S(A_n)$'dir. E'nin tanımından $\otimes_{i=1}^{n} f_n$, $\|\,.\,\|_\alpha$' ya göre sürekli, f_i'ler keyfi, sabit ve

$f_n \in S(A_n)$ olduğundan $\forall \varphi_i \in S(A_i)$, $1 \le i \le n$ için $\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_i$, $\| \cdot \|_\alpha$ ' ya göre süreklidir. Lemma 4' den $\| \cdot \|_\alpha \ge \| \cdot \|_{\alpha_0}$ ' dır. (20)

Şimdi $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ ' de $\| \cdot \|_\alpha \le \| \cdot \|_{\alpha_0}$ olduğunu gösterelim. φ, $\overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\| \cdot \|_\alpha}$ kümesin de keyfi saf durum olsun. Teorem 24'den $\varphi = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i$, $f_i \in P(A_i)$, $1 \le i \le n$ şeklindedir. Bu durumda $\forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için

$$\| \cdot \|_\alpha^2 = \| u^* u \|_\alpha = \sup_{\varphi \in P\left(\overline{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i}^{\| \cdot \|_\alpha}\right)} \left(\varphi(u^* u)\right) = \sup_{f_i \in P(A_i)} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u^* u) \overset{\substack{\| f_i \|_i^* = 1 \\ P(A_i) \subseteq A_i^*}}{\le} \sup_{\substack{f_i \in A_i^* \\ \| f_i \|_i^* = 1}} \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u^* u) \le$$

$$\le \sup_{\substack{f_i \in A_i^* \\ \| f_i \|_i^* = 1}} \left| \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} f_i(u^* u) \right| \overset{Teorem12}{=} \| u^* u \|_\lambda \overset{\substack{Teorem16 \\ \| \cdot \|_1 \le \| \cdot \|_{\alpha_0}}}{\le} \| u^* u \|_{\alpha_0} = \| u^* u \|_\lambda = \| u \|_{\alpha_0}^2 \Rightarrow \| u \|_\alpha^2 \le \| u \|_{\alpha_0}^2$$

$\Rightarrow \forall u \in \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ için $\| u \|_\alpha \le \| u \|_{\alpha_0} \Rightarrow \| \cdot \|_\alpha \le \| \cdot \|_{\alpha_0} \Rightarrow$ (20)' den $\| \cdot \|_\alpha = \| \cdot \|_{\alpha_0} \Rightarrow \bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ ' nin C^*- normu tektir.■

Lemma 5: A birim elemansız C*- cebiri $A^{(1)} := A \dot{+} \mathbb{C}.1$ olsun. B bir C*- cebiri olmak üzere $\|.\|_\alpha$ $A \bigotimes B$ ' de bir C*- norm olsun, bu takdirde

$$\overline{A^{(1)} \bigotimes B}^{\|.\|_\alpha} = \overline{A \bigotimes B}^{\|.\|_\alpha} \dot{+} 1 \bigotimes B \text{ olup}$$

$$\|x\|_\alpha = \|x\|_{\tilde{\alpha}} = \sup\left\{ \|xu\|_\alpha \;\middle|\; u \in A \bigotimes B, \|x\|_\alpha \le 1 \right\}, \; \forall x \in A^{(1)} \bigotimes B .$$

Sonuç olarak $\forall$ C*- norm $A \bigotimes B$' den $A^{(1)} \bigotimes B$' ye tek bir C*- norm olarak genişletilir [1, s206]

Lemma 6: A birim elemansız C*- cebiri $A^{(1)} := A \dot{+} \mathbb{C}.1$ olsun. B keyfi bir C*-cebiri olsun

i) $\|\cdot\|_{\alpha}$, $A^{(1)} \bigotimes B$ ‘de Maksimal C*- norm ise $\|\cdot\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B}$. $A \bigotimes B$ ‘de Maksimal C*-normdur.

ii) $\|\cdot\|_{\beta}$, $A \bigotimes B$’ de Maksimal C*- norm ise $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}}, \|\cdot\|_{\beta}$'nın $A^{(1)} \bigotimes B$ ‘ ye tek olan genişlemesi olmak üzere $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}}$, $A^{(1)} \bigotimes B$’ de Maksimal C*- normdur.

iii) $\|\cdot\|_{\alpha}$, $A^{(1)} \bigotimes B$ ‘de minimal C*- norm ise $\|\cdot\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B}$. $A \bigotimes B$ ‘de minimal C*-normdur.

iv) $\|\cdot\|_{\beta}$, $A \bigotimes B$’ de minimal C*- norm ise $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}}, \|\cdot\|_{\beta}$'nın $A^{(1)} \bigotimes B$ ‘ ye tek olan genişlemesi olmak üzere $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}}$, $A^{(1)} \bigotimes B$’ de minimal C*- normdur.

İspat:

i) $\|\cdot\|_{\alpha}$, $A^{(1)} \bigotimes B$ ‘de Maksimal C*- norm, $\|\cdot\|_{\beta}$, $A \bigotimes B$’ de keyfi C*- norm olsun, $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}}, \|\cdot\|_{\beta}$'nın $A^{(1)} \bigotimes B$ tek olan genişlemesi olsun. $\|\cdot\|_{\alpha}$, $A^{(1)} \bigotimes B$ ‘de Maksimal C*- norm olduğundan $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}} \leq \|\cdot\|_{\alpha}$’dır. Bundan dolayı $\|\cdot\|_{\beta} \leq \|\cdot\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B} \Rightarrow \|\cdot\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B}$. $A \bigotimes B$ ‘de Maksimal C*- normdur.

ii) $\|\cdot\|_{\beta}$, $A \bigotimes B$’ de Maksimal C*- norm olsun, $\|\cdot\|_{\alpha}$, $A^{(1)} \bigotimes B$ ‘de Maksimal C*- norm ise, i)’den $\|\cdot\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B}$ $A \bigotimes B$ ‘de Maksimal C*- normdur ve $\|\cdot\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B} = \|\cdot\|_{\beta}$’dır. $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}}, \|\cdot\|_{\beta}$'nın $A^{(1)} \bigotimes B$ tek olan genişlemesi olduğundan $\|\cdot\|_{\tilde{\beta}} = \|\cdot\|_{\alpha}$’dir. $\Rightarrow \|\cdot\|_{\tilde{\beta}}$, $A^{(1)} \bigotimes B$’ de Maksimal C*- normdur.

iii) i)’ye benzer yapılır.

iv) $\|.\|_{\beta}$, $A\bigotimes B$' de minimal C*- norm olsun, $\|.\|_{\alpha}$, $A^{(1)}\bigotimes B$ 'de minimal C*- norm ise, iii)'den $\|.\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B}$ $A\bigotimes B$ 'de minimal C*- normdur ve $\|.\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B} = \|.\|_{\beta}$'dır.

$\|.\|_{\tilde{\beta}}$, $\|.\|_{\beta}$'nın $A^{(1)}\bigotimes B$ tek olan genişlemesi olduğundan $\|.\|_{\tilde{\beta}} = \|.\|_{\alpha}$'dir. $\Rightarrow \|.\|_{\tilde{\beta}}$, $A^{(1)}\bigotimes B$' de minimal C*- normdur. ■

Teorem 26 : A birim elemansız C*- cebiri $A^{(1)} := A \dot{+} \mathbb{C}.1$ olsun, bu takdirde
A nükleerdir $\Leftrightarrow$ $A^{(1)}$ nükleerdir.

İspat : $A^{(1)} := A \dot{+} \mathbb{C}.1$ nükleer C*- cebiri olsun, bu takdirde $\forall B$ C*-cebiri için $A^{(1)}\bigotimes B$'nin C*- normu tektir. Bu C*- norm $\|.\|_{\alpha}$ olsun Lemma 6, i ve iii şıklarından $A\bigotimes B$' de $\|.\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B}$ Maksimal ve minimal C*- normdur. Bu takdirde $A\bigotimes B$' nin C*- normu tektir
$\Rightarrow$ A nükleer C*- cebirdir.

Tersine olarak A nükleer C*- cebiri olsun, , bu takdirde $\forall B$ C*- cebiri için $A\bigotimes B$'nin C*- normu tektir. Bu C*- norm $\|.\|_{\beta}$ olsun. $\|.\|_{\tilde{\beta}}$, $\|.\|_{\beta}$'nın $A^{(1)}\bigotimes B$ 'ye tek olan genişlemesi olsun. Bu takdirde Lemma 6, ii ve iv 'den $\|.\|_{\tilde{\beta}}$ $A^{(1)}\bigotimes B$'nin Maksimal ve minimal C*- normu olup $A^{(1)} := A \dot{+} \mathbb{C}.1$ nükleer C*- cebiridir. ■

Sonuç 6 : A bir değişmeli C*- cebir i ise A nükleer C*-cebiridir.
İspat: Teorem 22' den A'nın birim elemanlı olduğunu varsayabiliriz.

B keyfi bir C*- cebiri olsun, eğer

a) B birim elemanlı ise Teorem 25'den $A\bigotimes B$ 'nin C*-normu tektir ve A nükleer C*- cebiridir.

b) B birim elemanlı değilse $B^{(1)} := B \dot{+} \mathbb{C}.1$ birim elemanlı C*- cebiri olup Teorem 25'den $A \otimes B^{(1)}$'in C*- normu tektir. Bu C*- norm $\|.\|_\alpha$ olsun i), iii) 'den $\|.\|_{\alpha}\big|_{A\otimes B}$ $A \otimes B$ 'de Maksimal ve minimal C*- normdur. Bu takdirde $A \otimes B$' nin C*- normu tektir.

$\Rightarrow$ a), b)' den $\forall$ B C*- cebiri için $A \otimes B$' nin C*- normu tektir.

$\Rightarrow$ A Nükleer C*- cebiridir. ■

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Banach uzaylarının tensör çarpımlarının bir norma göre tamlaştırılmasının yine bir Banach uzayı olduğunun özgün bir ispatı yapılmıştır. Ayrıca C*-Cebirlerinin tensör çarpımlarının bir C*-norma göre tamlaştırılmasının da yine bir C*-Cebiri olduğunun özgün ve ayrıntılı bir ispatı yapılmıştır. Sonlu boyutlu C*-Cebirlerinin ve Değişmeli C*-Cebirlerinin Nükleer C*-Cebiri olduklarının ispatı verilmiştir.

4.ÖNERİLER

C*-Cebirlerinden yeni bir C*-Cebiri oluşturmanın yollarından biride C*-Cebirlerinin tensör çarpımıdır. Fizikteki ükleer uzaylar teorisi ile bazı ilişkileri olduğundan Nükleer C*-Cebiri olarak adlandırılan C*-Cebirleri çok derin ve zengin bir konudur. Bu çalışmada tensör çarpımları ve Nükleer C*-Cebirleri konuları kompleks durumda ayrıntılı olarak incelenmiştir. Fakat literatürde reel durumda bir çalışma bulunmamaktadır. Reel Nükleer C*-Cebirleri de incelenebilir. Bu çalışmada yol gösterici olarak başvurulacak bir kaynaktır.

KAYNAKLAR

1. Li, B., Intruduction To Operator Algebras, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1992

2. Kolmogorov, A.N.ve Fomin, S.V., Functional Analysis, Graylock Pres, N.Y., 1957

3. Musayev, B., ve Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 2000

4. Vowden, B. J., C*-Norm and Tensor Product of C*- Algebras, J. London Math. Soc., (2), 7 (1974) 595-596.

5. Effros, E. G., Lance, C., Tensor Products of Operator Algebras, Adv. Math., 25, (1977) 1-34.

6. Gelfand, I. M., Naimark, M. A., On the Imbdeeing of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space, Mat.Sb., 12 (1943) 197-213.

7. Grothendieck, A., Produits Tensoriels Topologiques et Espace Nucleaires, Mem. Amer. Math. Soc., (1955) 16.

8. Lance, C., On Nuclear C*-Algebras, J. Functional Anal., 12 (1973) 157-176.

9. Kaplansky, I., Normed Algebras, Duke Math. J., 16 (1949) 399-418.

10. Lance, C., Tensor Products of Non-unital C*-Algebras, J. London Math. Soc., (2), 12 (1976) 160-168.

11. Lance, C., Tensor Products and Nuclear C*-Algebras, Operator Algebras and Applications, (I) (1982) 379-399.

12. Li, B. R., Tensor Products of C*-Algebras, Scientia Sinica Special Issue (II), (1979) 232-248.

13. Takesaki, M., On the Cross-Norm of the Direct Product of C*-Algebras, Tohoku Math. J., 16 (1964) 111-122.

14. Sakai, S., C*-Algebras and W*-Algebras, Springer Verlak, New York 1971.

15. Turumaru, T., On the Direct Product of Operator Algebras I, Tohoku Math. J. 4 (1952) 242-251.

16. Turumaru, T., On the Direct Product of Operator Algebras II, Tohoku Math. J. 5 (1953) 1-7.

17. Turumaru, T., On the Direct Product of Operator Algebras III, Tohoku Math. J. 6 (1954) 208-211.

18. Turumaru, T., On the Direct Product of Operator Algebras IV, Tohoku Math. J. 8 (1956) 281-285.

19. Kesicioğlu, Y., Reel C*-Cebirlerinde Lie*- İzomorfizmlerin Genişlemesi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet KUNT, 1981 yılında Gümüşhane'nin Kelkit ilçesinde doğdu. İlkokulu Samsun Denizevleri İlkokulunda, Ortaokulu ve Liseyi Samsun Cumhuriyet Lisesinde tamamladı. 1999 yılında KTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimine başladı. 2004 yılında bölüm birincisi olarak bu bölümden mezun oldu. 2005 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans programına başladı. Aynı yıl KTÜ Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.