KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMAL OPERATÖRLERİN SPEKTRUM YAPISI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Meltem EROL

TEMMUZ 2007
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NORMAL OPERATÖRLERİN SPEKTRUM YAPISI

Meltem EROL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08.06.2007
Tezin Savunma Tarihi : 04.07.2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zameddin İSMAYILOV

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2007

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans süresince gerek tez konumum belirlenmesinde gerekse çalışmalarımda bana yol gösteren, tezin bu hale gelmesinde yardımını ve desteğini esirgemeyen Prof.Dr. Zameddin İSMAYILOV' a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Eğitim ve öğretim hayatım süresi içerisinde maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme ve tez çalışmam süresince her konuda yardımlarını esirgemeyen sevgili asistan arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Meltem EROL

Trabzon 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada Hilbert uzayında bazı lineer normal ve normale yakın operatörlerin spektrumunun reel ve sanal kısımlarının spektrumları arasındaki bağıntı incelenmiştir.

Birinci bölümde tezde kullanılan Fonksiyonel Analiz, Lineer Operatörler ve Spektral Teorisi'nin temel kavram ve sonuçları verilmiştir.

İkinci bölümde ise, ilk olarak lineer normal operatörlerin ayrık spektrumunun, reel ve sanal kısımlarının ayrık spektrumlarının özel bir kartezyen çarpımı şeklinde ifade edildiği, reel ve sanal kısımlarının kompakt operatör olması halinde ise normal kartezyen çarpım olduğu durumlar incelenmiştir. Aynı irdelemeler hiponormal operatörler için de yapılmıştır. Daha sonra ise, lineer normal operatörlerin spektrum yapısı üzerinde durulmuş, reel ve sanal kısımlarının spektrumlarının kartezyen çarpımı şeklinde gösterilebileceği durumlara yer verilmiştir. Son olarak alınan sonuçların sınırlı normal operatörlerin normu, spektral yarıçapı, nümerik yarıçapı ve sınırsız normal operatörlerin özdeğerlerinin modüllerinin sonsuzdaki asimptotu konuları üzerindeki uygulamaları verilmiştir. Ayrıca alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Normal, Hiponormal ve Üniter Operatör; Operatör Fonksiyonu; Spektrum ve Rezolvent Küme; Sürekli, Ayrık ve Artık Spektrum; Spektral ve Nümerik Yarıçap; Özdeğerlerin Modüllerinin Asimptotu.

SUMMARY

The Structure of Normal Operators Spectrum

In this study the spectrum of some normal operators and hyponormal operators are investigated in terms of the spectrum of their reel and imaginary parts in Hilbert space.

In the first part of the study basic concept and results in functional analysis, the operator theory and spectral theory are summarized.

In the second part firstly, the point spectrum of a normal operator is stated with a special Cartesian product in terms of the point spectrum of its real and imaginary parts. Therefore, when its real and imaginary parts are compact operators, the conditions in which its point spectrum is expressed with normal Cartesian product in terms of the point spectrum of its real and imaginary parts are investigated. Also the same study is made for hyponormal operators. After that the structure of a normal operator spectrum is studied carefully and conditions in which its spectrum is expressed with Cartesian product in terms of the point spectrum of its real and imaginary parts are given. Finally, applications of spectral radius, numerical radius, its norm for bounded normal operators and asymptotical behaviour of the eigenvalues for unbounded normal operators are given with all results. Moreover, all theorems in this thesis are supported with examples.

Keywords: Normal Hyponormal Operator and Unitary Operators; Function of an Operator; Spectrum and Rezolvent Sets; Point, Continuous and Residual Spectrum; Spectral and Numerical Radius; Asymptotics of the Modules of Eigenvalues.

SEMBOLLER DİZİNİ

$C^{(n)}(I)$	I aralığı üzerinde n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_0^{(n)}(I)$	I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $C^{(n)}(I)$' daki fonksiyonlar uzayı
$\mathfrak{S}_p(H)$	Schatten-von Neumann sınıfı
$\mathfrak{S}_\infty(H)$	H Hilbert uzayında kompakt operatörler uzayı
$L(H)$	H Hilbert uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
$L^2(I)$	I aralığı üzerindeki fonksiyonların Hilbert uzayı
$H_\lambda(A)$	A operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin ürettiği alt uzay
$R_\lambda(A), R(\lambda;A)$	A operatörünün rezolvent operatörü
$r_\sigma(A)$	A operatörünün spektral yarıçapı
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün kalan spektrumu
$W^l_p(I)$	$l, p \geq 1$ için $l.$ mertebeye kadar türevleri $L^p(I)$ uzayında olan fonksiyonların Sobolev uzayı
$w(A)$	A operatörünün nümerik yarıçapı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

20. yüzyılın başlangıcında matematikte ilk kaynaklarını V. Volterra, I. Fredholm, D. Hilbert, M. Frechet ve F. Riesz' ın bilimsel çalışmalarından alan daha sonraları ‘‘ fonksiyonel analiz ’’ olarak adlandırılan yeni bir dal gelişmeye başladı. Bu matematikçiler integral denklemleri, özdeğerlerle ilgili problemler, ortogonal ayrılış v.s. gibi önemli konuları ele almışlardır. Lebesque integral teorisinin aynı zamanda oluşumu da tesadüfi değildir.

F. Riesz' ın $C[a,b]$ uzayında kompakt operatörler hakkındaki işlerinde [76] ilk olarak ‘‘ normlu uzayın’’ aksiyomları verilmiş, fakat bu kavramların soyutlandırılması S. Banach' ın [9] doktorluk tezinde 1920 de açıklanmıştır. Bu anlamda 1932 yılında yayınlanan S. Banach' ın [8] kitabı büyük önem taşımıştır. Bu kitapta Banach uzaylar teorisinin halen faydalanabilen esası açıklanmıştır.

Daha sonraları (1923) M. Wiener [104] bu kavramları kompleks sayılar cismi üzerine genişletebildi.

Fonksiyonel analizin gelişmesinde J. von Neumann'ın [63] Hilbert uzayında operatörler cebiri alanında yaptığı çalışmaları kaydetmek yerinde olur.

J. von Neumann'ın operatörler teorisine sağladığı büyük katkı onun kuantum mekaniğinde geniş uygulama alanı bulmasıydı. Bu ise, operatörler cebiri teorisinin gelişmesine sebep olmuştur.

20. yüzyılın ilk yarısında fonksiyonel analiz dalında çalışan matematikçiler normlu uzayların incelemesine daha fazla odaklandılar (bak J. Dieudonne ve L. Schwartz [19]). Bunun sonucunda analizde L. Schwartz ve S.L. Sobolev tarafından genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi oluşturulmuş oldu. Bu teorinin ise, uygulamalı matematik ve özelliklede kısmi türevli diferansiyel denkler teorisinin gelişmesinde büyük bir etkisi olmuştur.

Sonlu boyutlu uzaylarda spektral teori aslında, matrisler teorisinin bir parçasıdır(C.C. MacDuffee [49], J. H. M. Wedderburn [101]).

Bir operatörün fonksiyonu alanındaki ilk çalışmalar E. H. Moore [53,54], D. Hilbert' in [34] işleriyle başlamış ve F. Riesz [75] bu teoriyi son olarak şekillendirebilmiştir.

Bir Hilbert uzayında sınırlı veya sınırsız normal operatörler teorisi M. H. Stone [92], P. R. Halmos [28], F. Riesz ve B. Sz.-Nagy'nin [82] işlerinde daha detaylı bir şekilde incelenmiştir.

İlk kaynak olarak I. Fredholm'un [24] integral denklemlerle başlayan kompakt operatörlerin spektral teorisi bir teori gibi F. Riesz [76], T.H. Hildebrandt [35], J. Schauder [85], F. Riesz ve B. Sz.-Nagy [82], S. Banach [8], A. C. Zaanen [110], M. Nagumo [56], N. Dunfort [20], J. Leray [46], M. S. Altman [2,3], D. H. Hyers [37], G. Marinescu [50] ve J. H. Williamson'ın [105] çalışmalarında şekillendirilmiş ve geliştirilmiştir.

Hilbert uzayında operatörün spektral teorisi alanındaki ilk temel işler D. Hilbert [34,IV], F. Riesz [77,79], E. Hellinger ve O. Toeplitz [33], A. Wintner [104], J. von Neumann [63,64,65], M. H. Stone [93,94], B. Sz.-Nagy [96], F. Riesz ve B. Sz.-Nagy [82], P. R. Halmos [28], R. G. Cooke [15], N.I. Ahiezer ve I.M. Glazman'ın [1] işlerinde yapılmıştır.

Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatörler için spektral teorem D. Hilbert ' e [34,IV] mahsustur. Hilbert uzayında lineer sınırlı veya sınırsız özeşlenik, üniter ve normal operatörlerin spektral teoremleri ve spektral ayrılış teoremleri F. Riesz [77,79], N. I. Ahiezer ve I. M. Glazman [1], P. R. Halmos [28], L. H. Loomis [47], F. Riesz ve B. Sz.-Nagy [82], M. H. Stone [92], B. Sz-Nagy [95], A. Wintner [106], T. Carleman [10], R. R. Christian [12], J. L. B. Cooper [16,17], W. F. Eberlein [22], M. Esser [23], K. O. Friedrichs [25], E. Hellinger [32], K. Kodaira [42], B. O. Koopman ve J. L. Doop [43], B. A. Lengyel [44], B. A. Lengyel ve M. H. Stone [45], E. R. Lorch [48], E. J. McShane [51], H. Nakano [57, 60, 61], J. von Neuman [63,64,66,68], T. Ogasawara [69], F. Rellich [74], F. Riesz [78], F. Riesz ve E. R. Lorch [81], K. T. Smith [88], M. H. Stone [93], O. Teichmüller [97], M. Tsuji [98], F. J. Wecken [99], A. Wintner [107], K. Yosida ve T. Nakayama'nın [109] bilimsel çalışmalarında detaylı şekilde incelenmiştir.

J. von Neumann tarafından ispatlanmıştır ki, eğer A ayrılabilir bir Hilbert uzayında sınırlı özeşlenik operatör ve T sınırlı operatörü A operatörüyle komutatif olan tüm operatörlerle komutatif ise, $T = f(A)$ koşulunu sağlayan ölçülebilir bir f fonksiyonu vardır.

Bu teorem F. Riesz tarafından da açık şekilde ifade edilmiştir. Y. Mimura onun ispatını basitleştirmiş ve sınırsız operatörlere bu sonucu genişletmiştir. En temel ispat ise, B. Sz.-Nagy [96], H. Nakano [59] ve F. J. Wecken [100] tarafından verilmiştir. Bu teorem yukarıda ifade edildiği gibi ayrılamayan Hilbert uzayları için doğru değildir. Fakat I. E. Segal [96] bu duruma uygun bir genelleşme elde etmiştir. Banach uzaylarında bu sonucun bir genelleştirilmesi W. G. Bade [6,7] tarafından yapılmıştır.

Bir kompakt özeşlenik operatörün spektrum ve özdeğerlerinin hesaplama yöntemleri bir çok kaynakta verilmiştir (örneğin, N. Dunfort ve J. Schwartz [21], M. Riesz [83], B. Sz.-Nagy [95], L. Collatz [14], N. Aronszajn [4,5] , B. A. Lengyel ve M. H. Stone [45] v.s.).

Eğer A H Hilbert uzayında normal operatör ise, $\lambda \in \sigma(A)$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ için $\|Ax - \lambda x\| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $x \in H, x \neq 0$ elemanının bulunmasıdır (bak P. R. Halmos [28]). Kompakt operatörlerin spekturumu hakkında daha detaylı bilgileri F. Riesz ve B. Sz.- Nagy [82] , T. P. Chiang [11], E. Hellinger ve O. Toeplitz'in [33] çalışmalarında bulmak mümkündür.

Bir Hilbert uzayında lineer normal operatörlerin genel teorisi J. von Neumann [63], B. Fuglede [26], P. R. Halmos [27], C. R. Putnam [71,72], I. Kaplansky [40], N. A. Wiegmann [102], A. Wintner [108], H. Wielandt [103] ve W. Rudin [84] tarafından esaslı şekilde araştırılmıştır.

Operatörler teorisinin fizikte, kuantum mekaniğinde, hidromekanikte vs. uygulaması bir operatörün spektrum yapısının (yani, spektrum kümesinin) açık şekilde bilinmesi, onun üç ayrık spektrum kısımlarının kompleks düzlemde yerleşimi, özdeğerlerinin bulunması ve onların sonsuzda asimptotik davranışı gibi bilgiler araştırmaları ölçülemeyecek derecede kolaylaştırır. Lineer özeşlenik operatörlerin spektral teorisi esasen var olduğundan sınırlı olmayan lineer operatörler için bunu söylemek tam anlamıyla mümkün değildir. Bir lineer operatörün spektrum yapısı onun reel ve sanal kısımlarının spektrum yapıları ile bağlanabilmesi uygulamalarda büyük önem taşır (özeşlenik operatörler için bu problemin anlamı yoktur; çünkü onun sanal kısmı yoktur).

Bu çalışmada Hilbert uzayında normal ve normale yakın operatörlerin spektrumunun reel ve sanal kısımlarının spektrumlarının kartezyen çarpımı şeklinde ifade edilebildiği durumlar incelenmiş ve alınan sonuçların bazı uygulama alanları gösterilmiştir.

1.2. Metrik Uzaylar ve Lineer Uzaylar

Analizde yapılan en önemli işlemlerden birisi de limite geçme işlemidir. Bu işlemin temelinde $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^n$ deki iki nokta arasında tanımlanabilen uzaklık fonksiyonudur. Bu düşünceleri genişleterek üzerinde uzaklık fonksiyonu tanımlanabilen somut bir X kümesinin, çağdaş matematiğin esas kavramlarından biri olan metrik uzaya dönüştürülmesi önem taşımaktadır.

Tanım 1 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve

$$d : X \times X \to [0,+\infty), \ (x,y) \to d(x,y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer bu d fonksiyonu $\forall x,y,z \in X$ için

M$_1$) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (özdeşlik aksiyomu);

M$_2$) $d(x,y)=d(y,x)$ (simetriklik aksiyomu);

M$_3$) $d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde *uzaklık fonksiyonu* veya *metrik* adını alır ve (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir. Burada M$_1$, M$_2$ ve M$_3$ özelliklerine *metrik aksiyomları* denir.

Örnek 1 : $X=\mathbb{R}$ olmak üzere

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,+\infty), \ (x,y) \to d(x,y)=|x-y|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerinde *mutlak değer metriği* denir. Gerçekten:

M$_1$) $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y)=|x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y,$$

M$_2$) $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y)=|x-y|=|(-1)(y-x)|=|(-1)||y-x|=d(y,x),$$

M$_3$) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$|x-y|=|x-z+z-y| \le |x-z|+|z-y|$$

olduğundan

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

üçgen eşitsizliği elde edilir. O halde $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2 : X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde aşağıdaki gibi bir d fonksiyonunu tanımlayalım.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \text{ ise} \\ 0, & x = y \text{ ise} \end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan d fonksiyonu X kümesi üzerinde bir metriktir. Başka bir deyişle (X,d) ikilisi bir metrik uzaydır. Bu metriğe *ayrık metrik* veya *diskret metrik* denir.

Tanım 2 (Ayrılabilir Uzay): (X,d) metrik uzayına *ayrılabilir metrik uzay* denir $\Leftrightarrow$ X içinde öyle $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ dizisi vardır ki her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $\exists n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki $d\left(x, x_{n_0}\right) < \varepsilon$ dur.

Tanım 3 (Vektör Uzayı): X boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$+ : X \text{ x } X \to X,\ (x,y) \to x + y,$

$\bullet : K \text{ x } X \to X,\ (a,x) \to ax,$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. $\forall x \in X$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır;
4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır;
5. $\forall x \in X$ için $1 \cdot x = x$;
6. $a(x + y) = ax + ay$;
7. $(a + b)x = ax + bx$;
8. $(ab)x = a(bx)$.

Bu durumda X 'e K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*), elemanlarına da *vektör* veya *nokta* adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir *reel vektör uzayı* ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir *kompleks vektör uzayı* denir.

"0" sembolünün X uzayının bir vektörü için olduğu gibi, sıfır skaleri için de kullanılması genelde pek fazla yanılgıya neden olmaz. Ancak biraz daha açıklık getirmek gerekirse, sıfır vektörünü "θ" şeklinde gösterebiliriz.

Vektör uzayın tanımından aşağıdaki basit sonuçların elde edilebileceği kolayca gösterilebilir:

(a) Her $x \in X$ için $0x = \theta$;

(b) Her $\alpha \in K$ için $\alpha\theta = \theta$;

(c) $(-1)x = -x$;

(d) $x \neq \theta$ olmak üzere $\alpha x = \beta x$ ise $\alpha = \beta$;

(e) $\alpha \neq 0$ ve $\alpha x = \alpha y$ ise $x = y$;

(f) $y, z \in X$ vektörleri verildiğinde $x + y = z$ denkleminin tek bir $x \in X$ çözümü vardır.

Tanım 4 (Lineer Manifold): X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y , X ' in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y , X vektör uzayındaki cebirsel işlemlere göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y ' ye, X 'de bir *lineer manifold* (veya X 'in bir *lineer alt uzayı*) denir.

Tanım 5 : X bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ olarak verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n$$

şeklindeki sonlu toplama $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in X$ elemanlarının bir *lineer kombinasyonu* denir. $\varnothing \neq M \subset X$ ise, M 'den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer kombinasyonlarının tümünün kümesine M ' nin *gereni* (veya *lineer örtüsü*) denir ve *spanM* olarak gösterilir. *spanM* , X 'de bir lineer manifolddur ve M ' nin *ürettiği lineer manifold* denir.

Tanım 6 : X bir vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \subset X$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

eşitliği, ancak ve ancak,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$ vektörlerine *lineer bağımsız*, aksi halde *lineer bağımlı* denir.

Tanım 7 : X bir vektör uzayı ve M, X ' in boş olmayan bir alt kümesi olsun. M lineer bağımsız ve $X = spanM$ ise M ' ye X ' in bir *Hamel tabanı* veya bir *Hamel bazı* denir. Eğer X vektör uzayının sonlu bir Hamel tabanı varsa X ' e *sonlu boyutlu bir vektör uzayı*, aksi halde *sonsuz boyutlu vektör uzayı* adı verilir. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayının bir Hamel tabanındaki lineer bağımsız vektörlerinin sayısına X 'in *boyutu* denir ve $\dim X$ ile gösterilir.

Tanım 8 : Y_1 ve Y_2, X vektör uzayında iki lineer manifold olsun. Eğer her $x \in X$ için $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ olmak üzere,

$$x = y_1 + y_2$$

şeklinde tek bir gösterime sahip ise, X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 lineer manifoldlarının *direkt toplamıdır* denir ve $X = Y_1 \oplus Y_2$ olarak yazılır. Y_2 ' ye Y_1 ' in (ya da Y_1 ' e Y_2 ' nin) X ' deki *cebirsel tümleyeni* denir.

1.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 9 (Normlu Vektör Uzayı): X, K cismi üzerinde bir lineer vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \to [0,\infty),\ x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|: X \to [0,\infty),\ x \to \|x\|$ dönüşümüne X üzerinde *norm* ve bu durumda $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* adı verilir. Yukarıda verilen N_1, N_2 ve N_3 özelliklerine *norm aksiyomları* denir. Bu vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir. K cismine bağlı olarak, *reel normlu uzay* ve *kompleks normlu uzay* terimleri de kullanılır.

Örnek 3 : $E = C([a,b],K)$ kümesi

$$\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

fonksiyonu ile bir normlu uzaydır. Gerçekten: $x, y \in C[a,b]$ ve $\alpha \in K$ için,

N_1) $\|x\|_c = 0$ ise, $\|x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b]$ için $x(t) = 0$;

N_2) $\|\alpha x\|_c = \max_{t\in[a,b]} |(\alpha x)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |\alpha||x(t)|_c = |\alpha| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = |\alpha|\|x\|_c$;

N_3) $\|x+y\|_c = \max_{t\in[a,b]} |x(t)+y(t)| \le \max_{t\in[a,b]} (|x(t)|+|y(t)|)$

$$\le \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|x\|_c + \|y\|_c \ .$$

Tanım 10 : $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise, (x_n) dizisi x_0 noktasına $\|\cdot\|$ *normuna göre yakınsıyor* denir ve $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_X} x_0$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ notasyonlarının biriyle gösterilir. .

Tanım 11 : $(X,\|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve bunun içinde (x_n) bir dizi olsun. $(x_n) \subset X$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir ancak ve ancak

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m,n > n_\varepsilon \text{ için } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

koşulu sağlanır.

Tanım 12 (Banach Uzayı): Bir $\left(X,\|\cdot\|\right)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa, bu $\left(X,\|\cdot\|\right)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir.

Örnek 4 : $X=\mathbb{R}^n$ (veya $X=\mathbb{C}^n$) vektör uzayı için

$$\|x\|_\infty := \max\left\{|x_i| : i=1,2,3,\cdots,n\right\}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Gerçekten, bir $\left(x_m\right)\subset\mathbb{R}^n$ Cauchy dizisi alalım. Bu halde,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists m_0\in\mathbb{N} : \forall m,k>m_0, m,k\in\mathbb{N} \text{ için } \|x_m-x_k\|_\infty<\varepsilon$$

olup, her $i=1,2,...,n$ için

$$\left|x_i^m-x_i^k\right|\le\max\left\{\left|x_i^m-x_i^k\right| : i=1,2,3,\cdots,n\right\}=\|x_m-x_k\|_\infty<\varepsilon .$$

Böylece $\left(x_i^m\right)\subset\mathbb{R}, i=1,2,...,n$ dizileri $\mathbb{R}$ 'de (veya $\mathbb{C}$) bir Cauchy dizidir ve $\mathbb{R}$ 'de (veya $\mathbb{C}$ 'de) her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan her $i=1,2,...,n$ için $x_i^m \xrightarrow[m\to\infty]{|\,|} x_i$ olacak şekilde $x_i\in\mathbb{R}$ (veya $x_i\in\mathbb{C}$) sayısı vardır. $x:=\left(x_1,x_2,..,x_n\right)$ elemanı için

$$\|x_m-x\|_\infty=\max\left\{\left|x_i^m-x_i\right| : i=1,2,3,\cdots,n\right\}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$$

olduğu açıktır.

Tanım 13 (Alt Uzay): Eğer $Y\neq\varnothing$, $\left(X,\|.\|\right)$ lineer normlu uzayında bir lineer manifold ve $\|.\|$ normuna göre kapalı ise, Y lineer manifolduna $\left(X,\|.\|\right)$ lineer normlu uzayının bir *alt uzayı* denir.

1.4. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Hilbert uzayları sonsuz boyutlu normlu uzayların en basit tipi olmak üzere Fonksiyonel Analiz 'in teorik ve pratik uygulamalarında belli rol oynamaktadır. Euclid uzayları ile büyük benzerliğe sahip olan Hilbert uzaylarının böyle kullanışlı olmasının nedeni, vektör cebirinde tanımlanan iç çarpım ve diklik kavramlarının bu uzaylar için genelleştirilebilmesidir.

Tanım 14 (İç Çarpım Uzayı): $K=\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$(\cdot,\cdot): X \text{ x } X \to K$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)$' ye X üzerinde bir *iç çarpım*, $\left(X,(\cdot,\cdot)\right)$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* (veya *ön Hilbert uzayı*) denir.

H_1) $\forall x\in X$ için $(x,x)\geq 0$ ve $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$;

H_2) $\forall x,y\in X$ için $(x,y)=\overline{(y,x)}$ (kompleks eşlenik);

H_3) $\forall x,y\in X$ ve $\alpha\in K$ için $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$;

H_4) $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$.

$K=\mathbb{R}$ halinde $(x,y)=(y,x)$. H_2 ve H_4 ifadelerinden $\forall x,y,z\in X$ ve $\forall \alpha,\beta\in K$ için

(a) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$;

(b) $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y)=\alpha(x,y)$;

(c) $(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z)$

formüllerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 5 : $f,g\in C([a,b],K)$ fonksiyonları için

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

tanımıyla $C([a,b],K)$ bir iç çarpım uzayıdır. Gerçekten:

H_1) $\forall f\in C([a,b];K)$ için

$$(f,f)=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b |f(t)|^2 dt\geq 0,$$

eğer $(f,f)=\int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt=\int_a^b |f(t)|^2 dt=0 \;\Leftrightarrow\; f=\theta$;

H_2) $\forall f,g\in C([a,b];K)$ için

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\overline{\int_a^b \overline{f(t)\overline{\overline{g(t)}}}dt}=\overline{\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt}$$

$$=\overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)}dt}=\overline{(g,f)};$$

H3) $\forall f\in C([a,b];K)$ ve $\alpha\in K$ için

$$(\alpha f,g)=\int_a^b \alpha f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt=\alpha(f,g);$$

H4) $\forall f,g,h\in C([a,b];K)$ için

$$(f+h,g)=\int_a^b \big(f(t)+h(t)\big)\overline{g(t)}dt=\int_a^b\Big(f(t)\overline{g(t)}+h(t)\overline{g(t)}\Big)dt$$

$$=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt+\int_a^b h(t)\overline{g(t)}dt=(f,g)+(h,g)\ .$$

Tanım 15 : $\big(X,(\cdot,\cdot)\big)$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in X$ olsun.

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup ve bu norma *iç çarpımın ürettiği norm* denir.

Tanım 16 (Hilbert uzayı): Bir $\big(X,(.,.)\big)$ iç çarpım uzayı, iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise, yani $\big(X,(\cdot,\cdot)\big)$ içindeki her Cauchy dizisi iç çarpımın ürettiği norma göre yakınsaksa, bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Örnek 6 : $(\cdot,\cdot):l_2 \text{ x } l_2\to K,\ (x,y):=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}$

dönüşümü $l_2(\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma göre $l_2(\mathbb{C})$ bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 17 (Sobolev Uzayı): $m\geq 0$ bir tamsayı ve Ω, $\mathbb{R}^n$' de parçalı sürekli diferensiyellenebilir $\partial\Omega$ sınırlı bir tanım kümesi olsun. $\Omega\cup\partial\Omega$ üzerindeki fonksiyonların $C^m[\Omega\cup\partial\Omega]$ kümesinin tümleyeni, yani m defa sürekli diferensiyellenebilir kümesi,

$$\|\varphi\|_{W_2^m(\Omega)}:=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

normu ile *Sobolev uzayı* adını alır. W_2^m şeklinde gösterilir. Burada $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial t_1^{\alpha_1}\cdots\partial t_n^{\alpha_n}}$,

$\alpha = \{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n$. $\overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$ ise, Ω içindeki kompakt bir küme dışında sıfır olan $W_2^m(\Omega)$ fonksiyonların uzayı olarak gösterilir.

Eğer Ω sınırlı değil ise, o zaman Sobolev uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.
Bir $\varphi(t)$, $t\in\Omega$ fonksiyonunun $W_2^m(\Omega)$' ya ait olması için gerek ve yeter şart, $\varphi(t)$' nin ve onun $D^\alpha\varphi$, $|\alpha|\le m$ türevlerinin de $L^2(\Omega)$' ya ait olmasıdır. Son olarak, $W_2^m(\Omega)$ uzayı aşağıdaki gibi bir iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

1.5. Lineer Operatörler ve Temel Spektral Özellikleri

Tanım 18 : X ve Y iki lineer normlu uzay olsun. $A: D(A)\subset X\to Y$ olan her dönüşüme *operatör* adı verilir.

$D(A) := \{x\in X:\ Ax\ \textit{tanımlı}\}\subset X$ kümesine A operatörünün *tanım kümesi* denir.

$R(A) := AD(A) = \{y = Ax:\ x\in D(A)\}\subset Y$ kümesine A operatörünün *değer kümesi* denir.

$Ker\,A := \{\,x\in X: Ax = 0\,\}\subset X$ kümesine A operatörünün *sıfır kümesi* veya *çekirdeği* denir.

Tanım 19 (Lineer Operatör): X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X\to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X' de bir lineer manifold ve her $x,y\in D(A)$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

$$A(\alpha x+\beta y) = \alpha A(x)+\beta A(y)$$

ise, A operatörüne X üzerinde bir *lineer operatör* denir.

Tanım 20: X ve Y iki normlu uzaylar, $A: X\to Y$ bir operatör ve $x_0\in D(A)$ olsun. Eğer

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0:\ \|x-x_0\|<\delta$ olan $\forall x\in D(A)$ için $\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$

ise, A operatörü $x = x_0$ noktasında *süreklidir* denir. A operatörü her $x \in D(A)$ noktasında sürekli ise, operatöre *sürekli operatör* denir.

Tanım 21 (Sınırlı Operatör): X ve Y iki normlu uzaylar, $A : X \to Y$ tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$' nın X' deki sınırlı her kümesine $R(A)$' nın Y' de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A operatörüne *sınırlı bir operatör* denir. Başka bir deyişle;

$$\forall x \in D(A) \text{ için } \|Ax\|_Y \le c\|x\|_X$$

olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörüne *sınırlı operatör* denir. Bu $c > 0$ sayısına A operatörünün *normu* denir ve $\|A\| = c$ şeklinde gösterilir. X kümesi üzerinde lineer sınırlı operatörlerin kümesi $L(X)$ biçiminde gösterilir.

Örnek 7: $X = Y = \left(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\right)$ ve $K(t,s)$ fonksiyonu $D = [a,b]$ x $[a,b]$, $(a,b \in \mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon ve olsun.

$$A : C[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) := \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$$

operatörü lineer sınırlı bir operatördür. A operatörünün lineer olduğu açık olup sınırlı olduğunu gösterelim.

$$M_\infty := \max\left\{\int_a^b |k(t,s)|ds : t \in [a,b]\right\}$$

olmak üzere

$$\|Ax\|_\infty = \max\left\{\int_a^b |k(t,s)x(s)|ds : t \in [a,b]\right\} \le M_\infty \|x\|_\infty$$

olduğu ve buradan $\|A\| \le M_\infty$ dolayısıyla $A : C[a,b] \to C[a,b]$ operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Teorem 1: X ve Y iki normlu uzaylar, $A : X \to Y$ lineer operatörü sınırlıdır ancak ve ancak süreklidir [55].

Tanım 22 (Grafik): X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun.

$A: X \to Y$ lineer operatörü için,

$$Gr(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z = X \oplus Y$$

alt kümesine A operatörünün *grafiği* denir.

Tanım 23 (Kapalı Operatör): $A: X \to Y$ operatörünün grafiği $Gr(A)$, $Z = X \oplus Y$ 'de kapalı ise A operatörüne *kapalı operatör* denir.

$A: X \to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n) \subset D(A), \quad \lim_{n\to\infty}(x_n, Ax_n) = (x, y)$$

koşullarından $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ denklemini sağlaması demektir.

$\langle x, y\rangle \in X$xY için $\|\langle x, y\rangle\|^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2$ olduğundan $A: X \to Y$ lineer operatörü *kapalıdır* $\Leftrightarrow (x_n) \subset D(A)$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ise, $x \in D(A)$ ve $y = Ax$.

Tanım 24 (Kapanabilir Operatör): $A: X \to Y$ operatörünün $D(A) \subset D(\overline{A})$ ve her $x \in D(A)$ için $Ax = \overline{A}x$ olacak şekilde bir kapalı $\overline{A}$ operatörü varsa, A'ya *kapanabilir operatör* ve $\overline{A}$ operatörüne A'nın *kapanışı* denir.

Tanım 25 (Kompakt Operatör): Eğer bir H Hilbert uzayında sınırlı her kümeyi kompakt kümeye dönüştüren operatöre *kompakt operatör* denir. H üzerindeki lineer kompakt operatörlerin kümesi $\mathfrak{S}_\infty(H)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 26 (Eşlenik Operatör): A, H Hilbert uzayında tanım kümesi yoğun olan bir lineer operatör olsun. $y \in H$ ve her $x \in D(A)$ için

$$(Ax, y) = (x, A^* y)$$

olacak biçimde tanımlı lineer A^* operatörüne A'nın *eşleniği* denir.

Tanım 27: A, H Hilbert uzayında bir lineer operatör ve A^*, A operatörünün eşlenik operatörü olsun.

Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$, yani

$\forall f, g \in D(A)$ için $(Af, g) = (f, Ag)$

ise, A operatörüne *simetrik operatör* denir ve $A \subset A^*$ sembolüyle gösterilir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $Af = A^* f$ ise, A operatörüne *özeşlenik operatör* denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve her $f \in D(A)$ için $AA^* f = A^* Af$ ise, A operatörüne *normal operatör* denir. (Banach uzayı durumu için bak [70])

Eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $x \in D(A)$ için

$\|A^* x\|_H \le \|Ax\|_H$

şartını sağlıyorsa, A operatörüne *hiponormal operatör* denir.

Eğer her $f \in H$ için $AA^* f = A^* Af = f$ ise, A operatörüne *üniter operatör* denir.

Tanım 28 (Ortogonal İzdüşüm Operatörü): M , H Hilbert uzayında bir alt uzay olsun. Her $x \in H$ için $x = x_M + x_{M^\perp}$ olacak şekilde $x_M \in M$ ve $x_{M^\perp} \in M^\perp$ elemanları mevcut olup,

$$Ex = E\left(x_M + x_{M^\perp}\right) = x_M , \quad E : H \to H$$

şeklinde tanımlanan operatöre, M alt uzayı üzerine *ortogonal izdüşüm operatörü* denir.

Tanım 29 (Pozitif Operatör): A, H Hilbert uzayında bir lineer özeşlenik operatör olsun. Eğer her $f \in D(A)$ için

$$(Af, f) \ge 0$$

ise, A operatörüne *pozitif operatör* denir ve $A \ge 0$ sembolüyle gösterilir. Eğer A pozitif operatörü için $B^2 = A$ olacak şekilde bir B pozitif lineer operatörü varsa, B operatörüne A 'nın *karekökü* denir ve $B = \sqrt{A}$ veya $B = A^{1/2}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2: H Hilbert uzayında tanımlı her pozitif operatörün bir pozitif karekökü var ve tektir [62].

Tanım 30 (Köşegen Normal Operatör): H bir kompleks Hilbert uzayı, $(e_n) \subset H$ bir ortonormal baz ve $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $Ae_n = \lambda_n e_n$ şeklinde tanımlanan operatör normal olup, bu operatöre *köşegen normal operatör* denir.

Tanım 31 (Rezolvent Küme): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(X) \right\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün *regüler noktalar kümesi* (veya *rezolvent kümesi*) denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) := (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolventası* (veya *çözücü operatörü*) adı verilir.

Tanım 32 (Spektrum): H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün *spektrumu* denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 33 (Ayrık Spektrum): $\sigma_p(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ operatörü bire bir değil} \right\}$

kümesine A operatörünün *ayrık* veya *diskret spektrumu* denir. Eğer $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ise,

$$(A - \lambda_0 E)x_0 = 0$$

denkleminin $x_0 \neq 0$ çözümü vardır. Buradaki λ_0'a A operatörünün *özdeğeri*, x_0' a ise λ_0' a uygun bir *özvektörü* denir.

Tanım 34 (Sürekli Spektrum):

$$\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A - \lambda E)} = H, \text{ fakat } R(A - \lambda E) \neq H \right\}$$

kümesine A operatörünün *sürekli spektrumu* denir.

Tanım 35 (Artık Spektrum):

$$\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir}, \overline{R(A-\lambda E)} \neq H \right\}$$

kümesine A operatörünün *artık spektrumu* denir.

$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ ve $\sigma_r(A)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca spektrumun tanımından $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 8: $X = \left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ olmak üzere, $A : X \to X$ $Ax = tx(t)$ operatörünü göz önüne alalım. $Ax = tx(t)$ operatörü için $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ ' i bulalım.

$$tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

olup, $x(t)$ çözümü her $t \in [0,1]$ için yukarıdaki eşitliği sağlayan bir fonksiyondur. Eğer $\lambda \in \mathbb{R} \backslash [0,1]$ $(\lambda < 0 \text{ veya } \lambda > 1)$ ise, yukarıdaki denkleminin her $y \in X$ için $[0,1]$ üzerinde sürekli tek

$$x(t) = \frac{1}{t-\lambda} y(t), \; t \in [0,1]$$

çözümü vardır. Bu nedenle $\rho(A) = \mathbb{R} \backslash [0,1]$ ve her $\lambda \in \rho(A)$ için

$$R(\lambda; A) = \frac{1}{t-\lambda} y(t), \; t \in [0,1]$$

olur. Şimdi $\lambda \in [0,1]$ sayısının A operatörünün spektrumuna dahil olduğunu görelim. $\lambda_0 \in [0,1]$ ve $y(t) \in C[0,1]$ fonksiyonu $y(\lambda_0) = a \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için

$$(t - \lambda_0) x(t) = y(t)$$

eşitliği hiçbir $x(t) \in C[0,1]$ fonksiyonu için sağlanamaz, çünkü $t = \lambda_0$ noktasında sol tarafı sıfır, sağ tarafı ise sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile $\lambda = \lambda_0$ olduğundan yukarıda verilen denklemin bazı $y(t) \in C[0,1]$ fonksiyonları için çözümü yoktur. Bu ise $\lambda \in \sigma(A)$ olması demektir. Ayrıca $\sigma(A)$ ' nın hiçbir noktası A operatörünün özdeğeri olamaz, çünkü

$$(t-\lambda) x(t) = 0, \; \lambda \in [0,1]$$

denkleminin çözümü her $t \neq \lambda_0$ için $x(t)$' nin süreksizliğine göre $t = \lambda$ noktasında 0 olur. Böylece, $\sigma_c(A) = [0,1]$ ve $\sigma_p = \varnothing$ olduğu bulunur.

Teorem 3: Eğer A lineer operatörü bir sonlu boyutlu X lineer uzayında tanımlı olsun. Bu takdirde $\sigma_r(A) = \varnothing$ ve $\sigma_c(A) = \varnothing$ [62].

Teorem 4: Eğer A lineer normal operatör ise, $\sigma_r(A) = \varnothing$ [62].

Tanım 36: A, bir H Hilbert uzayında lineer operatör ve $\lambda \in \sigma_p(A)$ olsun. Bu λ özdeğerine karşılık gelen özvektörlerinin ürettiği lineer alt uzay $H_\lambda(A)$ ile gösterilir.

Teorem 5: $A: H \to H$ bir lineer kompakt normal operatör ise, her $\lambda \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{C}$ için $Ker(A - \lambda E)$ sonlu boyutludur [62].

Teorem 6: $A: H \to H$ bir lineer kompakt ve normal operatör ise, $\sigma_p(A)$ en çok sayılabilir sayıda (boş kümede olabilir) ve $\sigma_p(A)$ kümesinin mümkün olan limit noktası yalnızca 0 dır [62].

Teorem 7 (Hilbert- Schmidt Teoremi): Eğer $A \in L(H)$ kompakt normal operatör ise,

$$H = \ker A \oplus \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \ker(A - \lambda E) = \ker A \oplus \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ \lambda \neq 0}} \ker(A - \lambda E) = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \ker(A - \lambda E)$$

veya

$$H = \oplus \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \ker\left(A^* - \bar{\lambda} E\right).$$

Başka bir ifadeyle H' da kompakt normal operatörün öz vektörlerinden oluşan bir ortogonal baz (taban) vardır [62].

Tanım 37 (Saf Ayrık Spektrum): Eğer A lineer operatörünün özdeğerlerine uygun gelen özvektörlerin ortonormal sistemi H Hilbert uzayında kapalı ise, A lineer operatörüne *saf ayrık spektruma* sahiptir denir.

Tanım 38 (Spektral Yarıçap): A, bir H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı operatör olsun.

$$r_\sigma(A) := \sup\left\{ |\lambda| : \ \lambda \in \sigma(A) \right\}$$

reel sayısına A operatörünün *spektral yarı çapı* denir.

Teorem 8: Eğer A lineer sınırlı normal operatör ise, $r_\sigma(A) = \|A\|$, hatta $|\lambda| = \|A\|$ olacak şekilde $\lambda \in \sigma(A)$ elemanı mevcuttur [62].

Tanım 39 (Nümerik Bölge ve Nümerik Yarıçap): A, H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı operatörü için $W(A) := \left\{ (Ax, x) : \ \|x\| = 1 \right\} \subseteq \mathbb{C}$ altkümesine A'nın *nümerik bölgesi* denir.

$$w(A) := \sup\left\{ |\lambda| : \ \lambda \in W(A) \right\}$$

sayısına A'nın *nümerik yarıçapı* denir.

Tanım 40 (s-sayıları): A, H Hilbert uzayında kompakt lineer operatör olsun. A^*A ve $|A| = \left(A^*A\right)^{1/2}$ operatörleri negatif olmayan ve kompakt operatörlerdir. Dolayısıyla $|A|$' nın $\lambda_n(|A|)$ öz değerleri negatif değildir ve $n \to \infty$ iken monoton olarak $\lambda_n(|A|) \to 0$. Bu sayılara A operatörünün s*-sayıları* denir ve $s_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ ile gösterilir.

Tanım 41 (Schatten-von Neumann Sınıfı): Operatörlerin aşağıdaki sınıflarını göz önüne alalım.

$$\mathfrak{S}_p := \left\{ A : A \in \mathfrak{S}_\infty, \ \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty, \ p > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan sınıfa *Schatten-von Neumann Sınıfı* denir. Bu sınıf için norm,

$$\|A\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm aşağıdaki özeliklere sahiptir.

(i) $\|A\|_p = \|A^*\|_p$, $\left(A \in \mathfrak{S}_p\right)$;

(ii) $\|AB\|_p \le \|A\|_p \|B\|,\ \|BA\|_p \le \|A\|_p \|B\|,\ \left(A \in \mathfrak{S}_p,\ B \in L(H)\right).$

Eğer B operatörü üniter ise, o zaman

$\|AB\|_p = \|BA\|_p = \|A\|_p.$

Tanım 42 (Yaklaşık Düzgün Değer): $A: D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına *yaklaşık düzgün değer* denir, eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $x \in D(A)$ elemanı vardır öyle ki,

$$\|(A - \lambda E)x\|_H < \varepsilon \|x\|_H.$$

Yaklaşık düzgün değerlerinin kümesini $\pi(A)$ notasyonuyla gösterilir.

Teorem 9: $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı A operatörünün bir yaklaşık düzgün değeri olması için gerek ve yeterli koşul $A - \lambda E$ operatörünün sınırlı tersinin olmamasıdır [62].

Sonuç 1: A lineer operatörü için,

$$\pi(A) \subset \sigma(A)$$

kapsama bağıntısı doğrudur.

Teorem 10: Eğer A lineer normal operatör ise, $\pi(A) = \sigma(A)$ [62].

Teorem 11 (Spektral Ayrılış Teoremi): $A: D(A) \subset H \to H$ operatörü H kompleks Hilbert uzayında özeşlenik operatör olsun. Bu takdirde,

i) $\lambda_1 \le \lambda_2$ için $E(\lambda_1) \le E(\lambda_2)$;

ii) Her $\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0$ için $E(\lambda + \varepsilon) \xrightarrow{s} E(\lambda)$ güçlü yakınsak;

iii) $\lambda \to -\infty$ için $E(\lambda) \xrightarrow{s} 0$ ve $\lambda \to +\infty$ için $E(\lambda) \xrightarrow{s} E$ (birim operatör)

iv) A operatörünün komutatif olduğu tüm operatörler ile her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E(\lambda)$ komutatiftir;

koşullarını sağlayan bir ortogonal $(E(\lambda))$ ailesi vardır öyle ki

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda) \text{ ve } D(A)=\left\{x\in H : A=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda d\left\|E(\lambda)x\right\|^2<+\infty\right\}$$

tek bir şekilde yazılabilir [62].

Burada *i,ii* ve *iii* koşullarını sağlayan $(E(\lambda))$ ailesine *birimin ayrılışı* adı verilir.

Tanım 43 : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve A H Hilbert uzayında özeşlenik bir operatör için

$$D(f(A)):=\left\{x\in H : \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\lambda)\right|^2 d(E_\lambda x,x)<+\infty\right\}$$

(burada E_λ , A operatörü için birimin ayrılışıdır) kümesi üzerinde

$$f(A):=\int_{\mathbb{C}} f(\lambda)dE_\lambda x,\quad f(A):D(f(A))\subset H\to H$$

şeklinde tanımlanan operatöre A *operatörünün* f *fonksiyonu denir*.

Teorem 12: $A:D(A)\subset H\to H$ operatörü H kompleks Hilbert uzayında normal operatör ise,

$$A=f(B)$$

olacak şekilde ölçülebilir f fonksiyonu ve $B:D(A)\subset H\to H$ ve $B^*=B$ özeşlenik operatörü vardır [52].

Teorem 13 (Spektral Dönüşüm Teoremi) : A lineer özeşlenik operatör ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\sigma(f(A))=f(\sigma(A))$$

bağıntısı doğrudur [89].

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Bazı Lineer Normal Operatörlerin Ayrık Spektrumu

Bu bölümde $H(K)$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bazı A lineer kapalı operatörlerin ayrık spektrumunun içyapısını inceleyeceğiz. Burada A_R ve A_I verilen $A: H \to H$ operatörünün uygun olarak reel ve sanal kısımlarını gösterecektir, yani

$$A_R := \frac{1}{2}\overline{\left(A + A^*\right)},\ A_I := \frac{1}{2}\overline{\left(A - A^*\right)}.$$

İlk olarak aşağıdaki sonucun doğru olduğunu gösterelim.

Teorem 14: Eğer A, H Hilbert uzayında bir lineer normal operatör ise,

$$\sigma_p(A) = \sigma_p(A_R) \oplus i\sigma_p(A_I),$$

burada $\oplus$ sembolü özel bir kartezyen çarpımı gösterir öyle ki bu çarpım

$$H_{\lambda_r}(A_R) \cap H_{\lambda_i}(A_I) \neq \{0\}$$

koşulunu sağlayan $\lambda_r \in \sigma_p(A_R)$ ve $\lambda_i \in \sigma_p(A_I)$ reel sayıları üzerinden alınmaktadır. Ayrıca, eğer $\sigma_p(A_R)$ ve $\sigma_p(A_I)$ kümelerinden en az biri boş küme ise $\sigma_p(A)$ boştur ve terside doğrudur.

İspat: İlk önce A H' da bir lineer normal operatör ise, her $z \in \mathbb{C}$ sayısı için $A + zE : D(A) \subset H \to H$ operatörünün de lineer normal olduğunu gösterelim. Gerçekten $A_R + z_r E$ ve $A_I + z_i E$ operatörleri $A + zE$ operatörünün uygun olarak reel ve sanal kısımlarıdır. Çünkü

$$\begin{aligned}(A+zE)_R &= \frac{1}{2}\overline{\left((A+zE)+(A+zE)^*\right)} = \frac{1}{2}\left((A+zE)+A^*+\bar{z}E\right)\\ &= \frac{1}{2}\overline{\left((A+A^*)+(z+\bar{z})E\right)} = \frac{1}{2}\overline{\left((A+A^*)+2z_r E\right)}\\ &= A_R + z_r E\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}(A+zE)_I &= \frac{1}{2}\overline{\left((A+zE)-(A+zE)^*\right)} = \frac{1}{2}\left((A+zE)-\left(A^*+\bar{z}E\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\overline{\left(\left(A-A^*\right)+\left(z-\bar{z}\right)E\right)} = \frac{1}{2}\overline{\left(\left(A-A^*\right)+2z_\imath E\right)} \\ &= A_I + z_i E\end{aligned}$$

dır. Öte yandan,

$$\begin{aligned}(A_R+z_rE)(A_I+z_iE) &= A_RA_I + z_iA_R + z_rA_I + z_rz_iE = A_IA_R + z_rA_I + z_iA_R + z_rz_iE \\ &= A_I\left(A_R+z_rE\right) + z_i\left(A_R+z_rE\right) = \left(A_I+z_iE\right)\left(A_R+z_rE\right)\end{aligned}$$

olup, yani $A+zE$ operatörünün reel ve sanal kısımları komutatiftir. Böylece her $z\in\mathbb{C}$ için $A+zE : D(A)\subset H\to H$ bir lineer normal operatördür. Bu durumda her $A:D(A)\subset H\to H$ lineer normal operatörü için doğru olan

$$\|Ax\|_H^2 = \|A_Rx\|_H^2 + \|A_Ix\|_H^2,\ x\in D(A)$$

bağıntısından her $z\in\mathbb{C}$ ve her $x\in D(A)$ için

$$\|(A-zE)x\|_H^2 = \|(A_R-z_rE)x\|_H^2 + \|(A_I-z_iE)x\|_H^2 \tag{1}$$

bulunur.

Şimdi $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i\in\sigma_p(A)$ ve $x_\lambda\in H_\lambda(A)$ olduğunu varsayalım. Bu halde (1) eşitliğinden $A_Rx_\lambda=\lambda_rx_\lambda$ ve $A_ix_\lambda=\lambda_ix_\lambda$, $x_\lambda\in H_\lambda(A)$, olduğu elde edilir ki bu sonuncu $\lambda_r\in\sigma_p(A_R), \lambda_i\in\sigma_p(A_I)$ ve $x_\lambda\in H_\lambda(A_R)\cap H_\lambda(A_I)$ olması anlamına gelir.

Tersine $\lambda_r\in\sigma_p(A_R), \lambda_i\in\sigma_p(A_I)$ ve $x\in H_{\lambda_r}(A_R)\cap H_{\lambda_i}(A_I)$, $x\neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu halde (1) eşitliğinden $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i\in\sigma_p(A)$ ve $x\in H_\lambda(A)$ olduğu bulunur.□

Şimdi birkaç örnek verelim.

Örnek 9: $H=L^2(0,1)$, $A_R=E,\ A_I=-i\dfrac{d}{dt}$, $D(A_I)=\overset{0\ \ 1}{W}{}_2, D(A_R)=L^2(0,1)$ olsun. Bu halde $A_R^*=A_R,\ A_I^*=A_I$ olup

$$A=\frac{d}{dt}+E=E+i\left(-i\frac{d}{dt}\right)$$

operatörünün normal olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\sigma\left(A_R\right)=\sigma_p\left(A_R\right)=\{1\} \text{ ve } H_1\left(A_R\right)=H=L^2\left(0,1\right)$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi $\sigma_p\left(A_I\right)\subset\mathbb{R}$ kümesini belirleyelim. Bir $\lambda\in\mathbb{R}$ için $A_I u=-iu'\left(t\right)=\lambda u$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $u\left(t\right)=e^{i\lambda t}c,\ c=sabit\in\mathbb{C}$ olup $u\left(0\right)=u\left(1\right)=0$ koşullarından $c\left(1-e^{i\lambda}\right)=0$ bulunur. $\lambda\in\sigma_p\left(A_I\right)$ olması için gerekli ve yeterli şart $c\neq 0$, $e^{i\lambda}=1,\ \lambda\in\mathbb{C}$ koşullarını sağlamasıyla mümkündür. Böylece $\lambda_n=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$ olup

$$H_{\lambda_n}\left(A_I\right)=H_{2n\pi}\left(A_I\right)=\overline{span\left\{e^{2n\pi it},n\in\mathbb{Z}\ ve\ 0\leq t\leq 1\right\}}$$

dır. Bu durumda Teorem 14‘ e göre A operatörünün ayrık spektrumu

$$\sigma_p\left(A\right)=\sigma_p\left(A_R\right)\dotplus i\sigma_p\left(A_I\right)=\left\{1+2n\pi i:n\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 10: $H=l^2\left(\mathbb{C}\right)$ ve $A:l^2\left(\mathbb{C}\right)\to l^2\left(\mathbb{C}\right)$, her $x=\left(x_n\right)$ için $Ax=\left\{x_1,ix_2,x_3,ix_4,x_5,\ldots\right\}$ olsun. $\sigma_p\left(A\right)$ kümesini belirleyelim. Bu durumda $x=\left(x_n\right)\in l^2\left(\mathbb{C}\right)$ için

$$Ax=\left\{x_1,0,x_3,0,x_5,\ldots\right\}+\left\{0,ix_2,0,ix_4,0,ix_6,\ldots\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi $A_R,A_I:l^2\left(\mathbb{C}\right)\to l^2\left(\mathbb{C}\right)$,

$$A_R x:=\left\{x_1,0,x_3,0,x_5,0,\ldots\right\} \text{ ve } A_R x:=\left\{0,x_2,0,x_4,0,x_6,\ldots\right\}$$

operatörlerinin sınırlı ve özeşlenik olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $x=\left(x_n\right)\in l^2\left(\mathbb{C}\right)$ için

$$\left\|Ax\right\|_{l^2}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_{2k-1}\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left|ix_{2k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|x\right\|_{l^2},$$

yani A operatörü $l^2\left(\mathbb{C}\right)$ uzayında bir sınırlı operatördür. Bu halde $A^*:l^2\left(\mathbb{C}\right)\to l^2\left(\mathbb{C}\right)$ operatörü de sınırlı olup

$$A_R:=\frac{1}{2}\left(A+A^*\right),\ A_I:=\frac{1}{2}\left(A-A^*\right):l^2\left(\mathbb{C}\right)\to l^2\left(\mathbb{C}\right)$$

operatörleri sınırlıdırlar ve hatta $\left\|A_R\right\|\leq 1$ ve $\left\|A_I\right\|\leq 1$ dır. Ayrıca her $x,y\in l^2\left(\mathbb{C}\right)$ için

$$\left(A_R x, y\right)_{l^2} = \left(\left(x_1, 0, x_3, 0, \ldots\right), \left(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\right)\right)_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1}\overline{y}_{2n-1}$$
$$= \left(\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\right), \left(y_1, 0, y_3, 0, \ldots\right)\right)_{l^2} = \left(x, A_R^* y\right)_{l^2},$$

burada $A_R^* y = \left(y_1, 0, y_3, 0, \ldots\right)$, $y \in l^2\left(\mathbb{C}\right)$, olduğundan $A_R = A_R^*$. Benzer şekilde her $x, y \in l^2\left(\mathbb{C}\right)$ için,

$$\left(A_I x, y\right)_{l^2} = \left(\left(0, x_2, 0, x_4, \ldots\right), \left(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\right)\right)_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}\overline{y}_{2n}$$
$$= \left(\left(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\right), \left(0, y_2, 0, y_4, \ldots\right)\right)_{l^2} = \left(x, A_I^* y\right)_{l^2},$$

olup $A_I^* y = \left(0, y_2, 0, y_4, 0, \ldots\right)$, $y \in l^2\left(\mathbb{C}\right)$, yani $A_I = A_I^*$ dır.

Şimdi $l^2\left(\mathbb{C}\right)$ uzayında A_R ve A_I özeşlenik operatörlerinin komutatif olduğunu gösterelim. Gerçekten, her $x \in l^2\left(\mathbb{C}\right)$ için

$$A_R A_I x = A_R\left(0, x_2, 0, x_4, \ldots\right) = \left(0, 0, 0, \ldots\right) = 0$$

ve benzer şekilde,

$$A_I A_R x = A_R\left(x_1, 0, x_3, 0, \ldots\right) = \left(0, 0, 0, \ldots\right) = 0$$

olup $A_R A_I = A_I A_R$ dır. Dolayısıyla $A = A_R + iA_I$, $l^2\left(\mathbb{C}\right)$ uzayında bir normal operatörüdür. Öte yandan $A_R^2 = A_R$ ve $A_I^2 = A_I$ koşuları sağlandığından $A_R, A_I : l^2\left(\mathbb{C}\right) \to l^2\left(\mathbb{C}\right)$ özeşlenik operatörleri birer izdüşüm operatörleri olup

$$\sigma\left(A_R\right) = \sigma_p\left(A_R\right) = \sigma\left(A_I\right) = \left\{0, 1\right\}.$$

Başka bir açıdan öz uzaylar (eigen space) için

$$H_0\left(A_R\right) = \overline{span\left\{\left(0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \ldots\right),\ x_2, x_4, x_6, \ldots \in \mathbb{C}\right\}},$$

$$H_1\left(A_R\right) = \overline{span\left\{\left(x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \ldots\right),\ x_1, x_3, x_5, \ldots \in \mathbb{C}\right\}},$$

$$H_0\left(A_I\right) = \overline{span\left\{\left(x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \ldots\right),\ x_1, x_3, x_5, \ldots \in \mathbb{C}\right\}},$$

$$H_1\left(A_I\right) = \overline{span\left\{\left(0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \ldots\right),\ x_2, x_4, x_6, \ldots \in \mathbb{C}\right\}}$$

olduğunu belirtelim. Görüldüğü gibi

$$H_0\left(A_R\right) = H_1\left(A_I\right) \neq \left\{0\right\},$$

$$H_1\left(A_R\right) = H_0\left(A_I\right) \neq \left\{0\right\}$$

ve böylece ayrık spektrum hakkındaki Teorem 14' e göre

$$\sigma_p(A)=\sigma_p(A_R)\oplus i\sigma_p(A_I)=\{0,1\}$$

bağıntısı doğrudur.

Şimdi hangi durumlarda Teorem 14' deki özel çarpımın kartezyen çarpıma dönüştüğü bazı durumları araştıralım.

Teorem 15: Eğer $A\in L(H)$ normal bir operatör ve $A_R, A_I \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ise,

$$\sigma_p(A)=\sigma_p(A_R)+i\sigma_p(A_I)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: İlk olarak

$$\sigma_p(A)\subset\sigma_p(A_R)+i\sigma_p(A_I)$$

kapsamanın her zaman doğru olduğunu belirtelim. Şimdi bu kapsamın tersinin de doğru olacağını gösterelim. A_R, A_I operatörleri özeşlenik ve kompakt olduklarından

$$\sigma_p(A_R)=\{\lambda_1^r,\lambda_2^r,\lambda_3^r,\ldots,\lambda_n^r,\ldots\},$$

$$\sigma_p(A_I)=\{\lambda_1^i,\lambda_2^i,\lambda_3^i,\ldots,\lambda_n^i,\ldots\}$$

olup ve ayrıca,

$$H=H_{\lambda_0^r}\oplus H_{\lambda_1^r}\oplus H_{\lambda_2^r}\oplus\ldots\oplus H_{\lambda_n^r}\oplus\ldots\ ,$$

$$H=H_{\lambda_0^i}\oplus H_{\lambda_1^i}\oplus H_{\lambda_2^i}\oplus\ldots\oplus H_{\lambda_n^i}\oplus\ldots\ ,$$

burada $H_{\lambda_0^r}:=KerA_R$ ve $H_{\lambda_0^i}:=KerA_I$ dır. Başka bir ifadeyle H' da kompakt özeşlenik operatörün özvektörlerinden oluşan bir ortogonal baz (taban) vardır (Hilbert-Schmidt Teoremi) [62]. Tutalım ki $\lambda_k^r\in\sigma(A_R)$, $k=0,1,2,\ldots$ olsun. Bu halde bir tek $k=0,1,2,\ldots$ için $\exists x_k^r\in H_{\lambda_k^r}(A_R)$, $x_k^r\neq 0$ öyle ki $A_R x_k^r=\lambda_k^r x_k^r$ dır. Diğer taraftan $x_k^r\in H$ olduğundan bir tek $m(k)=0,1,2,\ldots$ vardır öyle ki

$$x_k^r\in H_{\lambda_{m(k)}^i}(A_I).$$

Buradan,

$$A_I x_k^r=\lambda_{m(k)}^i x_k^r$$

olup, $x_k^r\neq 0$, $x_k^r\in H$ için

$$Ax_k^r = A_R x_k^r + iA_I x_k^r = \left(\lambda_k^r + i\lambda_{m(k)}^r\right)x_k^r$$

olduğundan

$$\lambda_k^r + i\lambda_{m(k)}^r \in \sigma_p\left(A\right),\ k = 0,1,2,\dots \qquad (2)$$

dır.

Şimdi tersini ele alalım. Varsayalım ki $\lambda_k^i \in \sigma_p\left(A_I\right),\ k = 0,1,2,\dots$ olsun. Bu halde bir tek $k = 0,1,2,\dots$ için

$$x_k^i \in H_{\lambda_k^i}\left(A_I\right),\ x_k^i \neq 0$$

vardır ve

$$A_I x_k^i = \lambda_k^i x_k^i .$$

Diğer yandan $x_k^i \in H$ olduğu için bir tek $l\left(k\right) = 0,1,2,\dots$ vardır öyle ki

$$x_k^i \in H_{\lambda_{l(k)}^r}\left(A_R\right)$$

dır. Buradan

$$A_R x_k^i = \lambda_{l(k)}^r x_k^i$$

olup $x_k^i \neq 0,\ x_k^i \in H$ için

$$Ax_k^i = A_R x_k^i + iA_I x_k^i = \left(\lambda_{l(k)}^i + i\lambda_k^i\right)x_k^i ,$$

dolayısıyla

$$\lambda_{l(k)}^i + i\lambda_k^i \in \sigma_p\left(A\right),\ k = 0,1,2,\dots \qquad (3)$$

olduğu bulunur. Böylece (2) ve (3) bağıntılarından

$$\sigma_p\left(A_R\right) + i\sigma_p\left(A_I\right) \subset \sigma_p\left(A\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\sigma_p\left(A\right) = \sigma_p\left(A_R\right) + i\sigma_p\left(A_I\right). \ \square$$

Özel durumda Teorem 15 ‘den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2: Eğer $\dim H < \infty$, $A \in L\left(H\right)$ normal operatör ise,

$$\sigma_p\left(A\right) = \sigma_p\left(A_R\right) + i\sigma_p\left(A_I\right)$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 3: Eğer $A \in L(H)$ normal kompakt bir operatör ise,

$$\sigma_p(A) = \sigma_p(A_R) + i\sigma_p(A_I)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Gerçekten, eğer $A \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ise, $A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ olup $A \pm A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ [21] olacağından

$$A_R = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right) \in \mathfrak{S}_\infty(H) \text{ ve}$$

$$A_I = \frac{1}{2i}\left(A - A^*\right) \in \mathfrak{S}_\infty(H)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ve Teorem 15' den bu sonucun iddiası doğrudur.□

Teorem 15 'i aşağıdaki gibi genişletilebilir.

Teorem 16: Eğer A, H Hilbert uzayında bir lineer normal operatör ve A_R , A_I operatörleri saf ayrık spektruma sahipse,

$$\sigma_p(A) = \sigma_p(A_R) + i\sigma_p(A_I)$$

eşitliği doğrudur.

2.2. Lineer Hiponormal Operatörlerin Ayrık Spektrumu Hakkında

Burada bir önceki kesimde ispatlanan bazı sonuçları genelleştirmeye çalışacağız.

Teorem 17: Eğer A, H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı hiponormal operatör ve $T := A_R A_I - A_I A_R$ ise,

$$\sigma_p(A) = \sigma_p(A_R) \oplus i\sigma_p(A_I)$$

eşitliği doğrudur. Burada ''$\oplus$'' sembolü bir özel kartezyen çarpımı gösterip bu çarpım

$$H_{\lambda_r}(A_R) \cap H_{\lambda_i}(A_I) \cap Ker\, T \neq \{0\}$$

koşulunu sağlayan bütün $\lambda_r \in \sigma_p(A_R)$ ve $\lambda_i \in \sigma_p(A_I)$ sayıları üzerinden alınmaktadır.

Üstelik,

$$\dim H_\lambda\left(A\right)=\dim\left(H_{\lambda_r}\left(A_R\right)\cap H_{\lambda_i}\left(A_I\right)\cap Ker\,T\right)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: İlk önce herhangi bir $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i\in\mathbb{C}$ ve herhangi $x\in H$ için

$$\left\|\left(A-\lambda E\right)x\right\|^2=\left\|\left(A_R-\lambda_r E\right)x+\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right\|^2$$

$$=\left\|\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right\|^2+\left(\left(A_R-\lambda_r E\right)x,i\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right)+\left(i\left(A_I-\lambda_i E\right)x,\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right)+\left\|\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right\|^2$$

$$=\left\|\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right\|^2+\left\|\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right\|^2+i\left[\left(\left(A_I-\lambda_i E\right)x,\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right)-\left(\left(A_R-\lambda_r E\right)x,\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right)\right]$$

$$=\left\|\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right\|^2+i\left[\left(A_Ix,A_Rx\right)+\lambda_r\left(A_Ix,x\right)-\lambda_i\left(x,A_Rx\right)+\lambda_r\lambda_i\left(x,x\right)\right]$$

$$-i\left[\left(A_Rx,A_Ix\right)-\lambda_i\left(A_Rx,x\right)-\lambda_r\left(x,A_Ix\right)+\lambda_r\lambda_i\left(x,x\right)\right]+\left\|\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right\|^2$$

$$=\left\|\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right\|^2+\left\|\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right\|^2+i\left[\left(A_Ix,A_Rx\right)-\left(A_Rx,A_Ix\right)\right]$$

$$=\left\|\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right\|^2+\left\|\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right\|^2+i\left(\left(A_RA_I-A_IA_R\right)x,x\right)$$

doğruluğu bulunur. Eğer

$$T:=A_RA_I-A_IA_R$$

şeklinde tanımlarsak $T\in L\left(H\right)$ ve

$$T^*=A_IA_R-A_RA_I=-T$$

olup $T+T^*=0$ .Buradan

$$T_R=0 \text{ ve } T=iT_I$$

elde edilir. Böylece her $\lambda\in\mathbb{C}$ ve $\forall x\in H$ için

$$\left\|\left(A-\lambda E\right)x\right\|^2=\left\|\left(A_R-\lambda_r E\right)x\right\|^2+\left\|\left(A_I-\lambda_i E\right)x\right\|^2-\left(T_Ix,x\right) \tag{4}$$

olur.

Şimdi $x\in H$ elemanı için

$$\left(T_Ix,x\right)=\frac{1}{2i}\left[\left(Tx,x\right)-\left(T^*x,x\right)\right]=\frac{1}{2i}\left[\left(\left(A_RA_I-A_IA_R\right)x,x\right)-\left(x,\left(A_RA_I-A_IA_R\right)x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\left(A_Ix,A_Rx\right)-\left(A_Rx,A_Ix\right)-\left(A_Rx,A_Ix\right)+\left(A_Ix,A_Rx\right)\right]$$

$$=\frac{1}{i}\left[\left(A_I x, A_R x\right)-\left(A_R x, A_I x\right)\right] \tag{5}$$

doğrudur.

Ayrıca A operatörü hiponormal, yani her $x \in H$ için $\left\|A^* x\right\| \leq \|Ax\|$ olduğundan

$$\left(\left(A_R - iA_I\right)x, \left(A_R - iA_I\right)x\right) \leq \left(\left(A_R + iA_I\right)x, \left(A_R + iA_I\right)x\right)$$

olup

$$\left\|A_R x\right\|^2 + i\left(A_R x, A_I x\right) - i\left(A_I x, A_R x\right) + \left\|A_I x\right\|^2$$

$$\leq \left\|A_R x\right\|^2 - i\left(A_R x, A_I x\right) + i\left(A_I x, A_R x\right) + \left\|A_I x\right\|^2$$

ve buradan

$$i\left[\left(A_I x, A_R x\right) - \left(A_R x, A_I x\right)\right] \geq 0$$

bulunur. Bu ise

$$\frac{1}{i}\left[\left(A_I x, A_R x\right) - \left(A_R x, A_I x\right)\right] \leq 0$$

olup (5) bağıntısından her $x \in H$ için

$$\left(T^* x, x\right) \leq 0$$

elde edilir, yani $-T_I \geq 0$ sonucuna ulaşılır.

Şimdi varsayalım ki, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \sigma_p\left(A\right)$ olsun. Bu durumda (4) bağıntısından $\lambda_r \in \sigma_p\left(A_R\right)$, $\lambda_i \in \sigma_p\left(A_I\right)$ ve $x_\lambda \in Ker\,T_I = Ker\left(A_R A_I - A_I A_R\right)$.

Tersine, eğer bir $\lambda_r \in \sigma_p\left(A_R\right)$, $\lambda_i \in \sigma_p\left(A_I\right)$ ve $x_\lambda \in Ker\,T_I = Ker\left(A_R A_I - A_I A_R\right)$ ise,

$$\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \sigma_p\left(A\right)$$

elde edilir. □

Not 1: Sonuncu teoremde A operatörünü $A \in L\left(H\right)$ ve normal olarak alınırsa, bu durumda

$$Ker\,T = Ker\left(A_R A_I - A_I A_R\right) = H$$

olup iddia Teorem 14'ün iddiası ile çakışır.

Ayrıca (4) eşitliğinden aşağıdaki bazı sonuçlara ulaşılır.

Teorem 18: $A \in L(H)$, $\lambda \in \sigma(A)$ ve hiç olmazsa bir $x_\lambda \in H$, $x_\lambda \neq 0$, $x_\lambda \in H_\lambda(A)$ için $x_\lambda \in Ker\,T$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_r \in \sigma_p(A_R),\ \lambda_i \in \sigma_p(A_I) \text{ ve } x_\lambda \in H_{\lambda_r}(A_R) \cap H_{\lambda_i}(A_I).$$

İspat: Gerçekten, bu halde (4) eşitliğinden

$$(A_R - \lambda_r E)x_\lambda = 0 \text{ ve } (A_I - \lambda_i E)x_\lambda = 0$$

olup, yani

$$\lambda_r \in \sigma_p(A_R),\ \lambda_i \in \sigma_p(A_I) \text{ ve } x_\lambda \in H_{\lambda_r}(A_R) \cap H_{\lambda_i}(A_I)$$

olduğu bulunur.

Teorem 19: $A \in L(H)$, A hiponormal ve $Ker\,T = \{0\}$ ise,

$$\sigma_p(A) = \varnothing.$$

İspat: Eğer herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı için $\sigma_p(A)$ kümesinin elemanı olsaydı (4) eşitliğinden

$$((-T_I)x_\lambda, x_\lambda) = 0, x_\lambda \neq 0, x_\lambda \in H_\lambda(A)$$

bulunur. Ayrıca $-T_I \geq 0$ olduğundan sonuncu bağıntıdan

$$\left\|(-T_I)^{\frac{1}{2}} x_\lambda\right\| = 0.$$

Buradan

$$(-T)^{\frac{1}{2}} x_\lambda = 0,$$

olup

$$T_I x_\lambda = 0.$$

Yani $x_\lambda \neq 0$ için

$$x_\lambda \in Ker\,T = Ker\,T_I.$$

Bu ise hipotez ile çelişir. Böylece

$$\sigma_p(A) = \varnothing$$

olduğu ispatlanmış olur.

Örnek 11: $H = l^2(\mathbb{C})$ ve $A : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$, her $x = (x_n)$ için $Ax = \{0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ operatörünü ele alalım. A'nın lineer sınırlı bir operatör ve her $x = (x_n) \in l^2(\mathbb{C})$ için $A^* x = \{0, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ olduğu açıktır.

Şimdi A lineer operatörünün hiponormal fakat normal olmadığını ayrıca Teorem 17'yi gerçeklediğini gösterelim. $x = (x_n) \in l^2(\mathbb{C})$ keyfi alalım

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 = \|A^* x\|^2$$

eşitsizliğinin doğruluğundan her $x = (x_n) \in l^2(\mathbb{C})$ için $\|Ax\| \geq \|A^* x\|$ olduğu, yani A operatörünün hiponormalliği ve

$$AA^* x = A\{x_2, x_3, x_4, \ldots\} = \{0, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

$$A^* Ax = A^*\{0, x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

eşitliklerinden A'nın normal olmadığı bulunur. Ayrıca her $x = (x_n) \in l^2(\mathbb{C})$ için

$$A_R x = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right)x = \frac{1}{2}\left(0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \ldots\right)$$

$$A_I x = \frac{1}{2i}\left(A - A^*\right)x = \frac{1}{2i}\{0, x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \ldots\}$$

eşitlikleri doğru olup,

$$Tx = \left(A_R A_I - A_I A_R\right)x = \frac{1}{4i}\{0, x_1 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_5, \ldots\} - \frac{1}{4i}\{0, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \ldots\}$$

$$= \frac{1}{2i}\{0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

eşitliğinden $Ker\, T = \{0\}$ olduğu görülür. Ayrıca $\sigma_p(A) = \varnothing$ olduğu açıktır.

2.3. Lineer Normal Operatörlerin Spektrum Yapısı

Şimdi lineer normal operatörlerin spektrumu hakkında bir sonuç verelim.

Teorem 20: Eğer A, H Hilbert uzayında lineer normal bir operatör ise,

$$\sigma(A) \subset \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: $A = A_R + iA_I$, H Hilbert uzayında lineer normal operatör ve $\lambda \in \sigma(A)$ olsun. Bu halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\|(A - \lambda E)x_\varepsilon\| \le \varepsilon \|x_\varepsilon\|$$

koşulunu sağlayan bir $x_\varepsilon \in D(A)$, $x_\varepsilon \neq 0$ elemanı vardır [21].

Ayrıca A bir lineer operatör olduğundan

$$\|(A - \lambda E)x_\varepsilon\|^2 = \|(A_R - \lambda_r E)x_\varepsilon\|^2 + \|(A_I - \lambda_i E)x_\varepsilon\|^2 \le \varepsilon^2 \|x_\varepsilon\|^2$$

olduğu bulunur. Buradan

$$\|(A_R - \lambda_r E)x_\varepsilon\| \le \varepsilon \|x_\varepsilon\| \text{ ve } \|(A_I - \lambda_i E)x_\varepsilon\| \le \varepsilon \|x_\varepsilon\|$$

olur. Sonuncu bağıntıdan ve [21] den

$$\lambda_r \in \sigma(A_R) \text{ ve } \lambda_i \in \sigma(A_I)$$

olur. Böylece,

$$\sigma(A) \subset \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısının doğru olduğu elde edilir.□

Teorem 21: Eğer A, H Hilbert uzayında normal bir operatör ve $\rho(A_R) \neq \varnothing$ $\left(\rho(A_I) \neq \varnothing\right)$ ise,

$$\rho(A_R) + i\mathbb{R} \subset \rho(A) \quad \left(\mathbb{R} + i\rho(A_I) \subset \rho(A)\right)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Tutalım ki $\lambda_r \in \rho(A_R)$ olsun. Bu durumda $\lambda = \lambda_r + i\mu,\ \mu \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \left(A_R - \lambda_r E\right) + i\left(A_I - \mu E\right) \\ &= i\left(A_R - \lambda_r E\right)\left[\left(A_R - \lambda_r E\right)^{-1}\left(A_I - \mu E\right) - iE\right] \end{aligned} \tag{6}$$

ede edilir.

Şimdi $T := \left(A_R - \lambda_r E\right)^{-1}\left(A_I - \mu E\right)$, $\lambda_r \in \rho(A_R)$, $\mu \in \mathbb{R}$,operatörünün $T : D(T) = D(A_I) \subset H \to H$ kapalı olduğunu inceleyelim. Bunu daha genel durumda araştıralım. Tutalım ki M ve S H Hilbert uzayında iki lineer kapalı operatör ve $S^{-1} \in L(H)$ olsun. Bu halde $K := MS^{-1}$ operatörünün H'da lineer kapalı bir operatör olduğunu görelim.

$$(x_n) \subset D(K),\ x_n \xrightarrow{H} x,\ n \to \infty \text{ ve } Kx_n = MS^{-1}x_n \xrightarrow{H} y,\ n \to \infty$$

koşullarını sağlayan keyfi bir dizi olsun. $S^{-1} \in L(H)$ olduğundan

$$S^{-1}x_n \xrightarrow{H} S^{-1}x,\ n \to \infty$$

olduğu açıktır. Diğer yandan

$$S^{-1}x_n \xrightarrow{H} S^{-1}x,\ n \to \infty \text{ ve } M\left(S^{-1}x_n\right) \xrightarrow{H} y,\ n \to \infty$$

olduğu ve M 'nin H 'da kapalı olduğundan

$$S^{-1}x \in D(K) \text{ ve } y = MS^{-1}x$$

olduğu bulunur. Bu sonuncudan $x \in D\left(MS^{-1}\right)$, $y = MS^{-1}x$ bulunur. Dolayısıyla $K = MS^{-1}$ operatörü H 'da kapalıdır.

Şimdi T operatörünün H 'da simetrik olduğunu gösterelim. A_R ve A_I H 'da komutatif operatörler olduklarından her $\lambda := \lambda_r + i\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$A - \lambda E = (A_R - \lambda_r E) + i(A_I - \mu E)$$

operatörü H 'da normal olduğundan $(A_R - \lambda_r E)$ ve $(A_I - \mu E)$ operatörleri H 'da değişmelidirler, yani, $E_v(A_R), v \in \mathbb{R}$ ve $E_w(A_I), w \in \mathbb{R}$ operatörleri komutatiftirler. Öte yandan

$$(A_R - \lambda_r E)^{-1}(A_I - \mu E) \subset (A_I - \mu E)(A_R - \lambda_r E)^{-1}$$

bağıntısından

$$T^* = \left[(A_R - \lambda_r E)^{-1}(A_I - \mu E)\right]^* \supset (A_I - \mu E)^*\left[(A_R - \lambda_r E)^{-1}\right]^*$$
$$= (A_I - \mu E)(A_R - \lambda_r E)^{-1} \supset (A_R - \lambda_r E)^{-1}(A_I - \mu E) = T$$

bulunur, yani

$$T \subset T^*.$$

Böylece T operatörü H 'da simetrik ve kapalıdır.

Şimdi $T = (A_R - \lambda_r E)^{-1}(A_I - \mu E) : D(T) \to H$, $\lambda_r \in \rho(A_R)$, $\mu \in \mathbb{R}$ operatörünün H 'da özeşlenik olduğunu gösterelim. Bunun için T operatörünün defekt sayılarının $n_+(T) = n_-(T) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir [62]. İlk önce

$$T^*x \pm ix = (A_I - \mu E)(A_R - \lambda_r E)^{-1} x \pm ix = 0,\ x \in D\left(T^*\right)$$

denklemini ele alalım. Bu halde

$$(A_I-\mu E)(A_R-\lambda_r E)^{-1}x \pm i(A_R-\lambda_r E)(A_R-\lambda_r E)^{-1}x=0,\ x\in D(T^*)$$

olup bu sonuncudan

$$[(A_I-\mu E)\pm i(A_R-\lambda_r E)](A_R-\lambda_r E)^{-1}x=0$$

bulunur. Eğer $y:=(A_R-\lambda_r E)^{-1}x$, $x\in D(T^*)$ olarak tanımlanırsa,

$$(A_I-\mu E)y\pm i(A_R-\lambda_r E)y=0$$

denklemine ulaşılır. Ayrıca A, H'da normal operatör olduğundan

$$\|(A_I-\mu E)y\|^2+\|(A_R-\lambda_r E)y\|^2=0$$

olup

$$(A_I-\mu E)y=0 \text{ ve } (A_R-\lambda_r E)y=0$$

olduğu elde edilir. Öte yandan $\lambda_r\in\rho(A_R)$ olduğundan $(A_R-\lambda_r E)y=0$ denkleminden $y=0$ bulunur. Yani,

$$y=(A_R-\lambda_r E)^{-1}x=0.$$

Sonuncu eşitlikten

$$(A_R-\lambda_r E)(A_R-\lambda_r E)^{-1}x=(A_R-\lambda_r E)^{-1}0=0.$$

Böylece $T^*x\pm ix=0, x\in D(T^*)$ denkleminin ancak $x=0$ çözümü vardır. Neticede $n_+(T)=n_-(T)=0$ olduğu bulunur. Bu sonuncu ise $\lambda_r\in\rho(A_R)$ ve $\mu\in\mathbb{R}$ sayıları için T operatörünün H'da özeşlenik olduğunu [62] ispatlar. Öte yandan T özeşlenik olduğunda $\sigma(T)\in\mathbb{R}$, yani her $z:=z_r+iz_i\in\mathbb{C},\ z_i\neq 0$ T'nin bir regüler noktalarıdırlar. Buradan

$$(T-iE)^{-1}\in L(H)$$

olduğu ve (6) eşitliğinden $\lambda\in\rho(A)$ sonucuna ulaşılır.

Teoremin $\rho(A_I)\neq\varnothing$ durumu birinci durumun ispatına benzer şekilde verilebilir. □

Bu bölümün esas amacı H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer normal A operatörünün spektrumunun

$$\sigma(A)=\sigma(A_R)+i\sigma(A_I) \tag{7}$$

şeklinde yazılabileceği, bütün mümkün olan durumları incelemektir.

Spektrum için bu formül lineer normal operatörler için hatta bazı basit durumlarda bile doğru olmayabilir.

Örnek 12: B, H Hilbert uzayında lineer sınırlı özeşlenik bir operatör , $\pi, \frac{3\pi}{2} \in \sigma(B)$ ve $A := e^{iB} : H \to H$ olsun. Bu halde A, H 'da bir üniter operatör [62] olup

$$A = \cos B + i \sin B \quad \text{ve} \quad A_R = \cos B, A_I = \sin B : H \to H .$$

Spektral dönüşüm [89] teoremine göre

$$\sigma(\sin B) = \sin(\sigma(B)),$$
$$\sigma(\cos B) = \cos(\sigma(B))$$

ve

$$0 \in \sigma(\sin B)$$
$$0 \in \sigma(\cos B)$$

bağıntıları doğrudur. Fakat A operatörü H 'da bir üniter operatör olduğundan $0 \notin \sigma(A)$, yani $0 = 0 + i0 \notin \sigma(A)$. Böylece

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\sigma(A_I)$$

formülü hatta bu çok özel bir durumda bile sağlanmaz.

Örnek 13: X ve Y, $\mathbb{R}$ 'de boştan farklı iki kapalı küme $\Omega : X + iY$ ve $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ Ω 'da yoğun olan kompleks sayıların bir dizisi olsun. H bir ayrılabilir Hilbert uzayı, (e_n) H 'da ortonormal bir baz (taban) ve $A : D(A) \subset H \to H$, ve $Ae_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ olsun, yani A operatörü H 'da sonsuz köşegen bir normal operatör olsun. Bu halde

$$\sigma(A) = cl(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \equiv \overline{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}}$$

olup bu durumda $\sigma(A) = \Omega$ eşitliği doğrudur. Ayrıca A_R (uygun olarak A_I) H Hilbert köşegeninde $(\operatorname{Re}\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ ve $(\operatorname{Im}\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ sayılarıyla bir sonsuz köşegen operatör olup

$$\sigma(A_R) = X \qquad (\sigma(A_I) = Y)$$

olduğundan

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\sigma(A_I)$$

eşitliğinin doğru olduğu bulunur.

Örnek 14: X ve Y, $\mathbb{R}$ 'de bir noktadan ibaret olmayan sonlu veya sonsuz iki kapalı aralık olsun.

$$A : L^2\left(X+iY\right) \to L^2\left(X+iY\right), \quad Af\left(z\right) := zf\left(z\right)$$

$D\left(A\right) = \left\{ f \in L^2\left(X+iY\right) : \int_{\mathbb{C}} \left(1+\left|z\right|^2\right)\left|f\left(z\right)\right|^2 dz < \infty \right\}$ şeklinde tanımlanan operatör

$L^2\left(X+iY\right)$ uzayında normal bir operatör olup

$$\sigma\left(A\right) = X+iY .$$

Ayrıca $A_R f\left(z\right) = \operatorname{Re} zf\left(z\right)$, $A_I f\left(z\right) = \operatorname{Im} zf\left(z\right)$ olduğundan $\sigma\left(A_R\right) = X$ ve $\sigma\left(A_I\right) = Y$. Böylece

$$\sigma\left(A\right) = \sigma\left(A_R\right) + i\sigma\left(A_I\right)$$

eşitliği doğrudur.

Şimdi A operatörünün X ve Y sınırlı kapalı kümeleri üzerinde sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\left\|Af\left(z\right)\right\|^2 = \left\|zf\left(z\right)\right\|^2 = \left|z\right|^2 \left\|f\left(z\right)\right\|^2 \le M \left\|f\right\|^2, \quad M := \left[\sup_{\substack{x\in X \\ y\in Y}}\left(x^2+y^2\right)\right]^{1/2}$$

eşitsizliği doğru olup A operatörünün sınırlı olduğu elde edilir. Eğer X veya Y kümelerinden en az biri sınırsız ise, A operatörü sınırlı olamaz. Ayrıca,

$$Af = \left(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z\right) f\left(z\right)$$

$$A_R f = \operatorname{Re} z . f\left(z\right), \quad A_I f = \operatorname{Im} z . f\left(z\right)$$

olup A operatörünün normalliği açıktır.

Şimdi yukarıda spektrum için verilen (7) formülünün normal operatörler için doğru olup olmadığı sorusu üzerinde duralım.

Teorem 22: A, H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı normal operatör olsun. Eğer her $\lambda_r \in \sigma\left(A_R\right)$, her $\lambda_i \in \sigma\left(A_I\right)$ ve her $x \in H$ için

$$\left\|\left(A_R - \lambda_r E\right)x\right\| \le c\left\|\left(A_I - \lambda_i E\right)x\right\|$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti varsa,

$$\sigma\left(A\right) = \sigma\left(A_R\right) + i\sigma\left(A_I\right)$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Teorem 20'de $A \in L(H)$ normal operatörü için

$$\sigma(A) \subset \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısının doğruluğu ispatlanmıştır.

Şimdi keyfi $\lambda_r \in \sigma(A_R)$, $\lambda_i \in \sigma(A_I)$ sayılarını ve keyfi $\varepsilon > 0$ alalım. Bu halde $\lambda_i \in \sigma(A_I)$ olduğundan bu $\varepsilon > 0$ için

$$\left\|(A_I - \lambda_i E)x_\varepsilon\right\| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+c^2}}\|x_\varepsilon\| \tag{8}$$

koşulunu sağlayan ve $x_\varepsilon \neq 0,\ x_\varepsilon \in H$ olan bir eleman bulunabilir [21]. Bu durumda hipoteze göre

$$\begin{aligned}\left\|(A-\lambda E)x_\varepsilon\right\|^2 &= \left\|(A_R-\lambda_r E)x_\varepsilon\right\|^2 + \left\|(A_I-\lambda_i E)x_\varepsilon\right\|^2 \\ &\le \left(\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{c^2\varepsilon^2}{\sqrt{1+c^2}}\right)\left\|x_\varepsilon\right\|^2 = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1+c^2}}\left(1+c^2\right)\left\|x_\varepsilon\right\|^2 = \varepsilon^2\left\|x_\varepsilon\right\|^2\end{aligned} \tag{9}$$

olur. Böylece (8) ve (9) bağıntılarından keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\left\|(A-\lambda E)x_\varepsilon\right\| \le \varepsilon\|x_\varepsilon\|$$

koşulunu sağlayan bir $x_\varepsilon \neq 0,\ x_\varepsilon \in H$ bulunur. Buradan $\lambda \in \sigma(A)$ olur [21] .□

Not 2: Bu sonuncu teoremde verilen koşullar yerine her $\lambda_r \in \sigma(A_R)$, her $\lambda_i \in \sigma(A_I)$ ve her $x \in H$ için

$$\left\|(A_I - \lambda_i E)x\right\| \le c\left\|(A_R - \lambda_r E)x\right\|$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti var olduğu durumlarda da teoremin iddiası doğrudur.

Eğer A, bir ayrılabilir H Hilbert uzayında bir sınırlı normal operatör ise, $A = f(B)$ eşitliğini gerçekleyen bir sınırlı ölçülebilir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu ve bir lineer özeşlenik $B: D(A) \subset H \to H$ operatörü vardır. Bu sonuç saf ayrık spektrumlu operatörler için F. Riesz [80]tarafından irdelenmiş ve daha da genel durum da J. von Neumann [67] çalışmasında ele almıştır. Bu gösterim sınırsız normal operatörler için Y. Mimura [52] tarafından genelleştirilmiştir.

Teorem 23: A bir ayrılabilir H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı normal operatör, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon, $B^* = B \in L(H)$ ve $A = f(B)$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeterli koşul her $x, y \in \sigma(B)$ sayıları için

$$f_R(z) = f_R(x)$$

$$f_I(z) = f_I(y)$$

koşullarını sağlayan bir $z = z(x,y) \in \sigma(B)$ noktasının bulunmasıdır.

Spektrum için yukarıdaki formülün doğru kalması $A = f(B)$ gösteriminden bağımsızdır.

İspat: $A \in L(H)$ normal operatörü için Teorem 14'den

$$\sigma(A) \subset \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısının doğru olduğunu biliyoruz. Eşitlik için bu bağıntının tersi olan

$$\sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I) \subset \sigma(A)$$

bağıntısının doğruluğunu göstermek yeterlidir. Sonuncunun doğruluğu ise, spektral dönüşüm teoremi [89] gereğince

$$f_R(\sigma(B)) + i f_I(\sigma(B)) \subset f(\sigma(B))$$

bağıntısının doğruluğuna dektir. Bu sonuncu bağıntının doğru kalması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in \sigma(B)$ için

$$f_R(z) = f_R(x)$$

$$f_I(z) = f_I(y)$$

eşitliklerini sağlayan bir $z = z(x,y) \in \sigma(B)$ elemanının mevcut olmasıdır.

Şimdi $\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$ eşitliğinin doğruluğunun $A = f(B)$ gösteriminden bağımsız olduğunu gösterelim.

$f, h:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ iki sürekli fonksiyon, $B = B^* \in L(H), C = C^* \in L(H)$ ve $A = f(B)$ ve $A = h(C)$ olsun. İlk önce $A = f(B)$ durumunda bağıntısının doğruluğunu kabul edelim. Yani her $x, y \in \sigma(B)$ için

$$f_R(z) = f_R(x)$$

$$f_I(z) = f_I(y)$$

eşitliklerini sağlayan $z = z(x, y) \in \sigma(B)$ elemanının varlığını kabul edelim.

Şimdi keyfi iki $\alpha, \beta \in \sigma(C)$ noktalarını alalım. Ayrıca spektral dönüşüm teoreminden [89]

$\sigma(A) = f(\sigma(B))$ ve

$\sigma(A) = h(\sigma(C))$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda $h(\alpha), h(\beta) \in \sigma(A)$ olduğunda

$$h(\alpha) = f(x_\alpha)$$
$$h(\beta) = f(y_\beta)$$

koşullarını gerçekleştiren iki $x_\alpha, y_\beta \in \sigma(B)$ elemanları bulunur, yani

$$h(\alpha) = h_R(\alpha) + ih_I(\alpha) = f_R(x_\alpha) + if_I(x_\alpha) \tag{10}$$

$$h(\beta) = h_R(\beta) + ih_I(\beta) = f_R(y_\beta) + if_I(y_\beta). \tag{11}$$

Böylece, $\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$ doğruluğu ve $x_\alpha, y_\beta \in \sigma(B)$ olduğundan

$$f_R(x_\alpha) = f_R(z_{\alpha,\beta}),$$
$$f_I(y_\beta) = f_I(z_{\alpha,\beta})$$

eşitliklerini sağlayan bir $z_{\alpha,\beta} = z(x_\alpha, y_\beta) = z(\alpha, \beta) \in \sigma(B)$ elemanı mevcuttur.

Sonuç olarak (10) ve (11) bağıntılarından

$$\begin{aligned} h_R(\alpha) &= f_R(x_\alpha) = f_R(z_{\alpha,\beta}) \\ h_I(\beta) &= f_I(y_\beta) = f_I(z_{\alpha,\beta}) \end{aligned} \tag{12}$$

olup öte yandan bir $\gamma_{\alpha,\beta} \in \sigma(C)$ vardır, öyle ki

$$f(z_{\alpha,\beta}) = h(\gamma_{\alpha,\beta}).$$

Buradan

$$f_R(z_{\alpha,\beta}) = h_R(\gamma_{\alpha,\beta}),$$
$$f_I(z_{\alpha,\beta}) = h_I(\gamma_{\alpha,\beta})$$

olup sonuncular ve (12) bağıntısından her $\alpha, \beta \in \sigma(C)$ elemanları için

$$h_R(\alpha) = h_R(\gamma_{\alpha,\beta}),$$
$$h_I(\beta) = h_I(\gamma_{\alpha,\beta})$$

koşullarını sağlayan bir $\gamma = \gamma_{\alpha,\beta} \in \sigma(C)$ elemanı mevcuttur. Böylece verilen formülün gösteriminden bağımsız olduğu bulunur.□

Not 3: Eğer $f_R, f_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlardan hiç olmazsa biri $\sigma(B)$ üzerinde sabit ise, Teorem 23'un şartları sağlanır.

Örnek 15: $Af(t) = f(t) + i\int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds$, $k(t,s) := \begin{cases} t(1-s), & eğer\, 0 \le t \le s \le 1\ ise \\ s(1-t), & eğer\, 0 \le s \le t \le 1\ ise \end{cases}$

$A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ şeklinde tanımlanan bir operatör olsun. Kolaylıkla gösterilebilir ki

$Bf(t) := \int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds$, $B : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ için $B \in \mathfrak{S}_\infty(L^2[0,1])$ olup

$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \left\{ \frac{1}{\pi^2 n^2} \ :\ n \in \mathbb{N} \right\}$ ve $\lambda_n = \frac{1}{\pi^2 n} \in \sigma(B),\ n \in \mathbb{N},$ uygun öz vektörler

$f_n(t) = \sin(n\pi t),\ n \in \mathbb{N},\ 0 \le t \le 1,$ şeklindedir. Ayrıca bu durumda

$$A = E + iB\ ,\ Bf(t) := \int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds\ ,$$

şeklinde yazılabilip

$$A_R = E\ ,\ A_I = \int_0^1 k(t,s)\, ds = B$$

olduğundan

$$f_R(\lambda) = 1,\ \lambda \in \mathbb{R},$$
$$f_I(\lambda) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

şeklindedir. Bu durumda bir önceki teoremin koşulları sağlandığından

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısı doğrudur, yani

$$\sigma(A) = \left\{ 1 + i\frac{1}{n^2\pi^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bu örneği aşağıdaki gibi genelleştirmek mümkündür.

Örnek 16: H bir Hilbert uzayı, $A \in L(H)$ $A = E + iB,\ B^* = B \in L(H)$ ise, A operatörünün bir lineer sınırlı normal operatör olduğu açıktır. Operatörlerin spektral teorisinden

$$\sigma(A) = 1 + i\sigma(B),$$

yani $\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\sigma(A_I)$ olduğu bilinir [21]. Ayrıca bu durumda

$$f(\lambda) = 1 + i\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

yani, $f_R(\lambda) = 1,\ f_I(\lambda) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$

olup f_R ve f_I fonksiyonları bir önceki teoremin şartlarını sağladığından

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısının doğru olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 24: A, H Hilbert uzayında bir lineer normal operatör, $A : D(A) \subset H \to H$, $A = f(B), f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon, $B = B^* : D(B) \subset H \to H$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısının sağlanması için gerekli ve yeterli koşul sonlu veya sonsuz $\lim\limits_{n\to\infty} f_R(x_n)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} f_I(y_n)$ limitlerinin varlığını gerektiren her $(x_n),(y_n) \subset \sigma(B)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f_R(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_R(z_n)$$
$$\lim_{n\to\infty} f_I(y_n) = \lim_{n\to\infty} f_I(z_n)$$

koşullarını sağlayan bir $(z_n) = \left(z_n\left((x_n),(y_n)\right)\right) \subset \sigma(B)$ dizisinin varlığıdır.

İspat: Gerçekten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f \in C(\mathbb{R})$ ve

$$A = f(B) = f_R(B) + if_I(B)$$

olduğundan

$$\sigma(A) = \sigma(f(B)) = \overline{f(\sigma(B))}\ [89].$$

Bu durumda

$$\overline{f\left(\sigma\left(B\right)\right)} = \sigma\left(f_R\left(B\right)\right) + i\sigma\left(f_I\left(B\right)\right)$$

eşitliliğinin doğruluğunu inceleyelim. Daha da genelde

$$\overline{f\left(\sigma\left(B\right)\right)} = \overline{f_R\left(\sigma\left(B\right)\right)} + i\overline{f_I\left(\sigma\left(B\right)\right)} \tag{13}$$

eşitliğinin doğru olup-olmadığını araştıralım.

Bunu kısaca cevaplamak gerekirse, eşitliğin doğru kalması için gerekli ve yeterli koşul

$$\forall x \in \overline{f_R\left(\sigma\left(B\right)\right)},\ \forall y \in \overline{f_I\left(\sigma\left(B\right)\right)} \text{ için } x + iy \in \overline{f\left(\sigma\left(B\right)\right)}$$

olması ve tersine

$$\forall z \in \overline{f\left(\sigma\left(B\right)\right)} \text{ için } Re\, z \in \overline{f_R\left(\sigma\left(B\right)\right)},\ \dot{I}m\, z \in \overline{f_I\left(\sigma\left(B\right)\right)}$$

olmasıdır.

Şimdi (11) eşitliğini başka şekilde yazalım.

$$\left\{\lambda : \lim_{n\to\infty} f\left(\lambda_n\right) = \lambda, \lambda_n \in \sigma\left(B\right)\right\} = \left\{x : \lim_{n\to\infty} f_R\left(x_n\right) = x, x_n \in \sigma\left(B\right)\right\} + i\left\{y : \lim_{n\to\infty} f_I\left(y_n\right) = y, y_n \in \sigma\left(B\right)\right\}$$

Daha önce lineer normal (keyfi) operatörler için aşağıdaki şekilde

$$\sigma(A) \subset \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

sonucu ispatlanmıştır (Teorem 20). Bu durumda eşitlik için

$$\sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I) \subset \sigma(A)$$

bağıntısının ispatlanması yeterlidir. Yani,

$$\overline{f_R\left(\sigma\left(B\right)\right)} + i\overline{f_I\left(\sigma\left(B\right)\right)} \subset \overline{f\left(\sigma\left(B\right)\right)} \tag{14}$$

ispatlanması yeterlidir.

Sonuncu bağıntının sağlanması için ise,

$$\forall x \in \overline{f_R\left(\sigma\left(B\right)\right)} \text{ ve } \forall y \in \overline{f_I\left(\sigma\left(B\right)\right)} \text{ için } x + iy \in \overline{f\left(\sigma\left(B\right)\right)}$$

olmasıdır. Yani,

$$\left\{x : \lim_{n\to\infty} f_R\left(\lambda_n\right) = x, \lambda_n \in \sigma\left(B\right)\right\} + i\left\{y : \lim_{n\to\infty} f_I\left(\lambda_n\right) = y, \lambda_n \in \sigma\left(B\right)\right\} \in \overline{f\left(\sigma\left(B\right)\right)}.$$

Sonuncu bağıntının sağlanması için ise,

$$\forall x \in \sigma\left(A_R\right) \text{ ve } \forall y \in \sigma\left(A_I\right) \text{ için } \exists\left(\lambda_n\right) \subset \sigma\left(B\right),\ \lambda_n = \lambda_n\left(x, y\right) \text{ öyle ki } x + iy = \lim_{n\to\infty} f\left(\lambda_n\right)$$

bağıntısının sağlanması gerekli ve yeterli koşuldur. Daha da kesin (14) kapsama bağıntısının sağlanması ancak ve ancak

$$\lim_{n\to\infty} f_R(x_n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} f_I(y_n)$$

limitleri (sonlu veya sonsuz) olan her iki $(x_n), (y_n) \subset \sigma(B)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f_R(x_n) + i \lim_{n\to\infty} f_I(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

koşulunu sağlayan bir $(z_n) = (z_n((x_n),(y_n))) \subset \sigma(B)$ dizisinin varlığıdır.□

Bu teorem, başka bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 25: A, H Hilbert uzayında bir lineer normal operatör, $A: D(A) \subset H \to H$, $A = f(B), f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon, $B = B^*: D(B) \subset H \to H$ olsun. Bu durumda

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısının sağlanması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in \sigma(A_R)$ ve her $y \in \sigma(A_I)$ elemanları için

$$x = \lim_{n\to\infty} f_R(\lambda_n)$$
$$y = \lim_{n\to\infty} f_I(\lambda_n)$$

eşitliklerini sağlayan en az bir $(\lambda_n) \subset \sigma(B)$ dizisinin varlığıdır.

Sonuç 4: U, bir H Hilbert uzayında üniter bir operatör ve $U = e^{iC}$, $C = C^*: D(C) \subset H \to H$ ise,

$$\sigma(U) = \sigma(\cos C) + i\,\sigma(\sin C)$$

eşitliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in \sigma(C)$ için,

$$x + y = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \text{ veya } x - y = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

koşullarından birinin sağlanmasıdır.

İspat: İlk önce U üniter operatörü için

$$\sigma(U) = \sigma(\cos C) + i\,\sigma(\sin C)$$

bağıntısının sağlandığını kabul edelim. Ayrıca U üniter olduğundan H Hilbert uzayında tanımlanan bir C özeşlenik operatörü için

$$U = e^{iC}$$

eşitliği doğru olup [62] ,

$$U = \cos C + i \sin C$$

şeklinde yazılabilir. Burada C özeşlenik operatörü tek şekilde tanımlanması mümkün olmayabilir. Eğer bir $C = C^* : D(C) \subset H \to H$ operatörü $U = e^{iC}$ koşulunu sağlıyorsa, en azından

$$C + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

özeşlenik operatörleri de bu eşitliği sağlar. Gerçekten

$$e^{(C+2k\pi)i} = e^{iC} e^{2k\pi i} = e^{iC}\left(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi\right) = e^{iC} = U .$$

Öte yandan Teorem 23'e göre, her $x, y \in \sigma(C)$ için

$$U_R = \cos C,\ U_I = \sin C$$

olduğundan

$$\cos z = \cos x,$$
$$\sin z = \sin y$$

koşullarını sağlayan bir $z = z(x, y) \in \sigma(C)$ elemanı bulunabilir. Buradan $x, y \in \sigma(C)$ için

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1$$

eşitliği bulunur ki, bu sonuncudan

$$\cos 2x - \sin 2y = 0$$

elde edilir, yani her $x, y \in \sigma(C)$ için

$$\cos(x - y) - \sin(x + y) = 0$$

doğru olup

$$x + y = n\pi ,\ n \in \mathbb{Z}$$

veya

$$x - y = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi tersine, her $x, y \in \sigma(C)$ için

$$x + y = n\pi ,\ n \in \mathbb{Z}$$

veya

$$x - y = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

koşulları sağlansın.

Belirli olması için alınan $x, y \in \sigma(C)$ elemanları arasındaki bağıntının

$$x = y + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

olduğunu kabul edelim. Teorem 23’e göre

$$\sigma(U) = \sigma(U_R) + i\,\sigma(U_I)$$

bağıntısının sağlanması için bu durumda $x, y \in \sigma(C)$ için

$$\cos z = \cos x$$
$$\sin z = \sin(x - m\pi)$$

koşullarının gerçeklenmesi zorunludur. Yani,

$$\sin\frac{z - x + m\pi}{2}\sin\frac{z + x}{2} = 0$$
$$\sin\frac{z - x + m\pi}{2}\cos\frac{z + x - m\pi}{2} = 0$$

olup buradan,

$$z - x = 2p\pi \text{ veya } z + x = 2q\pi,\ p, q \in \mathbb{Z},$$

$$z - x + m\pi = 2l\pi \text{ veya } z + x - m\pi = (2r+1)\pi,\ l, r \in \mathbb{Z}$$

bulunur. Sonuncudan

$$z = \pm x + 2p^*\pi,\ p^* \in \mathbb{Z},$$

$$z = \pm y + q^*\pi,\ q^* \in \mathbb{Z}$$

olup

$$\pm x + 2p^*\pi = \pm y + q^*\pi,\ p^*, q^* \in \mathbb{Z},$$

yani,

$$\pm x \pm y = (q^* - 2p^*)\pi,\ p^*, q^* \in \mathbb{Z},$$

sonuçta

$$|x \pm y| = |q^* - 2p^*|\pi,\ p^*, q^* \in \mathbb{Z}$$

olduğu elde edilir. Böylece, her $x, y \in \sigma(C)$ için $x \pm y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sağlandığı durumda

$$\sigma(U) = \sigma(U_R) + i\,\sigma(U_I)$$

bağıntısının doğruluğuna ulaşılır.

Eğer alınan $x, y \in \sigma(C)$ için

$$x + y = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

eşitliğinin sağlanması durumunda iddia benzer şekilde ispatlanabilir. Ayrıca U operatörü için

$$\sigma(U) = \sigma(U_R) + i\,\sigma(U_I)$$

formülünün doğruluğu $U = e^{iC}$, $C = C^* : D(C) \subset H \to H$ gösteriminden bağımsız olduğu Teorem 23'den açıktır.□

Sonuç 5: Eğer bir $U : H \to H$, $U = e^{iC}$, $C = C^* :\ D(C) \subset H \to H$ üniter operatörü için

$$\sigma(U) = \sigma(\cos C) + i\,\sigma(\sin C)$$

eşitliği doğru ise,

$$\sigma(C) \subset \{\, x_1 + n\pi : n \in \mathbb{Z},\ x_1 \in \sigma(C) \text{ herhangi bir elemanı} \}$$
$$\cup \{ -x_2 + m\pi : m \in \mathbb{Z}, x_2 \in \sigma(C) \text{ herhangi bir elemanı} \}$$

bağıntısı doğrudur.

İspat: Bu halde $\sigma(U) = \sigma(\cos C) + i\,\sigma(\sin C)$ bağıntısı doğru olduğundan bir önceki sonuç 4'den her $x, y \in \sigma(C)$ için

$$x - y = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

veya

$$x + y = m\pi\ ,\ m \in \mathbb{Z}$$

koşullarından biri sağlanıyor. Şimdi $\sigma(C) \neq \varnothing$ olduğundan bir $x = x_0 \in \sigma(C)$ elemanını kabul edelim. Bu halde her $y \in \sigma(C)$ için

$$y = x_0 + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

veya

$$y = -x_0 + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

koşullarından biri sağlanır. Buradan sonuç açıktır.

Sonuç 6: Eğer bir $U = e^{iC}$, $C = C^* :\ D(C) \subset H \to H$ üniter operatörü için

$$\sigma(U) = \sigma(\cos C) + i\,\sigma(\sin C)$$

eşitliği doğru ise,

$$\sigma(C) = \sigma_p(C)$$

koşulu sağlanır.

İspat: Bir önceki sonuca göre söz konusu bağıntının sağlanması için

$$\sigma(C) \subset \{x_1 + n\pi : n \in \mathbb{Z},\ x_1 \in \sigma(C) \text{ herhangi bir elemanı}\}$$
$$\cup \{-x_2 + m\pi : m \in \mathbb{Z},\ x_2 \in \sigma(C) \text{ herhangi bir elemanı}\}$$

şeklindedir. Bu C özeşlenik operatörünün spektrum noktalarının ancak ayrık noktalardan oluştuğunu gösterir. Böylece özeşlenik operatörünün spektrumunun her ayrık noktası operatörün bir özdeğeri olduğundan sonuç açıktır.

Sonuç 7: Eğer bir $U : H \to H$, $U = e^{iC}$, $C = C^* : D(C) \subset H \to H$ üniter operatörü için

$$\sigma(U) = \sigma(\cos C) + i\,\sigma(\sin C)$$

bağıntısı doğru ise,

$$\sigma(U) = \sigma_p(U)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Bu durumda bir önceki sonuç 6'ya göre

$$\sigma(C) = \sigma_p(C)$$

olup

$$\sigma(U) = \{\cos\lambda + i\sin\mu : \lambda,\ \mu \in \sigma(C)\}$$

kümesi sayılabilir sayıda ayrık noktalardan oluşur. Her ayrık noktada U üniter operatörü için (U normal) onun bir özdeğer spektrum noktası olduğundan, böylece istenilen sonuç açıktır.

Sonuç 8: $U : H \to H$ bir üniter operatör ve $\sigma_c(U) \neq \varnothing$ ise,

$$\sigma(U) = \sigma(U_R) + i\,\sigma(U_I)$$

eşitliği sağlanmaz.

Teorem 26: Eğer A, H ayrılabilir Hilbert uzayında bir lineer sınırlı normal operatör, $A : H \to H$, $A = f(B)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon, $f_R^{-1}, f_I^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mevcut $B^* = B \in L(H)$ ve $card\,\sigma(B) > 1$ ise,

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

bağıntısı gerçekleşmez.

İspat: Bu bağıntının doğru olduğunu kabul edelim. Bu halde Teorem 23'e göre her $x,y\in\sigma(B)$ için

$$f_R(z)=f_R(x),$$
$$f_I(z)=f_I(y)$$

koşullarını sağlayan bir $z=z(x,y)\in\sigma(B)$ elemanı mevcuttur. Ayrıca teoremin koşullarına göre $f_R^{-1},f_I^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları mevcut olduğundan bir önceki bağıntıdan

$$z=x,\ z=y$$

yani $x=y$ olur. Öte yandan $card\,\sigma(B)>1$ olduğundan $x=y$ olamaz.

Not 4: Sonuncu sonuç her ne kadar $f_R,f_I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının terslerinin dilinde ifade edilmişse de aslında $f_R\big|_{\sigma(B)},f_I\big|_{\sigma(B)}:\sigma(B)\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının tersilerinin var olduğu durumlarda da doğrudur.□

Örnek 17: H bir Hilbert uzayı, $B^*=B\in L(H)$, $A=B^{2n-1}+iB^{2m-1}$, $n,m\geq 1$ ve $card\,\sigma(B)>1$ ise,

$$\sigma(A)=\sigma(B^{2n-1})+i\,\sigma(B^{2m-1})$$

eşitliği doğru olamaz. Çünkü bu halde

$$f_R(\lambda)=\lambda^{2n-1},\quad n\geq 1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$
$$f_I(\lambda)=\lambda^{2m-1},\quad m\geq 1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

olup f_R ve f_I fonksiyonlarının tersleri var olduğundan Teorem 26'e göre söz edilen eşitlik sağlanmaz. Özel durumda bu eşitlik

$$Af(t)=tf(t)+it^3f(t),\ A:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$$

operatörü için sağlanamaz. Çünkü bu durumda

$$H=L^2[0,1],\ A_Rf(t)=tf(t),\ A_If(t)=t^3f(t),\ f:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$$

$$Bf(t)=tf(t),\ B=B^*,\ \sigma(B)=[0,1],\ f_R(\lambda)=\lambda,\ f_I(\lambda)=\lambda^3,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

$$A_R=B,\ A_I=B^3$$

olup $f_R,f_I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının tersleri vardır.

Bu teoremi aşağıdaki şekilde daha da genelleştirmek mümkündür.

Teorem 27: A, H Hilbert uzayında bir lineer normal operatör, $A : D(A) \subset H \to H$, $A = f(B), f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon, $f_R^{-1}, f_I^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları mevcut, $B = B^* : D(B) \subset H \to H$ ve $card\,\sigma(B) > 1$ ise,

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

eşitliği sağlanamaz.

İspat: Bu bağıntının doğru olduğunu varsayalım. Bu halde Teorem 24'e göre sonlu veya sonsuz $\lim_{n\to\infty} f_R(x_n)$ ve $\lim_{n\to\infty} f_I(y_n)$ limitlerinin varlığını gerektiren keyfi $(x_n),(y_n) \subset \sigma(B)$ dizileri için

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_R(x_n) &= \lim_{n\to\infty} f_R(z_n) \\ \lim_{n\to\infty} f_I(y_n) &= \lim_{n\to\infty} f_I(z_n) \end{aligned} \tag{15}$$

koşullarını sağlayan bir $z_n = z(x_n, y_n) \subset \sigma(B)$ dizisi vardır. Bu halde

$$x_n^* = f_R(x_n),\ n \ge 1,$$
$$y_n^* = f_I(y_n),\ n \ge 1,$$

dizileri $\overline{\mathbb{R}}$ ' de yakınsak olduğundan ve $f_R^{-1}, f_R^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ foksiyonlarının sürekliliğinden

$$x_n = f_R^{-1}(x_n^*),\ n \ge 1,$$
$$y_n = f_I^{-1}(y_n^*),\ n \ge 1$$

$(x_n),(y_n) \subset \sigma(B)$ dizileri ($\sigma(B) \subset \mathbb{R}$ kapalı) $\sigma(B)$'de yakınsaktır. Sonuncular ve (15) bağıntısından

$$f_R^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} f_R(x_n)\right) = f_R^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} f_R(z_n)\right)$$
$$f_I^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} f_I(y_n)\right) = f_I^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} f_I(z_n)\right)$$

yani

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} z_n \\ \lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} z_n \end{aligned} \tag{16}$$

durumu gerçekleşmek zorundadır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} z_n\left(x_n, y_n\right),\ \left(z_n\right) \subset \sigma\left(B\right)$$

sonlu veya sonsuz limitinin var olduğu bulunur. Ayrıca $card\,\sigma\left(B\right) > 1$ olduğundan $\sigma\left(B\right)$'de alınan keyfi $\left(x_n\right)$ ve $\left(y_n\right)$ dizileri için (16) bağıntısı gerçekleşemez.

2.4. Bazı Uygulamalar

2.4.1. Normal Operatörlerin Normu, Spektral ve Nümerik Yarıçapları

Şimdi daha önce alınan sonuçların bazı uygulamalarını verelim. Bu kesimde bir H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer sınırlı normal operatörün normu, spektral yarıçapı ve nümerik yarıçapı operatörün reel ve sanal operatörlerinin uygun olarak normları, spektral yarıçapları ve nümerik yarıçapları dilinde ifade edilecektir.

Genelde bir $A \in L\left(H\right)$ normal operatör için

$$\left\|A\right\| = \left(\left\|A_R\right\|^2 + \left\|A_I\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği doğru olmayabilir. Örneğin $B^* = B \in L\left(H\right)$ ve $0, \frac{\pi}{2} \in \sigma\left(B\right)$ için spektral dönüşüm teoremine göre

$$0,1 \in \sigma\left(\cos B\right) \cap \sigma\left(\sin B\right).$$

Şimdi $U := \cos B + i \sin B \in L\left(H\right)$ operatörünü alalım.

$$UU^* = U^*U = E$$

yani, U bir üniter operatörüdür. Bu halde $\left\|U\right\| = 1$, yani U normal operatörünün normu 1'dir. Öte yandan,

$$\left\|U_R\right\| = \left\|\cos B\right\| = \max_{\lambda \in \sigma\left(\cos B\right)} \left|\lambda\right| = \max_{\lambda \in \sigma\left(B\right)} \left|\cos \lambda\right| = 1,$$

$$\left\|U_I\right\| = \left\|\sin B\right\| = \max_{\lambda \in \sigma\left(\sin B\right)} \left|\lambda\right| = \max_{\lambda \in \sigma\left(B\right)} \left|\sin \lambda\right| = 1$$

olup,

$$\|U\| = 1 \neq \left(\|U_R\|^2 + \|U_I\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\ .$$

Ama aşağıdaki şekilde bir sonuç doğrudur.

Teorem 28: Eğer $A \in L(H)$ normal bir operatör ve

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

ise,

$$\|A\| = \left(\|A_R\|^2 + \|A_I\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Bilindiği gibi [62]

$$\|A\| = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| = \max_{\substack{\lambda_r\in\sigma(A_R)\\ \lambda_i\in\sigma(A_I)}} \left[|\lambda_r|^2 + |\lambda_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\max_{\lambda_r\in\sigma(A_R)} |\lambda_r|^2 + \max_{\lambda_i\in\sigma(A_I)} |\lambda_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\|A_R\|^2 + \|A_I\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği doğruluğundan teoremin iddiası ispatlanmış olur.□

Eğer $A, B \in L(H)$ ise, spektral yarıçap için

$$r_\sigma(A+B) \le r_\sigma(A) + r_\sigma(B)$$

eşitsizliği doğrudur.

Teorem 29: Eğer $A \in L(H)$ normal operatör ve

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

ise,

$$r_\sigma^2(A) = r_\sigma^2(A_R) + r_\sigma^2(A_I)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Teorem 28'e göre bu koşullar altında

$$\|A\|^2 = \|A_R\|^2 + \|A_I\|^2$$

olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, eğer $A \in L(H)$ normal bir operatör ise,

$$\|A\| = r_\sigma(A) \text{ [36]}$$

sonucu doğru olup sonuncu eşitlikten

$$r_\sigma(A) = \|A\| = \left(\|A_R\|^2 + \|A_I\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(r_\sigma^2(A_R) + r_\sigma^2(A_I)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Eğer $A, B \in L(H)$ ise,

$$w(A+B) \le w(A) + w(B)$$

olduğu açıktır. Öte yandan, eğer $A \in L(H)$ normal bir operatör ise, $w(A) = \|A\|$ [31] olduğu bilinir.

Teorem 30: Eğer $A \in L(H)$ normal operatör ve

$$\sigma(A) = \sigma(A_R) + i\,\sigma(A_I)$$

ise,

$$w(A) = \left(w(A_R)^2 + w(A_I)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Bu durumda Teorem 28'e göre,

$$w(A) = \|A\| = \left(\|A_R\|^2 + \|A_I\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(w(A_R)^2 + w(A_I)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Böylece sonuç doğrudur.

Not 5: Eğer $A \in L(H)$ hiponormal operatör ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|A^n\| = \|A\|^n$ olduğundan yukarıda verilen Teorem 28–30 yinede A hiponormal operatörü için doğrudurlar [31].

2.4.2. Normal Operatörlerin Özdeğerlerinin Modüllerinin Asimptotu

Bu kesimde bir H Hilbert uzayında normal operatörün spektrumunun ayrıklığı ve onun özdeğerlerinin asimptotik davranışları incelenecektir.

Burada $\mathfrak{S}_p\left(H\right), p\geq 1$ ile bir H Hilbert uzayında lineer sınırlı operatörlerin Schatten-von Neumann sınıflarını göstereceğiz.

Teorem 31: H Hilbert uzayı ve $A: D\left(A\right)\subset H\to H$ bir normal operatör olsun. Eğer bir $\lambda_r^0\in\mathbb{R}$ için

$$R_{\lambda_r^0}\left(A_R\right)=\left(A_R-\lambda_r^0 E\right)^{-1}\in\mathfrak{S}_p(H)\,, p\geq 1$$

ise, keyfi $\lambda=\lambda_r^0+i\lambda_i\,, \lambda_i\in\mathbb{R}$ için

$$R_\lambda\left(A\right)=\left(A-\lambda E\right)^{-1}\in\mathfrak{S}_p(H)\,,\ p\geq 1.$$

Benzer şekilde eğer bir $\lambda_i^0\in\mathbb{R}$ için

$$R_\lambda\left(A_I\right)=\left(A_I-\lambda_i^0 E\right)^{-1}\in\mathfrak{S}_p\left(H\right), p\geq 1,$$

ise, her $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i^0\,, \lambda_r\in\mathbb{R}$ için

$$R_\lambda\left(A\right)=\left(A-\lambda E\right)^{-1}\in\mathfrak{S}_p(H)\,, p\geq 1.$$

İspat: Keyfi $\lambda=\lambda_r^0+i\lambda_i\,,\lambda_i\in\mathbb{R}$ alarak

$$A-\lambda E=\left(A_R-\lambda_r^0 E\right)+i\left(A_I-\lambda_i E\right)=i\left(A_R-\lambda_r^0 E\right)\left[\left(A_R-\lambda_r^0 E\right)^{-1}\left(A_I-\lambda_i E\right)-iE\right]$$

şeklinde yazalım. Teorem 21'in ispatında gösterildiği gibi $\left(A_R-\lambda_r^0 E\right)^{-1}\left(A_I-\lambda_i E\right)$ operatörü H Hilbert uzayında bir özeşlenik operatördür. Bu halde $i\in\mathbb{C}$ noktası için onun bir regüler nokta olup

$$\left[\left(A_R-\lambda_R E\right)^{-1}\left(A_I-\mu E\right)\right]^{-1}\in L\left(H\right).$$

Böylece,

$$\left(A-\lambda E\right)^{-1}=\left(-i\right)\left(A_R-\lambda_r^0 E\right)^{-1}\left[\left(A_R-\lambda_r^0 E\right)^{-1}\left(A_I-\lambda_i E\right)-iE\right]\in\mathfrak{S}_p\left(H\right),\ p\geq 1 \text{ [89].}$$

Benzer şekilde teoremin ikinci şıkkı ispatlanabilir.

Tanım 44: Eğer $\left(a_n\right)$ ve $\left(b_n\right)$ iki reel sayı dizisi ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

ise, bu durumda ‘ $a_n \sim b_n,\ n \to \infty$ ’ şeklinde göstereceğiz. Örneğin $n^2 + n\sin n \sim n^2, n \to \infty$ veya $n^3 + n^2 \arctan n \sim n^3, n \to \infty$.

Şimdi önemli bir sonucu verelim.

Teorem 32: Eğer $A : D(A) \subset H \to H$ Hilbert uzayında normal bir operatör,

$$A_R^{-1}, A_I^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H),\ \lambda_n(A_R) \sim an^\alpha, \lambda_n(A_I) \sim bn^\beta,\ 0 < a,b,\alpha,\beta < +\infty,\ n \to \infty \text{ ve}$$

$$\lambda_m(A) = \lambda_{p_m}(A_R) + i\lambda_{q_m}(A_I) \in \sigma_p(A),\ \ q_m = q_m(p_m),\ m \ge 1$$

öyle ki $\lambda_{p_m}(A_R) \sim cm^\gamma,\ \lambda_{q_m}(A_I) \sim dm^\sigma,\ \ 0 < c,d,\gamma,\sigma < +\infty,\ \ m \to \infty$ ise,

$$\lambda_m(A) \sim em^{\max(\gamma,\sigma)},\quad 0 < e < +\infty,\quad m \to \infty.$$

İspat: Teorem 31’e göre, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ olduğu açıktır. Öte yandan Teorem 14’e göre, A operatörünün özdeğerleri

$$\lambda_{k,l}(A) = \lambda_k(A_R) + i\lambda_l(A_I),\ \ k,l \ge 1,\ \text{ ve } l = l(k),$$

şeklindedir. Böylece

$$|\lambda_m(A)| = \left(\left|\lambda_{p_m}(A_R)\right|^2 + \left|\lambda_{q_m}(A_I)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(c^2m^{2\gamma} + d^2m^{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= m^{\max(\gamma,\sigma)}\left(c^2m^{2\gamma-2\max(\gamma,\sigma)} + d^2m^{2\sigma-2\max(\gamma,\sigma)}\right) \sim em^{\max(\gamma,\sigma)},\ \ 0 < e < +\infty, k \to \infty,$$

olup teoremin iddiası doğrudur. Fakat bu teoremde $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ operatörünün numaralandırılması ilgili duruma açıklık getirelim. $A : D(A) \subset H \to H$ bir normal kompakt operatör olduğundan A^{-1}’in özdeğerleri

$$0 \ge \left|\lambda_1\left(A^{-1}\right)\right| \ge \left|\lambda_2\left(A^{-1}\right)\right| \ge \left|\lambda_3\left(A^{-1}\right)\right\| \ge \dots$$

şeklinde sıralanabilip numaralandırılabilir, yani onun özdeğerlerinin numaralandırılabilmesi özdeğerlerinin modülü ve argumenti yardımıyla gerçekleştirilebilir. $\lambda_1(A) = \dfrac{1}{\lambda_1\left(A^{-1}\right)}$ sayısına $\sigma_p(A_R)$ ve $\sigma_p(A_I)$ ’den

$$\lambda_1(A) = \lambda_{p_1}(A_R) + i\lambda_{q_1}(A_I)$$

koşulunu sağlayan en az bir (p_1, q_1) çiftine karşılık gelir. Benzer şekilde $m = 2,3,4,\dots$ için

$$\lambda_m(A)=\lambda_{m_1}(A_R)+i\lambda_{m_1}(A_I)$$

koşullarını gerçekleyen en az bir (p_m,q_m) ikilisi bulunabilir. Fakat $m\to\infty$ iken $p_m\to\infty$ veya $q_m\to\infty$ olmak zorunda değildir. Ama teoremin koşulları arasında $m\to\infty$ iken $\left|\lambda_{p_m}(A_R)\right|\to\infty$ ve $\left|\lambda_{q_m}(A_I)\right|\to\infty$ olduğu garantilenmiştir.□

Örnek 18: A operatörünün reel ve sanal operatörleri

$$A_R u=-u'',\ u'(0)=u'(1)=0,$$

$$A_I u=iu',\ u(0)=u(1)$$

şeklinde olsun ve ilk olarak

$$A_R u=\lambda u,\ u'(0)=u'(1)=0$$

denklemini çözelim. $-u''=\lambda u$ denklemi için

$$k^2=-\lambda$$

olup $k_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ kökleri elde edilir. Böylece

$$u(t)=c_1e^{i\sqrt{\lambda}\,t}+c_2e^{-i\sqrt{\lambda}\,t}$$

dolayısıyla $u'(t)=c_1i\sqrt{\lambda}e^{i\sqrt{\lambda}\,t}-c_2i\sqrt{\lambda}e^{-i\sqrt{\lambda}\,t}$ olduğu bulunur. Buradan sınır değerleri yerine konulursa

$$i\sqrt{\lambda}\left(c_1-c_2\right)=0$$
$$i\sqrt{\lambda}\left(e^{i\sqrt{\lambda}}c_1-e^{-i\sqrt{\lambda}}c_2\right)=0$$

$c_1=c_2$ ve $\sqrt{\lambda}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, yani $\lambda_k=k^2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ olduğu bulunur. Böylece

$$u_k(t)=c\left(e^{2ki\pi t}-e^{-2ki\pi t}\right)=2ic\sin(2k\pi t),\ k\in\mathbb{N}.$$

Ayrıca $A_I u=iu',\ u(0)=u(1)$ ve $A_R u=-u'',\ u'(0)=u'(1)=0$ operatörlerinin özdeğer ve özvektörleri

$$\lambda_k^r=k^2\pi,\ u_k^r(t)=\sin(2k\pi t),\ k\in\mathbb{Z}\ \text{ve}$$

$$\lambda_n^i=2n\pi,\ u_n^i(t)=\begin{cases}\cos(2n\pi t)\\ \sin(2n\pi t)\end{cases},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Eğer $n=k\in\mathbb{N}$ olursa, $u_k^r(t)=u_n^i(t)$ olup ve böylece $A=A_R+iA_I$ operatörü için,

$$\lambda_n(A)=\lambda_n^r(A_R)+i\lambda_n^r(A_I),\ n\in\mathbb{N}\ \text{ve}$$

$$\lambda_n^r(A_R) \sim n^2\pi^2,\ n \to \infty,$$
$$\lambda_n^i(A_I) \sim 2n\pi,\ n \to \infty,$$

olup,

$$\left|\lambda_n(A)\right| = \sqrt{n^4\pi^4 + 4n^2\pi^2} = n\pi^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \sim n^2\pi,\ n \to \infty$$

olduğu bulunur.

Şimdi A operatörünün normal olduğunu gösterelim. Bu halde, her $u(t) \in D(A)$ için

$$\begin{aligned}\|Au\|^2 = \|u'' - u'\|^2 &= \|u''\|^2 - (u'',u') - (u',u'') + \|u'\|^2 \\ &= \|u''\|^2 - (u',u')' + \|u'\|^2 \\ &= \|u''\|^2 + \|u'\|^2 .\end{aligned}$$

Ayrıca, A^* operatörü için

$$\begin{aligned}\left\|A^*u\right\|^2 = \|u'' + u'\|^2 &= \|u''\|^2 + (u'',u') + (u',u'') + \|u'\|^2 \\ &= \|u''\|^2 + (u',u')' + \|u'\|^2 \\ &= \|u''\|^2 + \|u'\|^2 .\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\left\|A^*u\right\|^2 = \|Au\|^2,\ u(t) \in D(A).$$

Şimdi tutalım ki, $u(t) \in D(A)$ ise

$$A^*u = Au - 2u' \in L^2$$

yani, $u(t) \in D(A^*)$. Aksine, eğer $u(t) \in D(A^*)$ ise,

$$Au = A^*u + 2u' \in L^2$$

yani, $u(t) \in D(A)$. Böylece, $D(A) = D(A^*)$ olup A normal operatördür.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın sonuçları [38, 39] konferanslarında sunulmuş ve bildiri olarak basılmıştır. Bu araştırmalar çerçevesinde aşağıdakiler söylenebilir:

1. Bazı lineer normal ve normale yakın operatörlerin ayrık spektrumu, reel ve sanal kısımlarının spektrumlarının kartezyen çarpımı şeklinde gösterilebildiği durumlar incelenmiş ve kesin sonuçlara ulaşılmıştır (Teorem 14);
2. Lineer normal operatörlerin spektrum yapısı, reel ve sanal kısımlarının spektrum yapıları arasındaki bağlantı incelenmiş ve kesin sonuçlar elde edilmiştir. Özel durumda üniter operatörler için daha detaylı şekilde incelenmiştir;
3. Burada alınan sonuçların bazı uygulama alanları gösterilmiştir;
4. Bu çerçevede bazı lineer normal operatörlerin özdeğerlerinin sonsuzdaki asimptotik davranışı araştırılmıştır;
5. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

4. ÖNERİLER

1. Teorem 14,15,16,17,23 daha geniş lineer operatör sınıfları için araştırma konusu olabilir;
2. Teorem 23,24,25,26,27' de alınan sonuçlar daha geniş f fonksiyonları ve B operatörler sınıfları için araştırılabilir;
3. Tezde alınan sonuçların daha geniş uygulama alanları serbest inceleme araştırma konusu olabilir;
4. Teorem 31'da verilen normal operatörün reel ve sanal kısımlarının özdeğerlerinin sonsuza üstel, logaritmik v.s. şeklinde yaklaştığı durumda yeni bir inceleme konusu olarak bakılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Ahiezer (Achieser), N. I. ve Glazman (Glasmann), I. M., The theory of linear operators on Hilbert space, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moskova-Leningrad, 1950.

2. Altman (Al'tman), M. S , On linear functional equations in locally convex spaces, Studia Math. 13 (1953) 194-207.

3. Altman (Al'tman), M. S., The Fredholm theory of linear equations in locally convex topological spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. 2 (1954) 267-269.

4. Aronszajn, N., Approximation methods for eigenvalues of completely continuous symmetric operators, Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, (1951) 179-202, Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma.

5. Aronszajn, N., The Rayleigh-Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34 (1948) 474-480, 594-601.

6. Bade, W. G., Weak and strong limits of spectral operators, Pacific J. Math. 4 (1954) 393-413.

7. Bade, W. G., On Boolean algebras of projections and algebras of operators. Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955) 345-360.

8. Banach, S., Theorie des operations lineaires, Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932.

9. Banach, S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux Equations integrales, Fund. Math. 3 (1922) 133-181.

10. Carleman, T., Sur les equations integrales singulieres a noyau reel et symetrique, Almquist ve Wiksells, Uppsala, 1923.

11. Chiang, T. P., A theorem on the normalcy of completely continuous operators, Acta Sci. Math. Szeged. 14 (1952) 188-196.

12. Christian, R. R., On integration with respect to a finitely additive measure whose values lie in a Dedekind complete partially ordered vector space, Dissert., Yale Univ. 1954.

13. Coddington, E.A., Extension theory of formally normal and symmetric subspaces, Mem. Amer. Math. Soc. 134 (1973) 1-80.

14. Collatz, L., Eigenwertprobleme und ihre numeruche Behandlung. Akademischer Verlag, Leipzig, 1945. Reprinted Chelsea Pub. Co., New York, 1948.

15. Cooke, R. G., Linear operators, Macmillan, London, 1953.

16. Cooper, J. L. B., The spectral analysis of self-adjoint operators, Quart, J. Math. (Oxford), 16 (1945) 31-48.

17. Cooper, J. L. B., Symmetric operators in Hilbert space, Proc. London Math. Soc. (2) 50 (1948) 11-55.

18. Davis, R. H., Singular normal differential operators, Tech. Rep., Dep. Math., Calif. Univ., 10 (1955).

19. Dieudonne, J. ve Schwartz, L., La dualite dans les espaces (F) et (LF), Ann. Inst. Fourier, Grenolbe 1 (1950) 61-101.

20. Dunfort, N., Spectral theory I, Convergence to projections, Trans, Amer. Math. Soc. 54 (1943) 185-217.

21. Dunford,N. ve Schwartz, J. T., Linear operators, I, II, Interscience publishers, New York, London, 1958, 1963.

22. Eberlein, W. F., A note on the spectral theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 328-331.

23. Esser, M., Analyticity in Hitbert space and self-adjoint transformations, Amer. J. Math. 69 (1947) 825-835.

24. Fredholm, I., Sur une classe d'equations fonctionnelles, Acta Math. 27 (1903) 365-390.

25. Friedrichs, K. O., Beitrage zur Theorie der Spektralschar, Math. Ann. 110 (1935) 54-62.

26. Fuglede, B., A commutativity theorem for normal operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950) 35-40.

27. Halmos, P. R., Commutativity and spectral properties of normal operators, Acta Sci. Math. Szeged 12 Pars B (1950) 153-156.

28. Halmos, P.R., Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

29. Halmos, P.R., Spectra and spectral manifolds, Ann. Soc. Polon. Math. 25 (1952) 43-49.

30. Halmos, P.R., Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

31. Halmos, P.R., A Hilbert space problem book, Springer, New York, 1974.

32. Hellinger, E., Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veranderlichen, J. Reine Angew. Math. 136 (1909) 210-271.

33. Hellinger, E. ve Toeplitz, O., Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften II C13 (1928) 1335-1616.

34. Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, I-VI. Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. Math.-Phys. KL, I (1904) 49-91, II (1905)213-259, III (1905) 307-338, IV (1906) 157-227.

35. Hildebrandt, T. H., Über vollstetige lineare Transformationen, Acta Math, 51 (1928) 311-318.

36. Hirsch, F. ve Lacombe. G., Elements of functional analysis , Springer-Verlag, New York, 1999.

37. Hyers, D. H., Locally bounded linear topological spaces, Revista Ci., Lima 41 (1939) 555-574.

38. İsmayılov, Z. ve Erol, M., Spektra of Some Operstors, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 17-19 Mayıs 2006, Baku, page 81.

39. İsmayılov, Z. ve Erol, M., Normal operatörlerin spektrumu, XIX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Kütahya, Dumlupınar Üniversitesi, 22-25 Ağustos 2006.

40. Kaplansky, I., Products of normal operators, Duke Math, J. 20 (1953) 257-260.

41. Kilpi, Y., Über lineare normale transformationen in Hilbertschen Raum, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., AI (1953) 154.

42. Kodaira, K., On some fundamental theorems in the theory of operators in Hilbert space, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 15 (1939) 207-210.

43. Koopman, B. O. ve Doob, J. L., On analytic functions with positive imaginary parts, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934) 601-605.

44. Lengyel, B. A., On the spectral theorem of self-adjoint operators, Acta Sci. Math. Szeged 9 (1939) 174-186.

45. Lengyel, B. A. ve Stone, M. H., Elementary proof of the spectral theorem, Ann. of Math. 2, 37 (1936) 853-864.

46. Leray, J., Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme completement continu d'un espace vectoriel a voisinages convexes, Acta Sci. Math. Szeged 12 Pars B (1950) 177-186.

47. Loomis, L. H., An introduction to abstract harmonic analysis, D. van Nostrand Co., New York, 1953.

48. Lorch, E. R., Return to the self-adjoint transformation, Acta Sci. Math, Szeged 12 Pars B, (1950) 137-144.

49. MacDuffee, C. C., The theory of matrices, Ergebnisse der Math, und ihrer Grenzgebiete, Berlin, 2 (1933).

50. Marinescu, G., Operations relativement completement continues, Acad. Repub. Pop. Romane. Stud. Cere. Mat. 2 (1951) 107-194.

51. McShane, E. J., Order-preserving maps and integration processes, Ann. of Math. Studies, no. 31, Princeton Univ. Press, 1953.

52. Mimura, Y., Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum, Jap. J. Math. 13(1936) 119-128.

53. Moore, E. H., Introduction to a form of general analysis, The New Haven Math. Colloquium of the Amer. Math, Soc. 1906.

54. Moore, E. H., General analysis, I, II, Mem. Amer. Philos. Soc. Philadelphia, 1935, 1939.

55. Musayev, B. ve Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Kütahya, 2000.

56. Nagumo, M., Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, Jap. J. Math. 13 (1936) 61-80.

57. Nakano, H., Zur Eigenwerttheorie normaler Operatoren, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 21 (1939) 315-339.

58. Nakano, H., Unitarinvarianten in allgemeinen Euklidischen Raum, Math. Ann. 118 (1941) 112-133.

59. Nakano, H., Funktionen mehrerer hypermaximaler normaler Operatoren, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 21 (1939) 713-728.

60. Nakano, H., Modern spectral theory, Maruzen Co., Tokyo, 1950.

61. Nakano, H., Spectral theory in the Hilbert space, Japan Soc. for Promotion of Sci., Tokyo, 1953

62. Narici, L. ve Bachman, G., Functional Analysis, Academic Press, Inc. London, 1972.

63. von Neumann, J., Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, Math. Ann. 102 (1929-1930) 370-427.

64. von Neumann, J., Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann, 102 (1929-1930) 49-131.

65. von Neumann, J., Mathematische Begründung der Quantenmeckanik, Nachr. Gesell. Wiss. Gottingen. Math.-Phys. Kl. (1927) 1-57.

66. von Neumann, J., Über adjungierte Funktionaloperatoren, Ann. of Math. 2, 33, 294-310 (1982).

67. von Neumann, J., Über funktionen von Funktionaloperatoren, Ann. of Math. 2, 32 (1931) 191-226.

68. von Neumann, J., On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism I, Mat. Sbornik 1, 43 (1936) 415-482.

69. Ogasawara, T., On the integral representation of unbounded self-adjoint transformations, J. Sci. Hiroshima Univ., 6 (1936) 279-281.

70. Palmer T. W., Normal operators on Banach space, Trans. Rep. Amer Math. Soc., 133, 2 (1968) 385-414.

71. Putnam, C.R., On normal operators in Hilbert space, Amer.J.Math., 73 (1951) 357-362.

72. Putnam, C. R., On commutators of bounded matrices, Amer, J. Math. 73 (1951) 127-131.

73. Putnam, C. R., On the spectra of commutators, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 929-931.

74. Rellich, F., Spektraltheorie in nichtseparabeln Raumen, Math. Ann. 110 (1935) 342-356.

75. Riesz, F., Sur certains systemes singuliers d'equations integrales, Ann. Ecole Norm. Sup. 3, 28 (1911) 33-62 .

76. Riesz, F., Über lineare Funktionalgleichungen, Acta. Math. 41 (1918) 71-98.

77. Riesz, F., Les systemes d'equations lineaires a une infinite d'inconnues, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

78. Riesz, F., Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, Acta Sei. Math. Szeged 5 (1930-1932) 23-54.

79. Riesz, F., Über quadratische Formen von unendlich vielen Veranderlichen, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math.-Phys. Kl, (1910) 190-195.

80. Riesz, F., Sur les fonctions des transfactormations hermitiennes dans l'espace de Hilbert , Acta Sci. Math. Szeged 7 (1935)147-159.

81. Riesz, F. ve Lorch, E. R., The integral representation of unbounded self-adjoint transformations in Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936) 331-340.

82. Riesz, F. ve Sz.-Nagy, B., Leçons d'analyse fonctionnelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1952.

83. Riesz, M., Sur les maxima des formes bilineaires et sur les fonctionnelles lineaires, Acta Math. 49 (1926) 465-497.

84. Rudin, W., Functional Analysis , McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

85. Schauder, J., Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Studia Math. 2 (1930) 183-196.

86. Segal, I. E., Decompositions of operator algebras, I, II. Memoirs Amer. Math. Soc. no. 9, 1951.

87. Smirnov, V.I., A Course of Higher Mathematics, Addison- Wesley Publishing Company, Inc.5 (1964) 635.

88. Smith, K, T., Sur le theoreme spectral, C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) 1024-1025.

89. Solomjak, M. Z. ve Birman, M. S., Spektral Teory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, D. Reidel Publishing Company, Holland, 1986.

90. Stochel, J. ve Szafraniec, F.H., On normal extensions of unbounded operators I, Operator Theory, 14 (1985) 31-55.

91. Stochel, J. ve Szafraniec, F.H., On normal extensions of unbounded operators II, Acta Sci. Math. (Szeged), 53 (1989) 153-177.

92. Stone, M. H., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math, Soc. Colloquium Pub., New York, 15 (1932).

93. Stone, M. H., A general theory of spectra, I, II, Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A. I 26 (1940), 280-283, II 27 (1941) 83-87.

94. Stone, M. H., Linear transformations in Hilbert space, I-III, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., I 15 (1929) 198-200, II 15 (1929)423-425, III 6 (1930) 172-175.

95. Sz.-Nagy, B., Sur les lattis lineaires de dimension finie, Comm. Math. Helv. 17 (1945) 209-213.

96. Sz.-Nagy, B., Spectraldarstellung linearer transtormationen des Hilbertschen Raumes, Ergebnisse der Math., J. Springer, Berlin, 5 (1942), Reprinted Edvards Bros., Ann Arbor, Mich., 1947.

97. Teichmüller, O., Operatoren im Wachsschen Raum, J. Reine Angew. Math. 174 (1935) 73-124.

98. Tsuji, M., On the integral representation of unitary and self-adjoint operators in Hilbert space, Jap. J. Math. 19 (1948) 287-297.

99. Wecken, F. J., Zur Theorie linearer Operatoren, Math. Ann. 110 (1935) 722-725.

100. Wecken, F. J., Unitarinvarianten selbstadjugierter Operatoren, Math. Ann. 116 (1939) 422-455.

101. Wedderburn, J. H. M., Lectures on matrices, Amer. Math. Soc. Colloquium Pub. 17, New York, 1934.

102. Wiegmann, N. A., A note on infinite normal matrices. Duke Math. J. 16 (1949) 535-

538.

103. Wielandt, H., Über die unbeschranktheit der Operatoren der Quantenmechanik, Math. Ann. 121 (1949) 21.

104. Wiener, N., Note on a paper of M. Banach, Fund. Math. 4 (1923) 136-143.

105. Williamson, J. H., Compact linear operators in linear topological spaces, J. London Math. Soc. 29 (1954) 149-156.

106. Wintner, A., Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Hirzel, Leipzig, 1929,

107. Wintner, A., Zur Theorie der beschrankten Bilinearformen. Math. Z. 30 (1929) 228-289.

108. Wintner, A., The unboundedness of quantum-mechanical matrices, Physical Rev. 71 (1947) 738-739.

109. Yosida, K., ve Nakayama, T., On the semi-ordered ring and its application to the spectral theorem, I, II, Proc. Imp. Acad. Tokyo , I 18 (1942), 555-560, II. 19 (1943) 144-147.

110. Zaanen, A. C., Linear analysis. P. Noordhoff, Groningen, and Interseienee Pub., New York, 1953.

ÖZGEÇMİŞ

Meltem EROL, 01.04.1982 tarihinde Uşak’ta doğdu. İlköğrenimini Uşak’ ta ve ortaöğretimini Aydın’da tamamladı. 2000–2001 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’ne girdi. 2003–2004 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Matematik Bölümü’nü ikincilikle bitirdi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi’nin yüksek lisans programına kabul edildi. 2004–2005 öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitenin yüksek lisans İngilizce hazırlık programını tamamladı. 2005–2006 öğretim yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı. 19.10.2005 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi’ne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve halen bu görevine devam etmektedir.