KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜSTEL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİNİN ANALİTİK VE ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURGÜL OKUR BEKAR

HAZİRAN 2006
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÜSTEL MÜDAHALELİ ÖDÜLLÜ YENİLEME SÜRECİNİN ANALİTİK VE ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

NURGÜL OKUR BEKAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanı Verilmek İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02. 06. 2006
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 28. 06. 2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tahir KHANİYEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Erhan COŞKUN
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, "Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci" olarak adlandırılan yarı-Markov bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik sürecin olasılık karakteristikleri detaylı bir biçimde incelenmiştir.

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenerek, konunun seçiminde ve çalışma sürecince yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e, en içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca değerli öneri ve yardımlarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK, Sayın Yrd. Doç. Dr. Sema DİKMENOĞLU, Sayın Arş. Gör. Tülay KESEMEN ve yüksek lisans süresince gösterdiği sabır ve desteğinden dolayı eşim Arş. Gör. Kerim BEKAR'a teşekkür ederim.

Nurgül OKUR BEKAR

Trabzon, 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu çalışmada, "Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci" denilen yarı-Markov bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiştir. Ayrıca, inşa edilen sürecin sonlu boyutlu dağılımları $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme süreçleri, olasılık karakteristikleri ile ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra, sürecin sınır ve toplamsal fonksiyonelleri matematiksel olarak inşa edilmiş ve incelenmiştir. Bazı zayıf şartlar altında, sürecin ergodik olduğu gösterilmiş ve ergodik dağılım fonksiyonunun aşikar şekli bulunmuştur. Bunlara ilaveten $X(t)$ sürecinin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti için kesin formüller elde edilmiştir.

Yukarıdaki sonuçlardan faydalanarak, ζ_1 rasgele değişkeninin, üstel dağılıma sahip olması durumunda, $x \to \infty$ iken, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti, varyansı, çarpıklık ve basıklık katsayıları için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ödüllü Yenileme Süreci, Yenileme Fonksiyonu, Yarı-Markov Süreci, Sınır Fonksiyoneli, Toplamsal Fonksiyonel, Ergodik Dağılım, Asimptotik Açılım.

SUMMARY

Investigated the renewal reward processes with the exponantional interfere by analytic and asymptotic methods

In this study, semi-Markov, a model called as “The renewal reward processes with the exponantional interfere”, is considered and the stochastic process expressed by this model is constructed mathematically. Furthermore, the finite-dimensional distributions of the process $X(t)$ is given by means of the probability characteristics of the renewal processes $\{T_n\}$ and $\{S_n\}$. Besides, boundary functional and additive functional of this process are constructed mathematically and investigated. Under some weak assumptions, the ergodicity of this process is discussed, and function of ergodic distribution of this process is found explicity. In addition to these, the exact formulas are obtained for the first four initial moments of the boundary functionals of the process $X(t)$.

Based on the above results, asymptotics result for the first four initial moments, the first four central moments, variance and asymmetry-symmetry coefficients of the boundary functionals of this process are obtained when the random variable ζ_1 has a exponential distribution, as $x \to \infty$.

Key Words: Renewal Reward Process, Renewal Function, Semi-Markov Process, Boundary Functional, Additive Functional, Ergodic Distribution, Asymptotic Expantion.

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

SEMBOLLER LİSTESİ

$a < b$	a küçüktür b
$a > b$	a büyüktür b
$a \leq b$	a küçüktür veya eşittir b
$a \geq b$	a büyüktür veya eşittir b
$a \in A$	a, A’nın elemanıdır
$a \notin A$	a, A’nın elemanı değildir
$a = b$	a eşittir b
$a \neq b$	a farklıdır b
$a < \infty$	a sonludur
(a,b)	açık aralık
$[a,b)$	sağdan açık soldan kapalı aralık
$(a,b]$	soldan açık sağdan kapalı aralık
$[a,b]$	kapalı aralık
$A \subseteq B$	B kümesi, A kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
$A \supseteq B$	A kümesi, B kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
$d_z F$	F fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli
$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x,y)]$	$F(x,y)$ ’nin x değişkenine göre n. kısmi türevi
$E(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E(\xi^n)$	ξ rasgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$E\lvert\xi\rvert$	ξ rasgele değişkeninin mutlak momenti
$f_1 * f_2$	f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
f^{*n}	f fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
$f(x)\rvert_{x=0}$	$f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri
inf A	A kümesinin infimumu

$\lim_{x\to\infty} f(x)$	x, ∞ ’a giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
$\max A$	A kümesinin maksimumu
$\min A$	A kümesinin minimumu
$P\{.\}$	$\{.\}$ olayının olasılığı
$P_z\{.\}$	$\{.\}$ olayının koşullu olasılığı
$\sup A$	A kümesinin supremumu
$\mathrm{Var}(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin varyansı
$\mathrm{Var}_z(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin koşullu varyansı
$\lvert x \rvert$	x sayısının mutlak değeri
$\forall$	her
$\exists$	en az bir
∞	sonsuz
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sayılarının toplamı

1. GENEL BİLGİLER

1. 1. Giriş

Olasılık teorisinde stokastik kavramı, ilk kez bu teorinin kurucularından olan J. Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlamıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç'in (1868- 1913) büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden kullanılmaya başlamıştır.

Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov ve A. Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreçler olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken, A. Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Bu alanda emeği geçen başlıca bilim adamları arasında N. Wiener, W. Feller, J. Dobb, R. Fisher, J. Neumann ve H. Cramer gibi olasılıkçılar bilinmektedir. Stokastik modellerin özellikle de Markov veya yarı- Markov stokastik modellerin uygulama alanları hızla genişlemektedir. Örneğin güvenirlilik teorisinin, stok kontrol teorisinin, risk teorisinin ve matematiksel biyolojinin bir çok gerekli problemleri Markov veya yarı Markov modellerin yardımı ile çözülebilmektedir. Şimdi, bu çalışmada geçen bazı tanım ve kavramlar verilecektir.

Bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı verilsin. $X:\Omega \to R$ ölçülebilen bir fonksiyon yani, her $x \in R$ için $\{w : X(w) = x\} \in \Im$ ise, X'e bir boyutlu ***rasgele değişken*** ve

$$F(x) := P\{X_0(w) = x\} \equiv P\{X \le x\}$$

olasılık fonksiyonuna, X rasgele değişkeninin ***dağılım fonksiyonu*** denir.

$t \in T \subset R^+$ için X_t'ler aynı olasılık uzayı üzerinde rasgele değişkenler olmak üzere, $\{X_t : t \in T\}$ ailesine bir ***stokastik süreç*** denir ve X(t) ile gösterilir. Buradaki t parametresi zaman olarak düşünülebilir. T kümesi sonlu veya sayılabilir ise, sürece ***diskret zamanlı stokastik süreç***, T kümesi bir aralık (sonlu veya sonsuz) ise, sürece ***sürekli***

zamanlı stokastik süreç adı verilir.

n=2, 3, … olmak üzere, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ özelliğini sağlayan $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ 'ler için $\left(X_{t_1} - X_{t_0}\right), \left(X_{t_2} - X_{t_1}\right), \ldots, \left(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$ rasgele değişkenleri bağımsız ise, X(t) sürecine ***bağımsız artımlı süreç*** denir.

$x, y \in R$ olmak üzere, yine $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ özelliğini sağlayan $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ 'ler için $P\left\{X_{t_n} < y \middle| X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \ldots, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = x_0\right\} = P\left\{X_{t_n} < y \middle| X_{t_{n-1}} = x\right\}$ eşitliği her $x_{n-2}, \ldots, x_0 \in R$ için sağlanıyorsa, X(t) sürecine bir ***Markov*** süreci denir. Bu durumda, $t_1, t_2 \in T$ ve $t_1 < t_2$ olmak üzere, $F(t_1, x, t_2, y) := P\left\{X_{t_2} < y \middle| X_{t_1} = x\right\}$ dağılım fonksiyonu $t < t_1$ olan her $t \in T$ 'ler için X_t değerlerinden bağımsızdır. Eğer bu fonksiyon sadece $t = t_1 - t_2$ farkına bağlı ise, X(t) Markov sürecine ***homojendir*** denir.

$X_i\ (i \in N)$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmak üzere, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ile tanımlı $\{Y_n : n \in N\} = \{Y_n\}_{n\in N}$ sürecine

a) X_i 'ler pozitif değerli ise, bir ***yenileme süreci***,

b) X_i 'ler hem pozitif hem de negatif değerli ise, bir rasgele ***yürüyüş süreci*** denir.

$t \in T$ olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan W(t) sürecine bir ***Wiener süreci*** denir:

1) $W(0) = 0$,

2) $s \le t$ için $W(t) - W(s) \approx N(0, \sigma^2 (t - s))$ $\left(\sigma^2 \text{ sabit}\right)$,

3) $W(t)$ süreci bağımsız artımlıdır.

Diskret zamanlı bir Markov sürecine, Markov zinciri denir. Yani,

$$P\left\{X_n = j \middle| X_{n-1} = i, X_{n-2} = x_{n-2}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = x_0\right\} = P\left\{X_n < j \middle| X_{n-1} = i\right\} =: P_{ij}$$

eşitliği her $x_{n-2}, \ldots, x_0 \in R$ için sağlanıyorsa, $\{X_n : n \in N\} = \{X_n\}_{n\in N}$ sürecine bir ***Markov zinciri*** ve P_{ij} 'ye de i durumundan j durumuna ***bir adımda geçiş olasılığı*** denir.

Şimdi, bir $\{X_n\}_{n\in N}$ Markov zinciri verilsin.

$$f_{ii} := P\{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq x_1 | X_0 = i\},\ P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}$$

olmak üzere, $F_{ii} := \sum_{i=1}^{\infty} f_{ii}$, $R_{ii} := \sum_{i=1}^{\infty} nf_{ii} \equiv \sum_{i=1}^{\infty} P_{ii}$ tanımlansın.

F_{ii}, başlangıçta i durumunda olan zincirin eninde sonunda i durumuna gelme olasılığıdır. R_{ii} 'ye i durumunun ***ortalama tekrarlama zamanı*** denir. Eğer,

1) $F_{ii} = 1$ ise i'ye ***tekrarlanan durum*** denir.

2) i tekrarlanan durum ve $R_{ii} = +\infty$ ise i'ye ***sıfır(null) durum***, $R_{ii} < \infty$ ise i'ye ***sıfır olmayan(non-null) durum*** denir.

3) $P_{ii}(n_1) > 0, P_{ii}(n_2) > 0, \ldots$ ve $n_1 > n_2 > \ldots$ olan $n_1, n_2, \ldots$ sayıları için $d_i = (n_1, n_2, \ldots) > 1$ ise i'ye d_i periyotlu ***periyodik durum***, $d_i = 1$ ise i'ye ***periyodik olmayan durum*** denir. (Buradaki parantez içindeki sayıların en büyük ortak bölenidir.)

Bu tanımlardan sonra, şimdi ergodik durum tanımlanabilir.

Tekrarlanan, sıfır olmayan ve periyodik olmayan bir duruma ***ergodik durum*** denir.

Bir Markov zincirinin ergodikliği, bütün durumlarının ergodik olması ile tanımlanır. Bir Markov sürecinin ergodikliği ise aşağıdaki gibi verilir:

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(X(t))dt$$

limiti mevcut, sonlu ve rasgele değişken değil (yani X(0)=z ve t değerleri bağımsız) ise, bu X(t) Markov sürecine ***ergodiktir*** denir ve bu limit değerine de sürecin ***en genel ergodik dağılım fonksiyonu*** adı verilir.

Bir Markov sürecinin ergodik olması için, bu süreçten ergodik bir Markov zincirinin inşa edilebilmesi gerekir. Ancak bu yeterli değildir (bkz[25], sh. 243).

$\{X_n\}_{n\in N}$ rasgele değişken dizisi ve X rasgele değişkeni aynı $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı olsun. Bunların dağılım fonksiyonları sırasıyla $F_n(x)$ ve $F(x)$ ile gösterilsin ve aşağıdaki tanımlar verilsin.

Dağılıma göre yakınsaklık:

Eğer $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ ise, $\{X_n\}_{n\in N}$ rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine ***dağılıma göre yakınsaktır*** denir ve $X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{d} X(w)$ şeklinde yazılır. Böylece,

$$X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{d} X(w) :\Leftrightarrow F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

$$:\Leftrightarrow P\{X_n(w) \le x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} P\{X(w) \le x\} \text{ 'dır.}$$

Bir $\{X_n\}_{n\in N}$ süreç dizisinin bir X(t) sürecine dağılıma göre yakınsaması da benzer şekilde tanımlanır. Bu durumda X(t)'ye, $\{X_n\}_{n\in N}$ süreç dizisinin dağılıma göre ***limit süreci*** denir.

Olasılığa göre yakınsaklık:

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $P\{X_n(w) > x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} X(w)$ ise, $\{X_n\}_{n\in N}$ rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine ***olasılığa göre yakınsaktır*** denir ve $X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{P} X(w)$ şeklinde yazılır. Böylece,

$$X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{P} X(w) :\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için } P\{X_n(w) > x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} X(w)$$

olduğu görülür.

1 olasılığı ile yakınsaklık:

Eğer ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında $X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{P} X(w)$ ise, $\{X_n\}_{n\in N}$ rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine ***1 olasılığı ile yakınsaktır*** denir ve $X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{1} X(w)$ şeklinde yazılır. Böylece,

$$X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{1} X(w) :\Leftrightarrow P(N) = 0 \text{ olan}$$

$$\exists N \subset \Omega \text{ öyle ki } \forall w \in \Omega / N \text{ için } X_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{P} X(w)$$

olduğu görülür.

Ortalama karesel yakınsaklık:

$E\left[\left|X_n(w) - X(w)\right|^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ise, $\{X_n\}_{n\in N}$ rasgele değişken dizisi X rasgele değişkenine ***ortalama karesel yakınsaktır*** denir.

Olasılığa göre sınırlılık:

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists M > 0$ öyle ki $P\{|X_n(w)| \le M\} \ge 1 - \varepsilon$ ise $\{X_n\}_{n\in N}$ rasgele değişken dizisi ***olasılığa göre sınırlıdır*** denir.

Bir $\{X_n\}_{n\in N}$ süreç dizisinin olasılığa göre sınırlı olması da benzer şekilde tanımlanır.

1. 2. Literatür Araştırması

Bu tezde, stokastik süreçlerin önemli bir sınıfını oluşturan " Üstel müdahaleli ödüllü yenileme süreci" ele alınacaktır. Yani, arz-talep miktarlarını ve onların ortaya çıkma anlarını rasgele değişkenler dizisi yardımıyla ifade ettikten sonra, belirli yenileme süreçlerini tanımlayarak, bu kavramların aracılığıyla fiziksel modeli, özel bariyerli yenileme süreci biçiminde matematiksel olarak tanımlamak mümkündür. Bu nedenle, önce Yenileme süreclerinin son yıllardaki gelişiminden kısaca bahsedilecektir. Yenileme sürecleri, yarı-Markov süreclerinin özel bir halidir. Yarı-Markov süreç kavramı ise ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, Levy [54], Smith [80] ve Takacs [85] gibi olasılıkçılar tarafından ortaya atılmıştır. Fakat bunların hepsi de durum uzayı sonlu olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlendiğinden bu kavramın genelleştirilmesi gerekli idi. Bu nedenle, Çınlar [15], Gihman ve Skorohod [25], Serfoza [71], Ezhov ve Korolyuk [20] çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci tanımlarını vermişlerdir. Şimdi, Gihman ve Skorohod [25]'un vermiş olduğu tanım kısaca verilecektir:

$(\Omega, \Im, P_x)$, $x \in X$, olasılık uzayları ailesi verilmiş olsun ve (Ω, σ, P_x) olasılık uzayında tanımlanmış bir $\{ X_n : n \geq 0 \}$ Markov zincirinin verilmiş olduğu kabul edilsin. Bu zincirin, $P_x \{ X_0(w) = x \} = 1$ olmak üzere, durum uzayı (X, B) ve geçiş olasılığı ise $\Pi(x, B)$ olsun. $\eta_1(w)$, $\eta_2(w)$, $\eta_3(w)$, … bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip, $\{ X_n : n \geq 0 \}$ ailesinden $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$'nin negatif olmayan herhangi bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olduğu varsayılsın. $\varphi_{x,y}(t)$ ise $F_{x,y}(t)$ fonksiyonu, $\varphi_{x,y}(\xi)$'nin $[0,1]$ aralığında dağılım fonksiyonu olacak şekilde negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Burada ξ rasgele değişkeni $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. Bu taktirde, $\tau_k = \varphi_{x_{k-1}, x_k}(\eta_k)$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \leq t < \sum_{i=1}^{k} \tau_i \;\Rightarrow\; X(t) = X_{k-1}(w),$$

ifadesiyle tanımlanan sürece bir ***yarı-Markov süreç*** adı verilir. Burada $\sum_{i=1}^{0} = 0$'dir.

Yarı-Markov süreçler ile ilgili bir çok önemli problemleri, Borovkov [9, 10, 11, 12], Korolyuk ve Turbin [48], Çınlar [15, 16, 17], Takacs [85, 86], Korolyuk ve Pirliev [49], Tomko [87], Smith [79, 80, 81, 82], Spitzer [83, 84], Feller [23, 24], Anisimov [6, 7], Gnedenko ve Kovalenko [26], Shurenkov [70, 71] vs., çalışmalarında detaylarıyla incelenmiştir.

Stokastik süreçlerin esas sınır fonksiyonlarının incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu konuda ilk çalışmayı Spitzer [83] yapmıştır. Onun çalışmalarını Rogozin [66], Gusak ve Korolyuk [28] toplam dizisi için genelleştirmiştir. Daha sonra, Rogozin [67] aynı çalışmaları artımları bağımsız olan süreçler için de hesaplamış ve genel sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca, Gusak ve Korolyuk [29] sürecin değerinin ve supremumunun ortak dağılımını vermiştir. Skorohod [74], sıçramalarının işareti aynı olan süreçlerin karakteristikleri ile, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşması anı arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur. Borovkov [9], sıçramalarının işareti aynı ve artımları bağımsız olan süreçlerin belirli bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımı ile sürecin değerinin infimumu ile supremumunun ortak dağılımını vermiştir. Levy [54] ise, böyle bir sürecin değerinin infimumunun ve supremumunun ortak dağılımını ortaya koymuştur.

Lotov [55], η_1 rasgele değişkeni normal dağılıma sahip olduğu durumda, N sınır fonksiyonelinin beklenen değeri için üç terimli asimptotik açılım elde etmiştir. Rogozin [66], basamak yüksekliğinin a seviyesinin üstünde kalan kısmı için $a \to \infty$ iken limit dağılımı elde etmiştir.

Hem pratik hem de teorik bakımdan, yarı-Markov süreçler için ergodik teoremler ve bu süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Yarı-Markov sınıfına ait olan Yenileme süreçleri için esas ergodik teorem 1975 yılında Smith [80] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca Ezhov ve Shurenkov [21] tarafından da yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ispatlanmıştır. Shurenkov [72], yarı-Markov süreçlerin ergodik dağılımının varlığı için gerek ve yeter şart elde etmiştir.

Yarı-Markov süreçleri için en genel durumda limit teoremleri, Anisimov [6, 7], Silvestrov [75, 76], Dzhafarov, Nasirova ve Skohorod [18], Korolyuk ve Svishchuk [50] tarafından verilmiştir.

Sınır değer probleminin incelenmesinin yanı sıra, ele alınan süreçlerin kendi karakteristiklerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu nedenle, ödüllü yenileme süreçlerinin kendi karakteristiklerine ait bazı ilmi çalışmalar da yapılmıştır.

Şimdi, Feller [23]'in vermiş olduğu yenileme süreci tanımı kısaca verilecektir:

$(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı olsun. $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$, birbirinden bağımsız, aynı dağılıma sahip, pozitif değerli rasgele değişkenler olsun. Bu rasgele değişkenlerin yardımıyla oluşturulan $\{T_n\}, n \geq 0$ stokastik dizini aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$T_0 = 0\,,\ T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,.$$

$\{T_n\}$, $n \geq 0$ stokastik dizininin yardımıyla elde edilen, $N(t) = \min\{n \geq 1:\ T_n > t\}$ sürecine ***yenileme süreci*** denilmektedir.

$$U(t) = EN(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$$

fonksiyonuna ise, ***yenileme fonksiyonu*** denilmektedir.

Feller [24], $U(t)$ yenileme fonksiyonunun iki terimli asimptotik açılımı için; $\mu_k = E(\xi_1^k),\ k = 1,2,\quad Var(\xi_1) = \sigma^2$ olmak üzere,

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\sigma^2 + \mu_1^2}{2\mu_1^2} + o(1)\,,$$

sonucunu elde etmiştir. Smith [80, 81], yenileme fonksiyonunu ilk kez detaylı bir incelemeye tabi tutmuş ve yenileme fonksiyonu için bir dizi analitik ve asimptotik sonuçlar elde etmiştir. Aynı zamanda yaptığı çalışmalarında, Feller [24]'in $U(t)$ yenileme fonksiyonunun iki terimli asimptotik açılımını bir birim farkla;

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\sigma^2 - \mu_1^2}{2\mu_1^2} + o(1)\,,$$

olarak ifade etmiştir. Aynı zamanda, Smith [80] bu çalışmasında, $N(t)$ yenileme sürecinin varyansı için $E(\xi_1^3) < \infty$ ve $t \to \infty$ iken, aşağıdaki asimptotik sonucu elde etmiştir:

$$Var\big(N(t)\big) \sim \frac{\sigma^2 t}{\mu_1^3}\,.$$

Feller [24], çalışmalarında ***yenileme tipli integral denkleminin*** aşağıdaki gibi olduğunu göstermiştir:

$$Z(t) = G(t) + Z(t) * \Phi(t)\,.$$

Burada, $G(t)$ mevcut ve sonlu, integrallenebilen bir fonksiyonu ve $\Phi(t)$ pozitif rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

Brown, M., Solomon, H. [14], ödüllü yenileme sürecinin birinci ve ikinci momentleri için iki terimli asimptotik açılım elde etmişlerdir. Spitzer [83, 84], birinci basamak anı ve basamak yüksekliğinin fonksiyonel karakteristiklerini, harmonik yenileme fonksiyonu yardımıyla ifade etmiştir. Alsmeyer [4], basamak anı ve yüksekliklerinin olasılık karakteristiklerini hesaplamak için gerekli olan harmonik yenileme ölçüsünü ele almış ve ayrıca harmonik yenileme fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım elde etmiştir.

Bu çalışmalardan farklı olarak, Khaniyev [47], genelleştirilmiş yenileme sürecinin momentleri hakkında önemli sonuçlar elde etmiştir. Khaniyev [47], genelleştirilmiş yenileme sürecinin matematiksel kuruluşunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$\{\xi_i : i = 1,2,\ldots\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi, ξ_i'ler pozitif değerli yani, $P\{\xi_i > 0\} = 1, i = 1,2,\ldots$ olsun. Bu taktirde, $T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, n \geq 1, \quad T_0 = 0, \quad N(t) = \inf\{n \geq 1 : T_n > t\}, t > 0$ olarak tanımlanırsa, $T_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$ ifadesine ***genelleştirilmiş yenileme süreci*** denir.

Khaniyev [47], $t \to \infty$ iken, $T_{N(t)}$ genelleştirilmiş yenileme sürecinin ilk üç momentini analitik ve asimptotik yöntemlerle incelemiştir. Bu amaç için,

$$\psi(\lambda, k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} E(e^{-kT_{N(t)}})dt, \lambda > 0, k \geq 0, \ \ \varphi(\alpha) = E(e^{-\alpha\xi_1}), \alpha \geq 0,$$

olmak üzere, $\psi(\lambda, k) = \dfrac{\varphi(k) - \varphi(\lambda + k)}{\lambda\left(1 - \varphi(\lambda + k)\right)}$ eşitliğini elde etmiştir. Bu eşitlik momentlerin analitik olarak incelenmesinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Khaniyev [47], bu eşitlik yardımıyla, $T_{N(t)}$ genelleştirilmiş yenileme sürecinin ilk üç momenti için kesin formüller elde etmiştir.

Bu çalışmada ise, ödüllü yenileme süreci incelenmiştir. $X(t)$ süreci, $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme süreçleri yardımıyla matematiksel olarak inşa edilmiştir. Ayrıca, bu sürecin olasılık karakteristikleri analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Sistem, başlangıç anı olan $X_0 = z$ noktasından çalışmaya başlasın. Sistem rasgele bir ξ_1 süresi kadar kaldıktan sonra, η_1 mesafesi kadar azalsın (burada η_1 yalnız pozitif değerler alabilen bir rasgele değişkendir). Bu durumda aşağıdaki iki farklı durum söz konusudur:

1) Sistem s seviyesinin altına inmemiş olsun. Bu durumda, $X_1 = X_0 + \eta_1$ yeni pozisyonundan hareketine devam eder. Yani sistem, X_1 durumunda ξ_2 süresince kaldıktan sonra η_2 mesafesi kadar azalarak, bir sonraki $X_2 = X_1 + \eta_2$ pozisyonuna ulaşmaya çalışacaktır.

2) Sistem s seviyesinin altına inmiş olsun. Bu durumda, dışardan müdahale edilerek sistem yeni bir $\zeta_1 \in [s, +\infty)$ başlangıç durumundan harekete başlamaya mecbur edilir ve bundan sonraki hareketine yukarıdaki kuralla devam edilir. Dolayısıyla, çalışmakta olan sistem s seviyesine ulaşmadığı sürece bir yenileme sürecine tabi olur. Daha sonra sistemin hareketi yukarıdaki koşullara benzer şekilde tekrarlanacaktır.

Not edilmelidir ki, ζ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu uygun şekilde değiştirilerek onlarca özel bariyerli yarı-Markov süreç elde etmek mümkündür.

2. 1. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

$\{(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)\}, n \geq 1,$ rasgele değişkenlerin üçlüler dizisi, $(\Omega, \Im, P)$ aynı olasılık uzayında tanımlanmış birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun. Ayrıca, ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri yalnız pozitif değerler, ζ_1 ise $[s, +\infty)$ aralığından değerler alabilsin. Yani, $P\{\xi_1 > 0\} = 1$; $P\{\eta_1 > 0\} = 1$ ve $P\{\zeta_1 \in [s, +\infty)\} = 1$ ’ dir. Burada s sabit değer olup, $0 \leq s < \infty$ ’dır.

ξ_1, η_1 ve ζ_1 rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarının bilindiği varsayılsın ve onlar sırası ile aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \le t\}; \quad F(x) = P\{\eta_1 \le x\}; \quad \pi(v) = P\{\zeta_1 \le v\},$$

burada, $t, x \in (0, +\infty)$; $v \in [s, +\infty)$'dir. $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme dizileri aşağıdaki gibi inşa edilsin:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \qquad n \ge 1,$$

burada, $T_0 = S_0 = 0$'dır. Ayrıca, tam değerler alan $\{N_n\}$, $n \ge 0$ rasgele değişkenler dizisi tanımlansın:

$$N_0 = 0; \quad N_1 = N(z - s) = \inf\{k \ge 1 : S_k \ge z - s\},$$

$$N_{n+1} = \inf\{k \ge N_n + 1 : \zeta_n - S_k + S_{N_n} < s\}, \quad n \ge 1,$$

burada, $\inf(\varnothing) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir. Ayrıca,

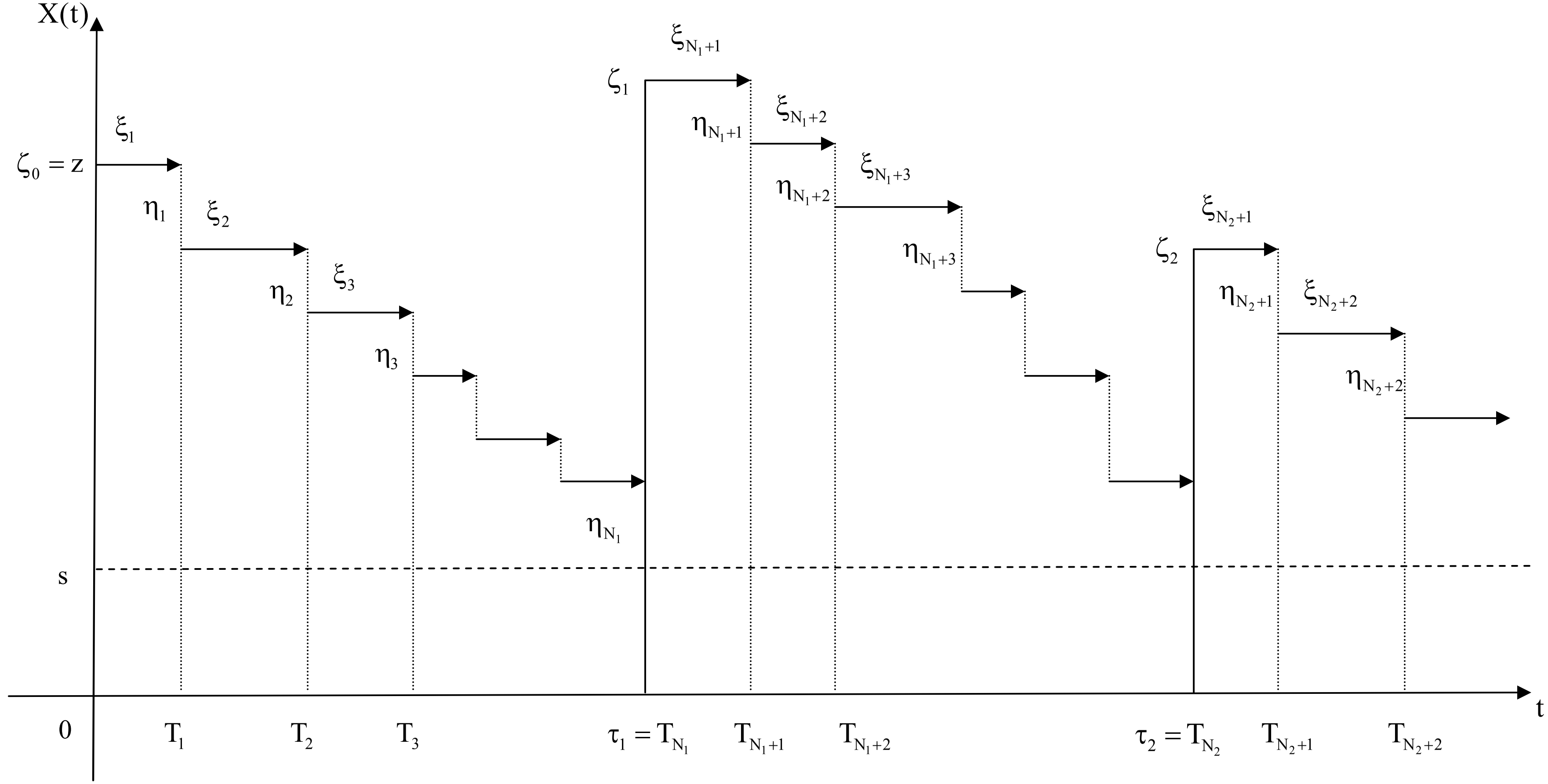
$$\tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i; \; n \ge 1, \quad \tau_0 = 0; \; \nu(t) = \max\{n \ge 0 : T_n \le t\}, \; t > 0 \text{'dır.}$$

Şimdi de, ele alınan stokastik süreç aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$X(t) = \max\{s, \zeta_n - S_{\nu(t)} + S_{N_n}\}, \; t \in [\tau_n, \tau_{n+1}), \quad n \ge 0,$$

burada, $\zeta_0 = z \in [s, +\infty)$ ve $S_{\nu(\tau_n + 0)} = S_{N_n}$'dir.

Bu çalışmada amaç, bu sürecin sınır ve toplamsal fonksiyonellerinin yanı sıra sürecin kendi karakteristiklerini de incelemektir. Bu nedenle, önce sürecin sınır fonksiyonelleri incelenecektir.



Şekil1. Üstel müdahaleli ödüllü yenileme sürecinin bir görünüşü

2. 2. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İncelenmesi

τ_1 rasgele değişkenine, "sürecin ilk kez kontrol seviyesine ulaşma anı" denir ve bu rasgele değişken sınır fonksiyoneli olup sürecin bir çok karakteristiklerinin öğrenilmesinde büyük önem taşımaktadır. Özellikle, sürecin sonlu boyutlu ve ergodik dağılımlarının incelenmesi için, τ_1 rasgele değişkeninin dağılımının ve bazı sayısal karakteristiklerinin bilinmesi gereklidir. Bu nedenle bu kısımda, τ_1 rasgele değişkeninin bazı olasılık ve sayısal karakteristikleri incelenecektir. Bu nedenle, gerekli notasyonlar dahil edilsin:

$$\Phi_n(t) = P\{T_n \le t\} = \Phi^{*n}(t) \;, \quad n \ge 1,$$

$$\Phi_0(t) = \Phi^{*0}(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$F_n(z) = P\{z - S_k > s\}, \quad k = \overline{1,n}\,,$$

burada, $F_0(x,z) = P\{z > s\} = 1$ 'dır.

Her sınırlı $M(t,x,z)$ fonksiyonu için, $M(t,x,\bullet)$ notasyonu ise aşağıdaki gibi gösterilsin:

$$M(t,x,\bullet) = \int_s^{+\infty} M(t,x,z)\,d\pi(z)\,.$$

Şimdi, bu kısmın temel sonucu aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

Teorem 1. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olsun. Bu takdirde, τ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu G(t), aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$G(t) = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] \;,$$

burada, $a_n \equiv a_n(\bullet)$'dır.

İspat. τ_1 'in koşullu dağılım fonksiyonu G(t,x) ile gösterilsin:

$$G(t,x) = P_x\left\{\tau_1 \le t, X(t) \le x\right\}, \quad t \ge 0, \quad x \in (0,+\infty).$$

Tam olasılık formülüne göre,

$$1 - G(t,x) = P_x\{\tau_1 > t; X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_x\{\nu(t) = n;\ \tau_1 > t, X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{(z - S_1) > s, (z - S_2) > s, \ldots, (z - S_n) > s; T_n \le t < T_{n+1}; T_{N_1} > t\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{(z - S_n) > s; T_n \le t < T_{n+1}; N_1 \ge n+1\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{(z - S_n) > s; T_n \le t < T_{n+1}; N_1 > n\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n < t < T_{n+1}; z - S_n > s\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n < t < T_{n+1}\}\ P\{S_n < z - s\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] P\{S_n \le z - s\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] F_n(z - s)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] F_n(x); \quad x = z - s$$

$$= \left(1 - \Phi(t)\right) F_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] F_n(x)$$

$$= 1 - \Phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] F_n(x) \text{ 'dır.} \qquad (1)$$

Dolayısıyla, τ_1 'in koşullu dağılım fonksiyonu;

$$G(t,x) = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] F_n(x), \ \ x = z - s \text{ 'dir.} \tag{2}$$

(2) eşitliğinin her tarafı $d\pi(x)$ ile çarpılıp, 0'den $+\infty$'a kadar integrallenirse, τ_1 'in dağılım fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$G(t) \equiv G(t,\bullet) \equiv P\{\tau_1 \le t\} = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)\right] \ .$$

Burada, $a_n \equiv a_n(\bullet) = \int_0^{+\infty} F_n(x)\,d\pi(x)$ 'dur. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Not. Bazı özel durumlarda, τ_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu aşikar biçimde yazmak mümkündür. Örneğin, ξ_1 rasgele değişkeni, $\alpha > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunda, $\Phi_n(t)$ fonksiyonu n. mertebeden Erlang dağılım fonksiyonu olacağına göre, G(t) dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi aşikar şekilde yazılabilir:

$$G(t) = 1 - e^{-\alpha t} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} .$$

Fakat dağılım fonksiyonlarının n kat konvolüsyon çarpımını, her zaman hesaplamak yukarıdaki gibi kolay değildir. Bu nedenle, τ_1 rasgele değişkeninin momentlerinin incelenebilmesi için, τ_1 'in dağılım fonksiyonunun Laplace-Stiltijes dönüşümünü ele almakta fayda vardır. Bu kısımda ve daha kısımlarda da, sınırlı M(t,x,z) fonksiyonunun Laplace ve Laplace-Stiltijes dönüşümleri sırasıyla $\widetilde{M}(\lambda, x, z)$ ve $M^*(\lambda, x, z)$ ile gösterilecektir:

$$\widetilde{M}(\lambda, x, z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} M(t, x, z)\,dt\,; \ \ M^*(\lambda, x, z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d_t M(t, x, z),$$

burada, $\lambda > 0$ 'dır.

Teorem 2. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olsun. Bu takdirde, τ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun Laplace –Stiltijes dönüşümü, ξ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun Laplace-Stiltijes dönüşümü ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$L_\tau(\lambda) \equiv G^*(\lambda) \equiv E(e^{-\lambda\tau_1}) = \varphi_\xi(\lambda) - \left(1-\varphi_\xi(\lambda)\right)\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi_\xi(\lambda))^n,$$

burada, $\varphi_\xi(\lambda) = \Phi^*(\lambda) \equiv E(e^{-\lambda\xi_1})$ 'dır.

İspat. Teorem 1'in sonucuna göre ,

$$E(e^{-\lambda\tau_1}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t) = G^*(\lambda) = \Phi^*(\lambda) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[(\Phi^*(\lambda))^n - (\Phi^*(\lambda))^{n+1}\right]$$

$$= \varphi(\lambda) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi(\lambda))^n(1-\varphi(\lambda)) = \varphi(\lambda) - (1-\varphi(\lambda))\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\varphi(\lambda))^n \text{ 'dır.} \qquad (3)$$

(3) eşitliğinden sonsuz serinin, her $\lambda > 0$ için sonlu olduğu kolayca görülür ki,

$$|\varphi(\lambda)| = \left|Ee^{-\lambda\xi_1}\right| \le E\left|e^{-\lambda\xi_1}\right| < 1 \text{ 'dır.}$$

Böylece, τ_1 rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu, ξ_1 rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu ile (3)'deki gibi ifade edilebilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

2. 3. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin Momentleri için Kesin Formüller

X(t) sürecinin olasılık karakteristiklerinin yanı sıra, bazı fonksiyonellerin de incelenmesi uygulama açısından büyük önem taşımaktadır. Bu fonksiyonellerden biri de sınır fonksiyonelleridir. τ_1 sınır fonksiyoneli dendiğinde, X(t) sürecinin $[s,+\infty)$ aralığının aşağı sınırına ilk kez ulaşma anı anlaşılmaktadır. N_1 sınır fonksiyoneli ise, bu ana kadar olan sıçramaların sayısını göstermektedir. Buna göre;

$$N_1 = N(x) = \inf\{k \ge 1 : S_k \ge x,\ x = z - s \ge 0\};\ \tau_1 = \tau(x) = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i \text{ 'dır.}$$

ξ_1, N_1 ve τ_1 rasgele değişkenlerinin fonksiyonel karakteristikleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\varphi_{\xi}(\mu) = E(e^{-\mu\xi_1}),\ \mu \geq 0, \qquad \varphi_N(k) = E(e^{-kN_1}),\ k \geq 0,$$

$$\Psi_N(z) = E[z^{N_1}],\ |z| \leq 1, \qquad \Phi_{\tau}(\mu) = E(e^{-\mu\tau_1}),\ \mu \geq 0.$$

Bu dört fonksiyonel karakteristik arasındaki bağıntı, aşağıdaki teorem yardımıyla verilebilir. Bundan sonraki bazı bölümlerde, x değişkenine bağlı olduğunu göstermesi için τ_1 yerine, $\tau(x)$ ve N_1 yerine, $N(x)$ notasyonları kullanılacaktır.

Teorem 3. $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin Laplace dönüşümü $(\Phi_{\tau}(\mu))$, ξ_1 rasgele değişkeninin Laplace dönüşümü $(\varphi_{\xi}(\mu))$ ve $N(x)$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $(\Psi_N(z))$ yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Phi_{\tau}(\mu) = \Psi_N(\varphi_{\xi}(\mu)),$$

burada, $\Phi_{\tau}(\mu) = \varphi_N(k)$, $\mu \geq 0$ ve $k = k_{\mu} = \ln(\frac{1}{\varphi_{\xi}(\mu)}) \geq 0$ 'dır.

İspat. $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin tanımı göz önünde bulundurularak,

$$\Phi_{\tau}(\mu) = E(e^{-\mu\tau(x)}) = E(e^{-\mu\sum_{i=1}^{N(x)}\xi_i})$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\{\xi_i\}$ ve $\{\eta_i\}$, $i \geq 1$ dizileri birbirinden bağımsız olduğu için,

$$\Phi_{\tau}(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} E(e^{-\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i})P\{N(x) = n\}$$

elde edilir. $\{\xi_i\}$, $i \geq 1$, rasgele değişkenleri pozitif değerli, birbirinden bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip oldukları için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}[E(e^{-\mu\xi_1})]^n P\{N(x) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_{\xi}(\mu)]^n P\{N(x) = n\} = \Psi_N(\varphi_{\xi}(\mu))$$

yazılabilir. Özetle, $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin Laplace dönüşümü, $\Phi_{\tau}(\mu) = \Psi_N(\varphi_{\xi}(\mu))$ ile gösterilebilir. Ayrıca, $\varphi_{\xi}(\mu) = E(e^{-\mu\xi_1})$ için $\varphi_{\xi}(\mu) \to 1$ olduğundan $\mu \to 0$ iken, $k = k_{\mu} = \ln(\frac{1}{\varphi_{\xi}(\mu)}) \to 0$ 'dır.

Bu taktirde,

$$\Psi_N(\varphi_\xi(\mu)) = E[\varphi_\xi(\mu)^{N(x)}] = E[e^{N(x)\ln(\varphi_\xi(\mu))}] = E[e^{-N(x)\ln(\frac{1}{\varphi_\xi(\mu)})}] = E[e^{-k_\mu N(x)}] = \varphi_N(k_\mu)$$

yazılabilir. Burada, $k_\mu = \ln(\dfrac{1}{\varphi_\xi(\mu)}) \geq 0$ 'dır. Sonuç olarak;

$$\Phi_\tau(\mu) = \Psi_N(\varphi_\xi(\mu)) = \varphi_N(k_\mu)\,,\ k_\mu \geq 0\,,\ \mu \geq 0\,,$$

olduğu görülür. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

Şimdi, Teorem 3'den sonuç olarak, $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti ile ifade edilecektir.

Teorem 4. ξ_1 ve $N(x)$ rasgele değişkenlerinin ilk dört momentleri mevcut ve sonlu olsun. Bu takdirde, $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin de ilk dört momenti mevcut ve sonludur. Ayrıca, bu momentler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

1) $E\tau(x) = \alpha_1 EN(x)\,,$

2) $E\tau^2(x) = \alpha_1^2 EN^2(x) + (\alpha_2 - \alpha_1^2)EN(x)\,,$

3) $E\tau^3(x) = \alpha_1^3 EN^3(x) + 3\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1^2)EN^2(x) + (2\alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3)EN(x)\,,$

4) $E\tau^4(x) = \alpha_1^4 EN^4(x) + 6\alpha_1^2(\alpha_2 - \alpha_1^2)EN^3(x)$

$$+(11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2)EN^2(x)$$

$$+(-6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + \alpha_4)EN(x)\,,$$

burada, $\alpha_i = E(\xi_1^i),\ \ i = 1,2,3,4$ 'dır.

İspat.

1) $\Phi_\tau(\mu) = \varphi_N(k_\mu)$ olduğundan,

$$\tilde{\Phi}_\tau(\mu) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\Phi_\tau(\mu)dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\varphi_N(k_\mu)dx = \tilde{\varphi}_N(k_\mu) \text{ 'dır.}$$

Şimdi, $\mu \to 0$ iken, yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının μ'ye göre ayrı ayrı türevi alınırsa:

$$\left.\frac{\partial\tilde{\Phi}_\tau(\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu\to 0} = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}E(\tau(x)e^{-\mu\tau(x)})dx\Big|_{\mu\to 0} = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}E(\tau(x))dx\,, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}_N(k_\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu\to 0} = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}E(k'_\mu N(x)e^{-k_\mu N(x)})dx\Big|_{\mu\to 0}$$

$$= -\lim_{\mu\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda x}k'_\mu E(N(x))dx = -\alpha_1\int_0^\infty e^{-\lambda x}E(N(x))dx \tag{5}$$

elde edilir. Ayrıca, $k_\mu = \ln(\frac{1}{\varphi_\xi(\mu)})$ tanımından, $\lim_{\mu\to 0} k'_\mu = \alpha_1$ olduğu görülür. Burada, $\alpha_i = E(\xi_1^i),\ i = 1,2,3,4$'dır. Son olarak, (4) ve (5) eşitliklerinin birbirine denk olduğu göz önünde bulundurulursa, $\tau(x)$'in ilk momenti aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\tau(x) = \alpha_1 EN(x)\,.$$

2) (4) ve (5) eşitliklerinin birbirine denk olduğu göz önünde bulundurulup, $\mu \to 0$ iken bu eşitliklerin tekrar her iki tarafının μ'ye göre ayrı ayrı türevi alınırsa:

$$\left.\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_\tau(\mu)}{\partial^2\mu}\right|_{\mu\to 0} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}E(\tau^2(x))dx\,, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_N(k_\mu)}{\partial^2\mu}\right|_{\mu\to 0} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[\left(k'_\mu\right)^2 EN^2(x) - k''_\mu EN(x)\right]dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[\left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right)EN(x) + \alpha_1^2 EN^2(x)\right]dx \tag{7}$$

elde edilir. Ayrıca, $k_\mu = \ln(\frac{1}{\varphi_\xi(\mu)})$ tanımından, $\lim_{\mu\to 0} k'_\mu = \alpha_1$ ve $\lim_{\mu\to 0} k''_\mu = \alpha_1^2 - \alpha_2$ olduğu görülür. Burada, $\alpha_i = E(\xi_1^i),\ i = 1,2,3,4$'dır. O halde, (6) ve (7) eşitliklerinin birbirine denk olduğu göz önünde bulundurulursa, $\tau(x)$'in ikinci momenti aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\tau^2(x) = \alpha_1^2 EN^2(x) + (\alpha_2 - \alpha_1^2)EN(x)\,.$$

3) (6) ve (7) eşitliklerinin birbirine denk olduğuna göre, $\mu \to 0$ iken bu eşitliklerin tekrar her iki tarafının μ'ye göre ayrı ayrı türevi alınırsa, aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\left.\frac{\partial^3\tilde{\Phi}_\tau(\mu)}{\partial^3\mu}\right|_{\mu\to0} = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}E(\tau^3(x))dx\,, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^3\tilde{\varphi}_N(k_\mu)}{\partial^3\mu}\right|_{\mu\to0} = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[k_\mu''' EN(x) - 3k_\mu'' k_\mu' EN^2(x) + \left(k_\mu'\right)^3 EN^3(x)\right]dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[\alpha_1^3 EN^3(x) + 3\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)EN^2(x)\right.$$

$$\left. + (2\alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3)EN(x)\right]dx\,. \tag{9}$$

Ayrıca, $k_\mu = \ln(\frac{1}{\varphi_\xi(\mu)})$ tanımından,

$$\lim_{\mu\to0} k_\mu' = \alpha_1\,,\ \lim_{\mu\to0} k_\mu'' = \alpha_1^2 - \alpha_2 \text{ ve } \lim_{\mu\to0} k_\mu''' = 3\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1^3 - \alpha_3\,,$$

olduğu görülür. Burada, $\alpha_i = E(\xi_1^i)$, $i = 1,2,3,4$'dır. Dolayısıyla, (8) ve (9) eşitliklerinin denkliğinden, $\tau(x)$'in üçüncü momenti aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\tau^3(x) = \alpha_1^3 EN^3(x) + 3\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)EN^2(x) + (2\alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3)EN(x)\,.$$

4) (8) ve (9) eşitliklerinin birbirine denk olduğuna göre, $\mu\to0$ iken bu eşitliklerin tekrar her iki tarafının μ'ye göre ayrı ayrı türevi alınırsa:

$$\left.\frac{\partial^4\tilde{\Phi}_\tau(\mu)}{\partial^4\mu}\right|_{\mu\to0} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}E(\tau^4(x))dx\,, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^4\tilde{\varphi}_N(k_\mu)}{\partial^4\mu}\right|_{\mu\to0} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left\{\left(k_\mu'\right)^4 EN^4(x) - 6k_\mu''\left(k_\mu'\right)^2 EN^3(x)\right.$$

$$\left. + \left(3\left(k_\mu''\right)^2 + 4k_\mu''' k_\mu'\right)EN^2(x) - k_\mu^{(IV)}EN(x)\right\}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\left\{\alpha_1^4 EN^4(x) + 6\alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_1^2)EN^3(x)\right.$$

$$+ (11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2)EN^2(x)$$

$$\left. + (-6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + \alpha_4)EN(x)\right\}dx \tag{11}$$

elde edilir. Ayrıca, $k_\mu = \ln(\frac{1}{\varphi_\xi(\mu)})$ tanımından,

$$\lim_{\mu\to0} k_\mu' = \alpha_1\,,\ \lim_{\mu\to0} k_\mu'' = \alpha_1^2 - \alpha_2\,,$$

$$\lim_{\mu\to 0} k'''_{\mu} = 3\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1^3 - \alpha_3 \ ,$$

$$\lim_{\mu\to 0} k^{(IV)}_{\mu} = 3\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 12\alpha_1^2\alpha_2 + 6\alpha_1^4 - \alpha_4$$

olduğu görülür. Burada, $\alpha_i = E(\xi_1^i)$, $i = 1,2,3,4$ 'dır. O halde, (10) ve (11) eşitliklerinin birbirine denk olduğu göz önünde bulundurulursa;

$$E\tau^4(x) = \alpha_1^4 EN^4(x) + 6\alpha_1^2(\alpha_2 - \alpha_1^2)EN^3(x)$$
$$+(11\alpha_1^4 - 18\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2)EN^2(x)$$
$$+(-6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + \alpha_4)EN(x)$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

$\tilde{E}_\lambda(N^k)$, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin $\pi\{dx\}$ dağılımına göre ortalamasını göstersin. Yani, $\tilde{E}_\lambda(N^k) = \int_0^\infty E_\lambda(N^k(x))d\pi(x)$, $k = \overline{1,4}$ olsun. Şimdi, aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 5. $(\zeta_1 - s)$ rasgele değişkeni, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun. Ayrıca, η_1 rasgele değişkeninin ilk dört momentleri mevcut ve sonlu olsun. Bu takdirde $\lambda > 0$ iken, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin de ilk dört momenti var ve sonludur. Ayrıca, bu momentlerin kesin ve açık ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

1) $\tilde{E}_\lambda(N) = \dfrac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)}$,

2) $\tilde{E}_\lambda(N^2) = \dfrac{2}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2} - \dfrac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)}$,

3) $\tilde{E}_\lambda(N^3) = \dfrac{6}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3} - \dfrac{6}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2} + \dfrac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)}$,

4) $\tilde{E}_\lambda(N^4) = \dfrac{24}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^4} - \dfrac{36}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3} + \dfrac{14}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2} - \dfrac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)}$,

burada, $\varphi_\eta(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1})$ 'dır.

İspat.

1) $N(x)$ sınır fonksiyonelinin tanımı göz önünde bulundurularak,

$$P\{N_1 > n\} = P\{z - S_1 > s; z - S_2 > s; \dots; z - S_n > s\}$$
$$= P\{z - S_n > s\} = P\{S_n < z - s\} = F_n(z-s) = F_n(x), \quad x = z - s$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$F_n(x) = P\{\ S_n \le x\} = F^{*n}(x)\,,\ n \ge 1\,;\ F_0(x) = F^{*0}(x) = \varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}\text{'dır.}$$

Diğer taraftan $\{\eta_i\}$, $i \ge 1$ dizisi birbirlerinden bağımsız oldukları için,

$$EN(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\{N(x) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left[F_{n-1}(x) - F_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \equiv U_\eta(x)\,. \tag{12}$$

olduğunu görmek zor değildir. Burada, $U_\eta(x)$ fonksiyonu $\{\eta_i\}$, $i \ge 1$ dizisinin ürettiği yenileme fonksiyonudur. Buna göre, (12) eşitliği $\lambda e^{-\lambda x}dx$ ile çarpılıp, 0'dan ∞'a integrallenirse,

$$\int_0^\infty EN(x)d\pi(x) = \int_0^\infty EN(x)\lambda e^{-\lambda x}dx$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\lambda \tilde{E}_\lambda(N) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} EN(x)dx = \lambda \tilde{U}_\eta(\lambda)$$

olduğu için, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk momenti aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{E}_\lambda(N) = \frac{1}{1 - \varphi_\eta(\lambda)}\,, \tag{13}$$

burada, $\lambda > 0$, $\varphi_\eta(\lambda) = E(e^{-\lambda \eta_1})$ 'dır.

2) $EN^2(x)$ fonksiyonunun tanımı göz önünde bulundurulursa,

$$EN^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, P\{N(x) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[F_{n-1}(x) - F_n(x)\right] \tag{14}$$

elde edilir. Buna göre, (14) eşitliği $\lambda e^{-\lambda x}dx$ ile çarpılıp, 0'dan ∞'a integrallenirse,

$$\int_0^\infty EN^2(x)d\pi(x) = \int_0^\infty EN^2(x)\lambda e^{-\lambda x}dx$$

elde edilir. Buradan, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin ikinci momentinin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\tilde{E}_{\lambda}(N^2) = \frac{2}{\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^2} - \frac{1}{1-\varphi_{\eta}(\lambda)}, \tag{15}$$

burada, $\lambda > 0$, $\varphi_{\eta}(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1})$ 'dır.

3) $EN^3(x)$ fonksiyonunun tanımı göz önünde bulundurulursa,

$$EN^3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3\, P\{N(x) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left[F_{n-1}(x) - F_n(x)\right] \tag{16}$$

elde edilir. Buna göre, (16) eşitliği $\lambda e^{-\lambda x}dx$ ile çarpılıp, 0'dan ∞'a integrallenirse,

$$\int_0^{\infty} EN^3(x)d\pi(x) = \int_0^{\infty} EN^3(x)\lambda e^{-\lambda x}dx$$

elde edilir. Buradan, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin üçüncü momentinin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\tilde{E}_{\lambda}(N^3) = \frac{6}{\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^3} - \frac{6}{\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^2} + \frac{1}{1-\varphi_{\eta}(\lambda)},\ \lambda > 0, \tag{17}$$

burada, $\varphi_{\eta}(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1})$ 'dır.

4) $EN^4(x)$ fonksiyonunun tanımı göz önünde bulundurulursa,

$$EN^4(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4\, P\{N(x) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left[F_{n-1}(x) - F_n(x)\right], \tag{18}$$

elde edilir. Buna göre, (18) eşitliği $\lambda e^{-\lambda x}dx$ ile çarpılıp, 0'dan ∞'a integrallenirse,

$$\int_0^{\infty} EN^4(x)d\pi(x) = \int_0^{\infty} EN^4(x)\lambda e^{-\lambda x}dx$$

elde edilir. Buradan, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin dördüncü momentinin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\tilde{E}_{\lambda}(N^4) == \frac{24}{\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^4} - \frac{36}{\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^3} + \frac{14}{\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^2} - \frac{1}{1-\varphi_{\eta}(\lambda)},\ \lambda > 0, \tag{19}$$

burada, $\varphi_{\eta}(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1})$ 'dır.

Uyarı. Pratik problemlerin çözümü için çoğu zaman, N_1 rasgele değişkeninin varyansı gerekmektedir. Bu nedenle aşağıda, N_1 'in varyansı verilecektir.

Sonuç 1. η_1 rasgele değişkeninin 2. momenti mevcut ve sonlu olsun. Bu takdirde, N_1 rasgele değişkenin varyansı mevcut ve sonludur. Bu taktirde, N_1 rasgele değişkeninin varyansı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathrm{Var}(N_1) = \frac{1}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2} - \frac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)}, \tag{20}$$

burada, $\varphi_\eta(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1})$ 'dır.

Sonuç 2. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenlerinin ilk iki momenti mevcut ve sonlu ise τ_1 'in beklenen değer ve varyansı aşağıdaki şekildedir.

$$\left.\begin{aligned} E_z(\tau_1) &= E_z(N_1)E(\xi_1) \\ \mathrm{Var}_z(\tau_1) &= E_z(N_1)\mathrm{Var}(\xi_1) + \mathrm{Var}(N_1)\left[E(\xi_1)\right]^2 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

İspat. τ_1 'in beklenen değeri "Wald özdeşliği" ve varyansı "Borovkov özdeşliği" kullanılarak hesaplanabilir (bkz. Feller [24]). Bu konu, kısım 2. 4'de detaylı bir biçimde incelenecektir.

2. 3. 1. Erlang Dağılımının Ürettiği Yenileme Fonksiyonu

Bu çalışmada ulaşmak istenen amaç, n=1-10. mertebeden Erlang dağılımına sahip, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği, yenileme fonksiyonu için kesin ve açık formüller elde etmek ve ayrıca, n= 1-4. mertebeden Erlang dağılımına sahip, ξ_1 rasgele değişkeninin ürettiği, yenileme sürecinin varyansları için de aşikar formüller bulmaktır.

Örnek 1. η_1 rasgele değişkeni, $n = \overline{1-10}$. mertebeden bir Erlang dağılımına sahip olsun. Bu taktirde, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonunun kesin şekli aşağıdaki gibidir:

$$U_n(t) = \frac{\lambda t}{n} + \frac{n+1}{2n} + \sum_{i=1}^{k_n} e^{-\varepsilon_{ni}\lambda t} M_{ni}(t);$$

burada, $M_{ni}(t) \equiv c_{ni}\sin(w_{ni}\lambda t) + d_{ni}\cos(w_{ni}\lambda t)$, sürekli ve sınırlı fonksiyonlar olup, ε_{ni}, $w_{ni} \in N^+$; c_{ni}, $d_{ni} \in R$ ve k_n ise n' e bağlı sayma sayılardır.

Çözüm. $\eta_1 \in \text{Erlang}(n = 3;\ \lambda = 1)$ olsun. Bu taktirde, η_1 rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,

$$\varphi_\xi(\alpha) = E(e^{-\alpha\xi}) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dF_\xi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^3 \overset{\lambda=1}{=} \frac{1}{(1+\alpha)^3} \tag{22}$$

olup, $\alpha > 0$ iken $\varphi(\alpha) \in (0,1)$'dır. Diğer taraftan, yenileme fonksiyonunun genel şeklinin aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir (bak, Feller [23], s. 358):

$$U(t) \equiv \sum_{n=0}^\infty F_\xi^{*n}(t). \tag{23}$$

(23) eşitliğinin her iki tarafına, t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{U}_3(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^\infty \left[\varphi_\xi(\alpha)\right]^n = \frac{1}{\alpha\left[1-\varphi(\alpha)\right]} \tag{24}$$

elde edilir. Ayrıca (23) eşitliği, (24) eşitliğinde yerine yazılıp, basit kesirlerine ayrılırsa;

$$\tilde{U}_3(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^3}{(\alpha+1)^3 - 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{6}\frac{1}{\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \tag{25}$$

elde edilir. Son olarak, (25) eşitliğinin her iki tarafına,, t parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanır ve t parametresinin, λ değişkenine göre lineer bağımlı olduğu göz önünde bulundurulursa, 3. mertebeden Erlang dağılımına sahip, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği, yenileme fonksiyonunun kesin ve açık şeklinin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$U_3(t) = \frac{\lambda t}{3} + \frac{2}{3} + e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\left[\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right) + \frac{\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]. \tag{26}$$

Benzer şekilde; $n=\overline{1-10}$. mertebeden Erlang dağılımına sahip, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonlarının aşikar şekli, aşağıdaki gibi elde edilir:

Tablo 1. $n=\overline{1-10}$. mertebeden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenin ürettiği yenileme fonksiyonunun hakkında

n	$U_n(t)$	n	$U_n(t)$
1	$U_1(t)=\lambda t+1$	6	$U_6(t)=\frac{\lambda t}{6}+\frac{7}{12}+\sum_{i=1}^{3}e^{-\varepsilon_{6i}\lambda t}M_{6i}(t)$
2	$U_2(t)=\frac{\lambda t}{2}+\frac{3}{4}+e^{-\varepsilon_{21}\lambda t}$	7	$U_7(t)=\frac{\lambda t}{7}+\frac{4}{7}+\sum_{i=1}^{6}e^{-\varepsilon_{7i}\lambda t}M_{7i}(t)$
3	$U_3(t)=\frac{\lambda t}{3}+\frac{2}{3}+e^{-\varepsilon_{31}\lambda t}M_{31}(t)$	8	$U_8(t)=\frac{\lambda t}{8}+\frac{9}{16}+\sum_{i=1}^{4}e^{-\varepsilon_{8i}\lambda t}M_{8i}(t)$
4	$U_4(t)=\frac{\lambda t}{4}+\frac{5}{8}+\sum_{i=1}^{2}e^{-\varepsilon_{4i}\lambda t}M_{4i}(t)$	9	$U_9(t)=\frac{\lambda t}{9}+\frac{5}{9}+\sum_{i=1}^{6}e^{-\varepsilon_{9i}\lambda t}M_{9i}(t)$
5	$U_5(t)=\frac{\lambda t}{5}+\frac{3}{5}+\sum_{i=1}^{2}e^{-\varepsilon_{5i}\lambda t}M_{5i}(t)$	10	$U_{10}(t)=\frac{\lambda t}{10}+\frac{11}{20}+\sum_{i=1}^{4}e^{-\varepsilon_{10i}\lambda t}M_{10i}(t)$

Burada, $c_{ni}, d_{ni} \in R$ olup $M_{ni}(t) \equiv c_{ni}\sin(w_{ni}\lambda t)+d_{ni}\cos(w_{ni}\lambda t)$ fonksiyonlarının aşikar şekli aşağıdaki gibidir:

$n=3$ için $\quad M_{31}(t)=\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin(\frac{\sqrt{3}t}{6}+\frac{\pi}{3})\exp(-\frac{t}{2})$,

$n=4$ için $\quad \sum_{i=1}^{2}e^{-\varepsilon_{4i}\lambda t}M_{4i}(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}\sin(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{4})\exp(-\frac{t}{4})+\frac{1}{8}\exp(-\frac{t}{2})$,

$n=5$ için $\quad \sum_{i=1}^{2}e^{-\varepsilon_{5i}\lambda t}M_{5i}(t)=\frac{4p}{5\sqrt{5}}\sin(p\frac{t}{5}+\frac{\pi}{5})\exp(-2q^2\frac{t}{5})$

$$+\frac{4t}{5\sqrt{5}}\sin(q\frac{t}{5}+\frac{2\pi}{5})\exp(-2p^2\frac{t}{5}),$$

burada $p=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ve $q=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ 'dır.

$$n=6 \text{ için } \sum_{i=1}^{3} e^{-\varepsilon_{6i}\,\lambda\, t} M_{6i}(t)=\frac{1}{3}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{\pi}{6}\Big)\exp\Big(-\frac{t}{2}\Big)$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{9}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{\pi}{3}\Big)\exp\Big(-\frac{3t}{2}\Big)+\frac{1}{12}\exp\Big(-\frac{3t}{2}\Big),$$

$$n=7 \text{ için } \sum_{i=1}^{6} e^{-\varepsilon_{7i}\,\lambda\, t} M_{7i}(t)=c_1\frac{2}{\sqrt{4-b^2}}\sin\Big(\frac{\sqrt{4-b^2}\,t}{2}\Big)\exp\Big(-\frac{(b+2)t}{2}\Big)$$

$$+c_2\cos\Big(\frac{\sqrt{4-b^2}\,t}{2}\Big)\exp\Big(-\frac{(b+2)t}{2}\Big)$$

$$+c_3\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}\left[\left(\frac{b^2-b^3+3b-6}{b-1}\right)-b\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)\right]}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{8}\left[\left(\frac{b^2-b^3+3b-6}{b-1}\right)-b\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)\right]}\,t\right)$$

$$.\exp\left(-\frac{b+4+\sqrt{\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)}}{4}t\right)$$

$$+c_4\cos\left(\sqrt{\frac{1}{8}\left[\left(\frac{b^2-b^3+3b-6}{b-1}\right)-b\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)\right]}\,t\right)\exp\left(-\frac{b+4+\sqrt{\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)}}{4}t\right)$$

$$+c_5\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}\left[\left(\frac{b^2-b^3+3b-6}{b-1}\right)+b\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)\right]}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{8}\left[\left(\frac{b^2-b^3+3b-6}{b-1}\right)+b\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)\right]}\,t\right)$$

$$.\exp\left(-\frac{b+4-\sqrt{\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)}}{4}t\right)$$

$$+c_6\cos\left(\sqrt{\frac{1}{8}\left[\left(\frac{b^2-b^3+3b-6}{b-1}\right)+b\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)\right]}\,t\right)\exp\left(-\frac{b+4-\sqrt{\left(\frac{b^2-b^3-4}{b-1}\right)}}{4}t\right),$$

burada, b sayısı $b^3-2b^2-b+1=0$ denkleminin bir köküdür.

$n=8$ için

$$\sum_{i=1}^{4} e^{-\varepsilon_{8i}\lambda t} M_{8i}(t) = \left\{ \sin\frac{\sqrt{2}t}{2}(c_4\frac{\sqrt{2}}{4}+c_5\frac{1}{2}+c_6\frac{\sqrt{2}}{4}+)+\cos\frac{\sqrt{2}t}{2}(-c_4\frac{\sqrt{2}}{4}+c_6\frac{1}{2}+c_7\frac{1}{2}+)\right\}\exp(-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})t)$$

$$+\left\{ \sin\frac{\sqrt{2}t}{2}(c_4\frac{\sqrt{2}}{4}-c_5\frac{1}{2}+c_6\frac{\sqrt{2}}{4}+)+\cos\frac{\sqrt{2}t}{2}(c_4\frac{\sqrt{2}}{4}+c_6\frac{1}{2}+c_7\frac{1}{2}+)\right\}\exp(-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})t)$$

$$+\left\{c_2\sin t+c_3\cos t\right\}\exp(-t)+c_1\sin t\exp(-2t),$$

$n=9$ için

$$\sum_{i=1}^{6} e^{-\varepsilon_{9i}\lambda t} M_{9i}(t) = c_1\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2})\exp(-\frac{3t}{2})+c_2\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2})\exp(-\frac{3t}{2})$$

$$+c_3\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+2+p\sqrt{12-3p^2}}}\sin(\frac{\sqrt{p^2+2+p\sqrt{12-3p^2}}}{2\sqrt{2}}t)\exp(-\frac{4-p+\sqrt{12-3p^2}}{4}t)$$

$$+c_4\cos(\frac{\sqrt{p^2+2+p\sqrt{12-3p^2}}}{2\sqrt{2}}t)\exp(-\frac{4-p+\sqrt{12-3p^2}}{4}t)$$

$$+c_5\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+2-p\sqrt{12-3p^2}}}\sin(\frac{\sqrt{p^2+2-p\sqrt{12-3p^2}}}{2\sqrt{2}}t)\exp(-\frac{4-p-\sqrt{12-3p^2}}{4}t)$$

$$+c_6\cos(\frac{\sqrt{p^2+2-p\sqrt{12-3p^2}}}{2\sqrt{2}}t)\exp(-\frac{4-p-\sqrt{12-3p^2}}{4}t),$$

burada, burada, p sayısı $p^3-3b+1=0$ denkleminin bir kökü ve $p\in(1,2)$ ’dır.

$n=10$ için

$$\sum_{i=1}^{4} e^{-\varepsilon_{10i}\lambda t} M_{10i}(t) = c_1 e^{-2t}+c_2\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\sin(\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t)\exp(-\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)t)$$

$$+c_3\cos(\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t)\exp(-\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)t)+c_4\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\sin(\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t)\exp(-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)t)$$

$$+c_5 \cos\left(\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t\right)\exp\left(-\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)t\right) + c_6 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\sin\left(\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t\right)\exp\left(-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)t\right)$$

$$+c_7 \cos\left(\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t\right)\exp\left(-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)t\right) + c_8 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\sin\left(\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t\right)\exp\left(-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)t\right)$$

$$+c_7 \cos\left(\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)t\right)\exp\left(-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)t\right).$$

Ayrıca, aşağıdaki tablodaki ε_{n1}'in yaklaşık değerleri incelendiğinde, azalan değerlere sahip olduğu görülür. Bu azalan değerler ise; $n=\overline{1-10}$. mertebeden Erlang dağılımına sahip η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonlarının, yakınsama hızı hakkında önemli bilgiler verir. Sonuç olarak, yenileme fonksiyonun n'in artan değerlerinde 0'a yaklaştığı görülür.

Tablo 2. $n=\overline{1-10}$. mertebeden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonlarının yakınsama hızı hakkında

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε_{n1}	∞	2	1,5	1	0,69...	0,5	0,37...	0,29...	0,23...	0,19...

Örnek 2. η_1 rasgele değişkeni, n=1-4. mertebeden bir Erlang dağılımına sahip olsun. Bu taktirde, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği, yenileme sürecinin varyansları için aşikar formüller genel olarak aşağıdaki gibidir:

$$Var(N(t)) = a_n \lambda t + b_n + e^{-\varepsilon_n \lambda t} M_n(t),$$

burada, $M_n(t) \equiv (c_n \lambda t + d_n)\sin(w_n \lambda t) + (p_n \lambda t + q_n)\cos(w_n \lambda t)$ şeklinde sürekli ve sınırlı fonksiyonlar olup, $c_n, d_n, p_n, q_n \in R$, $a_n, b_n, \varepsilon_n, w_n \in N^+$ dır.

Çözüm. $\eta_1 \in \text{Erlang}(n=3;\ \lambda=1)$ olsun. Bu taktirde, η_1'nin moment çıkaran fonksiyonu,

$$\varphi_\xi(\alpha) = E(e^{-\alpha\xi}) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dF_\xi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^3 \overset{\lambda=1}{=} \frac{1}{(1+\alpha)^3} \text{ 'dır.} \qquad (27)$$

Diğer taraftan, U(t) yenileme fonksiyonunun 2. momenti, aşağıdaki gibidir:

$$U(t) = EN^2(t) = \sum_{n=1}^\infty n^2 P\{N(t)=n\} = \sum_{n=0}^\infty n^2 [F^{*n-1}(t) - F^{*n}(t)]. \qquad (28)$$

(28) eşitliğinin her iki tarafına, t parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{U}_2(\alpha) = \left(\frac{1-\varphi(\alpha)}{\alpha}\right) \sum_{n=0}^\infty n^2 \left(\varphi_\xi(\alpha)\right)^{n-1} = \frac{2}{\alpha\left(1-\varphi(\alpha)\right)^2} - \frac{1}{\alpha\left(1-\varphi(\alpha)\right)} \qquad (29)$$

elde edilir. Ayrıca, (27) eşitliği, (29) eşitliğinde yerine yazılıp, basit kesirlerine ayrılırsa;

$$\tilde{U}_2(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{5}{9\alpha} + \frac{2}{9\alpha^2} + \frac{5}{9\left[\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} - \frac{17\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{9\left[\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} - \frac{13}{6\left[\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2}$$

elde edilir. Son olarak, yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına, t parametresine göre ters Laplace dönüşümü uygulanır ve t parametresinin, λ değişkenine lineer bağımlı olduğu göz önünde bulundurulursa, 3. mertebeden Erlang dağılımına sahip, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği, yenileme fonksiyonunun 2. momentinin kesin ve açık şeklinin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$U_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{9} + \frac{5\lambda t}{9} + 1 - e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\left[\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t + \left(\frac{17\sqrt{3}\lambda t}{27}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t - \left(\frac{13\lambda t}{9}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right]$$

Yukarıdaki eşitlikten, $U_1(t) = \lambda t + 1$ 'nin karesi alınıp çıkarılırsa, istenilen yenileme fonksiyonunun varyansının aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$Var(N(t)) = \frac{\lambda t}{9} + \frac{5}{9} - e^{-\frac{3\lambda t}{2}}\left(\frac{19\sqrt{3}\lambda t + 40\sqrt{3}}{27}\right)\sin\frac{\sqrt{3}\ \lambda\ t}{2} + e^{-\frac{3\lambda t}{2}}\left(\frac{4-11\lambda t}{9}\right)\cos\frac{\sqrt{3}\lambda t}{2} + o(1)$$

Benzer şekilde; $n = \overline{1-4}$. mertebeden Erlang dağılımına sahip, η_1 rasgele değişkeninin ürettiği yenileme fonksiyonlarının varyansının kesin ve açık şekli aşağıdaki gibi elde edililir:

Tablo 3. $n=\overline{1-4}$. mertebeden Erlang dağılımına sahip rasgele değişkenin ürettiği yenileme sürecinin varyansı hakkında

n	Var(N(t))
1	λt
2	$\frac{\lambda t}{4}+\frac{1}{16}-t e^{-2\lambda t}-\frac{e^{-2t}}{16}$
3	$\frac{\lambda t}{9}+\frac{5}{9}-e^{-\frac{3\lambda t}{2}}\left(\frac{19\sqrt{3}\lambda t+40\sqrt{3}}{27}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}\lambda t}{2}\right)+e^{-\frac{3\lambda t}{2}}\left(\frac{-11\lambda t+4}{9}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\lambda t}{2}\right)+o(1)$
4	$\frac{\lambda t}{16}+\frac{5}{32}+e^{-\lambda t}\left(\frac{-7\lambda t+2}{16}\right)\sin(\lambda t)-\frac{5}{16}e^{-\lambda t}\cos(\lambda t)+o(1)$

2. 4. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin Momentleri için Asimptotik Açılımlar

Önceki kısımda, $X(t)$ sürecinin $[s,+\infty)$ aralığının aşağı sınırına ilk kez ulaşma anı olan $\tau(x)$ ve bu ana kadar olan sıçramaların sayısını gösteren $N(x)$ sınır fonksiyonellerinin ilk dört başlangıç momentleri arasındaki matematiksel bağıntı kesin formüllerle ifade edildi. Fakat bu formüllerin karmaşık matematiksel yapılarından dolayı, pratik problemlerin çözümlenmesinde kullanılması zordur. Bu nedenle, pratikte daha kolay uygulanabilir formüllerin elde edilmesi gereksinimi vardır. Böyle ifadeler genelde aşağıdaki yöntemlerle elde edilebilir:

1) Özel durumları ele alınarak, daha küçük sınıflar için açık ve pratik formüllerin elde edilmesi,

2) Simülasyon yöntemlerin yardımıyla nümerik sonuçların elde edilmesi,

3) Asimptotik yöntemlerin uygulanması ile yaklaşık formüllerin elde edilmesi.

Not edilmelidir ki,

1. Yöntem, ele alınan süreçler sınıfını daraltır. Dolayısıyla hem teorik, hem de pratik yönden önemli olan bir çok problemlerin çözümünde araştırmacıya yardımcı olamaz.

2. Yöntem, sayısal veriler talep ettiği için ve sonuçları sayısal biçimde ortaya koyduğu için somut bir problemin çözümünde faydalı olsa da genelleme yapılmasına imkan sağlamaz.

3. Yöntem olan asimptotik yaklaşım, son yıllarda matematiğin bir çok alanında olduğu gibi olasılık teorisinde de büyük rağbet görmektedir. Çünkü, bu yöntemin yardımıyla elde ettiğimiz sonuçların, yaklaşık formüller olmalarına rağmen çoğu zaman bilginin büyük kısmını içermekte, diğer taraftan ise, araştırmacıların kolaylıkla kullanabilecekleri sadeliğe sahip olmakta ve çoğu zaman ele alınan süreçler sınıfını daraltmayan ve dolayısıyla, büyük sınıflar için genel kuralların elde edilmesine imkan sağlayan yöntemdir.

Bütün bu nedenler göz önünde bulundurularak bu çalışmada, ele alınan $X(t)$ sürecinin gerekli olasılık karakteristiklerini asimptotik yöntemlerle incelenmesi amaç edinilmiştir.

Teorem 6. $E\eta_1 < 0$ ve $E(\eta_1)^3 < \infty$ olsun. Bu taktirde, $x \to \infty$ iken $EN(x)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$EN(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\frac{1}{x}),$$

burada, $m_i = E(\eta_1^i)$, $i = 1,2$ 'dır.

İspat. $E\eta_1 < 0$ ve $E(\eta_1)^3 < \infty$ olsun. Bu taktirde, $x \to \infty$ iken $EN(x)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur (bak, örneğin, Shurenkov [8]):

$$EN(x) = \frac{x}{m_1} + \frac{m_2}{2m_1^2} + o(\frac{1}{x}).$$

$N(x)$ yenileme sürecinin 2. ve daha yüksek mertebeden momentleri için, bazı önemli asimptotik sonuçlar literatürde mevcuttur. (bak, Feller [23, 24], Smith [76, 77, 78], Brown ve Solomon [14]). Fakat bu çalışmada, $N(x)$' in 2., 3. ve 4. momentleri farklı bir yöntemle hesaplanacaktır.

Teorem 7. $E\eta_1 < 0$ ve $E(\eta_1)^3 < \infty$ olsun. Bu taktirde, $x \to \infty$ iken $EN^2(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$EN^2(x) = \frac{x^2}{m_1^2} + \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)x + \left(\frac{3m_2^2}{2m_1^4} - \frac{2m_3}{3m_1^3} - \frac{m_2}{2m_1^2}\right) + o(1)$$

burada, $m_i = E(\eta_1^i)$, $i = 1,2,3$ 'dır.

İspat. Bu sonuca ulaşmak için, Teorem 5'deki yöntemler kullanılır. Diğer taraftan,

$$EN^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, P\{N(x)=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, P\{N(x)=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[F_{n-1}(x) - F_n(x)\right] \qquad (30)$$

elde edilir. Öncelikle, $EN^2(x)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını incelemek için aşağıdaki notasyonlar dahil edilsin:

$$R_2(x) = EN^2(x) - \frac{x^2}{m_1^2} - \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)x, \quad x > 0 \;; \quad \varphi_\eta(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1}), \; \lambda > 0.$$

(30) eşitliğinin her iki tarafına x parametresine göre Laplace dönüşümünü uygulanırsa:

$$\tilde{R}_2(\lambda) = \frac{1-\varphi_\eta(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n^2\left(\varphi_\eta(\lambda)\right)^{n-1} - \frac{2}{\lambda^3 m_1^2} - \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2} \qquad (31)$$

elde edilir. Burada $\tilde{R}_2(\lambda)$ ile $R_2(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü gösterilmiştir.

Not edilmelidir ki, $|x| < 1$ olduğu taktirde, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2\, x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Yukarıdaki eşitlikten yararlanarak formül (31) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{R}_2(\lambda) = \frac{2}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3} - \frac{1}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2} - \frac{2}{\lambda^3 m_1^2} - \left(\frac{2m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}. \qquad (32)$$

Şimdi, $\tilde{R}_2(\lambda)$ 'nın asimptotik davranışı incelenecektir. Bu amaç için öncelikle $\lambda \to 0$ iken, $\varphi_\eta(\lambda) = E(e^{-\lambda\eta_1})$ fonksiyonunun Maclauren serisi göz önüne alınsın. Bu durumda, $E(\eta_1)^3 < \infty$ koşulu altında, $m_{k1} = \frac{m_k}{m_1^k}$, $k = 2,3,\ldots$ notasyonu göz önünde bulundurularak, aşağıdaki Maclauren serisini yazmak mümkündür: (bak, örneğin, Lukac, s.23):

$$1-\varphi_\eta(\lambda) = \lambda m_1\left(1 - \frac{\lambda}{2}m_{21} + \frac{\lambda^2}{6}m_{31} + o(\lambda^3)\right).$$

Buradan, $\lambda \to 0$ iken,

$$\frac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)} = \frac{1}{\lambda m_1\left(1 - \frac{\lambda}{2}m_{21} + \frac{\lambda^2}{6}m_{31} + o(\lambda^3)\right)}$$

$$= \frac{1}{\lambda m_1}\left[1 + \frac{\lambda}{2}m_{21} - \left(\frac{m_{21}^2}{4} - \frac{m_{31}}{6}\right)\lambda^2 + o(\lambda^3)\right]$$

elde edilir. Yani,

$$\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda m_1}\left[1+\frac{\lambda}{2}m_{21}-\left(\frac{m_{21}^2}{4}-\frac{m_{31}}{6}\right)\lambda^2+o(\lambda^3)\right] \tag{33}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan kolayca görülebilir ki:

$$\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\lambda m_1\right)^2}\left[1+\lambda m_{21}+\lambda^2\left(\frac{3}{4}m_{21}^2-\frac{1}{3}m_{31}\right)+o(\lambda^3)\right]\text{'dır.}$$

Bu açılım, (32) eşitliğinde yerine yazılır ve uygun hesaplamalar yapılırsa, $\lambda\to 0$ iken,

$$\lambda\tilde{R}_2(\lambda)=\frac{3}{2}m_{21}^2-\frac{1}{2}m_{21}-\frac{2}{3}m_{31}+o(1) \tag{34}$$

olduğu görülür. (33) eşitliğinde $\lambda\to 0$ iken limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\tilde{R}_2(\lambda)=\frac{1}{6}\left(9m_{21}^2-3m_{21}-4m_{31}\right) \tag{35}$$

elde edilir. Tauber-Abel teoremleri (bak, örneğin, Feller [23], s.442) göz önünde bulundurarak, (35) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\lim_{x\to\infty}R_2(x)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda\tilde{R}_2(\lambda)=\frac{1}{6}\left(9m_{21}^2-3m_{21}-4m_{31}\right).$$

Bu sonuç $x\to\infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_2(x)=\frac{1}{6}\left(9m_{21}^2-3m_{21}-4m_{31}\right)+o(1).$$

Dolayısıyla, Teorem 7'nin koşulları altında $x\to\infty$ iken,

$$EN^2(x)=\frac{x^2}{m_1^2}+\left(\frac{2m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)x+\left(\frac{3m_2^2}{2m_1^4}-\frac{2m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}\right)+o(1)$$

asimptotik açılımı yazılabilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 8. $E\eta_1<0$ ve $E\left(\eta_1\right)^3<\infty$ olsun. Bu taktirde, $x\to\infty$ iken $EN^3(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$EN^3(x)=\frac{x^3}{m_1^3}+\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)x^2+\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)x+O(1),$$

burada, $m_i=E\left(\eta_1^i\right),\quad i=1,2,3$ 'dır.

İspat. Her $x>0$ için,

$$R_3(x) = EN^3(x) - \frac{x^3}{m_1^3} - \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)x^2 - \left(\frac{9m_2^2}{m_1^5} - \frac{3m_3}{m_1^4} - \frac{6m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right)x \tag{36}$$

olsun. Diğer taraftan,

$$EN^3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3\, P\{N(x)=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3\, P\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i \le x < \sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left[P\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i \le x\right\} - P\left\{\sum_{i=1}^{n}\eta_i \le x\right\}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left[F_{n-1}(x) - F_n(x)\right] \tag{37}$$

elde edilir. (36) eşitliğinin her iki tarafına, x parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa ve (37) eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$\tilde{R}_3(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \left(\varphi_\eta^{n-1}(\lambda) - \varphi_\eta^{n}(\lambda)\right) - \frac{6}{\lambda^4 m_1^3}$$

$$-\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3} - \left(\frac{9m_2^2}{m_1^5} - \frac{3m_3}{m_1^4} - \frac{6m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1-\varphi_\eta(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \left(\varphi_\eta(\lambda)\right)^{n-1} - \frac{6}{\lambda^4 m_1^3}$$

$$-\left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3} - \left(\frac{9m_2^2}{m_1^5} - \frac{3m_3}{m_1^4} - \frac{6m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2} \tag{38}$$

elde edilir. Not edilmelidir ki, $|x| < 1$ olduğu taktirde, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3\, x^{n-1} = \frac{6x^2}{(1-x)^4} + \frac{6x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}\,. \tag{39}$$

Her $\lambda > 0$ için $|\varphi_\eta(\lambda)| = |E(e^{-\lambda\eta_1})| < 1$ olduğuna göre (39) eşitliğini, (38) eşitliğinde uygulamak mümkündür. Bu durumda $\tilde{R}_3(\lambda)$, aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\tilde{R}_3(\lambda) = \frac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)}\left[\frac{6\varphi_\eta^2(\lambda)}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^4} - \frac{6\varphi_\eta(\lambda)}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3} + \frac{1}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}\right]$$

$$-\frac{6}{\lambda^4 m_1^3} - \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3} - \left(\frac{9m_2^2}{m_1^5} - \frac{3m_3}{m_1^4} - \frac{6m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{6\varphi_\eta^2(\lambda)}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3} - \frac{6\varphi_\eta(\lambda)}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2} + \frac{1}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}$$

$$-\frac{6}{\lambda^4 m_1^3}-\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}-\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{6\left[\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2-2\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)+1\right]}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3}-\frac{6\left[\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)-1\right]}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}+\frac{1}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}$$

$$-\frac{6}{\lambda^4 m_1^3}-\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}-\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}-\frac{12}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}+\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3}-\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}$$

$$+\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}-\frac{1}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}-\frac{6}{\lambda^4 m_1^3}$$

$$-\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}-\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3}-\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}-\frac{1}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}$$

$$-\frac{6}{\lambda^4 m_1^3}-\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}-\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}.$$

Sonuç olarak, $\tilde{R}_3(\lambda)$ fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\tilde{R}_3(\lambda)=\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3}-\frac{6}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}+\frac{1}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}$$

$$-\frac{6}{\lambda^4 m_1^3}-\left(\frac{9m_2}{2m_1^4}-\frac{3}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}-\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}-\frac{6m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)\frac{1}{\lambda^2}. \quad (40)$$

Teorem 7. (33)'den, $\lambda\to 0$ iken, $E\left(\eta_1\right)^3<\infty$ koşulu sağlandığında;

$$\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda m_1}\left[1+\frac{\lambda}{2}m_{21}-\left(\frac{m_{21}^2}{4}-\frac{m_{31}}{6}\right)\lambda^2+o(\lambda^3)\right] \quad (41)$$

olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan kolayca görülebilir ki:

$$\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\lambda m_1\right)^2}\left[1+\lambda m_{21}+\lambda^2\left(\frac{3}{4}m_{21}^2-\frac{1}{3}m_{31}\right)+o(\lambda^3)\right], \quad (42)$$

$$\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\lambda m_{1}\right)^{3}}\left[1+\frac{3\lambda}{2}m_{21}+\frac{\lambda^{2}}{2}\left(3m_{21}^{2}-m_{31}\right)+o(\lambda^{3})\right]\text{'dır.} \tag{43}$$

(41), (42) ve (43) asimptotik açılımlarını (40) eşitliğinde yerine yazılırsa, aşağıdaki asimptotik açılımı elde etmek mümkündür:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{3}(\lambda)=&\frac{6}{\lambda}\frac{1}{\left(\lambda m_{1}\right)^{3}}\left[1+\frac{3\lambda}{2}m_{21}+\frac{\lambda^{2}}{2}\left(3m_{21}^{2}-m_{31}\right)+o(\lambda^{3})\right]\\
&-\frac{6}{\lambda}\frac{1}{\left(\lambda m_{1}\right)^{2}}\left[1+\lambda m_{21}+\lambda^{2}\left(\frac{3}{4}m_{21}^{2}-\frac{1}{3}m_{31}\right)+o(\lambda^{3})\right]\\
&+\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda m_{1}}\left[1+\frac{\lambda}{2}m_{21}-\left(\frac{m_{21}^{2}}{4}-\frac{m_{31}}{6}\right)\lambda^{2}+o(\lambda^{3})\right]\\
&-\frac{6}{\lambda^{4}m_{1}^{3}}-\left(\frac{9m_{2}}{2m_{1}^{4}}-\frac{3}{m_{1}^{2}}\right)\frac{2}{\lambda^{3}}-\left(\frac{9m_{2}^{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{3m_{3}}{m_{1}^{4}}-\frac{6m_{2}}{m_{1}^{3}}+\frac{1}{m_{1}}\right)\frac{1}{\lambda^{2}}\\
=&\frac{6}{\lambda^{4}m_{1}^{3}}+\frac{9m_{2}}{\lambda^{3}m_{1}^{4}}+\frac{6}{\lambda^{2}m_{1}^{3}}\left(\frac{3m_{2}^{2}}{2m_{1}^{2}}-\frac{m_{3}}{2m_{1}}\right)+O(\frac{1}{\lambda})\\
&-\frac{6}{\lambda^{3}m_{1}^{2}}-\frac{6m_{2}}{\lambda^{2}m_{1}^{3}}+O(\frac{1}{\lambda})+\frac{1}{\lambda^{2}m_{1}}+O(\frac{1}{\lambda})\\
&-\frac{6}{\lambda^{4}m_{1}^{3}}-\left(\frac{9m_{2}}{2m_{1}^{4}}-\frac{3}{m_{1}^{2}}\right)\frac{2}{\lambda^{3}}-\left(\frac{9m_{2}^{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{3m_{3}}{m_{1}^{4}}-\frac{6m_{2}}{m_{1}^{3}}+\frac{1}{m_{1}}\right)\frac{1}{\lambda^{2}}\\
=&\frac{6}{\lambda^{4}m_{1}^{3}}+\frac{9m_{2}-6m_{1}^{2}}{\lambda^{3}m_{1}^{4}}+\frac{1}{\lambda^{2}}\left(\frac{9m_{2}^{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{3m_{3}}{m_{1}^{4}}-\frac{6m_{2}}{m_{1}^{3}}+\frac{1}{m_{1}}\right)+O(\frac{1}{\lambda})\\
&-\frac{6}{\lambda^{4}m_{1}^{3}}-\left(\frac{9m_{2}}{2m_{1}^{4}}-\frac{3}{m_{1}^{2}}\right)\frac{2}{\lambda^{3}}-\left(\frac{9m_{2}^{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{3m_{3}}{m_{1}^{4}}-\frac{6m_{2}}{m_{1}^{3}}+\frac{1}{m_{1}}\right)\frac{1}{\lambda^{2}}.
\end{aligned}$$

$\tilde{R}_{3}(\lambda)$'nin asimptotik açılımı aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{3}(\lambda)=&\left(\frac{9m_{2}}{m_{1}}-6\right)\frac{1}{\lambda^{3}m_{1}^{2}}+\left(\frac{9m_{2}^{2}}{m_{1}^{2}}-\frac{3m_{3}}{m_{1}}-\frac{6m_{2}}{m_{1}}+1\right)\frac{1}{\lambda^{2}m_{1}}-\frac{6}{\lambda^{4}m_{1}^{3}}\\
&-\left(\frac{9m_{2}}{2m_{1}^{4}}-\frac{3}{m_{1}^{2}}\right)\frac{2}{\lambda^{3}}-\left(\frac{9m_{2}^{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{3m_{3}}{m_{1}^{4}}-\frac{6m_{2}}{m_{1}^{3}}+\frac{1}{m_{1}}\right)\frac{1}{\lambda^{2}}+O(\frac{1}{\lambda}).
\end{aligned} \tag{44}$$

Bu durumda, $\tilde{R}_3(\lambda)$ Laplace dönüşümü $\lambda \to 0$ iken,

$$\tilde{R}_3(\lambda) = O(\frac{1}{\lambda}) \tag{45}$$

olduğu kolayca görülür. (45) bağıntısına Tauber-Abel teoremleri uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty} R_3(x) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda \tilde{R}_3(\lambda) = \text{sabit}$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise, $x \to \infty$ iken, $R_3(x) = O(1)$ olması anlamına gelir. Buradan, $E(\eta_1)^3 < \infty$ koşulu sağlandığında $x \to \infty$ iken,

$$EN^3(x) = \frac{x^3}{m_1^3} + \left(\frac{9m_2}{2m_1^4} - \frac{3}{m_1^2}\right)x^2 + \left(\frac{9m_2^2}{m_1^5} - \frac{3m_3}{m_1^4} - \frac{6m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1}\right)x + O(1)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 9. $E\eta_1 < 0$ ve $E(\eta_1)^3 < \infty$ olsun. Bu taktirde, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin 4. momenti mevcut ve sonludur. Bu durumda, $x \to \infty$ iken $EN^4(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik sonuç doğrudur:

$$EN^4(x) = \frac{x^4}{m_1^4} + \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{6}{m_1^3}\right)x^3 + \left(\frac{30m_2^2}{m_1^6} - \frac{8m_3}{m_1^5} - \frac{27m_2}{m_1^4} + \frac{7}{m_1^2}\right)x^2 + O(1),$$

burada, $m_i = E(\eta_1^i)$, $i = 1,2,3$ 'dır.

İspat. Her $x > 0$ için

$$R_4(x) = EN^4(x) - \frac{x^4}{m_1^4} - \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{6}{m_1^3}\right)x^3 - \left(\frac{30m_2^2}{m_1^6} - \frac{8m_3}{m_1^5} - \frac{27m_2}{m_1^4} + \frac{7}{m_1^2}\right)x^2 \tag{46}$$

olsun. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} EN^4(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^4\, P\{N(x) = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^4\, P\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i \le x < \sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left[P\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i \le x\right\} - P\left\{\sum_{i=1}^{n}\eta_i \le x\right\}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left[F_{n-1}(x) - F_n(x)\right] \text{'dır.} \end{aligned} \tag{47}$$

(46) eşitliğinin her iki tarafına x parametresine göre Laplace dönüşümü uygulanırsa ve (47) formülü göz önünde bulundurulursa,

$$\tilde{R}_4(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}n^4\left(\varphi_\eta^{n-1}(\lambda)-\varphi_\eta^{n}(\lambda)\right)-\frac{24}{\lambda^5 m_1^4}$$

$$-\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)\frac{6}{\lambda^4}-\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{27m_2}{m_1^4}+\frac{7}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}$$

$$=\frac{1-\varphi_\eta(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}n^3\left(\varphi_\eta(\lambda)\right)^{n-1}-\frac{24}{\lambda^5 m_1^4}$$

$$-\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)\frac{6}{\lambda^4}-\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{27m_2}{m_1^4}+\frac{7}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3} \tag{48}$$

elde edilir. Not edilmelidir ki, $|x|<1$ olduğu taktirde aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^4\,x^{n-1}=\frac{24}{(1-x)^5}-\frac{36}{(1-x)^4}+\frac{14}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}\,. \tag{49}$$

Her $\lambda>0$ için $|\varphi_\eta(\lambda)|=|E(e^{-\lambda\eta_1})|<1$ olduğuna göre (49) eşitliğini, (48) formülünde uygulamak mümkündür. Bu durumda $\tilde{R}_4(\lambda)$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\tilde{R}_4(\lambda)=\frac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)}\left[\frac{24}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^5}-\frac{36}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^4}+\frac{14}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3}-\frac{1}{\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}\right]$$

$$-\frac{24}{\lambda^5 m_1^4}-\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)\frac{6}{\lambda^4}-\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{27m_2}{m_1^4}+\frac{7}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}\,.$$

Dolayısıyla, $\tilde{R}_4(\lambda)$ fonksiyonunun, aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\tilde{R}_4(\lambda)=\frac{24}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^4}-\frac{36}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^3}+\frac{14}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^2}-\frac{1}{\lambda\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)}$$

$$-\frac{24}{\lambda^5 m_1^4}-\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{6}{m_1^3}\right)\frac{6}{\lambda^4}-\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{27m_2}{m_1^4}+\frac{7}{m_1^2}\right)\frac{2}{\lambda^3}\,. \tag{50}$$

Teorem 7. (33)'den, $\lambda\to 0$ iken, $E\left(\eta_1\right)^3<\infty$ koşulu sağlandığında;

$$\left(1-\varphi_\eta(\lambda)\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda m_1}\left[1+\frac{\lambda}{2}m_{21}-\left(\frac{m_{21}^2}{4}-\frac{m_{31}}{6}\right)\lambda^2+o(\lambda^3)\right] \tag{51}$$

olduğu bilinmektedir.

Diğer taraftan kolayca görülebilir ki:

$$\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\lambda m_{1}\right)^{2}}\left[1+\lambda m_{21}+\lambda^{2}\left(\frac{3}{4}m_{21}^{2}-\frac{1}{3}m_{31}\right)+o(\lambda^{3})\right], \tag{52}$$

$$\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\lambda m_{1}\right)^{3}}\left[1+\frac{3\lambda}{2}m_{21}+\frac{\lambda^{2}}{2}\left(3m_{21}^{2}-m_{31}\right)+o(\lambda^{3})\right], \tag{53}$$

$$\left(1-\varphi_{\eta}(\lambda)\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\lambda m_{1}\right)^{4}}\left[24+\lambda\left(48m_{21}-36m_{1}\right)\right.$$

$$\left.+\lambda^{2}\left(60m_{21}^{2}-16m_{31}-54m_{2}+14m_{1}^{2}\right)+o(\lambda^{3})\right] \tag{54}$$

(51), (52), (53) ve (54) asimptotik açılımları (50) eşitliğinde yerine yazıldığında, aşağıdaki asimptotik açılımı elde etmek mümkündür:

$$R_{4}(\lambda)=-\frac{24}{\lambda^{5}m_{1}^{4}}-\left(\frac{8m_{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{6}{m_{1}^{3}}\right)\frac{6}{\lambda^{4}}-\left(\frac{30m_{2}^{2}}{m_{1}^{6}}-\frac{8m_{3}}{m_{1}^{5}}-\frac{27m_{2}}{m_{1}^{4}}+\frac{7}{m_{1}^{2}}\right)\frac{2}{\lambda^{3}}+O(\frac{1}{\lambda})$$

$$+\frac{24}{\lambda^{5}m_{1}^{4}}+\left(\frac{8m_{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{6}{m_{1}^{3}}\right)\frac{6}{\lambda^{4}}+\left(\frac{30m_{2}^{2}}{m_{1}^{6}}-\frac{8m_{3}}{m_{1}^{5}}-\frac{27m_{2}}{m_{1}^{4}}+\frac{7}{m_{1}^{2}}\right)\frac{2}{\lambda^{3}} \tag{55}$$

Bu durumda, $\tilde{R}_{4}(\lambda)$ Laplace dönüşümü $\lambda\to 0$ iken,

$$\tilde{R}_{4}(\lambda)=O(\frac{1}{\lambda}) \tag{56}$$

olduğu kolayca görülür. (56) bağıntısına Tauber-Abel teoremleri uygulanırsa,

$$\lim_{x\to\infty}R_{4}(x)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda\tilde{R}_{4}(\lambda)=\text{sabit}$$

olduğu ortaya çıkar. Bu ise, $x\to\infty$ iken, $R_{4}(x)=O(1)$ olması anlamına gelir. Buradan, $E\left(\eta_{1}\right)^{3}<\infty$ koşulu sağlandığında $x\to\infty$ iken,

$$EN^{4}(x)=\frac{x^{4}}{m_{1}^{4}}+\left(\frac{8m_{2}}{m_{1}^{5}}-\frac{6}{m_{1}^{3}}\right)x^{3}+\left(\frac{30m_{2}^{2}}{m_{1}^{6}}-\frac{8m_{3}}{m_{1}^{5}}-\frac{27m_{2}}{m_{1}^{4}}+\frac{7}{m_{1}^{2}}\right)x^{2}+O(1)$$

elde edilir.

Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Sonuç 3. $E\left(\xi_{1}^{3}\right)<\infty$ ve $E\left(\eta_{1}^{3}\right)<\infty$ olsun. Bu taktirde, $x\to\infty$ iken $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört momenti için aşağıdaki asimptotik sonuçlar yazılabilir:

1) $E\tau(x)=\left(\dfrac{\alpha_1}{m_1}\right)x+\left(\dfrac{m_2}{2m_1^2}\right)\alpha_1+o(\dfrac{1}{x})$,

2) $E\tau^2(x)=\left(\dfrac{\alpha_1}{m_1}\right)^2x^2+\left[\dfrac{\alpha_2-\alpha_1^2}{m_1}+\left(\dfrac{2m_2}{m_1^3}-\dfrac{1}{m_1}\right)\alpha_1^2\right]x+\left(\dfrac{3m_2^2}{2m_1^4}-\dfrac{2m_3}{m_1^3}-\dfrac{m_2}{2m_1^2}\right)\alpha_1^2+o(1)$,

3) $E\tau^3(x)=\left(\dfrac{\alpha_1}{m_1}\right)^3x^3+\left[\left(\dfrac{9m_2}{2m_1^4}-\dfrac{6}{m_1^2}\right)\alpha_1^3+\left(\dfrac{3}{m_1^2}\right)\alpha_1\alpha_2\right]x^2$

$$+\left[\left(\frac{9m_2^2}{m_1^5}-\frac{3m_3}{m_1^4}+\frac{6}{m_1}\right)\alpha_1^3+\left(\frac{6m_2}{m_1^3}-\frac{6}{m_1}\right)\alpha_1\alpha_2+\left(\frac{1}{m_1}\right)\alpha_3\right]x+O(1),$$

4) $E\tau^4(x)=\left(\dfrac{\alpha_1}{m_1}\right)^4x^4+\left[\left(\dfrac{8m_2}{m_1^5}-\dfrac{12}{m_1^3}\right)\alpha_1^3+\left(\dfrac{6}{m_1^3}\right)\alpha_1^2\alpha_2\right]x^3$

$$+\left[\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{54m_2}{m_1^4}+\frac{36}{m_1^2}\right)\alpha_1^3\right.$$

$$\left.+\left(\frac{27m_2}{m_1^4}-\frac{36}{m_1^2}\right)\alpha_1^2\alpha_2+\left(\frac{1}{m_1^2}\right)\left(3\alpha_2^2+4\alpha_3\alpha_1\right)\right]x^2+O(x^2),$$

burada, $\alpha_i=E(\xi_1^i),\quad i=1,2,3$ 'dır.

Uyarı. Bazı uygulamalarda, merkezi momentlerin bilinmesi daha kullanışlıdır. Bu nedenle bu çalışmada, $\tau(x)$ ve $N(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momenti için iki terimli asimptotik sonuçlar da verilecektir.

Teorem 10. $\mu_k(x)=E[\tau(x)-E\tau(x)]^k$, $k=1,2,3,4$ ve $E\left(\xi_1^3\right)<\infty$, $E\left(\eta_1^3\right)<\infty$ olsun. Bu taktirde, $x\to\infty$ iken $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momentin için iki terimli asimptotik açılım aşağıdaki yazılabilir:

1) $\mu_1(x)=0$,

2) $\mu_2(x)=\left[\left(\dfrac{m_2}{m_1^3}-\dfrac{1}{m_1}\right)\alpha_1^2+\left(\dfrac{1}{m_1}\right)\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)\right]x+\left[\left(\dfrac{11m_2^2}{4m_1^4}-\dfrac{2m_3}{3m_1^3}-\dfrac{m_2}{2m_1^2}\right)\alpha_1^2\right]+o(1)$,

3) $\mu_3(x)=\dfrac{15m_2\alpha_1^3x^2}{2m_1^4}+\left[\left(\dfrac{3m_3}{m_1^4}+\dfrac{m_2}{m_1^3}+\dfrac{6}{m_1}-\dfrac{3m_2^2}{m_1^5}\right)\alpha_1^3+\left(\dfrac{9m_2}{2m_1^3}-\dfrac{6}{m_1}\right)\alpha_1\alpha_2+\dfrac{\alpha_3}{m_1}\right]x+O(1)$,

4) $\mu_4(x)=\left[\left(\frac{12}{m_1^3}-\frac{8m_2}{m_1^5}\right)\alpha_1^4+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{12}{m_1^3}\right)\alpha_1^3\right]x^3$

$$+\left[-\left(\frac{9m_2^2}{m_1^6}+\frac{3m_2}{m_1^4}+\frac{24}{m_1^2}\right)\alpha_1^4+\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{54m_2}{m_1^4}+\frac{36}{m_1^2}\right)\alpha_1^3\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{m_1^2}\right)\left(\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_3\right)+\left(\frac{9m_2}{m_1^4}-\frac{18}{m_1^2}\right)\alpha_1^2\alpha_2\right]x^2+O(1),$$

burada, $\alpha_i=E(\xi_1^i),\ i=1,2,3$ ve $m_i=E(\eta_1^i),\ i=1,2,3$ ’dır.

İspat.

1) $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin birinci merkezi momentinin tanımından, yani; $\mu_1(x)=E[\tau(x)-E\tau(x)]$ olduğundan $\mu_1(x)=0$ ’dır.

2) $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin ikinci merkezi momentinin tanımına göre;

$$\mu_2(x)=E[\tau(x)-E\tau(x)]^2=E\tau^2(x)-\left(E\tau(x)\right)^2 \text{ ’dır.} \tag{57}$$

$E\left(\xi_1^3\right)<\infty$, $E\left(\eta_1^3\right)<\infty$ koşulları sağlandığında $x\to\infty$ iken, Sonuç 3’de elde edilen, $\tau(x)$ sınır fonksiyonunun 1. ve 2. başlangıç momentleri, (57) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mu_2(x)=\left[\left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)\alpha_1^2+\left(\frac{1}{m_1}\right)\left(\alpha_2-\alpha_1^2\right)\right]x+\left[\left(\frac{11m_2^2}{4m_1^4}-\frac{2m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}\right)\alpha_1^2\right]+o(1)$$

elde edilir. Burada, $\alpha_i=E(\xi_1^i),\ i=1,2,3$ ve $m_i=E(\eta_1^i),\ i=1,2,3$ ’dır.

3) $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin üçüncü merkezi momentinin tanımına göre;

$$\mu_3(x)=E[\tau(x)-E\tau(x)]^3=E\tau^3(x)-3E\tau^2(x)E\tau(x)+2\left(E\tau(x)\right)^3 \text{ ’dır.} \tag{58}$$

$E\left(\xi_1^3\right)<\infty$, $E\left(\eta_1^3\right)<\infty$ koşulları sağlandığında $x\to\infty$ iken, Sonuç 3’de elde edilen, $\tau(x)$ sınır fonksiyonunun 1., 2. ve 3. başlangıç momentleri, (58) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin üçüncü merkezi momentinin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\mu_3(x)=\left(\frac{15m_2}{2m_1^4}\right)\alpha_1^3x^2+\left[\left(\frac{3m_3}{m_1^4}+\frac{m_2}{m_1^3}+\frac{6}{m_1}-\frac{3m_2^2}{m_1^5}\right)\alpha_1^3\right.$$

$$\left.+\left(\frac{9m_2}{2m_1^3}-\frac{6}{m_1}\right)\alpha_1\alpha_2+\left(\frac{1}{m_1}\right)\alpha_3\right]x\ +O(1),$$

burada, $\alpha_i=E(\xi_1^i),\ i=1,2,3$ ve $m_i=E(\eta_1^i),\ i=1,2,3$ 'dır.

4) $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin dördüncü merkezi momentinin tanımına göre;

$$\mu_4(x)=E\tau^4(x)-4E\tau^3(x)E\tau(x)+6E\tau^2(x)\left(E\tau(x)\right)^2-3\left(E\tau(x)\right)^4\text{'dır.} \qquad (59)$$

$E\left(\xi_1^3\right)<\infty$, $E\left(\eta_1^3\right)<\infty$ koşulları sağlandığında $x\to\infty$ iken, Sonuç 3'de elde edilen, $\tau(x)$ sınır fonksiyonunun 1., 2., 3. ve 4. başlangıç momentleri, (59) eşitliğinde, yerine yazılırsa, $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin dördüncü merkezi momentinin aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$\mu_4(x)=\left[\left(\frac{12}{m_1^3}-\frac{8m_2}{m_1^5}\right)\alpha_1^4+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{12}{m_1^3}\right)\alpha_1^3\right]x^3$$

$$+\left[-\left(\frac{9m_2^2}{m_1^6}+\frac{3m_2}{m_1^4}+\frac{24}{m_1^2}\right)\alpha_1^4+\left(\frac{30m_2^2}{m_1^6}-\frac{8m_3}{m_1^5}-\frac{54m_2}{m_1^4}+\frac{36}{m_1^2}\right)\alpha_1^3\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{m_1^2}\right)\left(\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_3\right)+\left(\frac{9m_2}{m_1^4}-\frac{18}{m_1^2}\right)\alpha_1^2\alpha_2\right]x^2+O(1)$$

Burada, $\alpha_i=E(\xi_1^i),\ i=1,2,3$ ve $m_i=E(\eta_1^i),\ i=1,2,3$ 'dır.

Teorem 11. $\mu_k(x)=E[N(x)-EN(x)]^k$, $k=1,2,3,4$ ve $E\left(\eta_1^3\right)<\infty$ olsun. Bu taktirde, $x\to\infty$ iken $N(x)$ sınır fonksiyonelinin ilk dört merkezi momenti için iki terimli asimptotik açılım aşağıdaki gibi yazılabilir:

1) $\mu_1(x)=0$,

2) $\mu_2(x)=\left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)x+\left(\frac{5m_2^2}{4m_1^4}-\frac{2m_3}{3m_1^3}-\frac{m_2}{2m_1^2}\right)+o(1)$,

3) $\mu_3(x)=\left(\frac{3m_2^2}{m_1^5}-\frac{m_3}{m_1^4}-\frac{3m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)x-\left(\frac{2m_2^3}{m_1^6}-\frac{m_2m_3}{m_1^5}-\frac{3m_2^2}{4m_1^4}\right)+o(1)$,

4) $\mu_4(x)=\left(\frac{3m_2^2}{m_1^6}-\frac{6m_2}{m_1^4}+\frac{3}{m_1^2}\right)x^2-\left(\frac{15m_2^3}{2m_1^7}-\frac{2m_2m_3}{m_1^6}-\frac{15m_2^2}{2m_1^5}+\frac{2m_2}{m_1^3}\right)x$

$$+\left(\frac{33m_2^4}{16m_1^8}-\frac{m_2^2m_3}{m_1^7}-\frac{3m_2^3}{4m_1^6}\right)+O(1),$$

burada, $m_i=E(\eta_1^i),\ i=1,2,3$ 'dır.

Sonuç 4. $E\left(\eta_1^3\right)<\infty$ olsun. Bu taktirde, $x\to\infty$ iken $N(x)$ sınır fonksiyonelinin;

1) $N(x)$ 'in çarpıklık katsayısı, $\gamma_3\sim\frac{c}{\sqrt{x}}$ şeklindedir.

Burada, $c=\frac{A_1}{B_1}$ ve $A_1=\left(\frac{3m_2^2}{m_1^5}-\frac{m_3}{m_1^4}-\frac{3m_2}{m_1^3}+\frac{1}{m_1}\right)$, $B_1=\left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)$'dır.

2) $N(x)$ 'in basıklık katsayısı, $\gamma_4\sim 0$ 'dır.

İspat.

1) $N(x)$ 'in çarpıklık katsayısı,

$$\gamma_3=\frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{60}$$

ve $Var(\tau(x))=E\tau^2(x)-E\tau(x)$, $\sigma=\sqrt{Var(\tau(x))}$ eşitlikleri literatürde mevcuttur. Buna göre, gerekli işlemler yapıldıktan sonra, $N(x)$ sınır fonksiyonelinin varyansı için asimptotik açılımın aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$Var(N(x))\sim\left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{1}{m_1}\right)x. \tag{61}$$

Sonuç olarak, Teorem 11.3)'den $N(x)$ sınır fonksiyonelinin 3. merkezi momenti ve (61) eşitliği, (60) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\gamma_3\sim\frac{A_1x}{\left(B_1x\right)^{3/2}}$$

elde edilir.

Burada, A_1 ve B_1 ifadeleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$A_1 = \left(\frac{3m_2^2}{m_1^5} - \frac{m_3}{m_1^4} - \frac{3m_2}{m_1^3} + \frac{1}{m_1} \right), \; B_1 = \left(\frac{m_2}{m_1^3} - \frac{1}{m_1} \right).$$

2) $N(x)$ 'in basıklık katsayısı,

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \tag{62}$$

eşitliği literatürde mevcuttur. Buna göre, Teorem 11.4)'den $N(x)$ sınır fonksiyonelinin 4. merkezi momenti ve Sonuç 4.1)'den N(x) sınr fonksiyonelinin varyansı için bulunan asimptotik sonuç, (62) eşitliğinde yerine yazılırsa, $N(x)$ 'in basıklık katsayısının $\gamma_4 \sim 0$ olduğu kolayca görülür.

Sonuç 5. $E\left(\xi_1^3\right) < \infty$ ve $E\left(\eta_1^3\right) < \infty$ olsun. Bu taktirde, $x \to \infty$ iken $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin;

1) $\tau(x)$ 'in çarpıklık katsayısı, $\gamma_3 \sim c_2\sqrt{x}$ şeklindedir. Burada, c_2, A_2 ve B_2 ifadeleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$c_2 = \frac{A_2}{B_2}, \; A_2 = \left(\frac{15m_2}{2m_1^4} \right)\alpha_1^3, \; B_2 = \left(\frac{m_2}{m_1^3} - \frac{2}{m_1} \right)\alpha_1^2 + \left(\frac{1}{m_1} \right)\alpha_2 .$$

2) $\tau(x)$ 'in basıklık katsayısı, $\gamma_4 \sim c_3 x$ 'dır. Burada, c_3, A_3 ve B_3 ifadeleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$c_3 = \frac{A_3}{B_3}, \; A_3 = \left(\frac{12}{m_1^3} - \frac{8m_2}{m_1^5} \right)\alpha_1^4 + \left(\frac{8m_2}{m_1^5} - \frac{12}{m_1^3} \right)\alpha_1^3 ,$$

$$B_3 = \left(\frac{m_2^2}{m_1^6} - \frac{4m_2}{m_1^4} + \frac{4}{m_1^2} \right)\alpha_1^4 + 2\left(\frac{m_2}{m_1^4} - \frac{2}{m_1^2} \right)\alpha_1^2\alpha_2 + \left(\frac{1}{m_1^2} \right)\alpha_2^2 .$$

İspat.

1) $\tau(x)$ 'in sınır fonksiyonelinin varyansı için asimptotik açılımın aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$Var(\tau(x)) \sim \left[\left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{2}{m_1}\right)\alpha_1^2+\left(\frac{1}{m_1}\right)\alpha_2\right]x. \tag{63}$$

Sonuç olarak, Teorem 10.3)'den $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin 3. merkezi momenti ve (63) eşitliği ile $\tau(x)$'in sınır fonksiyonelinin çarpıklık katsayısının aşağıdaki gibi olduğu kolayca görülür:

$$\gamma_3 \sim \frac{A_2 x^2}{(B_2 x)^{3/2}}.$$

Burada, A_2 ve B_2 ifadeleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$A_2 = \left(\frac{15m_2}{2m_1^4}\right)\alpha_1^3,\quad B_2 = \left(\frac{m_2}{m_1^3}-\frac{2}{m_1}\right)\alpha_1^2+\left(\frac{1}{m_1}\right)\alpha_2.$$

2) Teorem 11.4)'den $\tau(x)$ sınır fonksiyonelinin 4. merkezi momenti ve (63) eşitliği ile $\tau(x)$'in basıklık katsayısı için, $\gamma_4 \sim \frac{A_3 x^3}{B_3 x^2}$ eşitliği elde edilir. Burada, A_2 ve B_2 ifadeleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$A_3 = \left(\frac{12}{m_1^3}-\frac{8m_2}{m_1^5}\right)\alpha_1^4+\left(\frac{8m_2}{m_1^5}-\frac{12}{m_1^3}\right)\alpha_1^3,$$

$$B_3 = \left(\frac{m_2^2}{m_1^6}-\frac{4m_2}{m_1^4}+\frac{4}{m_1^2}\right)\alpha_1^4+2\left(\frac{m_2}{m_1^4}-\frac{2}{m_1^2}\right)\alpha_1^2\alpha_2+\left(\frac{1}{m_1^2}\right)\alpha_2^2.$$

2. 5. Sürecin Bir Boyutlu Dağılımlarının İncelenmesi

Bu çalışmanın amacı, $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonunu başlangıç rasgele değişkenin olasılık karakteristiği ile ifade etmektir. Bunun için, $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu;

$$Q(t,x,z) = P_z\{X(t) \le x\},\quad t,\ x \ge 0,\ z \ge s \text{ olsun.}$$

$M(t,x,z)$ sınırlı, ölçülebilir fonksiyonun Laplace dönüşümü ve Laplace-Stiltijes dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\widetilde{M}(\lambda,x,z)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}M(t,x,z)dt\ ;\ M^*(\lambda,x,z)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}d_tM(t,x,z).$$

İstenilen amaca ulaşmak için, aşağıdaki notasyonlar dahil edilsin:

$$G(t,x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\Phi_n(t)a_n(x,z);\qquad a_n(x,z)=F_n(z-s)-F_n(z-x), \tag{64}$$

$$R(t,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)b_n(z-s);\qquad b_n(z,s)=F_{n-1}(z-s)-F_n(z-s). \tag{65}$$

Bu takdirde, aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 12. ξ_1, η_1 ve ζ_1 rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olsun. Bu takdirde, X(t) sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları Q(t,x,z)'nin Laplace dönüşümü, başlangıç rasgele değişkenin olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\widetilde{Q}(\lambda,x,z)=\widetilde{G}(\lambda,x,z)+\frac{R^*(\lambda,z)*\widetilde{G}(\lambda,x,\bullet)}{1-R^*(\lambda,\bullet)}.$$

Burada, $G(t,x,z)$, $R(t,x,z)$ fonksiyonları, $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenler dizilerinin olasılık karakteristikleri ile (64) ve (65)'deki formüllerle ifade edilmiştir.

İspat. İlk olarak X(t) sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olan Q(t,x,z) elde edilsin:

$$Q(t,x,z)=P_z\{X(t)\le x\}\ ;\ t,x\in[0,+\infty),\ \ z\in[s,+\infty).$$

Q(t,x,z) fonksiyonu tekrar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q(t,x,z)=P_z\{X(t)\le x\}=P_z\{t<\tau_1;X(t)\le x\}+P_z\{t\ge\tau_1;X(t)\le x\}. \tag{66}$$

(66) eşitliğinin birinci terimi G(t,x,z) ile gösterilsin. Yani,

$$G(t,x,z)=P_z\{t<\tau_1;X(t)\le x\}$$

olsun. (66) eşitliğinin ikinci terimi ise aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_z\{t\ge\tau_1;X(t)\le x\}=\int_0^t P_z\{\tau_1\in du;X(t)\le x\}$$

$$= \int_0^t \int_s^{+\infty} Q(t-u,x,v) R(du,z) \pi\{dv\}$$

$$= \int_0^t R(du,z) \int_s^{+\infty} Q(t-u,x,v) \pi\{dv\}. \qquad (67)$$

$\int_s^{+\infty} Q(t-u,x,v)\pi\{dv\} = Q(t,x,\bullet)$ notasyonu dahil edilsin. Bu notasyon göz önüne alındığında (67) ifadesi aşağıdaki şekli alır:

$$P_z\{t \geq \tau_1; X(t) \leq x\} = \int_0^t R(du,z) Q(t-u,x,\bullet).$$

Dolayısıyla, $M_1(t) * M_2(t) = \int_0^t M_1(t-u) dM_2(u)$ olmak üzere, (66) eşitliği aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q(t,x,z) = G(t,x,z) + \int_0^t Q(t-u,x,\bullet) R(du,z) = G(t,x,z) + Q(t,x,\bullet) * R(t,z). \quad (68)$$

(68) integral denkleminde, her tarafı $\pi(dz)$'le çarpılıp, s'den $+\infty$'a integrallenirse,

$$Q(t,x,\bullet) = G(t,x,\bullet) + R(t,\bullet) * Q(t,x,\bullet) \qquad (69)$$

elde edilir. (69) integral denkleminde, her tarafı $e^{-\lambda t}$ ile çarpılıp, t ve x parametrelerine göre integrallenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tilde{Q}(\lambda,x,\bullet) = \tilde{G}(\lambda,x,\bullet) + R^*(\lambda,\bullet) * \tilde{Q}(\lambda,x,\bullet). \qquad (70)$$

(70) denklemini, aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\tilde{Q}(\lambda,x,\bullet) = \frac{\tilde{G}(\lambda,x,\bullet)}{1 - R^*(\lambda,\bullet)}. \qquad (71)$$

Ayrıca, (70) ve (71) eşitlikleri kullanılarak, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\tilde{Q}(\lambda,x,z) = \tilde{G}(\lambda,x,z) + \frac{R^*(\lambda,z) * \tilde{G}(\lambda,x,\bullet)}{1 - R^*(\lambda,\bullet)}.$$

Başka bir deyişle, istenilen $\tilde{Q}(\lambda,x,z)$ dağılım fonksiyonu, $\tilde{G}(\lambda,x,z)$ ve $R^*(\lambda,x,z)$ fonksiyonları yardımıyla ifade edilebilir.

Böylece, G(t,x,z) ve R(t,z) fonksiyonları, başlangıç rasgele değişkenlerinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilirse, sürecin bir boyutlu dağılımları elde edilmiş olur. Bu nedenle, G(t,x,z) ve R(t,z) fonksiyonları, ξ_1, η_1 ve ζ_1 rasgele değişkenlerinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilecektir. Öncelikle, G(t,x,z) fonksiyonu hesaplanacaktır:

$$G(t,x,z) = P_z\{\tau_1 > t;\ \ X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{\nu(t) = n; \tau_1 > t, X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n < t < T_{n+1}; s < z - S_n \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n < t < T_{n+1}\} P\{s < z - S_n \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi^{*n}(t) - \Phi^{*n+1}(t)][P\{S_n \le z - s\} - P\{S_n \le z - x\}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi^{*n}(t) - \Phi^{*n+1}(t)][F^{*n}(z-s) - F^{*n}(z-x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x,z).$$

Sonuç olarak, $G(t,x,z)$ aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$G(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x,z);$$

burada, $a_0(x,z) = P\{z \le x\} = P\{x - z \ge 0\} = \varepsilon(x-z)$’dır.

Şimdi de, $R(du,z)$ fonksiyonu hesaplanacaktır:

$$R(du,z) \equiv P_z\{\tau_1 \in du\} = P_z\{T_{N_1} \in du\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_z\{N_1 = n; T_n \in du\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \in du;\ S_{n-1} < z - s \le S_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \in du\} P\{ S_{n-1} < z - s \le S_n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [F_{n-1}(z-s) - F_n(z-s)] d\Phi_n(u)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-s) d\Phi_n(u).$$

Dolayısıyla, $R(t,z)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R(t,z) = P_z\{\tau_1 \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) b_n(z-s).$$

Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

2. 6. Sürecinin Toplamsal Fonksiyonellerinin İncelenmesi

Bir çok pratik ve teorik problemlerin çözümünde, sürecin sınır fonksiyonelleri ve kendi karakteristiklerinin yanı sıra, toplamsal fonksiyonelleri de önemli rol oynamaktadır. Fakat literatürde toplamsal fonksiyoneller, sınır fonksiyonelleri kadar detaylı bir biçimde incelenmemiştir. Tüm bunlar göz önüne alınarak, bu kısımda ele alınan sürecin toplamsal fonksiyonellerinin bir boyutlu dağılımları incelenecektir.

$f : R^+ \to R$ keyfi sınırlı bir fonksiyon olsun. $X(t)$ sürecinin toplamsal fonksiyonelleri, aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$J_f(t) = \int_0^t f(x(u)) du, \quad t \ge 0.$$

Bu çalışmada ulaşmak istenen amaç, $J_f(t)$ toplamsal fonksiyonelinin bir boyutlu dağılım fonksiyonlarının ikili Laplace dönüşümünü hesaplamaktır. Bu nedenle, sınırlı $M(t, x, z)$ fonksiyonunun, sırasıyla ikili Laplace ve Laplace-Stiltijes dönüşümleri,

$$\tilde{\tilde{M}}(\lambda, \mu, z) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-\mu x} M(t, x, z) dt\, dx, \quad M^{**}(\lambda, \mu, z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt\{\int_0^{\infty} e^{-\mu x} d_x \; M(t, x, z)\}$$

olsun. Burada, $\lambda \in R^+$ ve $\mu \in R$ 'dir. $Q_f(t,x,z)$ ile, $J_f(t)$'nin toplamsal fonksiyonelinin koşullu dağılım fonksiyonu gösterilsin:

$$Q_f(t,x,z) = P_z\{J_f(t) \le x\},\ t,x \in [0,+\infty),\ \ z \in [s,+\infty).$$

Bu kısmın esas sonucunu ifade etmek için aşağıdaki notasyonlar dahil edilmelidir:

$$G_f(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}; z - S_n > s; \sum_{k=0}^{n-1} f(z-S_k)\xi_{k+1} + (t-T_n) f(z-S_k) \le x\}, \tag{72}$$

$$R_f(t,x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \le t; z - S_n < s < z - S_{n-1}; \sum_{k=0}^{n-1} f(z-S_k)\ \xi_{k+1} \le x\ \}. \tag{73}$$

Bu durumda, aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 13. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri bağımsız oldukları takdirde, $J_f(t)$ toplamsal fonksiyonellerinin bir boyutlu dağılım fonksiyonunun ikili Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\tilde{\tilde{Q}}(\lambda,\mu,z) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,z) + \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,\bullet) R_f^{**}(\lambda,\mu,z)[1 - R_f^{**}(\lambda,\mu,\bullet)]^{-1},$$

burada, $G_f(t,x,z)$ ve $R_f(t,x,z)$ fonksiyonları, $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenleri dizilerinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilir.

İspat. Önce $Q_f(t,x,z)$ fonksiyonu için yenileme tipli integral denklemi elde edilecektir:

$$Q_f(t,x,z) = P_z\{J_f(t) \le x\} = P_z\{\tau_1 > t; J_f(t) \le x\} + P_z\{\tau_1 \le t; J_f(t) \le x\}. \tag{74}$$

(74) eşitliğindeki birinci terimi $G_f(t,x,z)$ ile gösterilsin ve ikinci terimi de aşağıdaki şekilde yeniden yazılsın:

$$\begin{aligned} P_z\{\tau_1 \le t; J_f(t) \le x\} &= \int_0^t \int_s^\infty \int_0^\infty P_z\{\tau_1 \in du; X(\tau_1) \in dv; J_f(\tau_1) \in dy\} P_v\{J_f(t-u) \le x - y\} \\ &= \int_0^t \int_s^\infty \int_0^\infty P_z\{\tau_1 \in du, J_f(\tau_1) \in dy\} P\{\zeta_1 \in dv\} Q(t-u, x-y, v) \\ &= \int_0^t \int_s^\infty \int_0^\infty R_f(du, dy, z) d\pi(v) Q(t-u, x-y, v). \end{aligned} \tag{75}$$

Burada, $d\pi(v) = P\{\zeta_1 \in dv\}$ ve $R_f(du, dy, z) = P_z\{\tau_1 \in du;\ J_f(\tau_1) \in dy\}$ 'dir. (75) eşitliği, (74)'de yerine yazılırsa,

$$Q_f(t,x,z) = G_f(t,x,z) + \int_0^t \int_s^\infty \int_0^\infty R_f(du,dy,z)\,Q(t-u,x-y,v)\,d\pi(v) \tag{76}$$

integral denklemi elde edilir.

$\int_s^\infty Q_f(t-u,x-y,v)\,d\pi(v) = Q_f(t-u,x-y,\bullet)$ notasyonu göz önüne alınarak (76) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$Q_f(t,x,z) = G_f(t,x,z) + \int_0^t \int_0^\infty R_f(du,dy,z)\,Q(t-u,x-y,\bullet)\,. \tag{77}$$

(77) denkleminin her tarafı önce $e^{-\lambda t}$, sonra $e^{-\mu x}$ ile çarpılıp, sırasıyla t'ye ve x'e göre integrallenirse,

$$\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda,\mu,z) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,z) + \tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda,\mu,\bullet)R_f^{**}(\lambda,\mu,z) \tag{78}$$

denklemi elde edilir. (78) denkleminin her iki tarafı z'ye göre ortalanırsa,

$$\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda,\mu,\bullet) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,\bullet) + \tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda,\mu,\bullet)R_f^{**}(\lambda,\mu,\bullet)$$

denklemi elde edilir. Buradan,

$$\tilde{\tilde{Q}}(\lambda,\mu,\bullet) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,\bullet)\left[1 - R_f^{**}(\lambda,\mu,\bullet)\right]^{-1} \tag{79}$$

olduğu görülür. (78) formülü, (79)'de yerine yazılırsa,

$$\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda,\mu,z) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,z) + \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,\bullet)R_f^{**}(\lambda,\mu,z)\left[1 - R_f^{**}(\lambda,\mu,z)\right]^{-1}$$

şeklinde yazılmış olur. Böylece, aranılan $\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda,\mu,z)$ fonksiyonunun, $\tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,z)$ ve $R_f^{**}(\lambda,\mu,z)$ ile ifade edilebildiği görülür.

Şimdi de, $G_f(t,x,z)$ ve $R_f^{**}(t,x,z)$ fonksiyonları, başlangıç rasgele değişkenler dizisinin belirli olasılık karakteristikleri ile ifade edilecektir.

Sırasıyla, $G_f(t, x, z)$ $R_f(du, dy, z)$ fonksiyonları hesaplanacaktır:

$$G_f(t,x,z) \equiv P_z\{\tau_1 > t,\ J_f(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{\nu(t) = n; N_1 > n+1; \int_0^t f(X(u))du \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}; z - S_k > s, k = \overline{1,n};$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} f(X(u))du + (t - T_n) f(z - S_n) \le x\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}; z - S_n > s; \sum_{k=0}^{n-1} f(z + Y_k)\xi_{k+1} + (t - T_n) f(z - S_n) \le x\}.$$

$$R_f(du, dy, z) \equiv P_z\{\tau_1 \in du; J_f(\tau_1) \in dy\}$$

$$= P_z\{T_{N_1} \in du; \int_0^{T_{N_1}} f(X(t))dt \in dy\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \in du; z - S_k > s, k = \overline{1, n-1}; z - S_n \le s;$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} f(X(t))dt + (u - T_n) f((z - S_k)^+) \in dy\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \in du; z - S_n < s < z - S_{n-1}; \sum_{k=0}^{n-1} f(z - S_k)\xi_{k+1} \in dy\}.$$

Dolayısıyla, $R_f(t, x, z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R_f(t,x,z) \equiv P_z\{\tau_1 \le t; J_f(\tau_1) \le x\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \le t; z - S_n < s < z - S_{n-1}; \sum_{k=0}^{n-1} f(z + Y_k)\xi_{k+1} \le x\}.$$

Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

2. 7. Sürecin Ergodikliği

Yukarıdaki kısımlarda edinilen sonuçlardan da görüldüğü gibi, hem sürecin sınır ve toplamsal fonksiyonellerinin, hem de sürecin kendinin sonlu boyutlu dağılımlarının hesaplanması oldukça zordur. Bu zorluğu aşmak için stasyoner (durağan) karakteristiklerinin hesaplanması amaca yönelik bir aşamadır. Fakat, sürecin stasyoner karakteristiklerinin incelenebilmesi için, önce sürecin bazı koşullar altında ergodik olduğunu ispatlamak gereklidir. Bu nedenle, bu kısımda ele alınan X(t) sürecinin ergodikliği incelenecek ve ergodik dağılımın aşikar şekli bulunacaktır. Öncelikle, sürecin ergodikliğini belirten teorem verilecektir.

Teorem 14. Başlangıç rasgele değişkenler dizisi için ek olarak aşağıdaki koşullar sağlasın:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,
2) $E\eta_1 < \infty$,
3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan bir rasgele değişkendir.

İspat. Ele alınan X(t) süreci, literatürde "Kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler" diye adlandırılan genel bir stokastik süreçler sınıfına aittir. Bu sınıf için Smith'in "anahtar yenileme teoremi" tipli genel ergodik teoremi literatürde bilinmektedir. (bak, örneğin, Gihman, Skohorod [25], s.243 veya Shurenkov [72]) Fakat genel durumda, bu teoremin şartları ve ifadesi oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir.

Bu kısımda, sürecin özelliklerinden yararlanılarak, yeterince zayıf şartlar altında süreç için ergodik teorem ispatlanmaya çalışılacaktır. Hatırlanmalıdır ki, ele alınan süreç için ergodik teoremini ispatlamak Teorem 14'ün koşulları sağlandığında, yukarıda adı geçen genel ergodik teoremin şartlarının da sağlandığını göstermeye denktir. Bu nedenle, ispat aşamalı bir şekilde verilecektir:

1. Aşama. Sürecin ergodik olduğunu gösterebilmek için öyle pozitif değerli, monoton artan rasgele değişkenler dizisi seçmek gerekiyor ki, X(t) sürecinin bu anlardaki değerleri bir ergodik Markov zinciri oluşturabilsin.

Bu koşulu sağlayan rasgele zaman anları olarak kısım 2.2'de tanımlanan $\{\tau_n\}$, $n \geq 0$, rasgele değişkenler dizisi ele alınabilir. Çünkü, tanımına göre 1 olasılığı ile ,

$0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \tau_{n+1} < \ldots$ ve $X(\tau_n + 0) = \zeta_n$, $n \geq 1$'dir.

$\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$ dizisi $[s, +\infty)$ aralığında değerler alan, bağımsız ve aynı tür dağılıma $(\pi(B))$ sahip rasgele değişkenleri oluşturduğu bir dizi olduğu için, otomatikman bir Markov zinciri olacaktır. Diğer taraftan, bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip olan $(\pi(B))$ rasgele değişkenlerin bir ergodik Markov zinciri oluşturdukları literatürde bilinmektedir. (bak, örneğin, Shurenkov [72]). Bu zincirin durağan dağılımı, ζ_1'in dağılımı olan $(\pi(B))$ ile aynıdır. Böylece, genel ergodik teoremin 1. koşulunun sağlandığı görülür.

2. Aşama. Genel ergodik teoremin 2. şartı, yukarıda belirtildiği gibi $\{\tau_n\}$, $n \geq 1$ dizisinin 1. teriminin beklenen değerinin sonlu olmasıdır. 2. aşamadaki amacımız Teorem 14'ün şartları altında bu koşulun da sağlandığını göstermektir, yani ispat etmek gerekiyor ki, $E(N_1) < \infty$'dur. Tanıma göre,

$$\tau_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i \text{'dır.} \tag{80}$$

$N_1 = N(z)$ rasgele değişkeni, $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenlerinin dizisi yardımıyla tanımlandığına ve $\{\eta_n\}$ dizisinin, $\{\xi_n\}$ dizisinden bağımsız olduğuna göre, (80) eşitliğine Wald özdeşliğini uygulamak mümkündür:

$$E(\tau_1) = E\xi_1 EN_1 . \tag{81}$$

Teorem 14'in şartlarına göre $E\xi_1 < \infty$'dur. Dolayısıyla, $E\tau_1 < \infty$ şartı, $EN_1 < \infty$ şartına denktir. $EN_1 < \infty$ olduğunu ispat etmek için aşağıdaki notasyonları dahil etmek gerekmektedir:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i , \ n \geq 1 ; \ N_0 = 0; \ N_1 = N(z - s) = \inf\{k \geq 1 : \ S_k \geq z - s\},$$

$$N_{n+1} = \inf\{ \ k \geq N_n + 1 : \ \zeta_n - S_k + S_{N_n} < s \ \}, \ \ n \geq 1 .$$

Burada, η_n, $n \geq 0$ pozitif değerli rasgele değişkenlerine, $\{S_n\}$ yenileme sürecinin ardışık basamak yükseklikleri ve bu özelliklere sahip olan rasgele değişken ikililerine yani, $\left(N_n, \sum_{i=1}^{n} \eta_i\right)$ çoğu zaman artan basamak değişkenleri denir.

Tanıma göre $N(z-s)$ rasgele değişkeni, $\{\eta_n\}$, $n \geq 0$ basamak yüksekliklerinin oluşturduğu bir yenileme sürecidir. Buna göre, $EN(z-s) = U_x(z-s)$ olup, her $z \in [s, +\infty)$ için sonludur. Ayrıca, $E\eta_1 < 0$ iken $N(z-s)$ rasgele değişkeninin beklenen değerinin sonlu olduğu, Feller [23], s. 396-397, Teorem 2(ii)'den bilinmektedir.

Sonuç olarak, $E\eta_1 < 0$ olduğunda, her $z \in [s, +\infty)$ için, $E(N(z))$'in sonlu olduğu (81)'de göz önüne alınırsa, Teorem 14'in şartları altında $E\tau_1 < \infty$ olduğu görülür. Bu ise, ergodik teoremin 2. aşamasının ispatını tamamlar. Şimdi de ergodik dağılımın aşikar şekli aşağıdaki teoremden elde edilecektir.

Teorem 15. Teorem 14'in koşulları sağlandığında her ölçülebilir sınırlı $f(x)$ fonksiyonu $\left(f : [0, +\infty) \to R\right)$ için aşağıdaki bağıntı 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} J_f(t) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u))du = \frac{\int_0^{\infty}\int_s^{\infty} f(v)\left[U_\eta(z-s) - U_\eta(z-v)\right] d\pi(z)dv}{\int_s^{\infty} U_\eta(z-s)\, d\pi(z)}.$$

İspat. Genel ergodik teoreme göre (bak, örneğin, Gihman, Skorohod [25], s. 243), X(t) süreci ergodik ise, bu takdirde ölçülebilir ve sınırlı $f : [0, +\infty) \to R$ fonksiyonu için 1 olasılığı ile aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} J_f(t) = \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{t=0}^{\infty} \int_s^{\infty} \int_s^{\infty} f(v) P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dv\} dt\, d\pi(z). \tag{82}$$

Bu çalışmada ulaşmak istenen amaç, (82) eşitliğinin sağ tarafı, $\{S_n\}$ yenileme sürecinin olasılık karakteristikleri ile ifade etmektir. Hatırlanmalıdır ki, kısım 2. 4'de $G(t, x, z)$ ile aşağıdaki gibi gösterilmiştir:

$$G(t, x, z) = P_z\{\tau_1 > t; X(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\Phi_n(t) a_n(x, z). \tag{83}$$

$G(t,x,z)$ fonksiyonu için (83)'de verilen formülün her iki t'ye göre Laplace dönüşümü uygulayarak, $\{S_n\}_{n\geq 0}$ yenileme sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$\tilde{G}(\lambda,x,z)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t,x,z)d(t)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^\infty a_n(x,z)\Delta\Phi_n(t)d(t)$$

$$=\sum_{n=0}^\infty a_n(x,z)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)d(t). \tag{84}$$

Diğer yandan $n\geq 0$ için,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)d(t)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)\right]d(t)$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_n(t)d(t)-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_{n+1}(t)d(t)$$

olur. Buradaki integrallerin her birine kısmi integrasyon metodu uygulayıp,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_n(t)d(t)=\left[E\left(e^{-\lambda\xi_1}\right)\right]^n=[\varphi(\lambda)]^n$$

eşitliği ve $\Phi_n(0)=P\{T_n\leq 0\}=0$ olduğu kullanılırsa,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)d(t)=\frac{1}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^n-\frac{1}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^{n+1}=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^n$$

elde edilir. Bu ifade (84) eşitliğinde yazılırsa, aşağıdaki ifade bulunur:

$$\tilde{G}(\lambda,x,z)=\sum_{n=0}^\infty a_n(x,z)\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^n=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty a_n(x,z)[\varphi(\lambda)]^n,.$$

burada her $\lambda>0$ için, $\varphi(\lambda)=E(e^{-\lambda\xi})$'dır.

Kolayca görmek mümkündür ki, ξ_1 rasgele değişkeninin beklenen değeri sonlu olduğundan, aşağıdaki limiti mevcuttur:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}=E\xi_1. \tag{85}$$

Şimdi, (85) eşitliğinin ispatı verilsin.

$$e^{-\lambda\xi_1} = 1-(\lambda\xi_1)+\frac{(\lambda\xi_1)^2}{2!}-\frac{(\lambda\xi_1)^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(\lambda\xi_1)^n}{n!}+\ldots$$

olduğundan,

$$\varphi(\lambda)=E\left(e^{-\lambda\xi_1}\right)=1-\lambda E(\xi_1)+\frac{(\lambda)^2}{2!}E\left(\xi_1^2\right)-\frac{(\lambda)^3}{3!}E\left(\xi_1^3\right)+\ldots+(-1)^n\frac{(\lambda)^n}{n!}E\left(\xi_1^n\right)+\ldots$$

olur ve buradan,

$$\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}=E(\xi_1)-\frac{\lambda}{2!}E\left(\xi_1^2\right)+\frac{(\lambda)^2}{3!}E\left(\xi_1^3\right)-\ldots+(-1)^n\frac{(\lambda)^{n-1}}{n!}E\left(\xi_1^n\right)+\ldots$$

elde edilir. Böylece, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}=E\xi_1$ olduğu görülür. Bu limit, $\varphi(0)=E(e^0)=E(1)=1$ olduğundan, L'Hospital kuralı ile,

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{-\varphi'(\lambda)}{1}=-\lim_{\lambda\to 0}E\left(-\xi_1 e^{-\lambda\xi_1}\right)=E\xi_1$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Diğer taraftan, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x,z)$ serisi mevcut ve sonlu olduğundan, (84) eşitliğinde, $\lambda\to 0$ iken, $0<\varphi(\lambda)=E(e^{-\lambda\xi_1})<1$ olduğundan limite geçmek mümkündür:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\tilde{G}(\lambda,x,z) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi(\lambda))^n a_n(x,z)\\
&= E\xi_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,z)\\
&= E\xi_1\sum_{n=0}^{\infty}\left[F^{*n}(z-s)-F^{*n}(z-x)\right]\\
&= E\xi_1\left[U_\eta(z-s)-U_\eta(z-x)\right].
\end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\int_0^{\infty}G(t,x,z)dt=E\xi_1\left[U_\eta(z-s)-U_\eta(z-x)\right], \tag{86}$$

olduğu açıktır. Şimdi de, (86) eşitliğinin her iki tarafı, z parametresine göre ortalanır, yani her iki taraf $d\pi(z)$ ile çarpılıp, z'ye göre s'den $+\infty$'a kadar integrallenirse,

$$\int_s^{+\infty}\int_0^{+\infty}G(t,x,z)dt\,d\pi(z)=\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}E\xi_1\left[U_\eta(z-s)-U_\eta(z-x)\right]d\pi(z)\,dt \tag{87}$$

elde edilir. (87) eşitliği, (82) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}J_f(t)=\frac{1}{E(\tau_1)}E\xi_1\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}f(x)\left[U_\eta(z-s)-U_\eta(z-x)\right]d\pi(z)\,dt \tag{88}$$

olduğu görülür. Hatırlanmalıdır ki, $\tau_1=\sum_{i=1}^{N_1}\xi_i$ 'dır. Dolayısıyla Wald özdeşliğine göre;

$$E(\tau_1)=E\xi_1 EN_1 \text{ 'dır.} \tag{89}$$

Burada, $EN_1=\int_s^{\infty}U_\eta(z-s)d\pi(z)$ 'dır. Dolayısıyla, buradan 1 olasılığı ile aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}J_f(t)=\frac{\int_0^{\infty}\int_s^{\infty}f(v)\left[U_\eta(z-s)-U_\eta(z-v)\right]d\pi(z)dv}{\int_s^{\infty}U_\eta(z-s)d\pi(z)} \tag{90}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Not. Teorem 14 ve 15'dan X(t) sürecinin ergodik dağılımının mevcut olduğunu ve ergodik dağılım fonksiyonunun aşikar şeklini elde etmek mümkündür.

Özellikle, (90) formülünde, $f(x)$ fonksiyonunun yerine indikatör (ayırıcı) fonksiyonu yazılırsa ergodik dağılım fonksiyonu elde edilir. X(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q(x)$ ile gösterilsin. Bu durumda, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 6. Teorem 14'ün koşulları sağlandığında, X(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu mevcuttur ve her $x\in(0,+\infty)$ için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q(x)\equiv\lim_{t\to\infty}P\{\,X(t)\le x\,\}=1-\frac{\int_s^{\infty}U_\eta(z-x)d\pi(z)}{\int_s^{\infty}U_\eta(z-s)d\pi(z)}. \tag{91}$$

Teorem 16. X(t) süreci ergodik olduğunda, X(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu mevcuttur ve $\tilde{\zeta}_1\in \text{Üstel}(\lambda)$, $\lambda>0$ ve her $x\in(0,+\infty)$ için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$Q(x)\equiv\lim_{t\to\infty}P\{\,X(t)\le x\,\}=1-e^{-\lambda(x-z)},\ x\ge z.$$

İspat. $\tilde{\zeta}_1 \in$ Üstel(λ) olsun. Bu durumda, ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunun aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir:

$$f_{\zeta_1}(v) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(v-s)}, & v \geq s \\ 0 & , \ v < s \end{cases}, \ \lambda > 0.$$

Buradan, $\zeta_1 \to z \in [s, +\infty)$, $v = z - s$, $\zeta_1 \to v + s$ dönüşümleri (91) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$Q(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{ X(t) \leq x \} = 1 - \frac{\int_0^\infty U_\eta(s+v-z)d\pi(v)}{\int_0^\infty U_\eta(v)d\pi(v+s)} = 1 - \frac{E(U_\eta(s+\tilde{\zeta}_1 - z))}{E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1))} \tag{92}$$

elde edilir. $\tilde{\zeta}_1 \in$ Üstel(λ), η_1 keyfi olsun. Bu durumda, $\tilde{\pi}(v) \equiv P\{ \tilde{\zeta}_1 \leq v \} = 1 - e^{-\lambda v}$, $v \geq 0$ olduğundan,

$$E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1)) = \int_0^\infty U_\eta(v)d\tilde{\pi}(v) = \lambda \int_0^\infty U_\eta(v)e^{-\lambda v}dv = \frac{1}{1-\varphi_\eta(\lambda)} \tag{93}$$

elde edilir. Buradan, gerekli değişken dönüşümleri yapılırsa, aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$E(U_\eta(s+\tilde{\zeta}_1 - z)) = \int_0^\infty U_\eta(s+v-z)d\tilde{\pi}(v) = \lambda \int_0^\infty U_\eta(s+v-z)e^{-\lambda v}dv$$

$$= \lambda \int_{s-x}^\infty e^{-\lambda(t+x-s)}U_\eta(t)dt = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\lambda(x-s)}U_\eta(t)dt$$

$$= \lambda e^{-\lambda(x-s)} \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_\eta(t)dt = \frac{e^{-\lambda(x-s)}}{1-\varphi_\eta(\lambda)} \tag{94}$$

(93) ve (94) eşitlileri, (92) eşitliğinde yerine yazılırsa, istenen sonuç elde edilir:

$$Q(x) = 1 - e^{-\lambda(x-s)}, \quad x \geq s, \ \lambda > 0.$$

2. 8. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri için Kesin Formüller

Bu bölümde, teorik ve pratik yönden önemini göz önünde bulundurularak, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentleri, beklenen değeri, varyansı, çarpıklık ve basıklık katsayıları için kesin formüller elde edilecektir.

Teorem 17. Ergodik teoremin koşulları altında, $\lambda > 0$ iken X(t) sürecinin ergodik dağılımının momentlerinin aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} \frac{k!}{\lambda^k}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

İspat. $X = s + \tilde{X}$ ve $\tilde{X} \in \text{Üstel}(\lambda)$, $\lambda > 0$ olsun. Bu taktirde,

$$E(\tilde{X}^n) = \int_0^\infty v^n \lambda e^{-\lambda v} dv$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{z}{\lambda}\right)^n \lambda e^{-z} \frac{dz}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz$$

$$= \frac{r(n+1)}{\lambda^n} = \frac{n!}{\lambda^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

olduğu açıktır. Bu durumda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının momentleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X)^n = E(s + \tilde{X})^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} E(\tilde{X})^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} \frac{k!}{\lambda^k}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Sonuç 7. X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti $\lambda > 0$ için, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1) $E(X) = s + \dfrac{1}{\lambda}$,

2) $E(X^2) = s^2 + \dfrac{2s}{\lambda} + \dfrac{2}{\lambda^2}$,

3) $E(X^3) = s^3 + \dfrac{3s^2}{\lambda} + \dfrac{6s}{\lambda^2} + \dfrac{6}{\lambda^3}$,

4) $E(X^4) = s^4 + \dfrac{4s^3}{\lambda} + \dfrac{12s^2}{\lambda^2} + \dfrac{24s}{\lambda^3} + \dfrac{24}{\lambda^4}$.

Sonuç 8. X(t) sürecinin ergodik dağılımının varyansı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \sigma_x^2\,,\ \lambda > 0\,.$$

Sonuç 9. $\mu_k(x) = E[X - EX]^k$, $k = 1,2,3,4$ olsun. $\lambda > 0$ iken $X(t)$ ergodik dağılımının ilk dört merkezi momenti aşağıdaki gibidir:

1) $\mu_1(\lambda) = 0$,

2) $\mu_2(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$,

3) $\mu_3(\lambda) = \dfrac{2}{\lambda^3}$,

4) $\mu_4(\lambda) = \dfrac{9}{\lambda^4}$.

Sonuç 10. $\sigma_x = \dfrac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$ olmak üzere, X(t) sürecinin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

1) $\gamma_3 = 2$,

2) $\gamma_4 = 6$.

3. BULGULAR

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir sınıfını oluşturan "Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci" denilen yarı-Markov bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilmiştir. Ayrıca, inşa edilen sürecin sonlu boyutlu dağılımları $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme süreçleri, olasılık karakteristikleri ile ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra, sürecin sınır ve toplamsal fonksiyonelleri matematiksel olarak inşa edilmiş ve incelenmiştir. Bazı zayıf şartlar altında, sürecin ergodik olduğu gösterilmiş ve ergodik dağılım fonksiyonunun aşikar şekli bulunmuştur. Bunlara ek olarak sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti kesin formüllerle ifade edilmiştir.

Ayrıca literatürdeki mevcut bilgilerden yararlanarak, ζ_1 rasgele değişkeninin, üstel dağılıma sahip olması durumunda, $x \to \infty$ iken, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti, beklenen değeri, varyansı, standart sapması, çarpıklık ve basıklık katsayıları için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

4. İRDELEME

Markov veya yarı-Markov modelleri ile ilgili olan bir çok teorik çalışmalar literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların bir çoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da, uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek nitelikte değildir. Aşikar ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalar da vardır. Fakat bu çalışmaların eksik yönü, ele alınan modellerin gereğinden fazla idealize edilmiş olmasıdır. Bu çalışmadaki model, hayattaki gerçek modellere uygundur.

Bu çalışmada bu modeller, bir bariyerli Yarı-Markov yenileme süreçleri ile ifade edilmiştir. $X(t)$ süreci, $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme süreçleri yardımıyla matematiksel olarak ifade edilmiştir. Ve bu sürecin olasılık karakteristikleri analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Bu çalışmada, ζ_1 rasgele değişkeninin, üstel dağılıma sahip olması durumunda, $x \to \infty$ iken, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının dağılım fonksiyonu, ilk dört momenti, varyansı, çarpıklık ve basıklık katsayıları kesin formüllerle elde edilmiştir. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin, üstel dağılıma sahip olması durumunda, $x \to \infty$ iken, sürecin sınır fonksiyonellerinin ilk dört momenti, beklenen değeri, varyansı, standart sapması, çarpıklık ve basıklık katsayıları için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmanın, yeni bir çalışma olmasına rağmen bazı değişiklikler yapmak ve varsayımlarla oynamak mümkündür. Her şeyden önce $X(t)$ sürecini, iki bariyerli seçmek mümkündür. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin normal, gamma, vs. gibi dağılımlara sahip olması durumunda ortaya çıkan benzer modeller incelenebilir.

5. SONUÇLAR

Modern matematiğin önemli bir dalı olan stokastik modeller ve stokastik süreçler teorisi son yıllarda hızlı bir gelişme kaydetmektedir. Özellikle Markov ve yarı-Markov modellerin yardımıyla fiziğin, kimyanın, biyolojinin, iktisadın ve teknolojik sistemlerin pek çok ilginç problemleri ifade edilmekte ve gerekli bir biçimde çözümlenmektedir. Bilim ve teknoloji gelişmesi, yukarıda adı geçen bilim dallarına ait problemlerin yeni ve detaylı çözümlerinin araştırılmasını zorunlu kılmıştır. Bu çalışmada ele alınan "Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Süreci" denilen yarı-Markov bir modellerin incelenmesi hem teorik hem de uygulama bakımından önemlidir. Özellikle alınmış sonuçların, su barajlarındaki su miktarının kontrol edilmesine, ülkenin petrol ve gaz rezervlerinin, bankadaki para rezervlerinin, askeri mühimmatın optimal bir biçimde yönlendirilmesine uygulanması ülke ekonomisi bakımından gerekli ve faydalıdır. Tüm bu modeller, özel bir bariyerli yarı-Markov yenileme süreçleri yardımıyla ifade edilebilir.

Bu nedenle bu çalışmada, $X(t)$ süreci, $\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme süreçleri yardımıyla matematiksel olarak kuruldu ve bu süreçle ilgili aşağıdaki teorik sonuçlar ortaya konuldu:

1) Bu fiziksel modelleri ifade eden stokastik süreç, matematiksel olarak inşa edildi.
2) Bu sürecin sınır fonksiyonellerinin temel olasılık parametreleri hesaplandı.
3) Sürecin sonlu boyutlu dağılımları incelendi.
4) Sürecin toplamsal fonksiyonellerinin dağılımları incelendi.
5) Bu süreç için, ergodik teorem ispat edildi ve ergodik dağılımın aşikar şekli bulundu.
6) Ergodik dağılımın ilk dört momenti, varyansı, çarpıklık ve basıklık katsayıları kesin formüllerle ifade edildi.
7) Sınır fonksiyonelleri için analitik ve asimptotik sonuçlar ortaya konuldu

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, stokastik süreç teorisindeki eksikliği giderilebileceği umulmaktadır. Bununla beraber bu çalışmanın aşağıdaki yönlerden de geliştirilebilmesi mümkündür:

1) ζ_1 rasgele değişkeninin, normal, gamma v.s. gibi pratikte sık sık kullanılan dağılımlara sahip olması durumunda ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi,

2) Elde edilen kesin formüller ve asimptotik formüller arasındaki farkın değerlendirilmesi,

3) Somut modeller için, simülasyon yöntemleri uygulayarak olasılık karakteristiklerinin hesaplanması ve elde edilen sonuçların asimptotik sonuçlarla karşılaştırılması.

7. KAYNAKLAR

1. Afanaseva, L.G. and Bulinskaya, E.V., Stochastic processes in the theory of queues and inventory control (Russian), Moskow, 1980.

2. Afanaseva, L.G. and Bulinskaya, E.V., Storage capacity optimization, Eng. Cybern., 19, 5 (1981) 49-57.

3. Afanaseva, L.G. and Bulinskaya, E.V., Certain asymptotic results for random walks in a strip, Theory Probability and Its Applications, 29, 4, (1984) 677-693.

4. Alsmeyer, G., Some relations between harmonic renewal measures and certain first passage times, Statistics and Probability Letters, 12, 1 (1991) 19-27.

5. Anisimov, V. V., Limit distributions of functionals of a semi-Markov process given on a fixed set of states, up to the time of first exit, Überstzung in Soviet Math., 11 (1970) 1002-1004.

6. Anisimov, V. V., The limiting behaviour of a semi-Markov process with a decomposable state space, Soviet Math., 13 (1973) 1276-1279.

7. Anisimov, V. V., Limit theorems for processes with semi-Markov switchings and their applications, Random Operators and Stoch. Equations, 12, 4 (1994) 333-352.

8. Anisimov, V. V., Diffusion approximation in switching stochastic models and its applications, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skorohod and Yu. V. Borovskikh, VSO, Zeist, The Netherlands (1995) 13-40.

9. Borovkov, A. A., On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theor. Prob. Appl., 10 (1965) 331-334.

10. Borovkov, A. A., On a walk in a strip with inhibitory boundaries, Mathematics Notes, 17 (1975) 385-389.

11. Borovkov, A. A., Stoch. Proc. in Que. Theo., Spring-Verlag, XI., New York, 1976.

12. Borovkov, A. A., Asymp. Methods in Queues Theory ., J. Willey, New York, 1984.

13. Brown, M., Ross, S. M., Asymptotic properties of processes , SIAM J. Applications Math. 22, 1 (1972) 93-105.

14. Brown, M., Solomon, H., A second-order approximation for variance of a renewal reward process, Stochastic Processes and Their Application, 3 (1975) 301-314.

15. Çınlar, E., Some joint distributions for Markov renewal processes, Austural J. Statistics, 10 (1968) 1.

16. Çınlar, E., Markov renewal, Adv. Appl. Probab., 1 (1975) 123-187.

17. Çınlar, E., Introdıction to stoch. processes, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

18. Dzhafarov, V. S., Nasirova, T. H., Skohorod, A. V., On the limit of certain process with semi independent increments, Theor. Probab. Math. Statist., 5 (1976) 52-57.

19. El-Shehawey, M. A., Limit Distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Ind. Soc. Oer. Res., 13, 1-4 (1992) 63-72.

20. Ezhov, I. I., Korolyuk, V. S., Semi-Markovian processes and their applications (Russian), Cybernetica, Kiev, 5 (1967) 58-65.

21. Ezhov, I. I., Shrenkov V. S., Ergodic theorems connected with the Markov property of random, Theor. Probab. Appl., 21 (1977) 620-624.

22. Federyuk, M. V., Asymp. for integrals and series (Russian), Nauko, Moscow, 1984.

23. Feller, W., On semi-Markov processes, Proc. Nat. Acad. Sci. Usa, 51, 4, 1964.

24. Feller, W., Introdıction to Probability and Its Appl. II, J. Willey, New York, 1971.

25. Gihman, I. I., Skorohod, A. V., Theory Of Stoch. Proc. Ii, Springer, Berlin, 1975.

26. Gnedenke, I. I., Kovalenko, I. N., İntroduction to Quening Theory, IX, Translation Edited by D. Louvish, Jerusselam, İsrael Program for Scientific Translation, 1968.

27. Grübel, R., On Harmonic renewal meas., Prob. Th. and Fields, 71 (1986) 393-403.

28. Gusak, D. V., Korolyuk, V. S., On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theor. Prob. Appl., 13 (1968) 448-456.

29. Gusak, D. V., On the joint distribution the first exit time and exit value for homogeneous processes with independent increments, Theory Probability Applications, 14 (1969) 14-23.

30. Gusak, D. V., Korolyuk, V. S., On the joint distribution process with stationary movements and its maximum, Theor. Prob. Appl., 14 (1969) 400-469.

31. Harlamov, B. P., On Convergence of semi-Markov walks to a continuos semi Markov process, Theor. Prob. Appl., 21 (1977) 482-498.

32. Jewell, W. S., Fluctuation of a Renewal- Reward Process, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 19 (1967) 309-329.

33. Kastenbaum, M. A., A dialysis sytem with one absorbing and one semi reflecting state, J. Appl. Probab., 3 (1963) 1168-1193.

34. Kemperman, J. H. B., A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary, Ann. Math. Statist. 34 (1963) 1168-1193.

35. Khaniyev, T. A., Distribution of a semi-Markov walk with two delayed screens (Russian), Some questions of the theory of stochastic processes, Collect. Sci. Works, Kiev, (1984) 106-113.

36. Khaniyev, T. A., An Ergodic Theorem for a semi-Markov walk with two delayed screens (Russian), İzc. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 4, (1986) 37-42.

37. Khaniyev, T. A., The explicit form of the ergodic distribution of the process of a semi-Markov walk dependent components (Russian), Probabilistic method the investigation of systems with an infinite number of degrees of freedom, Collect. Sci. Works, Kiev, (1986) 119-125.

38. Khaniyev, T. A., Distribution of the process of a semi-Markov walk on a closed interval with exponentally distributed components, İzc. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 1 (1988) 45-50.

39. Khaniyev, T. A., Özdemir, H., On the Laplace transform of finite dimensional distribution functions of semi-continuous random processes with reflecting and delaying screens, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skohorod and Yu. V. Borovkikh, VSP, Zeitst, The Netherlands, (1995) 167-174.

40. Khaniyev, T. A., On the probability characteristics of a semi-Markov random walks with two barriers, Buletin of the International Statis. Institu, 57, 2 (1997) 568-570.

41. Khaniyev, T. A., Ünver, İ., The study of the level zero crossing time of a semi-Markovian random walk with delaying screen, Turkish Journal of Mathematics, 21, 3 (1997) 257-268.

42. Khaniyev, T. A., Özdemir, H., Maden, S., Calculating the probability characteristics of a baundary functional of a semi-continous randaom process with reflecting and delaying screens, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 14 (1998) 117-123.

43. Khaniyev, T. A., Some results on a stochastic process with a discerete chance interference, Matematical and Computational Applications, 4, 2 (1999) 145-152.

44. Khaniyev, T. A., Ünver, İ., Maden, S., On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19, 5 (2001) 16 p.

45. Khaniyev, T. A., Kucuk, Z., Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics and Probability Letters, 69, 1 (2004) 91-103.

46. Khaniyev, T. A., On the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistics Computational and Sim. 75, 8 (2005) 1-14.

47. Khaniyev, T. A., About moments of Generalized renewal process, Transactions of NAS of Azerbaijan, Series of Phy. Tech. And Mth. Sciences, 25, 1 (2005) 95-100.

48. Korolyuk, V. S., Turbin, A. F., Semi-Markov processes and their applications (Russian), Kiev, Izdatel'stvo, Naukova Dumka, R. 1. 12, 1976.

49. Korolyuk, V. S., Pirliev, B., Randaom walk on a semi-axis on a super position of two renewal processes (Russian), Ukr. Math. Zh., 36, 4 (1984) 433-436.

50. Korolyuk, V. S., Svishchuk, A. V., Limit representation of continuous semi-Markovian random evolutions in as sheme of series (Russian), Ukr. Mathematics Zh., 11 (1989) 1446-1482.

51. Korolyuk, V. S., Borovskikh, Y. V., Analytical Poblems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev, 1981.

52. Kovalenko, I. N., Kuznetchov, N., Shrenkov V. M., Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev, 1983.

53. Lukac, E., Characteristics Function, Griffin, London, 1970.

54. Levy, P., Processus semi-Markovians. Proc., III. Internat. Congr. Math., Amsterdam, (1954) 416-426.

55. Lotov, V. I., On asymptotics of distributions related to the departure of a non-discrete random walk from an interval (Russian), Predel'nye Teorems i Veroyatnoste i Smezhnye Vpoprosy, 1 (1982) 18-25.

56. Lotov, V. I., On random walks within a stripe, Theory Probability and Its Applications, 36, 1 (1991) 160-165.

57. Lotov, V. I., On asymptotics of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain, Sib. Adv. Math., 1, 3 (1991) 26-51.

58. Lotov, V. I., On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24, 4 (1996) 2154-2171.

59. Nasirova, T. H., Skohorod, A. V., On a class of jump processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16 (1978) 81-94.

60. Nasirova, T. H., On a ergodic theorems for some semi-Markov processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20 (1979) 90-97.

61. Nasirova, T. H., Distribution of a semi-Markov walk processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20 (1979) 90-97.

62. Nasirova, T. I., Processes of semi-Markovian random walk, ELM, Baku, 1984.

63. Nasirova, T. I., Yapar C., Khaniyev, T. A., On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s, S), Cybernetics and Syst. Anal., 5 (1998) 69-76.

64. Prabhu, N. U., Stochastic Storage Processes, Springer-Verlang, New York, 1981.

65. Resnick, S. I., Adventures in Stoch. Proc., Birkhaüser Boston, Cambridge, 1992.

66. Rogozin, B. A., On the distribution of the first jump, Theory Probability Applications, 9 (1964) 450-464.

67. Rogozin, B. A., On some classes processes with independent increments, Theor. Probab. Appl., 10 (1965) 479-483.

68. Ross, S. M., Introduction to Probability Models, Acdemic Press, New York, 1993.

69. Saaty, T. L., Elements of Queueing Theory with Appl., Dover, New York, 1983.

70. Sentura, L., Puri Prem, S. A., A semi- Markov storage model, Adv. App. Probab., 1, 2 (1973) 362-378.

71. Serfoza, R. F., Functions of semi- Markov proc., SIAM J. Appl. Math., (1971) 20.

72. Shrenkov V. M., Ergodic theorems and related questions of the theory of random processes (Russian), Kiev, Naukova Dumka, 1981.

73. Shrenkov V. M., On the Markov renewal processes, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 2 (1984) 248-263.

74. Shrenkov V. M., The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moskow, 1989.

75. Sil'vestrov, D. S., Limit theorems for semi- Markov processes and their applications I., Theor. Probab. Math. Statist., 3 (1975) 159-176.

76. Sil'vestrov, D. S., Limit theorems for semi- Markov processes and their applications II., Theor. Probab. Math. Statist., 3 (1975) 177-198.

77. Skohorod, A. V., Random processes with independent increments, Nauka, Moskow, 1967.

78. Skohorod, A. V., Slobodenyuk, N. P., Limit theorems for random walks,Ukr. SSR, Nauka Dumka, 1970.

79. Smith, W. L., Reg. stoc. Proc., Proc. Roy. Soc. Edinburg Ser. A, 232 (1955) 6-31.

80. Smith, W. L., Renewal th. and its ram., Journ. Roy. Stat. Soc., 20 (1958) 243-302.

81. Smith, W. L., On the cumulants of renewal proc., Biometrika, 46, 1 (1959) 1-29.

82. Smith, W. L., Some peculier semi- Markov processes, Proc. 5- Th. Berkelly Symp. Math. Statist. And Probab., 2, 2 (1965-1966) 255-263.

83. Spitzer, F., Acombinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, (1956) 323-339.

84. Spitzer, F., Principles of random walk, Princeton, N. J., D. Van Nostrand, 1964.

85. Takacs, L., Bizonyus tipusu requrrens sztochasztikus folyamotok vizsgalatarol, Magyartud, Akad. Math. Kutato. Int. Kozl., k3, (1954) 1-2.

86. Takacs, L.,Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2nd ,ed, Huntington, New York, Robert E. Krieger Publishing Co. XI, 1977.

87. Tomko, J., On the theory of semi-Markov processes, with a general state space (Russian), Teor. Veroyatn. Primen., 34, 2 (1989) 314-329.

88. Ünver, İ., On distributions of the semi- Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, Bulletin of Calcutta Math. Society, 89 (1997) 231-242.

89. Wesakul, B., The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, Ann. Math. Statist., 23 (1961) 765-.

ÖZGEÇMİŞ

Nurgül OKUR BEKAR, 05. 05. 1978 tarihinde Çorum ilinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Çorum'da tamamladı. 1996-1997 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 1997-1998 yılları arasında Almanya'da Almanca dil eğitimi aldı. 1998-2002 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümününde lisans öğrenimi tamamladı.

Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalı Yüksek Lisans programına kayıt oldu. 2002-2003 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Enformatik bölümünde part-time olarak bilgisayar salonlarında görev aldı. 2003-2006 yılları arasında Matematik öğretmenliği yaptı. Kasım 2006'da Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.