KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

196043

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPONORMAL DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

14 6049

Erdal ÜNLÜYOL

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16.01.2006
Tezin Savunma Tarihi : 07.02.2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Zameddin İSMAYILOV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hilmi ZENGİN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

Trabzon 2006

ÖNSÖZ

Yüksek lisansa başladığım ilk günden bu güne kadar gerek tez konumum belirlenmesinde gerekse çalışmalarımda bana yol gösteren, tezin bu hale gelmesinde yardımını ve desteğini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Zameddin İSMAYILOV'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Eğitim ve öğretim hayatım süresi içerisinde maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, tez çalışmalarım sırasında büyük bir sabır gösteren ve özveride bulunan sevgili eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Erdal ÜNLÜYOL
Trabzon 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada $L^2(H,(a,b))$, $-\infty < a < b < \infty$ Hilbert uzayında birinci mertebeden operatör katsayılı lineer diferensiyel ifadenin doğurduğu minimal operatörün tüm hiponormal genişlemeleri sınır değerleri dilinde yazılmış ve bu genişlemelerin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde Fonksiyonel Analiz, Operatörler ve Diferensiyel Operatör Denklemler Teorisi' nin temel kavram ve sonuçları verilmiş, daha sonra ise John-von Neumann' ın 1929 yılında kapalı simetrik operatörün özeşlenik genişlemeleri teorisine ait meşhur çalışmasının [1] kısa özeti verilmiştir.

İkinci bölümde sonlu $[a,b]$ aralığı üzerinde vektör fonksiyonların $L^2(H,(a,b))$ uzayında birinci mertebeden operatör katsayılı aşağıdaki lineer diferensiyel ifadenin

$$l(u) = u'(t) + Au(t),$$

burada A, H Hilbert uzayında bir lineer normal operatördür, doğurduğu minimal operatörün bütün hiponormal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve bu hiponormal genişlemelerin bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Daha sonra ise $L^2(H,(a,b))$ uzayında birinci mertebeden bir sınıf diferensiyel operatörlerin spektrumunun ayrıklığı operatör katsayıları dilinde ifade edilmiş ve rezolvent operatörün Schatten von Neumann sınıfına ait olması incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Simetrik ve Özeşlenik Operatör, Minimal, Maksimal Operatörler, Formal Normal Operatör, Normal Operatör, Hiponormal ve Makismal Hiponormal Operatör, İzometrik, Daraltma, Üniter ve Evolüsyon Operatörler, Hilbert Uzayı, Diferensiyel İfade ve Formal Eşleniği, Defekt İndeksleri, Spektrum, Schatten-von Neumann Sınıfi.

SUMMARY

Hyponormal Differential Operators

In this study all hyponormal extensions of a minimal operator for the first order operator coefficient linear differential expression are investigated in terms of boundary conditions and some spectral properties of these extensions are discussed in $L^2(H,(a,b))$ Hilbert space, where $-\infty < a < b < \infty$.

In the first part of the study basic concept and results in the operator theory are summarized. Then a short summary of a famous study due to John-von Neumann [1] is stated.

In the second part all hyponormal extensions of a minimal operator generated by the first order operator coefficient linear differential expression

$$l(u) = u'(t) + Au(t)$$

in the vector-functions space $L^2(H,(a,b))$ ($[a,b]$ is finite) are described in terms of boundary condition and some spectral properties of these extensions are investigated.
Then, the discreetness of one class of first order differential operators is described in terms of operator coefficients. Furthermore, it is investigated whether the resolvent operator belongs to the Schatten von Neumann class.

Keywords: Symmetric and Self Adjoint Operator, Minimal, Maximal Operators, Formal Normal Operator, Normal Operator, Hyponormal and Maximal Hyponormal Operator, Isometric, Contraction, Unitar and Evaluation Operators, Hilbert Space, Differential Expression and its Formal Adjointment, Defect Indices, Spectrum, Schatten-von Neumann class.

SEMBOLLER DİZİNİ

$B(X)$	X Lineer normlu uzayında, lineer sınırlı operatörler uzayı
$C^{(n)}(I)$	I aralığı üzerinde n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_0^{(n)}(I)$	I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $C^{(n)}(I)$' daki fonksiyonlar uzayı
$C^{\infty}(I)$	I aralığı üzerinde her mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
$C_0^{\infty}(I)$	I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $C^{\infty}(I)$' daki fonksiyonlar uzayı
$\mathfrak{S}_p(H)$	Schatten-von Neumann sınıfı
$L(H)$	H Hilbert uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
$L^2(I)$	I aralığı üzerindeki fonksiyonların Hilbert uzayı
$L^2(H,(a,b))$	$[a,b]$' den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların Hilbert uzayı
$L^p(X,\Sigma,\mu)$	Lebesgue uzayları, $p \geq 1$
$R_\lambda(A), R(\lambda;A)$	A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_p(A)$	A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_c(A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(A)$	A operatörünün kalan spektrumu
$W_p^l(I)$	$l, p \geq 1$ için l. mertebeye kadar $L^p(I)$ uzayında olan fonksiyonların Sobolev uzayı
$\overset{0}{W}{}_p^l(I)$	$l, p \geq 1$ için I aralığı içindeki, kompakt bir küme dışında sıfır olan $W_p^l(I)$ fonksiyonların uzayı
$W_p^l(H,(a,b))$	$[a,b]$' den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların Sobolev uzayı

$\overset{0}{W}{}^{l}_{p}\left(H,(a,b)\right)$ $[a,b]$' den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların kompakt bir küme dışında sıfır olan $W^{l}_{p}\left(H,(a,b)\right)$ fonksiyonların Sobolev uzayı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Hilbert uzayında sınırsız formal normal operatörlerin normal genişlemeleri teorisindeki ilk sonuçlar Y. Kilpi [2, 3, 4], R.H. Davis [5], tarafından bulunmuş, daha sonra ise bu teorinin temeli E.A. Coddington [6], G. Biriuk ve E.A. Coddington [7], B.Sz.-Nagy [8], J. Stochel ve F.H. Szafraniec [9, 10] tarafından atılmış ve bir genel teori olarak geliştirilmiştir.

E.A. Coddington [6] çalışmasında Hilbert uzayında verilen soyut formal normal sınırsız kapalı yoğun tanımlı bir lineer operatörün bütün normal genişlemeleri tanım kümeleri dilinde ifade etmiştir. E.A. Coddington bu çalışmasında 1929 yılında John von Neumann'ın kapalı simetrik operatörlerin özeşlenik genişlemeleri alanında yapmış olduğu meşhur [1] sonucunu genelleştirmiştir. Ayrıca G. Biriuk ve E.A. Coddington [6, 7] bu çalışmalarında lineer bağıntılar teorisinin sonuçlarından faydalanarak yoğun tanımlı olmayan kapalı formal normal operatörlerin normal genişlemelerini de tanım kümeleri dilinde ifade edebilmişlerdir.

John von Neumann teorisinde olduğu gibi E.A. Coddington' un bu buluşu da uzun yıllar, Hilbert uzayındaki diferensiyel operatörler teorisi diline dönüştürülememiştir. Nitekim bir diferensiyel operatörün herhangi genişlemeleri sınır değerleri dilinde daha kolay ifade edilebildiğinden John von Neumann teorisinden sonraki yıllarda olduğu gibi uzun yıllar bu yapılamamıştır. Bu alanda birkaç özel durum B.K. Kokebayev ve Kh.T. Otarov [11], B.N. Biyarov ve M. Otelbayev [12], vs. çalışmalarında incelenmiştir.

1950' li yıllarda katsayıları bir Hilbert veya Banach uzayında operator olan lineer diferensiyel operatorlerin incelenmesi büyük bir ilgiyle devam etmektedir. Bu alanda ilk sonuçları E. Hille ve R.S. Phillps [13], J.L. Lions [14], S.G. Krein [15], M.L. Gorbachuk [16], V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk [17], V.M. Bruk [18] vs. tarafından bulunmuş ve bu bir teori olarak geliştirilmiştir.

John von Neumann'ın yoğun tanımlı kapalı simetrik operatörlerin özeşlenik genişlemeler teorisi, yani vektör fonksiyonların Hilbert uzayında operatör katsayılı formal simetrik diferensiyel ifadelerin doğurduğu simetrik minimal operatörün özeşlenik genişlemeleri 1970 yılından itibaren incelenmeye başlanmıştır.

İlk olarak bu problem özeşlenik operatör katsayılı Sturm-Liouville diferensiyel ifadesi için $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında Prof. Dr. M.L. Gorbachuk (Ukrayna, Kiev) tarafından sınır değerler dilinde 1972 yılında sonuçlandırılmıştır [16].

Bu problem 1970 yılında Fransa' nın Nitz kentinde düzenlenen uluslararası matematikçiler konferansında B.M. Levitan tarafından ortaya atılmıştır [19].

Adi diferensiyel ifadeler için bu problemi M.G. Krein [20] ve F.S. Rofe-Beketov [21] son bir çözüme ulaştırmışlardır. Kısmi türevli diferensiyel ifadeler için bu problem R.A Aleksandran, Yu.M. Berezanskii, V.A. Ilin ve A.G. Kostyuchenko tarafından [22] çözülmüştür. Sonlu bölgelerde ise bu problem M.İ. Vischik [23] tarafından sonuçlandırılmıştır. Operatör katsayılı herhangi mertebeden lineer diferensiyel simetrik ifadelerin doğurduğu minimal operatörün özeşlenik (maksimal akkümülativ, simetrik v.s.) genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesine V.I. Gorbachuk ve M.L. Gorbachuk [17] kitaplarında geniş yer vermiştir.

Sonlu aralıkta vektör fonksiyonların Hilbert uzayında herhangi mertebeden özeşlenik katsayılı formal normal diferensiyel ifadelerin doğurduğu minimal operatörün bütün normal genişlemelerini, sınır değerleri dilinde Z.I. Ismailov [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39], F.G. Maksudov ve Z.I. Ismailov [40, 41, 42, 43, 44] un, Z.I. Ismailov ve H. Karatash' ın [45, 46, 47, 48] bilimsel çalışmalarında ifade edilmiştir. Ayrıca bu çalışmalarda bu genişlemelerin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

Şimdi Z.I. Ismailov' un [31] çalışmasının özetini verelim.

Bir H Hilbert uzayında yoğun tanımlı kapalı bir N operatörü, eğer her $f \in D(N)$ için, $D(N) \subset D(N^*)$ ve $\|Nf\|_H = \|N^* f\|_H$ oluyorsa bu N operatörüne *formal normal operator* adı verilir. Eğer bir formal normal operatörün trivial olmayan formal normal genişlemesi yoksa bu formal normal operatöre *maksimal operator* denir. N formal normal operatörü için $D(N) = D(N^*)$ ise bu N operatörüne *normal operator* [6] denir.Yoğun tanımlı kapalı bir N operatörünün normal olması için gerek ve yeter şart $NN^* = N^*N$ olmasıdır, yani N operatörünün kendi eşleniğiyle değişmeli olması anlamına gelir [8].

Şimdi birinci mertebeden aşağıdaki şekilde bir diferensiyel operatörü göz önüne alalım.

$$l(u) = u'(t) + Au(t), \qquad -\infty < a \le t \le b < \infty,$$

burada A, H Hilbert uzayında alttan pozitif tanımlı özeşlenik bir operatördür. Kolaylık için $A \geq E$ olarak alalım. E, H Hilbert uzayında birim operatördür.

$L_0\left(L_0^+\right)$ ve $L\left(L^+\right)$ ile sonlu $[a,b]$ aralığında vektör fonksiyonların $L^2\left(H,(a,b)\right)$ Hilbert uzayında $l(\cdot)$ ($l^*(\cdot)$ formal eşlenik ifadesi) diferensiyel ifadesi tarafından doğurulan, sırasıyla *minimal* ve *maksimal operatör*leri göstereceğiz. A operatörü üzerine bazı şartlar koyarak L_0 minimal operatörünün formal normal olduğu, fakat maksimal olmadığı ispatlanabilir.

Burada sınır koşullar dilinde minimal operatörün bütün normal genişlemelerini ve onların spektrumunun ayrıklığı incelenmiştir.

H_τ, $-\infty < \tau < \infty$ A^τ operatörü ile kurulan uzayların Hilbert dereceleri olsun. A' ya H_{+1}' den H' ye bir izometrik dönüşüm olarak bakabiliriz. H_{-1}' den H' ye bir dönüşüm olan eşlenik operatörü A' nın bir genişlemesidir. Bunu A_e ile göstereceğiz. Eğer A_e, $D(A_e) = H$ olan H_{-1}' de bir operatör olarak alırsak, o zaman A_e özeşleniktir ve $A_e \geq E$ [16].

$$l_e(u) = u'(t) + A_e u(t), \qquad -\infty < a \leq t \leq b < \infty \tag{1}$$

Ayrıca L_0 ve L' lerin tanım kümesinin yapısı [40]'ta incelenmiştir.

Lemma 1: Eğer $D(L_0) \subset \overset{0}{W}{}_2^{1}\left(H,(a,b)\right)$ ve $A_e^{1/2} D(L_0) \subset W_2^1\left(H,(a,b)\right)$ ise, o zaman L_0 minimal operatörü formal normaldir.

L_0 minimal operatörünün L_π genişlemesi

$$l_e(u) = f(t), f(t) \in L^2\left(H,(a,b)\right)$$
$$u(a) = u(b)$$

normaldir. Bu ise L_0 minimal operatörünün A operatörü üzerinde belirli koşullar altında formal normal olduğunu, fakat maksimal olmadığını gösterir.

Aşağıdaki teoremler normal genişlemelerin varlığı için gerekli şartlardır.

Teorem 1: A, H Hilbert uzayında lineer yoğun tanımlı kapalı bir operatör olsun. Eğer A operatörüyle $l(u)$ diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan minimal operatörünün en az bir normal genişlemesi var ise, o zaman A operatörü normaldir.

Teorem 2: Eğer L_e, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi ise, o zaman

$$A_e D(L_e) \subset W_2^1(H,(a,b)).$$

Teorem 2' den aşağıdaki sonucu söyleyebiliriz.

Sonuç 1: Eğer L_0 minimal operatörünün normal bir genişlemesi L_e ise, o zaman

$$D(L_e) \subset C(H_{+1/2},[a,b]).$$

Eğer $A_e W_2^1(H,(a,b)) \subset W_2^1(H,(a,b))$ ise, o zaman $A_e H = H$.

Şimdi normal genişlemeleri ifade edelim.

Teorem 3: $A_e W_2^1(H,(a,b)) \subset W_2^1(H,(a,b))$ olsun. L_0 minimal operatörünün her L_e normal genişlemesi (1) deki diferensiyel ifadesi ve

$$u(b) = Wu(a) \tag{2}$$

sınır koşulu tarafından üretilmiştir. Burada W, H Hilbert uzayında bir üniter operatör ve

$$A_e W = W A_e.$$

W üniter operatörü L_e genişlemesi tarafından tek bir şekilde belirlenir, yani

$$L_e = L_W.$$

Tersine, $A_e W = W A_e$ özelliği olan W üniter operatörü için L maksimal operatörünün (2) şartını sağlayan $u(t) \in W_2^1(H,(a,b))$ vektör fonksiyonlarına kısıtlanışı, $L^2(H,(a,b))$ uzayında L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesidir.

Aşağıdaki teorem normal genişlemelerin spektrumunu ifade eder.

Teorem 4: L_W normal genişlemesinin spektrumu aşağıdaki formdadır.

$$\sigma(L_W) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda : \lambda = \lambda_0 + \dfrac{2k\pi i}{b-a}, \text{ burada } \lambda_0,\ e^{-\lambda_0(b-a)} - \mu = 0,\ \mu \in \sigma\left(W^* e^{-A(b-a)}\right), \\ \qquad \text{denklemi için çözüm kümesidir, } \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{array} \right\}$$

Teorem 5: Eğer A operatörünün spektrumu ayrık ise, o zaman minimal operatörün her normal genişlemesinin spektrumu da ayrıktır.

$\mathfrak{S}_p$, $p \geq 1$ ile operatörlerin *Schatten-von Neumann Sınıfı*' nı göstereceğiz [49].

Teorem 6: $L_\pi^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, $p \geq 2$ olması için gerek ve yeter şart $A^{-1} \in \mathfrak{S}_{p-1}$.

$L_W^{-1} = A_e^{-1}\left[E + iA_e^{-1}\left(-i\dfrac{d}{dt}\right)\right]^{-1}$ bağıntısı aşağıdaki teoremin gerçeklendiği gösterir.

Teorem 7: Eğer $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, $p \geq 1$ ise, o zaman $L_W^{-1} \in \mathfrak{S}_p$.

Kabul edelim ki $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ ve $\sigma(A) = \{\lambda_n,\ n = 1,2,\cdots\}$ olsun. Bu taktirde $W^* e^{-A(b-a)} \in \mathfrak{S}_\infty$ ve $\left|\lambda_n\left(W^* e^{-A(b-a)}\right)\right| = \lambda_n\left(e^{-A(b-a)}\right) = e^{-\lambda_n(A)(b-a)}$, $n = 1,2,3,\cdots$ olduğunu görmek zor değildir.

$A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ için L_W spektrumu aşağıdaki forma sahiptir.

$$\sigma(L_W) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_n(A) - i\arg\lambda_n\left(W^* e^{-A(b-a)}\right) + \dfrac{2k\pi i}{b-a}, \\ n = 1,2,3,\cdots;\ k = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \cdots \end{array} \right\}$$

Tanım 1: Bir H Hilbert uzayında yoğun tanımlı kapalı bir T operatörü, eğer

$$D(T) \subset D(T^*)$$

ve $\forall x \in D(T)$ için

$$\|T^* x\|_H \leq \|Tx\|_H$$

şartlarını sağlıyorsa, o zaman bu T operatörüne *Hiponormal Operatör* denir.

Hilbert uzayında "Lineer Sınırlı Hiponormal Operatörlerin Genel Teorisi ve Spektral Analizi"ni kuran ve genişleten P.R. Halmos [50], J.G. Stampfli [51, 52], D. Xia [53], C.R. Putnam [54], L.R. Williams [55] vs.

1.2. Metrik Uzaylar ve Lineer Uzaylar

Tanım 2 (Metrik Uzay): X boştan farklı bir küme ve bir

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+,\ (x,y) \to d(x,y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

ii) $d(x,y)=d(y,x)$;

iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği),

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde, *uzaklık fonksiyonu* ya da *metrik* adını alır ve bu durumda (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir. Burada i)-iii) özelliklerine *metrik aksiyomları* denir.

Örnek 1: $X=\mathbb{R}$ olmak üzere

$$d:\ \mathbb{R}\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+,\ (x,y)\rightarrow d(x,y)=|x-y|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Yani $(\mathbb{R},d)$ ikilisi bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerinde *mutlak değer metriği* denir.

Örnek 2: X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde aşağıdaki gibi bir d fonksiyonunu tanımlayalım.

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y \text{ ise}\\ 0, & x=y \text{ ise}\end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan d fonksiyonu X kümesi üzerinde bir metriktir. Başka bir deyişle (X,d) ikilisi bir metrik uzaydır. Bu metriğe *basit metrik* veya *diskret metrik* denir.

Tanım 3 (Vektör Uzayı): X boş olmayan bir küme ve K ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+: X\ \mathrm{x}\ X\rightarrow X,\ (x,y)\rightarrow x+y,$$
$$\cdot: K\ \mathrm{x}\ X\rightarrow X,\ (a,x)\rightarrow ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x,y,z\in X$ ve $a,b\in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x+y=y+x$;
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$;
3. $x+0=x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0\in X$ vardır;
4. $x+(-x)=0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x\in X$ vardır;
5. $1\cdot x=x$;
6. $a(x+y)=ax+ay$;

7. $(a+b)x = ax + bx$;

8. $(ab)x = a(bx)$.

Bu durumda X 'e, K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*), elemanlarına da *vektör* veya *nokta* adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X 'e bir *reel vektör uzayı* ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa X 'e bir *kompleks vektör uzayı* denir.

" 0 " sembolünün, X uzayındaki bir vektör elemanı olarak kullanılmasıyla birlikte, sıfır skaleri için de kullanılması genelde yanılgıya neden olmaz. Ancak biraz daha açıklık getirmek gerekirse, sıfır vektörünü " θ " şeklinde gösterebiliriz.

Vektör uzayın tanımından aşağıdaki şu basit sonuçları elde ederiz.

(a) Her $x \in X$ için $0x = \theta$;

(b) Her $a \in K$ için $a\theta = \theta$;

(c) $(-1)x = -x$;

(d) $x \neq \theta$ olmak üzere $ax = bx$ ise $a = b$;

(e) $a \neq 0$ ve $ax = ay$ ise $x = y$;

(f) $y, z \in X$ vektörleri verildiğinde $x + y = z$ denkleminin tek bir $x \in X$ çözümü vardır.

Tanım 4 (Altuzay): X bir vektör uzayı ve Y, X ' in bir boş olmayan alt kümesi olsun. Y, X vektör uzayındaki toplama ve çarpma işlemlerine göre kendi başına bir vektör uzayı oluşturuyorsa Y ' ye, X ' in bir (*lineer*) *altuzay* denir.

Tanım 5: X bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in X$ olarak verilsin. $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n$$

şeklindeki bir toplama $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in X$ in bir *lineer kombinasyonu* denir.

$$\varnothing \neq M \subset X$$

ise M ' den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer kombinasyonlarının kümesine M ' nin *gereni* (veya *örtüsü*) denir ve *spanM* olarak gösterilir. *spanM* , X ' in bir altuzayıdır ve bu altuzaya M ' nin *ürettiği altuzay* denir.

Tanım 6: X bir vektör uzayı ve $M = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\} \subset X$ olsun.

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \in K$ olmak üzere

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0$

eşitliği, ancak ve ancak, $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ olması halinde gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in X$ vektörlerine *lineer bağımsız*, aksi halde *lineer bağımlı*dır denir.

Tanım 7: X bir vektör uzayı ve M , X ' in boş olmayan bir alt kümesi için

1. M lineer bağımsızdır;
2. $X = spanM$ ise M ' ye X ' in bir *tabanı* veya bir *bazı* denir.

Eğer X vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa X ' e *sonlu boyutlu bir vektör uzayı*, aksi halde *sonsuz boyutlu vektör uzayı* adı verilir. Sonlu boyutlu bir X vektör uzayının bir tabanındaki lineer bağımsız vektörlerinin sayısına X ' in *boyutu* denir ve boy$X$ veya $\dim X$ ile gösterilir.

Tanım 8: Y_1 ve Y_2, X vektör uzayının iki altuzayı olsun. Eğer, her $x \in X$ elemanı $y_1 \in Y_1$ ve $y_2 \in Y_2$ olmak üzere

$x = y_1 + y_2$

şeklinde tek bir gösterime sahip ise, X vektör uzayı Y_1 ve Y_2 uzaylarının *direkt toplamıdır* denir ve $X = Y_1 \oplus Y_2$ olarak yazılır. Y_2 ' ye Y_1 ' in (ya da Y_1 ' e Y_2 ' nin) X ' deki *cebirsel tümleyeni* denir.

1.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 9 (Normlu Vektör Uzayı): X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\| : X \to [0, \infty),\ x \to \|x\|$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $a \in K$ için

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2. $\|ax\| = |a| \|x\|$;
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$, $x \to \|x\|$ dönüşümüne X vektör uzayı üzerinde *norm* adını alır ve bu durumda $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* adı verilir. 1-3 özelliklerine *norm aksiyomları* denir. Bu vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir. K cismine bağlı olarak, *reel normlu uzay* ve *kompleks normlu uzay* terimleri de kullanılır.

Örnek 3: $E = C([a,b],K)$ kümesi

$$\|x\|_C = \underset{t\in[a,b]}{mak}|x(t)|$$

fonksiyonu ile bir normlu uzaydır.

Örnek 4: $X = \mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$) kümesi

$$\|x\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right\}^{1/p}, \ 1 \leq p < +\infty$$

fonksiyonu ile bir normlu uzaydır.

Tanım 10: $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzay içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x_0 noktasına *yakınsıyor* denir ve $x_n \to x_0$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya *norma göre yakınsama* denir.

Tanım 11: $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve bunun bir alt kümesi A olsun.

$$d(A) = \sup\{\|x-y\| : x\in A,\ y\in A\} \geq 0$$

$d(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ genelleştirilmiş reel sayısına A kümesinin *çapı* denir. Eğer $A \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise A kümesine *sınırlı küme* denir. X içindeki (x_n) dizisine karşılık gelen noktalar kümesi sınırlı ise (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Tanım 12: Bir $\left(X,\|\cdot\|\right)$ normlı uzayı, bir $x_0 \in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin. Buna göre;

$$S_r\left(x_0\right) := \left\{x \in X : \|x - x_0\| < r\right\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı *açık yuvar,*

$$\overline{S_r}\left(x_0\right) := \left\{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\right\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı *kapalı yuvar* ve

$$\sigma_r\left(x_0\right) := \left\{x \in X : \|x - x_0\| = r\right\}$$

kümesine ise x_0 merkezli ve r yarıçaplı *yuvar yüzeyi* denir.

$$\overline{S_r}\left(x_0\right) = S_r\left(x_0\right) \cup \sigma_r\left(x_0\right)$$

olduğu açıktır. $S_r\left(x_0\right)$ açık yuvarına $x_0 \in X$ noktasının bir *komşuluğu* (r - komşuluğu),

$$\mathring{S}_r\left(x_0\right) = S_r\left(x_0\right) \setminus \left\{x_0\right\}$$

kümesine de $x_0 \in X$ noktasının bir *delinmiş komşuluğu* (delinmiş r - komşuluğu) denir.

Tanım 13: $\left(X,\|\cdot\|\right)$ normlı bir uzay ve bunun içinde $\left(x_n\right)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m,n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε' na bağlı bir n_ε doğal sayısısı bulunabiliyorsa bu $\left(x_n\right)$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Başka bir deyişle:

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m,n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(x_n\right)$ dizisi bir *Cauchy dizisi*dir.

Tanım 14 (Banach Uzayı): Bir $\left(X,\|\cdot\|\right)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir elemana yakınsıyorsa, bu $\left(X,\|\cdot\|\right)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir.

Örnek 5: $X = \mathbb{R}^n$ (veya $X = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı için

(a) $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

(b) $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$;

(c) $\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1,2,3,\cdots,n\}$

normlarına göre birer Banach uzayıdır.

1.4. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Hilbert uzayları sonsuz boyutlu normlu uzayların en kullanışlı tipi olmak üzere Fonksiyonel Analiz' in teorik ve pratik uygulamalarında önemli rol oynamaktadır. Euclid uzayları ile büyük benzerliğe sahip olan Hilbert uzaylarının böyle kullanışlı olmasının nedeni, vektör cebirinde tanımlanan iç çarpım ve diklik kavramlarının bu uzaylar için genelleştirilebilmesidir.

Tanım 15 (İç çarpım uzayı): $K = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$(\cdot,\cdot) : X \times X \to K$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)$' ye X üzerinde bir *iç çarpım*, $(X,(\cdot,\cdot))$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* (veya *ön Hilbert uzayı*) denir.

(i_1) $\forall x \in X$ için $(x,x) \ge 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(i_2) $\forall x,y \in X$ için $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (kompleks eşlenik);

(i_3) $\forall x,y \in X$ ve $a \in K$ için $(ax,y) = a(x,y)$;

(i_4) $\forall x,y,z \in X$ için $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

$K = \mathbb{R}$ halinde $(x,y) = (y,x)$. (i_2) ve (i_4) ifadelerinden $\forall x,y,z \in X$ ve $\forall a,b \in K$ için

(a) $(ax+by,z) = a(x,z) + b(y,z)$;

(b) $(x,ay) = \overline{a}(x,y) = a(x,y)$;

(c) $(x,ay+bz) = \overline{a}(x,y) + \overline{b}(x,z)$

formüllerinin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 6: $f,g \in C([a,b],K)$ fonksiyonları için

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

tanımıyla $C([a,b],K)$ bir iç çarpım uzayıdır.

Tanım 16 (Norm): $(X,(\cdot,\cdot))$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in X$ olsun. Bir $x\in X$ vektörünün normu

$$\|x\|=(x,x)^{1/2} \tag{3}$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

Tanım 17 (Hilbert uzayı): Bir $(X,(\cdot,\cdot))$ iç çarpım uzayı (3) normuna göre tam ise, yani $(X,(\cdot,\cdot))$ içindeki her *Cauchy dizisi* (3) normuna göre yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Örnek 7: $(\cdot,\cdot):l_2 \times l_2 \to K,\ (x,y):=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}$

dönüşümü $l_2(\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma göre $l_2(\mathbb{C})$ bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 18 (Ayrılabilir Uzay): Bir metrik uzayın sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa bu uzaya *ayrılabilir metrik uzay* denir.

Tanım 19 (Pozitif ve Negatif Uzaylar): $T=T^*\geq E$, T^j operatörü ile tanımlanan $H_j(T)$, $-\infty<j<+\infty$, Hilbert derecelendirme uzaylarını tanımlayalım.

$H=H_0$, kompleks sayılar cismi üzerinde $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ iç çarpımı ve $f\in H_0$ için

$$\|f\|_{H_0}=(f,f)_{H_0}^{1/2}$$

normuyla bir Hilbert uzayı olsun. Burada T, H Hilbert uzayı üzerinde bir lineer özeşlenik operatör ve

$$\|Tf\|_{H_0}\geq\|f\|_{H_0}$$

olsun. $D(T^j)$, $0<j<+\infty$, kümesi

$$(f,g)_{H_{+j}} := \left(T^j f, T^j g\right)_{H_0}, \quad f,g \in D\left(T^j\right)$$

iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır.

$H_{+j} := H_{+j}(T)$, $0 < j < +\infty$, uzayına *pozitif uzay* denir. Benzer şekilde tanımlı

$H_{-j} := H_{-j}(T)$, $0 < j < +\infty$, Hilbert uzayına da *negatif uzay* denir.

Tanım 20 (Sobolev Uzayı): $m \geq 0$ bir tamsayı ve Ω, $\mathbb{R}^n$' de parçalı sürekli diferensiyellenebilir $\partial\Omega$ sınırlı bir tanım kümesi olsun. $\Omega \cup \partial\Omega$ üzerindeki fonksiyonların $C^m[\Omega \cup \partial\Omega]$ kümesinin tümleyeni, yani m defa sürekli diferensiyellenebilir kümesi,

$$\|\varphi\|_{W_2^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}$$

normu ile *Sobolev Uzayı* adını alır. W_2^m şeklinde gösterilir. Burada $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial t_1^{\alpha_1} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}}$,

$\alpha = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. $\overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$ ise, Ω içindeki kompakt bir küme dışında sıfır olan $W_2^m(\Omega)$ fonksiyonların uzayı olarak gösterilir.

Eğer Ω sınırlı değil ise, o zaman Sobolev uzayını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Bir $\varphi(t)$, $t \in \Omega$ fonksiyonunun $W_2^m(\Omega)$' ya ait olması için gerek ve yeter şart, $\varphi(t)$' nin ve onun $D^\alpha \varphi$, $|\alpha| \leq m$ türevlerinin de $L^2(\Omega)$' ya ait olmasıdır. Son olarak, $W_2^m(\Omega)$ uzayı aşağıdaki gibi bir iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

$$(\varphi, \psi)_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \left(D^\alpha \varphi, D^\alpha \psi\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Tanım21 ($L^p(X, \Sigma, \mu)$ Uzayı): X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli, Σ ölçülebilir, $|f|^p$, $1 \leq p < \infty$, fonksiyonunun bir μ ölçümüne göre integralinin sonlu olduğu μ denklik sınıflarının ailesinin tümünü $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ile göstereceğiz. Bu $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ailesi üzerinde norm,

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

$L^p(X, \Sigma, \mu)$ ailesi, $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$,$1 \le p < \infty$ normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 22 (Vektör Değerli Fonksiyonlar): $x(t): t \to B$, ($t \in I, I$ reel eksen üzerinde bir aralık) şeklinde tanımlanan ve bir B Banach uzayında değer alan $x(t)$ fonksiyonlarına *vektör değerli fonksiyon*lar denir.

Tanım 23 (Süreklilik): Bir $x(t)$ vektör fonksiyonu, $t_0 \in I$ noktasında, eğer $t \to t_0$ için $\|x(t) - x(t_0)\|$ oluyorsa o zaman $x(t)$'ye $t_0 \in I$ noktasında *süreklidir* denir. Diğer taraftan, I aralığının her bir noktasında sürekli olan $x(t)$ vektör fonksiyonuna *süreklidir* denir. Açıktır ki, eğer $x(t)$ I aralığı üzerinde sürekli ise, o zaman $\|x(t)\|$ de bu aralık üzerinde bir *sürekli skalar fonksiyon*dur.

Tanım 24 (s-Sayıları): H Hilbert uzayında tamamen sürekli bütün operatörlerin kümesini $\mathfrak{S}_\infty(H)$ veya kısaca $\mathfrak{S}_\infty$ ile göstereceğiz. Eğer, $A \in \mathfrak{S}_\infty$ ise, o zaman A^*A ve $|A| = (A^*A)^{1/2}$ operatörleri negatif olmayan ve tamamen sürekli operatörlerdir. Bundan dolayı $|A|$' nın $\lambda_n(|A|)$ öz değerleri negatif değildir ve $n \to \infty$ iken monoton olarak $\lambda_n(|A|) \to 0$. Bu sayılara A operatörünün *s-sayıları* denir ve $s_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ ile gösterilir.

Tanım 25 (Schatten-von Neumann Sınıfı): Operatörlerin aşağıdaki sınıflarını göz önüne alalım.

$$\mathfrak{S}_p := \left\{ A : A \in \mathfrak{S}_\infty, \ \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) < \infty, \ p > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan sınıfa *Schatten-von Neumann Sınıfı* denir. Bu sınıf için norm,

$$\|A\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm aşağıdaki özeliklere sahiptir.

(i) $\|A\|_p = \|A^*\|_p$, $(A \in \mathfrak{S}_p)$;

(ii) $\|AB\|_p \le \|A\|_p \|B\|$, $\|BA\|_p \le \|A\|_p \|B\|$, $(A \in \mathfrak{S}_p,\ B \in H)$.

Eğer B operatörü üniter ise, o zaman

$\|AB\|_p = \|BA\|_p = \|A\|_p$.

Tanım 26 (Diferensiyellenebilirlik): $x(t): I \to B$ bir vektör fonksiyonu t_0 noktası için, eğer

$$\left\| \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - y \right\| \to 0, \Delta t \to 0$$

şeklinde bir $y \in B$ elemanı varsa, o zaman $x(t)$'ye t_0 noktasında *diferensiyellenebilir* denir. Buradaki y' ye de $x(t)$ vektör fonksiyonunun t_0 noktasındaki *türevi* denir.

Eğer $x(t)$ vektör fonksiyonu I aralığının her bir noktasında diferensiyellenebilir ise, o zaman bu $x(t)$'ye I aralığı üzerinde *diferensiyellenebilir* denir.

$x'(t)$ vektör fonksiyonu sürekli ise, o zaman $x(t)$'ye *sürekli diferensiyellenebilir* denir.

Tanım 27 (Bochner İntegrali): $\sigma(t)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde soldan sürekli, azalmayan bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki, σ bu aralık üzerinde sayılabilir toplamsal ölçümü göstersin. Bir B Banach uzayında değer alan bir $x(t)(t \in [a,b])$ vektör fonksiyonu, eğer $\Delta_j : x(t) = x_j (t \in \Delta_j)$, $\cup \Delta_j = [a,b]$ olan ölçülebilir kümeler üzerinde sadece bir sonlu sayı değerini alırsa bu $x(t)$'ye *basit* denir. Δ_j kümesinin ölçümü ∞'a eşit ise, o zaman $x(t) = 0$ $(t \in \Delta_j)$ olarak alırız.

$x(t)$'ye hemen hemen her yerde yakınsak olan basit vektör fonksiyonlarının bir $x_n(t)$ dizisi mevcut ise, o zaman $x(t)$'ye *güçlü ölçülebilir* denir. B Banach uzayı üzerinde her sürekli lineer f fonksiyoneli için $f(x(t))$ skaler fonksiyonu $[a,b]$ aralığında ölçülebilir ise buna da *zayıf ölçülebilir* denir.

Eğer $x(t)$ ölçülebilir ise, o zaman $\|x(t)\|$ skaler fonksiyonu da ölçülebilirdir. Bir basit $x(t)$ vektör fonksiyonunun integralini

$$\int_a^b x(t)d\sigma(t) = \sum_j x_j mes\Delta_j$$

şeklinde tanımlarız.

Bir $x(t)$ vektör fonksiyonu için, eğer $x(t)$'ye hemen hemen her yerde yakınsak olan bir $x_n(t)$ dizisi ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|x(t) - x_n(t)\| d\sigma(t) = 0$$

var ise, o zaman bu $x(t)$ vektör fonksiyonuna $[a,b]$ aralığı üzerinde *Bochner İntegrallenebilir* denir.

Bir $x(t)$ vektör fonksiyonunun Bochner integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart, $x(t)$ vektör fonksiyonunun ölçülebilir ve

$$\int_a^b \|x(t)\| d\sigma(t) < \infty$$

olmasıdır.

Bir $x(t)$ vektör fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde ölçülebilir bir M alt aralığı üzerindeki integrali

$$\int_a^b \chi_M(t)x(t)d\sigma(t)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\chi_M(t)$, M 'nin *karakteristik fonksiyonu*dur.

Tanım 28 (Lineer diferensiyel bir ifadenin formal eşleniği): τ, I aralığı üzerinde n. mertebeden bir formal diferensiyel operatör olsun. Tersi söylenmedikçe τ' yu regüler olarak kabul edeceğiz. Burada $L^2(I)$ uzayında τ'ya uygun lineer diferensiyel operatörünü tanımlayacağız ve onların eşleniklerini inceleyeceğiz.

$I = [a,b]$ sonlu kapalı bir aralık ve $f, g \in C^n(I)$ olsun. Aşağıdaki integrali göz önüne alalım.

$$\int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}dt=\sum_{k=0}^{n}\int_a^b a_k(t)\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)\right]\overline{g(t)}dt.$$

Buradan, sağ tarafı k kere k. terim kısmi integrali alınırsa aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$\int_a^b\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)\right]a_k(t)\overline{g(t)}dt=-\int_a^b\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} f(t)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)\left\{a_k(t)\overline{g(t)}\right\}\right]dt+$$

$$+a_k(t)\overline{g(t)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} f(t)\Big|_a^b=\cdots$$

$$=(-1)^k\int_a^b f(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left\{a_k(t)\overline{g(t)}\right\}dt$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}\left\{a_k(t)\overline{g(t)}\right\}\right]\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-i} f(t)\Big|_a^b.$$

Böylece,

$$\int_a^b (\tau f)(t)\overline{g(t)}dt=\int_a^b f(t)\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left\{a_k(t)\overline{g(t)}\right\}dt+F_b(f,g)-F_a(f,g) \qquad (4)$$

olarak bulunur. Burada,

$$F_t(f,g)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}\left\{a_k(t)\overline{g(t)}\right\}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-i} f(t)\right].$$

Bununla birlikte, Leibniz kuralını kullanarak,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j\left\{a_k(t)\overline{g(t)}\right\}=\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{j-l} a_k(t)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{l}\overline{g(t)}\right],$$

(4)' ün sağ tarafındaki integralinden $\int_a^b f(t)\overline{\tau^* g(t)}dt$ yazılabilir. Burada τ^*

$$\tau^*=\sum_{j=0}^{n} b_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^i$$

operatörüdür ve

$$b_j(t)=\sum_{k=j}^{n}(-1)^k\binom{k}{j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-j}\overline{a_k(t)}.$$

Eğer τ bir (regüler) formal diferensiyel operatör ise, o zaman

$$b_n(t)=(-1)^n\overline{a_n(t)}\neq 0,$$

τ^* da bir (regüler) formal diferensiyel operatördür.

Sınır koşulları için Leibniz kuralını uygularsak aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$F_t(f,g)=\sum_{o\le j<i\le k\le n}(-1)^{i-1}\binom{i-1}{j}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-i}f(t)\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}\overline{g(t)}\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j-1}a_k(t)\right]$$

$$=\sum_{\substack{o\le j<i\le n\\ o\le l\le n-i}}(-1)^{i-1}\binom{i-1}{j}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j-1}a_{l+i}(t)\right]f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-j-1}\sum_{i=j}^{n-l-1}(-1)^{i}\binom{i}{j}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j}a_{l+i+1}(t)\right]f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}.$$

Eğer n x n kare matris $\{F_t^{lj}(\tau)\}$, $0\le l,j\le n-1$ için

$$\begin{cases}F_t^{lj}(\tau)=\displaystyle\sum_{i=j}^{n-l-1}(-1)^{i}\binom{i}{j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-j}a_{l+i+1}(t), & j+l\le n-1\\ F_t^{lj}(\tau)=0, & j+l>n-1\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, o zaman sınır koşullar aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F_t(f,g)=\sum_{j,l=0}^{n-1}F_t^{lj}(\tau)f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}.$$

τ, I aralığı üzerinde (kapalı olması gerekmez) formal diferensiyal bir operatör (regüler veya irregüler) olsun. $\{F_t^{lj}(\tau)\}$, $0\le l,j\le n-1$ matrisine, τ için $t\in I$ noktasındaki *sınır matrisi* denir. Aşağıdaki bilineer ifadeye ise τ için $t\in I$ noktasındaki *sınır formu* denir.

$$F_t(f,g)=\sum_{j,l=0}^{n-1}F_t^{lj}(\tau)f^{(l)}(t)\overline{g^{(j)}(t)}.$$

Regüler veya irregüler,

$$\tau^*=\sum_{j=0}^{n}b_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{i}$$

formal diferensiyel operatörüne τ ' nun *formal eşleniği* denir. Burada $b_j(t)$

$$b_j(t)=\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-j}\overline{a_k(t)}.$$

Eğer $\tau=\tau^*$ ise τ ' ya *formal özeşlenik* veya *formal simetrik* adı verilir.

1.5. Operatörler Teorisinin Temel Kavramları

Tanım 29: X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D ' nin her elemanına Y ' nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D ' den Y ' ye bir *operatör* veya *dönüşüm* denir. A operatörünün x ' e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ veya Ax ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ ' yi, $Ax \in Y$ ' ye götürdüğünü belirtmek için,

$$A : D \subset X \to Y$$

gösterimi kullanılır. (Bu gösterim D ' yi Y ' ye götüren A operatörü veya A, D ' den Y ' ye şeklinde okunur). Bu durumda D ' ye A operatörünün *tanım kümesi* denir ve $D(A)$ ile gösterilir.

$$R = R(A) := \{ y \in Y : y = Ax,\ x \in D(A) \}$$

kümesine A operatörünün *değer* (veya *görüntü*) *kümesi* denir. A operatörünün yaptığı bu işlem

$$X \supset D(A) \xrightarrow{A} R(A) \subset Y$$

şeklinde veya kısaca

$$A : X \to Y$$

biçiminde gösterilir. Bu gösterimde

$$D(A) \neq X \text{ veya } R(A) \neq Y$$

olabilir.

Örnek 8: $Af(x) := f'(x),\ f \in C^{(1)}[0,1]$ biçiminde tanımlanan

$$A : C([0,1], K) \to C([0,1], K)$$

operatörünün tanım kümesi $D(A) = C^{(1)}[0,1]$ dir.

Tanım 30: $A : X \to Y$ ve $E \subset X$, $F \subset Y$ olsun.

$$A(E) := \{ Ax : x \in E \}$$

kümesine E ' nin *görüntüsü*,

$$A^{-1}(F) := \{ x \in X : Ax \in F \}$$

kümesine F ' nin *ters görüntüsü* denir.

Tanım 31: $A:X\to Y$ ve $B:X\to Y$ operatörleri verilsin. Eğer

$D(A)=D(B)$ ve $\forall x\in D$ için $Ax=Bx$ ise A ile B operatörleri *eşittir* denir ve $A=B$ ile gösterilir. Eğer,

$D=D(A)\subset D(B)$ ve $\forall x\in D(A)$ için $Ax=Bx$ ise A operatörüne B operatörünün *kısıtlaması* (veya B operatörüne A operatörünün *genişlemesi*) denir ve $A=B\backslash_{D(A)}$ ile gösterilir.

Tanım 32: X,Y ve Z kümeleri, $A:X\to Y$ ve $B:Y\to Z$ operatörleri verilsin. $R(A)\subset D(B)$ ise $\forall x\in X$ için $Ax\in Y$ olduğundan $B(Ax)\in Z$. X' den Z' ye $x\in D(A)$ için

$$(BA)(x)=B(Ax)$$

ile tanımlı operatöre B ile A' nın *bileşkesi* denir ve BA ile gösterilir. Hatta AB operatörünün tanımlı olması (Bu yalnız $Z=X$ olması halinde geçerlidir.) durumunda da genellikle $AB\neq BA$ olur.

Tanım 33 (Sabit Operatör): $A:X\to Y$ bir operatör ve $b\in Y$ bir eleman olsun. Eğer,

$$\forall x\in X \text{ için } Ax=b$$

ise A operatörüne *sabit operatör* denir.

Örnek 9: $A:C[0,1]\to C[0,1]$, $D(A)=C^1[0,1]$ olmak üzere

$$Af(x)=1,\ Af(x)=5$$

operatörleri birer sabit operatörlerdir.

Tanım 34 (Birim Operatör): $A:X\to X$ operatörü verilsin. Eğer, $\forall x\in X$ için

$$Ax=x$$

ise A operatörüne *birim* (*özdeşlik*) *operatör* denir. I, E veya I_X ile gösterilir.

Tanım 35 (Örten Operatör): $A:X\to Y$ operatörü için $AX=Y$ oluyorsa, A operatörüne *örten* veya *surjektif*, aksi taktirde operatöre *içine operatör* denir. Buna göre, eğer A örten bir operatör ise, $\forall y\in Y$ için $Ax=y$ olacak şekilde $x\in X$ vardır.

Tanım 36 (Bire Bir Operatör): $A: X \to Y$ operatörü için herhangi $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$$

ya da, buna eşdeğer bir başka deyişle

$$Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

oluyorsa, A operatörüne *birebir* (1:1) veya *injektif operatör* denir.

Tanım 37 (Bijektif Operatör): Hem birebir hem de örten olan operatöre *birebir örten* veya *bijektif operatör* denir.

Örnek 10: Aşağıdaki $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ operatörlerini gözönüne alalım:

(a) $Ax = \cos x$ operatörü içine bir operatördür. Çünkü

$$R(A) = [-1,1] \neq \mathbb{R}$$

dir. Bu operatör birebir operatör değildir. Çünkü

$$0 = A(\pi/2) = A(3\pi/2) = \cdots$$

(b) $Ax = x(x^2 - 1)$ operatörü $R(A) = \mathbb{R}$ olduğundan örten, fakat birebir operatör değildir. Çünkü

$$0 = A(-1) = A(0) = A(1).$$

(c) $Ax = tgnhx$ operatörü $R(A) = (-1,1) \neq \mathbb{R}$ olduğundan örten değildir. Fakat her $a \in (-1,1)$ için $tgnhx = a$ denklemi tek bir köke sahip olduğundan birebir operatördür.

(d) $Ax = x^3$ operatörü birebir örten bir operatördür. Çünkü

$$R(A) = \mathbb{R}$$

ve her $a \in \mathbb{R}$ için $x^3 = a$ denklemi bir tek $x = \sqrt[3]{a}$ köküne sahiptir.

Tanım 38: X ve Y normlu uzayları ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakiler sağlandığında A operatörü $x_0 \in D(A)$ noktasında *süreklidir* denir.

(a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 : \forall x \in D(A)$ $\|x - x_0\| < \delta$ iken

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon.$$

(b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(A)$ dizisi için

$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0$.

Limit tanımına göre $A: X \to Y$ operatörünün $x_0 \in D(A)$ noktasında sürekli olması;

$x \to x_0$ iken $Ax \to Ax_0$ olması demektir.

Tanım 39: Eğer $A: X \to Y$ operatörü $D(A)$' nın her noktasında sürekli ise, A operatörü $D(A)$ üzerinde *süreklidir* denir.

Tanım 40 (Sınırlı Operatör): X, Y normlu uzaylar ve A, tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü $D(A)$' nın X' deki sınırlı her kümesine $R(A)$' nın Y' de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A operatörüne *sınırlı bir operatör* denir.

Başka bir deyişle;

$\forall x \in D(A)$ için $\|Ax\| \le c\|x\|$ olacak şekilde sabit bir $c > 0$ sayısı varsa A operatörüne *sınırlı operatör* denir.

Örnek 11: $k(t,s)$ fonksiyonu $D = [a,b]$ x $[a,b]$, $(a, b \in \mathbb{R})$ karesel bölgesi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.

$$y(t) := \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds$$

eşitliği yardımıyla çeşitli $y = Ax$ integral operatörleri tanımlayabiliriz.

$X = Y = \left(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\right)$ olsun.

$$A: C[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) := \int_a^b k(t,s)x(s)\,ds$$

operatörü lineer ve sınırlı bir operatördür.

Tanım 41 (Tamamen Sürekli Operatör): Eğer her sınırlı kümeyi kompakt bir küme içerisine götüren bir dönüşüm varsa bu operatöre *tamamen sürekli operatör* denir.

Tanım 42 (Lineer Operatör): X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A: X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $D(A)$, X ' in bir altuzayı ve

$\forall x, y \in D(A)$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 43 (Daraltma Operatörü): B bir Banach uzayı ve $K: B \to B$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Eğer,

$$\|K\| \leq 1$$

ise, o zaman K ' ya B ' de bir daraltma veya sıkan operatör denir.

Tanım 44 (Grafik): X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere $Z := X \oplus Y$ olsun.

$A: X \to Y$ lineer operatörü için,

$$Gr := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset Z = X \oplus Y$$

alt kümesine A operatörünün *grafiği* denir.

Tanım 45 (Kapalı Operatör): $A: X \to Y$ operatörünün grafiği $GrA \subset Z = X \oplus Y$ 'de kapalı ise A operatörüne *kapalı operatör* denir.

$A: X \to Y$ operatörünün grafiğinin kapalı olması

$$(x_n) \subset D(A), \quad \lim_{n \to \infty} (x_n, Ax_n) = (x, y)$$

koşullarından $x \in D(A)$ ve $y = Ax$ denklemini sağlaması demektir.

$(x, y) \in X$xY için $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ olduğundan $A: X \to Y$ lineer operatörü *kapalıdır* $\Leftrightarrow (x_n) \subset D(A)$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = y$ ise $x \in D(A)$ ve $y = Ax$.

Tanım 46 (Akkıretiv Operatör): H bir Hilbert uzay, A ise H üzerinde $\overline{D(A)} = H$ olan kapalı lineer bir operatör olsun. Eğer, $\forall x \in D(A)$ için

$$\mathrm{Re}(Ax, x) \geq 0$$

oluyorsa, o zaman bu A operatörüne *akkıretiv operatör* denir.

Tanım 47 (Simetrik Operatör): A, $D(A)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olan bir lineer operatör olsun. Eğer $A \subset A^*$, yani $\forall f, g \in D(A)$ için

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise A operatörüne *simetrik operatör* denir.

Tanım 48 (Eşlenik ve Özeşlenik Operatör): A, bir H Hilbert uzayında sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in D(A) \subset H$ için

$$(Af, g) = (f, A^*g)$$

sağlanıyorsa A^*'a A'nın *eşlenik operatörü* denir.

Eğer $D(A) = D(A^*)$ ve $A = A^*$ ise bu A operatörüne *özeşlenik operatör* denir.

Tanım 49 (Hermit Operatör): A sınırlı bir operatör olsun. Eğer $A = A^*$ ise, o zaman A operatörüne *hermit* adı verilir.

Tanım 50 (Normal Operatör): Bir H Hilbert uzayında lineer yoğun tanımlı kapalı bir N operatörü, eğer $D(N) = D(N^*)$ ve $\forall x \in D(N)$ için

$$\|Nx\|_H = \|N^*x\|_H \text{ [6]}$$

sağlanıyorsa o zaman bu N operatörüne *normal operatör* denir. Başka bir deyişle;

Bir H Hilbert uzayı'nda yoğun tanımlı kapalı bir N operatörü için $D(N) = D(N^*)$ ve $N^*N = NN^*$ sağlanıyorsa bu N operatörüne *normal operatör* denir.

Tanım 51 (Üniter Operatör): H Hilbert uzayında tanımlı $U: H \to H$, bir U operatörü, eğer $f, g \in H$ için

$$(Uf, Ug) = (f, g)$$

oluyorsa veya başka bir deyişle $U^*U = UU^* = E$, yani $U^* = U^{-1}$ sağlanıyorsa bu U operatörüne *üniter operatör* denir. Ayrıca U^{-1} operatörü de üniterdir.

Tanım 52 (İzometrik Operatör): H_1 ve H_2 sırasıyla $(\cdot,\cdot)_{H_1}, (\cdot,\cdot)_{H_2}$ iç çarpımlarıyla iki Hilbert uzayı olsunlar. $V: H_1 \to H_2$ bir lineer operatörü için, eğer herhangi $f, g \in H_1$ için

$$(Vf, Vg)_{H_2} = (f, g)_{H_1}$$

sağlanıyorsa bu V operatörüne *izometrik operatör* denir.

Tanım 53 (Evolüsyon Operatörler Ailesi): H ayrılabilir bir Hilbert uzayı ve $L^2 = L^2(H,(a,b))$ de H içinde sonlu $[a,b]$ aralığında vektör fonksiyonların Hilbert uzayı olsun [4], [56]. Burada $U(t,s)$, $t,s \in [a,b]$ operatörü lineer sürekli sınırlı terslenebilir ve

$$U^{-1}(t,s) = U(s,t) \in L^2,\ U^*(t,s) = U(s,t)$$

olsun. $U(t,s)$, $t,s \in [a,b]$, H Hilbert uzayında

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(t,s)}{\partial t} f + iA_j U(t,s) f = 0 \\ \qquad\qquad U(s,s) f = f,\ f \in D(A), \end{cases}$$

homejen diferensiyel denklemi için sınır değer probleminin çözümü olsun. Bu operatörler ailesine *Evolüsyon Operatörler Ailesi* diyeceğiz.

Tanım 54 (Pozitif Operatörlerin Kare Kökleri): Eğer bir B özeşlenik operatörü için $B^2 = A$ ise bu B özeşlenik operatörüne pozitif A operatörünün *kare kökü* denir.

Tanım 55 (Rezolvent Küme): H bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ bir lineer operatör olsun.

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E)^{-1} \in L(X)\}$$

kompleks sayılar kümesine A operatörünün *regüler değerler kümesi* (veya *rezolvent kümesi*) denir.

$\lambda \in \rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda; A) = (A - \lambda E)^{-1}$ operatörüne A operatörünün *rezolventası* (veya *çözücü operatörü*) adı verilir.

Tanım 56 (Spektrum): H bir Hilbert uzayı olsun. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ kümesine A operatörünün *spektrumu* denir. A operatörünün spektrum kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 57 (Ayrık Spektrum): $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda E) \text{ bire bir değil}\}$

kümesine A operatörünün ayrık spektrumu denir ve $\sigma_p(A)$ ile gösterilir.

Eğer $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ise o zaman

$$(A-\lambda_0 E)x_0 = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \neq 0$ vardır. Buradaki λ_0'a A operatörünün özdeğeri, x_0' a ise λ_0' a uygun bir özvektörü denir.

Tanım 58 (Sürekli Spektrum):

$$\sigma_c(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A-\lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A-\lambda E)} = H, \text{ fakat } R(A-\lambda E) \neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün sürekli spektrumu denir ve $\sigma_c(A)$ ile gösterilir.

Tanım 59 (Kalan Spektrum):

$$\sigma_r(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A-\lambda E) \text{ bire bir, } \overline{R(A-\lambda E)} \neq H\right\}$$

kümesine A operatörünün *kalan spektrumu* denir ve $\sigma_r(A)$ ile gösterilir.

$\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ ve $\sigma_r(T)$ ayrıktır ve

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Örnek 12: $X = \left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ olmak üzere, $A : X \to X$

$$Ax = tx(t)$$

operatörünü göz önüne alalım.

$Ax = tx(t)$ operatörü için $(A-\lambda E)$' yi bulalım.

$$(*) \quad tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

olup, $x(t)$ çözümü her $t \in [0,1]$ için yukarıdaki eşitliği sağlayan bir fonksiyondur. Eğer $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ($\lambda < 0$ veya $\lambda > 1$) ise (*) denkleminin her $y \in X$ için $[0,1]$ üzerinde sürekli tek

$$x(t) = \frac{1}{t-\lambda} y(t), \ t \in [0,1]$$

çözümü vardır. Bu nedenle $\rho(A) = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ve her $\lambda \in \rho(A)$ için

$$R(\lambda;A)=\frac{1}{t-\lambda}y(t),\ t\in[0,1]$$

olur.

Şimdi $\lambda\in[0,1]$ sayısının A operatörünün spektrumuna dahil olduğunu görelim.

$\lambda_0\in[0,1]$ ve $y(t)\in C[0,1]$ fonksiyonu $y(\lambda_0)=a\neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için

$$(t-\lambda_0)x(t)=y(t)$$

eşitliği hiçbir $x(t)\in C[0,1]$ fonksiyonu için sağlanamaz, çünkü $t=\lambda_0$ noktasında sol taraf sıfır, sağ taraf ise sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile $\lambda=\lambda_0$ olduğundan (*) denklemin hiçbir $y(t)\in C[0,1]$ fonksiyonu için çözümü yoktur. Bu ise $\lambda\in\sigma(A)$ olması demektir. Ayrıca $\sigma(A)$ ' nın hiçbir noktası A operatörünün özdeğeri de olamaz, çünkü

$$(t-\lambda)x(t)=0,\ \lambda\in[0,1]$$

denkleminin çözümü her $t\neq\lambda_0$ için $x(t)$ ' nin süreksizliğine göre $t=\lambda$ noktasında 0 olur.

Böylece,

$$\sigma(A)=[0,1] \text{ ve } \sigma_p=\varnothing.$$

1.6. Simetrik Operatörlerin Genişlemeleri

1.6.1. Problemin Ortaya Konması

Simetrik operatörler teorisinin temel problemlerinden biri, verilmiş bir A simetrik operatörünün simetrik genişlemelerinin yapısal kurulması problemidir.

Eğer B, bir A simetrik operatörünün simetrik bir genişlemesi ise, o zaman $A\subset B$ ve aynı zamanda $B^*\subset A^*$. B simetrik operatör, yani $B\subset B^*$ ise

$$A\subset B\subset B^*\subset A^*. \tag{5}$$

Buradan, bir A operatörünün her simetrik genişlemesi, A^* operatörünün kısıtlanmasıdır.

Bir A simetrik operatörünün eğer hiç bir özsimetrik genişlemesi yoksa bu A operatörüne *maksimal simetrik operatör* denir.

Her özeşlenik A operatörü maksimal simetrik operatördür.

$A = A^*$ ve (5) formülünden $B = A$ olarak bulunur; yani A' nın her simetrik B genişlemesi A ile çakışır.

1.6.2. Simetrik Operatörün Defekt Uzayları

A bir simetrik operatör ve λ reel olmayan keyfi bir sayı olsun. $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ ve $\mathfrak{R}_{\lambda}$ sırasıyla $\left(A-\bar{\lambda}E\right)$ ve $\left(A-\lambda E\right)$ operatörlerinin değer kümesi olarak göstereceğiz. $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ ve $\mathfrak{R}_{\lambda}$, H Hilbert uzayının altuzaylarıdır. Bunların altuzayların kapalı olması gerekmez. $\left(H-\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}\right)$ ve $\left(H-\mathfrak{R}_{\lambda}\right)$ ortogonal tümleyenlerine A operatörünün *defekt uzayları* denir ve sırasıyla $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ve $\mathfrak{N}_{\lambda}$ ile gösterilir. Buradan

$$\mathfrak{N}_{\lambda} = \left(H \ominus \mathfrak{R}_{\lambda}\right),\ \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \left(H \ominus \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}\right).$$

I. $\mathfrak{N}_{\lambda}$ ve $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ defekt uzayları sırasıyla $\bar{\lambda}$ ve λ özdeğerlerine sahip olan A^* operatörünün çözüm uzaylarıdır, yani

$$\mathfrak{N}_{\lambda} = \ker\left(A^* - \bar{\lambda}E\right),\ \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \ker\left(A - \lambda E\right).$$

Gerçekten, eğer $x \in \mathfrak{N}_{\lambda}$ ise, o zaman her bir $y \in D(A)$ vektörü için

$$\left(Ay - \lambda y, x\right) = 0 \tag{6}$$

yani

$$\left(Ay, x\right) = \left(y, \bar{\lambda}x\right) \tag{7}$$

olup, A^* operatörünün tanımından,

$$\left(y, A^*x - \bar{\lambda}x\right) = 0$$

bulunur ve buradan

$$x \in D\left(A^*\right) \text{ ve } A^*x = \bar{\lambda}x.$$

Tersine, eğer $A^*x = \bar{\lambda}x$ ise, o zaman keyfi bir $y \in D(A)$ vektörü için (7) denklemi sağlanır ve bu (6) denklemine eşittir, yani $x \in \mathfrak{N}_{\lambda}$.

1.6.3. Cayley Dönüşümü

A bir simetrik operatör ve λ reel olmayan bir sayı olsun. $V : H \to H$,

$$V = (A - \lambda E)(A - \overline{\lambda} E)^{-1} \tag{8}$$

şeklinde verilen V operatörüne, A operatörünün *Cayley dönüşümü* adı verilir.

Şimdi V operatörünün bazı özelliklerini birer birer inceleyelim.

Teorem 8:

1. Bir A simetrik operatörünün Cayley dönüşümü, tanım kümesi $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ ve değer kümesi $\mathfrak{R}_{\lambda}$ olan bir izometrik operatördür.
2. $y \in D(V)$ vektörü için bütün $(Vy - y)$ kümesi H Hilbert uzayında yoğundur.
3. 2. şartı sağlayan her V izometrik operatörü belirli bir simetrik operatörün Cayley dönüşümüdür.

İspat:

1. Her $y \in D(V)$ vektörünün $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$' ye ait olduğu açıktır. Tersine, $y \in \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ vektörünü $(A - \lambda E)^{-1}$operatörüne uygularsak $(A - \lambda E)^{-1} y \in D(A)$ elde ederiz. Dolayısıyla $(A - \lambda E)$ operatörü, $(A - \lambda E)^{-1} y$ olarak uygulandı. Buradan $y \in D(V)$ olur. Böylece $D(V) = \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$.

Şimdi, $x \in D(A)$ olsun.

$$y = (A - \overline{\lambda} E)x \tag{9}$$

o zaman $y \in D(V)$ ve

$$Vy = (A - \lambda E)x \tag{10}$$

dolayısıyla V operatörünün değer kümesi $\mathfrak{R}_{\lambda}$ ile çakışır. Üstelik,

$$\|Vy\|^2 = \|(A - \lambda E)x\|^2 = ((A - \lambda E)x, (A - \lambda E)x) = (Ax, Ax) - \overline{\lambda}(Ax, x)$$
$$- \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2 (x, x)$$

ve

$$\|y\|^2=\left\|\left(A-\overline{\lambda}E\right)x\right\|^2=\left(\left(A-\overline{\lambda}E\right)x,\left(A-\overline{\lambda}E\right)x\right)=(Ax,Ax)-\lambda(Ax,x)$$
$$-\overline{\lambda}(x,Ax)+|\lambda|^2(x,x),$$

$(Ax,x)=(x,Ax)$ olduğundan,

$$\|Vy\|^2=\|y\|^2$$

olarak bulunur, yani V izometrik operatördür.

2. (9). ve (10). formüllerden

$$y-Vy=\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)x,$$

olup buradan, bütün $y-Vy,\ y\in D(V)$ vektörlerinin $R(E-V)$ kümesi $D(A)$ kümesi ile çakışır ve H Hilbert uzayında yoğundur.

3. V, 2. şartı sağlayan bir izometrik operatör olsun. Bu V operatörünün birime eşit olmayan özdeğeri vardır, yani

$$y=Vy$$

denklemi, sadece $y=0$ da sağlanır.

Eğer böyle değilse, o zaman her $z\in D(V)$ vektörü için denklem

$$(Vz-z,y)=(Vz,y)-(z,y)=(Vz,Vy)-(z,y)=0$$

olur, yani $y\neq 0$, H Hilbert uzayında yoğun olan $R(E-V)$ kümesine ortogonal olur ve bu da imkansızdır. Böylece $(E-V)^{-1}$ operatörü vardır.

$$A=\left(\lambda E-\overline{\lambda}V\right)(E-V)^{-1} \tag{11}$$

ve A operatörünün bir simetrik operatör olduğu ispatlanmıştır. Bu operatör V Cayley dönüşümüyle çakışır. Ayrıca A operatörünü aşağıdaki şekilde de tanımlayabiliriz.

Her $y\in D(V)$ ve $D(A)=R(E-V)$ için

$$A(y-Vy)=\lambda y-\overline{\lambda}Vy.$$

2. koşuldan $D(A)$' nın H Hilbert uzayında yoğun olduğu sonucunu çıkarırız. Üstelik $y_1,y_2\in D(V)$ için

$$\left(A(y_1-Vy_1),y_2-Vy_2\right)=\left(\lambda y_1-\overline{\lambda}Vy_1,y_2-Vy_2\right)$$
$$=\left(\lambda+\overline{\lambda}\right)(y_1,y_2)-\overline{\lambda}(Vy_1,y_2)-\lambda(y_1,Vy_2)$$

ve

$$((y_1 - Vy_1), A(y_2 - Vy_2)) = (y_1 - Vy_1, \lambda y_2 - \overline{\lambda} Vy_2,)$$
$$= (\lambda + \overline{\lambda})(y_1, y_2) - \overline{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2)$$

buradan da aşağıdaki eşitlik bulunur,

$$(A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) = ((y_1 - Vy_1), A(y_2 - Vy_2)),$$

yani A simetrik bir operatördür.

Son olarak, eğer $x = y - Vy,\ y \in D(V)$ olarak alırsak, o zaman

$$Ax = \lambda y - \overline{\lambda} Vy.$$

Böylece

$$Ax - \overline{\lambda} x = (\lambda - \overline{\lambda}) y,\ Ax - \lambda x = (\lambda - \overline{\lambda}) Vy.$$

Yukarıdaki denklemler de V ' nin A operatörünün Cayley dönüşümü olduğunu gösterir.

Teorem 9: A_1 ve A_2 iki simetrik operatör, V_1 ve V_2 de sırasıyla bu operatörlerin Cayley dönüşümleri olsunlar. Bu taktirde A_2 operatörünün A_1 operatörüne bir genişlemesi olması için gerek ve yeter şart V_2 operatörünün V_1 ' in bir genişlemesi olmasıdır.

Teorem 10: Bir A simetrik operatörünün kapalı olması için gerek ve yeter şart onun V Cayley dönüşümünün kapalı olmasıdır. Bu durum için gerek ve yeter şart $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ ve $\mathfrak{R}_{\lambda}$ ların kapalı olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, A simetrik operatörü kapalı ve $y_n \in \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ için

$$y_n = (A - \overline{\lambda} E) x_n,\ x_n \in D(A)$$

dizisi belirli bir y vektörüne yakınsasın. V operatörünün izometrikliğinden

$$Vy_n = (A - \lambda E) x_n$$

dizisi de aynı zamanda belirli bir z vektörüne yakınsar.

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y_n - Vy_n) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(y - z),$$
$$Ax_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y_n - \overline{\lambda} Vy_n) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}}(\lambda y - \overline{\lambda} z),$$

olup A simetrik operatörünün kapalı olmasından da aşağıdaki sonuca varırız.

$$y-z \in D(A),\ A(y-z)=\lambda y-\overline{\lambda} z,$$

ve böylece

$$y=\frac{1}{\lambda-\overline{\lambda}}\left[A(y-z)-\overline{\lambda}(y-z)\right] \in \mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}.$$

Bu, V operatörünün ve $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ altuzayının kapalı olduğunu ispatlar; o zaman $\mathfrak{R}_{\lambda}$ ve $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ kapalı altuzayından izometrik bir dönüşüm olduğundan $\mathfrak{R}_{\lambda}$ da kapalıdır.

Yukarıdaki ispata benzer bir şekilde, V operatörü veya $\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}}$ altuzayı kapalı ise, o zaman A simetrik operatörünün de kapalı olduğu gösterilebilir.

1.6.4. Eşlenik Operatörün Tanım Kümesi

Tanım 60: $M_1, M_2, M_3, \cdots M_n$' ler H Hilbert uzayının altuzayları olmak üzere, eğer her $x_k \in M_k$, $k=1,2,3,\cdots,n$ için $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=0$ eşitliği ancak

$$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n=0$$

için sağlanıyorsa, o zaman $M_1, M_2, M_3, \cdots M_n$ altuzaylarına *lineer bağımsız* denir.

Eğer, $M_1, M_2, M_3, \cdots M_n$ lineer bağımsız ise, o zaman her

$$x \in M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \cdots \oplus M_n$$

vektörü,

$$x=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n,\ x_k \in M_k,\ k=1,2,3,\cdots,n$$

şeklinde tek bir gösterime sahiptir.

Eğer ikinci bir gösterime sahip olsaydı, yani

$$x=x_1'+x_2'+x_3'+\cdots+x_n',\ x_k' \in M_k,\ k=1,2,3,\cdots,n$$

bu taktirde

$$0=(x_1-x_1')+(x_2-x_2')+(x_3-x_3')+\cdots+(x_n-x_n'),\ x_k-x_k' \in M_k,\ k=1,2,3,\cdots,n$$

olurdu, fakat $M_1, M_2, M_3, \cdots M_n$ lineer bağımsız olduklarından

$$x_k-x_k'=0 \text{ veya } x_k=x_k',\ \ k=1,2,3,\cdots,n$$

olarak bulunur.

Teorem 11: Eğer A kapalı ve simetrik bir operatör ise, o zaman $D(A), \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}, \mathfrak{N}_{\lambda}$ altuzayları lineer bağımsız ve onların direk toplamları $D(A^*)$ ile çakışır, yani

$$D(A^*) = D(A) \oplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \oplus \mathfrak{N}_{\lambda}. \tag{12}$$

İspat: İlk olarak lineer bağımsızlığı ispat edelim.

$x \in D(A)$, $y \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ve $z \in \mathfrak{N}_{\lambda}$ için

$$x + y + z = 0 \tag{13}$$

olsun. (13)' ün her iki tarafına $(A^* - \bar{\lambda}E)$ operatörünü uygularsak

$$(A - \bar{\lambda}E)x + (\lambda - \bar{\lambda})y = 0 \tag{14}$$

elde ederiz, fakat bu iki altuzay ortogonal olduğundan

$(A - \bar{\lambda}E)x \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$ ve $(\lambda - \bar{\lambda})y \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

(14) denkleminin sağlanması sadece

$(A - \bar{\lambda}E)x = 0$ ve $(\lambda - \bar{\lambda})y = 0$

olmalarıyla mümkündür, yani sadece $x = 0$ ve $y = 0$ ($x = 0$ çünkü reel olmayan $\bar{\lambda}$ sayısı, A simetrik operatörünün bir özdeğeri olamaz). Buradan ve (13)' ten $z = 0$ olarak bulunur.

Şimdi (12) formülünü ispat edelim.

Her bir $D(A), \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}, \mathfrak{N}_{\lambda}$ altuzayları, $D(A^*)$' ın içindedir; buradan

$$D(A^*) \supset D(A) \oplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \oplus \mathfrak{N}_{\lambda} \tag{15}$$

Geriye, tersini ispat etmek kalıyor.

Herhangi bir $u \in D(A^*)$ için

$$u = x + y + z, \quad x \in D(A),\ y \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}},\ z \in \mathfrak{N}_{\lambda} \tag{16}$$

formunda gösterebiliriz.

A kapalı olduğundan, $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$ de kapalı bir altuzaydır. $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ de ortogonal tümleyenidir, bu yüzden,

$$\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}} \oplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = H \tag{17}$$

bu ise her $v \in H$ vektörü için

$v = v' + v''$, $v \in \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$, $v'' \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$

şeklinde gösterilebileceği anlamına gelir.

v vektörünü, $v=\left(A^*-\overline{\lambda}E\right)u$

formunda göstermek istiyoruz.

$$v'\in\mathfrak{R}_{\overline{\lambda}},\ \ v'=\left(A-\overline{\lambda}E\right)x,\ \ x\in D(A)$$

aynı zamanda,

$$v''=\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)y,\ \ y\in\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}$$

olarak alırsak. $A^*y=\lambda y$ ve $A^*x=Ax$ için

$$\left(A^*-\overline{\lambda}E\right)u=\left(A-\overline{\lambda}E\right)x+\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)y=\left(A^*-\overline{\lambda}E\right)(x+y)$$

elde ederiz. Böylece

$$\left(A^*-\overline{\lambda}E\right)(u-x-y)=0\,.$$

Eğer $z=u-x-y$ olarak alırsak, o zaman $z=u-x-y\in\mathfrak{N}_{\lambda}$ ve bu (12) gösteriminin ispatı için geçerlidir.

$$A^*=Ax+\lambda y+\overline{\lambda}z \qquad (18)$$

denkleminden A^* operatörünün tanımından teorem ispatlanmış olur. ■

Teorem 11' den hemen aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2: A kapalı simetrik operatörünün özeşlenik olması için gerek ve yeter şart onun defekt uzaylarının $\{0\}$' a eşit olmasıdır, yani H Hilbert uzayının sadece sıfır elemanını içermesidir.

(12). formül, $D\left(A^*\right)=D(A)$ olması için gerek ve yeter şartın,

$$\mathfrak{N}_{\lambda}=\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}}=\{0\}$$

olduğunu gösterir.

1.6.5. Neumann Formülü

(12). formülde $\lambda=-i$ olarak alırsak

$$D\left(A^*\right)=D(A)\oplus\mathfrak{N}_i\oplus\mathfrak{N}_{-i}$$

olur. Bu ise her $x\in D\left(A^*\right)$ vektörü için

$$x=x^0+x^-+x^+,\ x^0\in D(A),\ x^-\in\mathfrak{N}_i,\ x^+\in\mathfrak{N}_{-i}$$

olacak şekilde bir tek gösterime sahip olduğu anlamına gelir.

Bu durumda aşağıdaki formülün sağlandığını ispat edelim.

$$\dot{I}m\left(A^{*}x,x\right)=\left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2} \tag{19}$$

(19) formülüne *Neumann Formülü* diyeceğiz.

(19) formülünü elde etmek için sadece aşağıdakini göstermek yeterlidir.

$$\left(Ax^{0},x^{-}+x^{+}\right)=\left(x^{0},A^{*}\left(x^{-}+x^{+}\right)\right)=\left(x^{0},-ix^{-}+ix^{+}\right)$$

ve buradan,

$$\begin{aligned}\left(A^{*}x,x\right)&=\left(Ax^{0}-ix^{-}+ix^{+},x^{0}+x^{-}+x^{+}\right)\\&=\left(Ax^{0},x^{0}\right)+\left(x^{0},-ix^{-}+ix^{+}\right)+\left(-ix^{-}+ix^{+},x^{0}\right)-\\&-i\left\|x^{-}\right\|^{2}+i\left\|x^{+}\right\|^{2}+i\left(x^{+},x^{-}\right).\end{aligned}$$

İlk iki toplam reel, son toplam sanaldır.

$D\left(A^{*}\right)$ kümesini $\Im^{+},\Im^{-},\Im^{0}$ alt kümelerindeki ayrılışı sırasıyla; sıfırdan büyük, sıfırdan küçük ve sıfıra eşittir.

II. $D\left(A^{*}\right)$' da bir x vektörü $\left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2}$ ye göre $\Im^{+},\Im^{-}$ veya $\Im^{0}$ dadır. Bu da sırasıyla; sıfırdan büyük, sıfırdan küçük veya sıfıra eşittir.

Bu önerme (19) formülünden elde edilmiştir.

III. Aşağıdaki bağıntılar doğrudur.

$$D(A)\subset\Im^{0},\ N_{i}\subset\Im^{-}\cup\{0\},\ N_{i}\subset\Im^{+}\cup\{0\} \tag{20}$$

(Burada $\{0\}$, H Hilbert uzayında sadece sıfır elemanını içeren kümeyi gösterir ve $\Im^{-}\cup\{0\}$, $\Im^{+}\cup\{0\}$ bunlar ise kümeler teorisinde $\Im^{-}$, $\Im^{+}$ ile $\{0\}$ kümelerinin birleşimidir.

Eğer $x\in D(A)$ ise $x^{+}=x^{-}=0$ ve aynı zamanda $\left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2}=0$. Diğer taraftan $x\neq 0$ ve $x\in\mathfrak{N}_{i}$ ise, o zaman

$$x^{0}=0,\ x^{+}=0,\ x^{-}=x$$

ve aynı zamanda

$$\left\|x^{+}\right\|^{2}-\left\|x^{-}\right\|^{2}=-\left\|x\right\|^{2}<0.$$

$x\in\mathfrak{N}_{-i}$ durumu benzer şekilde ele alınır.

1.6.6. Defekt İndeksleri

$m = \dim \mathfrak{N}_i$, $\mathrm{n} = \dim \mathfrak{N}_{-i}$ olsun. m ve n sayılarına A operatörünün *defekt indeksleri* denir.

Üst yarı düzlemdeki her λ kompleks sayısı için

$\dim \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} = \dim \mathfrak{N}_{-i}$, $\dim \mathfrak{N}_{\lambda} = \dim \mathfrak{N}_i$ [56].

Eğer $\dot{I}m\lambda > 0$ ise

$m = \dim \mathfrak{N}_i$, $\mathrm{n} = \dim \mathfrak{N}_{-i}$.

Sonuç 2' den, Kapalı simetrik bir operatörün özeşlenik olması için gerek ve yeter şart, o operatörün defekt indekslerinin $m = 0$ ve $n = 0$ olmasıdır.

Teorem 12: Eğer A kapalı simetrik bir operatör ve B, H Hilbert uzayında sınırlı ve Hermit operatör ise, o zaman A ve $A + B$ operatörleri aynı defekt indekslere sahiptir.

İspat: $(A+B)^* = A^* + B$ bağıntısından,

$$D(A+B)^* = D(A^*)$$

olur ve $x \in D(A^*)$ için

$$\left((A+B)^* x, x\right) = \left((A^* + B)x, x\right) = \left(A^* x, x\right) + (Bx, x).$$

Burada (Bx, x) reeldir.

$$\dot{I}m\left((A+B)^* x, x\right) = \dot{I}m\left(A^* x, x\right)$$

olup, A ve $A + B$ operatörleri için $\mathfrak{I}^+$ kümesi ve aynı zamanda $\mathfrak{I}^-$ kümeleri de çakışır. Böylece teorem ispat edilmiş olur. ■

1.6.7. Bir Simetrik Operatörün Simetrik Genişlemeleri' nin Yapısı

Bu kısımda sadece kapalı simetrik genişlemeleri göz önüne alacağız.

Her simetrik genişleme aynı zamanda A operatörünün $\overline{A}$ kapanışının genişlemesidir. Bu yüzden genelliği bozmamaksızın A operatörünü kapalı simetrik bir operatör olarak alabiliriz.

A kapalı simetrik bir operatör ve A' de A operatörünün kapalı bir simetrik genişlemesi olsun. V, V' tarafından A, A' nün Cayley dönüşümü olsun.

$$V \subset V'$$

ve

$$D(V) \subset D(V'),\ R(V) \subset R(V').$$

$$\mathcal{P} = D(V') \ominus D(V),\ \mathcal{L} = R(V') \ominus R(V)$$

olarak alırsak,

$$\mathcal{P} \perp D(V),\ \mathcal{L} \perp R(V),$$

bağıntılarından,

$$\mathcal{P} \subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \text{ ve } \mathcal{L} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$$

bulunur.

İleride, $x \in \mathcal{P}$ için

$$Ux = V'x \tag{21}$$

şeklinde bir operatör tanımlayacağız.

Burada V', $D(V')$' den $R(V')$ üzerine verilmiş bir izometrik operatör, ayrıca $\mathcal{P}$ dönüşümleri ise $\mathcal{L}$ üzerinde izometriktir. (21)' den U izometrik operatörünün tanım kümesi $\mathcal{P}$, değer kümesi ise $\mathcal{L}$ dir.

Tersine olarak, tanım kümesi $\mathcal{P} \subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ve değer kümesi $\mathcal{L} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$ olan keyfi bir U izometrik operatörünü göz önüne alalım.

Eğer $y \in D(V)$ ve $z \in \mathcal{P}$ için,

$$V(y+z) = Vy + Uz$$

ise, o zaman V' (V operatörünün uygun bir genişlemesi) izometrik bir operatör olmak üzere, A operatörünün belirli bir kapalı simetrik genişlemesinin Cayley dönüşümüdür.

Teorem 8' den, $y \in D(V)$ ve $z \in \mathcal{P}$ için,

$$x' = (y+z) - V'(y+z) = (y+z) - (Vy + Uz) = (y - Vy) + z - Uz,$$

fakat $x = y - Vy$, $y \in D(V)$ vektörleri A operatörünün $D(A)$ tanım kümesi içerisindedir. Böylece $D(A')$,

$$x' = x + z - Uz,\ x \in D(A),\ z \in \mathcal{P}$$

formundaki bütün vektörleri içerir.

$A' \subset A^*$, $z \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, $Uz \in \mathfrak{N}_{\lambda}$

olduğundan,

$A'x' = Ax + \lambda z - \bar{\lambda} Uz$.

A' operatörünün kendi tanımından, onun defekt uzayları

$\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}} = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \ominus \mathcal{P}$, $\mathfrak{N}'_{\lambda} = \mathfrak{N}_{\lambda} \ominus \mathcal{L}$.

Teorem 13: Verilmiş bir A kapalı simetrik operatörünün her A' kapalı simetrik genişlemesi bir U izometrik operatörü tarafından üretilir. Bu U operatörünün $\mathcal{P}$ tanım kümesi $\mathcal{P} \subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$' nin kapalı bir altuzayı ve $\mathcal{L}$ değer kümesi $\mathcal{L} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$' nın kapalı bir altuzayıdır.

Burada $D(A')$ bütün

$$x' = x + z - Uz,\ x \in D(A),\ z \in \mathcal{P} \tag{22}$$

vektörlerini bir araya getirir ve

$$A'x' = Ax + \lambda z - \bar{\lambda} Uz \tag{23}$$

bağıntısı elde edilir.

Tersine olarak, A operatörünün belirli bir A' kapalı simetrik operatörünü formülüze eden her bir U operatörü ve A' operatörünün defekt uzayları

$$\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}} = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \ominus \mathcal{P},\ \mathfrak{N}'_{\lambda} = \mathfrak{N}_{\lambda} \ominus \mathcal{L} \tag{24}$$

Buradaki en önemli durum, A'' nün A operatörünün bir özeşlenik genişlemesi olmasıdır. Sonuç 2' ye göre, A' genişlemesinin özeşlenik olması için gerek ve yeter şart,

$\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}} = \{0\}$, $V'_{\lambda} = \{0\}$, yani $\mathcal{P} = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, $\mathcal{L} = \mathfrak{N}_{\lambda}$.

Böylece, U operatörü vardır ve bunun olması için gerek ve yeter şart, $\mathfrak{N}_{\lambda}$ ve $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$' nın aynı boyuta sahip olmasıdır. Buradan da aşağıdaki sonuca varırız.

Teorem 14: A' genişlemesinin özeşlenik olması için gerek ve yeter şart, U operatörünün tanım kümesinin $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ile değer kümesinin ise $\mathfrak{N}_{\lambda}$ ile çakışmasıdır.

Bir A operatörünün özeşlenik bir genişlemeye sahip olması için gerek ve yeter şart, bu operatörün $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ve $\mathfrak{N}_{\lambda}$ defekt uzaylarının aynı boyuta sahip olmalarıdır, yani onun defekt uzaylarının eşit olmasıdır.

Özeşlenik bir genişleme olması için her iki uzay aynı boyutta olmalıdır. Burada boyutu n ile göstereceğiz. $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ' de ortonormal bir baz olarak $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ ve $\mathfrak{N}_{\lambda}$ ' da ortonormal bir baz olarak ta $e_1', e_2', e_3', \cdots, e_n'$ seçelim. Her $z \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ vektörünü

$$z = \xi e_1 + \xi e_2 + \xi e_3 + \cdots + \xi e_n$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım kümesi $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ve değer kümesi $\mathfrak{N}_{\lambda}$ olan her U izometrik operatörü

$$Uz = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \xi_k \right) e_j',$$

formülü ile verilir. Burada $u = \left[u_{ij} \right]$ bir üniter matristir. Bu durumda, $x \in D(A)$ için

$$x' = x + \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \xi_k \right) e_j' \tag{25}$$

$$A'x' = Ax + \lambda \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \bar{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} u_{jk} \xi_k \right) e_j' \tag{26}$$

$D(A')$ bütün bu vektörleri içerir.

Eğer $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ veya $\mathfrak{N}_{\lambda}$ defekt uzaylarından biri $\{0\}$ ise, o zaman teorem 13 gereğince A operatörünün A' trivial olmayan genişlemesi yoktur. Buradan,

IV. Kapalı simetrik bir A operatörün maksimal olması için gerek ve yeter şart, onun defekt uzaylarından en az birinin $\{0\}$ ' a eşit olmasıdır, yani defekt indekslerin $(0, n)$ veya $(n, 0)$ olmasıdır.

Özel olarak,

V. A' genişlemesinin maksimal olması için gerek ve yeter şart,

$\mathcal{P} = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ veya $\mathcal{L} = \mathfrak{N}_{\lambda}$

bağıntılarından biri veya ikisinin sağlanmasıdır.

VI. Eğer $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ ve $\mathfrak{N}_{\lambda}$ defekt uzayları sonlu boyutlu ve aynı zamanda boyutları eşit ise, o zaman her maksimal genişleme özeşleniktir.

1.6.8. Bir Simetrik Operatörde Özeşlenik Genişlemelerin Spektral Yapısı

Eğer, her $x \in D(A)$ ve $k = k(\lambda) > 0$ için

$$\|(A-\lambda E)x\| \geq k\|x\| \tag{27}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman bu λ sayısına A operatörünün *regüler tipli bir noktası* adı verilir.

(27). eşitsizlikten, $(A-\lambda E)^{-1}$ ters operatörünün varlığı ve sınırlı olduğu açıktır, ayrıca onun tanım kümesinin bütün uzayla çakışması gerekmez.

Özel olarak, A operatörünün öz değerleri onun regüler tipli noktası olmayabilir.

A operatörü için bütün regüler tipli noktaların kümesine onun *regülerlik tanım kümesi* adı verilir.

VII. Herhangi A lineer operatörünün regülerlik tanım kümesi açık bir kümedir.

İspat: λ_0, A operatörü için regüler tipli bir nokta olsun. Bu takdirde,

$|\lambda-\lambda_0| \leq \delta \leq \frac{1}{2}k(\lambda_0)$ ve her $x \in D(A)$ için,

$$\|(A-\lambda I)x\| \geq \|(A-\lambda E)x\| - |\lambda-\lambda_0|\|x\| \geq (k(\lambda_0)-\delta)\|x\| \geq \frac{1}{2}k(\lambda_0)\|x\|$$

eşitsizliği sağlanır, böylece λ' ların bütün değerleri λ_0 noktasının $|\lambda-\lambda_0| \leq \delta$ komşuluğunda regüler tipli bir noktadır. □

VIII. Eğer A simetrik bir operatör ise, o zaman her reel omayan λ sayısı onun regülerlik tanım kümesine aittir.

İspat: $\lambda = \sigma + i\tau$, $\tau \neq 0$ ve $B = A - \sigma E$ olsun. B operatörü simetriktir. $x \in D(A)$ için,

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda E)x\|^2 &= \|Bx - i\tau x\|^2 = (Bx - i\tau x, Bx - i\tau x)\\ &= (Bx, Bx) + i\tau\left[(Bx, x) - (x, Bx)\right] + \tau^2(x, x)\\ &= \|Bx\|^2 + \tau^2\|x\|,\end{aligned}$$

böylece,

$$\|(A-\lambda E)x\|^2 \geq \tau^2 \|x\|$$

olup, ispat tamamlanır. ■

Şimdi, A operatörünün her iki defekt indekslerinin sonlu olması durumuna geri dönelim.

Teorem 15: Eşit ve sonlu defekt indeksleri olan kapalı simetrik bir operatörün bütün özeşlenik genişlemeleri aynı sürekli spektruma sahiptir.

Teorem 16: Eşit ve sonlu (m,m) defekt indeksleri olan kapalı simetrik operatörün özeşlenik genişlemesinde onun özdeğerlerinin her birinin katlılığı en çok m birim kadar artar; özel olarak yeni özdeğerler en çok m olabilir.

İspat: A, eşit ve sonlu (m,m) defekt indeksleri olan kapalı simetrik bir operatörü, A' ise A operatörünün bir özeşlenik genişlemesi olsun. λ da, A' nın p katlı bir özdeğeri olsun. $(p+q)$, $q>m$ ile A' operatörünün, λ özdeğeri gibi λ' nın katlılığı olarak gösterelim.

$x_k \in D(A)$, $k=1,2,3,\cdots,p$ için

$$A'x-\lambda x=0$$

denkleminin $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_p,x_{p+1},\cdots,x_{p+q}$ çözümlerinin lineer bağımsız bir çözüm sistemini seçelim. Çünkü, $D(A)$' nın boyutu $q>m$ iken m' ye eşittir.

$$\alpha_1 x_{p+1}+\alpha_2 x_{p+2}+\alpha_3 x_{p+3}+\cdots+\alpha_q x_{p+q} \in D(A)$$

olacak şekilde $\alpha_k \neq 0$ sayıları vardır. Bu takdirde x vektörü

$$x=\alpha_1 x_{p+1}+\alpha_2 x_{p+2}+\alpha_3 x_{p+3}+\cdots+\alpha_q x_{p+q}$$

şeklinde A' nın λ özdeğerine uygun bir özvektörüdür ve $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_p$ lineer bağımsızdır. Bu ise A' nın bir özdeğeri gibi λ' nın katlılığının p' den daha büyük olduğu anlamına gelir, fakat bu ise hipotez ile çelişir. Bu çelişki de ispatı tamamlar. ■

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. Maksimal Hiponormal Genişlemeler

L^2 Hilbert uzayında birinci mertebeden bir lineer diferensiyel operatör ifadesine bakalım:

$$l(u)=u'(t)+Au(t). \tag{28}$$

Burada A, bir lineer maksimal hiponormal operatör ve A_R ise H' de alttan pozitif tanımlı lineer bir operatördür. Sadelik için $A_R \geq E\,(E$ birim operatör$)$ olarak alacağız.

(28) ifadesinin L^2 Hilbert uzayındaki formal eşleniği

$$l(v)=-v'(t)+A^*v(t) \tag{29}$$

şeklindedir. Şimdi L^2 Hilbert uzayında yoğun olan D_0^l vektör fonksiyonlarının kümesi üzerinde L_0^l operatörünü tanımlayalım:

$$D_0^l := \left\{u(t)\in L^2 : u(t)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)f_k,\ \varphi_k(t)\in C_0^\infty(a,b), f_k\in D(A), k=1,2,\cdots,n\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

$L_0^l u := l(u)$ ve $A_R \geq E$ olduğundan L_0^l operatörü *akkıretiv*dir, çünkü

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(L_0^l u,u\right)_{L^2} &= \frac{1}{2}\left[\left(L_0^l u,u\right)_{L^2}+\overline{\left(L_0^l u,u\right)_{L^2}}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(L_0^l u,u\right)_{L^2}+\left(u,L_0^l u\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(u'+Au,u\right)_{L^2}+\left(u,u'+Au\right)_{L^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(u',u\right)_{L^2}+\left(u,u'\right)_{L^2}+\left(Au,u\right)_{L^2}+\left(u,Au\right)_{L^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(u,u\right)'_{L^2}+\left(Au,u\right)_{L^2}+\left(A^*u,u\right)_{L^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\int_a^b (u,u)'_H\,dt+\left(\left(A+A^*\right)u,u\right)_{L^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[(u,u)\Big|_a^b+2\left(A_R u,u\right)_{L^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(\|u(b)\|_H^2-\|u(a)\|_H^2\right)+\left(A_R u,u\right)_{L^2}\right]=\left(A_R u,u\right)_{L^2}\geq (u,u)_{L^2}\geq 0
\end{aligned}$$

Böylece her $u\in D(L_0')$ için, $\operatorname{Re}(L_0',u)_{L^2}\geq 0$ olup L_0^l operatörü, L^2 Hilbert uzayında akkıretivdir.

L_0^l operatörünün L^2 Hilbert uzayında bir kapanışı vardır. L^2 deki bu L_0^l operatörünün kapanışına (28)' deki diferensiyel operatör ifadesinin doğurduğu m*inimal operatör* denir ve L_0 ile gösterilir. Benzer şekilde L^2 Hilbert uzayında (29) diferensiyel operatör ifadesinin doğurduğu L_0^+ minimal operatörü tanımlanabilir. L^2 de $L_0^+(L_0)$ nın eşlenik operatörüne (28) ve (29) diferensiyel operatör ifadesinin doğurduğu *maksimal operatör* denir ve $L(L^+)$ sembolü ile gösterilir [57], [17].

Bu bölümde esas amacımız L_0 minimal operatörünün bütün maksimal hiponormal genişlemelerini L^2 Hilbert uzayında sınır koşulları dilinde tanımlamaktır.

(28) diferensiyel operatör ifadesinin doğurduğu L_0 minimal operatörünün bütün normal genişlemeleri L^2 Hilbert uzayında sınır koşulları dilinde [31] ve [43]' te yapılan çalışmalarda incelenmiştir.

Şimdi aşağıdaki bazı teoremleri ispat edelim.

Teorem 17: Bir H Hilbert uzayında yoğun tanımlı kapalı bir T operatörünün hiponormal olması için gerek ve yeter şart,

$$D(T)\subset D(T^*)$$

ve $x\in D(T)$ için

$$\operatorname{Im}(T_Rx,T_Ix)\geq 0$$

bağıntılarının sağlanmasıdır. Burada,

$$T_R=\frac{1}{2}\overline{(T+T^*)} \text{ ve } T_I=\frac{1}{2i}\overline{(T-T^*)}.$$

İspat: T operatörü, H Hilbert uzayında bir hiponormal operatör olsun. Ayrıca $\forall x\in D(T)$ için

$$Tx=T_Rx+iT_Ix$$
$$T^*x=T_Rx-iT_Ix$$

olup $T_R x \in H$, $T_I x \in H$. Diğer taraftan $\forall x \in D(T)$ için $\|T^* x\|_H \leq \|Tx\|_H$ eşitsizliğinden aşağıdakiler elde edilir:

$$\|T_R x - iT_I x\|_H^2 \leq \|T_R x + iT_I x\|_H^2,$$

yani,

$$(T_R x - iT_I x, T_R x - iT_I x)_H \leq (T_R x + iT_I x, T_R x + iT_I x)_H$$

$$(T_R x, T_R x)_H + i(T_R x, T_I x)_H - i(T_I x, T_R x)_H + (T_I x, T_I x)_H \leq (T_R x, T_R x)_H - i(T_R x, T_I x)_H + \\ + i(T_I x, T_R x)_H + (T_I x, T_I x)_H$$

$$\begin{aligned}
2i(T_R x, T_I x)_H - 2i(T_I x, T_R x)_H &\leq 0 \\
i\left[(T_R x, T_I x)_H - \overline{(T_R x, T_I x)_H}\right] &\leq 0 \\
i.2i\dot{I}m(T_R x, T_I x)_H &\leq 0 \\
\dot{I}m(T_R x, T_I x)_H &\geq 0, \; x \in D(T).
\end{aligned}$$

Tersine olarak, eğer $D(T) \subset D(T^*)$ ve $\forall x \in D(T)$ için $\mathrm{Im}(T_R x, T_I x) \geq 0$ ise $\|T^* x\|_H \leq \|Tx\|_H$ olduğunu göstermek kolaydır. Bunun için

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_H - \|T^* x\|_H &= (T_R x + iT_I x, T_R x + iT_I x)_H - (T_R x - iT_I x, T_R x - iT_I x)_H \\
&= (T_R x, T_R x)_H - i(T_R x, T_I x)_H + i(T_I x, T_R x)_H + (T_I x, T_I x)_H \\
&\quad - \left[(T_R x, T_R x)_H + i(T_R x, T_I x)_H - i(T_I x, T_R x)_H + (T_I x, T_I x)_H\right] \\
&= 2i(T_R x, T_I x)_H - 2i(T_I x, T_R x)_H \\
&= i\left[(T_R x, T_I x)_H - \overline{(T_R x, T_I x)_H}\right] \\
&= i.2i\dot{I}m(T_R x, T_I x)_H
\end{aligned}$$

ve

$$\dot{I}m(T_R x, T_I x)_H \geq 0, \; x \in D(T)$$

olup, $\|T^* x\|_H \leq \|Tx\|_H$ olarak bulunur. Böylece T operatörü H Hilbert uzayında bir hiponormal operatördür. ■

Teorem 18: Eğer L_0 minimal operatörünün L^2 Hilbert uzayında en az bir hiponormal genişlemesi varsa bu durumda L_0 minimal operatörü de L^2 uzayında hiponormaldir.

İspat: L_h, L_0 ' ın bir hiponormal genişlemesi olsun, yani $L_0 \subset L_h \subset L$. Bu durumda

$$D(L_h) \subset D(L_h^*)$$

olup aşağıdaki bağıntıdan

$$D(L_0) \subset D(L_h) \subset D(L_h^*) \subset D(L^+) = D(L_0^*),$$

buradan da;

$$D(L_0) \subset D(L_0^*)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\|L_h^* u\| \leq \|L_h u\|$, $x \in D(L_h)$ eşitsizliğinden herhangi bir $u(t) \in D(L_0)$ için

$$\|L_h^* u\|_{L^2} = \|L_0^+ u\|_{L^2} \leq \|L_h u\|_{L^2} = \|L_0 u\|_{L^2}.$$

Yani;

$$\|L_0^* u\|_{L^2} \leq \|L_0 u\|_{L^2}, \; u(t) \in D(L_0).$$

Sonuç olarak L_0 minimal operatörü, L^2 Hilbert uzayında bir hiponormal operatördür. ■

Bu son teorem genel durumda da geçerlidir.

Teorem 19: A, H Hilbert uzayında lineer kapalı yoğun tanımlı bir operatör olsun. Eğer L_0, L^2 Hilbert uzayında $l(u) = u'(t) + Au(t)$ lineer diferensiyel operatörü tarafından doğurulan minimal operatör ise o zaman A operatörü de hiponormaldir.

İspat: L^2 Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün varlığı [17]' den biliniyor.

Diğer taraftan $D(L_0) \subset D(L_0^*) = D(L^+)$ olup herhangi bir $u(t) = \varphi(t) f$, $\varphi(t) \in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b), f \in D(A)$ için $u(t) \in D(L_0^+)$ elde ederiz, yani

$$L_0^+ u = -\varphi'(t) + \varphi(t) A^* f \in L^2(H,(a,b)).$$

Buradan $f \in D(A^*)$ olup $D(A) \subset D(A^*)$.

Ayrıca L_0 minimal operatörünün hiponormalliğinin diğer koşulundan

$$\|L_0^* u\|_{L^2} \leq \|L_0 u\|_{L^2}, \; u(t) \in D(L_0) \tag{30}$$

elde edilir.

$D(L_0)$'daki özel $u(t)=\varphi(t)f,\ \varphi(t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b), f\in D(A)$ fonksiyonları için bu son eşitsizlikten

$$\left\|-\varphi'(t)f+\varphi(t)A^*f\right\|_{L^2}^2 \le \left\|\varphi(t)f+\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2$$

elde ederiz. Böylece;

$$\left\|\varphi'(t)f\right\|_{L^2}^2-\left(\varphi'(t)f,\varphi(t)A^*f\right)_{L^2}+\left(\varphi(t)A^*f,\varphi'(t)f\right)_{L^2}+\left\|\varphi(t)A^*f\right\|_{L^2}^2$$
$$\le\left\|\varphi'(t)f\right\|_{L^2}^2+\left(\varphi'(t)f,\varphi(t)Af\right)_{L^2}+\left(\varphi(t)Af,\varphi'(t)f\right)_{L^2}+\left\|\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2.$$

elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(t)A^*f\right\|_{L^2}^2 &\le 2\left(\varphi'(t)f,\varphi(t)\left(A^*f+Af\right)\right)_{L^2}+2\left(\varphi(t)\left(A^*f+Af\right),\varphi'(t)f\right)_{L^2}+\left\|\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2\\
&\le 2.2\left[\left(\varphi'(t)f,\varphi(t)A_Rf\right)_{L^2}+\left(\varphi(t)A_Rf,\varphi'(t)f\right)_{L^2}\right]+\left\|\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2\\
&\le 4\left[(f,A_Rf)\int_0^1\varphi'(t)\overline{\varphi(t)}dt+\int_0^1\varphi(t)\overline{\varphi(t)}'dt\right]+\left\|\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2\\
&\le 4\left[(f,A_Rf)\int_0^1\left[\varphi'(t)\overline{\varphi(t)}+\varphi(t)\overline{\varphi(t)}'\right]dt\right]+\left\|\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2\\
&\le 4(f,A_Rf)\left[\left(\varphi(t)\varphi'(t)\right)\big|_0^1\right]+\left\|\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2\\
&\le \left\|\varphi(t)Af\right\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

olur. Yani;

$$\int_0^1\left|\varphi(t)\right|^2dt\left\|A^*f\right\|_H^2 \le \int_0^1\left|\varphi(t)\right|^2dt\left\|Af\right\|_H^2.$$

$\int_0^1\left|\varphi(t)\right|^2dt\neq 0$ özelliğine sahip $\varphi(t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$ fonksiyonunu seçelim.

Yukarıdaki son bağıntıdan

$$\left\|A^*f\right\|_H \le \left\|Af\right\|_H,\ f\in D(A) \qquad (31)$$

elde edilir. Böylece (30) ve (31) ifadelerinden A operatörünün de H Hilbert uzayında hiponormalliği gösterilmiş olur. ■

Sonuç 3: L_0, H Hilbert uzayında lineer kapalı yoğun tanımlı A operatörü ile

$$l(u)=u'(t)+Au(t)$$

diferensiyel operatör ifadesinin doğurduğu minimal operatör olsun. Bu durumda, eğer L_0 minimal operatörü L^2 Hilbert uzayında normal bir operatör ise, o zaman A operatörü de H Hilbert uzayında normaldir [38], [44], [47].

İleride A operatörünü H Hilbert uzayında normal operatör olarak alacağız.

Benzer bir yolla $m(u)=u'(t)+A_R u(t)$ diferensiyel operatör ifadesinin doğurduğu M maksimal ve M_0 minimal operatörleri inşa edilebilir. $M_0 \subset M$, $M_0^+ \subset M^+$.

$U(t,s)$, $t,s \in [a,b]$ için

$$\begin{cases} U_t'(t,s)f + iA_I U(t,s)f = 0, \\ \qquad\qquad U(s,s)f = f,\ f \in D(A),\ \ t,s \in [a,b] \end{cases}$$

homojen diferensiyel denklemine uygun evolüsyon operatörlerinin ailesi olsun.

Teorem 20: Her $t,s \in [a,b]$ için $U(t,s)$ operatörü H Hilbert uzayında üniterdir.

İspat: Her $f \in D(A)$ için

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(U(t,s)f, U(t,s)f\right)_H &= \left(U_t'(t,s)f, U(t,s)f\right)_H + \left(U(t,s)f, U_t'(t,s)f\right)_H \\ &= \left(-iA_I U(t,s)f, U(t,s)f\right)_H + \left(U(t,s)f, -iA_I U(t,s)f\right)_H \\ &= -i\left[\left(A_I U(t,s)f, U(t,s)f\right)_H - \left(U(t,s)f, A_I U(t,s)f\right)_H\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Böylece,

$$\left(U(t,s)f, U(t,s)f\right)_H = sabit\left(\neq sabit(t)\right),\ a \le t,s \le b,\ f \in D(A)$$

olup,

$$\left(U(t,s)f, U(t,s)f\right)_H = \left(U(s,s)f, U(s,s)f\right)_H = (f,f)_H$$

ve buradan da,

$$\left(\left(U^*(t,s)U(t,s) - E\right)f, f\right)_H = 0.$$

Ayrıca, $\overline{D(A)} = H$ olduğundan, $U^*(t,s)U(t,s) = E$.

Sonuç olarak, her $a \le t,s \le b$ için $U(t,s)$ operatörünün H Hilbert uzayında izometrik olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi $U^*(t,s)$, $a \le t,s \le b$, operatörünün H Hilbert uzayında izometrik olduğunu gösterelim.

Her $f,g \in D(A)$ için

$$\begin{aligned}\left(U_t'(t,s)f + iA_jU(t,s)f,g\right)_H &= \left(U_t'(t,s)f,g\right)_H + \left(iA_jU(t,s)f,g\right)_H \\ &= \left(f,\left(U^*\right)_t'(t,s)g - iU^*(t,s)A_jg\right)_H \\ &= 0\end{aligned}$$

bağıntısından, $U^*(t,s)$ operatörünün,

$$\begin{cases}\left(U^*\right)_t'(t,s)g - iU^*(t,s)A_jg = 0 \\ U^*(s,s)g = g\end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü olduğu anlaşılır.

Her $g \in D(A)$ için

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(U^*(t,s)g,U^*(t,s)g\right)_H &= \left(\left(U^*\right)_t'(t,s)g,U^*(t,s)g\right)_H + \left(U^*(t,s)g,\left(U^*\right)_t'(t,s)g\right)_H \\ &= \left(iU^*(t,s)A_jg,U^*(t,s)g\right)_H + \left(U^*(t,s)g,iU^*(t,s)A_jg\right)_H \\ &= 0.\end{aligned}$$

Buradan,

$$\left(U^*(t,s)g,U^*(t,s)g\right)_H = sabit,\ a \le t,s \le b,\ g \in D(A)$$

olup,

$$\left(U^*(t,s)g,U^*(t,s)g\right)_H = \left(U^*(s,s)g,U^*(s,s)g\right)_H = (g,g)_H.$$

Benzer şekilde $\overline{D(A)} = H$ olduğundan,

$$U^{**}(t,s)U^*(t,s) = E,$$

yani $U^*(t,s)$ operatörü de H Hilbert uzayında izometriktir.

Sonuç olarak, $U(t,s)$, $a \le t,s \le b$, operatörünün üniter olduğu bulunur. □

Şimdi aşağıdaki operatörü tanıtalım.

$$(Uz)(t) := U(t,a)z(t),\ \ z(t) \in L^2.$$

Diferensiyellenebilir her $z(t) \in D(A)$, $t \in [a,b]$ ve $z(t) \in L^2$ vektör fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar doğrudur.

$$\begin{aligned} l(Uz) &= (Uz)'(t) + A(t)Uz(t) \\ &= U\left(z'(t) + A_R z(t)\right) + \left(U_t' + iA_I(t)U\right)z(t) \\ &= Um(z). \end{aligned}$$

Buradan,

$$U^{-1}lU(z) = m(z)$$

olarak bulunur. Böylece, eğer $\tilde{L}$ operatörü L_0 minimal operatörünün bir genişlemesi ise, yani $L_0 \subset \tilde{L} \subset L$, halinde $U^{-1}L_0U = M_0$, $M_0 \subset U^{-1}\tilde{L}U = \tilde{M} \subset M$, $U^{-1}LU = M$.

Son bağıntının doğruluğunu gösterelim.

$D(M) = \{u(t) \in L^2 : u(t),\ (a,b)$ aralığı üzerinde mutlak sürekli ve $m(u) \in L^2\}$

ve $D(M_0) = \{u(t) \in D(M) : u(a) = u(b) = 0\}$.

Eğer $u(t) \in D(M)$ ise, o zaman bu durumda $Uu(t)$, (a,b) aralığı üzerinde mutlak sürekli ve

$$\begin{aligned} l(Uz) &= (Uz)'(t) + A(t)Uz(t) \\ &= Um(z) + \left(U_t' + iA_I(t)U\right)z(t) \\ &= Um(z) \in L^2. \end{aligned}$$

Böylece, $Uu(t) \in L^2$. Bu son bağıntıdan da $M \subset U^{-1}LU$ olarak bulunur.

Tersine olarak, eğer $v(t) \in D(L)$ vektör-fonksiyon ise, o zaman $U^{-1}v(t)$, (a,b) aralığı üzerinde mutlak süreklidir ve

$$\begin{aligned} m\left(U^{-1}v(t)\right) &= \left(U^{-1}v(t)\right)' + A_R\left(U^{-1}v(t)\right) \\ &= U^{-1}\left[v'(t) + A_R v(t) + iA_I v(t)\right] \\ &= U^{-1}l\left(v(t)\right) \in L^2. \end{aligned}$$

Yani, $U^{-1}v(t) \in D(M)$ ve son bağıntıdan $U^{-1}L \subset MU^{-1}$ olur. Bu da

$$U^{-1}LU \subset M$$

olup, $U^{-1}LU = M$ olarak bulunur. Böylece U operatörünün $D(M)$' den $D(L)$

üzerine birebir bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Teorem 21: Eğer M_0 minimal operatörü L^2 Hilbert uzayında hiponormal ise, o zaman

$$D(M_0)\subset \overset{0}{W}{}_2^1(H,(a,b)),$$
$$A_R D(M_0)\subset L^2(H,(a,b)).$$

İspat: Gerçekten $D(M_0)$ daki her bir $u(t)$ vektör fonksiyonu için

$$u'+A_R u\in L^2(H,(a,b)),$$
$$-u'+A_R u\in L^2(H,(a,b)),$$

olup, bu bağıntılardan

$$u'(t)\in L^2(H,(a,b)),$$
$$A_R u(t)\in L^2(H,(a,b)),\ \ u(t)\in D(M_0)\ \text{ ve } u(a)=u(b)=0$$

elde edilir. Buradan ise

$$u(t)\in \overset{0}{W}{}_2^1(H,(a,b)),$$
$$A_R D(M_0)\subset L^2(H,(a,b)),$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 22: Eğer A minimal operatörü H Hilbert uzayında normal ve

$$A_R \overset{0}{W}{}_2^1(H,(a,b))\subset L^2(H,(a,b))$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman M_0 ve L_0 minimal operatörleri L^2 Hilbert uzayında hiponormaldir.

İspat: İlk olarak L^2 Hilbert uzayında M_0 'ın hiponormalliğini ispat edelim. Her bir

$$u(t)\in D(M_0)\subset \overset{0}{W}{}_2^1(H,(a,b))$$

için bu koşullar altında

$$M_0^{+}u=-u'(t)+A_R u(t)$$
$$=-\big(u'(t)+A_R u(t)\big)+2A_R u(t)\in L^2(H,(a,b))$$

yazılabilir. Buradan ise

$$D(M_0) \subset D(M_0^*)$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan, her bir $u(t) \in D(M_0)$ için

$$\begin{aligned}
\|M_0u\|_{L^2}^2 - \|M_0^*u\|_{L^2}^2 &= \left(u'(t)+A_Ru, u'(t)+A_Ru\right)_{L^2} - \left(-u'(t)+A_Ru, -u'(t)+A_Ru\right) \\
&= \|u'\|_{L^2}^2 + (u', A_Ru)_{L^2} + (A_Ru, u')_{L^2} + \|A_Ru\|_{L^2}^2 + \\
&\quad -\|u'\|_{L^2}^2 + (u', A_Ru)_{L^2} + (A_Ru, u')_{L^2} - \|A_Ru\|_{L^2}^2 \\
&= 2\left[(u', A_Ru)_{L^2} + (A_Ru, u')_{L^2}\right] \\
&= 2(u, A_Ru)_{L^2} \,\mathrm{I}_a^b \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Yani $\|M_0^*u\| \le \|M_0u\|$, $u(t) \in D(M_0)$. Böylece M_0 operatörünün L^2 Hilbert uzayında hiponormal olduğu ispatlanır.

Şimdi L^2 Hilbert uzayında L_0'ın hiponormalliğini ispatlayalım.

$$L_0 = UM_0U^{-1},\ L_0 = UM_0U^{-1} \text{ ve } D(L_0) = D\left(UM_0U^{-1}\right) \subset D\left(UM_0^*U^{-1}\right) = D\left(L_0^*\right)$$

özelliklerinden $D(L_0) \subset D\left(L_0^*\right)$ elde edilir.

Her bir $u(t) \in D(L_0)$ için

$$\begin{aligned}
\|L_0^*u\|_{L^2}^2 &= \|UM_0^*U^{-1}\| = \left(UM_0^*U^{-1}u, UM_0^*U^{-1}u\right)_{L^2} \\
&= \left(M_0^*U^{-1}u, U^*UM_0\left(U^{-1}u\right)\right)_{L^2} = \left(M_0^*\left(U^{-1}u\right), M_0^*\left(U^{-1}u\right)\right)_{L^2} = \left\|M_0^*\left(U^{-1}u\right)\right\|_{L^2}^2 \\
&\le \left\|M_0\left(U^{-1}u\right)_{L^2}^2\right\| = \left(M\left(U^{-1}u\right), M_0\left(U^{-1}u\right)\right)_{L^2} \\
&\le= \left(U^*UM_0U^{-1}u, M_0U^{-1}u\right)_{L^2} = \left(UM_0U^{-1}u, UM_0U^{-1}u\right)_{L^2} \le \|L_0u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Buradan da anlaşılacağı gibi $\|L_0^*u\|_{L^2}^2 \le \|L_0u\|_{L^2}^2$, $u \in D(L_0)$ olup L_0'ın hiponormalliği ispat edilmiş olur. ■

Teorem 23: $A_R^{1/2}\left[D(L) \cap D(L^+)\right] \subset W_2^1(H,(a,b))$ olsun. L^2 Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün her bir L_h genişlemesi (28) diferensiyel operatör ifadesi ve

$$u(a) = VU(a,b)u(b) \tag{32}$$

sınır koşulu ile doğurulur. Burada V, H' Hilbert uzayında izometrik operatör ve $A_R^{1/2} V_R A_R^{-1/2}$ daraltma operatörüdür. V izometrik operatörü, L_h genişlemesi tarafından tek bir şekilde belirlenir, yani $L_h = L_V$.

Tersine olarak, (32) koşulunu sağlayan her V izometrik operatör için L maksimal operatörünün vektör fonksiyonlarının manifolda kısıtlanışı, L^2 Hilbert uzayında minimal operatörünün bir maksimal hiponormal genişlemesidir. Burada $A_R^{1/2} V_R A_R^{-1/2}$ H Hilbert uzayında daraltma operatörüdür.

İspat: İlk olarak, M_0 minimal operatörünün bütün M_h maksimal hiponormal genişlemelerini L^2 Hilbert uzayında sınır değerleriyle tanımlayalım.

M_h, M_0' ın bir maksimal hiponormal genişlemesi olsun. Bu durumda her $u(t) \in D(M_h)$ için

$$M_h u = u'(t) + A_R u(t)$$
$$M_h^* u = -u'(t) + A_R u(t)$$

vardır. Bu bağıntılardan $u'(t) \in L^2$ ve $A_R u(t) \in L^2$ elde edilir. Başka bir deyişle, $D(M_h) \subset W_2^1(H,(a,b))$ ve $A_R D(M_h) \subset L^2$.

Diğer taraftan, eğer $u(t) \in D(M_h) \subset D(M_h^*)$ ise o zaman

$$u(t) = e^{-A_R(t-a)} f + \int_a^t e^{-A_R(t-s)} (M_h u)(s)\, ds,$$

$$u(t) = e^{A_R(t-b)} g + \int_t^b e^{A_R(t-s)} (M_h^* u)(s)\, ds.$$

Burada $f, g \in H_{-1/2}(A_R)$. Böylece her $u(t) \in D(M_h)$' ın $u(t) \in C(H_{+1/2}, [a,b])$ [12] özelliği vardır. Daha sonra her $u(t) \in D(M_h)$ ve $v(t) \subset D(M_h^*)$ için

$$(M_h u, v)_{L^2} = (u(b), v(b))_H - (u(a), v(a))_H + (u, M_h^* v)_{L^2},$$

doğru olan bağıntısından

$$\|u(b)\|_H = \|u(a)\|_H$$

bulunur. Bu takdirde H Hilbert uzayında

$$u(a) = Vu(b) \tag{33}$$

olacak şekilde bir V izometrik operatörü vardır.

Diğer taraftan, herhangi bir $u(t)\in D(M_h)$ için M_h genişlemesinin hiponormalliğin diğer koşulundan,

$$\begin{aligned}\|M_h^*u\|_{L^2}^2-\|M_hu\|_{L^2}^2 &= (-u'+A_Ru,-u'+A_Ru)_{L^2}-(u'+A_Ru,u'+A_Ru)_{L^2}\\ &=-2\left[(u',A_Ru)_{L^2}+(A_Ru,u')_{L^2}\right]\\ &=-2(u,A_Ru)_H \,\mathrm{I}_a^b\\ &=-2\left[(u(b),A_Ru(b))_H-(u(a),A_Ru(a))_H\right]\\ &=-2\left[\|A_R^{1/2}u(a)\|_H^2-\|A_R^{1/2}u(b)\|_H^2\right]\le 0\end{aligned}$$

elde edilir, yani,

$$\|A_R^{1/2}u(a)\|_H^2\le\|A_R^{1/2}u(b)\|_H^2,\ u(t)\in D(M_h).$$

Böylece H Hilbert uzayında

$$A_R^{1/2}u(a)=KA_R^{1/2}u(b),\ \ u(t)\in D(M_h) \tag{34}$$

şeklinde bir K daraltma operatörü vardır.

Eğer bir $\tilde{M}$, $M_0\subset\tilde{M}\subset M$ hiponormal genişlemesi maksimal ise, o zaman

$$H_b\left(\tilde{M}\right):=\left\{u(b)\in H:u(t)\in D\left(\tilde{M}\right)\right\}=H_{+1/2}(A_R).$$

Şimdi, bir $f\in H_{+1/2}(A_R)$ vektör fonksiyonu için $u(t)\in D(M)$, $u(b)\neq f$ var olduğunu kabul edelim. Daha sonra $u_*(t)=f$, $a\le t\le b$ şeklinde bir vektör fonksiyonuna bakalım.

$f\in D(M)\cap D(M^+), A_Rf\in L^2, f\notin H_b\left(\tilde{M}\right)$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\|u_*(a)\|_H=\|u_*(b)\|_H,\qquad \|A_R^{1/2}u_*(a)\|_H\le\|A_R^{1/2}u_*(b)\|_H.$$

Şimdi, $D\left(\tilde{M}_*\right)=span\left\{D\left(\tilde{M}\right),u_*\right\}$ lineer manifoldu için $\tilde{M}$ operatörünün bir $\tilde{M}_*$,$\tilde{M}_*\subset M$ genişlemesini göz önüne alalım.

Diğer taraftan, eğer

$$V_*x=\begin{cases}Vx, & x\in D(V)\\ f\ , & x=f\end{cases}\qquad \text{veya}\qquad V_*(\lambda x+f):=\lambda Vx+f,\ x\in D(V),\ \lambda\in\mathbb{C}$$

şeklinde ise, o zaman $V_*: D(V_*) \to H$, bir V_*, $V \subset V_*$ operatörü H Hilbert uzayında bir izometrik operatördür.

$D\left(\tilde{M}_*\right)$ manifoldun $z(t)$ vektör fonksiyonu için,

$$z(a) = V_* z(b)$$
$$A^{1/2} z(a) = K_* A^{1/2} z(b),$$

sağlanır. Burada,

$$K_* A^{1/2} g = \begin{cases} K A^{1/2} g, & g \in D(V) \\ A^{1/2} f, & g = f. \end{cases}$$

Yani $u_*(t)$ için $\tilde{M}$ operatörünün bir genişlemesi vardır. Bu $\tilde{M}$ genişlemesi maksimaldir.

Bu ise $\tilde{M}$ ' nın maksimal olması ile çelişir. Dolayısıyla genişletilemez.

(33) , (34) bağıntılarından ve $\overline{H_{+1/2}(A_R)} = H$ eşitliğinden,

$$V = A_R^{-1/2} K A_R^{1/2},$$

bulunur, yani

$$K = A_R^{1/2} V A_R^{-1/2}$$

elde edilir. Buradan bir V izometrik operatörünün M_h genişlemesi tarafından tek bir şekilde belirlendiği açıktır.

Şimdi L_h, L^2 Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün maksimal hiponormal bir genişlemesi olsun.

$M_h = U^{-1} L_h U$, $M_0 \subset M_h \subset M$ ise, o zaman ispatın birinci kısmı için $m(u)$ diferensiyel operatör ifadesi (33) sınır koşulu ile H Hilbert uzayında bir V izometrik operatörünü tanımlayalım:

$$v(a) = V v(b), \quad v(t) \in D(M_h).$$

Burada $K = A_R^{\frac{1}{2}} V A_R^{\frac{-1}{2}}$ operatörü aynı zamanda H Hilbert uzayında sıkan operatördür.

$$v(t) = U(a,t) u(t), \quad v(t) \in D(M_h),$$

olup bu ise

$$u(a) = V U(a,b) u(b), \qquad u(t) \in D(L_h).$$

Şimdi L_V, L^2 Hilbert uzayında (32) sınır koşuluyla birlikte $l(u)$ diferensiyel operatör ifadesi ile üretilen bir operatör olsun. Bu durumda

$$L_V u = l(u),$$
$$u(a) = VU(a,b)u(b), \ \ u(t) \in D(L_V).$$

Burada V ve $K = A_R^{1/2} V A_R^{-1/2}$, H Hilbert uzayında uygun izometrik ve daraltma operatörlerdir.

L_V^* eşlenik operatörü, $l^*(v)$ diferensiyel operatör ifadesi ve

$$v(b) = U(b,a)V^* v(a), \ \ v(t) \in D\left(L_V^*\right)$$

sınır koşulu ile elde edilir.

$D(L_V) \subset D\left(L_V^*\right)$ olduğunu görmek zor değildir ve L^2 Hilbert uzayında genişlemenin hiponormalliğin diğer koşulu da sağlanır, böylece ispat tamamlanır. ■

Önerme 1: Yoğun tanımlı kapalı bir T operatörünün H Hilbert uzayında hiponormal olması için gerek ve yeter şart

$$T + \lambda E, \lambda \in \mathbb{C}$$

operatörünün H Hilbert uzayında hiponormal olmasıdır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$D(T + \lambda E) = D(T)$$
$$D\left(T^* + \bar{\lambda} E\right) = D\left(T^*\right),$$

olur, ayrıca

$$\left((T+\lambda E)\left(T^* + \bar{\lambda}E\right)x, x\right)_H - \left(\left(T^* + \bar{\lambda}E\right)(T+\lambda E)x, x\right)_H =$$
$$= \left(TT^* x, x\right)_H - \left(T^* T x, x\right)_H, \ \ x \in D(T)$$

olup, böylece ispat tamamlanır. ■

Not : Eğer (28)' de $A_R \geq 0$ ise, o zaman (28) aşağıdaki formda yazılabilir.

$$l(u) = u'(t) + Au(t)$$
$$= u'(t) + (A+E)u(t) - u(t)$$
$$= \left[u'(t) + (A_R + E)u(t) + iA_I(t)u(t)\right] - u(t).$$

Önerme 1 ve teorem 23' ü kullanarak L^2 Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün bütün maksimal hiponormal genişlemelerini (28) diferensiyel operatör ifadesi ve (32) sınır koşulu ile doğuruldüğu gösterilebilir. Burada V izometrik operatör ve

$$(A_R+E)^{1/2}V(A_R+E)^{-1/2}$$

bu ise H Hilbert uzayında bir daraltma operatörüdür.

2.2. Hiponormal Genişlemelerin Spektrumunun Ayrıklığı

Bu kısımda L^2 Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün maksimal hiponormal genişlemelerin spektrumunun ayrıklığı incelenecektir.

İlk olarak aşağıdaki sonuçların doğruluğunu ispatlayalım.

Teorem 24: Eğer L_h, L_0 minimal operatörünün bir maksimal hiponormal genişlemesi ve $M_h = U^{-1}L_hU$ M_0 minimal operatörünün ona uygun maksimal hiponormal genişlemesi ise, o zaman L^2 Hilbert uzayında bu genişlemelerin spektrumları için

$$\sigma(L_h) = \sigma(M_h)$$

eşitliği doğrudur. Bu ise aşağıdaki bağıntının bir sonucudur.

$$\begin{aligned} L_\lambda - \lambda &= U^{-1}L_hU - \lambda \\ &= U^{-1}(L_h - \lambda)U. \end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_p(H), p \geq 1$ ile H Hilbert uzayında operatörlerin *Schatten von Neumann sınıfı*nı [49] ve $B(H)$ ile de H Hilbert uzayında lineer sınırlı operatörler sınıfını göstereceğiz [58].

Aşağıda vereceğimiz teorem maksimal hiponormal genişlemelerinin spektrumu hakkındadır.

Teorem 25: L_V maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumu aşağıdaki formdadır.

$$\sigma(L_V) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \lambda_0 + \frac{2k\pi i}{b-a},\ k \in \mathbb{Z}, \text{ burada } \lambda_0,\ e^{-\lambda_0(b-a)} - \mu = 0,$$
$$\mu \in \sigma\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right) \text{ denkleminin çözüm kümesi dir}\}$$

İspat: $\sigma(L_V)=\sigma(M_V)$, $M_V=U^{-1}L_VU$ olduğundan L^2 Hilbert uzayında M_V maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumunu araştıralım.

Şimdi M_V maksimal hiponormal genişlemesi için spektrum problemini göz önüne alalım:

$$u'(t)+A_Ru(t)=\lambda u(t)+f(t)$$
$$u(a)=Vu(b).$$

Burada $\lambda\in\mathbb{C}, f(t)\in L^2$, V bir izometrik operatör ve $A_R^{1/2}VA_R^{-1/2}, H$ Hilbert uzayında daraltma operatörüdür.

Yukarıdaki diferensiyel denklemin L^2 Hilbert uzayındaki genel çözümünün

$$u_\lambda(t)=e^{-(A_R-\lambda)(t-a)}f+\int_a^t e^{-(A_R-\lambda)(t-s)}f(s)ds,\ f\in H_{-1/2}(A_R)$$

şeklinde olduğu açıktır. Ayrıca sınır koşullarıyla aşağıdaki bağıntı bulunur:

$$\left(Ve^{-A_R(b-a)}-e^{-\lambda(b-a)}\right)f=-V\int_a^b e^{-A_R(b-s)}f(s)ds.$$

Buradan M_V genişlemesinin spektrumunun $\lambda\in\mathbb{C}$ gibi bir spektrum noktası olması için gerek ve yeter şart,

$$e^{-\lambda(b-a)}=\mu\in\sigma\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)$$

olmasıdır. Buradan,

$$\lambda=\lambda_0+\frac{2k\pi i}{b-a}$$

olup, $\lambda_0\in\sigma\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)$ ve $k\in\mathbb{Z}$ olarak bulunur. Buradan aşağıdaki sonuç bulunur.

Teorem 26: Eğer $Ve^{-A_R(b-a)}\in B(H)$ ise, o zaman $\sigma(L_V)\neq\varnothing$ ise sonsuzdur.

Teorem 27: Eğer $A_R^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ ve L_V operatörü L_0 minimal operatörünün herhangi bir maksimal hiponormal genişlemesi ise, o zaman $L_V^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty\left(L^2\right)$.

İspat: L_V, L_0 operatörünün herhangi bir maksimal hiponormal genişlemesi ve M_V ona uygun L^2 Hilbert uzayında M_0 minimal operatörünün bir maksimal hiponormal genişlemesi olsun, yani $M_V = U^{-1} L_V U$.

Aşağıdaki eşitliğin doğruluğu kolaylıkla gösterilebilir.

$$M_V^{-1} f(t) = e^{-A_R(t-a)} \left(E - Ve^{-A_R(b-a)}\right)^{-1} V \int_a^b e^{-A_R(b-s)} f(s)ds + \int_a^t e^{-A_R(t-s)} f(s)ds, \ f(t) \in L^2.$$

Şimdi, eğer $A_R^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ise, o zaman

$$Kf(t) := \int_a^t e^{-A_R(t-s)} f(s)ds \in \mathfrak{S}_\infty\left(L^2\right)$$

olduğunu ispatlayalım.

$$K_\varepsilon f(t) := \int_a^{t-\varepsilon} e^{-A_R(t-s)} f(s)ds, \ f(t) \in L^2, \quad K_\varepsilon : L^2 \to L^2, \ \varepsilon > 0$$

formunda yeni bir operatör tanımlayalım. Her $\varepsilon > 0$ için K_ε operatörü,

$$K_\varepsilon f(t) := \int_a^b K_\varepsilon(t,s) f(s) ds$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $f(t) \in L^2$ ve her bir $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ için,

$$K_\varepsilon(t,s) = \begin{cases} e^{-A_R(t-s)}, & \text{eğer } a \le s < t-\varepsilon \\ 0 \quad , & \text{eğer } t-\varepsilon \le s \le b. \end{cases}$$

Her $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$, $a \le s < t-\varepsilon$ duali için aşağıdaki özellikler sağlandığından

$$A_R e^{-A_R(t-s)} \in B(H),$$

$$e^{-A_R(t-s)} = \left[A_R e^{-A_R(t-s)}\right] A_R^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H),$$

$K_\varepsilon \in \mathfrak{S}_\infty\left(L^2\right), \varepsilon > 0$ olarak bulunur.

Diğer taraftan aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$\left\|\left(K_\varepsilon - K\right) f\right\|_{L^2} = \left\| \int_{t-\varepsilon}^t e^{-A_R(t-s)} f(s)ds \right\|_{L^2} \le \int_{t-\varepsilon}^t \left\|e^{-A_R(t-s)}\right\| \cdot \left\|f(s)\right\|_H ds \le \int_{t-\varepsilon}^t \left\|f(s)\right\|_H ds \le$$

$$\le \left(\int_{t-\varepsilon}^t \left\|f(s)\right\|_H^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t-\varepsilon}^t 1^2 ds \right)^{1/2} \le \left(\int_a^b \left\|f(s)\right\|_H^2 ds \right)^{1/2} \cdot \varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{1/2} \left\|f\right\|_{L^2}, \ f(t) \in L^2,$$

yani,

$$\left\|K_\varepsilon - K\right\| \le \varepsilon^{1/2}.$$

Buradan,

$$K_\varepsilon \to K, \ \varepsilon \to 0.$$

Ayrıca [17]' deki meşhur teoremden, $K \in \mathfrak{S}_\infty(L^2)$ vardır. M_V^{-1}' in gösteriminden $M_V^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L^2)$ bulunur. Buradan da $L_V^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(L^2)$ elde edilir. ■

Sonuç 4: L_V, L_0 minimal operatörünün herhangi bir maksimal hiponormal genişlemesi ve $\lambda \in \rho(L_V)$ ise, o zaman $R_\lambda(L_V) \in \mathfrak{S}_\infty(L^2)$.

Bu sonuç aşağıdaki bağıntıdan elde edilir:

$$R_\lambda(L_V) = L_V^{-1} - \lambda R_\lambda(L_V) L_V^{-1}.$$

Teorem 27'nin ispat metodu kullanılarak aşağıdaki sonuç ispat edilir.

Sonuç 5: Eğer $A_R^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H), p \geq 1$ ve L_V, L_0 minimal operatörünün herhangi bir maksimal hiponormal genişlemesi ise, o zaman $L_V^{-1} \in \mathfrak{S}_p(L^2)$.

L_V operatörünün $R_\lambda(L_V), \lambda \in \rho(L_V)$ rezolventasının gösteriminden aşağıdaki sonucu görmek zor değildir.

Sonuç 6: L_{V_1}, L_{V_2} $L_0 \subset L^2$ minimal operatörünün iki tane maksimal hiponormal genişlemesi ve $\lambda \in \rho(L_{V_1}) \cap \rho(L_{V_2})$ olsun. O zaman $R_\lambda(L_{V_1}) - R_\lambda(L_{V_2}) \in \mathfrak{S}_p(L^2)$, $1 \leq p$, olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$V_1 - V_2 \in \mathfrak{S}_p(H), \ p \geq 1$$

olmasıdır.

Şimdi L_0 minimal operatörünün maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumun yapısı hakkında bir sonucu ispat edelim.

Teorem 28: Eğer $A_R^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ve L_V, L_0 minimal operatörünün herhangi bir maksimal hiponormal genişlemesi ise, o zaman L_V 'nin spektrumu aşağıdaki formdadır.

$$\sigma(L_V) = \left\{ \lambda_n(A_R) + \frac{i}{a-b}\left(\arg \lambda_n\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right) + 2k\pi\right), n \in N; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

İspat: $\sigma(L_V)=\sigma(M_V)=\sigma_p(M_V)$ ise, o zaman M_V' nin spektrum yapısını araştıralım.

Teorem 25' ten

$$\sigma(L_V)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\frac{1}{a-b}\left(\ln|\mu|+i\arg\mu+2k\pi i\right),\mu\in\sigma\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right),k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

$A_R^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ olduğundan $Ve^{-A_R(b-a)}=V\left(A_Re^{-A_R(b-a)}\right)A_R^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H)$.

Herhangi bir $\lambda\in\sigma_p\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)$ özdeğerine uygun $x_\lambda\in H$ özvektörü için

$$Ve^{-A_R(b-a)}x_\lambda=\lambda\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)x_\lambda.$$

Buradan

$$e^{-A_R(b-a)}V^*Ve^{-A_R(b-a)}x_\lambda=\lambda\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)e^{-A_R(b-a)}V^*x=\lambda\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)\overline{\lambda\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)}x_\lambda,$$

olur. Yani,

$$e^{-2A_R(b-a)}x_\lambda=\left|\lambda\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)\right|^2x_\lambda.$$

Böylece,

$$\left|\lambda\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)\right|^2=\lambda\left(e^{-2A_R(b-a)}\right)=e^{-2\lambda(A_R)(b-a)}$$

elde edilir. Bu ise

$$|\mu|=\left|\lambda\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)\right|=e^{-\lambda(A_R)(b-a)}.$$

Bunun sonucunda,

$$\ln|\mu|=\lambda(A_R)(a-b).$$

bulunur. Bu yüzden

$$\sigma(L_V)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\lambda_n(A_R)+\frac{i}{a-b}\left(\arg\lambda_n\left(Ve^{-A_R(b-a)}\right)+2k\pi\right),n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}\right\}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

2.3. Bir Sınıf Birinci Mertebeden Diferensiyel Operatörlerin Spektrumunun Ayrıklığı

Sonlu bir $[a,b]$ aralığı üzerinde vektör fonksiyonların $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında birinci mertebeden aşağıdaki şekilde bir L_B diferensiyel operatörünü göz önüne alalım:

$$L_B u := u'(t) + Au(t), \quad u(a) = Bu(b),$$

burada A lineer alttan pozitif tanımlı özeşlenik bir operatör (kolaylık için $A \geq E$ olduğunu kabul edeceğiz) ve B, H Hilbert uzayında bir lineer sınırlı operatördür.

Burada biz ilk olarak $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında L_B operatörünün spektrumunun ayrıklığını ve $R_\lambda(L_B)$, $\lambda \in \rho(L_B)$ operatörünün Schatten-von Neumann sınıfına [58] aitliğini inceleyeceğiz.

Teorem 29: Eğer $A = A^* \geq E$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, $B \in B(H)$ ve $1 \in \rho\left(Be^{-A(b-a)}\right)$ ise, o zaman $L_B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty\left(L^2(H,(a,b))\right)$.

İspat:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad f \in L^2(H,(a,b)),$$
$$u(a) = Bu(b),$$

Bu sınır değer probleminin çözümünün

$$L_B^{-1} f(t) = e^{-A(t-a)}\left(E - Be^{-A(b-a)}\right)^{-1}\int_a^b e^{-A(b-s)} f(s)\,ds + \int_a^t e^{-A(t-s)} f(s)\,ds$$

olduğunu gösterelim.

Gerçekten,

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad f \in L^2(H,(a,b)),$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$u(t) = e^{-A(t-a)} f + \int_a^t e^{-A(t-a)} f(s)\,ds, \quad f \in H_{-1/2}(A),$$

şeklinde olup, $u(a) = Bu(b)$ sınır değer koşulundan

$$f = Be^{-A(b-a)} f + B\int_a^b e^{-A(b-s)} f(s)\,ds,$$

elde edilir. Buradan da,

$$\left(E - Be^{-A(b-a)}\right) f = B\int_a^b e^{-A(b-s)} f(s)\,ds$$

bulunur. $1 \in \rho\left(Be^{-A(b-a)}\right)$ olduğundan

$$f = \left(E - Be^{-A(b-a)}\right)^{-1} B \int_a^b e^{-A(b-s)} f(s)\,ds$$

olduğu görülür. Bunun sonucu olarak da bulunur.

$$u'(t) + Au(t) = f(t),\ f \in L^2\left(H,(a,b)\right)$$

diferensiyel denkleminin $u(a) = Bu(b)$ sınır değer koşulu ile çözümü

$$u(t) = L_B^{-1} f(t) = e^{-A(t-a)}\left(E - Be^{-A(b-a)}\right)^{-1} B \int_a^b e^{-A(b-a)} f(s)\,ds + \int_a^b e^{-A(t-s)} f(s)\,ds$$

olarak bulunur.

Şimdi, eğer $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ise, o zaman

$$Kf(t) := \int_a^t e^{-A(t-s)} f(s)\,ds \in \mathfrak{S}_\infty\left(L^2\left(H,(a,b)\right)\right)$$

olduğunu ispatlayalım. Bu ispat için aşağıdaki formda yeni bir operatör tanımlayalım:

$$K_\varepsilon f(t) := \int_a^{t-\varepsilon} e^{-A(t-s)} f(s)ds,\ f(t) \in L^2,\ K_\varepsilon : L^2 \to L^2,\ \varepsilon > 0.$$

Her $\varepsilon > 0$ için K_ε operatörü,

$$K_\varepsilon f(t) := \int_a^b K_\varepsilon(t,s) f(s)ds$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $f(t) \in L^2$ ve her bir $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ ikilisi için,

$$K_\varepsilon(t,s) = \begin{cases} e^{-A(t-s)}, & \text{eğer } a \le s < t-\varepsilon \\ 0 \quad\ , & \text{eğer } t-\varepsilon \le s \le b. \end{cases}$$

Ayrıca her $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$ ikilisi için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$Ae^{-A(t-s)} \in B(H),$$
$$e^{-A(t-s)} = \left[Ae^{-A(t-s)}\right] A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H).$$

Böylece her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon \in \mathfrak{S}_\infty\left(L^2\right)$.

Diğer taraftan,

$$\left\|(K_\varepsilon - K)f\right\|_{L^2} = \left\| \int_{t-\varepsilon}^t e^{-A(t-s)} f(s)ds \right\|_{L^2} \le \int_{t-\varepsilon}^t \left\|e^{-A(t-s)}\right\| \cdot \left\|f(s)\right\|_H ds \le \int_{t-\varepsilon}^t \left\|f(s)\right\|_H ds$$

$$\leq\left(\int_{t-\varepsilon}^{t}\|f(s)\|_H^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_{t-\varepsilon}^{t}1^2ds\right)^{1/2}\leq\left(\int_a^b\|f(s)\|_H^2\,ds\right)^{1/2}\cdot\varepsilon^{1/2}=\varepsilon^{1/2}\|f\|_{L^2},\ f(t)\in L^2,$$

olduğundan

$$\|K_\varepsilon-K\|<\varepsilon^{1/2},$$

elde edilir. Ayrıca $K_\varepsilon\to K,\ \varepsilon\to 0$ [58]' deki önemli teoremden $K\in\mathfrak{S}_\infty\left(L^2\right)$ olup,

$$L_B^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty\left(L^2\right)$$

bulunur. ■

Bu teoremden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

Sonuç 7: Eğer $A=A^*\geq E,\ A^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(H),\ B\in B(H),\ 1\in\rho\left(Be^{-A(b-a)}\right)$ ve $\lambda\in\rho(L_B)$ ise, o zaman

$$R_\lambda(L_B)\in\mathfrak{S}_\infty\left(L^2(H),(a,b)\right)$$

olur. Gerçekten bu sonuç,

$$R_\lambda(L_B)=L_B^{-1}-\lambda R_\lambda(L_B)L_B^{-1}$$

bağıntısı izlenerek bulunur.

Teorem 30: L_B operatörünün spektrumu aşağıdaki formdadır.

$\sigma(L_B)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\lambda_0+\dfrac{2k\pi i}{b-a}$, burada λ_0, $e^{-\lambda_0(b-a)}-\mu=0,\mu\in\sigma\left(Be^{-A(b-a)}\right)$ denkleminin çözüm kümesidir, $k\in\mathbb{Z}\}$

İspat: L^2 Hilbert uzayında,

$$u'(t)+Au(t)=\lambda u(t)+f(t),\ f\in L^2\left(H,(a,b)\right),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

diferensiyel denkleminin genel çözümü:

$$u_\lambda(t)=e^{-(A-\lambda)(t-a)}f+\int_a^t e^{-(A-\lambda)(t-s)}f(s)ds,f\in H_{-1/2}(A).$$

$u(a)=Bu(b)$ sınır koşulu altında aşağıdaki bağıntıdan elde edilir.

$$\left(Be^{-A(b-a)}-e^{-\lambda(b-a)}\right)f=-B\int_a^b e^{-A(b-s)}f(s)ds.$$

Buradan $\lambda \in \mathbb{C}$' nin L_B operatörünün spektrumunun bir noktası olması için gerek ve yeter şart,

$$e^{-\lambda(b-a)} = \mu \in \sigma\left(Be^{-A(b-a)}\right)$$

bağıntısının sağlanmasıdır. Buradan $\lambda = \lambda_0 + \dfrac{2k\pi i}{b-a}$. Burada $\lambda_0 \in \sigma\left(Be^{-A(b-a)}\right)$ ve $k \in \mathbb{Z}$.

■

Bu son teoremden aşağıdaki sonuca varılır.

Teorem 31: Eğer $A = A^* \geq E$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ ve $B \in B(H)$ ise, o zaman

$$\sigma(L_B) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \frac{1}{a-b}\{\ln|\mu| + i\arg\mu + 2k\pi i\},\ k \in \mathbb{Z},\ \mu \in \sigma\left(Be^{-A}\right)\right\}.$$

Sonuncu teorem ve $\sigma\left(Be^{-A}\right) \neq \varnothing$ olduğundan aşağıdaki sonuç doğrudur.

Sonuç 8: L_B operatörünün $\sigma(L_B)$ spektrumu boş değil ise o zaman sonsuzdur.

$B = W$ olması durumunda benzer problem [31]'de incelenmiştir. Burada W, H Hilbert uzayında üniter bir operatördür.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmanın sonuçları [59, 60, 61] konferanslarında sunulmuş ve bildiri olarak basılmıştır. Bu araştırmalar çerçevesinde aşağıdakiler söylenebilir.

1. Maksimal hipormal genişlemelere ait Teorem 23 bu şekilde ilk defa burada koyulmuş ve kesin bir sonuca varılmıştır.
2. Maksimal hipormal genişlemelerin ayrık spektrumu Teorem 28' de operatör katsayıları dilinde açık şekilde yazılabilmiştir. Bu pratik olarak büyük önem taşır.
3. Bir sınıf diferensiyel operatörlerin ayrık spektrumu hakkında Teorem 30' da verilen sonuç onların spektrumu ile operatör katsayıların spektrumları arasındaki ilişki bulmaya çalışılmıştır.

4. ÖNERİLER

1. Tezin önemli sonuçlarından biri olan Teorem 23' deki A operatör katsayısının maksimal hiponormal olduğu durumlarda ayrıca incelenmelidir. Bu tezde uygulanan teknik ile benzer sonuca ulaşılamaz.
2. Tezin ikinci önemli sonucu olan Teorem 28, A operatör katsayısının maksimal hiponormal olduğu durumlarda tezde olduğu gibi benzer şekilde açık bir sonuca ulaşılacağı bir ilgi konusu olabilir.
3. Maksimal hiponormal genişlemelerin ayrık spektrumlu durumlarında, spektrumun asimtotu ayrıca bir incelenme konusu olarak araştırılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Neumann, J.von, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann., 102 (1929-1930) 49-131.

2. Kilpi, Y., Über lineare normale Transformationen in Hilbertschen Raumes, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI 154 (1953).

3. Kilpi, Y., Über die Anzahl der hypermaximalen normalen fort setzungen normalen Transformationen, Ann. Univ. Turkuensis. Ser. AI 65 (1963).

4. Kilpi, Y., Über das komplexeMomenten Problem, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI 236 (1957).

5. Davis, R.H., Singular normal differential operators, Tech. Rep., Dep. Math., California Univ., 10, 1955.

6. Coddington, E.A., Extension theory of formally normal and symetric subspaces, Mem. Amer. Math. Soc., 134 (1973) 1-80.

7. Biriuk, G., Coddington, E.A., Normal extensions of unbounded formally normal operators, J. Math. And Mech., 13 (1964) 617-638.

8. B.Sz.- Nagy, Spectraldarstellung linearen Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergeb. Math., 5 (1942) 33.

9. Stochel, J., Szafraniec, F.H., On normal extensions of unbounded operators, I, Oper. Theory Adv. Apply. 14 (1985) 31-55.

10. Stochel, J., Szafraniec, F.H., On normal part of an unbounded operators, Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A 92 (1989) 459-503.

11. Kokebaev, B.K., Otarov, Kh.T., Izv. Acad. Nauk Kaz. (SSR), 5 (1985) 38-42.

12. Biyarov, B.N., Otelbaev, M., Mat. Zametki, 53, 5 (1993) 21-28.

13. Hille, E., Phillips, R.S., Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 31, 1957.

14. Lions, J.L., Equations differentielles operationuelles et problems aux limites, Berlin, Springer-Verlag, (1961), 292.

15. Krein, S.G., Linear Differential Equations in Banach Space, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971.

16. Gorbachuk, M.L., Self – adjoint boundary value problems for the differential equations for second order with the unbounded operator coefficient, Functional Analysis and its applications (Moscow), 5, 1(1971) 10 – 21.

17. Gorbachuk, V.I., Gorbachuk, M.L., Boundary value problems for operator-differential equations, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1991.

18. Bruk, V.M., Some problems of the Spectral theory of the linear differential equations for first order with unbounded operator coefficient, Functional Analysis and its applications (Moscow), 1 (1973) 15-25.

19. Levitan, B.M., Some problems of spectral theory of differential operators, International congress of mathematician in Nitz, Moscow, Nauka, 1972.

20. Krein, M.G., Theory of self-adjoint extensions of lower bounded operators and its applications II, Matem. Sb., 21, 63 (1947) 365-404.

21. Rofe-Beketov, F.S., Self-adjoint extensions differential operators in the space of vektor-functions, DAN, SSSR, 184, 5 (1969) 1034-1037.

22. Aleksandran, R.A., Berezanskii, Yu. M., Ilin, V.A. ve Kostyuchenko, A.G., Some questions of spectral theory for equations with partial derivative, "Diff. Equ. with Partial Derivative", Moscow, Nauka, 1970.

23. Vischik, M.I., On the general boundary problems for eliptic differential equations, Trans. of Moscow Math. Soc., I (1952) 187-246.

24. Ismailov, Z.I., Formally-normal extensions of an operator, Differential Equation, Minsk, 28, 5 (1992) 905-907.

25. Ismailov, Z.I., Normal boundary problems for a second-order equation with a bounded operator potential, Differential Equation, Norwell, USA, 30, 11 (1994)1861-1862.

26. Ismailov, Z.I., A three-point normal boundary value problem for an operator, Differential Equation, Siberian Mathematical Journal, Norwell, USA, 35, 5 (1994) 941-944.

27. Ismailov, Z.I., Normal boundary problems for differential-operator equations, International conference nonlinear differential equations, August 21-27, Kiev, 1995, book of abstracts, 58.

28. Ismailov, Z.I., A regular solvability of the one class differential operators for the first-order, Spectral Theory of Operators and its Applications, XI (1997) 82-89.

29. Ismailov, Z.I.,On the solvability of the one class differential operators for the first-order, Proc. Inst. Math and Mech. AS of Azer., VI (1997) 83-89.

30. Ismailov, Z.I., On normally solvability and index of the one class differential operators for second-order, Proc. Inst. Math and Mech. AS of Azer., VII (1998) 108-114.

31. Ismailov, Z.I., Discreteness of the spectrum of the first order normal differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 57, 1 (1998) 32-33.

32. Ismailov, Z.I., On a property normal differential operators, 1st World Mathematics Symposium, 29 June-2 July 1999, Elazığ, Turkey, Abstract, 71-72.

33. Ismailov, Z.I., On the normal solvability and the index of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 62, 3 (2000) 357-358.

34. Ismailov, Z.I., On the coefficient of normal differential operators of higher order, XV. Ulusal Matematik Sempozyumu, 4-7 September 2002, Mersin, Mersin Üniversitesi, 47-54.

35. Ismailov, Z.I., On the normality of first order differential operators, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 51, 2 (2003) 139-145.

36. Ismailov, Z.I., On the coefficient of normal differential operators of higher order, International conference on the memory of V.Y. Bunyakovsky (1804-1884), 16-21 August 2004, Kiev, Thesis of Reports, 68.

37. Ismailov, Z.I., On the discreteness of the spectrum of normal differential operators for second order, Doklady NAS of BELARUS, 49, 3 (2005) 5-7.

38. Ismailov, Z.I., Compact inverses of first-order normal differential operators, J. Math. Anal. And App., USA, (to appear in 2006, 13).

39. Ismailov, Z.I., On the coefficient of normal differential operators of higher order, Transactions of the Azerbaijan National Academy of Sciences, series of physical-technical and mathematical sciences, 25, 4 (2005) 55-62.

40. Maksudov, F.G., Ismailov, Z.I., Normal extensions of second-order differential-operator, Differential Equation, Norwell, USA, 30, 10 (1994) 1687-1689.

41. Maksudov, F.G., Ismailov, Z.I., Normal boundary problems for higher-order, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 20, 2 (1996) 141-151

42. Maksudov, F.G., Ismailov, Z.I., Boundary problems for the first-order differential-equations, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 54, 2 (1996) 659-661.

43. Maksudov, F.G., Ismailov, Z.I., Normal boundary value problems for the first-order differential equations, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 54, 2 (1996) 659-661.

44. Maksudov, F.G., Ismailov, Z.I., One necessary condition for normality of differential operators , Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 59, 3 (1999) 422– 424.

45. Ismailov, Z.I., Karatash, H., On the normality problem for the first order differential operators, Proc. Inst. Math and Mech. AS of Azer., X (1999) 61-66.

46. Ismailov, Z.I., Karatash, H., On the theory of normal extensions of differential operators of the first order, Proc. Inst. Math and Mech. AS of Azer., XI (1999) 86-88.

47. Ismailov, Z.I., On the normal solvability and the index of differential operators, Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 62, 3 (2000) 357-358.

48. Karatash, H., Ismailov, Z.I., On a class of first order normal differential operators, Transactions of Academy of Sciences of Azerbaican, series of physical-technical and mathematical sciences, XX, 4 (2000) 115-122.

49. Gohberg, I.C., Krein, M.G., Introduction to the theory of linear non-self adjoint operators, Amer. Math. Soc., Providence R.I, 1969.

50. Halmos, P.R., A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrad, Princeton, New Jersey, 1967.

51. Stampfli, J.G., Hiponormal operators and Spectral density, Trans. Amer. Math. Soc., 117 (1965) 469-476.

52. Stampfli, J.G., Hiponormal operators, Pasific J. Math., 12 (1962) 1453-1458.

53. Xia, D., Spectral Theory of Hiponormal Operators, Birkhäuser Verlag, Boston, 1983.

54. Putnam, C.R., Spectra of polar factors of hiponormal operators, Trans. Amer. Math. Soc., 188 (1974) 419-428.

55. Williams, L.R., Quasisimilarity and hiponormal operators, J. Operator Theory, 5 (1981) 127-139.

56. Naimark, M.A., Linear Differential Operators (Part-II), London; Frederick Ungar Publishing Co., Inc., 1968.

57. Berezanskii, Yu. M., Expansions in eigenfunctions of self – adjoint operators, 17. Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1968.

58. Dunford, N., Schwartz, J.T., Linear operators, p.I, Interscience publishers, New York, London, 1958.

59. Ismailov, Z.I., Unluyol, E., Hyponormal differential operators with discrete spectrum, Abstracts of international conference on mathematics and mechanics devoted to the 50-th anniversary from birthday of member of the correspondent of NASA, Professor I.T. Mamedov, Mayıs 2005, Baku, 98.

60. Ismailov, Z.I., Unluyol, E., Discreteness of the spectrum of first-order one class differential operators, Sampling Theory and Applications (SampTa05) International Workshop, 10-15 July 2005, 25, Samsun, Turkey.

61. Ismailov, Z.I., Unluyol, E., Ayrık spektrum ile birinci dereceden diferensiyel operatörler, XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, 5-8 Eylül 2005, İstanbul, İstanbul Kültür Üniversitesi, 94.

ÖZGEÇMİŞ

Erdal ÜNLÜYOL, 26.02.1980 tarihinde Çorum'da doğdu. İlk-orta ve lise öğrenimini Çorum' da tamamladı. 1998-1999 eğitim-öğretim yılında (Çorum) Atatürk Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı Lise Programı)'ni bitirdikten sonra 1999-2000 eğitim-öğretim yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Ordu Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'ne girdi. 2002-2003 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Matematik Bölümü'nü birincilikle bitirdi. 2003-2004 eğitim-öğretim yılı güz döneminde Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda İngilizce yeterlilik sınavını kazanarak yüksek lisans öğrenimine başladı. 19.11.2004 tarihinde OMÜ Ordu Fen Edebiyat Fakültesi'ne "Araştırma Görevlisi" olarak atandı. Evlidir.