KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SMOOTH TOPOLOJİK UZAYLAR

Kerim BEKAR

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" Yüksek Lisans (Matematik) "
Ünvanı Verilmek İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08.01.1999
Tezin Savunma Tarihi : 09.02.1999

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ali BÜLBÜL
Jüri Üyesi : Prof. Dr. M. Sait EROĞLU
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Sultan YAMAK

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Asım KADIOĞLU

Trabzon 1999

ÖNSÖZ

Bu çalışmada smooth topolojik uzaylarda smooth kompaktlık, smooth süreklilik, bağlantılılık derecelendirilmesi ve ayırma aksiyomları gibi bazı temel kavramlarla ilgili değişik zamanlarda ve değişik yerlerde yayımlanmış makaleler incelenerek bir araya getirildi.

Yüksek Lisans Tezi danışanlığımı üstlenerek gerek konu seçimi, gerekse çalışmaların yürütülmesi sırasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Ali BÜLBÜL'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Kerim BEKAR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

"Smooth topolojik uzaylar" adlı bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmamızda kullanılan başlıca temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölüm ise, smooth topolojik uzaylar ile ilgili araştırmalara ayrılmıştır. Çalışmamızda, bazı araştırmacıların değişik gerekçelerle tanımladıkları, smooth kompaktlık tipleri, bağlantılılık ve ayırma aksiyomlarının derecelendirilmesi, kavramları verilmiş ve bunların bazı özellikleri ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. İncelenen çalışmalarda esas itibari ile smooth topolojik uzayların, klasik topolojik uzaylardan bilinen özelliklere paralel özelliklerin sağlandığını göstermek amaçlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Smooth topoloji, Smooth kompaktlık, Bağlantılılık, Smooth komşuluk.

SUMMARY

Smooth Topological Spaces

The study entitled "Smooth Topological Spaces" consists of two chapters.

In the first chapter, fudamental concepts and theorems used in the study are explored.

The second chapter includes some studies related to smooth topological spaces. In this study, the concepts of smooth compactness types, connectedness and the grading of separating axioms which some researchers defined differently from different points of view were given and some of their relatedness with each other were studied. From the studies examined, we tried to prove that there are substantially some parallel expressions between smooth topological spaces and classical topological spaces.

Key Words: Smooth topology, Smooth compactness, Connectedness, Smooth neighbourhood.

SEMBOLLER DİZİNİ

$:=$	: Tanım olarak eşittir
$:\Leftrightarrow$	: Tanım olarak gerek ve yeter koşul
$\Rightarrow$	: Gerek koşul
$\Leftarrow$	: Yeter koşul
Bkz.	: Bakınız
$\forall$	: Her
$\exists$	: Vardır, mevcuttur
IN	: Doğal sayılar kümesi
IR	: Reel sayılar kümesi
I	: [0,1] kapalı aralığı
$\bigvee A$	: A nın supremumu
$\bigwedge A$	: A nın infimumu
$\prod_{j\in J} X_j$	: $\{X_j \mid j\in J\}$ ailesinin kartezyen çarpımı
P_j	: j. projeksiyon (izdüşüm) fonksiyonu
NesIK	: IK nın nesnelerinin sınıfı
$Mor(X,Y), Mor_{IK}(X,Y)$	: X den Y ye IK-morfizmlerin kümesi
$A=B$	: A, B ye eşittir
$A\subset B, A\leq B$	: B, A yı içerir
$A\cap B$	: A kesişim B
$A\cup B$	: A birleşim B
A^c	: A nın bütünleyeni (tümleyeni)
$\bigvee\{A_i : i\in J\}$	: $\{A_i : i\in J\}$ ailesinin birleşimi (supremumu)
$\bigwedge\{A_i : i\in J\}$	: $\{A_i : i\in J\}$ ailesinin kesişimi (infimumu)
ftu	: fuzzy topolojik uzayı
stu	: smooth topolojik uzayı
A^0	: A nın içi
$\overline{A}$	: A nın kapanışı
$f(A)$	: A nın resmi

$f^{-1}(A)$	: A nın ters resmi
A_0	: A nın sonlu bir alt kümesi
J_0	: J nin sonlu bir alt kümesi
$\mathscr{U}_0$	: $\mathscr{U}$ nun sonlu bir alt kümesi
$\mathscr{F}_\tau, \tau^*$	: τ smooth topolojisine ait kapalılığın bir derecelendirilmesi
T_x	: τ topolojisine göre x noktasının bütün komşuluklarının kümesi
k.v.	: keyfi verilsin

1. GENEL BİLGİLER

Tanım 1 [1]: Bir A kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir R bağıntısına bir ***yarı sıralama bağıntısı*** ve bu R bağıntısıyla birlikte A kümesine veya (A,R) ikilisine bir ***yarı sıralı küme*** denir:

a) $\forall a \in A$ için aRa (Yansıma).

b) $\forall a,b \in A$ için aRb ve bRa ise a=b (Ters simetri).

c) $\forall a,b,c \in A$ için aRb ve bRc ise aRc (Geçişme).

Örnek 1 [1]: A boştan farklı bir küme olsun. Bu taktirde $\mathcal{P}(A)$ kümesi üzerinde her $C,D \in \mathcal{P}(A)$ için

$$C \leq D :\Leftrightarrow C \subset D$$

şeklinde tanımlanan "≤" bağıntısı bir yarı sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2 [1]: $(A,\leq)$ bir yarı sıralı küme ve $S \subset A$ olsun.

a) $a \in A$ ya S nin bir ***üst sınırı*** denir $:\Leftrightarrow \forall s \in S$ için $s \leq a$.

b) $b \in A$ ya S nin bir ***alt sınırı*** denir $:\Leftrightarrow \forall s \in S$ için $s \leq b$.

Tanım 3 [1]: $(A,\leq)$ bir yarı sıralı küme ve $m,n,k,t \in A$ olsun.

a) m ye A nın bir ***maksimal elemanı*** denir $:\Leftrightarrow \forall x \in A$ için $m \leq x$ ise $x=m$.

b) n ye A nın ***minimal elemanı*** denir $:\Leftrightarrow \forall x \in A$ için $x \leq n$ ise $x=n$.

c) k ya A nın bir ***en büyük elemanı*** denir $:\Leftrightarrow \forall x \in A$ için $x \leq k$.

d) t ye A nın bir ***en küçük elemanı*** denir $:\Leftrightarrow \forall x \in A$ için $t \leq x$.

Tanım 4 [1]: $(A,\leq)$ bir yarı sıralı küme ve $S \subset A$ olsun.

a) Eğer $a \in A$ aşağıdaki koşulları sağlarsa a ya S nin ***supremumu*** denir ve SupS veya $\bigvee S$ ile gösterilir.

i) a, S nin bir üst sınırıdır.

ii) Her $s \in S$ için $s \leq k$ ise $a \leq k$ dır.

b) Eğer $b \in A$ aşağıdaki koşulları sağlarsa b ye S nin ***infimumu*** denir ve İnfS veya $\bigwedge S$ ile gösterilir.

i) b, S nin bir alt sınırıdır.

ii) Her $s \in S$ için $k \leq s$ ise $k \leq b$ dir.

Tanım 1 c) den dolayı eğer B nin bir supremumu veya infimumu varsa tektir. Diğer yandan S:={s,t} iki elemanlı bir küme ise $\bigvee\{s,t\}$, (bzş. $\bigwedge\{s,t\}$ kısaca $s \vee t$ (bzş. $s \wedge t$) şeklinde yazılır.

$S = \emptyset$ olsun. Eğer $\bigvee\emptyset$ ve $\bigwedge\emptyset$ mevcutsa bu ifadeler sırasıyla 0 ve 1 ile gösterilir. Bu taktirde 0 sayısının A nın en küçük elemanı, 1 sayısının A nın en büyük elemanı ve $0 \neq 1$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 5 [1]: $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ iki yarı sıralı küme ve $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun.

a) f fonksiyonuna ***bire-bir*** denir $:\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A$ için $f(a_1) = f(a_2)$ ise $a_1 = a_2$.

b) f fonksiyonuna ***örten*** denir $:\Leftrightarrow \forall b \in B$ için $\exists a \in A$ öyleki $f(a) = b$.

Tanım 6 [1]: J bir indis kümesi olsun. Boştan farklı kümelerin bir ailesi $\{X_j \mid j \in J\}$ ise bu ailenin kartezyen çarpımı

$$\prod_{j \in J} X_j = \left\{ x : J \to \bigcup_{j \in J} X_j \mid x(j) \in X_j, j \in J \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $x \in \prod_{j \in J} X_j$ elemanı $x(j) := x_j \in X_j$ olmak üzere $x := (x_j)_{j \in J}$ şeklinde gösterilir.

Burada $x_j \in X_j$ elemanına x noktasının ***j. koordinatı (veya j. bileşeni)*** ve X_j kümesine de $\prod_{j \in J} X_j$ çarpım kümesinin ***j. çarpanı*** adı verilir.

$P_j : \prod_{j \in J} X_j \to X_j, p_j(x) := x_j$ ile tanımlanan fonksiyona ***j. projeksiyon*** (veya ***izdüşüm) fonksiyonu*** denir.

Tanım 7 [1]: Bir $\mathbb{K}$ ***kategorisi*** aşağıdaki üç veri ile belirlenir:

K1) Bir $Nes(\mathbb{K})$ sınıfı ki bu sınıfın elemanlarına $\mathbb{K}$ nın ***nesneleri*** denir.

K2) $\mathbb{K}$ nın nesnelerinin her (X,Y) ikilisi için bir M(X,Y) kümesi ki bu kümenin elemanlarına X den Y ye ***morfizmler*** veya ***$\mathbb{K}$-morfizmler*** denir ve her $X, Y, Z, W \in Nes(\mathbb{K})$ için

$$(X,Y) \neq (Z,W) \text{ ise } M(X,Y) \cap M(Z,W) = \emptyset$$

sağlanır. Bazen M(X,Y) kümesi Mor(X,Y) veya $Mor_{\mathbb{K}}(X,Y)$ şeklinde de gösterilir.

K3) $\mathbb{K}$ nın nesnelerinin her X,Y,Z üçlüsü için $O_{X,Y,Z}$ dönüşümü ki ***bileşke*** adı verilen bu dönüşüm

$$O_{X,Y,Z} : M(X,Y) \times M(Y,Z) \to M(X,Z), O_{X,Y,Z}(f,g) = g \circ f$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Bileşke ***asosyatiftir*** yani her $f \in Mor(X,Y)$, $g \in Mor(Y,Z)$, $h \in Mor(Z,W)$ için

$$O_{X,Z,W}(O_{X,Y,Z}(f,g),h) = O_{X,Y,W}(f,O_{Y,Z,W}(g,h))$$

veya

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

ii) IK nın her X nesnesi için X in idantik morfizmi adı verilen bir $1_X \in M(X,X)$ elemanı vardır, öyleki her $f \in Mor(X,Y)$, $g \in Mor(Y,Z)$ için

$$1_Y \circ f = f \text{ ve } g \circ 1_Y = g$$

sağlanır.

Örnek 2:

a) Topolojik uzayların kategorisi TOP ile gösterilirse

i) Nes(TOP):=$\{(X,T) \mid (X,T)$ topolojik uzay$\}$.

ii) Mor($(X,T),(Y,T^*)$):= $\{f \mid f:(X,T) \to (Y,T^*)$ sürekli dönüşüm$\}$.

iii) Bileşke dönüşümü sürekli dönüşümlerin bileşkesi olarak tanımlanır.

b) Fuzzy topolojik uzaylarının kategorisi FT ile gösterilirse

i) Nes(FT):=$\{(X,T) \mid (X,T)$ fuzzy topolojik uzay$\}$.

ii) Mor($(X,T),(Y,T^*)$):= $\{f \mid f:(X,T) \to (Y,T^*)$ fuzzy sürekli dönüşüm$\}$.

iii) Bileşke dönüşümü fuzzy sürekli dönüşümlerin bileşkesi olarak tanımlanır.

c) Smooth topolojik uzayların kategorisi ST ile gösterilirse

i) Nes(ST):=$\{(X,\tau) \mid (X,\tau)$ smooth topolojik uzay$\}$.

ii) Mor($(X,\tau),(Y,\tau^*)$):= $\{f \mid f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ smooth sürekli dönüşüm$\}$.

iii) Bileşke dönüşümü smooth sürekli dönüşümlerin bileşkesi olarak tanımlanır.

Tanım 8 [1]: Eğer IL ve IK kategorileri için aşağıdaki özellikler sağlanırsa IL ye IK nın bir ***alt kategorisi*** denir:

i) Nes(IL)$\subset$Nes(IK).

ii) $\forall X,Y \in$Nes(IL) için $Mor_{IL}(X,Y) \subset Mor_{IK}(X,Y)$.

iii) $\forall X,Y,Z \in$Nes(IL) ve $\forall f \in Mor_{IL}(X,Y)$, $g \in Mor_{IL}(Y,Z)$ için

$$g \circ f \in Mor_{IL}(X,Z) \Rightarrow g \circ f \in Mor_{IK}(X,Z).$$

iv) $\forall X \in$Nes(IL) için

$$1_X \in Mor_{IL}(X,X) \Rightarrow 1_X \in Mor_{IK}(X,X).$$

Eğer yukarıda verilen ii) koşulu için eşitlik sağlanırsa IL ye IK nın bir ***bütünüyle alt kategorisi (full subcategory)*** denir.

Tanım 9 [1]: Bir IK kategorisinden bir IL kategorisine bir F ***kovaryant (bzş. kontravaryant) funktoru*** aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşümdür:

a) $\forall X \in \mathrm{Nes}(IK)$ için $F(X) \in \mathrm{Nes}(IL)$.

b) $\forall f \in \mathrm{Mor}_{IK}(X,Y)$ için

$$F(f) \in \mathrm{Mor}_{IL}(F(X),F(Y)) \quad (\text{bzş. } F(f) \in \mathrm{Mor}_{IL}(F(Y),F(X))).$$

c) $\forall f \in \mathrm{Mor}_{IK}(X,Y), g \in \mathrm{Mor}_{IK}(Y,Z)$ için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (\text{bzş. } F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)).$$

d) $\forall X \in \mathrm{Nes}(IK)$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Tanım 10 [1]: "Yarı-sürekli fonksiyonlar"

(X,T) bir topolojik uzay, $f: X \to IR$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

a) f fonksiyonuna x_0 noktasında ***üstten yarı-sürekli*** denir $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ öyle ki $\forall x \in U$ için $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

b) f fonksiyonuna x_0 noktasında ***alttan yarı-sürekli*** denir $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ öyle ki $\forall x \in U$ için $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

X nokta kümesi olsun. Genel olarak X de bir fuzy kümesi, her $x \in X$ noktasının üyelik derecesi $\mu_M(x) \in I$ ile gösterilen bir üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Buna göre X de bir M fuzzy kümesi, X den I ya tanımlı bir μ_M fonksiyonu olarak kabul edilebilir. Yazım kolaylığı için μ_M fonksiyonunu M ile göstereceğiz.

Tanım 11 [1]: M ve N bir X kümesinde iki fuzzy kümesi öyle ki x in M ve N fuzzy kümesine üyelik derecesi sırasıyla M(x) ve N(x) olsun.

a) $M=N :\Leftrightarrow M(x) = N(x),\ \forall x \in X$.

b) $M \leq N :\Leftrightarrow M(x) \leq N(x),\ \forall x \in X$.

c) $A = M \vee N :\Leftrightarrow A(x) = \text{maks}\{M(x),N(x)\},\ \forall x \in X$.

d) $B = M \wedge N :\Leftrightarrow B(x) = \min\{M(x),N(x)\},\ \forall x \in X$.

e) $C = M^c :\Leftrightarrow C(x) = 1 - M(x),\ \forall x \in X$.

Daha genel olarak; fuzzy kümelerinin bir $\{M_i : i \in J\}$ ailesi için birleşim ve kesişim sırasıyla $A := \bigvee\{M_i : i \in J\}$ ve $B := \bigwedge\{M_i : i \in J\}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonları sırasıyla her $x \in X$ için

$$A(x) := \bigvee\{M_i(x) : i \in J\} \quad \text{ve} \quad B(x) := \bigwedge\{M_i(x) : i \in J\}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer yandan X (veya 1_X) ve $\varnothing$ (veya 0_X) ile gösterilen fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları ise sırasıyla her $x \in X$ için

$$1_X(x) := 1 \quad \text{ve} \quad 0_X(x) := 0$$

dir.

Teorem 1 [1]: X üzerindeki fuzzy kümelerinin bir ailesi $\{M_i : i \in J\}$ olmak üzere

a) $(\bigvee\{M_i : i \in J\})^c = \bigwedge\{M_i^c : i \in J\}$,

b) $(\bigwedge\{M_i : i \in J\})^c = \bigvee\{M_i^c : i \in J\}$

dır ve bunlara "De Morgan" kuralları denir.

Tanım 12 [1]: X bir küme olsun. Bir $T \subset I^X$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa bu T ailesine X üzerinde bir ***fuzzy topoloji*** denir:

1) $0_X, 1_X \in T$.

2) $M, N \in T$ ise $M \wedge N \in T$.

3) Her $i \in J$ için $M_i \in T$ ise $\bigvee\{M_i : i \in J\} \in T$.

(X,T) ikilisine bir ***fuzzy topolojik uzayı*** denir ve kısaca ftu şeklinde yazılır. T nin elemanlarına ***T-açık fuzzy kümesi*** veya kısaca ***açık fuzzy kümesi*** ve bir T-açık fuzzy kümesinin bütünleyenine ***T-kapalı fuzzy kümesi*** veya kısaca ***kapalı fuzzy kümesi*** adı verilir.

Tanım 13 [1]: X, Y iki küme, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $N \in I^Y$ olsun. N nin ***ters resmi*** $f^{-1}(N)$ ile gösterilir ve her $x \in X$ için

$$f^{-1}(N)(x) = N(f(x))$$

ile tanımlanır.

Diğer yandan $M \in I^X$ fuzzy kümesinin ***resmi*** $f(M)$ ile gösterilir ve $y \in Y$ için

$$f(M)(y) := \begin{cases} \operatorname{Sup}\{M(z) : z \in f^{-1}(y)\} & , f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & , f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $f^{-1}(y) := \{x \in X : f(x) = y\}$ dir. Bu tanımda $f^{-1}(y) = \varnothing$ ise $\operatorname{Sup}\varnothing = 0$ olduğundan

$$f(M)(y) = \operatorname{Sup}\{M(z) : z \in f^{-1}(y)\}$$

şeklinde de ifade edilir.

Teorem 2 [1]: X,Y,Z kümeler ve $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ iki fonksiyon olsun.

a) Y deki her N fuzzy kümesi için $f^{-1}(N^c) = (f^{-1}(N))^c$

b) Eğer f örten ise X deki her M fuzzy kümesi için $(f(M))^c \leq (f(M^c))$ dir.

c) N_1, N_2 Y de iki fuzzy kümesi ve $N_1 \leq N_2$ ise $f^{-1}(N_1) \leq f^{-1}(N_2)$ dır.

d) M_1, M_2 X de iki fuzzy kümesi ve $M_1 \leq M_2$ ise $f(M_1) \leq f(M_2)$ dir.

e) Y de her N fuzzy kümesi için $f(f^{-1}(N)) \leq N$ dır.

Özel olarak f örten ise Y deki her N fuzzy kümesi için $f(f^{-1}(N)) = N$ dır.

f) X deki her M fuzzy kümesi için $M \leq f^{-1}(f(M))$ dir.

g) f ve g nin bileşkesi $g \circ f$ olmak üzere Z deki her N fuzzy kümesi için

$$(g \circ f)^{-1}(N) = f^{-1}(g^{-1}(N))$$

Teorem 3 [1]: X, Y kümeler ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) $\{M_i : i \in J\}$, X deki fuzzy kümelerin bir ailesi ise

$$f(\bigvee\{M_i : i \in J\}) = \bigvee\{f(M_i) : i \in J\} \text{ ve } f(\bigwedge\{M_i : i \in J\}) \leq \bigwedge\{f(M_i) : i \in J\}$$

dır.

b) $\{N_i : i \in J\}$ Y deki fuzzy kümelerinin bir ailesi ise

$$f^{1}(\bigvee\{N_i : i \in J\}) = \bigvee\{f^{1}(N_i) : i \in J\} \text{ ve } f^{1}(\{\bigwedge\{N_i : i \in J\}) \leq \bigwedge\{f^{1}(N_i) : i \in J\}$$

dır.

Tanım 14 [1]: $(X,T_1), (Y,T_2)$ iki ftu ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her T_2-açık fuzzy kümesinin ters resmi T_1-açık ise f fonksiyonuna fuzzy sürekli denir.

Tanım 15 [1]: (X,T) ftu, M X de bir fuzzy kümesi ve $\mathcal{A}$, fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun.

a) Eğer $M \leq \bigvee\{N : N \in \mathcal{A}\}$ ise $\mathcal{A}$ ailesine M fuzzy kümesinin bir ***örtümü*** denir. Bu durumda $\mathcal{A}$ nın her bir elemanı açık ise $\mathcal{A}$ ailesine M nin bir ***açık örtümü*** denir.

b) Eğer $\mathcal{A}$ nın bir alt ailesi N nin bir örtümü ise bu alt aileye $\mathcal{A}$ nın bir alt örtümü denir.

Tanım 16 [1]: (X,T) ftu olsun. Eğer X in her açık örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa (X,T) fuzzy topolojik uzayına ***fuzzy kompakt*** denir.

Tanım 17 [1]: (X,T) ftu ve $\mathcal{B} \subset T$ olsun.

$\mathcal{B}$ ye T için bir taban denir $:\Leftrightarrow \forall M \in T$ için $\exists\{M_i : i \in J\} \subset \mathcal{B}$ öyle ki $M = \bigvee\{M_i : i \in J\}$.

Tanım 18 [1]: (X,T) ftu ve $\mathcal{S} \subset T$ olsun. Eğer $\mathcal{S}$ nin elemanlarının sonlu infimumundan oluşan aile T için bir taban ise $\mathcal{S}$ ailesine T için bir ***alttaban*** denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Smooth Topolojik Uzaylar

Bu bölümde A.A. Ramadan'ın 1992 yılında yayınlanan çalışması incelenmiştir [2]. Bu çalışmada kısaca smooth topolojik uzay, smooth alt uzay, smooth süreklilik, α-düzeyi fuzzy topoloji, smooth kompaktlık tanımları ve bunlara ilişkin temel özellikleri incelenmiştir.

2.1.1. Tanımlar ve Genel Özellikler

Tanım 19: X bir küme olsun. Eğer bir $\tau : I^X \to I$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu τ dönüşümüne X üzerinde bir ***smooth topoloji*** denir.

(O1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$,

(O2) $\forall M,N \in I^X$, $\tau(M \wedge N) \geq \tau(M) \wedge \tau(N)$,

(O3) $\forall J$, $\tau(\bigvee\{M_i : i \in J\}) \geq \bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\}$.

Bu durumda (X,τ) ikilisine de bir ***smooth topolojik uzay*** (stu) adı verilir.

Tanım 20: X bir küme olsun. Eğer bir $\mathcal{F} : I^X \to I$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu $\mathcal{F}$ dönüşümüne X üzerinde ***kapalılığın bir derecelendirilmesi*** denir.

(C1) $\mathcal{F}(0_X) = \mathcal{F}(1_X) = 1$,

(C2) $\forall M,N \in I^X$, $\mathcal{F}(M \vee N) \geq \mathcal{F}(M) \wedge \mathcal{F}(N)$,

(C3) $\forall J$, $\mathcal{F}(\bigwedge\{M_i : i \in J\} \geq \bigwedge\{\mathcal{F}(M_i) : i \in J\}$.

Teorem 4: τ, X kümesi üzerinde bir smooth topoloji ise

$$\mathcal{F}_\tau : I^X \to I \qquad \mathcal{F}_\tau(M) := \tau(M^c)$$

ile tanımlanan $\mathcal{F}_\tau$, X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesidir.

İspat:

(C1) $\mathcal{F}_\tau(0_X) = \tau(0_X^c) = \tau(1_X) = 1$.

$\mathcal{F}_\tau(1_X) = \tau(1_X^c) = \tau(0_X) = 1$.

(C2)
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\tau(M \vee N) &- \tau((M \vee N)^c)\\ &= \tau(M^c \wedge N^c)\\ &\geq \tau(M^c) \wedge \tau(N^c) = \mathcal{F}_\tau(M) \wedge \mathcal{F}_\tau(N)\end{aligned}$$

(C3) $\mathcal{F}_\tau(\bigwedge\{M_i : i \in J\}) = \tau((\bigwedge\{M_i : i \in J\})^c)$

$$= \tau(\bigvee\{M_i^c : i \in J\})$$
$$\geq \bigwedge\{\tau(M_i^c) : i \in J\}$$
$$= \bigwedge\{\mathcal{F}_\tau(M_i) : i \in J\}.$$

Dolayısıyla $\mathcal{F}_\tau$, X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesidir. ■

Teorem 5: $\mathcal{F}$, X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi ve

$$\tau_{\mathcal{F}} : I^X \to I \ , \ \tau_{\mathcal{F}}(M) := \mathcal{F}(M^c)$$

ise $\tau_{\mathcal{F}}$, X üzerinde smooth topolojidir.

İspat: Bir önceki önermeye benzer şekilde yapılır. ■

Sonuç 1: τ ve $\mathcal{F}$, X üzerinde sırasıyla smooth topoloji ve kapalılığın bir derecelendirilmesi ise $\tau_{\mathcal{F}_\tau} = \tau$ ve $\mathcal{F}_{\tau_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$ dır.

İspat: $M \in I^X$ k.v. $\tau_{\mathcal{F}_\tau}(M) = \mathcal{F}_\tau(M^c) = \tau(M)$ ve $\mathcal{F}_{\tau_{\mathcal{F}}}(M) = \tau_{\mathcal{F}}(M^c) = \mathcal{F}(M)$. ■

Tanım 21: τ_1 ve τ_2, X üzerinde iki smooth topoloji olsun. Eğer her $M \in I^X$ için $\tau_1(M) \geq \tau_2(M)$ ise τ_1, τ_2 den güçlü veya τ_2, τ_1 den zayıf denir ve $\tau_1 \geq \tau_2$ ile gösterilir.

Teorem 6: $\{\tau_i : i \in \Delta\}$, X üzerinde smooth topolojilerin bir ailesi ise

$$\tau := \bigwedge\{\tau_k : k \in \Delta\}, \quad \tau(M) := \bigwedge\{\tau_k(M) : k \in \Delta\}$$

ile tanımlanan τ dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir.

İspat:

(O1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$,

(O2) $\tau(M \wedge N) = \bigwedge\{\tau_k(M \wedge N) : k \in \Delta\}$

$$\geq \bigwedge\{(\tau_k(M) \wedge \tau_k(N)) : k \in \Delta\}$$
$$= \bigwedge\{\tau_k(M) : k \in \Delta\} \wedge \bigwedge\{\tau_k(N) : k \in \Delta\}$$
$$= \tau(M) \wedge \tau(N),$$

(O3) $\tau(\bigvee\{M_i : i \in J\}) = \bigwedge\{\tau_k(\bigvee\{M_i : i \in J\}) : k \in \Delta\}$

$$\geq \bigwedge\{\bigwedge\{\tau_k(M_i) : i \in J\} : k \in \Delta\}$$
$$= \bigwedge\{\bigwedge\{\tau_k(M_i) : k \in \Delta\} : i \in J\}$$
$$= \bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\}.$$

Dolayısıyla τ, X üzerinde smooth topolojidir. ■

Gösterim 1: X küme, $A \subset X$ ve $M \in I^X$ olsun. M nin A üzerinde kısıtlanışı $M|A$ ile gösterilir.

Teorem 7: (X,τ) bir smooth topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A : I^A \to I,\ \ \tau_A(M) := \bigvee\{\tau(N) : N \in I^X,\ N|A = M\}$$

ise τ_A, A üzerinde bir smooth topolojidir.

İspat:

(O1) $\tau_A(0_A) = \tau_A(1_A) = 1$,

(O2) $M_1, M_2 \in I^A$ k.v.

$$\begin{aligned}
\tau_A(M_1) \wedge \tau_A(M_2) &= \bigvee\{\tau(N_1) : N_1 \in I^X, N_1|A = M_1\} \wedge \bigvee\{\tau(N_2) : N_2 \in I^X, N_2|A = M_2\} \\
&= \bigvee\{\tau(N_1) \wedge \tau(N_2) : N_1, N_2 \in I^X, (N_1 \wedge N_2)|A = M_1 \wedge M_2\} \\
&\leq \bigvee\{\tau(N_1 \wedge N_2) : N_1, N_2 \in I^X, (N_1 \wedge N_2)|A = M_1 \wedge M_2\} \\
&= \tau_A(M_1 \wedge M_2),
\end{aligned}$$

(O3) $\{M_i : i \in J\} \subset I^A$ k.v. $\forall i \in J$ için $\tau_A(M_i) = \vee\{\tau(N_i) : N_i \in I^X, N_i|A = M_i\}$ dır.

$$\begin{aligned}
\bigwedge\{\tau_A(M_i) : i \in J\} &= \bigwedge\{\bigvee\{\tau(N_i) : N_i \in I^X, N_i|A = M_i\} : i \in J\} \\
&= \bigvee\{\bigwedge\{\tau(N_i) : i \in J\} : N_i \in I^X, \bigvee\{N_i : i \in J\}|A = \bigvee\{M_i : i \in J\}\} \\
&\leq \bigvee\{\tau(\bigvee\{N_i : i \in J\}) : N_i \in I^X, \bigvee\{N_i : i \in J\}|A = \bigvee\{M_i : i \in J\}\} \\
&= \tau_A(\bigvee\{M_i : i \in J\}).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla τ_A, A üzerinde bir smooth topolojidir. ■

Tanım 22: (X,τ) bir stu ve $A \subset X$ olsun. (A,τ_A) smooth topolojik uzayına (X,τ) smooth topolojik uzayının bir alt uzayı ve τ_A ya τ nun A üzerinde ürettiği bir smooth topoloji denir.

Teorem 8: (A,τ_A), (X,τ) smooth topolojik uzayının bir altuzayı ve $M \in I^X$ ise

a) $\mathscr{F}_{\tau_A}(M) = \bigvee\{\mathscr{F}_\tau(N) : N \in I^X, N|A = M\}$.

b) $B \subset A \subset X$ ise $\tau_B = (\tau_A)_B$.

İspat:

a)
$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\tau_A}(M) &= \tau_A(M^c) \\
&= \bigvee\{\tau(N) : N \in I^X, N|A = M^c\} \\
&= \bigvee\{\tau(N) : N^c \in I^X, N^c|A = M\} \\
&= \bigvee\{\mathscr{F}_\tau(N^c) : N^c \in I^X, N^c|A = M\} \\
&= \bigvee\{\mathscr{F}_\tau(E) : E \in I^X, E|A = M\}.
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
(\tau_A)_B(E) &= \bigvee\{\tau_A(N) : N \in I^A, N|B = E\} \\
&= \bigvee\{\bigvee\{\tau(N_1) : N_1 \in I^X, N_1|A = N\} : N \in I^A, N|B = E\} \\
&= \bigvee\{\tau(N_1) : N_1 \in I^X, N_1|B = E\} = \tau_B(E).\ ■
\end{aligned}$$

2.1.2. α-düzeyinde Fuzzy Topolojisi

Tanım 23: (X,τ) smooth topolojik uzay ve $\alpha \in (0,1]$ ise

$$\tau_\alpha := \{M \in I^X : \tau(M) \geq \alpha\}$$

ile tanımlanan kümeye τ nun α-düzeyi (α-kesimi) denir.

Teorem 9: (X,τ) smooth topolojik uzay olsun. Her $\alpha \in (0,1]$ için τ_α, X üzerinde bir fuzzy topolojidir. Ayrıca $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için $\tau_{\alpha_1} \supset \tau_{\alpha_2}$ dır.

İspat:

1) $1_X, 0_X \in \tau_\alpha$ olduğu açık.

2) $M,N \in \tau_\alpha$ k.v. $\tau(M) \geq \alpha$, $\tau(N) \geq \alpha$ ve buradan $\tau(M \wedge N) \geq \tau(M) \wedge \tau(N) \geq \alpha$ dır. Dolayısıyla $M \wedge N \in \tau_\alpha$ dır.

3) $\{M_i : i \in J\} \subset \tau_\alpha$ k.v. Her $i \in J$ için $\tau(M_i) \geq \alpha$ olduğundan $\tau(\bigvee\{M_i : i \in J\}) \geq \bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\} \geq \alpha$ dır. Buradan $\bigvee\{M_i : i \in J\} \in \tau_\alpha$ dır. Dolayısıyla τ_α, X üzerinde bir fuzzy topolojidir. Diğer kısım açıktır.■

Teorem 10: $\{T_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$, X üzerinde $\alpha_1 \geq \alpha_2$ için $T_{\alpha_1} \subset T_{\alpha_2}$ koşulunu sağlayan fuzzy topolojilerinin bir ailesi ise

$$\tau : I^X \to I, \tau(M) = \bigvee\{\alpha \in (0,1] : M \in T_\alpha\}$$

ile tanımlanan τ, X üzerinde bir smooth topolojidir.

İspat:

(O1) $\tau(1_X) = \tau(0_X) = 1$.

(O2) $M,N \in I^X$ k.v. $\{\alpha : M \wedge N \in T_\alpha\} \supset \{\alpha : M \in T_\alpha$ ve $N \in T_\alpha\}$ olduğundan $\tau(M \wedge N) \geq \tau(M) \wedge \tau(N)$ dir.

(O3) $\{M_i : i \in J\} \subset I^X$ k.v. $\{\alpha : \bigvee\{M_i : i \in J\} \in T_\alpha\} \supset \{\alpha : \forall i \in J, M_i \in T_\alpha\}$ olduğundan $\tau(\bigvee\{M_i : i \in J\}) \geq \bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\}$ dır.

Dolayısıyla τ, X üzerinde bir smooth topolojidir. Bu τ smooth topolojisine $\{T_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ ailesi tarafından üretilen smooth topoloji denir.■

Teorem 11: τ, X üzerinde smooth topoloji ve her $\alpha \in (0,1]$ için τ_α, τ nun α-düzeyi olsun. τ_1, $\{\tau_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ fuzzy topoloji ailesi tarafından üretilen smooth topoloji, yani

$$\tau_1 : I^X \to I, \tau_1(M) := \bigvee\{\alpha : M \in \tau_\alpha\}$$

ise $\tau_1 = \tau$ dur.

İspat: $M \in I^X$ k.v. $\tau_1(M) = \bigvee\{\alpha : M \in \tau_\alpha\} = \bigvee\{\alpha : \tau(M) \geq \alpha\} = \tau(M)$. ■

Uyarı 1: Benzer şekilde, $\mathcal{F} : I^X \to I$ kapalılığın bir derecelendirilmesi içinde yapılabilir:

$$\mathcal{F}_\alpha := \{M \in I^X : \mathcal{F}(M) \geq \alpha\} \text{ ve } \mathcal{F}_1(M) := \bigvee\{\alpha : M \in \mathcal{F}_\alpha\}, \mathcal{F}_1 : I^X \to I$$

şeklinde tanımlanırsa, $\mathcal{F}_1(M) := \bigvee\{\alpha : M \in \mathcal{F}_\alpha\} = \bigvee\{\alpha : \mathcal{F}(M) \geq \alpha\} = \mathcal{F}(M)$ dır.

Tanım 24: T, X üzerinde bir fuzzy topoloji ve τ, X üzerinde bir smooth topoloji olsun. Eğer,

$$T = \{M \in I^X : \tau(M) > 0\}$$

ise τ smooth topolojisi T ile ***uyumludur*** denir.

Örnek 3: X bir küme olsun.

$$\tau : I^X \to I, \tau(M) := \begin{cases} 1, & M = 0_X, 1_X \\ 0, & M \in I^X - \{0_X, 1_X\} \end{cases}$$

ile tanımlanan τ, X üzerinde smooth topolojidir ve indiskret fuzzy topoloji ile uyumludur.

Örnek 4: X bir küme ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$\tau : I^X \to I, \tau(M) := \begin{cases} 1, & M = 0_X, 1_X \\ \alpha, & M \in I^X - \{0_X, 1_X\} \end{cases}$$

ile tanımlanan τ, X üzerinde smooth topolojidir ve diskret fuzzy topoloji ile uyumludur.

2.1.3. Smooth Sürekli Dönüşümler

Tanım 25: (X,τ_1), (Y,τ_2) iki stu ve $f : X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer,

$$\forall M \in I^Y \text{ için } \tau_1(f^{-1}(M)) \geq \tau_2(M)$$

sağlanıyorsa f dönüşümüne ***smooth süreklidir*** denir.

Bu kavram fuzzy süreklilik kavramının bir genellemesidir.

Tanım 26: (X,τ_1), (Y,τ_2) iki stu ve $f : X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer,

$$\forall M \in I^Y \text{ için } \tau_2(M) > 0 \Rightarrow \tau_1(f^{-1}(M)) > 0$$

sağlanıyorsa f dönüşümüne zayıf smooth süreklidir denir.

Bu tanıma göre her smooth sürekli dönüşüm zayıf süreklidir.

Teorem 12: (X,τ_1), (Y,τ_2) iki stu ve $f : X \to Y$ dönüşüm olsun.

a) f smooth sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall M \in I^Y$ için $\mathcal{F}_{\tau_1}(f^{-1}(M)) \geq \mathcal{F}_{\tau_2}(M)$.

b) f zayıf smooth sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall M \in I^Y$ için $\mathcal{F}_{\tau_2}(M) > 0 \Rightarrow \mathcal{F}_{\tau_1}(f^{-1}(M)) > 0$.

İspat:

a) "$\Rightarrow$" $M \in I^Y$ k.v. $M^c \in I^Y$ dır. f smooth sürekli olduğundan

$\mathscr{F}_{\tau_1}(f^{-1}(M)) = \tau_1((f^{-1}(M))^c) = \tau_1(f^{-1}(M^c)) \geq \tau_2(M^c) = \mathscr{F}_{\tau_2}(M)$ dir.

"$\Leftarrow$" $M \in I^Y$ k.v. $M^c \in I^Y$ dir. Hipotezden

$\tau_1(f^{-1}(M)) = \mathscr{F}_{\tau_1}((f^{-1}(M))^c) = \mathscr{F}_{\tau_1}(f^{-1}(M^c)) \geq \mathscr{F}_{\tau_2}(M^c) = \tau_2(M)$ dır.

b) "$\Rightarrow$" $M \in I^Y$ keyfi için $\mathscr{F}_{\tau_2}(M) > 0$ olsun. $\tau_2(M^c) > 0$ dır. f zayıf smooth sürekli olduğundan $\tau_1(f^{-1}(M^c) > 0$ dır. Buradan $\tau_1((f^{-1}(M))^c) > 0$ ve dolayısıyla $\mathscr{F}_{\tau_1}(f^{-1}(M)) > 0$ dır.

"$\Leftarrow$" $M \in I^Y$ keyfi için $\tau_2(M) > 0$ olsun. $\mathscr{F}_{\tau_2}(M^c) > 0$ dır. Hipotezden $\mathscr{F}_{\tau_1}(f^{-1}(M^c)) > 0$ dır. Buradan $\mathscr{F}_{\tau_1}((f^{-1}(M))^c) > 0$ ve dolayısıyla $\tau_1(f^{-1}(M)) > 0$ dır.■

Teorem 13: (X,τ_1), (Y,τ_2) ve (Z,τ_3) stu lar olsun. Eğer $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ smooth sürekli iseler $g \circ f: X \to Z$ smooth süreklidir.

İspat: $M \in I^Z$ k.v. $\tau_1((g \circ f)^{-1}(M)) = \tau_1(f^{-1}(g^{-1}(M))) \geq \tau_2(g^{-1}(M)) \geq \tau_3(M)$. Dolayısıyla $g \circ f$ smooth süreklidir.■

Teorem 14: (X,τ) ve (Y,τ') stu, $f: X \to Y$ smooth sürekli dönüşüm ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda $f|A: (A,\tau_A) \to (Y,\tau')$ smooth süreklidir.

İspat: $N \in I^Y$ k.v. $\tau_A((f|A)^{-1}(N)) = \bigvee\{\tau(N_1): N_1 \in I^X, N_1|A = (f|A)^{-1}(N)\}$

$$\geq \tau(f^{-1}(N)) \geq \tau'(N) \qquad (*)$$

(*) $a \in A$ için,

$(f^{-1}(N)|A)(a) = f^{-1}(N)(a) = N(f(a)) = N((f|A)(a)) = ((f|A)^{-1}(N))(a)$. Dolayısıyla $f^{-1}(N)|A = (f|A)^{-1}(N)$ dır.■

Tanım 27: (X,τ_1), (Y,τ_2) stu, $\mathscr{F}_1$ ve $\mathscr{F}_2$ sırası ile X ve Y üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi ve $f: X \to Y$ dönüşüm olsun.

a) f ye smooth açıktır denir $:\Leftrightarrow$ $\forall M \in I^X$ için $\tau_1(M) \leq \tau_2(f(M))$.

b) f ye smooth kapalıdır denir $:\Leftrightarrow$ $\forall M \in I^X$ için $\mathscr{F}_1(M) \leq \mathscr{F}_2(f(M))$.

Tanım 28: (X,τ_1), (Y,τ_2) stu ve $f: X \to Y$ dönüşüm olsun. f ye smooth homeomorfizm denir $:\Leftrightarrow$ f bire-bir, örten, f ve f^{-1} smooth süreklidir.

Teorem 15: (X,τ_1), (Y,τ_2) stu ve $f: X \to Y$ bire-bir, örten dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) f smooth homeomorfizm.

b) f smooth açık ve smooth süreklidir.

c) f smooth kapalı ve smooth süreklidir.

İspat: **a)⇒b)** f nin smooth açık olduğunu gösterelim. $M \in I^X$ k.v. a) dan f^{-1} smooth sürekli olduğundan

$$\tau_2((f^{-1})^{-1}(M)) \geq \tau_1(M)$$

dır. Buradan

$$\tau_2(f(M)) \geq \tau_1(M)$$

dır. Dolayısıyla f smooth açıktır. Ayrıca hipotezden f smooth süreklidir.

b)⇒c) f nin smooth kapalı olduğunu gösterelim. $M \in I^X$ k.v. $M^c \in I^X$ ve f smooth açık olduğundan $\mathscr{F}_{\tau_1}(M) = \tau_1(M^c) \leq \tau_2(f(M^c)) = \tau_2((f(M))^c) = \mathscr{F}_{\tau_2}(f(M))$ dır. Dolayısıyla f smooth kapalıdır.

c)⇒a) f^{-1} in smooth sürekli olduğunu gösterelim. $M \in I^X$ k.v. $M^c \in I^X$ ve f smooth kapalı olduğundan
$\tau_2((f^{-1})^{-1}(M)) = \tau_2(f(M)) = \mathscr{F}_{\tau_2}((f(M))^c) = \mathscr{F}_{\tau_2}(f(M^c)) \geq \mathscr{F}_{\tau_1}(M^c) = \tau_1(M)$ dır. Buradan $\tau_2((f^{-1})^{-1}(M)) \geq \tau_1(M)$ dır. Dolayısıyla f^{-1} smooth süreklidir.■

Teorem 16: X ve Y iki küme, $\{\tau_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ ve $\{\tau'_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ sırasıyla X ve Y üzerinde $\alpha_1 \geq \alpha_2$ için $\tau_{\alpha_1} \subset \tau_{\alpha_2}$ ve $\tau'_{\alpha_1} \subset \tau'_{\alpha_2}$ koşulunu sağlayan iki fuzzy topoloji ailesi, τ ve τ' sırasıyla bu aileler tarafından üretilen smooth topoloji ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

a) Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $f : (X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy sürekli ise $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth süreklidir.

b) Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $f : (X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy açık ise $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth açıktır.

c) Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $f : (X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy kapalı ise $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth kapalıdır.

İspat:

a) $M \in I^Y$ k.v. f fuzzy sürekli olduğundan $\{\alpha : f^{-1}(M) \in \tau_\alpha\} \supset \{\alpha : M \in \tau'_\alpha\}$ dır. Buradan $\tau(f^{-1}(M)) = \vee\{\alpha : f^{-1}(M) \in \tau_\alpha\} \geq \vee\{\alpha : M \in \tau'_\alpha\} = \tau'(M)$ dır. Dolayısıyla f smooth süreklidir.

b) $M \in I^X$ k.v. f fuzzy açık olouğundan $\{\alpha : M \in \tau_\alpha\} \subset \{\alpha : f(M) \in \tau'_\alpha\}$ dır. Buradan $\tau(M) = \vee\{\alpha : M \in \tau_\alpha\} \leq \vee\{\alpha : f(M) \in \tau'_\alpha\} = \tau'(f(M))$ dır. Dolayısıyla f smooth açıktır.

c) $M \in I^X$ k.v. f fuzzy kapalı olduğundan $\{\alpha : M^c \in \tau_\alpha\} \subset \{\alpha : (f(M))^c \in \tau'_\alpha\}$ dır. Buradan $\tau(M^c) = \bigvee\{\alpha : M^c \in \tau_\alpha\} \leq \bigvee\{\alpha : (f(M))^c \in \tau'_\alpha\} = \tau'((f(M))^c)$ dır. Buradan $\mathscr{F}_\tau(M) \leq \mathscr{F}_{\tau'}(f(M))$ dır. Dolayısıyla f smooth kapalıdır.■

2.1.4. Smooth Kompaktlık

Tanım 29: (X,τ) bir stu olsun. Her $\alpha \in (0,1]$ için (X,τ_α) fuzzy kompakt ise (X,τ) ya ***smooth kompakttır*** denir.

Teorem 17: (X,τ), (Y,τ') stu ve $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli ve örten olsun. Eğer (X,τ) smooth kompakt ise (Y,τ') smooth kompakttır.

İspat: $\alpha \in (0,1]$ ve $\{M_i : i \in J\}$ Y nin τ'_α-açık keyfi bir örtümü olsun. f smooth sürekli olduğundan her $\alpha \in (0,1]$ için $f : (X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy süreklidir. Gerçekten,

$$M \in \tau'_\alpha \Rightarrow \tau'(M) \geq \alpha \Rightarrow \tau(f^{-1}(M)) \geq \tau'(M) \geq \alpha \Rightarrow f^{-1}(M) \in \tau_\alpha$$

dır. Ayrıca

$$1_X = f^{-1}(1_Y) = f^{-1}(\bigvee\{M_i : i \in J\}) = \bigvee\{f^{-1}(M_i) : i \in J\}$$

olduğundan ve (X,τ) nun smooth kompaktlığından

$$\exists J_0 \subset J \text{ sonlu öyle ki } 1_X = \bigvee\{f^{-1}(M_i) : i \in J_0\}$$

dır. f örten olduğundan $1_Y = \{M_i : i \in J_0\}$ dır. Dolayısıyla (Y,τ') smooth kompakttır.■

2.2. Smooth Topolojik Uzaylarda Bazı Özellikler

Bu bölümde K.C. Chattopadhyay ve R.N. Hazra'nın 1992 yılında yayınlanan makalesi incelenmiştir [3]. Bu çalışmada kısaca, fuzzy topolojilerinin azalan bir ailesinden bir smooth topolojinin elde edilmesi ve smooth sürekli fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir.

2.2.1. Fuzzy Topolojilerinin Bir Ailesinden Bir Smooth Topolojinin Elde Edilmesi

Teorem 18: (X,τ) bir stu ve $\{\tau_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ τ nun tüm α-düzey fuzzy topolojilerinin ailesi olsun. Bu durumda $\{\tau_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ azalan ailedir ve her bir $\alpha \in [0,1]$ için

$$\tau_\alpha = \cap\{\tau_s : s < \alpha\}$$

dır.

İspat: Birinci kısım için Bkz. Teorem 9. Diğer kısım için $\alpha \in (0,1]$ k.v.

$$\tau_\alpha \subset \cap\{\tau_s : s < \alpha\} \qquad (1)$$

olduğu açıktır. Diğer yandan $M \notin \tau_\alpha$ ise $\tau(M) < \alpha$ dır. Buradan

$$\exists s \in (0,1] \text{ öyleki } \tau(M) < s < \alpha$$

Buradan da $M \notin \tau_s$ ve $M \notin \cap\{\tau_s : s < \alpha\}$ dır. Dolayısıyla

$$\cap\{\tau_s : s < \alpha\} \subset \tau_\alpha \qquad (2)$$

dır. (1) ve (2) den $\tau_\alpha = \cap\{\tau_s : s < \alpha\}$ elde edilir.■

Teorem 19: X bir küme ve $\{T_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$, X üzerinde fuzzy topolojilerin azalan bir ailesi ise

$$\tau : I^X \to I \quad , \quad \tau(M) := \vee\{\alpha \in (0,1] : M \in T_\alpha\}$$

olarak tanımlanan τ dönüşümü bir smooth topolojidir. Bkz. Teorem 10. Ayrıca her $\alpha \in (0,1]$ için,

$$T_\alpha = \cap\{T_s : s < \alpha\} \qquad (*)$$

ise her $\alpha \in (0,1]$ için $\tau_\alpha = T_\alpha$ dır.

İspat: $M \in T_\alpha$ k.v. $\tau(M) \geq \alpha$ dır. Buradan $M \in \tau_\alpha$ dır. Dolayısıyla

$$T_\alpha \subset \tau_\alpha \qquad (1)$$

dır. $M \in \tau_\alpha$ k.v. $\tau(M) \geq \alpha$ ve $\bigvee\{k \in (0,1] : M \in T_k\} =: s \geq \alpha$ dır. Buradan

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists k \in (0,1] \text{ öyleki } s - \varepsilon < k \text{ ve } M \in T_k$$

dır. Buradan $\alpha - \varepsilon \leq s - \varepsilon < k$ ve $M \in T_k$ dır. Buradan $M \in T_{\alpha-\varepsilon}$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ve (*) dan $M \in T_\alpha$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\tau_\alpha \subset T_\alpha \qquad (2)$$

dır. (1) ve (2) den $\tau_\alpha = T_\alpha$ elde edilir.■

Sonuç 2: τ ve τ' X üzerinde iki stu olsun. Bu durumda,

$$\tau = \tau' \Leftrightarrow \tau_\alpha = \tau'_\alpha, \forall \alpha \in (0,1]$$

dır.

İspat: "$\Rightarrow$" Açık.

"$\Leftarrow$" $M \in I^X$ k.v.

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \bigvee\{\alpha \in (0,1] : \tau(M) \geq \alpha\} \\ &= \bigvee\{\alpha \in (0,1] : M \in \tau_\alpha\} \\ &= \bigvee\{\alpha \in (0,1] : M \in \tau'_\alpha\} \\ &= \bigvee\{\alpha \in (0,1] : \tau'(M) \geq \alpha\} \\ &= \tau'(M) \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\tau = \tau'$ elde edilir.■

Teorem 20: (X,T) bir ftu olsun. $\alpha \in (0,1]$ keyfi için, $T^\alpha : I^X \to I$ aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir dönüşüm olsun.

$$\begin{aligned} T^\alpha(0_X) &= T^\alpha(1_X) = 1, \\ T^\alpha(M) &= \alpha, M \in T - \{0_X, 1_X\}, \\ &= 0 \text{ diğer.} \end{aligned}$$

Bu durumda T^α, X üzerinde bir smooth topolojidir ve $(T^\alpha)_\alpha = T$ dır.

İspat: T^α nın X üzerinde smooth topoloji olduğu açıktır. Ayrıca

$$M \in (T^\alpha)_\alpha \Leftrightarrow T^\alpha(M) \geq \alpha > 0 \Leftrightarrow M \in T$$

dır. Dolayısıyla $(T^\alpha)_\alpha = T$ dir.■

Bu şekilde elde edilen T^α ya α-inci derecelendirilme denir ve (X, T^α) ya α-inci derece smooth topolojik uzay denir.

2.2.2. Sürekli Dönüşümler İle İlgili Bazı Özellikler

Teorem 21: (X,τ) ve (Y,τ') iki stu ve $f: X \to Y$ dönüşüm olsun. Bu durumda, f smooth süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in (0,1]$ için $f:(X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy süreklidir.

İspat: "$\Rightarrow$" $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in \tau'_\alpha$ k.v. f smooth sürekli olduğundan $\tau(f^{-1}(M)) \geq \tau'(M) \geq \alpha$ dır. Buradan $f^{-1}(M) \in \tau_\alpha$ dır.

"$\Leftarrow$" $M \in I^Y$ k.v. Eğer $\tau'(M) = 0$ ise $\tau(f^{-1}(M)) \geq \tau'(M)$ dir. Eğer $\tau'(M) = \alpha \in (0,1]$ ise $M \in \tau'_\alpha$ dır. $f:(X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy sürekli olduğundan $f^{-1}(M) \in \tau_\alpha$ dır. Buradan $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha = \tau'(M)$ dır.■

Teorem 22: (X,T) ve (Y,T') iki ftu ve $f: X \to Y$ dönüşüm olsun. Bu durumda, $f:(X,T) \to (Y,T')$ fuzzy süreklidir. $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in (0,1]$ için $f:(X,T^\alpha) \to (Y,(T')^\alpha)$ smooth süreklidir.

İspat: "$\Rightarrow$" $M \in I^Y$ k.v.

i) $M = 0_Y$ veya $M = 1_X$ ise $f^{-1}(0_Y) = 0_X$ ve $f^{-1}(1_Y) = 1_X$ olacağından $T^\alpha(f^{-1}(M)) = 1 \geq (T')^\alpha(M)$ dır.

ii) $M \in T' - \{0_Y, 1_Y\}$ ise $(T')^\alpha(M) = \alpha$ ve $f:(X,T) \to (Y,T')$ fuzzy sürekli olduğundan $f^{-1}(M) \in T$ dir. Buradan $T^\alpha(f^{-1}(M)) \geq \alpha = (T')^\alpha(M)$ dır.

iii) $M \notin T'$ ise $(T')^\alpha(M) = 0 \leq T^\alpha(f^{-1}(M))$ dır.

i), ii) ve iii) den $\forall\alpha \in (0,1]$ için $f:(X,T^\alpha) \to (Y,(T')^\alpha)$ smooth süreklidir.

"$\Leftarrow$" Teorem 21 den $f:(X,(T^\alpha)_\alpha) \to (Y,((T')^\alpha)_\alpha)$ fuzzy sürekli ve Teorem 20 den $f:(X,T) \to (Y,T')$ fuzzy sürekli olduğu görülür.■

Teorem 23: (X,τ) bir stu, Y bir küme ve $f: X \to Y$ dönüşüm olsun. $\{T'_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$, Y üzerinde fuzzy topolojilerin azalan bir ailesi, τ' bu aile tarafından üretilen Y üzerinde bir smooth topoloji ve her $\alpha \in (0,1]$ için $\mathcal{B}_\alpha$ ve $\mathcal{S}_\alpha$ sırasıyla T'_α nın tabanı ve alttabanı olsun. Bu durumda,

a) $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in (0,1]$ ve $\forall M \in T'_\alpha$ için $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$.

b) $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in (0,1]$ ve $\forall M \in \mathcal{B}_\alpha$ için $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$.

c) $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in (0,1]$ ve $\forall M \in \mathcal{S}_\alpha$ için $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$.

İspat: a) "$\Rightarrow$" $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in T'_\alpha$ k.v. τ' nün tanımı gözönüne alınırsa $\tau'(M) \geq \alpha$ ve f smooth sürekli olduğundan $\tau(f^{-1}(M)) \geq \tau'(M) \geq \alpha$, buradan $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$ dır.

"$\Leftarrow$" $M \in I^Y$ k.v. $\tau'(M)=0$ ise $\tau(f^{-1}(M)) \geq \tau'(M)$ dir. Eğer $\tau'(M) =: r > 0$ yani $\tau'(M) = \bigvee\{\alpha \in (0,1] : M \in T'_\alpha\} = r > 0$ ise

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \alpha_0 \in (0,1] \text{ öyleki } M \in T'_{\alpha_0} \text{ ve } \alpha_0 > r - \varepsilon$$

dır. Hipotezden $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha_0 > r - \varepsilon$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\tau(f^{-1}(M)) \geq r = \tau'(M)$ dır. Dolayısıyla f smooth süreklidir.

b) "$\Rightarrow$" $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in \mathscr{B}_\alpha$ k.v. $\mathscr{B}_\alpha$, T'_α için taban olduğundan $\mathscr{B}_\alpha \subset T'_\alpha$ dır. a) dan $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" a) dan dolayı

$$\forall \alpha \in (0,1] \text{ ve } \forall M \in T'_\alpha \text{ için } \tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$$

olduğunu göstermek yeterli. $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in T'_\alpha$ k.v. $\mathscr{B}_\alpha$, T'_α için taban olduğundan

$$\exists\{M_k : k \in \Delta\} \subset \mathscr{B}_\alpha \text{ öyleki } M = \bigvee\{M_k : k \in \Delta\}$$

dır. Hipotezden $\forall k \in \Delta$ için $\tau(f^{-1}(M_k)) \geq \alpha$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\tau(f^{-1}(M)) &= \tau(f^{-1}(\bigvee\{M_k : k \in \Delta\})) \\
&= \tau(\bigvee\{f^{-1}(M_k) : k \in \Delta\}) \\
&= \bigwedge\{f^{-1}(M_k) : k \in \Delta\} \\
&\geq \alpha
\end{aligned}$$

dır. a) dan f smooth süreklidir.

c) "$\Rightarrow$" $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in \mathscr{S}_\alpha$ k.v. $\mathscr{S}_\alpha$, T'_α için alttaban olduğundan $\mathscr{S}_\alpha \subset T'_\alpha$ dır. a) dan $\tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" b) den dolayı

$$\forall \alpha \in (0,1] \text{ ve } \forall M \in \mathscr{B}_\alpha \text{ için } \tau(f^{-1}(M)) \geq \alpha$$

olduğunu göstermek yeterli. $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in \mathscr{B}_\alpha$ k.v. $\mathscr{S}_\alpha$, T'_α için alttaban olduğundan

$$\exists\{S_i : i = 1,\ldots,n,\ n \in IN\} \subset \mathscr{S}_\alpha \text{ öyleki } M = \bigwedge\{S_i : i = 1,\ldots,n\}$$

dır. Hipotezden $\forall i = 1,\ldots,n$ için $\tau(f^{-1}(S_i)) \geq \alpha$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\tau(f^{-1}(M)) &= \tau(f^{-1}(\bigwedge\{S_i : i = 1,\ldots,n\})) \\
&= \tau(\bigwedge\{f^{-1}(S_i) : i = 1,\ldots,n\}) \\
&= \bigwedge\{\tau(f^{-1}(S_i)) : i = 1,\ldots,n\} \\
&\geq \alpha
\end{aligned}$$

dır. b) den f smooth süreklidir.■

Teorem 24: X bir küme, $\{(X_i,\tau_i'): i\in\Delta\}$ smooth topolojik uzayların bir ailesi ve her $i\in\Delta$ için $f_i: X \to X_i$ dönüşüm olsun. Bu durumda X üzerinde aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir τ smooth topolojisi mevcuttur.

a) Her $i\in\Delta$ için $f_i:(X,\tau)\to(X_i,\tau_i')$ smooth süreklidir.

b) (Z,τ'') stu olmak üzere

$g:(Z,\tau'')\to(X,\tau)$ smooth sürekli $\Leftrightarrow$ Her $i\in\Delta$ için $f_i\circ g:(Z,\tau'')\to(X_i,\tau_i')$ smooth süreklidir.

İspat: Her $i\in\Delta$ ve her $\alpha\in(0,1]$ için

$$T_{i,\alpha}:=\{f_i^{-1}(M): M\in(\tau_i')_\alpha\}$$

tanımlansın. Hatırlanacağı gibi $(\tau_i')_\alpha=\{M\in I^{X_i}:\tau_i'(M)\geq\alpha\}$ dır. Her bir $T_{i,\alpha}$, X üzerinde fuzzy topolojidir ve $\{T_{i,\alpha}:\alpha\in(0,1]\}$ X üzerinde fuzzy topolojilerinin azalan bir ailesidir. Her $\alpha\in(0,1]$ için

$$\mathcal{S}_\alpha:=\bigcup\{T_{i,\alpha}: i\in\Delta\}$$

ile tanımlansın ve T_α, X üzerinde $\mathcal{S}_\alpha$ alttabanı ile üretilen fuzzy topoloji olsun. Bu durumda $\{T_\alpha:\alpha\in(0,1]\}$ X üzerinde fuzzy topolojilerinin azalan ailesidir. τ, X üzerinde bu aile tarafından üretilen smooth topoloji olsun (Bkz. Teorem 10). Yani

$$\tau: I^X\to I \quad , \quad \tau(N):=\bigvee\{\alpha\in(0,1]: N\in T_\alpha\}.$$

dır. Bu τ smooth topolojisinin a) ve b) koşullarını gerçeklediğini gösterelim.

a) $i\in\Delta$ ve $M\in I^{X_i}$ k.v. Eğer $\tau_i(M)=0$ ise $\tau(f^{-1}(M))\geq\tau_i'(M)$ dir. Eğer $\tau_i'(M)=:\alpha>0$ ise $M\in(\tau_i')_\alpha$ ve $f_i^{-1}(M)\in T_{i\alpha}\subset\mathcal{S}_\alpha\subset T_\alpha$ dır. Buradan $\tau(f_i^{-1}(M))\geq\alpha=\tau_i'(M)$ dır. Dolayısıyla f_i smooth süreklidir.

b) "$\Rightarrow$" Bkz. Teorem 13.

"$\Leftarrow$" Teorem 23 den her $\alpha\in(0,1]$ ve her $M\in\mathcal{S}_\alpha$ için $\tau''(g^{-1}(M))\geq\alpha$ olduğunu göstermek yeterli. Bunun için $\alpha\in(0,1]$ ve $M\in\mathcal{S}_\alpha$ k.v. $M\in\mathcal{S}_\alpha=\bigcup\{T_{i,\alpha}: i\in\Delta\}$ dır. Buradan

$$\exists i\in\Delta \text{ öyleki } M\in T_{i,\alpha}$$

dır. Buradan

$$\exists N\in(\tau_i')_\alpha \text{ öyleki } M=f_i^{-1}(N)$$

dır. $\{(\tau_i')_\alpha:\alpha\in(0,1]\}$, X_i üzerinde fuzzy topolojilerin bir ailesidir. Teorem 11 den dolayı bu aile tarafından üretilen smooth topoloji τ_j' dir ve $f_i\circ g:(Z,\tau'')\to(X_i,\tau_i')$ smooth sürekli olduğundan $N\in(\tau_i')_\alpha$ için $\tau''(g^{-1}(M))=\tau''(g^{-1}(f_i^{-1}(N))=\tau''((f_i\circ g)^{-1}(N))\geq\alpha$ dır. Buradan $\tau''(g^{-1}(M))\geq\alpha$ elde edilir. Teorem 23 den dolayı g smooth süreklidir.■

2.3. Smooth Topolojik Uzaylarda Bazı Kavramlar

Bu bölümde K.C. Chattopadhyay ve S.K. Samanta'nın 1993 yılında yayınlanan makalesi incelenmiştir [4]. Bu çalışmada Smooth topolojik uzaylarda kapanış operatörü, α-kompakt, güçlü fuzzy kompakt, ultra fuzzy kompakt, fuzzy kompakt ve bağlantılılık kavramları verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

2.3.1. Smooth Kapanış Operatörü

Tanım 30: (X,τ) bir stu olsun. Bu durumda

$$cl : I^X \times (0,1] \to I^X, \quad cl(N,\alpha) := \wedge\{M \in I^X : N \le M, \mathscr{F}_\tau(M) \ge \alpha\}$$

ile tanımlanan dönüşüme (X,τ) stu üzerinde ***smooth kapanış operatörü*** denir.

Teorem 25: X bir küme ve $\mathscr{F}$, X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesi olsun. Bu durumda

$$cl : I^X \times (0,1] \to I^X, \quad cl(N,\alpha) := \wedge\{M \in I^X : N \le M, \mathscr{F}(M) \ge \alpha\}$$

olarak tanımlanan cl dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $cl(0_X,\alpha) = 0_X$, $cl(1_X,\alpha) = 1_X$, $\forall \alpha \in (0,1]$

b) $N \le cl(N,\alpha)$, $\forall N \in I^X$, $\forall \alpha \in (0,1]$

c) $\alpha \le \alpha'$ ise $cl(N,\alpha) \le cl(N,\alpha')$

d) $cl(N_1 \vee N_2,\alpha) = cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha)$, $\forall \alpha \in (0,1]$

e) $cl(cl(N,\alpha),\alpha) = cl(N,\alpha)$

f) $r := \vee\{\alpha \in (0,1] : cl(N,\alpha) = N\}$ ise $cl(N,r) = N$.

İspat:

a) Açık olarak $cl(0_X,\alpha) \ge 0_X$ dır. $0_X \le 0_X$ ve $\mathscr{F}(0_X) = 1 \ge \alpha$ olduğundan $cl(0_X,\alpha) \le 0_X$ dır. Buradan $cl(0_X,\alpha) = 0_X$ elde edilir. Benzer şekilde $cl(1_X,\alpha) = 1_X$ elde edilir.

b) Açık.

c) $\alpha \le \alpha'$ için $\{M \in I^X : N \le M , \mathscr{F}(M) \ge \alpha\} \supset \{M \in I^X : N \le M , \mathscr{F}(M) \ge \alpha'\}$ dır. Buradan $cl(N,\alpha) \le cl(N,\alpha')$ elde edilir.

d) Önce $M_1 \leq M_2$ için $cl(M_1,\alpha) \leq cl(M_2,\alpha)$ olduğunu gösterelim. $\{N : M_1 \leq N, \mathcal{T}(N) \geq \alpha\} \supset \{N : M_2 \leq N, \mathcal{T}(N) \geq \alpha\}$ olduğundan

$$cl(M_1,\alpha) \leq cl(M_2,\alpha) \tag{1}$$

dır. Şimdi d) yi gösterelim. $N_1, N_2 \leq N_1 \vee N_2$ olduğundan ve (1) den $cl(N_i,\alpha) \leq cl(N_1 \vee N_2,\alpha)$, i=1,2 dir. Buradan

$$cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha) \leq cl(N_1 \vee N_2,\alpha) \tag{2}$$

dır. b) den $N_1 \leq cl(N_1,\alpha)$ ve $N_2 \leq cl(N_2,\alpha)$ olduğundan $N_1 \vee N_2 \leq cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha)$ dır. Buradan ve (1) den

$$cl(N_1 \vee N_2,\alpha) \leq cl(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha),\alpha) \tag{3}$$

dır. Şimdi $cl(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha),\alpha) = cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha)$ olduğunu gösterelim. (b) den

$$cl(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha),\alpha) \geq cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha) \tag{4}$$

dır. $cl(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha),\alpha) \leq cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha)$ olduğunu göstermek için $\mathcal{T}(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha)) \geq \alpha$ olduğunu göstermek yeter. Bunun için

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha)) &\geq \mathcal{T}(cl(N_1,\alpha)) \wedge \mathcal{T}(cl(N_2,\alpha)) \\
&= \mathcal{T}(\bigwedge\{M \in I^X : N_1 \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\}) \wedge \mathcal{T}(\bigwedge\{M \in I^X : N_2 \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\}) \\
&\geq \bigwedge\{\mathcal{T}(M) : N_1 \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\} \wedge \bigwedge\{\mathcal{T}(M) : N_2 \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\} \\
&\geq \alpha
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$cl(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha),\alpha) \leq cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha) \tag{5}$$

dır. (4) ve (5) den

$$cl(cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha),\alpha) = cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha) \tag{6}$$

elde edilir. (3) ve (6) dan

$$cl(N_1 \vee N_2,\alpha) \leq cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha) \tag{7}$$

dır. (2) ve (7) den $cl(N_1 \vee N_2,\alpha) = cl(N_1,\alpha) \vee cl(N_2,\alpha)$ elde edilir.

e) b) den dolayı

$$cl(cl(N,\alpha),\alpha) \geq cl(N,\alpha) \tag{8}$$

dır. $cl(cl(N,\alpha),\alpha) \leq cl(N,\alpha)$ olduğunu göstermek için $\mathcal{T}(cl(N,\alpha)) \geq \alpha$ olduğunu göstermek yeter. Bunun için

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(cl(N,\alpha)) &= \mathcal{T}(\bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\}) \\
&\geq \bigwedge\{\mathcal{T}(M) : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\} \geq \alpha
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$cl(cl(N,\alpha),\alpha) \leq cl(N,\alpha) \qquad (9)$$

dır. (8) ve (9) dan $cl(cl(N,\alpha),\alpha) = cl(N,\alpha)$ elde edilir.

f) b) den

$$cl(N,r) \geq N \qquad (1)$$

dır. $cl(N,r) = \bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq r\} \leq N$ olduğunu göstermek için $\mathcal{T}(N) \geq r$ olduğunu göstermek yeter. Bunun için $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinde r nin tanımından

$$\exists \alpha \in (0,1] \text{ öyleki } cl(N,\alpha) = N \text{ ve } \alpha > r - \varepsilon$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(N) = \mathcal{T}(cl(N,\alpha)) &= \mathcal{T}(\bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\}) \\ &\geq \bigwedge\{\mathcal{T}(M) : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\}) \\ &\geq \alpha > r - \varepsilon\end{aligned}$$

dır. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\mathcal{T}(N) \geq r$ dır. Buradan da

$$cl(N,r) \leq N \qquad (2)$$

dır. Dolayısıyla (1) ve (2) den $cl(N,r)=N$ elde edilir. ■

Teorem 26: X küme, $cl : I^X \times (0,1] \to I^X$ dönüşümü Teorem 25 in a)-d) koşullarını sağlasın. Bu durumda,

$$\mathcal{T} : I^X \to I \;,\; \mathcal{T}(N) = \bigvee\{\alpha \in (0,1] : cl(N,\alpha) = N\}$$

ile tanımlanan $\mathcal{T}$ dönüşümü X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesidir. Ayrıca

$$cl = cl_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow cl \text{ Teorem 25 in e) ve f) koşullarını da gerçekler.} \qquad (*)$$

(*) Burada $cl_{\mathcal{T}}(N,\alpha) = \bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\}$ dır.

İspat:

(O1) Önerme 25 a) dan $\mathcal{T}(0_X) = \mathcal{T}(1_X) = 1$ dır.

(O2) $N_1, N_2 \in I^X$ k.v. $\mathcal{T}(N_1 \vee N_2) < \mathcal{T}(N_1) \wedge \mathcal{T}(N_2)$ olduğunu varsayalım.

$$\exists r \in (0,1] \text{ öyleki } \mathcal{T}(N_1 \vee N_2) < r < \mathcal{T}(N_1) \wedge \mathcal{T}(N_2)$$

dır. $\mathcal{T}$ nin tanımından

$$\exists s_i \in (0,1] \text{ öyleki } r < s_i \leq \mathcal{T}(N_i) \text{ ve } cl(N_i,s_i) = N_i,\; i = 1,2$$

dır.

$$s := \min\{s_1, s_2\}$$

olarak tanımlanırsa c) ve b) den $cl(N_i,s)=N_i$, $i=1,2$ ve d) den

$cl(N_1 \vee N_2,s) = cl(N_1,s) \vee cl(N_2,s) = N_1 \vee N_2$ dır. Buradan $s \leq \mathcal{T}(N_1 \vee N_2)$ ve dolayısıyla $r < s \leq \mathcal{T}(N_1 \vee N_2) < r$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathcal{T}(N_1 \vee N_2) \geq \mathcal{T}(N_1) \wedge \mathcal{T}(N_2)$ dır.

(O3) $\{N_i : i \in J\} \subset I^X$ k.v. ve

$$N := \wedge\{N_i : i \in J\}$$

ile gösterelim. $\mathcal{T}(N) < \wedge\{\mathcal{T}(N_i) : i \in J\}$ olduğunu varsayalım. Buradan

$$\exists r \in (0,1] \text{ öyleki } \mathcal{T}(N) < r < \wedge\{\mathcal{T}(N_i) : i \in J\}$$

dır. $\mathcal{T}$ nin tanımından

$$\forall i \in J \text{ için } \exists s_i \in (0,1] \text{ öyleki } r < s_i \leq \mathcal{T}(N_i) \text{ ve } cl(N_i, s_i) = N_i$$

dır.

$$s := \wedge\{s_i : i \in J\}$$

olarak tanımlanırsa b) ve c) den her $i \in J$ için $cl(N_i, s) = N_i$ dir. d) den her $i \in J$ için $cl(N,s) \leq cl(N_i, s) = N_i$ dır. Buradan $cl(N,s) \leq \wedge\{N_i : i \in J\} = N$ ve b) den dolayı $cl(N,s)=N$ dır. Buradan $\alpha \leq s \leq \mathcal{T}(N) < \alpha$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde varsayım yanlış ve $\mathcal{T}(N) \geq \wedge\{\mathcal{T}(N_i) : i \in J]$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{T}$, X üzerinde kapalılığın bir derecelendirilmesidir.

İkinci kısım için;

"$\Leftarrow$" cl dönüşümü Teorem 25 in a)-d) koşullarına ek olarak e) ve f) koşullarını sağlasın ve $N \in I^X$ ve $\alpha \in (0,1]$ k.v. Önce her $\varepsilon > 0$ için $cl(cl(N,\alpha), \alpha - \varepsilon) = cl(N,\alpha)$ olduğunu gösterelim. b) den

$$cl(cl(N,\alpha), \alpha - \varepsilon) \geq cl(N,\alpha) \tag{1}$$

dır. c) ve e) den $cl(cl(N,\alpha), \alpha - \varepsilon) \leq cl(cl(N,\alpha), \alpha) = cl(N,\alpha)$ dır. Buradan

$$cl(cl(N,\alpha), \alpha - \varepsilon) \leq cl(N,\alpha) \tag{2}$$

dır. (1) ve (2) den

$$cl(cl(N,\alpha), \alpha - \varepsilon) = cl(N,\alpha) \tag{3}$$

dır. b), c) ve (3) den,

$$\begin{aligned} cl_{\mathcal{T}}(N,\alpha) &= \wedge\{M \in I^X : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\} \\ &= \wedge\{M \in I^X : N \leq M, \vee\{s \in (0,1] : cl(M,s) = M\} \geq \alpha\} \\ &= \wedge\{M \in I^X : N \leq M, cl(M, \alpha - \varepsilon) = M, \forall \varepsilon > 0\} \\ &\leq cl(N,\alpha) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$cl_{\mathcal{T}}(N,\alpha) \leq cl(N,\alpha) \tag{4}$$

dır. Diğer yandan $M \in \{M \in I^X : N \leq M, cl(M, r-\varepsilon) = M, \forall\varepsilon > 0\}$ k.v. Buradan her $\varepsilon > 0$ için $N \leq M$ ve $cl(M, r-\varepsilon) = M$ dır. d), b), c) ve f) den $cl(N,\alpha) \leq cl(M,\alpha)$ ve $cl(M,\alpha) = M$ dir. Buradan $cl(N,\alpha) \leq M$ ve M keyfi olduğundan

$$\bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, cl(M, r-\varepsilon) = M, \forall\varepsilon > 0\} \geq cl(N,\alpha) \tag{5}$$

dır. b), c) ve (5) den

$$\begin{aligned} cl_{\mathcal{T}}(N,\alpha) &= \bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, \mathcal{T}(M) \geq \alpha\} \\ &= \bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, \bigvee\{s \in (0,1] : cl(M,s) = M\} \geq \alpha\} \\ &= \bigwedge\{M \in I^X : N \leq M, cl(M, \alpha-\varepsilon) = M, \forall\varepsilon > 0\} \\ &\geq cl(N,\alpha) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$cl_{\mathcal{T}}(N,\alpha) \geq cl(N,\alpha) \tag{6}$$

dır. (4) ve (6) dan $cl_{\mathcal{T}}(N,\alpha) = cl(N,\alpha)$ elde edilir.

"$\Rightarrow$" Teorem 15 den $cl_{\mathcal{T}}$ a)-f) koşullarını gerçekler. Dolayısıyla cl a)-f) koşullarını gerçekler. ■

Teorem 27: (X,τ) bir stu olsun.

$cl : I^X \times (0,1] \to I^X$, (X,τ) stu için smooth kapanış operatörüdür. $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in (0,1]$ için $cl_\alpha : I^X \to I$, $cl_\alpha(M) = cl(M,\alpha)$ dönüşümü (X,τ_α) ftu için fuzzy kapanış operatörüdür.

İspat: "$\Rightarrow$" cl smooth kapanış operatörü Teorem 25 deki koşulları sağladığından cl_α, fuzzy kapanış operatörü için dört koşulu sağlar. Ayrıca, $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in I^X$ keyfi için

$$\begin{aligned} cl_\alpha(M) = cl(M,\alpha) &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, \mathcal{T}_\tau(N) \geq \alpha\} \\ &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, \tau(N^c) \geq \alpha\} \\ &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, N^c \in \tau_\alpha\} \\ &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, N\ \tau_\alpha - \text{kapalı}\} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla cl_α dönüşümü (X,τ_α) fuzzy kapanış operatörüdür.

"$\Leftarrow$" cl_α, fuzzy kapanış operatörü için dört koşulu sağladığından cl Teorem 25 deki koşulları sağlar. Ayrıca $\alpha \in (0,1]$ ve $M \in I^X$ keyfi için

$$\begin{aligned} cl(M,\alpha) = cl_\alpha(M) &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, N\ \tau_\alpha - \text{kapalı}\} \\ &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, N^c \in \tau_\alpha\} \\ &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, \tau(N^c) \geq \alpha\} \\ &= \bigwedge\{N \in I^X : M \leq N, \mathcal{T}_\tau(N) \geq \alpha\} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla cl dönüşümü (X,τ) da smooth kapanış operatörüdür. ■

Teorem 28: (X,τ), (Y,τ') iki stu ve $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ dönüşüm olsun. f smooth süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in(0,1]$ ve $\forall M\in I^X$ için $f(cl(M,\alpha))\leq cl(f(M),\alpha)$ dır.

İspat: Teorem 21 den ve [5] den

f smooth sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in(0,1]$ için $f:(X,\tau_\alpha)\to(Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in(0,1]$ ve $\forall M\in I^X$ için $f(cl(M,\alpha))\leq cl(f(M),\alpha)$ dır.■

2.3.2. Smooth Kompaktlık Tipleri

(X,T) bir fuzzy topoloji, $\alpha\in[0,1)$ ve $\mathcal{A}\subset I^X$ bir fuzzy altküme ailesi olsun. Eğer her $x\in X$ için $M(x)>\alpha$ olacak şekilde $M\in\mathcal{A}$ mevcut ise $\mathcal{A}$ ya ***α-örtüm*** denir.

$$i_\alpha(T):=\{M^{-1}((\alpha,1]):M\in T\}\quad,\quad\alpha\in[0,1)$$

olarak tanımlansın. $i(T)$, X üzerinde $\cup\{i_\alpha(T):\alpha\in[0,1)\}$ alttabanı tarafından üretilen topolojiyi göstersin.

Tanım 31 [6]: (X,T) bir ftu ve $\alpha\in[0,1)$ olsun. Eğer T nin her α-örtümünün sonlu altörtümü varsa (X,T) ye ***α-kompakt*** denir.

Tanım 32 [7]: (X,T) bir ftu ve her $\alpha\in[0,1)$ için (X,T) α-kompakt ise (X,T) ye ***güçlü fuzzy kompakt*** denir.

Tanım 33 [7]: (X,T) bir ftu olsun. $(X,i(T))$ kompakt ise (X,T) ye ***ultra-fuzzy kompakt*** denir.

Tanım 34 [8]: (X,T) bir ftu olsun. Her $\{M_i:i\in J\}\subset T$ ailesi ve her $\alpha\in I$ için öyleki $\mathrm{Sup}\{M_i:i\in J\}\geq\alpha$ ve her $\varepsilon>0$ için $\mathrm{Sup}\{M_i:i\in J_0\}\geq\alpha-\varepsilon$ olacak şekilde sonlu bir $J_0\subset J$ mevcut ise (X,T) ye Lowen anlamında ***fuzzy kompakt*** denir.

Tanım 35: (X,τ) bir stu ve $\alpha\in[0,1)$ olsun. Her $r\in(0,1]$ için (X,τ_r) sırasıyla α-kompakt, güçlü fuzzy kompakt, ultra-fuzzy kompakt ve Lowen fuzzy kompakt ise (X,τ) ya α-kompakt, güçlü fuzzy kompakt, ultra-fuzzy kompakt ve Lowen anlamında fuzzy kompakt denir.

Tanım 36: $\{(X^i,\tau^i):i\in J\}$ bir stu ailesi, $X:=\prod_{i\in J}X^i$, $P_i:X\to X^i$, $i\in J$ projeksiyon dönüşümü olsun. Her bir $i\in J$, $r\in(0,1]$ için τ^i_r, X^i üzerinde r-düzeyi fuzzy topolojisi olmak üzere, T_r, $\cup\{P_i^{-1}(\tau^i_r):i\in J\}$ alttabanı tarafından üretilen fuzzy topolojisi ve τ, $\{T_r:r\in(0,1]\}$ tarafından üretilen smooth topoloji olsun. Bu şekilde elde edilen X üzerindeki smooth topolojiye ***çarpım smoothtopolojisi*** denir ve $\prod\tau^i$ ile gösterilir.

Teorem 29: (X,τ), (Y,τ') iki stu ve $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ örten, smooth sürekli dönüşüm olsun. Bu taktirde,

a) (X,τ) α-kompakt ise (Y,τ') α-kompakttır.

b) (X,τ) güçlü fuzzy kompakt ise (Y,τ') güçlü fuzzy kompakttır.

c) (X,τ) ultra-fuzzy kompakt ise (Y,τ') ultra-fuzzy kompakttır.

d) (X,τ) Lowen anlamında fuzzy kompakt ise (Y,τ') Lowen anlamında fuzzy kompakttır.

İspat:

a) $r\in(0,1]$ ve $\{M_i : i\in J\}\subset\tau'_r$ keyfi α-örtüm olsun. f smooth sürekli olduğundan ve Teorem 21 den $\{f^{-1}(M_i) : i\in J\}\in\tau_r$ dır. Diğer yandan $x\in X$ keyfi için $f(x)\in Y$

$$\exists k\in J \text{ öyleki } M_k(f(x))>\alpha$$

dır. Buradan $f^{-1}(M_k)(x)>\alpha$ dır. Dolayısıyla $\{f^{-1}(M_i) : i\in J\}\subset\tau_r$ α-örtümdür. (X,τ_r) α-kompakt olduğundan

$$\exists J_0\in J \text{ sonlu öyleki } \{f^{-1}(M_i) : i\in J_0\} \ \alpha\text{-örtümdür.}$$

$\{M_i : i\in J_0\}\subset\tau'_r$, (Y,τ'_r) için α-örtüm olduğu gösterilebilir. Gerçekten, $y\in Y$ k.v. f örten olduğundan

$$\exists x\in X \quad \text{öyleki} \quad y=f(x)$$

dır. $\{f^{-1}(M_i) : i\in J_0\}$ α-örtüm olduğundan

$$\exists s\in J_0 \text{ sonlu öyleki } f^{-1}(M_s)(x)>\alpha$$

dır. Buradan $M_s(y)=M_s(f(x))=f^{-1}(M_s)(x)>\alpha$ dır. Buradan $\{M_i : i\in J_0\}\subset\tau'_r$ α-örtümdür. Dolayısıyla (Y,τ'_r) α-kompakttır ve $r\in(0,1]$ keyfi olduğundan (Y,τ') α-kompakttır.

b) a) dan açıkça görülür.

c) Her $r\in(0,1]$ için $(Y,i(\tau'_r))$ nin kompakt olduğunu göstermek için $f:(X,i(\tau_r))\to(Y,i(\tau'_r))$ nin sürekli olduğunu göstermek yeter. Bunun için $\alpha\in[0,1)$ ve $M\in\tau'_r$ olmak üzere $M^{-1}((\alpha,1])$, $i(\tau'_r)$ nin keyfi alttaban elemanı için

$$\tau(M\circ f)=\tau(f^{-1}(M))\geq\tau'(M)\geq r$$

dır. Buradan $M\circ f\in\tau_r$ ve $(M\circ f)^{-1}((\alpha,1])\in i_\alpha(\tau_r)$ dır. Buradan $f^{-1}(M^{-1}((\alpha,1]))\in i(\tau_r)$ elde edilir. Bu ise $f:(X,i(\tau_r))\to(Y,i(\tau'_r))$ nin sürekli olduğunu gösterir. f sürekli, örten ve $(X,i(\tau_r))$ kompakt olduğundan $(Y,i(\tau'_r))$ kompakttır. Buradan (Y,τ'_r) ultra-fuzzy kompakt ve $r\in(0,1]$ keyfi olduğundan (Y,τ') ultra-fuzzy kompakttır.

d) $r\in(0,1]$, $\alpha\in[0,1)$, $\{M_i : i\in J\}\subset\tau'_r$ olmak üzere $\text{Sup}\{M_i : i\in J\}\geq\alpha$ k.v. ve $\varepsilon>0$ k.v. $f:(X,\tau_r)\to(Y,\tau'_r)$ fuzzy sürekli olduğundan $\{f^{-1}(M_i): i\in J\}\subset\tau_r$ dir. Diğer yandan $x\in X$ keyfi için $f(x)\in Y$ ve $\text{Sup}\{M_i : i\in J\}\geq\alpha$ olduğundan $\text{Sup}\{f^{-1}(M_i)(x): i\in J\}=\text{Sup}\{M_i(f(x)): i\in J\}\geq\alpha$ dır. Buradan $\text{Sup}\{f^{-1}(M_i): i\in J\}\geq\alpha$ dır. (X,τ_r) Lowen anlamında fuzzy kompakt olduğundan bu $\varepsilon>0$ için

$$\exists j_0\in J \text{ sonlu öyleki } \text{Sup}\{f^{-1}(M_i): i\in J_0\}\geq\alpha-\varepsilon \tag{1}$$

dır. Buradan $\text{Sup}\{M_i : i\in J_0\}\geq\alpha-\varepsilon$ sağlanır. Gerçekten, $y\in Y$ keyfi için f örten olduğundan

$$\exists x\in X \text{ öyleki } y=f(x)$$

dır. (1) den dolayı

$$\text{Sup}\{M_i(y): i\in J_0\}=\text{Sup}\{M_i(f(x)): i\in J_0\}=\text{Sup}\{f^{-1}(M_i)(x): i\in J_0\}\geq\alpha-\varepsilon$$

dır. Buradan $\text{Sup}\{M_i : i\in J_0\}\geq\alpha-\varepsilon$ dır. Dolayısıyla (Y,τ'_r) nin fuzzy kompakt ve $r\in(0,1]$ keyfi olduğundan (Y,τ') Lowen anlamında fuzzy kompakttır.■

Teorem 30: $\{(X^i,\tau^i): i\in J\}$ stu ların bir ailesi olsun. Bu durumda $\{(X^i,\tau^i): i\in J\}$ ailesi sırasıyla α-kompakt, güçlü fuzzy kompakt, ultra fuzzy kompakt ve Lowen anlamında fuzzy kompakttır $\Leftrightarrow$ $(\prod X^i,\prod\tau^i)$ α-kompakt, güçlü fuzzy kompakt, ultra fuzzy kompakt ve Lowen anlamında fuzzy kompakttır.

İspat: Bkz. [4].■

2.3.3. Bağlantılılık

Tanım 37: (X,τ) bir stu, $M\in I^X$ ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. Eğer aşağıdaki koşulları gerçekleyecek şekilde bir $N_1,N_2\in\tau_\alpha$ mevcut ise M fuzzy alt kümesine ***(c_i,α)-bağlantısız*** denir (i=1,2,3,4).

(c_1,α) : $M\leq N_1\vee N_2$, $N_1\wedge N_2\leq 1-M$, $M\wedge N_1\neq 0_X$, $M\wedge N_2\neq 0_X$.

(c_2,α) : $M\leq N_1\vee N_2$, $M\wedge N_1\wedge N_2=0_X$, $M\wedge N_1\neq 0_X$, $M\wedge N_2\neq 0_X$.

(c_3,α) : $M\leq N_1\vee N_2$, $N_1\wedge N_2\leq 1-M$, $N_1\not\leq 1-M$, $N_2\not\leq 1-M$.

(c_4,α) : $M\leq N_1\vee N_2$, $M\wedge N_1\wedge N_2=0_X$, $N_1\not\leq 1-M$, $N_2\not\leq 1-M$.

Eğer $M\in I^X$, her $\alpha\in(0,1]$ için (c_i,α)-bağlantısız ise M fuzzy alt kümesine ***c_i-bağlantısız*** denir (i=1,2,3,4).

Eğer $M \in I^X$, (c_i,α)-bağlantısız değil ise M fuzzy alt kümesine ***(c_i,α)*-bağlantılıdır** denir (i=1,2,3,4).

Eğer $M \in I^X$, c_i-bağlantısız değil ise M fuzzy alt kümesine ***c_i*-bağlantılıdır** denir (i=1,2,3,4).

Teorem 31: (X,τ), (Y,τ') iki stu, $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Eğer $M \in I^X$, (c_i,α)-bağlantılı ise $f(M)$ (c_i,α)-bağlantılıdır (i=1,2,3,4).

İspat:

a) (c_1,α) için yapalım. $f(M)$ (c_1,α)-bağlantılı olmadığını varsayalım. $f(M)$ (c_1,α)-bağlantısızdır. Buradan

$$\left.\begin{array}{l}\exists N_1,N_2 \in \tau'_\alpha \text{ öyleki } f(M) \le N_1 \vee N_2,\ N_1 \wedge N_2 \le 1 - f(M) \\ f(M) \wedge N_1 \ne 0_Y,\ f(M) \wedge N_2 \ne 0_Y\end{array}\right\} \quad (1)$$

dır. Diğer yandan $f:(X,\tau_\alpha) \to (Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy sürekli olduğundan

$$f^{-1}(N_1),\ f^{-1}(N_2) \in \tau_\alpha \quad (2)$$

dır. (1) den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$M \le f^{-1}(f(M)) \le f^{-1}(N_1 \vee N_2) = f^{-1}(N_1) \vee f^{-1}(N_2) \quad (3)$$

dır. $f^{-1}(N_1) \wedge f^{-1}(N_2) = f^{-1}(N_1 \wedge N_2) \le f^{-1}(1-f(M)) \le 1 - f^{-1}(f(M)) \le 1 - M$ dır. Yani

$$f^{-1}(N_1) \wedge f^{-1}(N_2) \le 1 - M \quad (4)$$

dır. $f(M) \wedge N_1 \ne 0_Y$ olduğundan

$$\exists y \in Y \text{ öyleki } (f(M) \wedge N_1)(y) > 0$$

dır. Buradan $f(M)(y)>0$ ve $N_1(y) > 0$ dır. $f(M)(y) = \mathrm{Sup}\{M(z) : z \in f^{-1}(y)\} > 0$ olduğundan

$$\exists z_0 \in f^{-1}(y) \text{ öyleki } M(z_0) > 0$$

dır. Bu $z_0 \in f^{-1}(y)$ için $f^{-1}(N_1)(z_0) = N_1(f(z_0)) = N_1(y) > 0$ dır. Buradan

$$M \wedge f^{-1}(N_1) \ne 0_X \quad (5)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$M \wedge f^{-1}(N_2) \ne 0_X \quad (6)$$

elde edilir. (2), (3), (4), (5) ve (6) dan M fuzzy alt kümesi (c_1,α)-bağlantısız olduğu elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde varsayım yanlış ve $f(M)$ (c_1,α)-bağlantılıdır.

b) (c_2,α) için yapalım. $f(M)$ (c_2,α)-bağlantılı olmadığını varsayalım. $f(M)$ (c_2,α)-bağlantısızdır. Buradan

$$\left.\begin{array}{l}\exists N_1,N_2 \in \tau'_\alpha \text{ öyleki } f(M) \le N_1 \vee N_2,\ f(M) \wedge N_1 \wedge N_2 = 0_Y \\ f(M) \wedge N_1 \ne 0_Y,\ f(M) \wedge N_2 \ne 0_Y\end{array}\right\} \quad (7)$$

dır. $f:(X,\tau_\alpha)\rightarrow(Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy sürekli olduğundan

$$f^{-1}(N_1),\ f^{-1}(N_2)\in\tau_\alpha \tag{8}$$

dır. (7) den aşağıdaki sonuçlar elde edilir. a) dan

$$M\leq f^{-1}(N_1)\vee f^{-1}(N_2),\ \ M\wedge f^{-1}(N_1)\neq 0_X \text{ ve } M\wedge f^{-1}(N_2)\neq 0_Y \tag{9}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned} M\wedge f^{-1}(N_1)\wedge f^{-1}(N_2) &\leq f^{-1}(f(M))\wedge f^{-1}(N_1)\wedge f^{-1}(N_2)\\ &= f^{-1}(f(M)\wedge N_1\wedge N_2)\\ &= f^{-1}(0_Y)=0_X \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$M\wedge f^{-1}(N_1)\wedge f^{-1}(N_2)=0_X \tag{10}$$

dır. (8), (9) ve (10) dan M fuzzy alt kümesi (c_2,α)-bağlantısız olduğu elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde varsayım yanlış ve $f(M)$ (c_2,α)-bağlantılıdır.

c) (c_3,α) için yapalım. $f(M)$ (c_3,α)-bağlantılı olmadığını varsayalım. $f(M)$ (c_3,α) bağlantısızdır. Buradan

$$\left.\begin{array}{l}\exists N_1,N_2\in\tau'_\alpha \text{ öyleki } f(M)\leq N_1\vee N_2,\ \ N_1\wedge N_2\leq 1-f(M)\\ \qquad N_1\not\leq 1-f(M),\ \ N_2\not\leq 1-f(M)\end{array}\right\} \tag{11}$$

dır. $f:(X,\tau_\alpha)\rightarrow(Y,\tau'_\alpha)$ fuzzy sürekli olduğundan

$$f^{-1}(N_1),\ f^{-1}(N_2)\in\tau_\alpha \tag{12}$$

dır. (11) den aşağıdaki sonuçlar elde edilir. a) dan

$$M\leq f^{-1}(N_1)\vee f^{-1}(N_2),\ \ f^{-1}(N_1)\wedge f^{-1}(N_2)\leq 1-M \tag{13}$$

elde edilir. (11) den $N_1\not\leq 1-f(M)$ dır. Buradan

$\exists y\in Y$ öyleki $N_1(y)>1-f(M)(y)=1-\mathrm{Sup}\{M(z):z\in f^{-1}(y)\}=\mathrm{İnf}\{1-M(z):z\in f^{-1}(y)\}$

dır. Buradan

$$\exists z_0\in f^{-1}(y) \text{ öyleki } N_1(y)>1-M(z_0)$$

elde edilir. Bu $z_0\in f^{-1}(y)$ için $f^{-1}(N_1)(z_0)=N_1(f(z_0))=N_1(y)>1-M(z_0)$ dır. Bu ise

$$f^{-1}(N_1)\not\leq 1-M \tag{14}$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde

$$f^{-1}(N_2)\not\leq 1-M \tag{15}$$

elde edilir. (12), (13), (14) ve (15) den M fuzzy alt kümesi (c_3,α)-bağlantısız olduğu elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde varsayım yanlış ve $f(M)$ (c_3,α)-bağlantılıdır.

d) (c_4,α) için, b) ve c) den açıkça görülür.■

Sonuç 3: (X,τ), (Y,τ') iki stu, $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ smooth sürekli olsun. Eğer $M\in I^X$ c_i-bağlantılı ise $f(M)$ c_i-bağlantılıdır (i=1,2,3,4).

İspat: Bir önceki önermeden açıkça görülür.■

Teorem 32: (X,τ) bir stu olsun. Eğer $M\in I^X$ (c_i,r)-bağlantılı ve $M\leq N\leq cl(M,s)$, $s\leq r$ ise N fuzzy alt kümesi (c_i,s) bağlantılıdır (i=1,2).

İspat: Bkz. [4].■

2.4. Smooth Topolojinin Üretilmesi

Bu bölümde A.P. Sostak'ın 1985 yılında yayınlanan bir makalesi incelenmiştir [9]. Buraya gelinceye kadar "smooth topoloji" olarak sözü edilen topoloji ilk kez A.P. Sostak tarafından bir X kümesi üzerinde bazı doğal aksiyomları sağlayan bir $\tau : I^X \to I$ dönüşümü olarak "fuzzy topoloji" adı ile tanımlanmış ve onun bazı özellikleri incelenmiştir. Ancak 1992 de aynı yapı K.C. Chattopadhyay ve arkadaşları tarafından Sostak'ın çalışmasından habersiz olarak adeta yeniden keşfedilmiştir. Bu yazarlar yukarıda sözü edilen $\tau : I^X \to I$ dönüşümüne "X üzerinde açıklığın bir derecelendirilmesi" adını vermişlerdir. Aynı yıl, A.A. Ramadan [2], Sostak'ın tanımına benzer bir fuzzy topolojisini "Smooth topoloji" adı ile tanımlamış ve hatta I=[0,1] kapalı aralığı yerine daha genel kafeslerin de alınabileceğini ileri sürmüştür. Çalışmamızın buraya kadarki bölümünde bu çalışmalar incelenmişti. Şimdi ise, Sostak'ın burada sözü edilen ve kronolojik olarak buraya kadar incelediklerimizden daha önce yapılan bir çalışmasının önemli kısımları incelenecektir. Bu çalışmada kısaca fuzzy içerme, fuzzy denklik, başlangıç ve bitiş smooth topolojisi kavramları verilmiştir. Ayrıca bir klasik topolojiye aynı küme üzerinde bir smooth topolojinin karşılık getirilebileceği gösterilmiş ve klasik topolojik uzaylar kategorisi ile smooth topolojik uzaylar kategorisi arasında bir funktor tanımlanmıştır.

2.4.1. Tanımlar

X bir küme ve $A \subset X$ olsun. A altkümesi bir karakteristik fonksiyon olarak düşünülürse

$$A : X \to \{0,1\},\ A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

olarak göstereceğiz. Eğer $A,B \subset X$ için $A \subset B$ ise $A^c \cup B = X$ veya her $x \in X$ için $(A^c \vee B)(x) = 1$ dir. İçerme bir fonksiyon olarak düşünülürse

$$\subset : \{0,1\}^X \times \{0,1\}^X \to \{0,1\},\quad \subset(A,B) := \begin{cases} 1, & A \subset B \\ 0, & A \not\subset B \end{cases}$$

olarak göstereceğiz. Bu şekilde tanımlanan $\subset$ fonksiyonunun her $(A,B) \in \{0,1\}^X \times \{0,1\}^X$ için

$$\subset(A,B) = \bigwedge\{(A^c \vee B)(x) : x \in X\}$$

olduğu görülür. Bu düşünce fuzzy kümelerine genişletilerek aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 38 (Fuzzy İçerme): X bir küme ve $M,N \in I^X$ olsun. Bu durumda,

$$\breve{\subset} : I^X \times I^X \to I, \quad \breve{\subset}(M,N) := \bigwedge\{(M^c \vee N)(x) : x \in X\}$$

ile tanımlanan $\breve{\subset}$ dönüşümüne ***fuzzy içerme*** ve $\breve{\subset}(M,N) \in I$ değerine N fuzzy alt kümesinin M fuzzy alt kümesini ***içerme derecesi*** denir. $\breve{\subset}(M,N)$ değeri $M \breve{\subset} N$ şeklinde de gösterilir.

Uyarı 2: Tanım 38 de tanımlanan $\breve{\subset}$ dönüşümünün $\{0,1\}^X \times \{0,1\}^X$ üzerine kısıtlanışı klasik içermeyi verir.

Tanım 39 (Fuzzy denklik): X bir küme ve $M,N \in I^X$ olsun. Bu durumda

$$\breve{\cong} : I^X \times I^X \to I, \quad \breve{\cong}(M,N) := (M \breve{\subset} N) \wedge (N \breve{\subset} M)$$

ile tanımlanan $\breve{\cong}$ dönüşümüne ***fuzzy denklik*** ve $\breve{\cong}(M,N) \in I$ değerine M fuzzy alt kümesi ile N fuzzy alt kümesinin ***denklik derecesi*** denir. $\breve{\cong}(M,N)$ değeri $M \breve{\cong} N$ şeklinde de gösterilir.

Uyarı 3: Tanım 39 da tanımlanan $\breve{\cong}$ dönüşümünün $\{0,1\}^X \times \{0,1\}^X$ üzerine kısıtlanışı klasik eşitliği verir.

$\mathcal{A}$ verilen bir X kümesinin klasik altkümelerinin klasik bir ailesi olsun. $\mathcal{A}$ ailesi bir karasteristik fonksiyon olarak düşünülürse

$$\mathcal{A} : \{0,1\}^X \to \{0,1\}, \quad \mathcal{A}(B) := \begin{cases} 1, & B \in \mathcal{A} \\ 0, & B \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\mathcal{A}$ nın bütün elemanlarının arakesiti $\bigwedge \mathcal{A}$ ile gösterilirse

$$\bigwedge \mathcal{A} : X \to \{0,1\}, \quad (\bigwedge \mathcal{A})(x) := \begin{cases} 1, & \forall B \in \mathcal{A} \text{ için } x \in B \\ 0, & \exists B \in \mathcal{A} \text{ için } x \notin B \end{cases}$$

dır. Bu $\bigwedge \mathcal{A}$ alt kümesinin her $x \in X$ için

$$(\bigwedge \mathcal{A})(x) = \bigwedge\{(\mathcal{A}(B))^c \vee B(x) : B \in \{0,1\}^X\}$$

olduğu görülür. Bu düşünce X in fuzzy altkümelerinin bir fuzzy ailesine genişletilerek aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 40: X bir küme ve $\mathcal{M} : I^X \to I$, X in fuzzy altkümelerinin bir fuzzy ailesi olsun. Bu fuzzy ailesinin arakesiti

$$\bigwedge \mathcal{M} : X \to I, \quad (\bigwedge \mathcal{M})(x) := \bigwedge\{(\mathcal{M}(M))^c \vee M(x) : M \in I^X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde, $\mathcal{A}$ verilen X kümesinin klasik altkümelerinin klasik ailesi için birleşim $\bigvee \mathcal{A}$ ile gösterilirse

$$\bigvee \mathcal{A}: X \to \{0,1\},\ (\bigvee \mathcal{A})(x) := \begin{cases} 1, & \exists B \in \mathcal{A} \text{ için } x \in B \\ 0, & \forall B \in \mathcal{A} \text{ için } x \notin B \end{cases}$$

dır. Bu $\bigvee \mathcal{A}$ alt kümesinin her $x \in X$ için

$$(\bigvee \mathcal{A})(x) := \bigvee \{\mathcal{A}(B) \wedge B(x) : B \in \{0,1\}^X\}$$

olduğu görülür. Bu düşünceyi X in fuzzy altkümelerinin fuzzy ailesine genişleterek aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 41: X bir küme ve $\mathcal{M} : I^X \to I$, X in fuzzy altkümelerinin fuzzy ailesi olsun. Bu fuzzy ailesinin birleşimi

$$\bigvee \mathcal{M} : X \to I,\ (\bigvee \mathcal{M})(x) := \bigvee \{\mathcal{M}(M) \wedge M(x) : M \in I^X\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.2. Bir Dönüşüm İle Üretilen Başlangıç Smooth Topolojisi

X bir küme, (Y,τ') bir stu ve $f: X \to Y$ dönüşüm olsun. f yi smooth sürekli yapan X üzerindeki en zayıf smooth topolojiye ***f ile üretilen başlangıç smooth topolojisi*** denir. Şimdi bu smooth topolojiyi oluşturalım.

$\mathcal{B} := \{f^{-1}(N) : N \in I^Y\}$ ve her $M \in \mathcal{B}$ için $P_M := \{N \in I^Y : M = f^{-1}(N)\}$ olmak üzere

$$\tau : I^X \to I,\ \tau(M) := \begin{cases} \bigvee\{\tau'(N) : N \in P_M\} & ,\ M \in \mathcal{B} \\ 0 & ,\ M \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

olarak tanımlanan τ, X üzerinde bir smooth topoloji ve f fonksiyonunu smooth sürekli yapan en zayıf smooth topolojidir. Gerçekten,

(O1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$

(O2) $M_1, M_2 \in I^X$ k.v. Eğer $M_1 \notin \mathcal{B}$ veya $M_2 \notin \mathcal{B}$ ise $\tau(M_1 \wedge M_2) \geq \tau(M_1) \wedge \tau(M_2) = 0$ dır. Eğer $M_1 \in \mathcal{B}$ ve $M_2 \in \mathcal{B}$ olması durumunda $\tau(M_1) \wedge \tau(M_2) =: k$ olarak tanımlayalım. Buradan

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists N_i \in P_{M_i} \text{ öyleki } \tau'(N_i) > k - \varepsilon,\ i=1,2. \quad (1)$$

dır. Buradan $M_i = f(N_i)$, $i=1,2$ ve $M_1 \wedge M_2 \geq f^{-1}(N_1) \wedge f^{-1}(N_2) = f^{-1}(N_1 \wedge N_2)$ dır. Buradan $N_1 \wedge N_2 \in P_{M_1 \wedge M_2}$ dır. τ nun tanımından ve (1) den $\tau(M_1 \wedge M_2) \geq \tau'(N_1 \wedge N_2) \geq \tau'(N_1) \wedge \tau'(N_2) > k - \varepsilon$ dur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\tau(M_1 \wedge M_2) \geq k = \tau(M_1) \wedge \tau(M_2)$ elde edilir.

(O3) $\{M_i : i \in J\} \subset I^X$ k.v. Eğer bir $i \in J$ için $M_i \notin \mathcal{B}$ ise $\tau(\vee\{M_i : i \in J\}) \geq \wedge\{\tau(M_i) : i \in J\} = 0$ dır. Eğer her $i \in J$ için $M_i \in \mathcal{B}$ olması durumunda $\wedge\{\tau(M_i) : i \in J\} =: k$ olarak tanımlayalım. Her $i \in J$ için $\tau(M_i) \geq k$ dır. Buradan

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists N_i \in P_{M_i} \text{ öyleki } \tau'(N_i) > k - \varepsilon,\ i \in J \qquad (2)$$

Buradan her $i \in J$ için $M_i = f(N_i)$ ve $\vee\{M_i : i \in J\} = \vee\{f^{-1}(N_i) : i \in J\} = f^{-1}(\vee\{N_i : i \in J\})$ dır. Buradan $\vee N_i \in P_{\vee M_i}$ dır. τ nun tanımından ve (2) den $\tau(\vee\{M_i : i \in J\}) \geq \tau'(\vee\{N_i : i \in J\}) \geq \wedge\{\tau'(N_i) : i \in J\} \geq k - \varepsilon$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\tau(\vee\{M_i : i \in J\}) \geq k = \wedge\{\tau(M_i) : i \in J\}$ elde edilir. Dolayısıyla τ, X üzerinde smooth topolojidir.

$f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth süreklidir. Gerçekten, $N \in I^Y$ keyfi verildiğinde $N \in P_{f^{-1}(N)}$ dir. Buradan $\tau(f^{-1}(N)) \geq \tau'(N)$ dır. Dolayısıyla f smooth süreklidir.

Bu τ, X üzerinde $f$yi smooth sürekli yapan en zayıf smooth topolojidir. Gerçekten τ_1, X üzerinde f yi smooth sürekli yapan herhangi bir smooth topoloji olsun ve $M \in I^X$ k.v. $M \notin \mathcal{B}$ ise $\tau_1(M) \geq \tau(M) = 0$ dır. $M \in \mathcal{B}$ ise $\tau(M) = \vee\{\tau'(N) : N \in P_M\} =: k$ olarak tanımlayalım. Buradan

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists N \in P_M \text{ öyleki } \tau'(N) > k - \varepsilon$$

dır. Buradan ve $f : (X,\tau_1) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli olduğundan $\tau_1(M) \geq \tau_1(f^{-1}(N)) \geq \tau'(N) > k - \varepsilon$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\tau_1(M) \geq k = \tau(M)$ dır. Dolayısıyla τ, f dönüşümünü smooth sürekli yapan X üzerindeki en zayıf smooth topolojidir.

2.4.3. Bir Dönüşüm Ailesi İle Üretilen Başlangıç Smooth Topolojisi

[9], (3.2) de bir dönüşüm ailesi için başlangıç smooth topolojisi tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

X bir küme, $\{(Y_k,\tau'_k) : k \in \Delta\}$ smooth topolojik uzayların bir ailesi, her $k \in \Delta$ için $f_k : X \to Y_k$ bir dönüşüm olsun. Her $k \in \Delta$ için f_k yı smooth sürekli yapan X üzerindeki en zayıf smooth topolojiye $\{f_k : k \in \Delta\}$ ***ailesi ile üretilen başlangıç smooth topolojisi*** denir. Şimdi bu smooth topolojiyi oluşturalım. Her $k \in \Delta$ için $\tau_k : I^X \to I$ dönüşümü f_k ile üretilen başlangıç smooth topoloji olsun. Bu durumda

$$\tau : I^X \to I,\ \tau(M) := \wedge\{\tau_k(M) : k \in \Delta\}$$

ile tanımlanan τ, X üzerinde bir smooth topolojidir. Bu τ nun her $k\in\Delta$ için $f_k : X \to Y_k$ dönüşümlerini smooth sürekli yapan X üzerindeki en zayıf smooth topoloji olduğu iddia edilmektedir.

Uyarı 4: [9], (3.2) de oluşturulan bir dönüşüm ailesi için başlangıç smooth topolojisinin orada iddia edildiğinin aksine, her bir dönüşümü smooth sürekli yapması gerekmez. Bu çalışmada buna bir aksi örnek verilmiştir. Bkz. Örnek 5.

Örnek 5: X, Y_1 ve Y_2 üç küme öyleki $X = Y_1 = Y_2$ ve $|Y_1| \geq 2$ olsun. Y_1 ve Y_2 kümeleri üzerinde sırasıyla aşağıdaki gibi iki smooth topoloji tanımlayalım.

$$\tau_1' : I^{Y_1} \to I,\ \tau_1'(M) := 1 \ \text{ve}\ \tau_2' : I^{Y_2} \to I,\ \tau_2'(M) := \begin{cases} 1 & , \ M = 0_{Y_2}, 1_{Y_2} \\ 0 & , \ M \in Y_2 - \{0_{Y_2}, 1_{Y_2}\} \end{cases}$$

$$i_1 : X \to (Y_1, \tau_1'),\ i_1(x) := x \ \text{ve}\ i_2 : X \to (Y_2, \tau_2'),\ i_2(x) := x$$

şeklinde tanımlanan $\{i_k : k=1,2\}$ dönüşüm ailesi ile üretilen başlangıç smooth topolojisini oluşturalım. $i_1 : X \to (Y_1, \tau_1')$ dönüşümü ile üretilen başlangıç smooth topolojisi τ_1 ve $i_2 : X \to (Y_2, \tau_2')$ dönüşümü ile üretilen başlangıç smooth topolojisi τ_2 olsun. Bu durumda $\tau_1 = \tau_1'$ ve $\tau_2 = \tau_2'$ olduğu görülür. Bu durumda iddiaya göre $\{i_k : k=1,2\}$ ailesi ile X üzerinde üretilen başlangıç smooth topolojisi

$$\tau : I^X \to I,\ \tau(M) = \wedge\{\tau_k(M) : k = 1,2\}$$

dir. Fakat $i_1 : (X, \tau) \to (Y_1, \tau_1')$ smooth sürekli değildir. Çünkü, $y_0 \in Y_1$ sabit olmak üzere

$$M_1 : Y_1 \to I,\ M_1(y) := \begin{cases} 1 & , \ y = y_0 \\ 0 & , \ y \in Y_1 - \{y_0\} \end{cases}$$

ile tanımlanan fuzzy kümesi için

$\tau(i_1^{-1}(M_1)) = \tau(M_1) = \tau_1(M_1) \wedge \tau_2(M_1) = \tau_1'(M_1) \wedge \tau_2'(M_1) = 1 \wedge 0 = 0 \not\geq 1 = \tau_1'(M_1)$ dır. Yani $\tau(i_1^{-1}(M_1)) \not\geq \tau_1'(M_1)$ dır.

Uyarı 5: 2.4.3. deki özelliklere sahip, yani her bir fonksiyonu smooth sürekli yapan X üzerindeki en zayıf smooth topoloji aşağıdaki gibi elde edilebilir.

X bir küme, $\{(Y_k, \tau_k) : k \in \Delta\}$ smooth topolojik uzayların bir ailesi ve her $k \in \Delta$ için $f_k : X \to Y_k$ bir dönüşüm olsun. Bilindiği gibi her $\alpha \in (0,1]$ için $(\tau_k)_\alpha = \{N \in I^{Y_k} : \tau_k(N) \geq \alpha\}$ dır. Her $k \in \Delta$ ve her $\alpha \in (0,1]$ için

$$T_{k,\alpha} := \{ f_k^{-1}(N) : N \in (\tau_k)_\alpha \}$$

ve

$$\mathcal{S}_\alpha := \cup\{T_{k,\alpha} : k \in \Delta\}$$

ile tanımlansın. Her $\alpha \in (0,1]$ için T_α, X üzerinde $\mathcal{S}_\alpha$ yı alttaban kabul eden fuzzy topoloji olsun. Bu $\{T_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$, X üzerinde azalan fuzzy topoloji ailesi olduğu görülür. Bu aile tarafından üretilen X üzerindeki smooth topoloji

$$\tau : I^X \to I,\ \tau(M) = \bigvee\{\alpha \in (0,1] : M \in T_\alpha\}$$

dır. Bkz. Teorem 10. Bu smooth topoloji 2.4.3. deki özellikleri sağlar. (Bkz. Tanım 36)

2.4.4. Smooth Topolojik Uzayların ve Fuzzy Altkümelerinin Çarpımı

$\{(X_k,\tau_k) : k \in \Delta\}$ smooth topolojik uzayların bir ailesi ve $X := \prod\{X_k : k \in \Delta\}$ olsun. X üzerinde $\{P_k : X \to X_k : k \in \Delta\}$ projeksiyon ailesi ile üretilen ve τ ile gösterilen başlangıç smooth topolojisine ***çarpım smooth topolojisi*** ve (X,τ) ya ***çarpım smooth topolojik uzayı*** denir.

$\{(X_k,\tau_k) : k \in \Delta\}$ stu ların bir ailesi ve (X,τ) bu smooth topolojik uzayların çarpımı olsun. Her $k \in \Delta$ için $M_k \in I^{X_k}$ fuzzy altkümelerinin çarpımı

$$M = \prod\{M_k : k \in \Delta\} \in I^X,\ M(x) := \bigwedge\{M_k(x_k) : k \in \Delta\},\ x = (x_k)$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.5. Bir Dönüşüm ile Üretilen Bitiş Smooth Topolojisi

(X,τ) stu, Y küme ve $f : X \to Y$ dönüşüm olsun. f yi smooth sürekli yapan Y üzerindeki en güçlü smooth topolojiye ***f ile üretilen bitiş smooth topolojisi*** denir. Şimdi bu smooth topolojiyi oluşturalım.

$$\tau' : I^Y \to I,\ \tau'(N) := \tau(f^{-1}(N))$$

olarak tanımlanan τ', Y üzerinde bir smooth topolojidir ve bu τ', f yi smooth sürekli yapan Y üzerinde en güçlü smooth topolojidir. Gerçekten,

(O1) $\tau'(0_Y) = \tau'(1_Y) = 1$,

(O2) $N_1, N_2 \in I^Y$ k.v.

$$\begin{aligned}\tau'(N_1 \wedge N_2) &= \tau(f^{-1}(N_1 \wedge N_2))\\ &= \tau(f^{-1}(N_1) \wedge f^{-1}(N_2))\\ &\geq \tau(f^{-1}(N_1)) \wedge \tau(f^{-1}(N_2))\end{aligned}$$

$= \tau'(N_1) \wedge \tau'(N_2)$,

(O3) $\{N_i : i \in J\} \subset I^Y$ k.v.

$$\tau'(\bigvee\{N_i : i \in J\}) = \tau(f^{-1}(\bigvee\{N_i : i \in J\}))$$
$$= \tau(\bigvee\{f^{-1}(N_i) : i \in J\})$$
$$\geq \bigwedge\{\tau(f^{-1}(N_i)) : i \in J\}$$
$$= \bigwedge\{\tau'(N_i) : i \in J\}$$

elde edilir. Dolayısıyla τ', Y üzerinde smooth topolojidir.

$f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth süreklidir. Gerçekten, $N \in I^Y$ keyfi için $\tau(f^{-1}(N)) = \tau'(N) \geq \tau'(N)$ dır. Dolayısıyla f smooth süreklidir.

Bu τ', Y üzerinde f yi smooth sürekli yapan en güçlü smooth topolojidir. Gerçekten, τ_1, Y üzerinde f yi smooth sürekli yapan herhangi bir smooth topoloji olsun. $N \in I^Y$ keyfi için $\tau'(N) = \tau(f^{-1}(N)) \geq \tau_1(N)$ buradan $\tau'(N) \geq \tau_1(N)$ dır.

2.4.6. Bir Dönüşüm Ailesi ile Üretilen Bitiş Smooth Topolojisi

$\{(X_k,\tau_k) : k \in \Delta\}$ smooth topolojik uzayların bir ailesi, Y küme ve her $k \in \Delta$ için $f_k : X_k \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $k \in \Delta$ için f_k yı smooth sürekli yapan Y üzerindeki en güçlü smooth topolojiye $\{f_k : k \in \Delta\}$ ***ailesi için üretilen bitiş smooth topolojisi*** denir. Şimdi bu smooth topolojiyi oluşturalım. Her $k \in \Delta$ için τ'_k, Y üzerinde f_k ile üretilen bitiş smooth topoloji olmak üzere

$$\tau : I^Y \to I, \ \tau(N) := \bigwedge\{\tau'_k(N) : k \in \Delta\}$$

olarak tanımlanan τ, Y üzerinde smooth topolojidir ve bu τ her $k \in \Delta$ için f_k yı smooth sürekli yapan Y üzerindeki en güçlü smooth topolojidir. Gerçekten,

(O1) $\tau(0_Y) = \tau(1_Y) = 1$,

(O2) $N_1, N_2 \in I^Y$ k.v.

$$\tau(N_1 \wedge N_2) = \bigwedge\{\tau'_k(N_1 \wedge N_2) : k \in \Delta)$$
$$\geq \bigwedge\{\tau'_k(N_1) \wedge \tau'_k(N_2) : k \in \Delta\}$$
$$= \bigwedge\{\tau'_k(N_1) : k \in \Delta\} \wedge \bigwedge\{\tau'_k(N_2) : k \in \Delta\}$$
$$= \tau(N_1) \wedge \tau(N_2),$$

(O3) $\{N_i : i \in J\} \subset I^Y$ k.v.

$$\tau(\bigvee\{N_i : i \in J\}) = \bigwedge\{\tau'_k(\bigvee\{N_i : i \in J\}) : k \in \Delta\}$$

$$\geq \bigwedge\{\bigwedge\{\tau'_k(N_i) : i \in j\} : k \in \Delta\}$$
$$= \bigwedge\{\bigwedge\{\tau'_k(N_i) : k \in \Delta\} : i \in j\}$$
$$= \bigwedge\{\tau(N_i) : i \in J\}$$

dır. Dolayısıyla τ, Y üzerinde smooth topolojidir. Her $k \in \Delta$ için $f_k : (X,\tau_k) \to (Y,\tau)$ smooth süreklidir. Gerçekten, $k \in \Delta$ ve $N \in I^Y$ keyfi için $\tau_k(f^{-1}(N)) \geq \tau'_k(N) \geq \bigwedge\{\tau'_k(N) : k \in \Delta\} = \tau(N)$ dır. Dolayısıyla $f_k : (X_k,\tau_k) \to (Y,\tau)$ smooth süreklidir. Bu τ smooth topolojisinin Y üzerindeki her $k \in \Delta$ için f_k yı smooth sürekli yapan en güçlü smooth topoloji olduğunu gösterelim. τ', Y üzerinde her $k \in \Delta$ için $f_k : (X_k,\tau_k) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli yapan herhangi bir smooth topoloji ve $N \in I^Y$ k.v. Her $k \in \Delta$ için $f_k : (X_k,\tau_k) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli olduğundan her $k \in \Delta$ için $\tau'_k(N) = \tau_k(f_k^{-1}(N)) \geq \tau'(N)$ dir. Buradan $\tau(N) = \bigwedge\{\tau'_k(N) : k \in N\} \geq \tau'(N)$ elde edilir. Dolayısıyla $\tau(N) \geq \tau'(N)$ dir.

2.4.7. Bir Klasik Topoloji İle Bir Smooth Topolojinin Üretilmesi

Bu bölümde, verilen bir X kümesi üzerindeki bir T topolojisinden, X üzerinde bir τ smooth topolojisinin elde edilmesi gösterilecektir. Diğer bir ifade ile X üzerindeki bir $T : \{0,1\}^X \to \{0,1\}$ topolojisine bir $\tau : I^X \to I$ smooth topolojisi karşılık getirilecektir.

X bir küme, $T : \{0,1\}^X \to \{0,1\}$, X üzerinde bir topoloji olsun. Bilindiği gibi $A \subset X$ altkümesinin (X,T) da kapanışı,

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall U \in T_x \text{ için } \exists y \in A \cap U\}$$

ile tanımlanır. (T_x, $x \in X$ noktasının T topolojisine göre bütün komşuluklarının ailesini gösterir.) A ve $\overline{A}$ altkümeleri karakteristik fonksiyon olarak düşünülürse

$$\overline{A} : X \to \{0,1\} \ , \ \overline{A}(x) := \text{İnf}\{\text{Sup}\{A(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$$

olduğu gösterilebilir. Benzer şekilde A altkümesinin içi,

$$A^0 := \{x \in X : \exists U \in T_x \ , \ U \subset A\}$$

ile tanımlanır. A ve A^0 altkümeleri karakteristik fonksiyon olarak düşünülürse

$$A^0 : X \to \{0,1\} \ , \ A^0(x) = \text{Sup}\{\text{İnf}\{A(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$$

olduğu gösterilebilir. Yani

$$\overline{A}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \quad \text{ve} \quad A^0(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A^0$$

dır. Bu düşünceyi fuzzy altkümelerine genişleterek aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 42: (X,T) bir topolojik uzay ve $M \in I^X$ olmak üzere,

$$\overline{M} : X \to I\ ,\quad \overline{M}(x) := \text{İnf}\{\text{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$$

ve

$$M^0 : X \to I\ ,\quad M^0(x) := \text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$$

olarak tanımlanır. $\overline{M}, M^0 \in I^X$ fuzzy altkümelerine $M \in I^X$ fuzzy altkümesinin (X,T) topolojik uzayında sırasıyla kapanışı ve içi denir.

Teorem 33: (X,T) topolojik uzay ve $M \in I^X$ olsun. Bu durumda

a) $\overline{M}$ fonksiyonu üstten yarı-süreklidir.

b) M^0 fonksiyonu alttan yarı-süreklidir.

c) M üstten yarı-süreklidir $\Leftrightarrow M = \overline{M}$

d) M alttan yarı-süreklidir $\Leftrightarrow M = M^0$

İspat:

a) $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ k.v. $\overline{M}(x)$ in tanımından

$$\exists V \in T_x \text{ öyleki } \text{Sup}\{M(y) : y \in V\} < \overline{M}(x) + \varepsilon \qquad (1)$$

dır. Bu $V \in T_x$ için

$$\exists G \in T \text{ öyleki } x \in G \subset V$$

dır. Buradan

$$\text{Sup}\{M(y) : y \in G\} \le \text{Sup}\{M(y) : y \in V\} \qquad (2)$$

dır. Bu $G \in T_x$ istenilen koşulu sağlar. Gerçekten, $z \in G$ keyfi için $G \in T_z$ olduğundan (1) ve (2) den $\overline{M}(z) = \text{İnf}\{\text{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_z\} \le \text{Sup}\{M(y) : y \in G\} < \overline{M}(x) + \varepsilon$ dır. Dolayısıyla $\overline{M}$ üstten yarı-süreklidir.

b) $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ k.v. $M^0(x)$ in tanımından

$$\exists V \in T_x \text{ öyleki } \text{İnf}\{M(y) : y \in V\} > M^0(x) - \varepsilon \qquad (3)$$

dır. Bu $V \in T_x$ için

$$\exists G \in T \text{ öyleki } x \in G \subset V$$

dır. Buradan

$$\text{İnf}\{M(y) : y \in G\} \ge \text{İnf}\{M(y) : y \in V\} \qquad (4)$$

dır. Bu $G \in T_x$ istenilen koşulu sağlar. Gerçekten, $z \in G$ keyfi için $G \in T_z$ olduğundan (3) ve (4) den $M^0(z) = \text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_z\} \ge \text{İnf}\{M(y) : y \in G\} > M^0(x) - \varepsilon$ dır. Dolayısıyla M^0 alttan yarı-süreklidir.

c) "$\Leftarrow$" a) dan açık

"$\Rightarrow$" Teorem 34 den $M \leq \overline{M}$ dır. Diğer yandan $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ k.v. M üstten yarı-sürekli olduğundan

$$\exists V \in T_x \text{ öyleki } \forall y \in V \text{ için } M(y) < M(x) + \varepsilon$$

dır. Buradan $\operatorname{Sup}\{M(y) : y \in V\} \leq M(x) + \varepsilon$ dur. Buradan $\overline{M}(x) = \operatorname{İnf}\{\operatorname{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \leq \operatorname{Sup}\{M(y) : y \in V\} < M(x) + \varepsilon$ dur. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\overline{M} \leq M$ elde edilir. Dolayısıyla $M = \overline{M}$ dır.

d) "$\Leftarrow$" b) dan açık.

"$\Rightarrow$" Teorem 34 den $M \geq M^0$ dır. Diğer yandan $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ k.v. M alttan yarı-sürekli olduğundan

$$\exists V \in T_x \text{ öyleki } \forall y \in V \text{ için } M(y) > M(x) - \varepsilon$$

dır. Buradan $\operatorname{İnf}\{M(y) : y \in V\} \geq M(x) - \varepsilon$ dur. Buradan da $M^0(x) = \operatorname{Sup}\{\operatorname{İnf}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \geq \operatorname{İnf}\{M(y) : y \in V\} \geq M(x) - \varepsilon$ dır. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $M \leq M^0$ elde edilir. Dolayısıyla $M = M^0$ dir.■

Teorem 34: (X,T) topolojik uzay, $M, N \in I^X$ ve $c \in I^X$ sabit olsun.

a) $M \leq \overline{M}$

b) $\overline{M \vee N} = \overline{M} \vee \overline{N}$

c) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$

d) $\bar{c} = c$

e) $M^0 \leq M$

f) $(M \wedge N)^0 \leq M^0 \wedge N^0$

g) $(M^0)^0 = M^0$

h) $c^0 = c$

İspat:

a) $x \in X$ k.v. Her $U \in T_x$ için $x \in U$ olduğundan $M(x) \leq \operatorname{Sup}\{M(y) : y \in U\}$ dır. Buradan $M(x) \leq \operatorname{İnf}\{\operatorname{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} = \overline{M}(x)$ dır. $x \in X$ olduğundan $M \leq \overline{M}$ elde edilir.

b) $x \in X$ k.v.

$$\begin{aligned} \overline{M \vee N}(x) &= \operatorname{İnf}\{\operatorname{Sup}\{(M \vee N)(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \\ &= \operatorname{İnf}\{\operatorname{Sup}\{M(y) \vee N(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \\ &= \operatorname{İnf}\{\operatorname{Sup}\{M(y) : y \in U\} \vee \operatorname{Sup}\{N(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \\ &= \operatorname{İnf}\{\operatorname{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \vee \operatorname{İnf}\{\operatorname{Sup}\{N(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \qquad (*) \end{aligned}$$

$= \overline{M}(x) \vee \overline{N}(x)$

$= (\overline{M} \vee \overline{N})(x)$

dır. (*) eşitliğini gerçekleyelim.

$k := \text{İnf}\{\text{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \vee \text{İnf}\{\text{Sup}\{N(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$ ile gösterelim.

Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi için

$\exists U_1, U_2 \in T_x$ öyleki $\text{Sup}\{N(y) : y \in U_1\} < k + \varepsilon$ ve $\text{Sup}\{M(y) : y \in U_2\} < k + \varepsilon$

dır.

$$U_3 := U_1 \cap U_2$$

olarak tanımlanırsa $U_3 \in T_x$ dır. $U_3 \subset U_1$ ve $U_3 \subset U_2$ olduğundan

$\text{Sup}\{M(y) : y \in U_3\} \vee \text{Sup}\{N(y) : y \in U_3\} \leq \text{Sup}\{M(y) : y \in U_1\} \vee \text{Sup}\{N(y) : y \in U_2\} < k + \varepsilon$

dır. Buradan,

$$\text{İnf}\{\text{Sup}\{M(y): y \in U\} \vee \text{Sup}\{N(y): y \in U\}: U \in T_x\} \leq \text{Sup}\{M(y): y \in U_3\} \vee \text{Sup}\{N(y): y \in U_3\} < k + \varepsilon$$

dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\text{İnf}\{\text{Sup}\{M(y) : y \in U\} \vee \text{Sup}\{N(y) : y \in U\}: U \in T_x\} \leq k$ elde edilir. Diğer taraf açıktır. Dolayısıyla (*) eşitliği elde edilir.

c) Bkz. Teorem 33.

d) Açık.

e) $x \in X$ k.v. Her $U \in T_x$ için $x \in U$ olduğundan $\text{İnf}\{M(y) : y \in U\} \leq M(x)$ dır. Buradan $M^0(x) = \text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \leq M(x)$ dır. $x \in X$ keyfi olduğundan $M^0 \leq M$ elde edilir.

f) $x \in X$ k.v.

$(M \wedge N)^0(x) = \text{Sup}\{\text{İnf}\{(M \wedge N)(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$

$= \text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y) \wedge N(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$

$= \text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y) : y \in U\} \wedge \text{İnf}\{N(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$

$= \text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \wedge \text{Sup}\{\text{İnf}\{N(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$ (**)

$= M^0(x) \wedge N^0(x)$

$= (M^0 \vee N^0)(x)$

dır. (**) eşitliğini gerçekleyelim.

$k := \text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \wedge \text{Sup}\{\text{İnf}\{N(y) : y \in U\} : U \in T_x\}$ ile gösterelim. $\varepsilon > 0$ keyfi için

$\exists U_1, U_2 \in T_x$ öyleki $\text{İnf}\{M(y) : y \in U_1\} > k - \varepsilon$ ve $\text{İnf}\{N(y) : y \in U_2\} > k - \varepsilon$

dır.

$$U_3 := U_1 \cap U_2$$

olarak tanımlanırsa $U_3 \in T_x$ dır. $U_3 \subset U_1$ ve $U_3 \subset U_2$ olduğundan $\text{İnf}\{M(y): y \in U_3\} \wedge \text{İnf}\{N(y): y \in U_3\} \geq \text{İnf}\{M(y): y \in U_1\} \wedge \text{İnf}\{N(y): y \in U_2\} > k - \varepsilon$ dır.

Buradan

$$\text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y): y \in U\} \vee \text{İnf}\{N(y): y \in U\}: U \in T_x\} \geq \text{İnf}\{M(y): y \in U_3\} \wedge \text{İnf}\{N(y): y \in U_3\} > k - \varepsilon$$

dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\text{Sup}\{\text{İnf}\{M(y): y \in U\} \vee \text{İnf}\{N(y): y \in U\}: U \in T_x\} \geq k$ elde edilir. Diğer taraf açıktır. Dolayısıyla (**) eşitliği elde edilir.

g) Bkz. Teorem 33.

h) Açık.■

Teorem 35: (X,T) bir topolojik uzay olsun.

$$T' := \{M \in I^X : M = M^0\}$$

ile tanımlanan T', X üzerinde R. Lowen anlamında bir fuzzy topolojisidir. (Bkz. 2.5.2.).

İspat:

1) Teorem 34 h) dan her $c \in I^X$ sabit için $c^0 = c$ olduğundan $c \in T'$ dür.

2) $M, N \in T'$ k.v. $M = M^0$ ve $N = N^0$ Teorem 34 f) den $(M \wedge N)^0 = M^0 \wedge N^0 = M \wedge N$ dır. Dolayısıyla $M \wedge N \in T'$ dir.

3) $\{M_i : i \in J\} \subset T'$ ve $x \in X$ k.v. her $i \in J$ için $M_i = M_i^0$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \vee\{M_i : i \in J\}(x) &= \vee\{M_i^0(x) : i \in J\} \\ &= \vee\{\text{Sup}\{\text{İnf}\{M_i(y): y \in U\}: U \in T_x\}: i \in J\} \\ &\leq \text{Sup}\{\text{İnf}\{\vee\{M_i(y): i \in J\}: y \in U\}: U \in T_x\} \\ &= (\vee\{M_i : i \in J\})^0(x) \end{aligned}$$

dır. Buradan $\vee\{M_i : i \in J\} \leq (\vee\{M_i : i \in J\})^0$ dir. Teorem 34 den $\vee\{M_i : i \in J\} \geq (\vee\{M_i : i \in J\})^0$ olduğundan $\vee\{M_i : i \in J\} = (\vee\{M_i : i \in J\})^0$ elde edilir. Buradan $\vee\{M_i : i \in J\} \in T'$ dir. Dolayısıyla T', X üzerinde R. Lowen anlamında fuzzy topolojidir.■

Teorem 36: (X,T) bir topolojik uzay olsun.

$$\tau : I^X \to I, \ \tau(M) := (M \tilde{\subset} M^0)$$

ile tanımlanan τ, X üzerinde bir smooth topolojidir. Ayrıca Bu τ smooth topolojisinin $\{0,1\}^X$ e kısıtlanışı T topolojisini verir.

İspat:

(O1) $\tau(0_X)=0_X \breve{\subset} 0_X^0=\bigwedge\{(0_X^c \vee 0_X^0)(x): x\in X\}=\bigwedge\{(1_X \vee 0_X^0)(x): x\in X\}=1$ dır.

Benzer şekilde $\tau(1_X)=1$ dir.

(O2) $M,N\in I^X$ k.v.

$$\begin{aligned}
\tau(M\wedge N) &= ((M\wedge N)\breve{\subset}(M\wedge N)^0)\\
&= \bigwedge\{((M\wedge N)^c \vee (M\wedge N)^0)(x): x\in X\}\\
&= \bigwedge\{((M^c\vee N^c)\vee(M^0\wedge N^0))(x): x\in X\}\\
&= \bigwedge\{(((M^c\vee N^c)\vee M^0)\wedge((M^c\vee N^c)\vee N^0))(x): x\in X\}\\
&= \bigwedge\{(M^c\vee N^c\vee M^0)(x): x\in X\}\wedge \bigwedge\{(M^c\vee N^c\vee N^0)(x): x\in X\}\\
&\geq \bigwedge\{(M^c\vee M^0)(x): x\in X\}\wedge \bigwedge\{(N^c\vee N^0)(x): x\in X\}\\
&= (M\breve{\subset} M^0)\wedge(N\breve{\subset} N^0).\\
&= \tau(M)\wedge\tau(N)
\end{aligned}$$

(O3) $\{M_i: i\in J\}\subset I^X$ k.v.

$$\begin{aligned}
\tau(\bigvee\{M_i: i\in J\}) &= (\bigvee\{M_i: i\in J\}\breve{\subset}(\bigvee\{M_i: i\in J\})^0)\\
&= \bigwedge\{((\bigvee\{M_i: i\in J\})^c \vee(\bigvee\{M_i: i\in J\})^0)(x): x\in X\}\\
&= \bigwedge\{(\bigwedge\{M_i^c: i\in J\})\vee(\bigvee\{M_i^0: i\in J\}))(x): x\in X\}\\
&= \bigwedge\{(\bigwedge\{(M_i^c\vee(\bigvee\{M_i^0: i\in J\})): i\in J\})(x): x\in X\}\\
&\geq \bigwedge\{(\bigwedge\{(M_i^c\vee M_i^0): i\in J\})(x): x\in X\}\\
&= \bigwedge\{\bigwedge\{(M_i^c\vee M_i^0)(x): x\in X\}: i\in J\}\\
&= \bigwedge\{(M_i\breve{\subset} M_i^0): i\in J\}\\
&= \bigwedge\{\tau(M_i): i\in J\}
\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla τ, X üzerinde smooth topolojidir. Bu τ smooth topolojisinin $\{0,1\}^X$ e kısıtlanışı T ile aynıdır. Yani

$$T:\{0,1\}^X \to \{0,1\},\ T(A):=\begin{cases}1, & A\in T\\ 0, & A\notin T\end{cases}$$

olarak gözönüne alınırsa $\tau|\{0,1\}^X=T$ dır. Gerçekten, $A\in\{0,1\}^X$ keyfi için

$$\tau(A)=A\breve{\subset} A^0=\bigwedge\{(A^c\vee A^0)(x): x\in X\}=\begin{cases}1, & A\subset A^0\\ 0, & A\not\subset A^0\end{cases}$$

olduğu tanımdan görülür. Eğer $A\subset A^0$ ise $\tau(A)=1$ ve $A=A^0$ olduğundan $A\in T$ yani $T(A)=1$ dır. Eğer $A\not\subset A^0$ ise $\tau(A)=0$ ve $A\neq A^0$ olduğundan $A\notin T$ yani $T(A)=0$ dır. Dolayısıyla $\tau|\{0,1\}^X=T$ elde edilir.■

Tanım 43: (X,T) bir topolojik uzay olsun.

$$\tau : I^Y \rightarrow I\,,\ \tau(M) := (M \breve{\subset} M^0)$$

ile tanımlanan τ smooth topolojisine T topolojisi tarafından üretilen smooth topoloji denir.

Gösterim 2: Bir X kümesi üzerinde bir T topolojisi tarafından üretilen τ smooth topolojisi ile elde edilen (X,τ) smooth topolojik uzayların kategorisi IFT ile gösterilir.

Bu şekilde elde edilen IFT, ST nin bir bütünüyle alt kategorisi olduğu kolayca görülür.

Lemma 1: (X,T) topolojik uzay ve $M \in I^X$ olsun. Bu durumda

$$\overline{M} \breve{\subset} M = M^c \breve{\subset} (M^c)^0$$

dır.

İspat: Önce $(\overline{M})^c = (M^c)^0$ olduğunu gösterelim. $x \in X$ k.v.

$$\begin{aligned}
(\overline{M})^c(x) &= 1 - \overline{M}(x) \\
&= 1 - \operatorname{Inf}\{\operatorname{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \\
&= \operatorname{Sup}\{1 - \operatorname{Sup}\{M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \\
&= \operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{1 - M(y) : y \in U\} : U \in T_x\} \\
&= (M^c)^0(x)
\end{aligned}$$

dır. Buradan $(\overline{M})^c = (M^c)^0$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\overline{M} \breve{\subset} M &= \operatorname{Inf}\{((\overline{M})^c \vee M)(x) : x \in X\} \\
&= \operatorname{Inf}\{(M \vee (M^c)^0)(x) : x \in X\} \\
&= \operatorname{Inf}\{((M^c)^c \vee (M^c)^0)(x) : x \in X\} \\
&= M^c \breve{\subset} (M^c)^0
\end{aligned}$$

elde edilir.■

Teorem 37: (X,T) bir topolojik uzay, $M \in I^X$ ve τ, T topolojisi ile üretilen smooth topoloji ise

$$\tau^*(M) = \overline{M} \breve{\subset} M$$

dir.

İspat: Lemma 1 den $\tau^*(M) = \tau(M^c) = M^c \breve{\subset} (M^c)^0 = \overline{M} \breve{\subset} M$ dır.■

Teorem 38: (X,T) ve (Y,T') iki topolojik uzay ve τ ve τ' sırasıyla T ve T' ile üretilen smooth topolojiler olsun. Bu durumda $f:(X,T) \rightarrow (Y,T')$ sürekli ise $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\tau')$ smooth süreklidir.

İspat: $N \in I^Y$ k.v.

$$(f^{-1}(N))^c(x) = f^{-1}(N^c)(x) = N^c(f(x))\,,\ x \in X \qquad (1)$$

dır. $f:(X,T)\to(Y,T')$ sürekli olduğundan,

$$\{f^{-1}(V):V\in T'_{f(x)}\}\subset T_x\,,\ x\in X \tag{2}$$

dır ve

$$\{f(y):y\in f^{-1}(V)\}\subset V\,,\ V\subset Y \tag{3}$$

dır. (2) ve (3) den

$$\begin{aligned}(f^{-1}(N))^0(x) &= \operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{f^{-1}(N)(y):y\in U\}:U\in T_x\}\\ &= \operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{N(f(y)):y\in U\}:U\in T_x\}\\ &\geq \operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{N(f(y)):y\in f^{-1}(V)\}:V\in T'_{f(x)}\}\\ &\geq \operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{N(z):z\in V\}:V\in T'_{f(x)}\}\\ &= N^0(f(x)).\end{aligned}$$

Buradan

$$(f^{-1}(N))^0(x)\geq N^0(f(x))\,,\ x\in X \tag{4}$$

dır. (1) ve (4) den

$$\begin{aligned}\tau(f^{-1}(N)) &= f^{-1}(N)\,\breve{\subset}\,(f^{-1}(N))^0\\ &= \wedge\{((f^{-1}(N))^c \vee (f^{-1}(N))^0)(x):x\in X\}\\ &\geq \wedge\{(N^c\vee N^0)(f(x)):x\in X\}\\ &\geq \wedge\{(N^c\vee N^0)(z):z\in Y\}\\ &= N\,\breve{\subset}\,N^0\\ &= \tau(N)\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ smooth süreklidir.

Bu teorem topolojik uzayların kategorisi TOP ile smooth topolojik uzayların kategorisi ST arasında aşağıdaki funktoru tanımlamamızı sağlar. Gerçekten,

$$\Phi:\mathrm{TOP}\to\mathrm{ST}\,,\ \Phi(X,T):=(X,\tau)$$
$$\Phi(f):=f$$

bir funktordur. Burada τ, T topolojisi ile X üzerinde üretilen smooth topolojidir. Bkz. Tanım 43. Φ(TOP) Gösterim 2 de gösterilen IFT kategorisidir.

Ayrıca ST ile TOP arasında aşağıdaki gibi bir funktor tanımlanır.

(X,τ) smooth topolojik uzay olmak üzere

$$T:=\{M\in\{0,1\}^X:\tau(M)=1\}$$

ile tanımlanan T, X üzerinde bir topolojidir. Bu durumda

$$\Psi:\mathrm{ST}\to\mathrm{TOP}\,,\ \Psi(X,\tau):=(X,T)$$

$$\Psi(f) := f$$

ile tanımlanan Ψ dönüşümü ST den TOP a bir funktordur. Gerçekten, (X,τ_1) ve (Y,τ_2) smooth topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ smooth sürekli dönüşüm olsun. $\Psi(X,\tau_1):=(X,T_1)$ ve $\Psi(X,\tau_2):=(X,T_2)$ ile gösterilirse $f:(X,T_1)\to(X,T_2)$ sürekli olduğu gösterilebilir. Gerçekten $M\in T_2$ keyfi için ve f smooth sürekli olduğundan $\tau_1(f^{-1}(M))\geq\tau_2(M)=1$ dır. Buradan $\tau_1(f^{-1}(M))=1$ ve dolayısıyla $f^{-1}(M)\in T_1$ elde edilir. Bu ise $f:(X,T_1)\to(X,T_2)$ nin sürekli olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\Psi:ST\to TOP$ bir funktordur.■

Teorem 39: Fuzzy topolojik uzayların kategorisi FT, smooth topolojik uzayların kategorisi ST nin bütünüyle alt kategorisidir.

İspat: (X,T) fuzzy topolojik uzayı verilsin. T fuzzy topolojisi

$$T: I^X \to \{0,1\}\subset I,\ T(M):=\begin{cases}1, & M\in T\\ 0, & M\notin T\end{cases}$$

şeklinde düşünülebilir. Bu T dönüşümü X üzerinde bir smooth topoloji tanımlar. Diğer yandan $f:(X,T_1)\to(Y,T_2)$ fuzzy sürekli ise $f:(X,T_1)\to(X,T_2)$ smooth sürekli olduğu gösterilebilir. Gerçekten, $M\in I^Y$ keyfi verilsin. $T_2(M)=0$ ise $T_1(f^{-1}(M))\geq T_2(M)$ dır. $T_2(M)=1$ ise $M\in T_2$ dır. f fuzzy sürekli olduğundan $f^{-1}(M)\in T_1$ ve buradan $T_1(f^{-1}(M))=1$ dır. Dolayısıyla $T_1(f^{-1}(M))\geq T_2(M)$ dır. Son olarak (X,T_1) ve (Y,T_2) fuzzy topolojik uzaylar ve $f:(X,T_1)\to(Y,T_2)$ smooth sürekli olsun. $M\in T_2$ keyfi için $T_2(M)=1$ dir. f smooth sürekli olduğundan $T_1(f^{-1}(M))\geq T_2(M)=1$ dir. Buradan $T_1(f^{-1}(M))=1$ ve $f^{-1}(M)\in T_1$ dir. Buradan $f:(X,T_1)\to(Y,T_2)$ fuzzy süreklidir. Dolayısıyla FT, ST nin bütünüyle alt kategorisidir.■

2.4.8. Fuzzy Kümelerinin Kompaktlık Derecesi

(X,τ) bir stu ve $\mathcal{U}\subset I^X$ olsun.

$$\tau(\mathcal{U}) := \bigwedge\{\tau(M) : M\in\mathcal{U}\}$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{U}_0$ ile $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt ailesi gösterilir.

Tanım 44: (X,τ) bir stu, $M\in I^X$ ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. M fuzzy altkümesinin α-açık kümelerine göre kompaktlık derecesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$c_\alpha: I^X\to I,\ c_\alpha(M) := \bigwedge\{(M\check{\subset}\bigvee\mathcal{U})^c \vee (\bigvee\{M\check{\subset}\bigvee\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}\}) : \tau(\mathcal{U})\geq\alpha\}$$

Tanım 45: (X,τ) bir stu ve $M \in I^X$ olsun. Bu durumda $c_0(M) := \wedge\{c_\alpha(M) : \alpha \in (0,1]\}$ ile tanımlanır.

Örnek 6: (X,T) bir topolojik uzay ve

$$\mathcal{C}:\{0,1\}^X \to \{0,1\},\ \mathcal{C}(A) := \wedge\{(A \subset \vee\mathcal{U})^c \vee \operatorname{Sup}\{(A \subset \vee\mathcal{U}_0) : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} : \mathcal{U} \subset T\}$$

ile tanımlanan dönüşüm için

$$\mathcal{C}(A) = 1 \Leftrightarrow A \text{ kompakt}$$

sağlanır. Ayrıca her $\alpha \in (0,1]\}$ için $c_\alpha(A) = \mathcal{C}(A)$ dır.

Teorem 40: (X,τ) bir stu. $M,N \in I^X$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$c_\alpha(M \vee N) \geq c_\alpha(M) \vee c_\alpha(N)$$

dır.

İspat: Bkz. [9].■

Teorem 41: (X,τ), (Y,τ') iki stu. $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli, $M \in I^X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$c_\alpha(M) \leq c_\alpha(f(M))$$

dir.

İspat: Bkz. [9].■

Teorem 42: $\{(X_k,\tau_k) : k \in \Delta\}$ smooth topolojik uzayların bir ailesi ve her $k \in \Delta$ için $M_k \in I^{X_k}$ ise $c_1(\prod\{M_k : k \in \Delta\}) = \wedge\{c_1(M_k) : k \in \Delta\}$ dır.

İspat: Bkz. [9].■

Teorem 43: (X,T) bir topolojik uzay ve $M \in I^X$ olsun. Bu durumda

a) $c_1(M) \leq \tau^*(M)$

b) (X,T) kompakt ise $\tau^*(M) \leq c_1(M)$

İspat: Bkz. [9].■

Sonuç 4: (X,T) bir kompakt Hausdorff fuzzy topolojik uzay ve $M \in I^X$ ise $\tau^*(M) = c_1(M)$ dır.

2.5. Smooth Topolojik Uzaylarda Fuzzy Kümelerinin Bağlantılılık Derecesi ve Kompaktlık

Bu bölümde A.P. Sostak'ın 1988 yılında yayınlanan makalesi incelenmiştir [10]. Bu çalışmada kısaca Fuzzy içermenin bazı özellikleri ile, kompaktlığın derecelendirilmesi, ayırma aksiyomlarının derecelendirilmesi ve bağlantılılık derecelendirilmesi kavramları verilmiş ve bunların bazı özellikleri ile aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Özellikle, kompakt uzayların kapalı alt kümelerinin de kompakt olması ve kompakt Hausdorff uzayların regüler olması ifadelerinin smooth topolojik uzaylarındaki karşılıkları elde edilmiştir.

2.5.1. Fuzzy Kümeleri ve Fuzzy İçerme

Teorem 44: X bir küme, $M_1,M_2,M_3,M_4 \in I^X$ ve $M_1 \leq M_2$, $M_4 \leq M_3$ ise $M_1 \breve{\subset} M_3 \geq M_2 \breve{\subset} M_4$ dür.

İspat:

$$\begin{aligned} M_1 \breve{\subset} M_3 &= \bigwedge\{(M_1^c \vee M_3)(x) : x \in X\} \\ &\geq \bigwedge\{(M_2^c \vee M_4)(x) : x \in X\} \\ &= M_2 \breve{\subset} M_4 . \blacksquare \end{aligned}$$

Teorem 45: X bir küme ve $M,N \in I^X$ ise $M \breve{\subset} N = N^c \breve{\subset} M^c$ dır.

İspat:

$$\begin{aligned} M \breve{\subset} N &= \bigwedge\{(M^c \vee N)(x) : x \in X\} \\ &= \bigwedge\{((N^c)^c \vee M^c)(x) : x \in X\} \\ &= N^c \breve{\subset} M^c \blacksquare . \end{aligned}$$

Teorem 46: X bir küme ve $M_1,M_2,M_3,M_4 \in I^X$ ise

$((M_1 \vee M_2) \breve{\subset} (M_3 \vee M_4)) \geq ((M_1 \breve{\subset} M_3) \wedge (M_2 \breve{\subset} M_4)) . \blacksquare$

İspat:

$$\begin{aligned} ((M_1 \vee M_2) \breve{\subset} (M_3 \vee M_4)) &= \bigwedge\{((M_1 \vee M_2)^c \vee (M_3 \vee M_4))(x) : x \in X\} \\ &= \bigwedge\{((M_1^c \wedge M_2^c) \vee (M_3 \vee M_4))(x) : x \in X\} \\ &= \bigwedge\{(((M_1^c \vee (M_3 \vee M_4)) \wedge (M_2^c \vee (M_3 \vee M_4)))(x) : x \in X\} \\ &\geq \bigwedge\{((M_1^c \vee M_3) \wedge (M_2^c \vee M_4))(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

$$= \bigwedge\{(M_1^c \vee M_3)(x) : x \in X\} \wedge \bigwedge\{(M_2^c \vee M_4)(x) : x \in X\}$$

$$= (M_1 \check{\subset} M_3) \vee (M_2 \check{\subset} M_4). \blacksquare$$

Teorem 47: X bir küme ve her $i \in J$ için $M, N_i \in I^X$ ise $(M \check{\subset} \bigwedge\{N_i : i \in J\}) \check{\subset} \bigwedge\{(M \check{\subset} N_i) : i \in J\}$ dır.

İspat:

$$(M \check{\subset} \bigwedge\{N_i : i \in J\}) = \bigwedge\{(M^c \vee (\bigwedge\{N_i : i \in J\}))(x) : x \in X\}$$
$$= \bigwedge\{(\bigwedge\{(M^c \vee N_i) : i \in J\})(x) : x \in X\}$$
$$= \bigwedge\{\bigwedge\{(M^c \vee N_i)(x) : x \in X\} : i \in J\}$$
$$= \bigwedge\{(M^c \check{\subset} N_i) : i \in J\}. \blacksquare$$

Teorem 48: X bir küme, $M, N, P \in I^X$, $M \check{\subset} N > \frac{1}{2}$ ve $N \check{\subset} P > \frac{1}{2}$ ise $M \check{\subset} P \geq (M \check{\subset} N) \wedge (N \check{\subset} P)$ dir.

İspat:

$$(M \check{\subset} N) \wedge (N \check{\subset} P) = \bigwedge\{(M^c \vee N)(x) : x \in X\} \wedge \bigwedge\{(N^c \vee P)(x) : x \in X\} =: k > \frac{1}{2} \qquad (1)$$

olsun. $M \check{\subset} P = \bigwedge\{(M^c \vee P)(x) : x \in X\} < k$ olduğunu varsayalım. Buradan

$$\exists y \in X \text{ öyleki } M^c(y) < k \text{ ve } P(y) < k \qquad (2)$$

dır. (1) den $M^c(y) \vee N(y) \geq k$ ve $N^c(y) \vee P(y) \geq k$ dır. (2) den $N(y) \geq k > \frac{1}{2}$ ve $N^c(y) \geq k > \frac{1}{2}$ dır. Buradan $N(y) > \frac{1}{2}$ ve $N^c(y) > \frac{1}{2}$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde varsayım yanlış ve $M \check{\subset} P \geq k = (M \check{\subset} N) \wedge (N \check{\subset} P)$ dir. $\blacksquare$

Teorem 49: X ve Y iki küme, $M, N \in I^X$, $A, B \in I^Y$ ve $f : X \to Y$ dönüşüm ise $M \check{\subset} N \leq f(M) \check{\subset} f(N)$ ve $A \check{\subset} B \leq f^{-1}(A) \check{\subset} f^{-1}(B)$ dir.

İspat: $f(M) \check{\subset} f(N) = \bigwedge\{((f(M))^c \vee f(N))(y) : y \in Y\} =: k$ olsun. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi için

$$\exists y_0 \in Y \text{ öyleki } (f(M))^c(y_0) \vee f(N)(y_0) < k + \varepsilon$$

dır. Buradan

$$\left.\begin{aligned} (f(M))^c(y_0) &= 1 - f(M)(y_0) \\ &= 1 - \mathrm{Sup}\{M(z) : z \in f^{-1}(y_0)\} \\ &= \mathrm{İnf}\{1 - M(z) : z \in f^{-1}(y_0)\} \\ &< k + \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ve

$$f(N)(y_0) = \mathrm{Sup}\{N(z) : z \in f^{-1}(y_0)\} < k + \varepsilon \qquad (2)$$

dır. (1) den

$$\exists z_0 \in f^{-1}(y_0) \text{ öylcki } M^c(z_0) < k + \varepsilon$$

dır. (2) den bu $z_0 \in f^{-1}(y_0)$ için $N(z_0) < k + \varepsilon$ elde edilir. Buradan

$M \tilde{\subset} N = \bigwedge\{(M^c \vee N)(x) : x \in X\} \leq M^c(z_0) \vee N(z_0) < k + \varepsilon$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$M \tilde{\subset} N \leq k = f(M) \tilde{\subset} f(N)$ dır. Diğer kısım için

$$f^{-1}(A) \tilde{\subset} f^{-1}(B) = \bigwedge\{((f^{-1}(A))^c \vee f^{-1}(B))(x) : x \in X\}$$

$$= \bigwedge\{(f^{-1}(A^c) \vee f^{-1}(B))(x) : x \in X\} =: k$$

olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi için

$$\exists x_0 \in X \text{ öyleki } f^{-1}(A^c)(x_0) \vee f^{-1}(B)(x_0) < k + \varepsilon$$

dır. Buradan $A^c(f(x_0)) \vee B(f(x_0)) < k + \varepsilon$ dir. Dolayısıyla

$A \tilde{\subset} B = \bigwedge\{(A^c \vee B)(y) : y \in Y\} \leq (A^c \vee B)(f(x_0)) < k + \varepsilon$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$A \tilde{\subset} B \leq k = f^{-1}(A) \tilde{\subset} f^{-1}(B)$ dır.■

Tanım 46: X bir küme ve $M \in I^X$ olsun. Eğer $\operatorname{Sup}\{M(x) : x \in X\} = 1$ ise $M \in I^X$ e normlanmış denir.

Gösterim 3: X bir küme, $M \in I^X$ ve $\mathcal{U} \subset I^X$ olsun.

$$\bigvee \mathcal{U} := \bigvee\{U : U \in \mathcal{U}\} \text{ ve } \bigwedge \mathcal{U} := \bigwedge\{U : U \in \mathcal{U}\}$$

ile gösterilir. $\mathcal{U}$ nun herhangi bir sonlu altailesini $\mathcal{U}_0$, $X_M = M^{-1}(0,1]$ ve $\beta \in I$ olmak üzere her $M(x) \neq 0$ için $M(x) > \beta$ ise $M \underset{X_M}{>} \beta$ ile gösterilir.

2.5.2. Smooth Topolojik Uzaylarda Taban ve Alttaban

X bir küme ve $\tau : I^X \to I$ dönüşümünü aşağıdaki koşullar ile gözönüne alalım.

1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$,

2) $\tau(M \wedge N) \geq \tau(M) \wedge \tau(N)$, $M, N \in I^X$,

3) $\tau(\bigvee\{M_i : i \in J\} \geq \bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\}$, $\{M_i : i \in J\} \dot{\subset} I^X$,

4) $\tau(I^X) \subset \{0,1\}$,

5) $\tau(c) = 1$, $c \in I^X$ sabit,

6) $\tau^{-1}(1) \subset \{0,1\}^X$.

τ dönüşümü X üzerinde 1)-3) koşulları ile smooth topolojiye, 1)-4) koşulları ile fuzzy topolojiye, 1), 2), 3) ve 5) ile Lowen (anlamında) smooth topolojiye, 1)-5) koşulları ile Lowen (anlamında) fuzzy topolojiye ve 1)-4), 6) ile klasik topolojiye dönüşür.

Tanım 47: (X,τ) bir stu ve $B \subset I^X$ olsun. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ ve her $U \in \tau_\alpha$ için

$$\exists \{V_i : i \in J\} \subset B \cap \tau_\alpha \text{ öyleki } U = \bigvee \{V_i : i \in J\}$$

ise $B \subset I^X$ altkümesine τ için bir ***tabandır*** denir.

Tanım 48: (X,τ) bir stu ve $S \subset I^X$ olsun. Eğer,

$$B = \{U_1 \wedge \ldots \wedge U_n : U_k \in S \;,\; 1 \le k \le n \;,\; n \in \mathbb{N}\}$$

ailesi τ için bir taban ise $S \subset I^X$ altkümesine τ için bir ***alttaban*** denir.

2.5.3. Fuzzy Kümelerinin Kompaktlık Derecelendirilmesi : Tanımlar ve Temel Özellikler

Tanım 49: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda,

$$C_\alpha(M) := \{\beta \in I : \forall \mathcal{U} \subset \tau_\alpha \text{ öyleki } M \,\tilde{\subset}\, \bigvee \mathcal{U} \ge \beta \text{ için } \operatorname{Sup}\{M \,\tilde{\subset}\, \bigvee \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \ge \beta\}$$

ile tanımlanan $C_\alpha(M)$ kümesine M fuzzy kümesinin ***α-düzeyinde kompaktlık spektrumu*** denir.

Teorem 50: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda $0 \in C_\alpha(M)$ dir ve bundan dolayı $C_\alpha(M) \ne \varnothing$ dır.

İspat: Açık.■

Tanım 50: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda

$$c_\alpha(M) := \operatorname{İnf}(I - C_\alpha(M))$$

ile tanımlanan $c_\alpha(M)$ ye M fuzzy kümesinin ***α-düzeyinde kompaktlık derecesi*** denir. ($\operatorname{İnf}\varnothing = 1$ alınacak)

Teorem 51: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$, $\beta \in I$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda, $\beta \notin C_\alpha(M)$ ise $(\beta - \varepsilon, \beta] \cap C_\alpha(M) = \varnothing$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur. Ayrıca $c_\alpha(M) \in C_\alpha(M)$ dır.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için $(\beta - \varepsilon, \beta] \cap C_\alpha(M) \ne \varnothing$ olduğunu varsayalım. $M \,\tilde{\subset}\, \bigvee \mathcal{U} \ge \beta$ olacak şekilde $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha$ k.v. ve $\varepsilon > 0$ k.v.

$$\exists k \in (\beta - \varepsilon, \beta] \cap C_\alpha(M)$$

dır. Buradan $\beta - \varepsilon < k \le \beta$ ve $k \in C_\alpha(M)$ dir. Buradan da $M \,\tilde{\subset}\, \bigvee \mathcal{U} \ge \beta \ge k$ ve $k \in C_\alpha(M)$ olduğundan

$$\varepsilon_0 := k - \beta + \varepsilon > 0$$

için

$$\exists \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U} \text{ sonlu öyleki } M \check{\subset} \vee \mathcal{U}_0 > k - \varepsilon_0 = \beta - \varepsilon$$

dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\mathrm{Sup}\{ M \check{\subset} \vee \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ dır. Bu $\beta \in C_\alpha(M)$ olduğunu gösterir ki bu hipotezle çelişir. O halde varsayım yanlıştır. İkinci kısım için $c_\alpha(M) \notin C_\alpha(M)$ olduğunu varsayalım. Teorem 50 den $0 \in C_\alpha(M)$ olduğundan ve önermenin birinci kısmından

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ öyleki } (c_\alpha(M) - \varepsilon, c_\alpha(M)] \cap C_\alpha(M) = \varnothing \text{ ve } (c_\alpha(M) - \varepsilon, c_\alpha(M)] \subset I$$

dır. Buradan $(c_\alpha(M) - \varepsilon, c_\alpha(M)] \subset (I - C_\alpha(M))$ elde edilir. Bu ise $\mathrm{İnf}((c_\alpha(M) - \varepsilon, c_\alpha(M)]) \geq \mathrm{İnf}(I - C_\alpha(M))$ ve dolayısıyla $c_\alpha(M) - \varepsilon \geq c_\alpha(M)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde varsayım yanlıştır.■

Lemma 2: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$, $\alpha \in (0,1]$ ve $\beta \subset I^X$, τ için bir taban olsun. Bu durumda,

$\beta \in C_\alpha(M) \Leftrightarrow M \check{\subset} \vee \mathcal{U} \geq \beta$ olan her $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha \cap B$ için $\mathrm{Sup}\{M \check{\subset} \vee \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ dır.

İspat: "$\Rightarrow$" Açık.

"$\Leftarrow$" $M \check{\subset} \vee \mathcal{U} \geq \beta$ koşulunu sağlayan $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha$ k.v.

$$\mathcal{U} := \{U_k : k \in J\} \subset \tau_\alpha$$

şeklinde yazılabilir. B, τ için taban olduğundan her $k \in J$ için

$$\exists J^k \text{ indis öyleki } \{V_i^k : i \in J^k\} \subset \tau_\alpha \cap B \text{ ve } U_k := \vee\{V_i^k : i \in J^k\}$$

dır.

$$\mathcal{U}' := \{V_i^k : i \in J^k, k \in J\} \subset \tau_\alpha \cap B$$

olarak tanımlanırsa

$M \check{\subset} \vee \mathcal{U}' = M \check{\subset} \vee\{\vee\{V_i^k : i \in J^k\} : k \in J\} = M \check{\subset} \vee\{U_k : i \in J^k\} = M \check{\subset} \vee \mathcal{U} \geq \beta$ dır.

Hipotezden $\mathrm{Sup}\{M \check{\subset} \vee \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0' \subset \mathcal{U}'\} \geq \beta$ olduğundan $\varepsilon > 0$ keyfi için

$$\exists \mathcal{U}_0' \subset \mathcal{U}' \text{ sonlu öyleki } M \check{\subset} \vee \mathcal{U}_0' > \beta - \varepsilon \tag{1}$$

dır. $\mathcal{U}_0' \subset \mathcal{U}'$ için

$$\exists J_0^k \subset J^k \text{ sonlu ve } J_0 \subset J \text{ sonlu öyleki } \mathcal{U}_0' = \{V_i^k : i \in J_0^k, k \in J_0\}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\mathcal{U}'' := \{V_i^k : i \in J^k, k \in J_0\}$$

ile tanımlanan küme için $\mathcal{U}'' \supset \mathcal{U}_0'$ dır. Buradan

$$\vee \mathcal{U}'' \geq \vee \mathcal{U}_0'$$

elde edilir ve

$$\mathcal{U}_0 := \{U_k : k \in J_0\} \subset \mathcal{U}$$

ile tanımlanan $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ sonlu kümesi için (1) ve (2) den

$$\begin{aligned} M \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 &= M \breve{\subset} (\bigvee \{U_k : k \in J_0\} \\ &= M \breve{\subset} (\bigvee \{\bigvee \{V_i^k : i \in J^k\} : k \in J_0\}) \\ &= M \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U}'' \\ &\geq M \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0' \\ &> \beta - \varepsilon \end{aligned}$$

dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\mathrm{Sup}\{M \breve{\subset} \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ dır. Bu ise $\beta \in C_\alpha(M)$ olduğunu gösterir.■

Lemma 3: (X,τ) bir stu, $\alpha \in (0,1]$ ve $S \subset I^X$ alttaban olsun. Bu durumda $\beta \in C_\alpha(M) \Leftrightarrow M \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$ koşulunu sağlayan her $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha \cap S$ için $\mathrm{Sup}\{M \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 52: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda $\beta \in C_\alpha(M) \Leftrightarrow \bigwedge F \breve{\subset} M^c \geq \beta$ olan her $F \subset \tau_\alpha^*$ için $\mathrm{Sup}\{\bigwedge F_0 \breve{\subset} M^c : F_0 \subset F\} \geq \beta$.

İspat: "$\Rightarrow$" $\bigwedge F \breve{\subset} M^c \geq \beta$ olan $F := \{F_k : k \in J\} \subset \tau_\alpha^*$ k.v.

$$F^c := \{F_k^c : k \in J\} \subset \tau_\alpha$$

ile gösterelim. Teorem 45 den, $M \breve{\subset} \bigvee F^c = M \breve{\subset} (\bigwedge F)^c = \bigwedge F \breve{\subset} M^c \geq \beta$ dır. $\beta \in C_\alpha(M)$ olduğundan $\mathrm{Sup}\{M \breve{\subset} \bigvee F_0^c : F_0^c \subset F^c\} \geq \beta$ dır. Buradan $\mathrm{Sup}\{\bigwedge F_0 \breve{\subset} M^c : F_0 \subset F\} \geq \beta$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" $M \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U}$ olacak şekilde $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha$ k.v.

$$\mathcal{U} = \{U_k : k \in J\} \subset \tau_\alpha \quad \text{ve} \quad \mathcal{U}^c = \{U_k^c : k \in J\} \subset \tau_\alpha^*$$

ile gösterelim. Teorem 45 den $\bigwedge \mathcal{U}^c \breve{\subset} M^c = (\bigvee \mathcal{U})^c \breve{\subset} M^c = M \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$ dır. Hipotezden $\mathrm{Sup}\{\bigwedge \mathcal{U}_0^c \breve{\subset} M^c : \mathcal{U}_0^c \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ olduğundan $\mathrm{Sup}\{M \breve{\subset} \bigwedge \mathcal{U} : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ elde edilir.■

Teorem 53: (X,τ), (Y,τ') iki stu, $M \in I^X$ ve $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli dönüşüm ise $C_\alpha(M) \subset C_\alpha(f(M))$ dir ve bundan dolayı $c_\alpha(M) \leq c_\alpha(f(M))$ dir.

İspat: $\beta \in C_\alpha(M)$ k.v. ve $f(M) \breve{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$ olacak şekilde $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha'$ k.v.

$$\mathcal{U} := \{U_k : k \in J\} \subset \tau_\alpha'$$

ile gösterilirse, f smooth sürekli olduğundan

$$\{f^{-1}(U_k) : k \in J\} \subset \tau_\alpha$$

dır. Teorem 49 dan,

$$
\begin{aligned}
M \check{\subset} \bigvee\{ f^{-1}(U_k) : k \in J\} &= M \check{\subset} f^{-1}(\bigvee\{U_k : k \in J\}) \\
&\geq f^{-1}(f(M)) \check{\subset} f^{-1}(\bigvee \mathcal{U}) \\
&\geq f(M) \check{\subset} \bigvee \mathcal{U} \\
&\geq \beta
\end{aligned}
$$

dır. $\beta \in C_\alpha(M)$ olduğundan $\mathrm{Sup}\{M \check{\subset} (\bigvee\{ f^{-1}(U_k) : k \in J_0\}) : J_0 \in J\} \geq \beta$ dır. Buradan $\varepsilon>0$ keyfi için

$$\exists J_0 \subset J \text{ sonlu öyleki } M \check{\subset} (\bigvee\{ f^{-1}(U_k) : k \in J_0\}) > \beta - \varepsilon$$

dır.

$$\mathcal{U}_0 := \{U_k : k \in J_0\} \subset \mathcal{U}$$

ile gösterilirse her $k \in J_0$ için $f(f^{-1}(U_k)) \leq U_k$ olduğundan ve Teorem 49 dan

$$
\begin{aligned}
f(M) \check{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 &= f(M) \check{\subset} (\bigvee\{U_k : k \in J_0\}) \\
&\geq f(M) \check{\subset} (\bigvee\{ f(f^{-1}(U_k)) : k \in J_0\} \\
&= f(M) \check{\subset} f(\bigvee\{ f^{-1}(U_k) : k \in J_0\}) \\
&\geq M \check{\subset} (\bigvee\{ f^{-1}(U_k) : k \in J_0\}) \\
&> \beta - \alpha
\end{aligned}
$$

dır. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $\mathrm{Sup}\{ f(M) \check{\subset} \bigwedge \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ dır. Buradan $\beta \in C_\alpha(f(M))$ ve dolayısıyla $C_\alpha(M) \subset C_\alpha(f(M))$ elde edilir. Buradan $I - C_\alpha(M) \supset I - C_\alpha(f(M))$ ve buradan da $c_\alpha(M) = \mathrm{İnf}(I - C_\alpha(M)) \leq \mathrm{İnf}(I - C_\alpha(f(M))) = c_\alpha(f(M))$ elde edilir.■

Teorem 54: $\{(X_k,\tau_k) : k \in \Delta\}$ stu ların bir ailesi, (X,τ) bu smooth topolojik uzayların çarpım uzayı, her $k \in \Delta$ için $M_k \in I^{X_k}$ fuzzy kümesi ve $M := \prod M_k \in I^X$ olsun. Bu durumda $c_\alpha(M) = \mathrm{İnf}\{c_\alpha(M_k) : k \in \Delta\}$ dır. Ayrıca her $k \in \Delta$ için M_k normlanmış ise $c_\alpha(M) = \mathrm{İnf}\{c_\alpha(M_k) : k \in \Delta\}$ dır.

İspat: Bkz. [10].■

Teorem 55: (X,τ) bir stu, $M \in \tau_\alpha^*$ ve $M \leq K$, $K \in I^X$ olsun. Bu durumda, $C_\alpha(K) \subset C_\alpha(M)$ dır ve bundan dolayı $c_\alpha(K) \leq c_\alpha(M)$ dır.

İspat: $\beta \in C_\alpha(K)$ k.v. ve $M \check{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$ olacak şekilde $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha$ k.v. $M \leq K$ olduğundan $M^c \geq K^c$ ve $M^c = M^c \vee K^c$ dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
K \check{\subset} (\bigvee \mathcal{U} \vee M^c) &= \bigwedge\{(K^c \vee (\bigvee \mathcal{U} \vee M^c))(x) : x \in X\} \\
&= \bigwedge\{((K^c \vee M^c) \vee (\bigvee \mathcal{U}))(x) : x \in X\} \\
&= \bigwedge\{(M^c \vee (\bigvee \mathcal{U}))(x) : x \in X\} \\
&= M \check{\subset} \bigvee \mathcal{U} \\
&\geq \beta
\end{aligned}
$$

dır. Buradan $K \tilde{\subset} (\bigvee \mathcal{U} \vee M^c) \geq \beta$ dır. Ayrıca $M \in \tau_\alpha^*$ olduğundan $M^c \in \tau_\alpha$ ve dolayısıyla $\mathcal{U} \cup \{M^c\} \subset \tau_\alpha$ dır. $\beta \in C_\alpha(K)$ olduğundan $\operatorname{Sup}\{K \tilde{\subset} (\bigvee \mathcal{U}_0 \vee M^c) : \mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}\} \geq \beta$ ve $M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 = K \tilde{\subset} (\bigvee \mathcal{U}_0 \vee M^c)$ olduğundan $\operatorname{Sup}\{M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}\} \geq \beta$ elde edilir. Buradan $\beta \in C_\alpha(M)$ dir. Dolayısıyla $C_\alpha(K) \subset C_\alpha(M)$ ve buradan $c_\alpha(K) \leq c_\alpha(M)$ elde edilir.■

Teorem 56: (X,τ) bir stu, $M,N \in I^X$ olsun. Bu durumda $C_\alpha(M) \cap C_\alpha(N) \subset C_\alpha(M \vee N)$ ve bundan dolayı $c_\alpha(M) \wedge c_\alpha(N) \leq c_\alpha(M \vee N)$ dır.

İspat: $\beta \in C_\alpha(M) \cap C_\alpha(N)$ k.v. ve $M \vee N \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$ olacak şekilde $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha$ k.v. Buradan $M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$, $N \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U} \geq \beta$ ve $\beta \in C_\alpha(M) \cap C_\alpha(N)$ olduğundan $\varepsilon>0$ keyfi için

$$\exists \mathcal{U}_0^1 \subset \mathcal{U} \text{ sonlu ve } \mathcal{U}_0^2 \subset \mathcal{U} \text{ sonlu öyleki } M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0^1 > \beta - \varepsilon \text{ ve } N \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0^2 > \beta - \varepsilon$$

dır. Buradan

$$\mathcal{U}_0 := \mathcal{U}_0^1 \cup \mathcal{U}_0^2 \subset \mathcal{U}$$

ile tanımlanan $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ sonlu ve

$$\begin{aligned}
M \vee N \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 &= M \vee N \tilde{\subset} (\bigvee \mathcal{U}_0^1 \vee \bigvee \mathcal{U}_0^2) \\
&= \bigwedge\{((M^c \wedge N^c) \vee (\bigvee \mathcal{U}_0^1) \vee (\bigvee \mathcal{U}_0^2))(x) : x \in X\} \\
&= \bigwedge\{((M^c \vee ((\bigvee \mathcal{U}_0^1) \vee (\bigvee \mathcal{U}_0^2))) \wedge (N^c \vee ((\bigvee \mathcal{U}_0^1) \vee (\bigvee \mathcal{U}_0^2)))(x) : x \in X\} \\
&\geq \bigwedge\{(M^c \vee (\bigvee \mathcal{U}_0^1))(x) : x \in X\} \wedge \bigwedge\{(N^c \vee (\bigvee \mathcal{U}_0^2))(x) : x \in X\} \\
&= (M \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0^1) \wedge (N \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0^2) \\
&> \beta - \varepsilon
\end{aligned}$$

dır. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $\operatorname{Sup}\{M \vee N \tilde{\subset} \bigvee \mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}\} \geq \beta$ dır. Dolayısıyla $\beta \in C_\alpha(M \vee N)$ ve buradan $C_\alpha(M) \cap C_\alpha(N) \subset C_\alpha(M \vee N)$ elde edilir. Diğer kısım için $c_\alpha(M \vee N) = \operatorname{İnf}(I - C_\alpha(M \vee N)) =: k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\exists \beta \in I - C_\alpha(M \vee N) \text{ öyleki } \beta < k + \varepsilon$$

dır. Buradan $\beta \notin C_\alpha(M \vee N)$ dır. Bu teoremin birinci kısmından $\beta \notin C_\alpha(M) \cap C_\alpha(N)$ dır. $\beta \notin C_\alpha(M)$ veya $\beta \notin C_\alpha(N)$ dır.

a) Eğer $\beta \notin C_\alpha(M)$ ise $\beta \in I - C_\alpha(M)$ dır. $c_\alpha(M) = \operatorname{İnf}(I - C_\alpha(M)) \leq \beta < k + \varepsilon$ dır. Buradan $c_\alpha(M) \leq k$ dır.

b) Eğer $\beta \notin C_\alpha(N)$ ise $\beta \in I - C_\alpha(N)$ dır. $c_\alpha(N) = \operatorname{İnf}(I - C_\alpha(N)) \leq \beta < k + \varepsilon$ dır. Buradan $c_\alpha(N) \leq k$ dır.

a) ve b) den $c_\alpha(M) \wedge c_\alpha(N) \leq k = c_\alpha(M \vee N)$ elde edilir.■

Teorem 57: (X,τ) bir stu, $M\in\tau_\alpha^*$ ve $N\in I^X$ olsun. Bu durumda $C_\alpha(N)\subset C_\alpha(M\wedge N)$ ve bundan dolayı $c_\alpha(N)\le c_\alpha(M\wedge N)$ dır.

İspat: $\beta\in C_\alpha(N)$ k.v. ve $M\wedge N \check{\subset} \vee\mathcal{U}\ge\beta$ olacak şekilde $\mathcal{U}\subset\tau_\alpha$ k.v. $N\check{\subset}(\vee\mathcal{U}\vee M^c)=M\vee N\check{\subset}\vee\mathcal{U}\ge\beta$ olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer yandan $M\in\tau_\alpha^*$ olduğundan $\mathcal{U}\cup\{M^c\}\subset\tau_\alpha$ ve $\beta\in C_\alpha(N)$ olduğundan $\text{Sup}\{N\check{\subset}(\vee\mathcal{U}_0\vee M^c):\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}\}\ge\beta$ dır. Her $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ sonlu için $N\check{\subset}(\vee\mathcal{U}_0\vee M^c)=M\wedge N\check{\subset}\vee\mathcal{U}_0$ olduğundan $\text{Sup}\{M\wedge N\check{\subset}\vee\mathcal{U}_0:\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}\}\ge\beta$ dır. Dolayısıyla $\beta\in C_\alpha(M\wedge N)$ ve buradan $C_\alpha(N)\subset C_\alpha(M\wedge N)$ elde edilir. Buradan da $c_\alpha(N)\le c_\alpha(M\wedge N)$ olduğu kolayca gösterilebilir.■

Tanım 51 [1]: (X,T) bir fuzzy topolojik uzayı olsun.
(X,T) ***Lowen anlamında fuzzy kompakt*** denir:$\Leftrightarrow$ Her $\mathcal{U}\subset T$ ve her $\beta\in(0,1]$ öyleki $\vee\mathcal{U}\ge\beta$ ve her $\varepsilon\in(0,\beta]$ için $\vee\mathcal{U}_0\ge\beta-\varepsilon$ olacak şekilde sonlu $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ mevcuttur.

Tanım 52: (X,τ) bir stu olsun. Her $\alpha\in(0,1]$ için (X,τ_α) Lowen anlamında fuzzy kompakt ise (X,τ) ya Lowen anlamında fuzzy kompakt denir.

Teorem 58: (X,τ) bir stu olsun.
(X,τ) Lowen anlamında fuzzy kompakttır $\Leftrightarrow$ Her $\alpha\in(0,1]$ için $c_\alpha(X)=1$ dir.

İspat: "$\Rightarrow$" $\alpha\in(0,1]$ k.v. $c_\alpha(X)=1$ olduğunu göstermek için $I=C_\alpha(X)$ olduğunu göstermek yeter. Bunun için $\beta\in I$ k.v. ve $1_X\check{\subset}\vee\mathcal{U}\ge\beta$ olacak şekilde $\mathcal{U}\subset\tau_\alpha$ k.v.
Buradan

$$\begin{aligned}\wedge\{(\vee\mathcal{U})(x):x\in X\}&=\wedge\{(0_X\vee(\vee\mathcal{U}))(x):x\in X\}\\&=\wedge\{(1_X^c\vee(\vee\mathcal{U}))(x):x\in X\}\\&=1_X\check{\subset}\vee\mathcal{U}\\&\ge\beta\end{aligned}$$

Buradan $\vee\mathcal{U}\ge\beta$ dır. (X,τ) Lowen anlamında fuzzy kompakt olduğundan (X,τ_α) Lowen anlamında fuzzy kompakttır. Dolayısıyla her $\varepsilon>0$ için

$$\exists\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}\text{ sonlu öyleki }\vee\mathcal{U}_0\ge\beta-\varepsilon$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}1_X\check{\subset}\vee\mathcal{U}_0&=\wedge\{(1_X^c\vee\vee\mathcal{U}_0)(x):x\in X\}\\&=\wedge\{(\vee\mathcal{U}_0)(x):x\in X\}\\&\ge\beta-\varepsilon\end{aligned}$$

dır. Buradan $\beta \in C_\alpha(X)$ ve dolayısıyla $I \subset C_\alpha(X)$ dır. Buradan $I = C_\alpha(X)$ ve $c_\alpha(X) = \text{İnf}(I - C_\alpha(X)) = \text{İnf}(\varnothing) = 1$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" $\alpha \in (0,1]$ k.v., $\vee \mathcal{U} \geq \beta$ olacak şekilde $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha$ ve $\beta \in (0,1]$ k.v. ve $\varepsilon > 0$ keyfi için hipotezden $c_\alpha(X) = 1$ olduğundan $I - C_\alpha(X) = \varnothing$ veya $I - C_\alpha(X) = \{1\}$ dır. Fakat $I - C_\alpha(X) = \{1\}$ olması durumu Teorem 51 ile çelişir. O halde $I - C_\alpha(X) = \varnothing$ ve buradan $I = C_\alpha(X)$ dır. Buradan da $\beta \in C_\alpha(X)$ elde edilir. Diğer yandan

$$\left.\begin{aligned} 1_X \tilde{\subset} \vee \mathcal{U} &= \wedge\{(1_X^c \vee (\vee \mathcal{U}))(x) : x \in X\} \\ &= \wedge\{(\vee \mathcal{U})(x) : x \in X\} \\ &\geq \beta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dır. $\mathcal{U} \subset \tau_\alpha$ ve $\beta \in C_\alpha(X)$ olduğundan ve (1) den bu $\varepsilon > 0$ için

$$\exists \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U} \text{ sonlu öyleki } 1_X \tilde{\subset} \vee \mathcal{U}_0 > \beta - \varepsilon$$

dır. Buradan $\vee \mathcal{U}_0 > \beta - \varepsilon$ elde edilir. Bu ise (X,τ_α) nın Lowen anlamında fuzzy kompakt ve $\alpha \in (0,1]$ keyfi olduğundan (X,τ) nun Lowen anlamında fuzzy kompakt olduğunu gösterir.■

2.5.4. Dönüşümlerin Kompaktlık Derecesi

Bu bölüm için (X,τ) ve (Y,τ') iki stu ve $f: X \to Y$ smooth sürekli olsun.

Tanım 53: $C_\alpha(f) := \cap\{C_\alpha(f^{-1}(y)) : y \in Y\}$ ile tanımlanan kümeye f nin *α-düzeyinde kompaktlık spektrumu* denir.

Teorem 59: $0 \in C_\alpha(f)$ dır. Bundan dolayı $C_\alpha(f) \neq \varnothing$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Tanım 54: $c_\alpha(f) := \text{İnf}\{I - C_\alpha(f)\}$ ile tanımlanan değere f dönüşümünün *α-düzeyinde kompaktlık derecelendirilmesi* denir.

Teorem 60: $\beta \notin C_\alpha(f)$ ise $(\beta - \varepsilon, \beta] \cap C_\alpha(f) = \varnothing$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur. Ayrıca $c_\alpha(f) \in C_\alpha(f)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 61: $Z \subset X$, $Z \in \tau_\alpha^*$ ve $g = f|Z : Z \to Y$ ise $c_\alpha(f) \leq c_\alpha(g)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 62: Her $k \in \Delta$ için $X_k \neq \varnothing$ olmak üzere X_k ve Y_k stu lar, her $k \in \Delta$ için $f_k : X_k \to Y_k$ smooth sürekli ve bu fonksiyonların çarpımı

$$f := \prod\{f_k : k \in \Delta\} : \prod X_k \to \prod Y_k$$

ile gösterilsin. Bu durumda $c_\alpha(f) = \text{İnf}\{c_\alpha(f_k) : k \in \Delta\}$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 63: Eğer $f : X \to Y$ kapalı ve sürekli dönüşüm ise her $N \in I^Y$ için $c_\alpha(f^{-1}(N)) \geq c_\alpha(f) \wedge c_\alpha(N)$ dir.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 64: X,Y,Z smooth topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ kapalı dönüşümler ve $h := g \circ f$ ise $c_\alpha(h) \geq c_\alpha(g) \wedge c_\alpha(f)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

2.5.5. Smooth Topolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomlarının Derecelendirilmesi

Tanım 55: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ olsun.

$$H_\alpha(X) := \{\beta \in I : \forall x,y \in X, x \neq y \text{ ve } \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists U, V \in \tau_\alpha \text{ öyleki } U(x) \geq \beta - \varepsilon,\ V(y) \geq \beta - \varepsilon \text{ ve } U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon\}$$

ile tanımlanan kümeye (X,τ) nun *α-düzeyinde Hausdorffluk spektrumu* denir ve

$$h_\alpha(X) := \text{Sup} H_\alpha(X)$$

ile tanımlanan değere (X,τ) nun *α-düzeyinde Hausdorfluk derecesi* denir.

Teorem 65: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda

$$0 \leq h_\alpha(X) \leq 1 \quad \text{ve} \quad H_\alpha(X) = [0, h_\alpha(X)]$$

dır.

İspat: $H_\alpha(X) \subset I$ olduğundan $0 \leq \text{Sup}H_\alpha(X) \leq 1$ ve dolayısıyla $0 \leq h_\alpha(X) \leq 1$ dir. Diğer kısım için, $\beta \in H_\alpha(X)$ k.v. $\beta \leq \text{Sup}H_\alpha(X) = h_\alpha(X)$ dır. Buradan $\beta \in [0, h_\alpha(X)]$ ve dolayısıyla

$$H_\alpha(X) \subset [0, h_\alpha(X)] \tag{1}$$

dır. $\beta \in [0, h_\alpha(X)]$ k.v. ve $x, y \in X$, $x \neq y$ ve $\varepsilon > 0$ k.v. Buradan $\beta \leq h_\alpha(X) = \text{Sup}H_\alpha(X)$ dir. Bu $\varepsilon > 0$ için

$$\exists \beta' \in H_\alpha(X) \text{ öyleki } \beta - \varepsilon < \beta'$$

dır.

$$r := \beta' - \beta + \varepsilon > 0$$

olarak tanımlansın. $\beta' \in H_\alpha(X)$ olduğundan bu r>0 için

$$\exists U,V \in \tau_\alpha \text{ öyleki } U(x) \geq \beta' - r,\ V(y) \geq \beta' - r \text{ ve } U \tilde{\subset} V^c \geq \beta' - r$$

dır. r yerine değerini koyarsak $U(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ ve $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ elde edilir. Buradan $\beta \in H_\alpha(X)$ dır. Dolayısıyla

$$[0,h_\alpha(X)] \subset H_\alpha(X) \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) den $H_\alpha(X) = [0,h_\alpha(X)]$ elde edilir.■

Tanım 56: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda,

$R_\alpha(X) := \{\beta \in I : \forall x \in X, \forall U \in \tau_\alpha$ öyleki $U(x) \geq \beta$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \tau_\alpha^*$ ve $\exists V \in \tau_\alpha$ öyleki

$$V(x) \geq \beta - \varepsilon,\ V \tilde{\subset} N \geq \beta - \varepsilon \text{ ve } N \tilde{\subset} U \geq \beta - \varepsilon\}$$

ile tanımlanan kümeye (X,τ) nun ***α-düzeyinde regülerlik spektrumu*** denir ve

$$r_\alpha(X) := \text{İnf}(I - R_\alpha(X))$$

ile tanımlanan değere (X,τ) nun ***α-düzeyinde regülerlik derecesi*** denir.

Lemma 4: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda $0 \in R_\alpha(X)$ dır.

İspat: $U(x) \geq 0$ olacak şekilde $x \in X$ ve $U \in \tau_\alpha$ k.v. ve $\varepsilon > 0$ keyfi için

$$V := U \text{ ve } N := 1_X$$

olarak tanımlanırsa $V \in \tau_\alpha$, $N \in \tau_\alpha^*$ ve $V(x) \geq 0 - \varepsilon$, $V \tilde{\subset} N \geq 0 - \varepsilon$ ve $N \tilde{\subset} U \geq 0 - \varepsilon$ dır. Dolayısıyla $0 \in R_\alpha(X)$ elde edilir.■

Lemma 5: (X,τ) bir stu, $\alpha \in (0,1]$ ve $\beta \in I$ olsun. Eğer $\beta \notin R_\alpha(X)$ ise $(\beta - \varepsilon, \beta] \cap R_\alpha(X) = \varnothing$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için $(\beta - \varepsilon, \beta] \cap R_\alpha(X) \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. Buradan $\beta \in R_\alpha(X)$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten, $U(x) \geq \beta$ olacak şekilde $x \in X$ ve $U \in \tau_\alpha$ k.v. ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\exists k \in (\beta - \varepsilon, \beta] \cap R_\alpha(X)$$

dır. Buradan $\beta - \varepsilon < k \leq \beta$ ve $k \in R_\alpha(X)$ dır.

$$r := k - \beta + \varepsilon > 0$$

olarak tanımlansın. $x \in X$, $U(x) \geq \beta \geq k$ ve $k \in R_\alpha(X)$ olduğundan bu r>0 için

$$\exists N \in \tau_\alpha^* \text{ ve } V \in \tau_\alpha \text{ öyleki } V(x) \geq k - r,\ V \tilde{\subset} N \geq k - r \text{ ve } N \tilde{\subset} U \geq k - r$$

dir. r yerine değeri yazılırsa $V(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V \tilde{\subset} N \geq \beta - \varepsilon$ ve $N \tilde{\subset} U \geq \beta - \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $\beta \in R_\alpha(X)$ olduğunu gösterir ki bu hipotezle çelişir. O halde varsayım yanlıştır.■

Teorem 66: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ ise $0 \leq r_\alpha(X) \leq 1$ ve $r_\alpha(X) \in R_\alpha(X)$ dir.

İspat: $I - R_\alpha(X) \subset I$ olduğundan $0 \le r_\alpha(X) \le 1$ dir. Diğer kısım için, $r_\alpha(X) \notin R_\alpha(X)$ olduğunu varsayalım. Lemma 5 den

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ öyleki } (r_\alpha(X) - \varepsilon, r_\alpha(X)] \cap R_\alpha(X) = \varnothing \qquad (1)$$

dır. Lemma 4 den $0 \in R_\alpha(X)$ olduğundan $(r_\alpha(X) - \varepsilon, r_\alpha(X)] \subset I$ dır. Buradan ve (1) den $(r_\alpha(X) - \varepsilon, r_\alpha(X)] \subset I - R_\alpha(X)$ dır. Buradan $\mathrm{\dot{I}nf}((r_\alpha(X) - \varepsilon, r_\alpha(X)]) \ge \mathrm{\dot{I}nf}(I - R_\alpha(X))$ ve buradan da $r_\alpha(X) - \varepsilon \ge r_\alpha(X)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde varsayım yanlıştır.■

Teorem 67: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda $\beta \in R_\alpha(X) \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall F \in \tau_\alpha^*$ öyleki $F(x) \le \beta^c$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists W, V \in \tau_\alpha$ öyleki $V(x) \ge \beta - \varepsilon$, $F \tilde{\subset} W \ge \beta - \varepsilon$ ve $W \tilde{\subset} V^c \ge \beta - \varepsilon$ dır.

İspat: "$\Rightarrow$" $F(x) \le \beta^c$ olacak şekilde $x \in X$ ve $F \in \tau_\alpha^*$ k.v. ve $\varepsilon > 0$ k.v. Buradan $F^c(x) \ge \beta$ ve $F^c \in \tau_\alpha$ dır. $\beta \in R_\alpha(X)$ olduğundan bu $\varepsilon > 0$ için

$$\exists N \in \tau_\alpha^* \text{ ve } V \in \tau_\alpha \text{ öyleki } V(x) \ge \beta - \varepsilon,\ V \tilde{\subset} N \ge \beta - \varepsilon \text{ ve } N \tilde{\subset} F^c \ge \beta - \varepsilon$$

dır.

$$W := N^c \in \tau_\alpha$$

ile tanımlanırsa bu $W, V \in \tau_\alpha$ için $V(x) \ge \beta - \varepsilon$, $F \tilde{\subset} W = F \tilde{\subset} N^c = N \tilde{\subset} F^c \ge \beta - \varepsilon$ ve $W \tilde{\subset} V^c = N^c \tilde{\subset} V^c = V \tilde{\subset} N \ge \beta - \varepsilon$ elde edilir.

"$\Leftarrow$" $U(x) \ge \beta$ olacak şekilde $x \in X$ ve $U \in \tau_\alpha$ k.v. ve $\varepsilon > 0$ k.v. Buradan $U^c(x) \le \beta^c$ ve $U^c \in \tau_\alpha^*$ dır. Hipotezden bu $\varepsilon > 0$ için

$$\exists W, V \in \tau_\alpha \text{ öyleki } V(x) \ge \beta - \varepsilon,\ U^c \tilde{\subset} W \ge \beta - \varepsilon \text{ ve } W \tilde{\subset} V^c \ge \beta - \varepsilon$$

dır.

$$N := W^c \in \tau_\alpha^*$$

ile tanımlanırsa bu $N \in \tau_\alpha^*$ ve $V \in \tau_\alpha$ için $V(x) \ge \beta - \varepsilon$, $V \tilde{\subset} N = V \tilde{\subset} W^c = W \tilde{\subset} V^c \ge \beta - \varepsilon$ ve $N \tilde{\subset} U = W^c \tilde{\subset} U = U^c \tilde{\subset} W \ge \beta - \varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $\beta \in R_\alpha(X)$ dır.■

Teorem 68: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $0 \le \beta \le h_\alpha(X) \wedge c_\alpha(X)$, $y \in X$ ve $M \in \tau_\alpha^*$ öyleki $M(y) \le \beta^c$ ise her $\varepsilon > 0$ için $M \tilde{\subset} U \ge \beta - \varepsilon$, $V(y) \ge \beta - \varepsilon$ ve $U \tilde{\subset} V^c \ge \beta - \varepsilon$ olacak şekilde bir $U, V \in \tau_\alpha$ mevcuttur.

İspat: Eğer $\beta = 0$ ise ispat açık. $\beta > 0$ olsun ve $\varepsilon \in (0, \beta]$ k.v.

$$A := \{x \in X : M(x) > \beta^c\}$$

ile tanımlansın. Her $x \in A$ için $x \neq y$ dir. Çünkü bir $x \in A$ için $x = y$ olsaydı $M(y) > \beta^c$ ve $M(y) \le \beta^c$ olduğundan $M^c(y) \ge \beta$ dır. Buradan $1 < 1$ çelişkisi elde edilir. Hipotezden

$\beta \leq h_\alpha(X)$ Teorem 65 den $\beta \in H_\alpha(X)$ dir. Her $x \in A$ için $x \neq y$ olduğundan bu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için

$$\exists U_x, V_x \in \tau_\alpha \text{ öyleki } U_x(x) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2},\ V_x(y) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } U_x \tilde{\subset} V_x^c \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

dir. Bu şekilde elde edilen $\{U_x : x \in A\} \subset \tau_\alpha$ ailesi için

$$M \tilde{\subset} (\bigvee\{U_x : x \in A\}) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Gerçekten $z \in X$ keyfi verildiğinde $z \in A$ veya $z \notin A$ dır. Eğer $z \in A$ ise (1) den $U_z(z) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan $(\bigvee\{U_x : x \in A\})(z) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ dır. Eğer $z \notin A$ ise $M(z) \leq \beta^c$ dır. Buradan $M^c(z) \geq \beta \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$M \tilde{\subset} (\bigvee\{U_x : x \in A\}) = \bigwedge\{(M^c \vee (\bigvee\{U_x : x \in A\}))(z) : z \in X\} \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Hipotezden $\beta \leq c_\alpha(X)$ ve $M \in \tau_\alpha^*$ olduğundan Teorem 55 den $\beta \leq c_\alpha(X) \leq c_\alpha(M)$ yani $\beta \leq c_\alpha(M)$ dır. Buradan $0 < \beta - \frac{\varepsilon}{2} < c_\alpha(M) = \text{İnf}(I - C_\alpha(M))$ dolayısıyla $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \notin I - C_\alpha(M)$ ve $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \in C_\alpha(M)$ dir. $M \tilde{\subset} (\bigvee\{U_x : x \in A\}) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \in C_\alpha(M)$ olduğundan bu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için

$$\exists A_0 \subset A \text{ sonlu öyleki } M \tilde{\subset} (\bigvee\{U_x : x \in A_0\}) > (\beta - \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = \beta - \varepsilon \qquad (2)$$

dur.

$$U := \bigvee\{U_x : x \in A_0\},\ V := \bigwedge\{V_x : x \in A_0\}$$

ile tanımlanan U ve V fuzzy kümeleri istenilen koşulları sağlar. Gerçekten $U, V \in \tau_\alpha$ olduğu açıktır. (2) den $M \tilde{\subset} U \geq \beta - \varepsilon$ dır. (1) den $V(y) = \bigwedge\{V_x(y) : x \in A_0\} \geq \beta - \varepsilon$ dur. Son olarak $U \tilde{\subset} V^c < \beta - \varepsilon$ olduğunu varsayalım. Yani

$$\begin{aligned} U \tilde{\subset} V^c &= \bigwedge\{(U^c \vee V^c)(z) : z \in X\} \\ &= \bigwedge\{((\bigwedge\{U_x^c : x \in A_0\}) \vee (\bigvee\{V_x^c : x \in A_0\}))(z) : z \in X\} \\ &< \beta - \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Buradan

$$\exists z_0 \in X \text{ öyleki } \bigwedge\{U_x^c(z_0) : x \in A_0\} < \beta - \varepsilon \text{ ve } \bigvee\{V_x^c(z_0) : x \in A_0\} < \beta - \varepsilon$$

dur. Buradan

$$\exists x_0 \in A_0 \text{ öyleki } U_{x_0}^c(z_0) < \beta - \varepsilon \text{ ve } V_{x_0}^c(z_0) < \beta - \varepsilon$$

dur. Buradan

$$
\begin{aligned}
U_{x_0} \tilde{\subset} V_{x_0}^c &= \bigwedge\{(U_{x_0}^c \vee V_{x_0}^c)(z) : z \in X\} \\
&\leq (U_{x_0}^c \vee V_{x_0}^c)(z_0) \\
&= U_{x_0}^c(z_0) \vee V_{x_0}^c(z_0) \\
&< \beta - \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu (1) ile çelişir. O halde varsayım yanlış, dolayısıyla $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ dır.■

Teorem 69: (X,τ) bir stu ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $0 \leq \beta \leq h_\alpha(X) \wedge c_\alpha(X)$, $M,N \in \tau_\alpha^*$ ve $M \tilde{\subset} N^c \geq \beta$ ise her $\varepsilon > 0$ için $M \tilde{\subset} U \geq \beta - \varepsilon$, $N \tilde{\subset} V \geq \beta - \varepsilon$ ve $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ olacak şekilde bir $U,V \in \tau_\alpha$ mevcuttur.

İspat: Eğer $\beta=0$ ise ispat açık. $\beta>0$ olsun ve $\varepsilon \in (0,\beta]$ k.v.

$$A := \{x \in X : M(x) > \beta^c\},\ B := \{y \in X : N(y) > \beta^c\}$$

ile tanımlanan kümeler için $A \cap B = \varnothing$ dur. Gerçekten $A \cap B \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. Bir $x \in A \cap B$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan $M(x) > \beta^c$ ve $N(x) > \beta^c$ dır. Buradan $M^c(x) < \beta$ ve $N^c(x) < \beta$ dır. Bu ise $M \tilde{\subset} N^c \geq \beta$ olması ile çelişir. O halde $A \cap B = \varnothing$ dur. Bu durumda her $y \in B$ için $y \notin A$ dır. Hipotezden $M \in \tau_\alpha^*$ ve $\beta \leq h_\alpha(X) \wedge c_\alpha(X)$ ve her $y \in B$ için $M(y) \leq \beta^c$ olduğundan Teorem 68 den $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için

$$\exists U_y, V_y \in \tau_\alpha \text{ öyleki } M \tilde{\subset} U_y \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2},\ V_y(y) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } U_y \tilde{\subset} V_y^c \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

dır. Bu şekilde elde edilen $\{V_y : y \in B\} \subset \tau_\alpha$ ailesi için

$$N \tilde{\subset} (\bigvee\{V_y : y \in B\}) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Gerçekten $z \in X$ keyfi verildiğinde $z \in B$ veya $z \notin B$ dır. Eğer $z \in B$ ise (1) den $V_z(z) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Buradan $(\bigvee\{V_y : y \in B\})(z) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ ve eğer $z \notin B$ ise $N(z) \leq \beta^c$ ve $N^c(z) \geq \beta > \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Buradan $N \tilde{\subset} (\bigvee\{V_y : y \in B\}) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Hipotezden $\beta \leq c_\alpha(X)$ ve $N \in \tau_\alpha^*$ olduğundan Teorem 55 den $\beta \leq c_\alpha(X) \leq c_\alpha(N)$ dir. Yani $\beta \leq c_\alpha(N)$ dir. Buradan $0 < \beta - \frac{\varepsilon}{2} < c_\alpha(N) = \text{İnf}(I - C_\alpha(N))$ dir. Dolayısıyla $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \notin I - C_\alpha(N)$ ve $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \in C_\alpha(N)$ elde edilir. $N \tilde{\subset} (\bigvee\{V_y : y \in B\}) \geq \beta - \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \in C_\alpha(N)$ olduğundan bu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için

$$\exists B_0 \subset B \text{ sonlu öyleki } N \tilde{\subset} (\bigvee\{V_y : y \in B_0\}) > (\beta - \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = \beta - \varepsilon \qquad (2)$$

dır.

$$U := \bigwedge\{U_y : y \in B_0\},\ V := \bigvee\{V_y : y \in B_0\}$$

ile tanımlanan U ve V fuzzy kümeleri istenilen koşulları sağlar. Gerçekten, $U,V \in \tau_\alpha$ olduğu açıktır. Eğer $M \tilde{\subset} U < \beta - \varepsilon$ olsaydı

$$\begin{aligned} M \tilde{\subset} U &= M \tilde{\subset} (\wedge\{U_y : y \in B_0\}) \\ &= \wedge\{(M^c \vee (\wedge\{U_y : y \in B_0\}))(z) : z \in X\} \\ &< \beta - \varepsilon \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\exists z_0 \in X \text{ öyleki } M^c(z_0) < \beta - \varepsilon \text{ ve } (\wedge\{U_y : y \in B_0\})(z_0) < \beta - \varepsilon$$

dır. Buradan da

$$\exists y_0 \in B_0 \text{ öyleki } U_{y_0}(z_0) < \beta - \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $M \tilde{\subset} U_{y_0} < \beta - \varepsilon$ olduğunu gösterir ki bu (1) ile çelişir. O halde $M \tilde{\subset} U \geq \beta - \varepsilon$ dır. (2) den $N \tilde{\subset} V \geq \beta - \varepsilon$ olduğu açıktır. Son olarak $U \tilde{\subset} V^c < \beta - \varepsilon$ olduğunu varsayalım. Buradan

$$\begin{aligned} U \tilde{\subset} V^c &= \wedge\{((\wedge\{U_y : y \in B_0\})^c \vee (\vee\{V_y : y \in B_0\})^c)(z) : z \in X\} \\ &= \wedge\{((\vee\{U_y^c : y \in B_0\}) \vee (\wedge\{V_y^c : y \in B_0\}))(z) : z \in X\} \\ &< \beta - \varepsilon \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\exists z_0 \in X \text{ öyleki } (\vee\{U_y^c : y \in B_0\})(z_0) < \beta - \varepsilon \text{ ve } (\wedge\{V_y^c : y \in B_0\})(z_0) < \beta - \varepsilon$$

dur. Buradan

$$\exists y_0 \in B_0 \text{ öyleki } V_{y_0}^c(z_0) < \beta - \varepsilon \text{ ve } U_{y_0}^c(z_0) < \beta - \varepsilon$$

dur. Bu $U_{y_0} \tilde{\subset} V_{y_0}^c < \beta - \varepsilon < \beta - \dfrac{\varepsilon}{2}$ olduğunu gösterir ki bu (1) ile çelişir. O halde varsayım yanlış ve $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ dır.■

Tanım 57: (X,τ) bir stu ve $M \in I^X$ olsun. Bu durumda

$$Cl_\alpha(M) := \{\beta \in I : \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists V \in \tau_\alpha \text{ öyleki } M \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon \text{ ve}$$
$$M^c(x) \geq \beta \text{ olan her } x \in X \text{ için } V(x) \geq \beta\}$$

ile tanımlanan kümeye $M \in I^X$ fuzzy kümesinin ***α-düzeyinde kapalılık spektrumu*** denir.

Gerekirse $Cl_\alpha(M)$ yerine $Cl_\alpha(M,X)$ yazılabilir.

Teorem 70: (X,τ) bir stu olsun. Her $M \in I^X$ için $Cl_\alpha(M) \cap H_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2},1] \subset Cl_\alpha(M)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Tanım 58: (X,τ) bir stu ve $M\in I^X$ olsun. Bu durumda

$$ACl_\alpha(M):=\{\beta\in I:(Z\supset X,\ \beta\in H_\alpha(Z))\Rightarrow\beta\in Cl_\alpha(M,Z)\}$$

ile tanımlanan kümeye $M\in I^X$ fuzzy kümesinin ***α-düzeyinde mutlak kapalılık spektrumu*** denir.

Teorem 71: (X,τ) bir stu ve $M\in I^X$ olsun. Bu durumda

$$ACl_\alpha(M)\cap R_\alpha(X)\cap H_\alpha(X)\cap(\frac{1}{2},1]\subset C_\alpha(M)$$

dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 72: (X,τ) bir stu ve $M\in I^X$ olsun. Bu durumda

$$ACl_\alpha(M)\cap R_\alpha(X)\cap H_\alpha(X)\cap(\frac{1}{2},1]\subset C_\alpha(M)\cap R_\alpha(X)\cap H_\alpha(X)\cap(\frac{1}{2},1]$$

dır.

İspat: Bkz. [10].■

2.5.6. Fuzzy Kümelerinin Bağlantılılık Derecesi: Tanımlar ve Temel Özellikler

Tanım 59: (X,τ) bir stu, $\alpha\in(0,1]$ ve $M\in I^X$ olsun.

$$D_\alpha(M):=\{\beta\in I \text{ öyleki } \exists U_1,U_2\in\tau_\alpha: M\breve{\subset}U_1<\beta,\ M\breve{\subset}U_2<\beta,\ M\breve{\subset}U_1\vee U_2\geq\beta$$
$$\text{ve } \operatorname{Sup}\{(U_1\wedge U_2)(x):x\in X_M\}<\beta\}$$

ile tanımlanan $D_\alpha(M)$ kümesine $M\in I^X$ fuzzy kümesinin ***α-düzeyinde bağlantısızlık spektrumu*** denir ve

$$S_\alpha(M):=I-D_\alpha(M)$$

ile tanımlanan kümeye $M\in I^X$ fuzzy kümesinin ***α-düzeyinde bağlantılılık spektrumu*** denir.

Eğer gerekirse X uzayında $S_\alpha(M)$ yerine $S_\alpha(M,X)$ kullanılacak.

Teorem 73: (X,τ) bir stu, $M\in I^X$ ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. Bu durumda $0\in S_\alpha(M)$ ve bundan dolayı $S_\alpha(M)\neq\varnothing$ dır.

İspat: Açık.■

Tanım 60: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun.

$$s_\alpha(M) := \text{İnf}\, D_\alpha(M)$$

değerine $M \in I^X$ fuzzy kümesinin ***α-düzeyindebağlantılılık derecesi*** denir.

Teorem 74: (X,τ) bir stu, $M \in I^X$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Eğer $\beta \in D_\alpha(M)$ ise $(\beta - \varepsilon, \beta] \subset D_\alpha(M)$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ mevcuttur ve ayrıca $s_\alpha(M) \in S_\alpha(M)$ dir.

İspat: $\beta \in D_\alpha(M)$ olsun. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} \exists U_1, U_2 \in \tau_\alpha \text{ öyleki } d_1 := M \tilde{\subset} U_1 < \beta,\ d_2 := M \tilde{\subset} U_2 < \beta, \\ M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta \text{ ve } d_3 := \text{Sup}\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} < \beta \end{array}\right\} \quad (1)$$

dır.

$$d := \text{Mak}\{d_1, d_2, d_3\}$$

ile tanımlanırsa $d < \beta$ olduğu görülür.

$$\varepsilon := \beta - d > 0$$

ile tanımlanan $\varepsilon > 0$ için $(\beta - \varepsilon, \beta] \subset D_\alpha(M)$ dır. Gerçekten, $k \in (\beta - \varepsilon, \beta]$ keyfi için $\beta - \varepsilon < k \leq \beta$ dır. Buradan ve (1) den $U_1, U_2 \in \tau_\alpha$ için $M \tilde{\subset} U_1 = d_1 \leq d = \beta - \varepsilon < k$, $M \tilde{\subset} U_2 = d_2 \leq d = \beta - \varepsilon < k$, $M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta \geq k$ ve $\text{Sup}\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} = d_3 \leq d = \beta - \varepsilon < k$ dir. Dolayısıyla $k \in D_\alpha(M)$ ve buradan da $(\beta - \varepsilon, \beta] \subset D_\alpha(M)$ elde edilir. Diğer kısım için, $s_\alpha(M) \notin S_\alpha(M)$ olduğunu varsayalım. Buradan $s_\alpha(M) \in D_\alpha(M)$ dır. Bu önermenin birinci kısmından

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ öyleki } (s_\alpha(M) - \varepsilon, s_\alpha(M)] \subset D_\alpha(M)$$

dir. Buradan $\text{İnf}((s_\alpha(M) - \varepsilon, s_\alpha(M)]) \geq \text{İnf} D_\alpha(M)$ ve buradan $s_\alpha(M) - \varepsilon \geq s_\alpha(M)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde $s_\alpha(M) \in S_\alpha(M)$ dır.■

Teorem 75: X bir stu, Y, X in altuzayı, $M \in I^X$, $X_M \subset Y$ ve $N = M|Y$ ise $S_\alpha(N,Y) = S_\alpha(M,X)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 76: X bir stu, $M \subset X$ ve $r \in I$ ise $S_\alpha(rM) \supset S_\alpha(M)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 77: X bir küme, τ ve τ', X üzerinde iki smooth topoloji ve $M \in I^X$ olsun. Eğer $\tau \leq \tau'$ ise $S_\alpha(M,X') \subset S_\alpha(M,X)$ ve bundan dolayı $s_\alpha(M,X') \leq s_\alpha(M,X)$ dir.

İspat: Bunun için $D_\alpha(M,X) \subset D_\alpha(M,X')$ olduğunu göstermek yeter. $\beta \in D_\alpha(M,X)$ keyfi için

$$\exists U_1, U_2 \in \tau_\alpha \text{ öyleki } M \tilde{\subset} U_1 < \beta,\ M \tilde{\subset} U_2 < \beta,\ M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$$
$$\text{ve } \text{Sup}\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} < \beta$$

dır. Hipotezden $\tau \leq \tau'$ olduğundan $U_1, U_2 \in \tau^*_\alpha$ dır. Dolayısıyla $\beta \in D_\alpha(M,X')$ ve $D_\alpha(M,X) \subset D_\alpha(M,X')$ elde edilir. Buradan da $S_\alpha(M,X') \subset S_\alpha(M,X)$ ve bundan dolayı $s_\alpha(M,X) \geq s_\alpha(M,X')$ elde edilir.■

Teorem 78: X bir stu, $M,N \in I^X$ olsun. Eğer $\beta \in S_\alpha(M) \cap S_\alpha(N)$ ve $M \tilde{\subset} N^c < \beta$ ise $\beta \in S_\alpha(M \vee N)$ dir. Ayrıca $M \tilde{\subset} N^c < s_\alpha(M) \cap s_\alpha(N)$ ise $s_\alpha(M \vee N) \geq s_\alpha(M) \wedge s_\alpha(N)$ dir.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 79: (X,τ), (Y,τ') iki stu, $M \in I^X$, $\alpha \in (0,1]$ ve $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth sürekli dönüşüm ise $S_\alpha(M) \subset S_\alpha(f(M))$ ve bundan dolayı $s_\alpha(M) \leq s_\alpha(f(M))$ dır.

İspat: $\beta \in S_\alpha(M)$ k.v. $\beta \notin S_\alpha(f(M))$ olduğunu varsayalım. Buradan $\beta \in D_\alpha(f(M))$ ve

$$\left.\begin{array}{l} \exists V_1, V_2 \in \tau^*_\alpha \text{ öyleki } f(M) \tilde{\subset} V_1 < \beta,\ f(M) \tilde{\subset} V_2 < \beta,\ f(M) \tilde{\subset} V_1 \vee V_2 \geq \beta \\ \qquad \text{ve } \operatorname{Sup}\{(V_1 \wedge V_2)(y) : y \in Y_{f(M)}\} < \beta \end{array}\right\} \quad (1)$$

dır.

$$U_1 := f^{-1}(V_1),\ U_2 := f^{-1}(V_2)$$

ile tanımlansın. f smooth sürekli olduğundan $U_1, U_2 \in \tau_\alpha$ dır. Bu U_1, U_2 fuzzy kümelerinin $M \tilde{\subset} U_1 < \beta$, $M \tilde{\subset} U_2 < \beta$, $M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$ ve $\operatorname{Sup}\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} < \beta$ koşullarını sağlar. Gerçekten, (1) den $f(M) \tilde{\subset} V_1 = \bigwedge\{((f(M))^c \vee V_1)(y) : y \in Y\} < \beta$ dır. Buradan

$$\exists y_0 \in Y \text{ öyleki } (f(M))^c(y_0) < \beta \text{ ve } V_1(y_0) < \beta$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} (f(M))^c(y_0) &= 1 - f(M)(y_0) \\ &= 1 - \operatorname{Sup}\{M(z) : z \in f^{-1}(y_0)\} \\ &= \operatorname{İnf}\{M^c(z) : z \in f^{-1}(y_0)\} \\ &< \beta \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\exists z_0 \in f^{-1}(y_0) \text{ öyleki } M^c(z_0) < \beta$$

dır. Bu $z_0 \in f^{-1}(y_0)$ için $U_1(z_0) = f^{-1}(V_1)(z_0) = V_1(f(z_0)) = V_1(y_0) < \beta$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} M \tilde{\subset} U_1 &= \bigwedge\{(M^c \vee U_1)(x) : x \in X\} \\ &\leq M^c(z_0) \vee U_1(z_0) \\ &< \beta \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $M \tilde{\subset} U_1 < \beta$ elde edilir. Benzer şekilde $M \tilde{\subset} U_2 < \beta$ olduğu gösterilebilir. (1) den $f(M) \tilde{\subset} V_1 \vee V_2 \geq \beta$ olduğundan ve Teorem 49 dan

$$
\begin{aligned}
M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 &= M \tilde{\subset} f^{-1}(V_1) \vee f^{-1}(V_2) \\
&\geq f^{-1}(f(M)) \tilde{\subset} f^{-1}(V_1 \vee V_2) \\
&= f(M) \tilde{\subset} V_1 \vee V_2 \\
&\geq \beta
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla $M \tilde{\subset} U_1 \vee U_2 \geq \beta$ elde edilir. Son olarak da $\text{Sup}\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} < \beta$ olduğunu göstermek için önce $f(X_M) \subset Y_{f(M)}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $y \in f(X_M)$ k.v. Buradan

$$\exists x \in X_M \text{ öyleki } y = f(x)$$

dir. $x \in X_M = M^{-1}((0,1])$ olduğundan $M(x)>0$ dır. Buradan $f(M)(y) = \text{Sup}\{M(z) : z \in f^{-1}(y)\} \geq M(x) > 0$ dolayısıyla $y \in Y_{f(M)}$ ve $f(X_M) \subset Y_{f(M)}$ elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} &= \{(f^{-1}(V_1) \wedge f^{-1}(V_2))(x) : x \in X_M\} \\
&= \{(f^{-1}(V_1 \wedge V_2))(x) : x \in X_M\} \\
&= \{(V_1 \wedge V_2)(f(x)) : x \in X_M\} \\
&\subset \{(V_1 \wedge V_2)(f(x)) : f(x) \in f(X_M)\} \\
&\subset \{(V_1 \wedge V_2)(f(x)) : f(x) \in Y_{f(M)}\} \\
&\subset \{(V_1 \wedge V_2)(y) : y \in Y_{f(M)}\}
\end{aligned}
$$

dır. Buradan ve (1) den $\text{Sup}\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} \leq \text{Sup}\{(V_1 \wedge V_2)(y) : y \in Y_{f(M)}\} < \beta$ yani $\text{Sup}\{(U_1 \wedge U_2)(x) : x \in X_M\} < \beta$ elde edilir. Bu ise $\beta \in D_\alpha(M)$ yani $\beta \notin S_\alpha(M)$ olduğunu gösterir ki bu $\beta \in S_\alpha(M)$ ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. O halde $\beta \in S_\alpha(f(M))$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $S_\alpha(M) \subset S_\alpha(f(M))$ elde edilir. Buradan da $s_\alpha(M) \leq s_\alpha(f(M))$ elde edilir.■

Teorem 80: $\{(X_k, Y_k) : k \in \Delta\}$ smooth topolojik uzayların bir ailesi, (X,τ) bu ailenin çarpım uzayı, her $k \in \Delta$ için $M_k \in I^{X_k}$ fuzzy kümesi ve $M = \prod M_k$ çarpım fuzzy kümesi ise $S_\alpha(M) \supset \cap\{S_\alpha(M_k) : k \in \Delta\}$ ve bundan dolayı $S_\alpha(M) \geq \text{İnf}\{S_\alpha(M_k) : k \in \Delta\}$ dır. Eğer her $k \in \Delta$ için M_k normlanmış ise $S_\alpha(M) = \cap\{S_\alpha(M_k) : k \in \Delta\}$ ve bundan dolayı $s_\alpha(M) = \text{İnf}\{s_\alpha(M_k) : k \in \Delta\}$ dır.

İspat: Bkz [10].■

2.5.7. Dönüşümlerin Bağlantılılık Derecesi

Bu bölüm için, (X,τ), (Y,τ') iki stu ve $f: X \to Y$ smooth sürekli olsun.

Tanım 61: $S_\alpha(f) := \cap\{S_\alpha(f^{-1}(y)) : y \in Y\}$ kümesine f dönüşümünün ***α-düzeyinde bağlantılılık spektrumu*** denir.

Tanım 62: $s_\alpha(f) := \text{İnf}(I - S_\alpha(f))$ değerine f dönüşümünün ***α-düzeyinde bağlantılılık derecesi*** denir.

Teorem 81: $0 \in S_\alpha(f)$ dır ve bundan dolayı $s_\alpha(f) \neq \varnothing$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 82: Eğer $\beta \notin S_\alpha(f)$ ise $(\beta - \varepsilon, \beta] \cap S_\alpha(f) = \varnothing$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ mevcuttur. Ayrıca $s_\alpha(f) \in S_\alpha(f)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 83: Her $k \in \Delta$ için $X_k \neq \varnothing$ ve $f_k : X_k \to Y_k$ smooth sürekli dönüşümlerin çarpımı $f := \prod f_k : \prod X_k \to \prod Y_k$ ise $s_\alpha(f) = \text{İnf}\{s_\alpha(f_k) : k \in \Delta\}$ dır.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 84: $f: X \to Y$ açık dönüşüm ve $N \in I^Y$ olsun. Eğer $\beta \in S_\alpha(f) \cap S_\alpha(N)$ ve $N \underset{Y_N}{\geq} \beta^c$ ise $\beta \in S_\alpha(f^{-1}(N))$ dır. Ayrıca $N \underset{Y_N}{\geq} (s_\alpha(f) \wedge s_\alpha(N))^c$ ise $s_\alpha(f^{-1}(N)) \geq s_\alpha(N) \wedge s_\alpha(f)$ dir.

İspat: Bkz [10].■

Teorem 85: X, Y ve Z stu, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ açık dönüşümler ve $h := g \circ f$ ise $S_\alpha(h) \supset S_\alpha(f) \cap S_\alpha(g)$ ve bundan dolayı $s_\alpha(h) \geq s_\alpha(f) \wedge s_\alpha(g)$ dır.

İspat: Bkz [10].■

2.6. Bir Smooth Topoloji Ailesinden Yeni Bir Smooth Topolojinin Üretilmesi

Bu bölümde A.P. Sostak'ın 1989 da yayınlanan bir makalesi incelenmiştir [11]. Bu çalışmada bir smooth topoloji ailesinden yeni bir smooth topolojinin üretilmesi ve buna ilişkin bazı teoremler verilmiştir.

Teorem 86: X bir küme ve $\{\tau^{\alpha}: I^{X} \to I : \alpha \in (0,1]\}$ X üzerinde smooth topolojilerin bir ailesi öyleki $\alpha' \leq \alpha$ için $\tau^{\alpha'} \geq \tau^{\alpha}$ olsun. Bu durumda

$$\tau : I^{X} \to I,\ \tau(M) := \bigvee\{\tau^{\alpha}(M) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\}$$

ile tanımlanan τ, X üzerinde bir smooth topolojidir. Bu τ ya $\{\tau^{\alpha} : \alpha \in (0,1]\}$ ailesi tarafından üretilen smooth topoloji denir.

İspat:

(O1) $\tau(0_X) = \tau(1_X) = 1$

(O2) $M, N \in I^{X}$ k.v.

$\tau(M) \wedge \tau(N) = \bigvee\{\tau^{\alpha}(M) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \wedge \bigvee\{\tau^{\alpha}(N) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} =: k$ olsun. Buradan $\varepsilon > 0$ keyfi için

$$\exists \alpha_0, \alpha_1 \in (0,1] \text{ öyleki } \tau^{\alpha_0}(M) \wedge \alpha_0 > k - \varepsilon \text{ ve } \tau^{\alpha_1}(M) \wedge \alpha_1 > k - \varepsilon$$

dur.

$$\alpha_2 := \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$$

olsun. $\alpha_2 \leq \alpha_0$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_1$ olduğundan $\tau^{\alpha_2}(M) \geq \tau^{\alpha_0}(M)$ ve $\tau^{\alpha_2}(N) \geq \tau^{\alpha_1}(N)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\tau(M \wedge N) &= \bigvee\{\tau^{\alpha}(M \wedge N) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \\
&\geq \tau^{\alpha_2}(M \wedge N) \wedge \alpha_2 \\
&\geq (\tau^{\alpha_2}(M) \wedge \tau^{\alpha_2}(N)) \wedge (\alpha_0 \wedge \alpha_1) \\
&\geq (\tau^{\alpha_0}(M) \wedge \alpha_0) \wedge (\tau^{\alpha_1}(N) \wedge \alpha_1) \\
&> k - \varepsilon
\end{aligned}$$

dur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\tau(M \wedge N) \geq k = \tau(M) \wedge \tau(N)$ dır.

(O3) $\{M_i : i \in J\} \subset I^{X}$ k.v. Eğer $\bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\} = 0$ ise açık. $\bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\} =: k > 0$ olsun. Her $i \in J$ için $\tau(M_i) = \bigvee\{\tau^{\alpha}(M_i) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \geq k$ dır. $\varepsilon \in (0, \frac{k}{2}]$ keyfi için

$$\exists \alpha_i \in (0,1] \text{ öyleki } \tau^{\alpha_i}(M_i) \wedge \alpha_i > k - \varepsilon \geq \frac{k}{2} > 0$$

dır. Buradan

$$\bigwedge\{\tau^{\alpha_i}(M_i) \wedge \alpha_i : i \in J\} \geq k - \varepsilon \qquad (1)$$

dır.

$$\alpha_0 := \text{İnf}\{\alpha_i : i \in J\}$$

ile tanımlansın. (1) den $\alpha_0 \geq k - \varepsilon > 0$ dır. Buradan $\alpha_0 \in (0,1]$ dır. Her $i \in J$ için $\alpha_0 \leq \alpha_i$ olduğundan her $M \in I^X$ ve her $i \in J$ için $\tau^{\alpha_0}(M) \geq \tau^{\alpha_i}(M)$ dir. Buradan ve (1) den

$$\begin{aligned}
\tau(\bigvee\{M_i : i \in J\}) &= \bigvee\{\tau^{\alpha}(\bigvee\{M_i : i \in J\}) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \\
&\geq \tau^{\alpha_0}(\bigvee\{M_i : i \in J\}) \wedge \alpha_0 \\
&\geq \bigwedge\{\tau^{\alpha_0}(M_i) : i \in J\}) \wedge \bigwedge\{\alpha_i : i \in J\} \\
&\geq \bigwedge\{\tau^{\alpha_i}(M_i) : i \in J\}) \wedge \bigwedge\{\alpha_i : i \in J\} \\
&= \bigwedge\{\tau^{\alpha_i}(M_i) \wedge \alpha_i : i \in J\} \\
&\geq k - \varepsilon
\end{aligned}$$

dur. $\varepsilon \in (0, \frac{k}{2}]$ keyfi olduğundan $\tau(\bigvee\{M_i : i \in J\} \geq k = \bigwedge\{\tau(M_i) : i \in J\}$ dır. Dolayısıyla τ, X üzerinde smooth topolojidir.■

Teorem 87: X bir küme, $\{\tau^{\alpha} : \alpha \in (0,1]\}$ ailesi X üzerinde smooth topolojilerin azalan bir ailesi ve τ bu aile tarafından üretilen smooth topoloji ise her $r \in (0,1]$ için $\tau_r = \bigcap\{\tau^{\alpha}_{\alpha} : \alpha < r\}$ dir.

İspat: $r \in (0,1]$, $M \in \tau_r$ k.v. ve k<r olacak şekilde $k \in (0,1]$ k.v. Buradan $\tau(M) = \bigvee\{\tau^{\alpha}(M) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \geq r > k$ dır. Buradan

$$\exists \alpha_0 \in (0,1] \text{ öyleki } \tau^{\alpha_0}(M) \wedge \alpha_0 > k$$

dır. $\alpha_0 > k$ olduğundan $\tau^{k}(M) \geq \tau^{\alpha_0}(M) > k$ dır. Buradan $M \in \tau^{k}_{k}$ dır. k<r keyfi olduğundan $M \in \bigcap\{\tau^{\alpha}_{\alpha} : \alpha < r\}$ dır. Dolayısıyla

$$\tau_r \subset \bigcap\{\tau^{\alpha}_{\alpha} : \alpha < r\} \qquad (1)$$

dır. Diğer yandan $M \in \bigcap\{\tau^{\alpha}_{\alpha} : \alpha < r\}$ ve $\varepsilon > 0$ k.v. Buradan

$$\exists k \in (0,1] \text{ öyleki } r - \varepsilon < k < r$$

dır. Buradan $\tau^{k}(M) \geq k > r - \varepsilon$ ve $\tau^{k}(M) \wedge k > r - \varepsilon$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\tau(M) &= \bigvee\{\tau^{\alpha}(M) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \\
&\geq \tau^{k}(M) \wedge k \\
&> r - \varepsilon
\end{aligned}$$

dur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\tau(M) \geq r$ ve $M \in \tau_r$ dır. Dolayısıyla

$$\tau_r \supset \bigcap\{\tau_\alpha^\alpha : \alpha < r\} \quad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) den $\tau_r = \bigcap\{\tau_\alpha^\alpha : \alpha < r\}$ elde edilir.■

Teorem 88: X ve Y iki küme, $\{\tau_X^\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ ve $\{\tau_Y^\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ sırası ile X ve Y üzerinde smooth topolojilerin azalan iki ailesi ve τ_X, τ_Y bu aileler tarafından üretilen smooth topolojiler olsun. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $f:(X,\tau_X^\alpha) \to (Y,\tau_Y^\alpha)$ smooth sürekli (smooth açık, smooth kapalı) ise $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ smooth süreklidir. (smooth açık, smooth kapalıdır).

İspat: $M \in I^Y$ k.v. Her $\alpha \in (0,1]$ için $f:(X,\tau_X^\alpha) \to (Y,\tau_Y^\alpha)$ smooth sürekli olduğundan her $\alpha \in (0,1]$ için $\tau_X^\alpha(f^{-1}(M)) \geq \tau_Y^\alpha(M)$ dır. Buradan her $\alpha \in (0,1]$ için $\tau_X^\alpha(f^{-1}(M)) \wedge \alpha \geq \tau_Y^\alpha(M) \wedge \alpha$ ve
$\bigvee\{\tau_X^\alpha(f^{-1}(M)) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \geq \bigvee\{\tau_Y^\alpha(f^{-1}(M)) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\}$ dır. Buradan $\tau_X(f^{-1}(M)) \geq \tau_Y(M)$ elde edilir. Dolayısıyla $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ smooth süreklidir.

Her $\alpha \in (0,1]$ için $f:(X,\tau_X^\alpha) \to (Y,\tau_Y^\alpha)$ smooth açık olsun. $M \in I^X$ k.v. Her $\alpha \in (0,1]$ için $\tau_X^\alpha(M) \leq \tau_Y^\alpha(f(M))$ dır. Buradan her $\alpha \in (0,1]$ için $\tau_X^\alpha(M) \wedge \alpha \leq \tau_Y^\alpha(f(M)) \wedge \alpha$ ve $\bigvee\{\tau_X^\alpha(M) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\} \leq \bigvee\{\tau_Y^\alpha(f(M)) \wedge \alpha : \alpha \in (0,1]\}$ dır. Buradan $\tau_X(M) \leq \tau_Y(f(M))$ elde edilir. Dolayısıyla $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ smooth açıktır.

Her $\alpha \in (0,1]$ için $f:(X,\tau_X^\alpha) \to (Y,\tau_Y^\alpha)$ smooth kapalı olsun. $M \in I^X$ k.v. Her $\alpha \in (0,1]$ için $(\tau_X^\alpha)^*(M) \leq (\tau_X^\alpha)^*(f(M))$ dır. Buradan her $\alpha \in (0,1]$ için $\tau_X^\alpha(M^c) \leq \tau_X^\alpha((f(M))^c)$ ve $\tau_X^\alpha(M^c) \wedge \alpha \leq \tau_X^\alpha((f(M))^c) \wedge \alpha$ dır. Buradan $\tau_X(M^c) \leq \tau_Y((f(M))^c)$ ve $\tau_X^*(M) \leq \tau_Y^*(f(M))$ elde edilir. Bu ise $f:(X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ nin smooth kapalı olduğunu gösterir.■

2.7. Smooth Topolojik Uzaylarda Kompaktlık Tipleri

Bu bölümde M. Demirci'nin 1997 yılında yayınlanan bir makalesi incelenmiştir [12]. Bu çalışmada kısaca smooth kapanış ve smooth iç tanımları farklı bir şekilde ele alınmış, smooth kompaktlık, smooth nearly kompaktlık, smooth almost kompaktlık ve bunlara ilişkin bir takım özellikler verilmiştir.

2.7.1. Kapanış ve İç Özellikleri

(X,τ) bir stu, $M\in I^X$ ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. $M\in I^X$ fuzzy kümesinin (X,τ_α) daki kapanışı (içi) $\overline{M}_\alpha$ (M^0_α) ile gösterilir ve M nin τ_α-kapanışı (τ_α-içi) olarak adlandırılır. Buna göre

$$\overline{M}_\alpha := \wedge\{N\in\tau^*_\alpha : M\leq N\} \text{ ve } M^0_\alpha := \vee\{N\in\tau_\alpha : N\leq M\}$$

dır.

Tanım 63: (X,τ) bir stu ve $M\in I^X$ olsun.

$\overline{M} := \wedge\{N\in I^X : \tau^*(N)>0,\ M\leq N\}$ ve $M^0 := \vee\{N\in I^X : \tau(N)>0,\ N\leq M\}$

ile tanımlanan $\overline{M}$ ve M^0 kümelerine sırasıyla M nin τ-smooth kapanışı ve τ-smooth içi denir.

Teorem 89: (X,τ) bir stu ve $M,N\in I^X$ olsun.

a) $M\leq N$ ise $M^0\leq N^0$

b) $M\leq N$ ise $\overline{M}\leq\overline{N}$

c) $(M^0)^c=\overline{(M^c)}$

d) $M^0=\left(\overline{(M^c)}\right)^c$

e) $\overline{M}=((M^c)^0)^c$

f) $\left(\overline{M}\right)^c=(M^c)^0$

İspat:

a) $M\leq N$ olsun. Bu durumda

$\{K\in I^X : \tau(K)>0,\ K\leq M\}\subset\{K\in I^X : \tau(K)>0,\ K\leq N\}$ dır. Buradan

$\vee\{K\in I^X : \tau(K)>0,\ K\leq M\}\leq\vee\{K\in I^X : \tau(K)>0,\ K\leq N\}$ dır. Dolayısıyla $M^0\leq N^0$ dır.

b) $M\leq N$ olsun. Bu durumda

$\{K\in I^X : \tau^*(K)>0,\ M\leq K\}\supset\{K\in I^X : \tau^*(K)>0,\ N\leq K\}$ dır. Buradan $\wedge\{K\in I^X : \tau^*(K)>0,\ M\leq K\}\leq \wedge\{K\in I^X : \tau^*(K)>0,\ N\leq K\}$ dır. Dolayısıyla $\overline{M}\leq\overline{N}$ dır.

c) $(M^0)^c = 1-M^0$

$= 1-\vee\{K\in I^X : \tau(K)>0,\ K\leq M\}$

$= \wedge\{1-K\in I^X : \tau(K)>0,\ K\leq M\}$

$= \wedge\{K^c\in I^X : \tau^*(K^c)>0,\ M^c\leq K^c\}$

$= \overline{(M^c)}$.

d) c) deki eşitliğin bütünleyenleri alındığında $M^0 = \left(\overline{(M^c)}\right)^c$ elde edilir.

e) c) de M yerine M^c koyulduğunda $\overline{M} = ((M^c)^0)^c$ elde edilir.

f) e) deki eşitliğin bütünleyeni alındığında $\left(\overline{M}\right)^c = (M^c)^0$ elde edilir.■

Uyarı : (X,T) fuzzy topolojik uzay olsun. Bu T fuzzy topolojiye karşılık X üzerinde bir smooth topoloji tanımlanabilir. Gerçekten,

$$\tau : I^X \to I,\ \tau(M):=\begin{cases}1, & M\in T\\ 0, & M\notin T\end{cases}$$

ile tanımlanan τ, X üzerinde bir smooth topolojidir ve $M\in I^X$ fuzzy kümesinin τ-smooth kapanışı (içi) ile T fuzzy topolojisine göre kapanışı (içi) aynıdır.

Teorem 90: (X,τ) bir stu ve $M,N\in I^X$ olsun.

a) $M^0\leq M$

b) $1_X^0 = 1_X$

c) $(M^0)^0 = M^0$

d) $(M\wedge N)^0\leq M^0\wedge N^0$

İspat:

a) $M^0 = \vee\{K\in I^X : \tau(K)>0, K\leq M\}\leq M$.

b) a) dan $1_X^0\leq 1_X$ dir. $1_X^0 = \vee\{K\in I^X : \tau(K)>0, K\leq 1_X\}\geq 1_X$ dır. Dolayısıyla $1_X^0 = 1_X$ dir.

c) $\{K\in I^X : \tau(K)>0, K\leq M^0\} = \{K\in I^X : \tau(K)>0, K\leq M\}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $(M^0)^0 = M^0$ dır.

d) $M\wedge N\leq M$ ve $M\wedge N\leq N$ olduğundan Teorem 89 a) dan $(M\wedge N)^0\leq M^0$ ve $(M\wedge N)^0\leq N^0$ dır. Buradan $(M\wedge N)^0\leq M^0\wedge N^0$ elde edilir.■

Teorem 91: (X,τ) bir stu ve $M,N\in I^X$ olsun.

a) $M \leq \overline{M}$

b) $\overline{0}_X = 0_X$

c) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$

d) $\overline{M} \vee \overline{N} \leq \overline{M \vee N}$

İspat:

a) $\overline{M} = \bigwedge\{K \in I^X : \tau^*(K) > 0, M \leq K\} \geq M$.

b) a) dan $\overline{0}_X \geq 0_X$ dır. $\overline{0}_X = \bigwedge\{K : \tau^*(K) > 0, 0_X \leq K\} \leq 0_X$ dır. Dolayısıyla $\overline{0}_X = 0_X$ dır.

c) $\{K \in I^X : \tau^*(K) > 0, \overline{M} \leq K\} = \{K \in I^X : \tau^*(K) > 0, M \leq K\}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ dır.

d) $M \leq M \vee N$ ve $N \leq M \vee N$ olduğundan Teorem 89 b) den $\overline{M} \leq \overline{M \vee N}$ ve $\overline{N} \leq \overline{M \vee N}$ dır. Buradan $\overline{M} \vee \overline{N} \leq \overline{M \vee N}$ dir.■

Teorem 92: (X,τ) bir stu ve $M \in I^X$ olsun.

a) $\tau(M) > 0$ ise $M = M^0$,

b) $\tau^*(M) > 0$ ise $M = \overline{M}$,

c) Bir $\alpha \in (0,1]$ için $M = \overline{M}_\alpha$ ise $M = \overline{M}$ dir,

d) Bir $\alpha \in (0,1]$ için $M = M^0_\alpha$ ise $M = M^0$ dir.

İspat:

a) Teorem 90 a) dan $M^0 \leq M$ dır. $\tau(M) > 0$ olması durumunda $M^0 = \bigvee\{K : \tau(K) > 0,\ K \leq M\} \geq M$ dır. Buradan $M = M^0$ elde edilir.

b) Teorem 91 a) dan $M \leq \overline{M}$ dır. $\tau^*(M) > 0$ olması durumunda $\overline{M} = \bigwedge\{K : \tau^*(K) > 0,\ M \leq K\} \leq M$ dır. Buradan $M = \overline{M}$ elde edilir.

c) $\alpha \in (0,1]$ için $M = \overline{M}_\alpha$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} M = \overline{M}_\alpha &= \bigwedge\{K \in I^X : K \in \tau^*_\alpha,\ M \leq K\} \\ &= \bigwedge\{K \in I^X : \tau^*(K) \geq \alpha,\ M \leq K\} \\ &\geq \bigwedge\{K \in I^X : \tau^*(K) \geq 0,\ M \leq K\} \\ &= \overline{M} \end{aligned}$$

dır. Buradan $M \geq \overline{M}$ ve Teorem 91 a) dan $M \leq \overline{M}$ olduğundan $M = \overline{M}$ elde edilir.

d) $\alpha \in (0,1]$ için $M = M^0_\alpha$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} M = M^0_\alpha &= \bigvee\{K \in I^X : K \in \tau_\alpha,\ K \leq M\} \\ &= \bigvee\{K \in I^X : \tau(K) > \alpha,\ K \leq M\} \\ &\leq \bigvee\{K \in I^X : \tau(K) > 0,\ K \leq M\} = M^0 \end{aligned}$$

dır. Buradan $M \leq M^0$ ve Teorem 90 a) dan $M^0 \leq M$ olduğundan $M = M^0$ elde edilir.■

Teorem 93: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki stu ve $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ zayıf smooth sürekli dönüşüm olsun. Bu durumda

a) Her $M \in I^X$ için $f(\overline{M}) \leq \overline{f(M)}$,

b) Her $N \in I^Y$ için $\overline{f^{-1}(N)} \leq f^{-1}(\overline{N})$,

c) Her $N \in I^Y$ için $f^{-1}(N^0) \leq \left(f^{-1}(N)\right)^0$.

İspat:

a) $M \in I^X$ ve $K \in \{K : \tau_2^*(K) > 0,\ f(M) \leq K\}$ k.v. Buradan $\tau_2^*(K) > 0$ ve $f(M) \leq K$ dır. f zayıf smooth sürekli olduğundan $\tau_1^*(f^{-1}(K)) > 0$ ve $f(M) \leq K$ olduğundan $M \leq f^{-1}(f(M)) \leq f^{-1}(K)$ dır. Buradan $\overline{M} = \wedge\{U : \tau^*(U) > 0, M \leq U\} \leq f^{-1}(K)$ ve $f(\overline{M}) \leq f(f^{-1}(K)) \leq K$ dır. $K \in \{K : \tau_2^*(K) > 0,\ f(M) \leq K\}$ keyfi olduğundan $f(\overline{M}) \leq \wedge\{K : \tau_2^*(K) > 0,\ f(M) \leq K\} = \overline{f(M)}$ elde edilir.

b) $N \in I^Y$ k.v. a) dan $f\left(\overline{f^{-1}(N)}\right) \leq \overline{f(f^{-1}(N))} \leq \overline{N}$ dır. Buradan $\overline{f^{-1}(N)} \leq f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(N)}\right)\right) \leq f^{-1}(\overline{N})$ yani $\overline{f^{-1}(N)} \leq f^{-1}(\overline{N})$ dir.

c) $N \in I^Y$ k.v. b) ve Teorem 89 c) den $(f^{-1}(N^0))^c = f^{-1}((N^0)^c) = f^{-1}\left(\overline{(N^c)}\right) \geq \overline{f^{-1}(N^c)} = \overline{(f^{-1}(N^c))^c} = ((f^{-1}(N))^0)^c$ dır. Buradan $f^{-1}(N^0) \leq (f^{-1}(N))^0$ elde edilir.■

Sonuç 5: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki stu ve $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ smooth sürekli dönüşüm olsun.

a) Her $M \in I^X$ için $f(\overline{M}) \leq \overline{f(M)}$,

b) Her $N \in I^Y$ için $\overline{f^{-1}(N)} \leq f^{-1}(\overline{N})$,

c) Her $N \in I^Y$ için $f^{-1}(N^0) \leq (f^{-1}(N))^0$.

Teorem 94: (X,τ) ve (Y,τ') iki stu ve $M \in I^X$ olsun. Eğer $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ smooth açık ise $f(M^0) \leq (f(M))^0$ dır.

İspat: $M \in I^X$ için

$$\{f(K) : K \in I^X, \tau(K), K \leq M\} \subset \{f(K) : K \in I^X, \tau(K) > 0, f(K) \leq f(M)\} \quad (1)$$

dır. f smooth açık olduğundan,

$$\{f(K) : K \in I^X, \tau(K) > 0, f(K) \leq f(M)\} \subset \{f(K) : K \in I^X, \tau'(f(K)) > 0, f(K) \leq f(M)\} \quad (2)$$

ve

$$\{f(K) : K \in I^X, \tau'(f(K)) > 0, f(K) \leq f(M)\} \subset \{U \in I^X : \tau'(U) > 0, U \leq f(M)\} \quad (3)$$

dir. (1), (2) ve (3) den

$$\begin{aligned} f(M^0) &= f(\bigvee\{K \in I^X, \tau(K) > 0, K \le M\}) \\ &= \bigvee\{ f(K) : K \in I^X, \tau(K) > 0, K \le M\} \\ &\le \bigvee\{ f(K) : K \in I^X, \tau(K) > 0, f(K) \le f(M)\} \\ &\le \bigvee\{ f(K) : K \in I^X, \tau'(f(K)) > 0, f(K) \le f(M)\} \\ &\le \bigvee\{U \in I^Y, \tau'(U) > 0, U \le f(M)\} \\ &= (f(M))^0 \end{aligned}$$

elde edilir.■

2.7.2. Kompaktlık Tipleri ve Aralarındaki İlişkiler

Tanım 64: (X,τ) bir stu olsun.

(X,τ) ya Demirci anlamında smooth kompakttır denir :⇔ Her $\{M_i : i \in J\} \subset \{M \in I^X : \tau(M) > 0\}$ ailesi öyleki $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J\}$ için $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J_0\}$ olacak şekilde bir $J_0 \subset J$ sonlu altindis mevcuttur.

Tanım 65: (X,τ) bir stu olsun.

(X,τ) ya smooth nearly kompakttır denir :⇔ Her $\{M_i : i \in J\} \subset \{M \in I^X : \tau(M) > 0\}$ ailesi öyleki $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J\}$ için $1_X = \bigvee\{(\overline{M_i})^0 : i \in J_0\}$ olacak şekilde bir $J_0 \subset J$ sonlu altindis mevcuttur.

Tanım 66: (X,τ) bir stu olsun.

(X,τ) ya smooth almost kompakt denir :⇔ Her $\{M_i : i \in J\} \subset \{M \in I^X : \tau(M) > 0\}$ ailesi öyleki $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J\}$ için $1_X = \bigvee\{\overline{M_i} : i \in J_0\}$ olacak şekilde bir $J_0 \subset J$ sonlu altindis mevcuttur.

Tanım 67: (X,τ) bir stu olsun.

(X,τ) ya smooth regüler denir :⇔ Her $M \in I^X$ öyleki $\tau(M) > 0$ için $M = \bigvee\{N \in I^X, \tau(N) \ge \tau(M), \overline{N} \le M\}$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 95: Demirci anlamında smooth kompaktlık ⇒ Smooth nearly kompaktlık ⇒ Smooth almost kompaktlık.

İspat: (X,τ) Demirci anlamında smooth kompakt olsun. $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J\}$ olacak şekilde $\{M_i : i \in J\} \subset \{M \in I^X : \tau(M) > 0\}$ k.v. (X,τ) Demirci anlamında smooth kompakt olduğundan

$$\exists J_0 \subset J \text{ sonlu öyleki } 1_X = \vee\{M_i : i \in J_0\}$$

dır. Her $i \in J$ için $\tau(M_i) > 0$ olduğundan ve Teorem 92 a) dan her $i \in J$ için $M_i = M_i^0$ dir. Bundan dolayı $M_i = M_i^0 \leq (\overline{M_i})^0$ dır. Buradan $1_X = \vee\{M_i : i \in J_0\} \leq \vee\{(\overline{M_i})^0 : i \in J_0\}$ yani $1_X = \vee\{(\overline{M_i})^0 : i \in J_0\}$ elde edilir. Dolayısıyla (X,τ) smooth nearly kompakttır.

(X,τ) stu ve smooth nearly kompakt olsun. $1_X = \vee\{M_i : i \in J\}$ olacak şekilde $\{M_i : i \in J\} \subset \{M \in I^X : \tau(M) > 0\}$ k.v. (X,τ) smooth nearly kompakt olduğundan

$$\exists J_0 \subset J \text{ sonlu öyleki } 1_X = \vee\{(\overline{M_i})^0 : i \in J_0\}$$

dır. Her $i \in J$ için $\tau(M_i) > 0$ olduğundan Teorem 92 a) dan ve Teorem 89 a) dan $M_i = M_i^0 \leq (\overline{M_i})^0 \leq \overline{M_i}$ dır. Buradan $1_X = \vee\{(\overline{M_i})^0 : i \in J_0\} \leq \vee\{\overline{M_i} : i \in J_0\}$ yani $1_X = \vee\{\overline{M_i} : i \in J_0\}$ elde edilir. Dolayısıyla (X,τ) smooth almost kompakttır.■

Teorem 96: (X,τ_1) ve (Y,τ_2) iki stu ve $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ örten ve zayıf smooth sürekli dönüşüm olsun. Eğer (X,τ_1) smooth almost kompakt ise (Y,τ_2) smooth almost kompakttır.

İspat: $1_Y = \vee\{M_i : i \in J\}$ olacak şekilde $\{M_i : i \in J\} \subset \{M \in I^Y : \tau_2(M) > 0\}$ k.v. Buradan $1_X = f^{-1}(1_Y) = f^{-1}(\vee\{M_i : i \in J\}) \leq \vee\{f^{-1}(M_i) : i \in J\}$ ve f zayıf smooth sürekli olduğundan $\{f^{-1}(M_i) : i \in J\} \subset \{N \in I^X : \tau_1(N) > 0\}$ dır. (X,τ_1) smooth almost kompakt olduğundan

$$\exists J_0 \subset J \text{ sonlu öyleki } 1_X = \vee\{\overline{f^{-1}(M_i)} : i \in J_0\}$$

dır. f örten olduğundan ve Teorem 93 a) dan

$$\begin{aligned}
1_Y = f(1_X) &= f(\vee\{\overline{f^{-1}(M_i)} : i \in J_0\}) \\
&= \vee\{f\left(\overline{f^{-1}(M_i)}\right) : i \in J_0\} \\
&\leq \vee\{\overline{f(f^{-1}(M_i))} : i \in J_0\} \\
&= \vee\{\overline{M_i} : i \in J_0\}
\end{aligned}$$

dır. Buradan $1_Y = \vee\{\overline{M_i} : i \in J_0\}$ elde edilir. Bu ise (Y,τ_2) nin smooth almost kompakt olduğunu gösterir.■

Sonuç 6: (X,τ_1), (Y,τ_2) iki stu ve $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ örten ve zayıf smooth sürekli dönüşüm olsun. Eğer (X,τ_1) smooth nearly kompakt ise (Y,τ_2) smooth almost kompakttır.

Sonuç 7: (X,τ_1), (Y,τ_2) iki stu ve $f:(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ örten, smooth sürekli dönüşüm olsun.

a) Eğer (X,τ_1) smooth almost kompakt ise (Y,τ_2) smooth almost kompakttır.

b) Eğer (X,τ_1) smooth nearly kompakt ise (Y,τ_2) smooth almost kompakttır.

Teorem 97: Bir smooth almost kompakt ve smooth regüler smooth topolojik uzayı Demirci anlamında smooth kompakttır.

İspat: (X,τ) smooth almost kompakt ve smooth regüler olsun. $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J\}$ olacak şekilde $\{M_i : i \in J\} \subset \{M \in I^X : \tau(M) > 0\}$ k.v. (X,τ) smooth regüler olduğundan her $i \in J$ için,

$$M_i = \bigvee\{N \in I^X : \tau(N) \geq \tau(M_i),\ \overline{N} \leq M_i\} \tag{1}$$

dir. Burada her $i \in J$ için

$$\exists J^i \text{ indis öyleki } \{N \in I^X : \tau(N) \geq \tau(M_i),\ \overline{N} \leq M_i\} =: \{N_k : k \in J^i\}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan her $i \in J$ için $M_i = \bigvee\{N_k : k \in J^i\}$ dır. Buradan da $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J\} = \bigvee\{\bigvee\{N_k : k \in J^i\} : i \in J\}$ dir. (1) den her $i \in J$ ve her $k \in J^i$ için $\tau(N_k) \geq \tau(M_i)$ ve her $i \in J$ için $\tau(M_i) > 0$ olduğundan her $i \in J$ ve her $k \in J^i$ için $\tau(N_k) > 0$ dır. Dolayısıyla (X,τ) smooth almost kompakt olduğundan

$$\exists J_0 \subset J \text{ sonlu ve her } i \in J_0 \text{ için } J_0^i \subset J^i \text{ sonlu öyleki } 1_X = \bigvee\{\bigvee\{\overline{N}_k : k \in J_0^i\} : i \in J_0\}$$

dır. (1) den dolayı her $i \in J$ ve her $k \in J^i$ için $\overline{N}_k \leq M_i$ olduğundan her $i \in J$ için $\bigvee\{\overline{N}_k : k \in J_0^i\} \leq M_i$ dir. Buradan

$$1_X = \bigvee\{\bigvee\{\overline{N}_k : k \in J_0^i\} : i \in J_0\}$$
$$\leq \bigvee\{M_i : i \in J_0\}$$

dır. Buradan $1_X = \bigvee\{M_i : i \in J_0\}$ elde edilir. Dolayısıyla (X,τ) Demirci anlamında smooth kompakttır. ■

Sonuç 8: Bir smooth nearly kompakt ve smooth regüler smooth topolojik uzayı Demirci anlamında smooth kompakttır.

2.8. Smooth Topolojik Uzaylarda Komşuluk Sistemleri

Bu bölümde M. Demirci'nin 1997 yılında yayınlanan makalesi incelenmiştir [13]. Bu çalışmada smooth topolojik uzaylarda komşuluk sistemleri gibi yerel kavramlar ve bunlara ilişkin bir takım özellikler verilmiştir.

2.8.1. Tanımlar ve Sonuçlar

Tanım 68: X bir küme ve $M \in I^X$ olsun. M fuzzy kümesine bir ***fuzzy noktası*** denir :⇔ Bir $x \in X$ için $M(x)>0$ ve $y \neq x$ olan her $y \in X$ için $M(y)=0$ dır.

Bir M fuzzy noktası x_λ $(M(x) = \lambda > 0)$ ile gösterilir.

Tanım 69: X bir küme, x_λ fuzzy noktası ve $M \in I^X$ olsun.

a) Eğer $M(x) \geq \lambda$ ise M fuzzy kümesi x_λ fuzzy noktasını ***içerir*** denir ve $x_\lambda \in M$ ile gösterilir, değil ise $x_\lambda \notin M$ ile gösterilir.

b) Eğer $M(x) + \lambda > 1$ ise x_λ fuzzy noktası M fuzzy kümesi ile ***q çakışımsıdır*** denir ve $x_\lambda q M$ ile gösterilir, değil ise $x_\lambda \not{q} M$ ile gösterilir.

Tanım 70: X bir küme, $M : I^X \to I$ (M, I^X in fuzzy alt kümesi) ve $\alpha \in [0,1)$ için

$$M^\alpha := \{N \in I^X : M(N) > \alpha\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 71: (X,τ) bir stu olsun.

$\beta : I^X \to I$ dönüşümü τ smooth topoloji için ***Demirci anlamında tabandır*** denir :⇔ Her $\alpha \in [0,1)$ için $\tau^\alpha = \{\bigvee \beta' : \beta' \subset \beta^\alpha\}$ dır.

Teorem 98: (X,τ) bir stu olsun.

$\beta : I^X \to I$ dönüşümü τ için Demirci anlamında tabandır ⇔ Her $\alpha \in [0,1)$ için eğer pqM olacak şekilde $M \in \tau^\alpha$ ve p fuzzy noktası ise pqN ve $N \leq M$ olacak şekilde $N \in \beta^\alpha$ mevcuttur.

İspat: "⇒" $\beta : I^X \to I$, τ için Demirci anlamında taban, $\alpha \in [0,1)$ ve pqM olacak şekilde $M \in \tau^\alpha$ ve p fuzzy noktası olsun. $M \in \tau^\alpha$ ve β, τ için taban olduğundan

$$\exists \beta' \subset \beta^\alpha \text{ öyleki } M = \bigvee \beta'$$

dır. Buradan $pq(\bigvee \beta')$ dır. Tanım 69 b) den

$$\exists N \in \beta' \text{ öyleki } pqN$$

dır ve N≤M olduğu açıktır.

"⇐" $\beta : I^X \to I$ nın τ için Demirci anlamında taban olmadığını varsayalım. Buradan

$$\exists \alpha_0 \in [0,1) \text{ ve } M \in \tau^{\alpha_0} \text{ öyleki } \forall \beta' \subset \beta^{\alpha_0} \text{ için } M \neq \bigvee \beta' \qquad (1)$$

dır.

$$\beta^* := \{N \in \beta^{\alpha_0} : N \leq M\} \text{ ve } G := \bigvee \beta^* \qquad (2)$$

ile tanımlanırsa (1) den $M \neq G$ ve (2) den $G \leq M$ olduğundan

$$\exists x \in X \text{ öyleki } G(x) < M(x)$$

dır.

$$\lambda := 1 - G(x) > 0$$

ile tanımlanırsa $d := x_\lambda$ fuzzy noktası için $M(x)+\lambda > G(x)+\lambda = 1$ yani dqM dır. Her $N \in \beta^*$ için $N \leq G$ olduğundan $N(x)+\lambda \leq G(x)+\lambda = 1$ yani her $N \leq M$ ve $N \in \beta^{\alpha_0}$ için $d\not{q}N$ dir. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır.■

Teorem 99: (X,τ) bir stu olsun.
$\beta : I^X \to I$ dönüşümü τ için Demirci anlamında tabandır ⇔ pqM olan her $M \in I^X$ ve p fuzzy noktası için $\tau(M) \leq \operatorname{Sup}\{\beta(N) : N \in I^X, pqN, N \leq M\}$ dir.

İspat: "⇒" pqM olacak şekilde $M \in I^X$ ve p fuzzy noktası keyfi verilsin. Eğer $\tau(M) = 0$ ise iddia sağlanır. Eğer $\alpha := \tau(M) > 0$ olması durumunda, $\varepsilon \in (0,\alpha]$ keyfi için $\tau(M) \geq \alpha - \varepsilon$ yani $M \in \tau^{\alpha-\varepsilon}$ dur. Hipotezden ve Teorem 98 den

$$\exists N \in \beta^{\alpha-\varepsilon} \text{ öyleki } pqN \text{ ve } N \leq M$$

dir. Yani $\operatorname{Sup}\{\beta(N) : N \in I^X, pqN, N \leq M\} > \alpha - \varepsilon$ dır. $\varepsilon \in (0,\alpha]$ keyfi olduğundan $\operatorname{Sup}\{\beta(N) : N \in I^X, pqN, N \leq M\} \geq \alpha = \tau(M)$ dır.

"⇐" β nın τ için Demirci anlamında taban olduğunu göstermek için Teorem 98 den yararlanacağız. Bunun için $\alpha \in [0,1)$ ve pqM olacak şekilde $M \in \tau^\alpha$ ve p fuzzy noktası keyfi verilsin. Hipotezden $\alpha < \tau(M) \leq \operatorname{Sup}\{\beta(N) : N \in I^X, pqN, N \leq M\}$ dır. Buradan

$$\exists N \in I^X \text{ öyleki } pqN, \ N \leq M \text{ ve } \beta(N) > \alpha$$

dır. Buradan da $N \in \beta^\alpha$, pqN ve $N \leq M$ dir. Dolayısıyla Teorem 98 den dolayı β, τ için Demirci anlamında tabandır.■

Tanım 72: (X,τ) bir stu ve p, X de sabit bir fuzzy noktası olsun.
$N_p : I^X \to I$ dönüşümüne P nin ***smooth komşuluk sistemi*** denir. :⇔ her $\alpha \in [0,1)$ için $N_p^\alpha = \{M \in I^X : \exists T \in \tau^\alpha \text{ öyleki } P \in T \leq M\}$ dir.

$N_p(M)$ reel sayısına M fuzzy kümesinin p fuzzy noktasında ***komşuluk derecesi*** denir.

Tanım 73: (X,τ) bir stu ve p, X in sabit fuzzy noktası olsun. $Q_p : I^X \to I$ dönüşümü p nin ***smooth Q-komşuluk sistemi*** denir :⇔ Her $\alpha \in [0,1)$ için $Q_p^\alpha = \{M \in I^X : \exists T \in \tau^\alpha \text{ öyleki } pqT \leq M\}$ dir.

$Q_p(M)$ reel sayısına M fuzzy kümesinin p fuzzy noktasında ***Q-komşuluk derecesi*** denir.

Teorem 100: (X,τ) bir stu ve $p \in I^X$ sabit fuzzy noktası olsun. Bu durumda,

a) $N_p : I^X \to I$ dönüşümü p nin smooth komşuluk sistemidir ⇔ her $M \in I^X$ için

$$N_p(M) = \begin{cases} \mathrm{Sup}\{\tau(V) : V \in I^X, p \in V \leq M\} & , \ p \in M \\ 0 & , \ p \notin M \end{cases}$$

dir.

b) $Q_p : I^X \to I$ dönüşümü P nin smooth Q-komşuluk sistemidir. ⇔ her $M \in I^X$ için

$$Q_p(M) = \begin{cases} \mathrm{Sup}\{\tau(V) : V \in I^X, pqV \leq M\} & , \ pqM \\ 0 & , \ p\not{q}M \end{cases}$$

dir.

İspat:

a) "⇒" M k.v. $p \in M$ veya $p \notin M$ dır. $p \notin M$ olması durumunda $N_p(M) > 0$ olduğunu varsayalım. Buradan $M \in N_p^\alpha$ ve hipotezden N_p, p nin smooth komşuluk sistemi olduğundan

$$\exists T \in \tau^0 \text{ öyleki } p \in T \leq M$$

dır. Buradan $p \in M$ elde edilir ki bu ise $p \notin M$ ile çelişir. O halde $N_p(M)=0$ dır. Eğer $p \in M$ ise $N_p(M)=0$ veya $N_p(M)>0$ dır. $N_p(M)=0$ olması durumunda $\mathrm{Sup}\{\tau(V) : V \in I^X, p \in V \leq M\} > 0$ olduğunu varsayalım. Buradan

$$\exists V \in I^X \text{ öyleki } \tau(V) > 0 \text{ ve } p \in V \leq M$$

dir. Hipotezden ve Tanım 72 den $M \in N_p^0$ dır. Yani $N_p(M)>0$ dır. Bu ise $N_p(M)=0$ olması ile çelişir. O halde $\mathrm{Sup}\{\tau(V) : V \in I^X, p \in V \leq M\} = 0$ dır. Dolayısıyla $N_p(M)=0$ olması durumunda $N_p(M) = \mathrm{Sup}\{\tau(V) : V \in I^X, p \in V \leq M\}$ elde edilir. Eğer $N_p(M)=:k>0$ ise $\varepsilon \in (0,k]$ keyfi için $N_p(M) > k - \varepsilon \geq 0$ yani $M \in N_p^{k-\varepsilon}$ dır. N_p, p nin smooth komşuluk sistemi olduğundan

$$\exists T \in \tau^{k-\varepsilon} \text{ öyleki } p \in T \leq M$$

dir. Buradan $Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\} \geq \tau(T) > k - \varepsilon$ elde edilir. $\varepsilon \in (0,k]$ keyfi olduğundan

$$Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\} \geq k = N_p(M) \qquad (1)$$

elde edilir. $Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\} =: t > 0$ olması durumunda, $\varepsilon \in (0,t]$ keyfi için

$$\exists V \in I^X \text{ öyleki } \tau(V) > t - \varepsilon \text{ ve } p \in V \leq M$$

dır. Yani $V \in \tau^{t-\varepsilon}$ ve $p \in V \leq M$ dır. Hipotezden $M \in N_p^{t-\varepsilon}$ yani $N_p(M) > t - \varepsilon$ dur. $\varepsilon \in (0,t]$ keyfi olduğundan

$$N_p(M) \geq t = Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\} \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) den $N_p(M) > 0$ için $N_p(M) = Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\}$ elde edilir. Dolayısıyla $M \in I^X$ için

$$N_p(M) = \begin{cases} Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\} &, p \in M \\ 0 &, p \notin M \end{cases}$$

elde edilir.

"$\Leftarrow$" $\alpha \in [0,1)$ ve $M \in N_p^\alpha$ k.v. Buradan $N_p(M) > \alpha$ yani $N_p(M) = Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\} > \alpha$ dır. Buradan da

$$\exists V \in I^X \text{ öyleki } \tau(V) > \alpha \text{ ve } p \in V \leq M$$

dır. Yani $V \in \tau^\alpha$ ve $p \in V \leq M$ dır. Dolayısıyla

$$N_p^\alpha \subset \{U \in I^X : \exists T \in \tau^\alpha \text{ öyleki } p \in T \leq U\} \qquad (3)$$

elde edilir. Diğer yandan $\alpha \in [0,1)$ ve $M \in \{U \in I^X : \exists T \in \tau^\alpha \text{ öyleki } p \in T \leq U\}$ keyfi için

$$\exists T \in \tau^\alpha \text{ öyleki } p \in T \leq M$$

dir. Yani $\tau(T) > \alpha$ ve $p \in T \leq M$ dir. Buradan $N_p(M) = Sup\{\tau(V): V \in I^X, p \in V \leq M\} > \alpha$ dır. Yani $M \in N_p^\alpha$ dır. Dolayısıyla

$$N_p^\alpha \supset \{U \in I^X : \exists T \in \tau^\alpha \text{ öyleki } p \in T \leq U\} \qquad (4)$$

elde edilir. (3) ve (4) den $N_p^\alpha = \{U \in I^X : \exists T \in \tau^\alpha \text{ öyleki } p \in T \leq U\}$ elde edilir.

b) a) ya benzer şekilde yapılır.■

Teorem 101: (X,τ) bir stu, $\beta : I^X \to I$ dönüşümü τ için Demirci anlamında taban ve p, X de bir fuzzy noktası olsun. Bu durumda

$Q_p : I^X \to I$, p nin smooth Q-komşuluk sistemidir $\Leftrightarrow$ Her $M \in I^X$ için

$$Q_p(M) = \begin{cases} Sup\{\beta(V): V \in I^X, pqV \leq M\} &, pqM \\ 0 &, p\not{q}M \end{cases}$$

dir.

İspat: Bkz [13].■

Teorem 102: (X,τ) bir stu ve p, X in bir fuzzy noktası olsun. Eğer $N_p : I^X \to I$, p nin bir smooth komşuluk sistemi ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

(N1) Eğer $U \in I^X$ için $N_p(U) > 0$ ise $p \in U$,

(N2) $\mathrm{Sup}\{N_p(U) : U \in I^X\} = 1$,

(N3) $\forall U_1, U_2 \in I^X$ için $N_p(U_1 \wedge U_2) \geq N_p(U_1) \wedge N_p(U_2)$,

(N4) Eğer $U_1, U_2 \in I^X$ için $U_1 \subset U_2$ ise $N_p(U_2) \geq N_p(U_1)$,

(N5) $\forall U \in I^X$ için $N_p(U) \leq \mathrm{Sup}\{N_p(V) \wedge (\bigwedge\{N_e(V) : e \in V\}) : V \in I^X, V \subset U\}$

dir.

İspat: Bkz [13].■

Teorem 103: (X,τ) bir stu ve p, X de bir fuzzy noktası olsun. Eğer $Q_p : I^X \to I$, p nin bir smooth Q-komşluk sistemi ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

(Q1) Eğer $U \in I^X$ için $Q_p(U) > 0$ ise pqU,

(Q2) $\mathrm{Sup}\{Q_p(U) : U \in I^X\} = 1$,

(Q3) $\forall U_1, U_2 \in I^X$ için $Q_p(U_1 \wedge U_2) \geq Q_p(U_1) \wedge Q_p(U_2)$,

(Q4) Eğer $U_1, U_2 \in I^X$ için $U_1 \subset U_2$ ise $Q_p(U_1) \leq Q_p(U_2)$,

(Q5) $\forall U \in I^X$ için $Q_p(U) \leq \mathrm{Sup}\{Q_p(V) \wedge (\bigwedge\{Q_e(V) : eqV\}) : V \in I^X, V \leq U\}$

dir.

İspat: Bkz [13].■

Teorem 104: X bir küme $Q_p : I^X \to I$ dönüşümü (Q1)-(Q5) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\tau : I^X \to I, \tau(U) = \begin{cases} \bigwedge\{Q_e(U) : eqU\} & , \quad U \neq 0_X \\ 1 & , \quad U = 0_X \end{cases}$$

ile tanımlanan τ dönüşümü X üzerinde bir smooth topolojidir. Ayrıca (X,τ) smooth topolojik uzayında Q_p dönüşümü p nin smooth Q-komşuluk sistemidir.

İspat: Bkz [13].■

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada "smooth topoloji" olarak adlandırılan topoloji, 1985 de A.P. Sostak [9] tarafından bir X kümesi üzerinde bazı doğal aksiyomları sağlayan bir $\tau : I^X \rightarrow I$ fonksiyonu olarak tanımlanmış, buna bir fuzzy topoloji adı verilmiş ve bu şekilde elde edilen fuzzy topolojik uzaylarının bazı temel özelliklerini incelemiştir [9]. 1992 de aynı yapı, K.C. Chattopadhyay ve arkadaşları [3] tarafından Sostak ın çalışmasından habersiz olarak adeta yeniden keşfedilmiştir. Bu yazarlar yukarıda sözü edilen $\tau : I^X \rightarrow I$ dönüşümüne "X üzerinde açıklığın bir derecelendirilmesi" adını vermişlerdir. Aynı yıl, A.A. Ramadan [2], Sostak ın tanımına benzer bir fuzzy topolojisini "smooth topoloji" adı ile tanımlamış ve I=[0,1] kapalı aralığının yerine daha genel kafeslerin de alınabileceğini ileri sürmüştür.

Kompaktlığın derecelendirilmesi ve değişik kompaktlık tipleri daha sonraki yıllarda çeşitli yazarlar tarafından incelenmiş ve bu çerçevede çok sayıda araştırma yayınlanmıştır. Bunlardan bir kısmına bu tezde de yer verilmiştir [2,4,9,10,12].

Çalışmamızda ayrıca, Hausdorrfluk, regülerlik ve bağlantılılık derecelendirilmesi kavramlarının tanımları verilmiş ve bunların klasik topolojik uzaylardakine paralel bazı özellikleri incelenmiştir.

4. SONUÇLAR

1. Smooth topolojik uzayı, smooth altuzayı ve smooth kompaktlık kavramlar için temel özellikler elde edildi [2].

2. Azalan bir fuzzy topoloji ailesinden bir smooth topoloji elde edilip, bunlara ilişkin bazı özellikler elde edildi [3].

3. Smooth topolojik uzaylarda bazı kompaktlık tiplerinin ve bağlantılılığın smooth sürekli dönüşümler altında korunduğu elde edildi [4].

4. Bir kümeden bir smooth topolojik uzayına tanımlanan fonksiyon ailesi için başlangıç smooth topoloji ve bir smooth topolojik uzayından bir kümeye tanımlanan fonksiyon ailesi için bitiş smooth topolojisi elde edildi. Ayrıca bir klasik topolojiden smooth topolojinin üretilmesi ve bunlara ilişkin bazı özellikler elde edildi [9].

5. Smooth topolojik uzaylarda bir fuzzy kümesinin α-düzeyi kompaktlık, Hausdorffluk, regülerlik ve bağlantılılık derecelendirilmesi kavramlarının ifadeleri ve klasik topolojideki bazı paralel ifadeleri elde edildi [10].

6. Azalan bir smooth topoloji ailesinden bir smooth topoloji elde edilip, bunlara ilişkin bazı özellikler elde edildi [11].

7. Smooth topolojik uzaylarda smooth, nearly, almost kompaktlıklar ve aralarındaki ilişkiler incelendi [12].

8. Smooth topolojik uzaylarda taban, fuzzy noktası, bir fuzzy kümesinin bir fuzzy noktasındaki komşuluk sistemleri kavramlarının ifadeleri ve klasik topolojideki bazı paralel ifadeleri elde edildi [13].

5. KAYNAKLAR

1. Yılmaz, S., Fuzzy Topolojik Uzaylarında Kompaktlık, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1998.

2. Ramadan, A.A., Smooth Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 48, (1992) 371-375.

3. Chattopadhyay, K.C., Hazra, R.N. and Samanta, S.K., Gradation of Openness: Fuzzy Topology, Fuzzy Sets and Systems, 49, (1992) 237-242.

4. Chattopadhyay, K.C. and Samanta, S.K., Fuzzy Topology: Fuzzy Closure Operator, Fuzzy Compactness and Fuzzy Connectedness, Fuzzy Sets and Systems, 54, (1993) 207-212.

5. Warren, R.H., Neighbourhoods, Bases, and Continuity in Fuzzy Topological Spaces, Racky Mountain J. Mat, 8, (1978) 459-470.

6. Gantner, T.E., Steinlage, R.C. and Warren, W.H., Compactness in Fuzzy Topological Spaces, J. Math. Anal. Appl., 62, (1978) 547-562.

7. Lowen, R., A Comparison of Different Compactness Notions in Fuzzy Topological Spaces, J. Math. Anal. Appl., 64 (1978) 446-454.

8. Lowen, R., Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness, J. Math. Anal. Appl., 50 (1976) 621-623.

9. Sostak, A.P., On a Fuzzy Topological Structure, Rend. Circ. Matem. Palermo Ser. II, 11 (1985) 89-103.

10. Sostak, A.P., On Compactness and Connectedness Degrees of Fuzzy Sets in Fuzzy Topological Spaces, in: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Helderman Verlag, Berlin) (1988) 519-532.

11. Sostak, A., On Some Modifications of Fuzzy Topology, Mat. Vesnik, 41 (1989) 51-64.

12. Demirci, M., On Several Types of Compactnes in Smooth Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 90, (1997) 83-88.

13. Demirci, M., Neighborhood Structures of Smooth Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 92, (1997) 123-128.

6. ÖZGEÇMİŞ

Kerim BEKAR, 13.11.1972 tarihinde Almanya'nın Bielefeld şehrinde doğdu. İlk öğrenimini Giresun-Görele'de tamamladı. 1991 yılında K.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 1995 yılında bu bölümden mezun olup, bir sonraki yıl Giresun Eğitim Fakültesine Araştırma Görevlisi olarak atandı.