KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HOMOJEN UZAYLARDA KARAKTERİSTİK SINIFLAR

Esra Esin SAKA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
Yüksek Lisans (Matematik)
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16.08.1999
Tezin Savunma Tarihi : 15.11.1999

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ömer PEKŞEN
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ziya YAPAR
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Osman GÜRSOY

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Asım KADIOĞLU

Trabzon 1999

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programında yapılmıştır

.

Bu çalışmada manifoldlar, deRham kohomolojisi, demet, demette bağ ve eğrilik, kohomoloji, Weil homomorfizmi, homojen uzay, homojen uzay lifli, tabanlı demetler, homojen uzay tabanlı vektör demetleri, homojen uzayın kohomolojisi, homojen uzay tabanlı esas demette bağ, eğrilik, Weil homomorfizmi, homojen uzayın karakteristik sınıfları ile ilgili bilgiler bir araya getirilerek düzenli bir şekilde sunulmuştur.

Konu seçimi ve çalışmanın yönlendirilmesindeki ilgili ve desteğinden sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ömer PEKŞEN'e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmanın hazırlanmasındaki yardımlarından dolayı Yasemin BAHAR, Nimet ERYİĞİT'e ve benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

Trabzon, 1999 Esra Esin SAKA

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

"Homojen Uzaylarda Karakteristik Sınıflar" adlı bu tez iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm diğer bölüme hazırlık niteliğinde olup, bu bölümde gruplar, tam diziler, halkalar, Lie grupları, Lie cebirleri, manifoldlar ve deRham kohomoloji ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, homojen uzaylarda karakteristik sınıfların inşası için gerekli olan demetler, demette bağ ve eğrilik, kohomoloji, Weyl homomorfizmi kavramlarına yer verilmiştir.

Daha sonra homojen uzaylar incelenerek Pontrjagin sınıfları bu kavramlarla belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Demet, Vektör Demeti, Bağ, Eğrilik, Kohomoloji, Karakteristik Sayı, Homojen Uzay, Weil Homomorfizmi, Karakteristik Sınıf.

SUMMARY

Characteristic Classes on Homogeneous Spaces

This study titled as "Characteristic Classes on Homogeneous Spaces" consists of two chapters.

In the first chapter, some basic definitions and theorems which is the preliminary to the next one, some definitions and theorems concerning the groups, rings, algebras, Lie groups Lie algebras, exact sequences, manifolds are given.

In the second chapter, for the construction of characteristic classes on homogeneous spaces, bundles, connection, curvature, homogeneous space, Weil homomorfizm of homogeneous space and cohomology of homogeneous space are examined.

Then Pontrjagin classes of homogeneous spaces are determined with these terms.

Key Words: Bundle, Vector Bundle, Curvature, Connection, Cohomology, Characteristic Number, Homogeneous Space, Weil Homomorfism, Characteristic Class.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\varnothing$	: Boşküme
R^n	: n reel uzay
$\forall$	: her
$\exists$	: vardır
$\ni$	: öyle ki
$\sim$	: homotopik
$\cong$	: izomorfik
$:=$	: tanım olarak eşittir
$\Rightarrow$	: ise
$\Leftrightarrow$	: ancak ve ancak
$\subset$	:altküme
$\cap$	: kesişim
$\cup$	: birleşim
$\langle X \rangle$	: X ile üretilen grup
Σ	: toplam
$\prod$	: çarpım
$\times$	: kartezyen çarpım
$\oplus$	: direkt toplam
$\otimes$	: direkt çarpım
$[\,,\,]$	: Lie operatörü
çekf	: f dönüşümünün çekirdeği
görf	: f dönüşümünün görüntüsü
$B^n(M)$	: M manifoldunun tam n-formları uzayı
$Z^n(M)$	: M manifoldunun kapalı n-formları uzayı
H(M)	: M manifoldununun deRham kohomoloji grubu
(E,π,B,F)	: demet
$E(\wp)$	: $\wp$ demetinin toplam uzayı

$B(\wp)$	: $\wp$ demetinin taban uzayı
$F_b = \pi^{-1}(b)$	: $b \in B$'deki lif
$\wp$	: demet
$\wp^*$	: dual demet
$\wp^{\perp}$	: ortogonal tümleyen demet
$h_{\wp}$	: $\wp$'nin Weyl homomorfizmi
$T_a(M)$	: $a \in M$'de teğet uzay
$T_a^*(M)$	: $a \in M$'de kotanjant uzay
τ_M	: M'nin teget demeti
τ_M^*	: M'nin kotanjant demeti
V_E	: dik (ey) altuzay
H_E	: yatay altuzay
$P \times_G F$	: birleşmeli demet
Ś(M)	: M'in düzgün dönüşümleri uzayı
A(M)	: M'nin diferensiyel formlar uzayı
A(M;W)	: M'in W değerli diferensiyel formlar uzayı
C(F)	: F vektör uzayının karakteristik cebiri
C_p^F	: F vektör uzayının p. karakteristik katsayısı
L(E,F)	: $E \to E$ lineer dönüşümler uzayı
GL(W)	:W vektör uzayının lineer otomorfizmler uzayı
L_W	: W vektör uzayının lineer dönüşümler grubu
Ad	: adjoint gösterim
ad	: Ad'ın türevi
£(M)	: M'in vektör alanları modülü
$Sec\,\wp$	: $\wp$'nin dikkesitler modülü
$\vee E^*$	: E^*'nin simetrik cebiri
$\vee^n \wp$	: $\wp$'nin n. simetrik kuvveti
$\Lambda^n \wp$	: $\wp$'nin n. dış kuvveti
$\vee^{**} E^*$	: E^*'deki formal kuvvet serisi
$Ś_0(E)$	: 0 ile üretilen düzgün dönüşümler cebiri

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Burada grup, halka, modül, vektör uzayı tam diziler ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1 : $G \neq \emptyset$ bir küme, G üzerindeki bir ikili işlem bir $* : G \times G \to G$ fonksiyonudur. Bu ikili işlemde ;

(1) $\forall a,b \in G$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$.

(2) $\forall a \in G$ için $a*e=e*a=a$.

(3) $\forall a \in G$ için $a^{-1}*a=a*a^{-1}=e$.

ise G kümesi, verilen ikili işlemle bir *gruptur* denir.

(4) $\forall a,b \in G$ için $a*b=b*a$ ise $(G,*)$ bir *değişmeli (abell) grup* adını alır.

Tanım 2 : G ve H iki grup olsun. Bir $f:G \to H$ fonksiyonuna, $\forall a,b \in G$ için $f(a.b)=f(a).f(b)$ ise bir *grup homomorfisi* denir. Bir küme dönüşümü olarak f birebir (örten) ise f'e bir *monomorfizm* (epimorfizm) denir. f bijektif (birebir ve örten) ise f bir *izomorfizm*dir. Bu durumda G ve H *izomorftur* denir ve $G \cong H$ ile gösterilir. Bir $f : G \to G$ homomorfisine G'nin bir *endomorfizmi* ve $f : G \to G$ izomorfisine de G'nin bir *otomorfizmi* denir.

Tanım 3 : $f : G \to H$ ve $g : H \to K$ grup homomorfileri için $g \circ f : G \to K$ bir homomorfizmdir. Monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm ve otomorfizm için de benzer ifade vardır. G ve H gruplarının birim elemanları sırasıyla e_G ve e_H, $f : G \to H$ bir homomorfizm ise $f(e_G)=e_H$'dır. Hatta $\forall a \in G$ için $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$ 'dir.

Örnek 1 :

A bir abell grup olsun. $a \to a^{-1}$ dönüşümü A nın bir otomorfizmidir. $a \to a^2$ dönüşümü A nın bir endomorfizmidir.

Örnek 2 : G ve H grupları için şu homomorfizmler vardır:

$$G \underset{\pi_1}{\overset{\iota_1}{\leftrightarrows}} G\times H \underset{\pi_2}{\overset{\iota_2}{\leftrightarrows}} H$$

ι_1 (g)=(g,e)

ι_2 (h)=(e,h)

π_1 (g,h)=g

π_2 (g,h)=h

Ayrıca, i,j=1,2 için ι_i bir monomorfizm, π_j bir epimorfizmdir.

Tanım 4 : $f: G \to H$ bir grup homomorfisi olsun. f'in *çekirdeği*

çek f = $\{a\in G \mid f(a) = e\in H\}\subset G$

altkümesidir. $A\subset G$ için f'in *görüntü*sü

$f(A) = \{f(a)\in H \mid a\in A\}\subset H$

altkümesidir. f'in görüntü kümesi f(G)'dir ve görf ile gösterilir. $B\subset H$,

$f^{-1}(B)= \{a\in G \mid f(a)\in B\}$

kümesine B'nin *ters görüntü*sü denir.

Tanım 5 : G bir grup, $\varnothing\neq H\subset G$ altkümesi G'deki çarpım işlemine göre kapalı olsun. H bu çarpım işlemine göre bir grup ise, H'a G'nin bir *altgrubu* denir ve H<G ile gösterilir.

Örnek 3: Bir G grubunun iki altgrubu ; G'nin kendisi ve sadece birimi içeren <e> apaçık altgrubudur.

Tanım 6 : G bir grup, $X\subset G$ bir altküme , X'i içeren G'nin tüm altgruplarının bir ailesi $\{H_i \mid X\subset H_i , i\in I\}$ olsun.G'nin X ile üretilen altgrubu $\bigcap_{i\in I} H_i$ 'dir ve <X> ile gösterilir.

X 'in elmanları <X> altgrubunun üreteçleridir. X= $\{a_1,...a_n\}$ ise <X> yerine $< a_1,...,a_n>$ alırız. G=$< a_1,...a_n>$ ($a_i\in G$) ise G'ye sonlu üretilmiş denir. G bir grup ve bir $\varnothing\neq X\subset G$ altkümesi için <X> altgrubu tüm $a_1^{n1}a_2^{n2}...a_t^{nt}$ ($a_i\in X$, $n_i\in Z$) çarpımlarından oluşur. Özel olarak $\forall a \in G$ için $<a> = \{ a^n \mid n \in Z \}$'dir. $a \in G$ ise $<a>$ altgrubuna a ile üretilen *devirli grup* denir.

Tanım 7 : Bir G abell grubunun tabanı bir X alt kümesidir öyle ki:

(i) $G=<X>$.

(ii) Farklı $x_1, \dots x_k \in X$ ve $n_i \in Z$ için $n_1 x_1 + \dots + n_k x_k = 0 \Rightarrow \forall i$ için $n_i=0$'dır.

Tanım 8 : G bir grup, N bir altgrubu olsun. $\forall a \in N$ için $aNa^{-1}=N$ ise N'e G'nin bir *normal altgrubu* denir ve $N<G$ ile gösterilir. Bu durumda G/N grubuna *bölüm grubu* denir. Elemanları $g \in G$ için gN tipindedir. G toplamlı verildiğinde G/N'deki grup işlemi $(a+N)+(b+N)=(a+b)+N$ ile verilir.

1.2. Bir Küme Üzerinde Bir Grubun Etkisi

Tanım 9 : G bir grup, S bir küme, $G \times S \to S$, $(g, x) \to gx$ olarak tanımlı fonksiyonu; $\forall x \in S$, $\forall g_1, g_2 \in G$ için $ex = x$ ve $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ şartlarını sağlıyorsa G grubu S kümesi üzerinde *(sol) etkir* denir.

Örnekler 4 :

(1) G bir grup, $H<G$ bir altgrup olsun. H grubunun G üzerindeki (sol) etkisi $h \in H$ ve $g \in G$ ile $(h,g) \to hg$ fonksiyonudur.

(2) G grup, $H<G$ altgrup olsun. H'ın G üzerinde bir sol etkisi $(h, x) \to h \times h^{-1}$ olsun. $h \in H$'ın G'deki bu etkisine *h ile eşlenik* ve $h \times h^{-1}$ 'e de *x'in bir eşleniğii* denir. hKh^{-1} grubuna *K'nın eşleniği* denir.

Teorem 1 : Bir G grubu Bir S kümesinde etkir ($e : G \times S \to S$) olsun.

(i) S üzerinde $x \sim x' \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = x'$ olarak tanımlı bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

(ii) $\forall x \in S$ için $G_x = \{ g \in G \mid gx = x \} < G$'dir.

(i)'deki denklik sınıflarına G'nin S üzerindeki yörüngeleri denir. $x \in S$'deki yörüngesi x 'dir. Bu denklik sınıflarının kümesine, S üzerinde G etkisinin yörünge uzayı denir ve S/G ile gösterilir.

$$Y_x=\{q\in S \mid \exists g\in G \ni q=gx\} \tag{1}$$

S deki bir çift noktanın yörüngeleri eşit veya ayrık olduğu açıktır.

G_x altgrubu ise x'i sabit bırakan altgruptur. x'deki *izotropi altgrubu* veya x'in *kalınlaştırıcısı* adını alır.

$$çek(e)=\bigcap_{x\in S} G_x \tag{2}$$

S üzerindeki G etkisi ile p ile q aynı yörüngede ise p=gq olacak şekilde $g\in G$ vardır. Buradan

$$G_p=gG_qg^{-1}$$

dir. Yani bir yörüngedeki izotropi grupları eşleniktir.

1.3. Tam Diziler

Tanım 10 : Grupların ve homomorfilerinin

$$O\to A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\to O$$

dizisine görf=çekg olması halinde B'de *tamdır* denir.Böyle bir diziye *kısa tam dizi* denir.Benzer şekilde

$$\ldots\to A_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}} A_i\xrightarrow{f_i} A_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\ldots$$

dizisine $\forall i\in N$ için görf_i=çekf_{i+1} olması halinde *tamdır* denir.Böyle bir diziye *uzun tam dizi* denir.Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) $A_1\xrightarrow{f} A_2\to O$ tamdır $\Leftrightarrow$ f bir epimorfizmdir.

(2) $O\to A_1\xrightarrow{g} A_2$ tamdır $\Leftrightarrow$ g bir monomorfizmdir.

(3) Aşağıdaki dizi tam olsun:

$O\to A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\to O$ kısa tam dizisinde $B/f(A)\cong C$ ' dir.Tersine $\psi: A\to B$, K çekirdekli bir epimorfizm ise ;

$$O\to K\xrightarrow{i} A\xrightarrow{\psi} B\to O$$

dizisi tamdır. Burada i içerme dönüşümüdür.

Tanım 11 : Aynı indekse sahip grupların ve homomorfilerinin iki dizisini düşünelim :

$$\ldots\to A_i\to A_{i+1}\to\ldots$$

$$\ldots\to B_i\to B_{i+1}\to\ldots$$

ilk diziden ikincisine bir homomorfizm, dönüşümlerin her bir

$$\begin{array}{ccc} A_i & \rightarrow & A_{i+1} \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha_{i+1} \\ B_i & \rightarrow & B_{i+1} \end{array}$$

karesini komutatif yapan $\alpha_i : A_i \rightarrow B_i$ homomorfilerinin bir ailesidir. Her bir α_i bir izomorfizm ise buna dizilerin bir izomorfizmi denir.

Teorem 2 : $\mathbf{O} \longrightarrow \mathbf{A_1} \xrightarrow{\phi} \mathbf{A_2} \xrightarrow{\psi} \mathbf{A_3} \longrightarrow \mathbf{O}$ bir tam dizi olsun Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) Dizi ayrışır (yani $A_2 = A_1 \oplus A_3$).

(2) $p \circ \Phi = i_{A_1}$ olacak şekilde bir $p : A_2 \rightarrow A_1$ dönüşümü vardır.

(3) $\psi \circ j = i_{A_3}$ olacak şekilde bir $j : A_3 \rightarrow A_2$ dönüşümü vardır.

1.4. Tensor Çarpımı

Tanım 12 : A ve B abell gruplar, F(A,B) $A \times B$ kümesi ile üretilen serbest abell grup olsun. R(A,B), $a,a' \in A$ ve $b,b' \in B$ olmak üzere ;

$(a+a',b)-(a,b)-(a',b)$ ve $(a,b+b')-(a,b)-(a,b')$

şeklindeki tüm elemanlarla üretilen altgrup olsun.

$A \otimes B = F(A,B)/R(A,B$

bölümüne A ve B'nin tensör çarpımı denir. $A \otimes B$ için aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz:

$(a+a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$

$a \otimes (b+b') = a \otimes b + a \otimes b'$

ve $0 \otimes b = 0$ dır. Çünkü

$$a \otimes b = (0+a) \otimes b = 0 \otimes b + a \otimes b \tag{3}$$

'dir. Benzer şekilde $a \otimes 0 = 0$'dır. $n \in Z$ olmak üzere

$$(na) \otimes b = n(a \otimes b) = a \otimes (nb) \tag{4}$$

eşitlikleri vardır.

Tanım 13 : $f : A \to A'$ ve $g : B \to B'$ homomorfiler olsun. Bu durumda $\forall a,b$ için $(f\otimes g)(a,b)=f(a)\otimes g(b)$ ile tanımlı bir

$$f\otimes g : A\otimes B \to A'\otimes B'$$

homomorfisi vardır. Buna f ve g'nin *tensör çarpımı* denir.

Lemma 3 : $\Phi : B \to C$ ve $\Phi' : B' \to C'$ homomorfileri örten olsun.Bu durumda; $\Phi\otimes\Phi' : B\otimes B' \to C\otimes C'$ örtendir ve çekirdeği $b\in$çekΦ veya $b'\in$çekΦ' olmak üzere $B\otimes B'$'nün $b\otimes b'$ şeklindeki tüm elemanları ile üretilen altgrubudur.

İspat: G, $B\otimes B'$'nün bu $b\otimes b'$ şeklindeki elemanlarla üretilen altgrubu olsun. $\Phi\otimes\Phi'$ 'nin G'yi sıfıra götürdüğü açıktır. Buradan bir $h: B\otimes B'/G \to C\otimes C'$ homomorfisi el.de edilir. h'ın bir ψ tersini tanımlayarak izomorfizm olduğunu göreceğiz: $\psi : B\otimes B'/G \leftarrow C\otimes C'$ dönüşümü b, $\Phi(b)=c$ 'den ve b', $\Phi'(b')=c'$ 'den seçilerek $\psi(c,c')= b\otimes b'+G$ olarak tanımlayalım. ψ'nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim: $\Phi(b)=c$ ve $\Phi(b')=c'$ olsun. Bu durumda;

$$b\otimes b'-b\otimes b'=((b-b)\otimes b')+(b\otimes (b'-b')) \tag{5}$$

'dir ve G'dedir. Çünkü $b-b\in$çekΦ ve $b'-b'\in$çekΦ''dir. Dolayısıyla ψ iyi tanımlıdır. ψ bilineerdir, bu nedenle $\psi : C\otimes C' \to B\otimes B'/G$ bir homomorfizdir. $h o\psi$ ve $\psi\circ h$'nın özdeşlik dönüşümü olduğunu kolayca görebiliriz. □

Teorem 4 : $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to O$ dizisi tam olsun. Bu durumda ;

$$A\otimes G \xrightarrow{\phi\otimes\iota_G} B\otimes G \xrightarrow{\psi\otimes\iota_G} C\otimes G \longrightarrow O \tag{6}$$

dizisi tamdır. Φ birebir ve ilk dizi ayrışırsa, bu durumda $\Phi\otimes\iota_G$ birebirdir ve ikinci dizi ayrışır.

İspat: Bir önceki lemma ile $\psi\otimes\iota_G$ örtendir ve çekirdeği $b\in$çekψ olmak üzere $b\otimes g$ şeklindeki tüm elemanlar ile üretilen $B\otimes G$ 'nin D altgrubudur. $\Phi\otimes\iota_G$ 'nin görüntüsü

$\Phi(a)\otimes g$ şeklindeki tüm elemanlar ile üretilen E altgrubudur. görΦ = çekψ olduğundan D=E elde ederiz.

Φ birebir ve dizi ayrışır olsun. $p : B \to A$, $p \circ \Phi = \iota_A$ olan bir homomorfizm olsun. Bu durumda:

$$(p\otimes\iota_G) \circ (\Phi\otimes\iota_G) = \iota_A\otimes\iota_G = \iota_{A\otimes G} \tag{7}$$

'dir. Bu nedenle $\Phi\otimes\iota_G$ birebirdir ve $p\otimes\iota_G$ ikinci diziyi ayrıştırır.□

1.5. Halkalar

Tanım 14 : Bir $R \neq \varnothing$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri verilmiş olsun.

(i) $(R,+)$ bir abell grup

(ii) $\forall a,b,c \in R$ için $(ab)c=a(bc)$

(iii) $a(b+c)=ab+ac$ ve $(a+b)c=ac+bc$

özellikleri sağlanıyorsa R kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlemle bir *halka*dır denir.

(iv) $\forall a,b \in R$ için $ab=ba$

ise R, değişmeli *halka* adını alır.

$1_R \in R$ elemanı

(v) $\forall a \in R$ için $1_R a = a 1_R = a$

ise R'ye *birimli halka* denir .

Tanım 15 : R bir halka, $\forall a \in R$ için $na=0$ olacak şekilde bir $n \in Z$ mevcut ise R'nin *karakteristiği n*'dir denir(*charR=n* yazılır). Böyle bir n mevcut değil ise *karakteristik sıfır*dır denir .

Tanım 16 : R bir halka , $\varnothing \neq S$'de toplama ve çarpma işlemlerine göre R'de kapalı bir altküme olsun. S bu işlemlerle halka ise S R'nin bir *althalka*sı adını alır. $I \subset R$ althalkasında $r \in R$ ve $x \in I$ için $rx \in I$ ise I'ya *sol ideal* denir. $r \in R$ ve $x \in I$ için $xr \in I$ ise I'ya *sağ ideal* denir. I hem sağ hem de sol ideal ise I'ya *ideal* denir.

Tanım 17 : R bir halka, A bir toplamlı abell grup olsun. $R\times A\rightarrow A$, $(r,a)\rightarrow ra$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu A grubuna bir *(sol) R-modül* denir. $\forall r,s\in R$ ve $\forall a,b\in A$;

(i) $r(a+b)=ra+rb$.

(ii) $(r+s)a=ra+sa$.

(iii) $r(sa)=(rs)a$.

Ayrıca $1_R\in R$ elemanı ile,

(iv) $\forall a\in A$ için $1_R a=a$

olması durumunda A'ya bir *birimli (uniter) (sol) R-modül* denir.
R bölümlü bir halka ise bir birimli R-modülüne bir *(sol) vektör uzayı* denir.

Tanım 18 : A bir vektör uzayı olsun.A'nın üreteçlerinin bir $\{b_1,...,b_k\}$ lineer bağımsız kümesine A vektör uzayının bir *tabanı* denir.Bir iççarpımlı sonlu boyutlu A vektör uzayı için $\{u_1,...,u_n\}$ tabanına $1\leq i\leq n$ için $\|u_i\|=1$ ve $i\neq j$ için $(u_i,u_j)=0$ olması durumunda bir *ortonormal taban* denir.

Tanım 19 : R bir halka, A bir R-modül olsun. A'nın herhangi bir tabanının eleman sayısına R üzerinde A'nın *boyutu* (ya da *rankı*) denir.

A bir R halkası üzerinde sol modül olsun. $Hom_R(A,R)$ bir sağ R-modüldür ve A'nın *dual modülü* adını alır.

A ve B bir R halkası üzerindeki modüller olsunlar. Bir $f : A\rightarrow B$ fonksiyonuna eğer $\forall a,c\in A$ ve $r\in R$ için

$f(a+c)=f(a)+f(c)$ ve $f(ra)=rf(a)$

ise bir *R-modül homomorfisi* denir. R bir bölme halkası ise bir R-modül homomorfisine bir *lineer transformasyon* denir.

Tanım 20 : R üzerinde A bir sağ modül, B bir sol modül ve $F(A,B)$, $A\times B$ kümesi ile üretilen abell grup olsun. $R(A,B)$'de $F(A,B)$ nin, $a,a'\in A$ ve $b,b'\in B$, $r\in R$ için ;

(i). $(a+a',b)-(a,b)-(a',b)$

(ii). $(a,b+b')-(a,b)-(a,b')$

(iii). $(ra,b)-(a, rb)$

şeklindeki elemanlarıyla üretilen altgrubu olsun. Bu durumda F(A;B)/R(A;B) R üzerinde modül yapısına sahiptir. Bu modüle R halkası üzerinde A ve B modüllerinin *tensör çarpımı* denir ve $A\otimes_R B$ ile gösterilir. R=Z ise $A\otimes B$ ile gösterilir.

Tanım 21 : K bir değişmeli ve birimli halka, A bir halka olsun.

(i) (A,+) bir birimli (sol) K-modül,

(ii) $\forall k\in K$, $a,b\in A$ için $k(ab)=(ka)b=a(kb)$,

şartlarını sağlayan A halkasına K üzerindeki bir *cebir* veya bir *K-cebir* denir.

A ve B halkaları arasındaki bir $\varphi : A \to B$ halka homomorfizmi (veya izomorfizmi) bir K-cebir homomorfisi (veya izomorfisi)dir.

Lemma (Beş Lemma) 5: R bir halka ve R modüllerin ve R-modül homomorfilerinin kısa tam dizilerinin bir değişmeli şeması;

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & O \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ O & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & O \end{array}$$

olsun. Bu durumda,

(i) α,γ monomorfizmdir $\Rightarrow$ β bir monomorfizimdir.

(ii) α,γ epimorfizmdir $\Rightarrow$ β bir epimorfizmdir.

(iii) α,γ izomorfizmdir $\Rightarrow$ β bir izomorfizmdir.

İspat: Bakınız [6].

Tanım 22 : A bir R-cebir, $A^p.A^q\subset A^{p+q}$ özelliğindeki bir cebir yapısı ile bir $A=\sum_{p\geq 0} A^p$ dereceli vektör uzayına R üzerindeki A *dereceli cebiri* denir.

A_α cebirlerinin $\prod_\alpha A_\alpha$ *direkt çarpımı*, $\{(x_\alpha) \mid x_\alpha\in A_\alpha\}$ sonsuz dizilerinin bir kümesidir. Çarpım ve toplam benzer tanımlıdır. $\sum_\alpha A_\alpha$ direkt toplamı ise sıfırdan farklı sonlu terimlerin dizisinin bir alt cebiridir.

1.6. Manifoldlar

Tanım 23 : X bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subset \wp(X)$ ailesine X üzerinde bir *topoloji* adı verilir.

(τ.1) $\varnothing, X \in \tau$

(τ.2) $G_1, \ldots, G_2 \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ ($n \in N$)

(τ.3) $G_\lambda \in \tau$ ($\lambda \in \Lambda$) $\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau$ (Λ bir indis kümesi).

τ, X üzerinde bir topoloji ise (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* ve τ'nun elemanlarına da bu topolojik uzayın *açık küme*leri adı verilir.

Tanım 24: $\forall x,y \in X$ $(x \neq y)$ için G ve $H \subset X$ *açık altküme*leri $x \in G$, $y \in H$ *ve* $G \cap H = \varnothing$ sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu (X, τ) topolojik uzayına bir *Hausdorff uzayı* adı verilir.

Tanım 25: Şu şartları sağlayan sayılabilir tabanlı bir M Hausdorff uzayına bir *n-boyutlu topolojik manifold* (veya bir topolojik n-manifold) denir: $\forall a \in M$'de bir E n-boyutlu reel vektör uzayının bir açık altkümesine homeomorf olacak sekilde bir U_α komşuluğu vardır. Bu durumda boyM=n'dir.

Tanım 26 : M bir n boyutlu topolojik manifold, $U \subset M$ bir açık alt küme, $V \subset E$ n boyutlu reel vektör uzayının bir açık altkümesi ve $u : U \to V$ bir homomorfizm olmak üzere (U,u,V) üçlüsüne bir göreç denir. Bu üçlü (U,u) ikilisi ile belirlenir ve genelde bu ikili ile gösterilir.

Tanım 27: I bir indeks kümesi, M bir n-manifoldu $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ örtümünü oluşturan U_α kümeleri ile bir $\{(U_\alpha, u_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ göreç ailesine bu M manifoldu üzerinde bir atlas denir. İndeks kümesi sayılabilir (sonlu) ise atlasa *sayılabilir*(*sonlu*) denir.

Tanım 28 : M ve N (düzgün) manifoldlarının atlasları $\{(U_\alpha,u_\alpha) \mid \alpha\in I\}$ ve $\{(V_i,v_i) \mid i\in J\}$ ise $\{(U_\alpha\times V_i, u_\alpha\times v_i) \mid \alpha\in I\ ,\ i\in J\}$ atlası $M\times N$ çarpım manifoldunun atlasıdır.

Tanım 29 : Bir M n-manifoldunun R^n'deki bir φ vektör alanı, bir $\varphi : M \to R^n$ düzgün dönüşümüdür. Burada $\varphi(x)$, M'e x noktasında teğettir. Yani $\forall x \in M$'de $\varphi(x)\in T_x(M)$'dir.

Diğer bir deyişle M (düzgün) manifoldu üzerindeki teğet demetin (düzgün) dikkesitlerine (düzgün) *vektör alanı* denir. Yani $\forall x \in M$'de

$$(\pi\circ\varphi)(x) = x = id_M$$

olacak şekilde bir $\varphi: M \to \bigcup_{x\in M} T_x(M) = T_M$ düzgün dönüşümü M'in bir *vektör alanı* adını alır. M üzerindeki vektör alanları

$$Ś(M)=\{\varphi \mid \varphi : M \to R \text{ düzgün dönüşüm}\}$$

halkası üzerinde bir modül oluşturur ve £(M) ile gösterilir.

Tanım 30 : Bir M manifoldunun bir $a\in M$ noktasındaki bir *teğet vektörü* $f,g\in Ś(M)$ için

$$\Phi(fg) = \Phi(f)g(a)+f(a)\Phi(g)$$

olarak tanımlı bir $\Phi : Ś(M) \to R$ lineer dönüşümüdür. $\lambda,\mu\in R$, $\varphi,\psi\in T_a(M)$, $f\in Ś(M)$ için teğet vektörler $(\lambda\varphi+\mu\psi)(f)=\lambda\Phi(f)+\mu\psi(f)$ lineer işlemleri ile bir $T_a(M)$ reel vektör uzayını oluşturur. $T_a(M)$'ye $a\in M$'deki *teğet uzay* denir. $boyT_a(M)=boyM$ 'dir.

Tanım 31 : Bir M manifoldun bir $a\in M$ noktasındaki bir *kotanjant vektörü* bir $\lambda : T_a(M) \to R$ reel lineer dönüşümüdür. Bu reel lineer dönüşümler $T_a^*(M)$ reel vektör uzayını oluşturur. $T_a(M)$ teğet uzayının duali bu $a\in M$ noktasındaki $T_a^*(M)$ *kotanjant* *uzayı*dır. boy $T_a(M)$ =boy $T_a^*(M)$ açıktır. M'deki tüm noktaları tüm kotanjant vektörleri kümesi $T^*(M) = \bigcup_{a\in M} T_a^*M$ *kotanjant demetidir ve* bir vektör demetidir.

Tanım 32 : Bir M manifoldunda, $\forall a\in M$ noktasında bir w_a (düzgün) kotanjant vektörüne M üzerinde bir w *1-formu* denir. $\varphi : M \to N$ için bir $\varphi_* : T_aM \to T_aN$ lineer dönüşümü ve bir $\varphi^* : T^*_{\varphi(a)}N \to T^*_aM$ dönüşümü *cebirsel dual*dir. Bu durum 1-formlara genişletilebilir. N'deki bir w 1-formundan M'de bir φ^*w 1-formu alınabilir. $1<n<$boyM , M üzerindeki bir w n-formu için w'nın dıştürevi bir (n+1)-formudur ve tüm $X_1,\dots, X_{n+1}$ vektör alanları için

$$dw(X_1,\dots,X_{n+1}) :=$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+j}X_i(w(X_1,\dots,\dot{X}_i,\dots,X_{n+1}))+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\dot{X}_i,\dots,\dot{X}_j,\dots,X_{n+1}) \qquad (8)$$

olarak tanımlıdır ($\dot{X}$ vektör alanı seriden atılanı gösteriyor) .

Tanım 33 : M ve N manifold ve $\varphi : M \to N$ bir düzgün dönüşüm olsun. $\forall x \in$M'de $(d\varphi)_x$: $T_x(M) \to T_{\varphi(x)}(M)$ lineer dönüşüm ve φ örten ise M'in bir bölüm manifoldu N'dir.

Tanım 34 : m boyutta diferensiyellenebilir bir Hausdorff uzayına *m-boyutlu diferensiyellenebilir manifold (m-manifold)* denir.

1.6.1. Diferansiyel Uzaylar

$\delta^2= 0$ şartını sağlayan bir δ: $X \to X$ lineer dönüşümü ile bir X vektör uzayına bir *diferansiyel uzay* denir. δ'ya X ' in *diferensiyel operatörü* denir.

$Z(X)$= çek δ ve $B(X)$= gör δ

alt uzaylarının elemanlarına sırasıyla *eşçevrim* ve *eşsınır* denir.

$$H(\mathcal{X}) = Z(\mathcal{X}) \,/\, B(\mathcal{X}) \tag{9}$$

uzayına $\mathcal{X}$ ' in *kohomoloji uzayı* denir.

Diferansiyel uzaylar arasındaki bir $\nu : (\mathcal{X}, \delta_x) \rightarrow (Y, \delta_y)$ homomorfisi

$$\nu \circ \delta_x = \delta_y \circ \nu$$

şartını sağlayan bir lineer dönüşümdür ve eşçevrim ile eşsınır uzayları arasındaki dönüşümlere kısıtlanır. Dolayısıyla bir $\nu_{\#} : H(\mathcal{X}) \rightarrow H(Y)$ lineer dönüşümü elde edilebilir.

Böyle iki v ve Ψ homomorfizmleri için $\nu - \Psi = h \circ \delta + \delta \circ h$ şartını sağlayan bir $h : X \rightarrow Y$ lineer dönüşümüne bir *homotopi operatörü* denir. h mevcut ise $\nu_{\#} = \Psi_{\#}$' dır.

$$O \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow O \tag{10}$$

Diferensiyel uzayların homomorfilerinin bir tam dizisi olsun. $\forall z \in Z$ eşçevrimi için bir $y \in Y$ ön görüntüsü vardır. Özel olarak

$$g(\delta y) = \delta z = 0$$

ve dolayısıyla $f(x) = \delta y$ olacak şekilde bir $x \in \mathcal{X}$ eşçevrimi vardır. x ile temsil edilen $\theta \in H(\mathcal{X})$ sınıfı sadece z ile temsil edilen $\vartheta \in H(Z)$ sınıfına bağlıdır. $\nu \rightarrow \theta$ eşlemesi tam diziler için homomorfizm bağlayan bir $\partial : H(Z) \rightarrow H(X)$ lineer dönüşüm tanımlar. Buradan

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H(X)} \arrow[rr, "f_{\#}"] & & \mathbf{H(Y)} \arrow[dl, "g_{\#}"] \\
& \mathbf{H(Z)} \arrow[ul, "\partial"] &
\end{tikzcd}$$

üçgeni tamdır.

1.6.2. Dereceli Diferansiyel Uzaylar ve Cebirler

+1 dereceden homojen bir δ diferensiyel operatörü ile bir $X=\sum_{p\geq 0} X^p$ dereceli uzayına bir *dereceli diferensiyel uzay* adı verilir. Bu durumda eşçevrim, eşsınır ve kohomoloji uzayları da derecelidir.

$$Z^p(X)=Z(X)\cap X^p \quad \text{ve} \quad B^p(X)=B(X)\cap X^p \quad \text{ile} \quad H^p(X)=Z^p(X)\,/\,B^p(X).$$

Dereceli diferensiyel uzayların bir homomorfizmi, sıfır dereceli homojen diferensiyel uzayların bir homomorfizmidir.

X sonlu boyutlu ve $\nu : X \to X$ dereceli diferensiyel cebirlerin bir homomorfizmi olsun. ν ve $\nu_{\#}$' nin X^p ve $H^p(X)$' e kısıtlanışı

ν^p: $X^p \to X^p$ ve $(\nu_{\#})^p$: $H^p(X) \to H^p(X)$

olsun. Cebirsel Lefschetz formülü

$$\sum_{p\geq 0}(-1)^p tr\,\nu^p = \sum_{p\geq 0}(-1)^p tr(\nu_*)^p \tag{11}$$

dir. $\nu=\iota$ ise Euler-Poincare formülü

$$\sum_{p\geq 0}(-1)^p boy X^p = \sum_{p\geq 0}(-1)^p boy H^p(X) \tag{12}$$

dir.

Bir dereceli diferensiyel cebir A, $\delta^2=0$ olan bir dereceli homojen bir δ terstürevi ile bir dereceli cebirdir. Bu durumda Z(A) bir dereceli alt cebir ve B(A), Z(A)'de bir dereceli idealdir. Dolayısıyla H(A) bir dereceli cebirdir ve A' nın *kohomoloji cebiri* adını alır. A tersdeğişmeli ise H(A)' de aynı özelliğe sahiptir.

Dereceli diferensiyel cebirlerin bir ν : A $\to$ B homomorfisi, dereceli diferensiyel uzayların bir homomorfisi ve cebirlerin bir homomorfisi olan bir dönüşümdür. Buradan kohomoloji cebirleri arasında bir

$\nu_{\#}$: H(A) $\to$ H(B)

homomorfisi elde edilir.

A, B dereceli diferensiyel cebirler ve $A \otimes B$ eğri tensor çarpımları için $A \otimes B$' deki terstürev, $x \in A^P$, $y \in B$

$$\delta (x \otimes y) = \delta x \otimes y + (-1)^p x \otimes \delta y \tag{13}$$

olarak verilir. $\delta^2=0$ şartını sağlar. Dolayısıyla $A \otimes B$ bir dereceli diferensiyel cebirdir. Dereceli cebirler arasında bir

$$H(A) \otimes H(B) \xrightarrow{\cong} H(A \otimes B)$$

izomorfizm veren, A ve B arasındaki tensor çarpımına *Künneth izomorfizmi* denir.

1.6.3. Düzgün Dönüşümler

Standart topoloji ile sonlu boyutlu reel vektör uzayları E ve F olsun $U \subset E$ bir açık alt küme olsun. Bir $a \in U$ noktasında $\exists \psi_a \in L(E; F)$, $h \in E$ için

$$\lim_{t \to o} \frac{\nu(a+th) - \nu(a)}{t} = \psi_a(h) \tag{14}$$

ise $\nu : U \to F$ dönüşümü $a \in U$' da *diferensiyellenebilir* denir. Burada Ψ_a' ya a noktasında ν'nin türevi denir ve $\nu'(a)$ ile gösterilir. $h \in E$ için

$$\nu'(a; h) = \nu'(a)h = \psi_a(h) \tag{15}$$

yazılır. $\nu : U \to F$ dönüşümü $\forall a \in U$' da diferensiyellenebilir ise ν *diferensiyellenebilir* bir dönüşümdür denir ve $a \to \nu'(a)$' ya ν' nin *diferensiyeli* denir. L(E;F) sonlu boyutlu bir vektör uzayı olduğundan ν' diferensiyellenebilir. Bu durumda ν'' nin diferensiyeli ν'' ile gösterilir ve

$$\nu'' : U \to L(E; L(E; F)) = L(E, E; F)$$

şeklinde bir dönüşümdür. Daha genel olarak, ν nin k. diferensiyeli varsa $\nu^{(k)}$ ile gösterilir ve

$$\nu^{(k)}: U \to L(E,...,E;\ F)$$

dir. $\forall a \in U$ için $\nu^{(k)}(a) : E\times...\times E \to F$ bir simetrik k-lineer dönüşümdür. ν' nin tüm türevleri mevcut ise ν'ye *sonsuz diferensiyellenebilir* veya *düzgün* denir.

$U \subset E$ ve $V \subset F$ açık alt kümeleri arasındaki bir $\nu : U \to V$ düzgün dönüşümüne düzgün bir tersi varsa *diffeomorfizm* denir. Bir $\nu : U \to F$ dönüşümü için bazı $a \in U$ noktalarında

$$\nu'(a) : E \xrightarrow{\cong} F$$

bir lineer izomorfizm ile bir sürekli türeve sahip olsun. Ters fonksiyon teoremine göre a' nın U ve $\nu(a)$ ' nın V komşulukları arasında ν' nin bir kısıtlaması olarak $U \to V$ diffeomorfizmi vardır.

1.6.4. Manifoldlarda Düzgün Dönüşüm

M ve N düzgün manifoldlar , $\varphi : M \to N$ bir dürekli dönüşüm olsun. M ve N'in atlasları $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}$ ve $\{(V_\alpha, \vartheta_i)\}$ olsun. φ dönüşümü ile $\varphi_{i\alpha} = \varphi_i o \varphi o u_\alpha^{-1}$ olarak tanımlı manifoldların açık altkümelerini resmeden $\varphi_{i\alpha} o u_\alpha : (U_\alpha \cap \varphi^{-1}(V_i)) \to \varphi_i(V_i)$ sürekli dönüşümleri tanımlanır.

$\varphi_{i\alpha}$ dönüşümleri düzgün ise $\varphi : M \to N$ düzgündür. Bu tanım M ve N için atlasların seçiminden bağımsızdır. Hatta $\varphi : M \to N$ ve $\psi : N \to P$ düzgün dönüşümler ise $\psi o \varphi : M \to P$ düzgündür. $\acute{S}(M,N) := \{\varphi \mid \varphi : M \to N \text{ düzgün dönüşüm}\}$ olarak tanımlıdır.

Bir $\varphi : M \to N$ düzgün dönüşümünün bir düzgün tersi $\varphi^{-1} : N \to M$ varsa bu φ dönüşümüne *diffeomorfizm* denir. Her diffeomorfizm bir homomorfizmdir. M ve N manifoldları arasında bir $\varphi : M \to N$ diffeomorfizmi varsa M ve N manifoldlarına *diffeomorfik* denir.

Bir M manifoldu üzerindeki iki düzgün fonksiyon $f,g : M \to R$ düzgün dönüşümleri olsun. $\lambda,\mu \in R$, $x \in M$ ile $(\lambda f+\mu g)$ ve (fg) düzgün fonksiyonları;

$$(\lambda f+\mu g)(x) = \lambda f(x)+\mu g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

olarak tanımlıdır. Bu operatörlerin kümesi Ś(M)={φ | φ : M → R düzgün dönüşüm} ile gösterilir, birim elemanı M → 1 sabit fonksiyonudur. *M* ve *N* Ś(M)-modülleri ise Ś(M) üzerindeki tensör çarpımı $M \otimes_M N$ ile gösterilir. *M*'den *N*'e Ś(M) lineer dönüşümlerinin modülü $\mathrm{Hom}_M(M,N)$ ile gösterilir.

φ : M → N bir düzgün dönüşüm olsun. Buradan bir φ* : Ś(M) ← Ś(N) cebir homomorfizmi belirlenir. f∈Ś(N) için φ*f=foφ olarak tanımlanır. φ örten ise φ* birebirdir. ψ : N → Q ikinci bir düzgün dönüşüm ise (ψoφ)*=φ*oψ*'dır.

Bir φ : M → N düzgün dönüşümünün türevi bir dφ : $T_M \to T_N$ dönüşümüdür. f∈Ś(M), $T_x(M)$'ye kısıtlanışı $(d\varphi)_x(\psi)$ (f) = ψ(foφ) olarak verilir.

Bir M n-manifoldunun bir diferensiyel formu $\Lambda_{\tau_M^*}$'de bir Φ dikkesitidir. Herbir $\Phi(x) \in \Lambda^p T_x(M)^*$ için Φ'nın derecesi p'dir denir. Diferensiyel formlar A(M) = $\sum_p A^p(M)$ dereceli cebiri ile yazılır. M'de bir vektör alanı τ_M'de bir ψ dikkesiti idi.

£(M)× ... ×£(M) → Ś(M)

$(\Phi(\psi_1, \dots ,\psi_p))(x) = \Phi(x,\psi_1(x), \dots ,\psi_p(x))$

eşitliği ile verilen eğri simetrik dönüşümlerin p-lineer uzayında çarpım işlemi $(\Phi\Lambda\psi)(x) = \Phi(x)\Lambda\psi(x)$.$A^p(M)$'dir.

(A(M),δ) dereceli differensiyel cebirinin kohomolojisi H(M) = $\sum_{p=0}^{n} H^p(M)$ ile gösterilir ve M'nin de Rham kohomoloji cebiri adını alır. φ : M → N düzgün dönüşümü ile belirlenen φ^*: A(M) ← A(N) homomorfisinden bir $\varphi^\#$: H(M) ← H(N) homomorfisi elde edilir.

boyH(M)<∞ ise boy $H^p(M)$' ye M'nin b. Betti sayısı denir ve b_p ile gösterilir. f(t) = $\sum_p b_p t^p$ polinomuna Poincare polinomu denir. $\chi_M = \sum_{p=0}^{n}$ $(-1)^p b_p$ sayısına M 'in Euler-Poincare karakteristiği denir. M kompakt ise boyH(M)<∞ 'dir.

φ,ψ : M → N düzgün dönüşümler olsunlar. Bir H : RxM → N düzgün dönüşümü $H(0,x) = \varphi(x)$ ve $H(1, x) = \psi(x)$ şartlarını sağlıyorsa, H'a *bağlayan homotopi* denir. Bu durumda φ ve ψ dönüşümlerine *homotopiktir* denir. Dolayısıyla $\varphi^\# = \psi^\#$ yazılır.

1.6.5. De Rham Kohomoloji

Diferensiyel formların matematikteki önemli bir uygulaması, d dış türevinin herhangi bir w n-formuna iki kez uygulandığında elde edilen (d(d(w)) (n+2)-formunun sıfıra eşit olması ile oluşturulur.

M bir manifold ve reel vektör uzaylarının bir dizisi $d^2=0$ özelliği ile,

$$O \xrightarrow{d} C^{\infty}(M) \xrightarrow{d} A^1(M) \xrightarrow{d} A^2(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} A^m(M) \xrightarrow{d} O. \quad (16)$$

olsun. Uzay ve dönüşümlerin bu dizisine M diferensiyellenebilir manifoldunun d*eRham kompleksi* denir.

$b \circ a = c \circ b = d \circ c = e \circ d = f \circ e = \ldots = 0$ veya denk olarak $\text{gör}a \subset \text{çek}b$, $\text{gör}b \subset \text{çek}c$, $\text{gör}c \subset \text{çek}d, \ldots$ özelliğindeki bir

$$\ldots \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F \xrightarrow{f} \ldots \quad (17)$$

dizisinden; diferensiyel formlarla

$$\text{gör}(d:A^{n-1}(M) \to A^n(M)) \subset \text{çek}(d:A^n(M) \to A^{n+1}(M)) \quad (18)$$

elde edilir. Buradan şu tanım belirlenebilir:

Tanım 35 :

a) Bir w n-formuna $dw = 0$ ise *kapalı*dır denir. Tüm kapalı formlar kümesi

$$Z^n(M) := \text{çek}\,(d:A^n(M) \to A^{n+1}(M))$$
$$= \{w \in A^n(M) \mid dw=0\}.$$

Bu kapalı n-forma deRham kohomolojisi için bir *n-eşçevrim* denir.

b) Bir w n-formuna $d\beta = w$ olacak şekilde bir β (n-1)-formu varsa *tam* denir. Tam n-formlar kümesi

$$B^n(M) := \text{gör}\,(d: A^{n-1}(M) \to A^n(M))$$
$$= \{w \in A^n(M) \mid \exists \beta \in A^{n-1}(M) \ni w=d\beta\}.$$

Bu kapalı n-forma deRham kohomolojisi için bir *n-eşsınır* denir.

Her tam n-form kapalı olduğundan $B^n(M)$ vektör uzayı $Z^n(M)$'nin bir altuzayıdır.

Tanım 36 : Bir M manifoldunun $0 \leq n \leq boy(M)$, $H^n(M)$ deRham kohomoloji grupları

$$H^n(M) := Z^n(M)/B^n(M) \tag{19}$$

bölüm vektör uzayıdır.

Bir φ: M $\rightarrow$ N diferensiyellenebilir fonksiyonu ile bir $\varphi^* : H^n(N) \rightarrow H^n(M)$ lineer dönüşümü elde edilir. Hatta bir $\psi^* : H^n(N) \rightarrow H^n(M)$ homomorfisi de φ^* ile eşittir.

$\cup : H^n(X) \otimes H^m(X) \longrightarrow H^{n+m}(X)$ işlemi $a \in H^n(X)$ ve $b \in H^m(X)$ için $a \cup b = (-1)^{nm} b \cup a$ olarak tanımlıdır ve *tas çarpım* adını alır.

$\Lambda : H^n(X) \otimes H^m(X) \longrightarrow H^{n+m}(X)$ lineer dönüşümü de *kama çarpımı* adını alır.

1.6.6. Karakteristik Katsayılar

Bu bölümde karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerindeki F vektör uzayları ile çalışılacaktır.

F bir vektör uzayı olsun. $x \in F$, $\lambda \in K$ için $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ şartını sağlayan bir $f : F \rightarrow K$ fonksiyonuna *p. dereceden homojen fonksiyon* adı verilir. Bu fonksiyonlar bir vektör uzayı oluşturur ve bu uzay $H^p(F)$ ile gösterilir. $H(F) = \sum_{p=0}^{\infty} H^p(F)$ dereceli değişmeli cebirdir. $\alpha : F^* \rightarrow H(F)$ içerme dönüşümü olsuni. H(F) değişmeli cebir olduğundan dereceli cebirlerin bir $\alpha : \vee F^* \rightarrow H(F)$ homomorfisi elde edilir. Kısaca $\alpha(\psi)(x)$ 'i $\psi(x)$ olarak alacağız. Diğer taraftan dereceli cebirleri bir homomorfisi $\beta : ? \rightarrow \otimes^p F^*$, $x \in F$ için $\beta(\Phi)(x) = \Phi(x, \ldots, x)$ verilir. $\pi_S : \otimes F^* \rightarrow \vee F^*$ projeksiyon ise $x^* \in F^*$ için $(\alpha o \pi_S)(x^*) = x^* = \beta(x^*)$ 'dır. Buradan $\psi \in \vee^p F^*$, $x \in F$ için $\psi(x) = \frac{1}{p!}\psi(x, \ldots, x)$'dir.

Bir vektör uzayının karakteristik cebiri F n-boyutlu vektör uzayı olsun.

$\square : L_{\wedge}{}^{p}{}_{F} \times L_{\wedge}{}^{p}{}_{F} \rightarrow L_{\wedge}{}^{p}{}_{F}$ bilineer dönüşümleri $\Phi \in L_{\wedge}{}^{p}{}_{F}$, $\psi \in L_{\wedge}{}^{q}{}_{F}$, $x_i \in F$ için

$$(\Phi\Box\psi)(x_1\wedge\ldots\wedge x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S^{p+q}}\in_\sigma\phi\left(x_{\sigma(1)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(p)}\right)\wedge\psi\left(x_{\sigma(p+1)}\wedge\ldots\wedge x_{\sigma(p+q)}\right) \quad (20)$$

olarak tanımlıdır. Bu lineer dönüşümler ile $C(F) = \sum_{p=0}^{n} L_{\wedge^p F}$ uzayı bir dereceli cebirdir ve F'nin *karakteristik cebiri* adını alır.

Bu F n-boyutlu vektör uzayının p. karakteristik katsayısı $C^F_p \in \vee^p L^*_F$'dir. $p\geq 1$, $\varphi_i \in L_F$ için $C^F_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = <\iota_p, \varphi_1\Box\ldots\Box\varphi_p>$ ve $C^F_p = 0$ 'dır. P>n ise $C^F_p = 0$'dır. $C^F \in (\vee L^*_F)_I$ homojen olmayan elemanı, $C^F = \sum_{p=0}^{n} C^F_p$ olarak verilir ve F'nin *karakteristik elemanı* adını alır.

1.7. Lie Grupları

Tanım 37 : Bir G kümesi hem grup ,hem düzgün manifold, hem de

(1) (çarpım dönüşümü) $\mu : G\times G \to G$, $(x,y) \to xy$

(2) (ters dönüşüm) $\varphi : G \to G$, $x \to x^{-1}$

dönüşümleri için düzgün ise G bir *Lie grup* adını alır, birim elemanı $e\in G$'dir.

Lie grupları arasındaki $\varphi : G \to G$ düzgün homomorfisine

(i) φ düzgün,

(ii) φ bir grup homomorfisi,

ise *Lie gruplarının bir homomorfisi* denir. Lie grupları arasında hem homomorfizm hem de diffeomorfizm olan dönüşüme *Lie gruplarının bir izomorfizmi* denir.

G bir Lie grup, $\forall a\in G$ için $\lambda_a(x)=ax$ ve $\rho_a(x)=xa$ olarak verilen, λ_a, ρ_a : $G \to G$ düzgün dönüşümleri vardır. Bunlara a ile sol ve sağ dönüşüm denir. Tersleri, $\rho_{a^{-1}}$ dir. Türevleri ise $L_a=d\lambda_a : T_G \to T_G$ ve $R_a=d\rho_a : T_G \to T_G$ 'dir.

$\varphi : G \to H$ Lie gruplarının bir homomorfisi ise $\varphi\circ\lambda_a=\lambda_{\varphi(a)}\circ\varphi$ ve $\varphi\circ\rho_a=\rho_{\varphi(a)}\circ\varphi$ 'dır. Dolayısıyla $d\varphi\circ L_a=L_{\varphi(a)}\circ d\varphi$ ve $d\varphi\circ R_a=R_{\varphi(a)}\circ d\varphi$'dir. Özel olarak $x\in G$'de her bir $(d\varphi)_x : T_x(G)\to T_{\varphi(x)}(H)$ birebirdir ancak ve ancak $(d\varphi)_e$ birebirdir.

Çarpım ve ters dönüşümlerinin türevleri $d\mu : T_G\times T_G \to T_G$ ve $d\varphi: T_G\to T_G$ demet dönüşümleridir.

1.7.1. Temsiller

Lie gruplarının bir $P: G \longrightarrow GL(W)$ (Örnek 7) homomorfizmi W sonlu boyutlu (reel veya kompleks) vektör uzayında G'nin bir temsilidir. GL(W)'nin Lie cebiri W'nin L_W lineer dönüşümlerinin uzayıdır. P homomorfizminin türevi $P' : E \longrightarrow L_W$ Lie cebirlerinin bir homomorfisidir.

Bir $\theta : E \longrightarrow L_W$ Lie cebir homomorfizmine E'nin W'deki bir temsili denir. Dolayısıyla E'nin W'deki bir temsili P' dir.

G'nin W'daki bir temsili P ise P'nin invaryant altuzayı $W_{P=I}$ (veya kısaca W_I) $W_I = \{w \in W \mid P(x)w = w,\ x \in G\}$.

Benzer olarak E'nin W'daki bir temsili θ ise θ için invaryant altuzayı $W_{\theta=0}$ (veya W_0) $W_0 = \{ w \in W \mid \theta(h)w = 0,\ h \in E\}$.

Tanım 38 : Bir $V \subset W$ altuzayına, $x \in G$'de herbir $P(x)$ (veya $h \in E$, $\theta(h)$) homomorfizmleri V'yi kendisine resmediyorsa P (veya θ) için *kararlı* denir.

Önerme 5 :

(1) P ve P' için W_I ve W_0 invaryant altuzayları arasında $W_I \subset W_0$ bağıntısı vardır. G bağlantılı ise $W_I = W_0$ 'dır.

(2) $V \subset W$ P için kararlı ise P' için de kararlıdır. V P için kararlı ve G bağlantılı ise V, P için kararlıdır.

Örnekler 5 : Burada P (veya θ) W'de G (veya E) 'nin sabit bir temsilidir.

(1) **Kontragradyant temsil :** G'nin W^*'daki P'ye kontragradyant temsili $P^\bullet$; $x \in G$ ile $P^\bullet(x) = (P(x)^{-1})^*$ olarak tanımlıdır. θ 'ya kontragradyant E'nin W^*'daki $\theta^\bullet$ temsili ; $h \in E$ ile $\theta^\bullet(h) = -\theta(h)^\bullet$ dır. $(P^\bullet)' = (P')^\bullet$ elde edilir.

(2) **Çok lineer temsiller :** G'nin $\otimes W$, $\wedge W$, $\vee W$'deki temsilleri $\otimes P$, $\wedge P$ ve $\vee P$, $x \in G$ 'de

$(\otimes P(x) = \otimes P(x)$, $(\wedge P)(x) = \wedge P(x)$, $(\vee P)(x) = P(x)$

$\otimes W$, $\wedge W$ ve $\vee W$ 'deki E'nin $\theta_\otimes$ $\theta_\wedge$ $\theta_\vee$ temsilleri ;

$\theta_\otimes(h)(w_1 \otimes .. \otimes . w_p) = \sum w_1 \otimes \ldots \theta(h) w_i .. \otimes . w_p$

$\theta_\wedge(h)(w_1\wedge\ldots\wedge w_p)=\sum w_1\wedge \ldots \theta(h)w_i \ldots \wedge w_p$

$p\geq 1$ için $\theta_\vee(h)(w_1\vee\ldots\vee w_p)=\sum w_1\vee \ldots \theta(h)w_i \ldots \vee w_p$

$\lambda\in R$'de $\theta_\otimes(h)\lambda=0$, $\theta_\wedge(h)\lambda=0$, $\theta_\vee(h)\lambda = 0$.

$(\otimes P)'=(P')_\otimes$, $(\wedge P)'=(P')_\wedge$ ve $(\vee P)'=(P')_\vee$ elde edilir.

(3) **Diferensiyel uzaylar :** (W,d), homolojisi H(W) ile bir diferensiyel uzay olsun. W'de G'nin bir temsili P ise $x\in G$ ile $P(x)\circ d = d\circ P(x)$. Dolayısıyla P(x) bir $P(x)_\# : H(W) \longrightarrow H(W)$ lineer dönüşümü belirler ve H(W)'de G'nin bir temsili $x \longrightarrow P_\#(x)$ dir. Diğer taraftan E'nin P′ temsili $h\in E$ 'de $P'(h)\circ d = d\circ P'(h)$ dır. Dolayısıyla P′ ile H(W)'de E'nin bir temsili $h \longrightarrow (P')(h)_\#$ ' dır .$(P')_\#$, $P_\#$'nın türevidir. Yani $(P_\#)'=(P')_\#$'dır.

Devrik temsil : $\forall a\in G$'de G'nin iç otomorfizmi τ_a , $x\in G$ ile $\tau_a(x)=a x a^{-1}$ 'dir. τ_a'nın türevi τ_a' ise E Lie cebirlerinin bir otomorfizmidir. $a\in G$'deki *adjoint temsil* adını alır. $\tau_a=\lambda_a\circ\rho_a^{-1}$ olduğundan $Ad\, a = L_a \circ R_a^{-1}$ 'dır.

Önerme 6 : Ad : a $\longrightarrow$ Ad a eşlemesi G'nin E'de bir temsilidir.

Ad temsiline G'nin devrik *temsili* denir.Diğer taraftan E Lie cebirinin E vektör uzayında bir temsili ad; $h,k\in E$ için $(ad\, h)(k) = [h,k]$ 'dır.

Önerme 7 : Ad'ın türevi ad'dır.

Lemma 8 : $\psi\in T_a(G)$ ve $\Phi\in T_b(G)$ ise

(1) $d\mu(\psi,\Phi)=R_b\psi+L_a\Phi$

(2) $d\varphi(\psi)=-(L_a^{-1}\circ R_a^{-1})$.

1.7.2. İnvaryant Vektör Alanları

Bir G Lie grubunun sol ve sağ dönüşümleri G üzerindeki vektör alanlarının £(G) reel Lie cebirinin $(\lambda_a)_*$ ve $(\rho_a)_*$ otomorfizmlerini verir. a, $x\in G$ için $L_a(\varphi(x))=\varphi(ax)$ ise G üzerindeki φ vektör alanına *sol invaryant* denir. Örneğin $a\in G$'de $(\lambda_a)_*\varphi=\varphi$'dir.$i_R\varphi(x,y)=(0,\varphi(y))$ yani $i_R\varphi\sim\varphi$'dir.

Her bir $(\lambda_a)_*$ Lie çarpımlarının dönüşümü olduğundan sol invaryant vektör alanları £(G)'nin bir $£_L(G)$ altcebirini oluşturur.

Tanım 39 : G bir Lie grubu, $\forall x \in X$ için $L_x : G \to G$, $L_x(g) = xg$ olsun. L_x düzgündür. $\forall x \in G$ için,

$$\begin{array}{ccc} T(G) & \xrightarrow{L_{x*}} & T(G) \\ \lambda \uparrow & & \uparrow \lambda \\ G & \xrightarrow[L_x]{} & G \end{array}$$

diyagramı değişmeli ise G üzerindeki bir λ düzgün vektör alanı sol invaryanttır.

Önerme 9 : Bir $\alpha : G \times T_e(G) \xrightarrow{\cong} T_G$ güçlü demet dönüşümü $(a,h) \to L_a(h)$ olarak verilir.

Sonuç 1 : $£_L(G) \xrightarrow{\cong} T_e(G)$, $\varphi \to \varphi(e)$ olarak verilen dönüşüm bir izomorfizmdir. boy$£_L(G)$=boyG'dir.

Sonuç 2 : Ś(G)-modüllerinin bir $£_L(G) \otimes Ś(G) \xrightarrow{\cong} £(G)$ izomorfizmi $\varphi \otimes f \to f\varphi$ olarak verilir.

Tanım 40 : $h \in T_e(G)$, $\varphi(e)=h$ olacak şekilde bir tek sol invaryant vektör alanı φ_h ile gösterilir ve h ile üretilen *sol invaryant vektör alanı* adını alır.

$b \in G$, $(\rho_b)_* \psi = \psi$ ise bu ψ vektör alanına *sağ invaryant vektör alanı* denir. Sağ invaryant vektör alanlarının Lie cebiri $£_R(G)$ ile gösterilir. $\psi \to \psi(e)$ eşlemesi bir $£_R(G)$ $T_e(G)$ izomorfizmi belirler.

Önerme 7 : $\varphi \in £_L(G)$ ve $\psi \in £_R(G)$ ise $[\varphi,\psi]=0$'dır.

1.7.3. Bir Lie Grubunun Lie Cebiri

Bir G Lie grubunun Lie cebiri; $£_L(G)$'den Önerme 9, Sonuç 1 ve 2 deki izomorfizm ile elde edilen cebir yapısı ile $T_e(G)$ vektör uzayıdır. $h,k \in T_e(G)$ için

$[h,k] = [\varphi_h,\varphi_k](e)$ 'dir. $\pounds_R(G)$ $T_e(G)$ izomorfizmi $T_e(G)$'de bir ikinci Lie çarpımı $[,]^{\sim}$ belirler. $h,k\in T_e(G)$ için $[h,k]=-[h,k]^{\sim}$ 'dır. Dolayısıyla $h\rightarrow -h$ dönüşümü bu Lie cebir yapıları arasında bir izomorfizm tanımlar.

Teorem 8 : Lie gruplarının bir düzgün homomorfizmi $f: G \rightarrow H$ için (e her iki grubun birim elemanı) $f(e_G)=e_H$ olsun. df türevi bir $f'=(df)_e : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ lineer dönüşümüne kısıtlanır. f' Lie cebirlerinin bir homomorfizmidir.

Tanım 41 : K bir cisim, K üzerindeki bir vektör uzayı G olsun.

$[\,,\,] : G\times G \rightarrow G$

(1) $x \in G$, $[x, x] = 0$

(2) $x,y,z\in G$, $[[x,y],z]+[[y,z], x]+[[z, x],y] = 0$ "Jacobi eşitliği"

özelliklerini sağlayan [,] (Lie operatörü) bilineer dönüşümü ile G'ye bir *Lie cebir* denir. Bilineerlikten $\forall x,y\in G$ için $[x,y] = -[y, x]$ elde edilir.

G ve H Lie cebirleri, $f : G \rightarrow H$ $f[x,y]=[fx,fy]$ olarak tanımlı bir K-lineer dönüşümüne bir *Lie cebir homomorfizmi* denir.

Örnekler 9 :

1. Vektör grubu: Sonlu boyutlu reel veya kompleks vektör uzayı V için vektör toplamı işlemi ile V bir Lie grubudur.

2. GL(V) grubu: (Reel veya kompleks n boyutlu vektör uzaylarının lineer otomorfizmleri grubu) $L_V = L(V;V)$ vektör uzayının bir açık altkümesidir, dolayısıyla bir manifolddur. Hatta çarpım ve ters işlemi düzgündür. Dolayısıyla GL(V) Lie grubudur. GL(V), L_V 'nin bir açık altkümesi olduğundan, teğet demeti $T_{GL(V)}=GL(V)$ L_V'dir.

3. Direkt çarpımlar: G ve H Lie grupları $x_1,x_2\in G$, $y_1,y_2\in H$ için $(x_1,y_1).(x_2,y_2)=(x_1x_2, y_1y_2)$ işlemi ile $G\times H$ Bir Lie gruptur. Bu Lie grubuna G ve H'ın direkt çarpımı denir.

4. Teğet demet: G bir Lie grubu ise $d\mu : T_G x T_G \rightarrow T_G$ dönüşümü ile T_G bir Lie gruptur. Ters dönüşüm $d\varphi$'dir. Sıfır kesiti $0: G \rightarrow T_G$ Lie gruplarının bir homomorfizmidir.

Teorem 9 : Bir G Lie grubunun bir kapalı H alt grubu bir Lie alt grubudur.

1.7.4. Bir Etkinin Yörüngeleri

Birim elemanı e ile bir E Lie cebiri ve E Lie cebiri ile bir G Lie grubu alınsın. M bir düzgün manifold olsun. $T : M \times G \rightarrow M$ M üzerinde G'nin bir sağ etkisi olsun.

Tanım 42 : $z \in M$ için $z.G(=\text{gör}A_z)$ kümesine G'nin z'deki *orbiti* denir. M manifoldu orbitlerinin ayrık birleşimidir. G, M üzerinde geçişli ise M'nin tek bir orbiti vardır.

$A_z(ab)=A_z(a)b$ bağıntısından $\pi: G \rightarrow G_z/G$ projeksiyonu ve A_z ile

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "A_z"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[dl, "A_z^{\bullet}"] \\ G_z/G & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.π 'ye göre G'nin bölüm manifoldu G_z/G olduğundan $A_z^{\bullet}$ dönüşümü düzgündür. Hatta $A_z^{\bullet}$, G'nin G_z/G ve M üzerindeki sağ etkilerine göre equivaryanttır.

Tanım 43 : $\forall z \in M$ için $G_z=\{ a \in G \mid z.a=z\}$ olarak tanımlı $G_z \subset G$ kapalı altgrupları, G'nin bir Lie altcebiridir ve z'de *izotropi altgrubu* adı verilir. $\forall z \in M$'de $G_z=\{e\}$ ise etki *serbest* denir.

Önerme 10 : G_z izotropi grubunun E_z Lie cebiri $E_z = \ker(dA_z)_e$ 'dir.

1.7.5. Transformasyon Grupları

G, birim elemanı e , Lie cebiri E olan bir bir Lie grubu, M ve N düzgün manifoldlar olsunlar.

Tanım 44 : Bir M manifoldu üzerinde G'nin bir sağ etkisi bir $T : M \times G \rightarrow M$ düzgün dönüşümüdür. Bu dönüşüm $(z,a) \rightarrow za$ olarak yazılır ve $a,b \in G$, $z \in M$ için $z(ab)=(za)b$ ve $ze=z$ eşitliklerini sağlar.

Bir T etkisi $a \in G$ için M üzerinde $T_a(z)=za=T(z,a)$ olarak verilen T_a diffeomorfizmi belirler. (T_a^{-1}=T'dir.) T_a'ya *a ile sağ dönüşüm(etki)* denir.

Diğer taraftan $\forall z \in M$ için $a \in G$, $A_z(a)=za$ olarak verilen bir $A_z : G \to M$ düzgün dönüşümü vardır.

G'nin N üzerindeki bir sağ etkisi T* olsun .

$$\begin{array}{ccc} M\times G & \xrightarrow{T} & M \\ \varphi\times\iota \downarrow & & \downarrow\varphi \\ N\times G & \xrightarrow[T^*]{} & N \end{array}$$

şeması değişmeli ise T ve T* 'a göre bir $\varphi : M \to N$ düzgün dönüşümüne *equivaryant* denir. Bu şemadan şunlar denktir:

(1) $z\in M$, $a\in G$ için $\varphi(za)=\varphi(z)a$

(2) $a\in G$, $\varphi o T_a = T_a{}^* o \varphi$

(3) $z\in M$, $\varphi o A_z = A_{\varphi(z)}{}^*$ ($y\in N$ için $A_y{}^* : G \to N$ dönüşümü $a \to ya$ şeklinde tanımlıdır)

Bir Lie grubunun sol etkisi de benzer şekilde tanımlıdır.

Örnekler 10 :

1. G'nin G üzerinde bir sol etkisi $az=aza^{-1}$ olarak tanımlıdır.

2. G'nin M üzerinde bir etkisi $T : M\times G \to M$ ise T_M üzerinde T_G'nin bir etkisi $dT : T_M\times T_G \to T_M$ 'dir. T_G üzerindeki sıfır vektör G ise T_M üzerinde G'nin etkisi $T_M\times G \to T_M$ 'dir. $\psi\in T_M$, $a\in G$ için $\psi_a=dT_a(\psi)$ olarak tanımlıdır.

3. M üzerinde G'nin bir etkisi $M\times G \to M$ ise $z\in N$, $a\in G$ $za\in N$ olacak şekilde bir $N\subset M$ altkümesine kararlı denir. N kararlı ise üzerindeki etki bir $N\times G \to N$ küme dönüşümüne kısıtlanır. Özel olarak M'in bir kararlı altmanifoldu N ise bu dönüşüm düzgündür ve dolayısıyla G'nin N üzerindeki bir düzgün etkisidir.

4. Bir $T_R : M\times G \to M$ sağ etkisi $z\in M$, $a\in G$ için $T_L(a,z)=T_R(z,a^{-1})$ ile tanımlı bir T_L birleşmeli sol etki belirler.

Tanım 45 : M ve N düzgün dönüşümler ve $\varphi,\psi : M \to N$ düzgün dönüşümler olsun. $x\in M$ bir nokta olsun. $H(0,x)=\varphi(x)$ ve $H(1,x)=\psi(x)$ olacak şekilde bir $H : R\times M \to N$ düzgün dönüşümü mevcut ise φ ile ψ homotopik dönüşümlerdir. Bu durum $\varphi\sim\psi$ olarak yazılır. H düzgün dönüşümüne *homotopi* denir.

Üstel dönüşüm $e\in M$'de $\exp : T_e(M) \to M$ bir diffeomorfizmidir.

Devrik dönüşüm $\forall a\in M$'de $M \to M$ $Ad_a(z) = aza^{-1}$ dönüşümüdür. Buradan $\forall\ B\in T_e(G)$ için $\exp(Ad_{a*}(B)) = a \exp Ba^{-1}$.

1.7.6. Dereceli De Rham Kohomoloji

M bir n-manifoldu ve üzerindeki diferensiyel formlarla

$$A(M)=\sum_{p\geq 0} A_p(M) \tag{21}$$

dereceli diferensiyel cebiri alınmış olsun.Bu diferensiyel cebirin eşçevrimleri $\delta\Phi=0$ şartını sağlayan Φ diferensiyel formlarını içerir.Böyle bir diferensiyel forma *kapalıdır* denir ve bu formlar A(M)'nin bir Z(M) dereceli alt cebiridir.

$B(M)=\delta A(M)$ altkümesi Z(M)'de bir ileri idealdir. B(M)'deki formlara *tam* veya *eşsınır* denir.

$$H(M)=Z(M)/B(M) \tag{22}$$

Dereceli kohomoloji cebirine M *n-manifoldunun deRham kohomoloji cebiri* denir.

$\varphi : M \to N$ bir düzgün dönüşüm olsun. A(M) ve A(N) reel cebirleri arasında $\varphi^* : A(M) \leftarrow A(N)$ dereceli diferensiyel cebirlerin bir homomorfizmidir. Dolayısıyla φ^* ile sıfır dereceden homojen kohomoloji cebirlerinin bir homomorfizmi

$\varphi\# : H(M) \leftarrow H(N)$

dir.

$\Psi: N \to Q$ bir başka düzgün dönüşüm ise

$(\Psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \Psi^*$ ve $(\Psi \circ \varphi)\# = \varphi\# \circ \Psi\#$

dır. Hatta $(\imath_M)\# = \imath_{H(M)}$ dır. Özel olarak φ ve Ψ ters diffeomorfizmler ise $\varphi\#$ ve $\Psi\#$ ters izomorfizmlerdir.

H(M) 'nin derecelendirmesi $H^P(M)=Z^P(M)/B^P(M)$ olmak üzere $H(M)=\sum_{p=0}^{n} H^p(M)$ 'dır. p>n için $A^P(M)=0$ olduğundan $H^P(M)=0$ ve $H^n(M)=A^n(M)/B^n(M)$ dır. Diğer taraftan $B^0(M)=0$ olduğundan $H^0(M)=Z^0(M)$ dır. $\delta f=0$ şartını sağlayan M üzerindeki düzgün f fonksiyonları $Z^0(M)$ 'de olsun. M bağlantılı ise $H^0(M)\cong R$ 'dir. Yani bir bağlantılı manifoldun kohomoloji cebiri de bağlantılıdır.

Sabit fonksiyonlar $H^0(M)$'dedir. $1 : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $H(M)$'nin birim elemanıdır. M bağlantılı ise $\lambda \to \lambda.1$ dönüşümü bir $R \to H^0(M)$ kanonik izomorfizmi verir.

Örnek 11 : M tek bir nokta içeriyorsa $p \geq 1$, $H^P(M)=0$ ve $H^0(M)=R$ dir.

$H^P(M)$ uzayları sonlu boyutlu ise b_p=boy $H^p(M)$ sayısına M'nin p. Betti sayısı, $f_M(t)=\sum_p b_p t^p$ polinomuna M'nin *Poincare polinomu* ,

$$X_M=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p = f_M(-1)$$

Toplamına ise M'nin Euler-Poincare karakteristiği denir.

De Rham kohomolojisinin aksiyomları şunlardır:

A1: H(nokta)=R.

A2:(homotopi aksiyomu) $\varphi \sim \Psi : M \to N$ ise $\varphi^{\#} = \Psi^{\#}$.

A3:(ayrık birleşim)M açık altmanifoldlarının ayrık birleşimi M ise

$H(M) \cong \prod H(M_\alpha)$

A4:(Mayer- Vietoris) U,V açık,M=UuV ise

$$\begin{tikzcd}
H(M) \arrow[rr] & & H(U) \oplus H(V) \arrow[dl] \\
& H(U \cap V) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

üçgeni tamdır.

1.7.7. Çoklineer Cebir

Bir E vektör uzayı üzerinde boy E= n ve $\Lambda E = \sum_{p=0}^{n} \Lambda^P E$ için

$\otimes E = \sum_{p \geq 0} \otimes^P E$ "tensor cebiri"

$\Lambda E = \sum_{p \geq 0} \Lambda^P E$ "dış cebir"

$\vee E = \sum_{p \geq 0} \vee^P E$ "simetrik cebir" olarak tanımlıdır.

F ikinci bir uzay ise $E^*\otimes F^*$ ve $E\otimes F$ arasında $x^*\in E^*$, $y^*\in F^*$, $x\in E$, $y\in F$ ile

$$<x^*\otimes y^*,\ x\otimes y>=<x^*, x><y^*, y>$$

eşitliği vardır. E ve F sonlu boyutlu ise buradan bir $E^*\otimes F^*\cong (E\otimes F)^*$ izomorfizmi elde edilir. Özel olarak, $(\otimes^P E)^* = \otimes^P E^*$ dır.

Benzer olarak boy $E<\infty$ ise $(\wedge^P E)^* = \wedge^P E^*$, $(\vee^q E)^* = \vee^q E^*$

$$<x^{*1}\wedge\ldots\wedge x^{*P},\ x_1\wedge\ldots\wedge x_P> = \det(<x^{*i}, x_j>)$$

ve

$$<y^{*1}\vee\ldots\vee y^{*P},\ y_1\vee\ldots\vee y_P> = \operatorname{perm}(<y^{*i}, y_j>)$$

alınır. Burada perm bir matrisin permanentidir.

Bir E uzayında çoklineer fonksiyonların cebirleri

$T(E)=\sum_{p\geq 0} T^P(E)$ “eğri çoklineer”

$A(E)=\sum_{p\geq 0} A^P(E)$ “eğri çoklineer”

$S(E)=\sum_{p\geq 0} S^P(E)$ “simetrik çoklineer”

ile gösterilir.

$$(\phi\otimes\psi)(x_{1},\ldots, x_{p+q}) = \phi(x_{1},\ldots, x_{p})\,\psi(x_{p+1},\ldots, x_{p+q})$$

$$(\phi\wedge\psi)(x_{1},\ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!\,q!}\sum_{\sigma\in S^{p+q}} \in_\sigma \phi(x_{\sigma(1)},\ldots, x_{\sigma(p)})\,\Psi(x_{\sigma(p+1)},\ldots, x_{\sigma(p+q)})$$

ve

$$(\phi\vee\Psi)(x_{1},\ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!\,q!}\sum_{\sigma\in S^{p+q}} \phi(x_{\sigma(1)},\ldots, x_{\sigma(p)})\,\Psi(x_{\sigma(p+1)},\ldots, x_{\sigma(p+q)})$$

çarpım işlemleri belirlidir. σ sıralamasının çift veya tek olmasına göre $\in_\sigma=\pm 1$ iken p obje üzerindeki simetrik gruplar S^P ile gösterilir.

boy $E<\infty$ ise T(E) ve $\otimes E^*$ dereceli cebirleri

$\phi\in\otimes^P E^*$ için $\phi(x_{1},\ldots, x_{P}) = <\phi,\ x_1\otimes\ldots\otimes x_P>$

$\Psi\in\wedge^P E^*$ için $\Psi(x_{1},\ldots, x_{P}) = <\Psi, x_1\wedge\ldots\wedge x_P>$

ve

$X\in\vee^P E^*$ da $X(x_{1},\ldots, x_{P}) = <X,\ x_1\vee\ldots\vee x_P>$

alınarak (A(E) ve $\wedge E^*$, S(E) ve $\vee E^*$ e göre) belirlenir.

Bir $\nu: E\rightarrow F$ lineer dönüşümü tek olarak

$\otimes\nu : \otimes E \to \otimes F, \quad \wedge\nu : \wedge E \to \wedge F, \quad \vee\nu : VE \to VF$

homomorfilerine genişler. Bunlar $\nu_\otimes$, $\nu_\wedge$ ve $\nu_\vee$ olarak da gösterilebilir.

$\forall x \in E$ için $\iota(x) : A(E) \to A(E)$ yerine koyma işlemi $p>1$, $\phi \in A^P(E)$' de

$(\iota(x)\phi)(x_{1,\dots,}\ x_{p-1}) = \phi(x, x_{1,--,}\ x_{p-1})$

$\phi \in A^0(E)$ için $\iota(x)\phi = 0$

ve $\mu(x) : \wedge E \to \wedge E$ çarpım işlemi $a \in \wedge E$' de $\mu(x)(a) = x \wedge a$ olarak alırız. Bu $\iota(x)$ A(E)' nin bir terstürevidir ve $\mu(x)$' in dualidir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Demetler

Tanım 46 : E ve B topolojik uzaylar ve π: $E \to B$ bir dönüşüm olmak üzere bir demet $\wp$=(E, π, B) üçlüsüdür. B($\wp$) (veya B)'ye *taban uzay*, E($\wp$) (veya E)'ye *toplam (demet) uzayı*, π dönüşümüne de *demetin izdüşümü* denir. Her bir $b \in B$ için $F_b=\pi^{-1}(b)$ ters görüntüsüne b üzerindeki *demetin lifi* denir.

B üzerinde bir $\wp$ reel vektör demeti, her bir $b \in B$ için $\pi^{-1}(b)$ lifi üzerinde bir vektör uzayı yapısına sahip bir (E,π, B) demetidir. Öyle ki aşağıdaki yerel apaçıklık koşulu sağlanır: Her bir $b \in B$ için $U \subset B$ komşuluğu, bir $0 \leq n$ tamsayısı, $h : U \times R \to \pi^{-1}(U)$ homeomorfizmi vardır. Buradan her bir $b \in U$ için $x \to h(b, x)$ birebir eşlemesi R^n vektör uzayı ve $\pi^{-1}(b)$ vektör uzayı arasında bir izomorfizm tanımlar.

U' yu taban uzayına eşit seçtiğimizde $\wp$'ye bir trivial demet denir. F_b hiçbir zaman boş değildir. boy F_b=n ise $\wp$ demetine bir n-düzlem demeti veya bir R^n-demet denir.

Tanım 47 : $\wp_1$ ve $\wp_2$ taban uzayı üzerinde iki vektör demeti olsun. Her bir $F_b(\wp_1)$ .vektor uzayını $F_b(\wp_2)$ vektör uzayına izomorf olarak resmeden toplam uzaylar arasında bir $f : E(\wp_1) \to E(\wp_2)$ homeomorfisi varsa $\wp_1$ demeti $\wp_2$'ne izomoftur denir ve $\wp_1 \cong \wp_2$ ile gösterilir.

Örnek 12 : $B \times R^n$ toplam uzaylı $\pi(b, x)=b$ projeksiyonlu ve liflerindeki vektör uzayı yapısı $t_1,t_2 \in R$, $b \in B$ ve x_1, $x_2 \in R^n$ olmak üzere,

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1 x_1 + t_2 x_2)$$

ile verilen *trivial demet* $\in^n_B$ ile gösterilir. B tabanlı ikinci bir R^n demeti ancak ve ancak $\in^n_B$ ne izomorftur.

Tanım 48 : Bir $\wp$= (E, π, B) demetinde $\pi \circ \varphi = id_B$ şartını sağlayan bir $\varphi : B \to E$ düzgün dönüşümüne bir *dikkesit* denir.Bir $N \subset B$ altkümesi için N üzerindeki bir dikkesit $\pi|\pi^{-1}(N) : \pi^{-1}(N) \to N$ için bir dikkesittir.$\forall x \in B$ için x'in bir U komşuluğu ve U üzerinde bir dikkesit mevcut ise π'nin bir *yerel dikkesiti* vardır denir.

Tanım 49 : $\wp$ bir vektör demeti olsun. s dikkesiti her bir b için s(b)'yi $F_b(\wp)$'nın sıfırına götürüyorsa bu kesite *sıfır kesit* denir.

Tanım 50 : Bir M düzgün manifoldunun teğet demetinin bir dikkesitine M üzerinde bir *vektör alanı* denir.

Tanım 51: i=1,2 için $\pi_i : E_i \to B_i$ projeksiyon dönüşümlü iki $\wp_1$, $\wp_2$ vektör demetlerinin çarpımı bir $(E_1 \times E_2, \pi_1 \times \pi_2, B_1 \times B_2)$ demetidir. Burada

$E_1 \times E_2 = \{ (x,y) : x \in E_1 , y \in E_2 \}$

$\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$

$(x , y) \to (\pi_1(x), \pi_2(y))$

ve her bir lif belirli vektör uzayı yapısı ile

$(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(b_1 , b_2) = F_{b1}(\wp_1) \times F_{b2}(\wp_2)$

olarak tanımlıdır. Çarpım demeti $\wp_1 \times \wp_2$ ile gösterilir.

Tanım 52: Bir B taban uzayı üzerindeki iki $\wp_1=(E_1 ,\pi_1 ,B)$ ve $\wp_2=(E_2 , \pi_2 ,B)$ demetlerinin Whitney toplamı $\wp_1 \oplus \wp_2 = (E_1 \oplus E_2 ,\pi, B)$ demetidir. Burada

$E_1 \oplus E_2 = \{ (x ,y) \in E_1 \oplus E_2 : \pi_1(x) = \pi_2(y) \}$

$\pi : E_1 \oplus E_2 \to B$

$(x ,y) \to \pi_1(x) = \pi_2(y)$

ve her bir $F_b(\wp_1 \oplus \wp_2)$ lifi $F_b(\wp_1) \oplus F_b(\wp_2)$ direkt toplamına izomorftur.

Tanım 53 : $E(\wp_1) \subset E(\wp_2)$ olmak üzere aynı B taban uzayı üzerindeki iki $\wp_1$, $\wp_2$ vektör demetini düşünelim. Her bir $F_b(\wp_1)$ lifi $F_b(\wp_2)$ lifinin bir altuzayı ise $\wp_1$ 'ne $\wp_2$ 'nin bir *altdemeti* denir ve $\wp_1 \subset \wp_2$ olarak gösterilir.

Tanım 54 : M bir n-manifold. $x \in$Mdeki teğet uzay $T_x(M)$; $\varphi(f, g)=\varphi(f).g(x)+f(x).\varphi(g)$ şartını sağlayan $\varphi : Ś(M) \to R$ lineer dönüşümlerin uzayıdır. M'nin *teğet demeti* $\tau_M=(T_M, \pi , M ,R^n)$ vektör demetidir. $x \in$M'deki lifi $T_x(M)$'dir.

Tanım 55 : Bir $\varphi : M \to N$ düzgün dönüşümünün türevi, $T_x(M)$'ye kısıtlanışı $f \in Ś(M)$'de $((d\varphi)_x)(f)=\varphi(fo\varphi)$ olarak tanımlı $d\varphi : T_M \to T_N$ demet dönüşümüdür.

boy B= n ve boy F= r olmak üzere (E, π, B, F) bir düzgün lif demeti olsun. Teğet demetler arasındaki π'nin türevi $d\pi : T_E \to T_B$ bir demet dönüşümüdür.

Tanım 56 : $z \in E$'de $V_z(E) \subset T_z(E)$ $V_z(E)=$ çek $(d\pi)_z$ altuzayına $T_z(E)$'nin *dikey altuzayı*, elemanlarına da *dikey* denir.

Tüm $(d\pi)_z$ lineer dönüşümleri örtendir, dolayısıylaboy $V_z(E)$= boy E-boy B= boy F'dir. $\forall a \in B$'de $F_a = \pi^{-1}(a)$ E'nin bir alt manifoldudur. $J_a: F_a \to E$ içerme dönüşümüdür.

Tanım 57: Bir $\wp=(E, \pi, B, F)$ vektör demetindeki bir *dikkesit* $\pi \circ \varphi = 1$ şartını sağlayan bir $\varphi : B \to E$ düzgün dönüşümüdür.Her vektör demetinde $x \in B$ için $0(x)=0_x \in F_x$ olarak tanımlı *sıfır kesit* vardır

2.2. Dikkesitler Modülü

Tanım 58 : φ ve Ψ, $\wp$ demetinde iki dikkesit , $f \in Ś(B)$ ise $\wp$de $\varphi+\Psi$ ve $f\varphi$ dikkesitleri $x \in B$ için $(\varphi+\Psi)(x)=\varphi(x)+\Psi(x)$ ve $(f\varphi)(x)=f(x)\varphi(x)$ olarak verilir. Bu $(\varphi,\Psi) \to \varphi+\Psi$ ve $(f,\varphi) \to f\varphi$ işlemleri $\wp$'deki dikkesitler kümesinde bir Ś(B)-modulü belirler ve *Sec* $\wp$ ile gösterilir.

Tanım 59 : M ve N düzgün manifoldlar, $\varphi : M \to N$ bir düzgün dönüşüm olsun. $x \in M$, $f \in Ś(N)$ için $\varphi^*: Ś(M) \leftarrow Ś(N)$ $(\varphi^* f)(x)=f(\varphi(x))$ homomorfizmi elde edilir.
φ: $M \to N$ bir düzgün dönüşüm, $a \in M$ olsun.$\alpha \to \alpha \circ \varphi^*$ olarak tanımlı $T_a(M) \to T_{\varphi(a)}(N)$ lineer dönüşümüne φ'nin a'daki türevi denir ve $(d\varphi)_a$ ile gösterilir. $\Psi \in Ś(N)$, $\alpha \in T_a(M)$ için $((d\varphi_a)\alpha)(\Psi)= \alpha(\varphi^*\Psi)$ olarak tanımlıdır.

Tanım 60 : M bir n-manifold, $T_M = \bigcup_{a \in M} T_a(M)$ ayrık birleşim ve $\pi_M : T_M \to M$ izdüşümü $\alpha \in T_a(M)$ için $\pi_M(\alpha) = a$ olarak tanımlı olsun. M'in teğet demeti $\tau_M = (T_M, \pi_M, M, Rn)$, M üzerindeki bir vektör demetidir. $a \in M$ noktasındaki lifi $T_a(M)$, a noktasındaki teğet uzayıdır.

Tanım 61 : Bir M manifoldunun bir $a \in M$ noktası alınsın. M'nin a noktasındaki bir kotanjant vektörü bir $w_a : T_a(M) \to R$ lineer dönüşümüdür. Bu dönüşüm $T_a(M)^*$ dual uzayının elemanıdır. Bu uzaya M'in a noktasındaki kotanjant uzayı denir. boy $T_a(M)^*$ = boy M'dir. Böylece M'in τ_M^* kotanjant vektör demeti oluşturulabilir.τ_M ve τ_M^* dual vektör demetleridir.

2.3. Diferensiyel Formlar.

2.3.1. 1- Formlar

Bir M manifoldu üzerinde bir 1-form kotanjant demetinde bir dikkesittir. Yani her $x \in M$ için bir 1-form , $w(x) \in T_x(M)^*$ lineer fonksiyonudur.

M üzerindeki 1-formlar bir Ś(M)-modülü oluşturur ve $A^1(M)$ ile gösterilir.

$$A^1(M) \times £(M) \to ŚM)$$

$$<\varphi,X>(x) = <w(x),X(x)> \tag{23}$$

bilineer dönüşümü $T_x(M)$ ve $T_x(M)^*$ demetlerinin dualliğinden elde edilir. Dolayısıyle

$$A^1(M) \to \mathrm{Hom}_M\,(£(M);Ś(M))$$

bir izomorfizmdir. $\varphi : M \to N$ bir düzgün dönüşüm ise $d\varphi : \tau_M \to \tau_N$ demet dönüşümünden bir

$$(d\varphi)^* : \mathrm{Sec}\,\tau_M^* \leftarrow \mathrm{Sec}\tau_N^*$$

dual dönüşümü elde edilir. φ^*: $A^1(M) \leftarrow A^1(N)$ dönüşümü $x \in M$, $\alpha \in T_x(M)$ için $(\varphi^* w)(x;\alpha) = w(\varphi(x);d\varphi(\alpha))$ olarak yazılır.

Tanım 62 : Bir M manifoldu üzerindeki her f düzgün dönüşümü bir $\varphi_f : £(M) \to Ś(M)$ Ś(M)- modül homomorfizmi belirler. $X \in £(M)$, $\varphi_f : X \to X(f)$ verilir.

$X \in £(M)$'de $X(f)=<\delta f,X>$ olacak şekilde bir tek $\delta f \in A^1(M)$ 1-formu vardır. Buradaki δf'e f'in *gradienti* denir

2.3.2. İnvaryant Diferensiyel Formlar

G bir Lie grubu, M bir manifold olsun. $T : M \times G \to M$ bir sağ ötelemesi , $a \in G$'de M'in bir T_a sağ ötelemesi , M üzerindeki diferensiyel formların dereceli cebiri A(M)'de $T_a{}^*$ otomorfizmlerini verir. $a,b \in G$,

$$T_{ab}{}^*=T_a{}^* \circ T_b{}^* \quad \text{ve} \quad T_e{}^*=\iota$$

dir. $\mathcal{X} \in £(M)$, $a \in G$ için $(\mathcal{X}.a)(z)=dT_a(\mathcal{X}(z.a\text{-}1))$ olduğundan $i(\mathcal{X}) \circ T_a{}^*=T_a{}^* \circ i(\mathcal{X}.a)$ ve $\theta(\mathcal{X}) \circ T_a{}^*= T_a{}^* \circ \theta(\mathcal{X}.a)$ 'dır. Hatta $T_a{}^* \circ \delta = \delta \circ T_a{}^*$ 'dir. $a \in G$'de $T_a{}^*\Phi=\Phi$ eşitliğini sağlayan M üzerindeki bir Φ diferensiyel formuna G etkisine göre invaryant denir. Bir A(M) dereceli cebirinin invaryant diferensiyel formları $A_I(M)$ ile gösterilir. Ś(M)'nın invaryant fonksiyonları $Ś_I(M)$ ile gösterilen bir altcebir oluşturur (M üzerindeki invaryant vektör alanları $Ś_I(M)$ üzerinde modüldür) . $T_a{}^* \circ \delta = \delta \circ T_a{}^*$ ($T_a{}^*$ δ ile değişmeli) olduğundan $A_I(M)$ δ'e göre invaryanttır. $A_I(M)$ i(X) ve θ(X) 'e göre invaryanttır(X, M üzerinde bir invaryant vektör alanı olmak üzere).

2.4. i(h) ve θ(h) Operatörleri

$h \in H$ ile üretilen esas vektör alanı Z_h olsun. A(M)'de $i(Z_h)$ ve $\theta(Z_h)$ operatörleri genel olarak i(h) ve θ(h) ile gösterilir. $h,k \in E$ olmak üzere $Z_{[h,k]}=[Z_h,Z_k]$ bağıntısı ile

$$i([h,k])=\theta(h) \circ i(k)-i(k) \circ \theta(h) \tag{24}$$
$$\theta([h,k])=\theta(h) \circ \theta(k)-\theta(k) \circ \theta(h)$$
$$\theta(h)=i(h) \circ \delta+\delta \circ i(h)$$

'dir. $h \in E$ için $i(h)\Phi=0$ şartını sağlayan bir $\Phi \in A(M)$ diferensiyel formuna G'nin etkisine göre yatay denir. Her bir i(h) bir terstürev olduğundan yatay formlar A(M)'nin bir dereceli altcebiridir ve $A(M)_{i=0}$ ile gösterilir. (24) eşitliğinden yatay altcebir $\theta(h)$ operatörüne göre invaryant fakat δ'ye göre değildir.

Benzer olarak $h \in E$ için $\theta(h)\Phi=0$ şartını sağlayan $\Phi \in A(M)$ diferensiyel formları $A(M)_{i=0}$ ile gösterilen bir dereceli altcebir oluşturur. $\delta, \theta(h)$ ile değişmeli olduğundan $A(M)_{\theta=0}$ δ'ye göre invaryanttır.

$$A(M)_{i=0} \cap A(M)_{\theta=0} = A(M)_{i=0,\theta=0} \tag{25}$$

ve bu altcebir δ'ye göre invaryanttır. $h \in E$'de $\theta(h)\Phi=0$ ve $i(h)\Phi=0$ ise

$$\theta(h)\delta\Phi=\delta\theta(h)\Phi=0 \quad \text{ve} \quad i(h)\delta\Phi=\theta(h)\Phi-\delta i(h)\Phi=0.$$

2.5. Vektör Alanları

M bir düzgün manifold, Lie cebiri E ile bir Lie grubu G olsun.

2.5.1. Esas Vektör Alanları

M üzerinde G'nin bir sağ etkisi $T : M \times G \to M$ ile $\alpha(z,h)=(dT)_{(z,e)}(O_z,h)=dA_z\,(h)$ olarak verilen bir $\alpha : M \times E \to T_M$ güçlü demet dönüşümü vardır. a ile eşleniği T_a olmak üzere diferensiyelle $T_a \circ A_z = A_{z.a} \circ T_a\text{-}1$ bağıntısından aşağıdaki şema $a \in G$'de değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc} M \times E & \longrightarrow & T_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \times E & \longrightarrow & T_M \end{array}$$

Sabit bir $h \in E$ için $M \to \{h\}$ sabit dönüşümü α ya göre, M üzerinde Z_h vektör alanı, $z \in M$'de $Z_h(z)=dA_z(h)$ olarak verilir. Buna h ile üretilen esas vektör alanı denir. Z_h 'ın yörüngeleri M'de eğrilerdir. α'dan $z \in M$, $f \in \acute{S}(M,E)$'de

$$(\alpha_* f)(z)=\alpha(z,f(z))=dA_z(f(z)) \tag{26}$$

olarak tanımlanan $\alpha_* : \acute{S}(M,E) \to £(M)$ homomorfisi elde edilir. $Z_f=\alpha_* f$ 'e f fonksiyonu ile üretilen vektör alanı denir ve $z\in M$'de $Z_f(z) = Z_{f(z)}(z)$ 'dir. G'nin N üzerinde bir sağ etkisi $T^* : N\times G \to N$ ve $\varphi : M \to N$ düzgün equivaryant dönüşüm olsun.

$$\begin{array}{ccc} M\times E & \longrightarrow & T_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\times E & \longrightarrow & T_N \end{array}$$

şeması değişmelidir. M ve N üzerinde bir $h\in E$ vektörü ile üretilen esas vektör alanları φ-bağlantılıdır.

$$\begin{array}{ccc} M\times E & \longrightarrow & T_M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\times E & \longrightarrow & T_N . \end{array}$$

2.5.2. İnvaryant Vektör Alanları

$M\times G \to M$ etkisi bir $T_M\times G \to T_M$ etkisi verir. $a\in G$, $X \in £(M)$ için $X.a = (T_a)^* X$ ile $£(M)$'de G bir etki belirler. Buradan $a\in G$, $X, Y\in £(M)$ için $[X,Y].a=[X.a,Y.a]$ 'dir. $a\in G$ için $X.a=X$ ise M üzerinde bir X vektör alanına invaryant denir. Örneğin $a\in G$'de $X\sim X$'dir. $£^I(M)\subset £(M)$ altcebiri invaryant vektör alanlarını içerir.

2.6. Demet Dönüşümleri

$\wp=(E,\pi,B,G)$ ve $\wp'=(E',\pi',B',F')$ vektör demetleri olsun. $\varphi : F \to F'$ bir düzgün lif koruyan dönüşüm, $x \in B$'de $\varphi_x : F_x \to F'_{\psi(x)}$ kısıtlamaları lineer, $\psi : B \to B'$ düzgün olmak üzere bir $\varphi : \wp \to \wp'$ dönüşümüne *bir demet dönüşümü* (vektör demetlerinin bir homomorfizmi) denir.

$\varphi' : \wp' \to \wp''$ bir başka demet dönüşümü ise $\varphi'\circ\varphi$ 'de bir demet dönüşümüdür. ψ,ψ' ve ψ'' düzgün dönüşümleri φ,φ' ve $\varphi'\circ\varphi$ ile belirlenen taban manifoldları arasındaki düzgün dönüşümler olsun. Bu durumda $\psi''=\psi'\circ\psi$ 'de bir düzgün dönüşümdür.

$\varphi : \wp \to \wp'$ demet dönüşümü diffeomorfizm ise bir *izomorfizm* adını alır. Bir demet izomorfizminin tersi açıkca yine bir demet izomorfizmidir. Ters demet dönüşümünden taban manifoldları arasında ters diffeomorfizm elde edilir. $\wp$ ve $\wp'$ vektör demetleri için bir $\varphi : \wp \xrightarrow{\cong} \wp'$ demet izomorfizmi varsa bu demetlere *izomorf vektör demetleri* denir ve $\wp \cong \wp'$ ile gösterilir.

Tabanları aynı iki vektör demeti arasında tabanda idantik dönüşüm veren bir demet bir dönüşümüne *güçlü demet dönüşümü* denir.

Örnekler 13 :

1. Tabanı B, lifi r-boyutlu reel vektör uzayı F, projeksiyon dönüşümü $\pi(x,y)= x$ olmak üzere , B üzerindeki r ranklı apaçık demet $\wp=(B\times F,\pi,B,F)$'dir. Bu demet BxF veya $\in^r$ ile gösterilir.

2. Kısıtlama : Bir $\wp=(E,\pi,B,F)$ vektör demeti, $O\subset B$ bir açık alt manifold olsun. $\pi_O=\pi\,|\,\pi^{-1}(O)$ olmak üzere $\wp$'nin O açık altmanifolduna kısıtlanışı $\wp\,|_O=(\pi^{-1}(O), \pi_O,O,F)$ 'dir.

3. Kartezyen çarpım : i=1,2 , $\wp^i=(E^i,\pi^i,B^i,F^i)$ vektör demetleri olsun. (x_1, x_2)'deki lifi $F_{x_1}^{\ 1}\, x\, F_{x_2}^{\ 2}=F_{x_1}^{\ 1}\oplus F_{x_2}^{\ 2}$ vektör uzayı olan, $\wp^1\times\wp^2=(E^1\times E^2,\pi^1\times\pi^2,B^1\times B^2,F^1\oplus F^2)$ vektör demeti kartezyen çarpımdemetidir. Burada $\wp^1$ ve $\wp^2$ 'nin koordinat gösterimleri $\{(U_\alpha,u_\alpha)\}$ ve $\{(V_i,v_i)\}$ ise $\psi_\alpha(x_1, x_2; y_1\oplus y_2) = (u_\alpha(x_1,y_1),\psi_i(x_2,y_2))$ ile $\{(U_\alpha\times V_i,\psi_{\alpha i})\}$ $\wp^1\times\wp^2$'nin bir koordinat gösterimidir.

$\rho^1 : E^1\times E^2 \to E^1$ ve $\rho^2 : E^1\times E^2 \to E^2$ projeksiyonları $\wp^1\times\wp^2 \to \wp^1$ ve $\wp^1\times\wp^2\to\wp^2$ demet dönüşümleridir.

$\wp^1\times\wp^2$ kartezyen çarpımı şu özelliğe sahiptir : $\wp=(E,\pi,B,F)$ üçüncü bir vektör demeti ve $p' : E \to E'$, $p^2 : E \to E^2$ demet dönüşümleri ise $p'\circ p=p'$ ve $p^2\circ p=p^2$ olacak şekilde bir tek $p : E \to E^1\times E^2$ demet dönüşümü vardır.

2.6.1. Güçlü Demet Dönüşümleri Modülü

Taban uzayları aynı B manifoldu, lifleri F,F′ ve F″ olan $\wp,\wp_1$ ve $\wp_2$ vektör demetleri alınıyor. $\varphi,\psi : \wp_1 \to \wp_2$ güçlü demet dönüşümü, $f\in \acute{S}(B)$ olsun. $\varphi+\psi$, $f\varphi : \wp_1 \to \wp_2$ güçlü demet dönüşümleri $z\in E$, $\pi(z)= x$ olmak üzere $(\varphi+\psi)(z) = \varphi(z)+\psi(z)$ ve $(f\varphi)(z) = f(x)\varphi(z)$ olarak veriliyor. $(\varphi,\psi) \to \varphi+\psi$ ve $(f,\varphi)\to f\varphi$ operatörleri güçlü demet dönüşümleri ile $Hom(\wp_1,\wp_2)$ olarak gösterilen bir Ś(B)-modül oluşturur. $\varphi\in Hom(\wp_1,\wp_2)$ ve $\psi\in Hom(\wp_2,\wp)$ olsun. Bu durumda

$\varphi \circ \psi \ : \wp_1 \rightarrow \wp$ güçlü demet dönüşümüdür. $(\varphi,\psi) \rightarrow \psi \circ \varphi$ eşlemesi bir $Hom(\wp_1, \wp_2) \times Hom(\wp_2, \wp) \rightarrow Hom(\wp_1, \wp)$ Ś(B)-bilineer dönüşümü tanımlar

2.6.2. Çoklineer Dönüşümler

Aynı B tabanı üzerinde $\wp^1, \wp^2, \ldots, \wp^n, \wp$ vektör demetleri alınıyor. Bir $\Phi: (\wp^1, \ldots, \wp^n) \rightarrow \wp$ n-lineer demet dönüşümü, B ile indislenen ve aşağıdaki düzgünlük şartını sağlayan $\Phi_x : F_x' \times \ldots \times F_x' \rightarrow F_x$ n-lineer dönüşümlerinin bir kolleksiyonudur. $\wp^1, \ldots, \wp^n$, $\wp$'nin koordinat gösterimleri $\{(U_\alpha, \omega_\alpha^1)\}, \ldots, \{(U_\alpha, \omega_\alpha^n)\}$ ve $\{(U_\alpha, \omega_\alpha)\}$ (tüm demetlerde B 'nin örtümü $\{U_\alpha\}$ alınıyor) ise $\Phi_\alpha(x) = \omega_{\alpha,x}^{-1} \circ \Phi_x o(\omega_{\alpha,x}^1 \times \ldots \times \omega_{\alpha,x}^n)$ ile tanımlı $\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow L(F^1, \ldots, F^n; F)$ fonksiyonu düzgündür. Gösterim kolaylığı açısından $\Phi(x; z_1, \ldots, z_n) = \Phi_x(z_1, \ldots, z_n)$ alacağız.

2.6.3. Dual Demetler

$\wp = (B \times F, \ \pi, B, H)$ ve $\wp^* = (B \times F, \pi^*, B, F)$ apaçık demetler, $x \in B$ $<,>: H_x \times F_x \rightarrow R$ R-bilineer fonksiyonlar, $<,> : \wp \times \wp^* \rightarrow R$ skaler çarpımdır. Bu durumda $\wp$ ve $\wp^*$, $<,>$ iççarpımına göre birbirine dualdir.

Her $\wp$ vektör demetinin bir $\wp^*$ dual demeti olduğunu görelim : $x \in B$ için F_x vektör uzayının $<,>_x$ skaler çarpımişlemine göre duali F_x^* olsun. $\psi_{\alpha,x} = (\varphi^*_{\alpha,x})^{-1}$ alınarak $\psi_{\alpha,x} : F^* \rightarrow F_x{}^*$ lineer izomorfizmleri tanımlı ve $\{(U_\alpha, u_\alpha)\}$ bir koordinat gösterimi olsun. Bu durumda $E^* = \bigcup_{x \in B} F_x^*$ ve $\pi^* : E^* \rightarrow B$ olmak üzere bir $\wp^* = (E^*, \pi^*, B, F^*)$ vektör demetidir. $<,>_x$ işlemi $\wp^*$ ve $\wp$ arasında bir skaler çarpım tanımlar. Dolayısıyla $\wp^*$ ve $\wp$ *dual demetlerdir*. Açık olarak rank$\wp^*$=rank$\wp$ 'dır.

$\wp_1, \wp_1^*$ ve $\wp_2, \wp_2^*$ iki çift dual vektör demetinin $x \in B$'deki lifleri F_x^*, F_x ve H_x^*, H_x olsun. $\varphi : \wp_1 \rightarrow \wp_2$ bir güçlü demet dönüşümü olsun. Bu durumda $x \in B$ için $(\varphi^*)_x = (\varphi_x)^* : F_x^* \leftarrow H_x^*$ olarak tanımlı bir $\varphi^* : \wp_1^* \leftarrow \wp_2^*$ güçlü demet dönüşümüne φ'nin *duali* denir.

2.6.4. WhitneyToplamı

$k=1,\ldots,n$ ile $\wp^k$ vektör demetleri olsun. $\rho^k \circ i^k = 0$, $k \neq \mu$ ve $\sum_{k=1}^{n} i^k \circ \rho^k = \iota_{\wp}$ olarak tanımlı $i^k : \wp^k \to \wp$ ve $\rho^k : \wp \to \wp^k$ güçlü demet dönüşümleri ile $\wp$ vektör demetine $\wp^k$ demetlerinin *Whitney toplamı* denir. Özel olarak $\wp$'de bir $x \in B$ noktasındaki lif $F_x = \bigoplus_{k=1}^{n} F_x^k$'dır. Bu durumda $\wp = \wp^1 \oplus \ldots \oplus \wp^n$ yazılır. $\varphi^k : \wp^k \to \acute{K}$ güçlü demet dönüşümleri olsun. Bir $\varphi : \wp \to \acute{K}$ güçlü demet dönüşümü $\varphi = \sum_k \vartheta^k \circ \rho^k$ olarak tanımlanır.

$$\oplus_k : \mathrm{Hom}(\wp^k;\acute{K}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\wp^1 \oplus \ldots \oplus \wp^n;\acute{K})$$
$$(\varphi^1,\ldots,\varphi^n) \to \varphi$$

eşlemesi bir modül izomorfizmi belirler.

$n=2$ için vektör demetlerinin Whitney toplamını alalım: $\forall x \in B$ için $F_x^1 \oplus F_x^2$ vektör uzayıdır. $\wp_1$ ve $\wp_2$ için koordinat gösterimleri $\{(U_\alpha, u_\alpha^1)\}$ ve $\{(U_\alpha, u_\alpha^2)\}$ ise $x \in U_\alpha$ için $\psi_{\alpha,x} = \vartheta^1_{\alpha,x} : F^1 \oplus F^2 \to F_x^1 \oplus F_x^2$ lineer izomorfizmdir. π demet projeksiyonu olmak üzere $E' = \bigcup_{x \in B} F_x^1 \oplus F_x^2$ olmak üzere $\wp' = (E',\pi,B,F^1 \oplus F^2)$ bir vektör demetidir. $F_x^1, F_x^2 \to F_x^1 \oplus F_x^2$ içerme dönüşümleri $i^1 : \wp' \to \wp'$ ve $i^2 : \wp^2 \to \wp^1$ güçlü demet dönüşümleri belirler. $F_x^1 \oplus F_x^2 \to F_x^1$, $F_x^1 \oplus F_x^2 \to F_x^2$ projeksiyonları $\rho^1 : \wp' \to \wp'$ ve $\rho^2 : \wp' \to \wp^2$ güçlü demet dönüşümleri belirler. Dolayısıyla $\wp_1$ ve $\wp_2$ nin Whitney toplamı $\wp''$dir. Açık olarak $\mathrm{rank}(\wp_1 \oplus \wp_2) = \mathrm{rank}\,\wp_1 + \mathrm{rank}\,\wp_2$'dir.

2.6.5. Tensor Çarpımı

$k=1,\ldots,n$ için $\wp^k$ demetlerinin tensor çarpımı aşağıdaki şartı sağlayan bir $\bigotimes^n : (\wp^1,\ldots,\wp^n) \to \wp$ n-lineer demet dönüşümü ile $\wp^1 \otimes \ldots \otimes \wp^n$ ile gösterilen bir $\wp$ vektör demetidir. B tabanı üzerindeki herbir $\acute{K}$ vektör demeti ve herbir $\Phi \in \mathrm{Hom}(\wp^1,\ldots\wp^n;\acute{K})$ n-lineer demet dönüşümü için $\varphi \circ \bigotimes^n = \Phi$ şartını sağlayan bir $\varphi : \wp \to \acute{K}$ güçlü demet dönüşümü vardır.

$\wp^n$ vektör demetlerinin çarpımı, bunların Whitney toplamında $F_x^1 \oplus F_x^2$ yerine $F_x^1 \otimes F_x^2$ alınarak benzer yolla belirlenir. rank($\wp^1 \otimes \wp^2$)=(rank $\wp^1$)(rank $\wp^2$) olduğu görülür.

2.6.6. Dış Cebir

$\wedge^n : (\wp, \ldots, \wp) \to \Lambda^n \wp$ n-lineer eğri simetrik demet dönüşümü aşağıdaki özellikle $\wp$'nin n. dışgücü $\Lambda^n \wp$ bir vektör demetidir. $\varphi : \Lambda^n \wp \to \acute{K}$ bir güçlü demet dönüşümü olmak üzere her $\Phi : (\wp, \ldots, \wp) \to \acute{K}$ n-lineer eğri simetrik dönüşümü $\Phi = \varphi \circ \Lambda^n$ ile tek türlü olarak belirlidir. $\varphi \to \varphi \circ \Lambda^n$ dönüşümü bir $Hom(\Lambda^n \wp; \acute{K}) \xrightarrow{\cong} A^n(\wp, \acute{K})$ modül izomorfizmi belirler. $x \in B$ için $\Lambda^n \wp$'nin lifi $\Lambda^n F_x$ 'dir. $x \in B$, $z_k \in F_x$ için Λ^n dönüşümü $\Lambda^n(x; z_1, \ldots, z_n) = z_1 \Lambda \ldots \Lambda z_n$ olarak tanımlıdır. $\wp$ ve $\wp^*$ bir dual vektör demeti çifti olsun. $\forall x \in B$ için F_x ve F_x^* arasındaki $<, >_x$ skaler çarpımı $\Lambda^n F_x$ ve $\Lambda^n F_x^*$ arasında $z^{*k} \in F_x^*$, $z_\mu \in F_x$ için $<z^{*1} \Lambda \ldots \Lambda z^{*n}, z_1 \Lambda \ldots \Lambda z_n>_x = \det(<z^{*k}, z_\mu>_x)$ olarak tanımlı $<, >_x$ skaler çarpımını verir. Bu skaler çarpımlar $\Lambda^n \wp$ ve $\Lambda^n \wp^*$ arasında bir skaler çarpım belirler. Dolayısıyla bu demetler dualdir ve $(\Lambda^n \wp)^* = \Lambda^n \wp^*$ yazılır. n=0 ise $\Lambda^0 \wp = B \times R$'dir. $\Lambda \wp$ dış cebir demeti r=rank $\wp$ için $\Lambda \wp = \bigoplus_{p=0}^{r} \Lambda^n \wp$ Whitney toplamı ile yazılır. $x \in B$'de $\Lambda \wp$'ın lifi ΛF_x ve rankı 2^r'dir.

Bir $\Lambda \wp \otimes \Lambda \acute{K} \cong \Lambda(\wp \otimes \acute{K})$ güçlü demet izomorfizmi $x \in B$, $z \in \Lambda F_x$, $w \in \Lambda H_x$ için $z \otimes w \to z \Lambda w$ olarak tanımlanır.

$\varphi : \wp \to \acute{K}$ bir güçlü demet dönüşümü ise $x \in B$, $\varphi_x : F_x \to H_x$ lineer dönüşümlerine indirgenebilir ve $\Lambda\varphi : \Lambda F_x \to \Lambda H_x$ cebir homomorfizmine genişler. Böylece $\Lambda\varphi : \Lambda \wp \to \Lambda \acute{K}$ bir güçlü demet dönüşümüdür.

2.6.7. Simetrik Cebir

$\vee^n : (\wp,\ldots,\wp) \to \vee^n\wp$ n-lineer simetrik demet dönüşümü aşağıdaki şartla $\forall n \geq 1$ için bir $\vee^n\wp$ vektör demeti belirler. Her $\Phi : (\wp,\ldots\wp) \to \acute{K}$ n-lineer simetrik dönüşümü, bir $\psi : \vee^n\wp \to \acute{K}$ güçlü demet dönüşümü ile $\Phi = \psi \circ \vee^n$ olarak tek türlü yazılır. $\vee^n\wp$ vektör demetine $\wp$'nin bir p. simetrik gücü denir. $\psi \to \psi \circ \vee^n$ eşlemesi bir

$$\mathrm{Hom}(\vee^n\wp;\acute{K}) \xrightarrow{\cong} S^p(\wp;\acute{K})$$

modül izomorfizmi belirler. $\vee^n\wp$ demetinin $x \in B$ noktasındaki lifi $\vee^n F_x$ ve k=1,...,n $z_k \in F_x$ ile $\vee^n : (\wp,\ldots,\wp) \to \vee^n\wp$, $\vee^n(x, z_1,\ldots,z_n) = z_1 \vee \ldots \vee z_n$ olarak verilir.

$\wp$ ve $\wp^*$ dual vektör demetleri olsun. $\forall x \in B$ için F_x ve F_x^* arasındaki $<\,,\,>_x$ skaler çarpımı $\vee^n F_x$ ve $\vee^n F_x^*$ arasında $z_\mu \in F_x$, $z^{*k} \in F_x^*$ için $<z^{*1} \vee \ldots \vee z^{*p}, z_1 \vee \ldots z_n> = \mathrm{perm}(<z^{*k}, z_\mu>)_x$ olarak tanımlı bir $<\,,\,>_x$ skaler çarpımı belirler. Bu skaler çarpım $\vee^n\wp$ ve $\vee^n\wp^*$ demetleri arasında bir skaler çarpım belirler. Dolayısıyla bu demetler dualdir, $(\vee^n\wp)^* = \vee^n\wp^*$ yazılır.

2.6.8. Düzgün Dönüşümün Türevi

(E, π, B, F) bir düzgün lif demeti olsun. Teğet demetler arasındaki π'nin türevi $d\pi : T_E \to T_B$ bir demet dönüşümüdür.

Tanım 63 : $z \in E$'de $V_z(E) \subset T_z(E)$ $V_z(E) =$ çek $(d\pi)_z$ altuzayına $T_z(E)$'nin *dikey altuzayı*, elemanlarına da *dikey* denir. Tüm $(d\pi)_z$ lineer dönüşümleri örtendir, dolayısıyla boy $V_z(E)$= boy E-boy B= boy F 'dir. $\forall a \in B$'de $F_a = \pi^{-1}(a)$ E'nin bir alt manifoldudur.

J_a: $F_a \to E$ içerme dönüşümüdür.

Lemma 11 : $a \in B$, $z \in F_a$ için $V_z(E)$=gör $(dj_a)_z$ 'dir.

$V_E \subset T_E$ altkümesi $V_E = \bigcup_{z \in E} V_z(E)$ olarak belirlenir. T_E teğet demetinin bu V_E alt demetine *dikey alt demet* denir. (E, π, B, F) için bir koordinat temsili $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ ise

$$\begin{array}{ccc} T_{U_\alpha} \times T_F & \xrightarrow{d\varphi_\alpha} & T\pi^{-1}(U_\alpha) \\ \downarrow & & \cong \downarrow \\ U_\alpha \times F & \xrightarrow[\psi_\alpha]{} & \pi^{-1}(U_\alpha) \end{array}$$

değişmeli şemasından

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times T_F & \longrightarrow & V_E|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \\ \downarrow & \cong & \downarrow \\ U_\alpha \times F & \xrightarrow[\psi_\alpha]{} & \pi^{-1}(U_\alpha) \end{array}$$

değişmeli şeması elde edilir.

T_E'nin bir alt manifoldu V_E ve boy $g_{V_E}= n+2r$ 'dir. $dj_a : T_{Fa} \to T_E$ dönüşümleri liflerde lineer izomorfizm veren $dj_a : T_{Fa} \to V_E$ demet dönüşümleri olarak düşünülebilir. Bu nedenle V_E ' ye *lifler boyu demet* denir.

(E, π, B, F) bir başka lif demeti ve $\varphi : E \to E$ lif koruyan dönüşüm ise $d\varphi$ bir $(d\varphi)_v$: $V_E \to V_E$ demet dönüşümüne kısıtlanır.

E üzerinde bir Z vektör alanına, $\forall z \in E$ için Z(z) vektörü dikey veya denk olarak $Z \sim 0$ ise diktir denir.

$\forall z \in E$ için Z(z) dik ise E'de Z vektör alanı diktir.

$\forall z \in E$ için $Z \sim 0$ ise E'de Z vektör alanı diktir.

Z_1 ve Z_2 dik vektör alanlarının Lie çarpımı yine diktir.

$Z_1 \sim 0$ ve $Z_2 \sim 0$ ise $[Z_1, Z_2] \sim 0$ dır. Dolayısıyla bir dik vektör alanı, £ (E) Lie cebirinin bir $£_V$ (E) alt cebirini oluşturur.

Diğer taraftan, dik vektör alanları V_E 'de dik kesitler olduğundan, $£_V$ (E), Ś (E) halkası üzerinde sonlu üretilmiş modüldür.

2.7. Lif Demetleri

Tanım 64 : P ve B manifoldları arasındaki bir düzgün dönüşüm $\pi : P \to B$ olsun. F bir manifold, B nin bir açık örtümü $\{U_\alpha\}$, $x \in U_\alpha$, $y \in F$,

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

$$\pi\Psi_\alpha(x, y) = x \tag{27}$$

olarak tanımlı bir $\{\Psi_\alpha\}$ difeomorfizm ailesi varsa, π dönüşümü F manifolduna göre yerel çarpım özelliğine sahiptir denir. $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ sistemine π nin bir yerel parçalanışı denir.

Tanım 65 : F ye göre yerl çarpım özelliğine sahip bir $\pi : P \to B$ düzgün dönüşümü ile bir (P,π,B,F) dörtlüsüne bir *(düzgün) lif demeti* denir. Lif demetinde π nin bir yerel parçalanışına bir koordinat gösterimi denir.

Burada P demetin toplam uzayı, B taban uzayı, F de lif demeti adını alır. $\forall x \in B$ için $F_x = \pi^{-1}(x)$ kümesine x üzereindeki *lif demeti* denir. Her bir lif E nin bir kapalı alt kümesidir. Ve e liflerinin bir ayrık birleşimidir. Bir (P,π,B,F) lif demetinin bir düzgün dik kesiti, $\pi \circ \sigma = \iota_B$ olacak şekilde bir $\sigma : B \to P$ düzgün dönüşümüdür.

2.7.1.Yatay Alt Demetler

Tanım 66 : (E, π, B, F) bir düzgün lif demeti, $\tau_E = H_E \oplus V_E$ olacak şekilde bir $H_E \subset \tau_E$ alt demetine *yatay alt demet* denir. Z∈E'deki lifine (H_E'nin seçimine bağlıdır) *yatay alt uzaylar* denir ve $H_Z(E)$ ile gösterilir.

H_E bir yatay alt demet, $d_\pi : \tau_E \to \tau_B$ türevi bir $H_E \to \tau_B$ demet dönüşümüne kısıtlanır. Bu demet dönüşümü liflerdeki lineer izomorfizme kısıtlanır. boy H_E= 2n+r dir. E üzerindeki bir vektör alanına z∈E'de $Z(z) \in H_z(E)$ ise *yatay* denir. E üzerindeki yatay vektör alanı Ś (E) üzerinde bir $£_H(E)$ sonlu üretilmiş projektif modülünü oluşturur. Buna rağmen £ (E) Lie cebirinin bir alt cebirini oluşturmaz.

E üzerinde bir Z vektör alanı $Z_v \in £_v(E)$, $Z_H \in £_H(E)$ için $Z = Z_v + Z_H$ olarak tek türlü ayrıştırılabilir. Bunlara Z'nin düşey ve yatay bileşenleri denir.

Örnekler 14 :

1. $E = B \times F$ çarpım demetinde, $\tau_{B\times F}$ 'nin düşey alt demeti $V_{B\times F} = B \times T_F$ ve yatay alt demet

$H_{B\times F} = T_B \times F$'dir.

2. Herhangi bir lif demeti (E,π,B,F) ve E üzerinde bir Riemannian metriği alınsın. $T_z(E)$ de $V_z(E)$'nin ortagenal tümleyeni $H_z(E)$ olsun. Bu durumda

$$H_E = \bigcup_{z \in E} H_z(E)$$

bir yatay alt demettir.

Tanım 67 : G bir Lie grubu,

1. $\wp$= (P, π, B, G) bir düzgün lif demeti,
2. $T : P \times G \to P$, T(z,a)= z.a G'nin P'deki bir sağ etkisi,
3. $\wp$'nin $x \in U_\alpha$, a,b∈G için

$$\Psi_\alpha(x, ab) = \Psi_\alpha(x, a).\, b$$

olacak şekilde bir $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ koordinat temsili vardır. Bu şekilde bir $(\wp,T)$ ikilisine G yapı grubu ile bir *(düzgün) esas demet* denir. T etkisine esas etki, 3. şartı sağlayan koordinat temsiline de bir esas koordinat temsili denir. 3'den $z\in P$, $a\in G$ için

$\pi(z.a)=\pi(z)$

elde edilir. Ayrıca T etkisi serbesttir ve G'nin bir $z\in P$ noktasından geçen orbiti z'yi içeren liftir. $x\in B$ için $G_x=\pi^{-1}(x)$ orbitleri P'nin alt manifoldlarıdır. $G_x\to x$ eşlemesi orbitler ve B arasında bir küme bijekşınıdır.

$\wp=(P,\pi,B,G)$ bir ikinci esas demet, T esas etkisi ile veriliyor. φ: $P\to P$ düzgün equivaryant dönüşümüne esas demetlerin homomorjisi denir. Bu homomorjizm orbit resmeden ve dolayısıyla lif resmeden dönüşümdür. Dolayısıyla $\pi^\wedge\circ v=\Psi\circ\pi$ olacak şekilde bir Ψ: $B\to B^\wedge$ düzgün dönüşümü elde edilir.

$x\in B$, $z\in G$, $a\in G$ için φ homomorfizmi

$$\varphi_x(z.a)=\varphi_x(z).a \tag{28}$$

bağıntısını sağlayan $\varphi_x : G_x\to G_{\Psi(x)}$ düzgün dönüşümüne kısıtlanır. Burada her bir φ_x bir diffeomorfizmdir. φ diffeomorfizmdir $\Leftrightarrow$ Ψ diffeomorfizmdir. Bu durumda φ^{-1} de esas demetlerin bir izomorfizmidir. $B=B^\wedge$ ve $\Psi=1$ ise v'ye esas demetlerin bir güçlü izomorfizmi denir.

Örnekler 15 :

1. **Çarpım Demeti**: $x\in B$, $a,b\in G$ için sağ etki

   $(x,a).b=(x,ab)$ ile $(B\times G,\pi,B,G)$

çarpım demeti bir esas demettir. Buna esas veya çarpım demeti denir.

2. **Homojen Uzaylar :**

   G'nin bir kapalı alt grubu K olsun. (G, π, GIK, K) lif demeti, K'nın G üzerinde sağ çarpım etkisi ve K yapı grubu ile bir esas demettir.

2.7.2. Birleşmeli Demetler

Bir T esas etkisi ile bir esas demet $\wp=(P,\pi,B,G)$ ve bir F manifoldu üzerinde G'nin sol etkisi, $s: G\times F\to F$ olsun.

Tanım 68 : G'nin PxF mznifoldu üzerindeki Q sağ etkisi $z\in P$, $y\in F$, $a\in G$ ile

$$Q_a(z, y) = (z, y).a = (z.a, a^{-1}.y) \tag{29}$$

dir. Q'ya G'nin *birleşmeli etkisi* denir. Birleşmeli etkinin orbitleri kümesi $P\times_G F$ile gösterilir. $Q : P\times F \to P\times_G F$ projeksiyonu ile (z, y) boyuncaki orbit q(z, y) alınır.

π_p trivial projeksiyonu ile

$$\begin{array}{ccc} P\times F & \xrightarrow{q} & P\times_G F \\ \pi_p\downarrow & & \downarrow g \\ P & \xrightarrow[\pi]{} & B \end{array}$$

değişmeli diyagramından bir g: $P\times_G F \to B$ dönüşümü q ile belirlenir. $\chi\in B$' de $g^{-1}(\chi)=F_\chi$'dir.

Önerme 12: $P\times_G F$ üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek düzgün yapı vardır.

1. $\xi= (P\times_G F, g, B, F)$ bir düzgün lif demetidir.
2. q: $P\times F \to P\times_G F$ düzgün lif koruyan dönüşümü $z\in P$, her bir lifinde q_q: $z\times F \xrightarrow{\cong} F_{\pi(z)}$ diffeomorfizmine kısıtlanır.
3. $(P\times F, q, P\times_G F, G)$ Q esas etkisi ile bir düzgün esas demettir.
4. π_p esas demetlerin bir homomorfizmidir.

Tanım 69 : Yapı grubu G, lifi F, p ile birleşmeli ξ demetine *lif demeti* ve q'ya *esas dönüşüm* denir.

2.7.3. Birleşmeli Demetler Üzerinde Equivaryant Dönüşümler

$\wp= (P,\pi\ B\ G)$ bir ikinci demet ve bir F manifoldu üzerinde G'nin bir sol etkisi S ve V: $P \to P$, $\alpha : F \to F$ düzgün equivaryant dönüşümleri alınıyor.

G'nin joint etkilerine göre $v\times\alpha$: $P\times F \to P\times F$ dönüşümü equivaryanttır. (esas demetlerin bir homomorfisidir). Dolayısıyla

$$\begin{array}{ccc} P\times F & \longrightarrow & P\times F \\ \downarrow & & \downarrow \\ P\times_G F & \xrightarrow[v\times_G\alpha]{} & P\times_G F \end{array}$$

değişmeli şemasından $v\times_G\alpha$ düzgün dönüşümdür. v ile elde edilen bir düzgün dönüşüm $\Psi : B \to B$ olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} P\times_G F & \xrightarrow{v\times_G\alpha} & P\times_G F \\ g\downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Örneğin birleşmeli demetler arasında $v\times_G\alpha$ bir lif koruyan dönüşümdür. α bir difeomorfizm ise $z\in P$, $\chi = \pi(z)$

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & F \\ q_z \downarrow \cong & & \cong \downarrow q_{v(z)} \\ F_z & \xrightarrow[(v\times_G\alpha)_\chi]{} & F_{\Psi(\chi)} \end{array}$$

değişmeli şemasından her bir $(v\times_G\alpha)_\chi$ de difeomorfizmdir.

$P = P$ ve $v = \iota$ ise B'de idantik dönüşümü veren bir $(\iota\times_G\alpha) : P\times_G F \to P\times_G F$ lif koruyan dönüşüm elde edilir.

Örnekler 16 :

1. $F = \{nokta\}$. Bu durumda $P\times_G F = B$ ve $(P\times F, q, P\times_G F, G)$ esas demeti P ile eştir.

2. F üzerinde G'nin etkisi trivial ise $\xi = (B\times F, g, B, F)$ de trivialdir. Hatta P esas demeti trivial ise ξ de trivialdir.

3. $a\in G$, $a.y = y$, G etkisi altında $y\in F$ sabit olsun. Bu durumda $j : \{y\} \to F$ içerme dönüşümü equivariantttır ve

$$\begin{array}{ccc} P\times_G \{y\} & \xrightarrow{\sigma} & P\times_G F \\ \cong\downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow[i]{} & B \end{array}$$

düzgün değişmeli diyagramını verir. Burada σ, ξ'da bir dik kesittir.

4. λ - genişlemesi: Lie gruplarının bir homomorfisi $\lambda : G \rightarrow K$ ise $a \in G$, $y \in K$ için $a.y = \lambda(a)y$ ile K üzerinde G sol etkir. Buradan $P_\lambda = (P \times_G K, g, B, K)$ demeti elde edilir.

Diğer taraftan K'nın bir çarpım dönüşümü $(P \times K) \times K \rightarrow P \times K$ sağ etkisi belirler. q üzerinde çarpan olan bu dönüşüm bir $T_\lambda : (P \times_G K) \times K \rightarrow P \times_G K$ serbest sağ etkisi verir.

T_λ'nın orbitleri açık olarak $P \times_G K$' nın lifleridir. Dolayısıyla (P_λ, T_λ) bir esas K – demetidir. Buna P'nin λ - genişlemesi denir.

5. Yapı grubunun kısaltılması: Lie gruplarının bir homomorfisi λ: $G \rightarrow K$ ve $\wp = (P, \pi, B, K)$ bir esas demet. $a \in G$' de $v(z.a) = v(z).\,\iota(a)$ şartını sağlayan, tabanda birimi veren, bir düzgün lif koruyan dönüşüm $v : P \rightarrow P$ dir. Bir $\wp = (P, \pi, B, G)$ esas demeti λ ile P' nin yapı grubu K' dan G' ye kısıtlamasıdır.

Böyle bir kısıtlamadan esas demetlerin P' den P' ye λ - genişlemesindeki bir izomorfizm elde edilir. $\wp_\lambda = (P \times_G K, g, B, K)$ nin λ - genişlemesiyle herhangi bir esas demet $\wp = (P, \pi, B, G)$ ise ν_λ: $P \rightarrow P \times_G K$ homomorfizmi P_λ' nın yapı grubunun K' dan G' ye bir kısıtlamasıdır.

2.7.4. Vektör Demetleri

Lifi R^n (reel sayılar üzerinde bir n – boyutlu vektör uzayı) ve yapı grubu GL(n; R) (genel lineer grup) ile bir lif demetine vektör demeti denir.

Tanım 70 : E ve B topolojik uzaylar, aşağıdaki şartları sağlayan bir π: $E \rightarrow B$ düzgün dönüşümü ile (E, π, B, F) dörtlüsü bir *vektör demeti* adını alır.

1. (E, π, B, F) bir düzgün lif demetidir.

2. $\forall x \in B$ için $\pi^{-1}(x) = F_x$ lifleri ve F R reel sayılar üzerinde vektör uzayı yapısındadır.

3. $\psi_{\alpha,x} : F \rightarrow F_x$ lineer izomorfizmleri ile $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ bir koordinat gösterimidir. Lif demetlerinde olduğu gibi E *toplam uzay*, B *taban uzay*ı, x üzerindeki lif $\pi^{-1}(x) = F_x$, $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times R^n$ bir koordinat fonksiyonudur.

boy F = rank $\wp$ alınır.

Bir $\wp$ vektör demetinin bir $\wp'$ altdemeti ; taban uzayı aynı , herbir F'_x lifi F_x'in bir lineer altuzayı ve toplam uzaylar arasında bir düzgün i: $E' \to E$ içerme dönüşümü ile bir vektör demetidir.

Örnekler 17 :

1. Teğet demetler düzgün vektör demetleridir.

2. F r-boyutlu reel vektör uzayı, $\pi(x,y)= x$ izdüşümü ile B üzereindeki r ranklı trıvyal demet $\wp=(B\times F,\pi,B,F)$ dir ve $B\times F$ veya $\in^r$ ile gösterilir.

3. $\wp=(E,\pi,B,F)$ bir vektör demeti, $O\subset B$ bir açık alt manifold, $\wp\,|_O$ kısıtlaması, $\pi_O\,|\,\pi^{-1}(O)$ ile $\wp\,|_O=(\pi^{-1}(O),\pi_O,O,F)$ dir.

2.7.5. Birleşmeli Vektör Demetleri

F sonlu boyutlu (reel veya kompleks) vektör uzayı ve G' nin F' de bir temsili S olsun. Bu durumda $P\times_G F$ bir vektör demetidir.

Her bir $x\in B$, $z\in\pi^{-1}(x)$ ' de $q_z : F \xrightarrow{\cong} F_x$ difeomorfizmleri ile $a\in G$' de $q_{z.a} = q_z \circ S(a)$ bağıntısı vardır. Her bir S (a) bir lineer izomorfizm olduğundan, q_z lineer izomorfizmleri için F_x' de bir tek lineer yapı vardır. F_x' deki sıfır vektör $z\in\pi^{-1}(x)$ ' de $O_x= q\,(z,o)$ ile verilir.

Œ için $\{(U_\alpha, V_\alpha)\}$ koordinat temsilinin her bir $\varphi_{\alpha,x}$' i bir lineer izomorfizmdir. Dolayısıyla $\{(U_\alpha , V_\alpha)\}$ vektör demeti koordinat temsili ile Œ bir vektör demetidir. q liflerde izomorfizme kısıtlandığı için $(P\times F, \pi_P, P, F)$ tirivial demettir.

Bir H vektör uzayında G' nin bir temsili ile $\alpha : F \to H$ bir equivariant lineer dönüşüm ise her bir lifte $\iota \times_G \alpha : P\times_G F \to P\times_G H$ lineerdir ve bir (güçlü) demet dönüşümüdür.

F ve H' a karşılık vektör demetleri ξ , η ve $F \oplus H$, $F \otimes H$, $L(F; H)$, F^*, ΛF uzaylarında G'nin indirgenmiş temsillerini düşünelim. Bu temsillere karşılık birleşmeli vektör demetleri sırasıyla $\xi \oplus \eta$, $\xi \otimes \eta$, $L(\xi; \eta)$, ξ^*, $\Lambda\xi$ 'dır. Bu vektör uzayları arasında çeşitli kanonik dönüşümler

Evaluation : $L(F; H) \otimes F \to H$

Composition : $L_F \otimes L_F \to L_F$

Projeksiyon : $L_F \oplus H \to F$

Trace : $L_F \to R$

G' nin temsilleri ile değişmelidir. Dolayısıyla vektör demetleri arasındaki şu dönüşümleri verirler.

Evaluation : $L(\xi : \eta) \otimes \xi \to \eta$

Composition : $L_\xi \otimes L_\xi \to L_\xi$

Projection : $\xi \oplus \eta \to \xi$

Trace : $L_\xi \to \acute{S}(B)$.

Lemma 13 : $a \in B$, $z \in F_a$ için $V_z(E) =$gör $(dj_a)_z$ dir.

$V_E \subset T_E$ altkümesi $\quad V_E = \bigcup_{z \in E} V_z(E)$

olarak belirlenir. T_E teğet demetinin bir V_E alt demetine *dikey alt demet* denir. (E, π, B, F) için bir koordinat temsili $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ ise

$$
\begin{tikzcd}
TU_\alpha \times T_F \arrow[r, "d\psi_\alpha"] \arrow[d] & T\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[d] \\
U_\alpha \times F \arrow[r, "\psi_\alpha"'] & \pi^{-1}(U_\alpha)
\end{tikzcd}
$$

değişmeli diyagramından

$$
\begin{tikzcd}
U_\alpha \times T_F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\cong"] & V_E|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \arrow[d] \\
U_\alpha \times F \arrow[r, "\cong", "\psi_\alpha"'] & \pi^{-1}(U_\alpha)
\end{tikzcd}
$$

değişmeli diyagramı elde edilir.

T_E'nin bir alt manifoldu V_E ve boy $V_E = n+2r$ dir. $dj_a : T_{F_a} \to T_E$ dönüşümleri liflerde lineer izomorfizm veren $dj_a : T_{F_a} \to V_E$ demet dönüşümleri olarak düşünülebilir.

(E, π, B, F) bir başka lif demeti ve $\varphi : E \to E$ lif koruyan dönüşüm ise $d\varphi$ bir $(d\varphi)_v : V_E \to V_E$ demet dönüşümüne kısıtlanır.

E üzerinde bir Z vektör alanına, $\forall z \in E$ için Z(z) vektörü dikey veya denk olarak $Z \sim 0$ ise diktir denir.

$\forall z \in E$ için Z(z) dik ise E'de Z vektör alanı diktir.

$\forall z \in E$ için $Z \sim 0$ ise E'de Z vektör alanı diktir.

Z_1 ve Z_2 dik vektör alanlarının Lie çarpımı yine diktir.

$Z_1 \sim 0$ ve $Z_2 \sim 0$ ise $[Z_1, Z_2] \sim 0$ dır. Dolayısıyla bir dik vektör alanı, £ (E) Lie cebirinin bir $£_V$ (E) alt cebirini oluşturur.

Diğer taraftan, dik vektör alanları V_E 'de dik kesitler olduğundan, $£_V$ (E), Ś (E) halkası üzerinde sonlu üretilmiş modüldür.

Tanım 71 : M ve N düzgün manifoldlar olsun. $\pi : M \to N$ dönüşümü N'de M'nin bir bölüm manifoldunu belirler. Dolayısıyla herbir $(d\pi)_x$ örtendir.Dolayısıyla da $\Lambda(d\pi)_x$ örtendir.Buradan $\Lambda(d\pi)_x^* : \Lambda T_x(M)^* \leftarrow \Lambda T_{\pi(x)}(N)^*$ dual dönüşümleri birebirdir. Dolayısıyla $\pi^* : A(M) \leftarrow A(N)$ birebirdir.

2.8. Esas Demette Bağ

$\wp=(P,\pi,B,G)$ esas demetinde G'nin P üzerindeki sağ etkisinden, G'nin T_P teğet demetindeki bir dT sağ etkisi elde edilir. $a \in G$, $\varphi \in T_P$ için $dT(\varphi, a) = (dT_a)\varphi$ olarak alınır. $a \in G$, $\pi \circ \tau_a = \pi$ eşitliğinden $d\pi \circ dT_a = d\pi$'dir. Dolayısıyla V_P dik altdemeti dT'ye göre invaryanttır.

Tanım 72 :

(i) $V^2=V$.

(ii) $z \in P$, gör $V_z = V_z(P)$.

(iii) V equivaryanttır.Yani $a \in G$'de $dT_a \circ V = V \circ dT_a$'dır.

Şartlarını sağlayan bir $V : T_P \to T_P$ güçlü demet dönüşümüne $\wp$de bir *esas bağ* denir.

Burada;

(1) $z \in P$'de $V_z(P)$ lifi ile V_P dikey demettir.

(2) Bir V esas bağı , $z \in P$'de $V_z : T_z(P) \to V_z(P)$ lineer bağına kısıtlanır.

Örnek 18 : $P = B \times G$ trivyal demeti için $B \times T_G$ dik altdemet ve V bir bağ olmak üzere $\varphi \in T_z$, $\theta \in T_a(G)$ ile $V(\varphi, \theta) = (0, \theta)$ 'dır. Her esas demetin bir esas bağı vardır.

2.8.1. Bağ İle Yatay Altdemet

$z \in P$, çek $V_z \subset T_z(P)$ altuzayları τ_P 'nin bir H_P altdemetinin lifleridir. H_P yatay altdemeti ile $\tau_P = H_P \oplus V_P$ 'dir. Bu demete *bağ ile birleşmeli yatay demet*, liflerine de *yatay altuzaylar* denir ve $H_z(P)$ ile gösterilir.H_P yatay altdemeti G etkisine göre invaryattır. Hatta $V \rightarrow H_P$ dönüşümü esas bağlar ve G- invaryant yatay demetler arasında 1-1 örtendir.

Örnekler 19 :

(1) $P = B \times G$ trivyal demetinin $B \times T_G$ dik altdemeti ve $\varphi \in T_z$, $\in T_a(G)$ 'de $V(\varphi, \theta) = (0, \theta)$ esas bağı ile yatay altdemet $H_P = T_B \times G$ 'dir.

(2) P'de bir Riemannian metriği $a \in G$, $dT_a : T_P \rightarrow T_P$ demet dönüşümlerinin tümü izometriler olacak şekilde alınıyor.Bu durumda $H_P = V_P^{\perp}$ bir G-kararlı yatay altdemettir. Esas bağ $\forall z \in P$'de $T_z(P) \rightarrow V_z(P)$ ortogonal projeksiyonudur. $\wp$'de birV esas bağı ve H_P yatay altdemeti alınsın. H : $\iota\text{-}V : T_p \rightarrow H_P$ projeksiyonunun çekirdeği V_P'dir. V ve H güçlü demet dönüşümleri olduğundan $z \in P$, $Z \in £(P)$ 'de

$V_* : £(P) \rightarrow £(P)$ ve $H_* : £(P) \rightarrow £(P)$

$(V_*Z)(z) = V(Z(z))$ ve $(H_* Z)(z) = H(Z(z))$.

H_P'deki dikkesitlere *yatay vektör alanı* denir. Yatay vektör alanları modülü $£_H(P)$ ile gösterilir. Lie parantezi işleminde invaryant değildir. $\tau_B = H_P \oplus V_P$ parçalanışından $Z \rightarrow (H_*Z, V_*Z)$ ile belirli $£(P) = £_H(P) \oplus £_V(P)$ direkt parçalanışı elde edilir. V operatörü, G'nin etkisine göre equivaryant olduğundan H'da equivaryanttır. $a \in G$, H_* ve V_* izomorfizmlerle değişmelidir. $(T_a)_*$: $£(P) \rightarrow £(P)Z$ invaryant ise H_*Z ve V_*Z'de invaryanttır. Dolayısıyla yukarıdaki direkt parçalanış $£_H^I(P) = £^I(P) \oplus £_H(P)$ ve $£^I(P)' = £^I(P) \oplus £_V(P)$ ile $£^I(P) = £_H^I(P) \oplus £_V^I(P)$ direkt parçalanışına kısıtlanır. Ś(B)-modüllerinin $\pi_* : £^I(P) \rightarrow £(B)$ örten homomorfizminde çek $\pi_* = £_V^I(P)$ oldduğundan π_* bir $\pi_* : £_H^I(P) \rightarrow £(B)$ izomorfizmine kısıtlanabilir. $\lambda : £(B) \rightarrow £_H^I(P)$ ters izomorfizmine V esas bağı için yatay kaldırma izomorfizmi denir.

Önerme 14 : $X_1, X_2 \in £(B)$ ile kaldırma izomorfizminde

$\lambda([X_1, X_2]) = H_*([\lambda X_1, \lambda X_2])$'dır.

İspat: $X_1, X_2 \in £(B)$, $\pi_*\lambda([X_1,X_2])-[X_1,X_2]=0$ olduğundan $\pi_*\lambda([X_1,X_2]) = [X_1,X_2] = [\pi_*\lambda X_1, \pi_*\lambda X_2] = \pi_*([X_1,X_2])$ 'dır.

Dolayısıyla $\lambda([X_1,X_2])$ - $[\lambda X_1, \lambda X_2]$ dikeydir. Buradan $\lambda([X_1,X_2]) = H_*\lambda([X_1,X_2]) = H_*([\lambda X_1, \lambda X_2])$.□

2.8.2. Bağ Formu

$\wp$ esas demetinde $V : T_P \rightarrow T_P$ bir esas bağ, $P \times E \rightarrow V_P$ bir güçlü demet izomorfizmi vardır. Bu izomorfizmin tersi ve V ile bir $\alpha : Tp \rightarrow P \times E$ güçlü demet dönüşümü oluşur. $z \in P$, $h \in E$ ile $(z,h) \rightarrow Zh(z) = (dAz)e(h)$ $P \times E \xrightarrow{\cong} V_P$ tanımlıdır.

$\theta \in T_z(P)$ için $\alpha(\theta) = (z, (dA_z)_e^{-1} V_z \theta)$ 'dir. Dolayısıyla, w P'de bir E-değerli 1-formu için $w(z;\theta) = (dA_z)^{-1}{}_e (V_z\theta)$.

Tanım 73 : Yukarıdaki w'ya *V ile birleşmeli bağ formu* denir.

P üzerindeki her E-değerli f fonksiyon bir Z_f dik vektör alanı belirler. $Y \in £(P)$ ve $w(Y)$ fonksiyonu ile w'nin tanımından $Z_{w(Y)} = V_* Y$ 'dir. $w(Y)=0 \Leftrightarrow Y$ yataydır.

Önerme 15 : Bağ formu şu özellikleri sağlar:

(i) $h \in E$, $i(h)w = h$.

(ii) $a \in G, T_a^* w = (Ad\ a^{-1})w$.

Tersine $\sigma \in A^I(P;E)$ bu şartları sağlıyor ise $\wp$'de bir tek esas bağ, kendisi bağ formu olcak şekilde mevcuttur. w, G'nin adjoint temsiline göre equivaryanttır.

İspat : Yukarıda bahsedilenlerle V bir esas bağ, $w \in A^1(P;E)$ olsun.

(i) $z \in P$, $h \in E$ $(i(h)w)(z) = w(z; Z_h(z)) = (dA_z)^{-1}(dA_z)h = h$.

(ii) $T_a \circ A_z = A_{z.a} \circ \tau_{a^{-1}}$ olduğundan $a \in G$, $dT_a \circ (dA_z)_e = (dA_{z.a})_e \circ Ada^{-1}$. V-equivaryant olduğundan $a \in G$, $z \in P$, $\psi \in T_z(P)$ için $w(z.a; (dT_a)\psi) = (Ada^{-1})\psi(z;\psi)$'dır.

Tersine ρ, P üzerinde E değerli bir 1-form olsun. Yukarıdaki şartları sağlasın. Buradan herbir $\rho(z)$: $T_z(P) \to E$ bir lineer dönüşümdür. $z \in P$'de V: $T_P \to T_P$ $V(z) = (dA_z)_e o\rho(z)$ olarak alınan dönüşümle V, ρ'yu veren tek esas bağdır. □

Sonuç 3 : $h \in E$'de bağ formu şu bağıntıları sağlar:

$i(h)w = h$ ve $\theta(h)w = -(adh)\, w$.

P'de E değerli bir ρ 1-formu bu bağıntıları sağlasın G bağlantılı olsun. Bu durumda ρ P'de bir 1-formdur.

İspat: Önceki önermelerin bir sonucu olarak görülür. □

2.9. Esas Demette Eğrilik

℘ esas demetinde bir esas bağ V olsun. Karşılık gelen bağ formu w , yatay dönüşüm H^* ve kovaryant dış türev ∇ alınıyor. Buradaki kovaryant dış türev V bağı ile birleşmeli H^* yatay dönüşüm ile şöyle tanımlıdır (A(P;W) vektör değerli dif.formlar uzayı):

Tanım 74 : Bir V esas bağı ile birleşmeli ∇ kovaryant dış türevi, $\nabla = H^* o\delta$ olarak verilen bir $\nabla : A(P;W) \to A(P;W)$ lineer dönüşümüdür. $A_B(P;W)$ temel formlar uzayı kovaryant dış türeve göre invaryanttır.

2.9.1. Eğrilik

V bağının Ω eğrilik formu P üzerinde E-değerli $\Omega = \nabla_\omega$ 2-formu olarak verilir.

Önerme 16 : Eğrilik formu şu özelliklere sahiptir:

(1) $h \in E$, $i(h)\Omega = 0 \Rightarrow \Omega$ yatay.

(2) $a \in G$, $T_a^*\Omega = (Ad\, a^{-1})\Omega \Rightarrow \Omega$ equivaryant.

(3) Y_1 , $Y_2 \in £_H(P)$ yatay vektör alanları $\Rightarrow$ $V_*([Y_1, Y_2]) = -Z_{\Omega(Y, Y)}$ dir.

Burada Z_f , $f \in Ś(P;E)$ ile üretilen dikey vektör alanıdır

İspat: (1) açık, (2) bağ formunun özelliklerinde belirtildi. Y_1, Y_2 yatay olduğundan $w(Y_1) = w(Y_2) = 0$'dır. Dolayısıyla $\Omega(Y_1,Y_2) = \delta w(Y_1,Y_2) = -w([Y_1,Y_2])$. $Y \in £(P)$, $V_* Y = Z_{w(Y)}$ 'den dolayı (3) görülür.

Sonuç 4 : Eğrilik sıfırdır ancak ve ancak herhangi iki yatay cisminin Lie çarpımı yataydır.

İspat: Bakınız [1].

E'deki Lie çarpımıyla bir reel bilineer dönüşüm

$[\ ,\ ] : A(P;E) \times A(P;E) \longrightarrow A(P;E)$

alınır. $[w,w] \in A^2(P;E)$ diferensiyel formu, $\varphi_1, \varphi_2 \in T_z(P)$ için

$[w,w](z; \varphi_1, \varphi_2) = 2[\ w(z; \varphi_1), w(z; \varphi_2)]$

olarak alınır.

Önerme 17 : Eğrilik formu için;

(1) $\Omega = \delta w + \frac{1}{2}[w,w]$ (Maurer-Cartan yapı denklemi)

(2) $\nabla \Omega = 0$ (Bianchi eşitliği)

sağlanır.

İspat: Bakınız [1].

Sonuç 5: $f \in \acute{S}_I(P;W) \Rightarrow \nabla^2 f = \Omega(f)$'dir.

2.10. $\wp$ Esas Demetinde Weil Homomorfizmi

$\wp$ esas demetinde, V esas bağ olsun. Bağ formu w, eğrilik formu Ω, yatay izdüşüm H*, dıştürev ise ∇ alınacak.

2.10. 1. Çoklineer Fonksiyonlar

$h_1, \ldots, h_k \in E$, $\Gamma \in \otimes^k E^*$ E'de reel değerli k-lineer fonksiyon,

$\Gamma(h_1, \ldots, h_k) = \langle \Gamma, h_1 \otimes \ldots \otimes h_k \rangle$

veriliyor. Dolayısıyla

$$\Gamma_* : A(P;E) \times \ldots \times A(P;E) \longrightarrow A(P)$$

dönüşümü belirlenir. $\psi_1, \ldots, \psi_k \in A(P;E)$ 'lerle

$$\Gamma(\psi_1, \ldots, \psi_k) = \Gamma_*(\psi_1, \ldots, \psi_k)$$

'dan dolayı Γ_* basitce Γ alınır.

Lemma 18: $\Gamma_1 \in \otimes^p E^*$, $\Gamma_2 \in \otimes^q E^*$ ve $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 \in \otimes^{p+q} E^*$, $\psi_i \in A(P;E)$, $i = 1,\ldots,p+q$ için

$$(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2)(\psi_1, \ldots, \psi_{p+q}) = \Gamma_1(\psi_1, \ldots, \psi_p) \wedge \Gamma_2(\psi_{p+1}, \ldots, \psi_{p+q}) \tag{30}$$

2.10.2. γ Homomorfizmi

E^* üzerindeki $\vee E^*$ simetrik cebiri ile $\gamma : \vee E^* \longrightarrow A(P)$ homomorfizmini yazalım.

P üzerindeki eğrilik formu E değerli bir 2-formdur. Bir $\Gamma \in \otimes^p E^*$ lineer dönüşümü için $\beta(\Gamma) = \Gamma(\Omega, \ldots, \Omega)$ ile $\beta : \otimes E^* \longrightarrow A(P)$ tanımlı olsun.

Lemma 19 :

(1) β bir cebir homomorfisidir.

(2) $\beta(\otimes^p E^*) \subset A^{2p}(P)$.

(3) $\pi_s : \otimes E^* \longrightarrow \vee E^*$ kanonik projeksiyonu $\pi_s(h_1^* \otimes \ldots \otimes h_p^*) = h_1^* \vee \ldots \vee h_p^*$ olarak alınsın. Bir $\gamma : \vee E^* \longrightarrow A(P)$ homomorfisini sağlayan π_s üzerindeki β faktörleri ile

$$\begin{tikzcd} \otimes E^* \arrow[d, "\pi_s"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ & A(P) \\ \vee E^* \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \tag{31}$$

şeması değişmelidir.

İspat: Bakınız (1).

2.10.3. γ ve β İçin Belirli Formül

Çok lineer fonksiyonların tanımı ile , $T^p(E)$ E'deki p-lineer fonksiyonların uzayı ile $\otimes^p E^*$ tanımlanır. $\Gamma \in T^p(E)$ ve $Z_i \in £(P)$ için

$$\beta(\Gamma)(Z_1,\ldots,Z_{2p}) = \frac{1}{2^p} \sum_{\sigma \in S^{2p}} \in_\sigma \Gamma(\Omega(Z_{\sigma(1)},Z_{\sigma(2)}),\ldots,\Omega(Z_{\sigma(2p-1)},Z_{\sigma(2p)})) \tag{32}$$

elde ederiz. $\beta(\Gamma)$ sadece Γ'nun simetrik parçalarına bağlıdır. $\otimes^p E^* \xrightarrow{\pi_s} \vee^p E^*$ projeksiyonu $T^p(E) \longrightarrow S^p(E)$ dönüşümüne benzer olarak

$$(\pi_s\Gamma)(h_1,\ldots,h_k) = \sum \Gamma(h_{\sigma(1)},\ldots,h_{\sigma(p)}) \tag{33}$$

dir. Diğer taraftan i_s: $S^p(E) \longrightarrow T^p(E)$ içermesi bir $\vee^p E^* \longrightarrow \otimes^p E^*$ dönüşümüne benzer olarak

$$i_s(h_1^* \vee \ldots \vee h_p^*) = \sum h_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes h_{\sigma(p)}{}^* \tag{34}$$

dir Dolayısıyla $\Gamma \in \vee^p E^*$ için $\pi_s\, i_s\Gamma = p!\Gamma$ dir. Buradan $\Gamma \in \vee^p E^*$ 'da

$$\gamma(\Gamma) = \left(\frac{1}{p!}\right)\gamma(\pi_s(i_s\Gamma)) =) = \left(\frac{1}{p!}\right)\beta(i_s\Gamma) = \left(\frac{1}{p!}\right)(i_s\Gamma)(\Omega,\ldots\Omega) \tag{35}$$

dır. $Z_i \in £(P)$ için Γ simetrik p-lineer fonksiyonu ile

$$\gamma\Gamma(Z_1,\ldots,Z_{2p}) = \frac{1}{p!2^p} \sum_{\sigma \in S^{2p}} \in_\sigma \Gamma(\Omega(Z_{\sigma(1)},Z_{\sigma(2)}),\ldots,\Omega(Z_{\sigma(2p-1)},Z_{\sigma(2p)})) \tag{36}$$

elde edilir.

2.10.4. Weil Homomorfizmi

π^*: A(B) $\longrightarrow$ A(P) dönüşümü bir π^*: A(B) $\xrightarrow{\equiv}$ $A_B(P)$ izomorfizmi olarak düşünülebilir (Burada A(P)'nin yatay ve invaryant formlarına *temel form* denir ve $A_B(P)$ ile gösterilir). $\pi^* \circ \gamma_B = \gamma_I$ olacak şekilde bir tek $\gamma_B : (\vee E^*)_I \longrightarrow H(B)$ homomorfizmi vardır ve $\delta \circ \gamma_B=0$ eşitliğini sağlar.

çek δ=Z(B), Z(B) $\longrightarrow$ H(B) projeksiyonu ile γ_B homomorfizminden bir

$$h_{\wp} : (\vee E^*)_I \longrightarrow H(B) \tag{37}$$

cebir homomorfizmi elde edilir. $h_{\wp}((\vee E^*)_I) \subset H^{2p}(B)$ 'dir. $h_{\wp}$'nin tanımlanması için sadece V esas bağı ile esas demete ihtiyaç vardır.

Teorem 20 : $h_{\wp}$ cebir homomorfizmi bağın seçiminden bağımsızdır. Dolayısıyla $\wp$ demeti için invaryanttır.

İspat : $\wp$ esas demetinde w, w_0 , w_1 esas bağlar ve Ω, Ω_0 ,Ω_1 karşılık gelen esas eğrilikler olsun. $\wp \times$ R =(P$\times$R, $\pi\times\iota$,B$\times$R ,G) esas demet, f$\in$Ś(R) fonksiyonunda f(t)=t olsun.Bu durumda P$\times$R üzerinde

$w=w_0 \times (1-f)+w_1 \times f$

E-değerli 1-formu bir bağ formudur. $z\in P$, $x \in B$, (ν=0,1)

$j_0 (z) = (z,0)$ $\qquad$ $j_1 (z) = (z,1)$

$i_0 (x) = (x,0)$ $\qquad$ $i_1 (x) = (x,1)$

ile belirli $j_\nu : P \longrightarrow P\times R$ ve $i_\nu : B \longrightarrow B\times R$ birebirdir. Buradan j_0 ve j_1 esas demetlerin homomorfizmleridir. $j_0^* \Omega = \Omega_0$ ve $j_1^*\Omega = \Omega_1$ olduğundan $j_0^* w = w_0$ ve $j_1^* w = w_1$ 'dir. w_0 ,w_1 ve w ile tanımlı homomorfizmler $(\gamma_0)_I$, $(\gamma_1)_I$ ve γ_I olsun.

$(\gamma_0)_I = j_0^* \circ \gamma_I$ $\qquad$ ve $\qquad$ $(\gamma_1)_I = j_1^* \circ \gamma_I$

dır.Buradan $(\gamma_0)_B = i_0^* \circ \gamma_B$ ve $(\gamma_1)_B = i_1^* \circ \gamma_B$ .Dolayısıyla $h_0 = i_0^{\#} h$ ve $h_1 = i_1^{\#} h$ 'dır. Fakat i_1 ve i_0 homotopiktir. Dolayısıyla $i_1^{\#} = i_0^{\#}$ 'dır. Buradan $h_0 = h_1$ elde edilir.

Tanım 75 : $\wp$ esas demeti için $h_{\wp}$ cebir homomorfizmine *Weil homomorfizmi* denir. gör $h_{\wp}$ altcebirine H(B)'nin *karakteristik altcebiri* ve elemanlarına da $\wp$ için *karakteristik sınıf* denir.

Ayrıca;

(1) $\sum_{p} H^{2p}(B)$ değişmeli cebirinin bir ileri altcebiri gör $h_{\wp}$ 'dir.

(2) $\wp$ demetinin sıfır eğrilikli bir bağı varsa Weil homomorfizmi trivyal ve karakteristik altcebiri pozitif dereceden sıfırdır. $\wp^\wedge = (P \times G, \pi_P, P, G)$ çarpım demetinin Weil homomorfizmi trivyaldir.

(3) G bağlantılı , E'nin $\vee E^*$ 'daki temsili θ , $(\vee E^*)_I = (\vee E^*)_{\theta=0}$, $h_1^*, \ldots, h_p^* \in E^*$ ile

$$\theta(h)(h_1^* \vee \ldots \vee h_p^*) = -\sum h_1^* \vee \ldots \vee ad(h)^* h_i^* \vee \ldots \vee h_p \tag{38}$$

dir. Dolayısıyla $h_{\wp} : (\vee E^*)_{\theta=0} \longrightarrow H(B)$ bir homomorfizmdir.

(4) G kompakt ve bağlantılı olsun. H(B) kohomoloji cebiri , $(A(B),\delta)$ dereceli diferensiyel cebiri ve $h_{\wp}$ Weil homomorfizmi ile belirlenir [1].

Teorem 21 : Aynı G yapı grubu ile $\varphi : \wp \longrightarrow \wp^\wedge$ esas demetlerin bir homomorfizmi , $\psi : B \longrightarrow B^\wedge$ bir indirgenmiş dönüşüm, $h_{\wp}$ ve $h_{\wp^\wedge}$ sırasıyla $\wp$ ve $\wp^\wedge$ demetlerinin Weil homomorfizmi olmak üzere

$$\begin{tikzcd} & H(B) \arrow[d, "\psi^\#"] \\ (\vee E^*)_I \arrow[ur, "h_{\wp^\wedge}"] \arrow[r, "h_{\wp}"'] & H(B) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

İspat: Bakınız [1].

Sonuç 5 : $h_{\wp}$'nin $(\vee^{+} E^{*})_{I}$ 'ya kısıtlanışı $h_{\wp}^{+}$, $(\vee^{+} E^{*})_{I}=\sum_{j>0} (\vee^{j} E^{*})_{I}$ için $\pi^{\#} \circ h_{\wp}^{+}=0$'dır.

İspat: $\wp^{\wedge}=(P\times G,\pi_{P},P,G)$ çarpım demetinden $\wp$'ye $T : P\times G \to P$ homomorfizmi taban manifoldlarında $\pi : P \to G$ dönüşümünü verir. $\wp^{\wedge}$ trivyal ve $\pi^{\#}\ h_{\wp}^{+} = h_{\wp}^{+} = 0$ olduğundan $h_{\wp}^{+}=0$ 'dır.

2.10.5. Bağın Değişimi

w_0 ve w_1 $\wp$'de iki bağ formu , $\theta = w_1 - w_0$ olsun. $h\in E$, θ P'de E-değerli bir esas 1-form, $a\in G$

$i(h)\theta = w_1(Z_1) - w_0(Z_h) = h-h \quad = 0$

$T_a^{*}\theta = (Ad\ a^{-1})\theta$

$\theta(h)\theta = -(adh)\theta$.

PxR 'deki bağ formu w ile $w = w_0\times 1 + \theta \times f$ yazılabilir. $\forall\ \Gamma\in(\vee^{p} E^{*})_{I}$ için $(\gamma_1)_{B}\Gamma - (\gamma_0)_{B}\Gamma = \delta\Phi$ olacak şekilde bir $\Phi\in A^{2p-1}(B)$ vardır.

Burada Φ şöyle belirlenir : $i_S : \vee^{p} E^{*} \longrightarrow \otimes^{p}E^{*}$ dönüşümü kullanılarak E'de p-lineer simetrik fonksiyonlarla $\vee^{p} E^{*}$ tanımlanır. $\Gamma\in\vee^{p} E^{*}$, $\psi_1,\ldots\psi_r\in A(P;E)$ ile

$<\Gamma, \psi_1^{k}\vee\ldots\vee\psi_r^{k}> = \Gamma<\psi_1\ldots\psi_1, \ldots, \psi_r\ldots\psi_r>$

notasyonu kullanılır.

Önerme 22 : Yukarıdaki notasyon ve hipotezle , B'deki Φ (2p-1)-formu ,

$$(\gamma_1)_{B}\Gamma - (\gamma_0)_{B}\Gamma = \delta\Phi \tag{39}$$

dir. Burada

$$\pi^{*}\Phi = \sum_{i+j+k=p-1} \frac{1}{i+2j+1} < \Gamma, \theta\vee\frac{1}{i!}(\nabla_{o}\theta)^{i}\vee\frac{1}{j!}(\frac{1}{2}[\theta,\theta])^{j}\vee\frac{1}{k!}(\Omega_0)^{k}> \tag{40}$$

İspat: Bakınız [1].

Sonuç 7 : : $\Omega_0 = 0$ eğrilikli w_0 bağı ile $\wp$ esas demetinde herhangi bir bağ formu w_1 ve $\theta = w_1 - w_0$ olsun.

$$\pi^*\Phi = \sum_{i+j=p-1} \frac{1}{p+j} < \Gamma , \theta \vee \frac{1}{i!}(\nabla_0\theta)^i \vee \frac{1}{j!}(\frac{1}{2}[\theta,\theta])^j > \quad (41)$$

olmak üzere $\Gamma \in (\vee^p E^*)_I$ için $(\gamma_1)_B\Gamma = \delta\Phi$ 'dir.

2.10.6. $h^*{}_\wp{}^*$ Homomorfizmi

B n-manifoldu üzerindeki bir $\wp = (P, \pi, B, G)$ esas demeti,

$$h_\wp : (\vee E^*)_I \longrightarrow H(B)$$

Weil homomorfizmi olsun. p>n için $H^p(B)=0$ olduğundan $h_\wp$ bir

$$h^*{}_\wp{}^* : (\vee^{**} E^*)_I \longrightarrow H(B) \quad (42)$$

homomorfizmine genişler. Açık olarak gör $h^*{}_\wp{}^*$ = gör $h_\wp$'dir.

Örnek 20 . (Homojen uzayın Weil homomorfizmi)

Bir G Lie grubunun bir H kapalı altgrubu ve bir W vektör uzayında H'ın bir gösterimi Φ olsun. $\wp = (G,\pi,G/H,H)$ esas demeti ve Φ'ye göre birleşmeli vektör demeti

Ж $=(G\times_H W, \delta, G/H, W)$

olsun. G ve H'ın Lie cebirleri E ve F olsun. E'nin bir parçalanışı H etkisinde $F \oplus F_1 = E$ olsun. Burada p: E $\longrightarrow$ F projeksiyonunun çekirdeği F_1'dir. $h,k \in F_1$ olmak üzere Ω eğriliği

$$\Omega(e;h,k) = -p([h,k])$$

ile $\wp$'de bir G - invaryant esas bağı belirlenebilir. Bu esas bağ Ж 'da bir $\nabla_Ж$ lineer bağı belirler. Esas bağ G - invaryant olduğundan , G'nin $G\times_H W$'daki doğal etkisi bağ koruyan demet dönüşümleridir.

$\nabla_{Ж}$ lineer bağının R eğriliği $G\times_H L_W$ demetinde değer alır ve G'nin etkisi altında invaryanttır. Dolayısıyla R tamamiyle $R(\bar{e})\in\wedge^2\Gamma_{Ж}(G/H)^*\otimes L_W$ ile belirlenir.

$(\Phi')_*(\Omega_p) = (q_F)^\#(R)$ ve $R(\bar{e};(d\pi)h,(d\pi)k) = -\Phi'(p([h,k]))$

elde edilir. Buradan $h_{Ж}$ homomorfizmi şöyle tanımlanır: $\Gamma\in(\vee^p L^*_W)_I$ ise $h_i\in F_1$ olmak üzere $h_{Ж}(\Gamma)$, tek türlü belirli $\psi\in A^{2p}_I(G/H)$ diferensiyel formuyla belirlidir ve şu eşitliği sağlar:

$$(\pi^*\psi)(e;h_1,\dots,h_{2p}) = \frac{(-1)}{2p!}\sum \in\Gamma(\Phi'(p[h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)}],\dots,\Phi'(p[h_{\sigma(2p-1)},h_{\sigma(2p)}]\,)). \qquad (43)$$

2.10.7. Demet Değerli Diferensiyel Formlar

$\wp=(M,\pi,B,F)$ ve $\wp'=(N,\rho,B,H)$ reel vektör demetleri olsun. Bir manifold üzerindeki diferensiyel formların bir vektör demetindeki diferensiyel formlara dönüşümünü inceleyelim:

B'nin teğet demeti τ_B, x'deki lifi $T_x(B)\times\dots\times T_x(B)\to F_x$ eğri-simetrik p-lineer dönüşümleri içeren $A^p(\tau_B;\wp)$ demetini düşünelim. B üzerindeki bir Ω $\wp$-değerli p-formu $A^p(\tau_B;\wp)$ demetinde bir dikkesittir. $\forall x\in B$ noktasında bir $\Omega(x): T_x(B)\to F_x$ eğri simetrik p-lineer dönüşümleri vardır. B üzerindeki $\wp$-değerli p-formlar Ś(B) halkası üzerinde bir $A^p(B;\wp)$ modülü oluşturur, $A^p(B;\wp) = \mathrm{Sec}\,A^p(\tau_B;\wp)$ 'dır. Dolayısıyla $A^0(B;\wp) = \mathrm{Sec}\,\wp$ 'dır.

$\wp$ bir trivyal demet ($M=B\times F$) ise bir $\wp$-değerli p-formu F vektör uzayında değer alan B üzerinde bir p-formudu, $A^p(B;\wp) = A^p(B;F)$.

$$A(B;\wp)=\sum_{p=0}^{n} A^p(B;\wp) \qquad (44)$$

A(B) dereceli cebiri üzerinde $A(B;\wp)$ bir dereceli sol modüldür. Çarpım işlemi $\Phi\in A^p(B)$, $\Omega\in A^q(B;\wp)$, $x\in B$, $h_i\in T_x(B)$ için

$$(\Phi\wedge\Omega)(x;h_1,\dots,h_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\sigma\in S^{p+q}}\in_\sigma \phi(x;h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(p)})\Omega(x;h_{\sigma(p+1)},\dots,h_{\sigma(p+q)}) \qquad (45)$$

olarak tanımlıdır.

Lemma 23 : $\varphi : \wp \to \wp'$ bir demet dönüşümü , liflerde $\psi : B \to B'$ izomorfizmine kısıtlanıyor olsun . $\wp$, $\wp'$ demetlerinin dualleri $\acute{K}$, $\acute{K}'$ olsun. $\Omega^* \in A(B';\acute{K}')$ ve $\Omega \in A(B';\wp')$ için $<\varphi^*\Omega^*, \varphi^*\Omega> = \psi^*<\Omega^*,\Omega>$.

İspat: $\Phi,\psi \in A(B')$, $\rho \in Sec\acute{K}'$, $\rho \in Sec\wp'$ olmak üzere $\Omega^*=\Phi\Lambda\rho^*$ $\Omega=\psi\Lambda\rho$ olsun.

$$x \in B,\ <\varphi^*\rho^*,\varphi^*\rho>(x) = <\varphi^*_x(\rho^*(\psi(x))),\varphi^{-1}_x(\rho(\psi(x)))>$$
$$= <\rho^*(\psi(x)),\rho(\psi(x))>$$
$$= (\psi^*<\rho^*,\rho>)(x).\square$$

2.10.7.1. Lineer Bağlar

Tanım 76: Bir $\wp$ demetinde bir *lineer bağ* $f \in \acute{S}(B)$, $\rho \in Sec\wp$ için $\nabla(f.\rho)=\delta f\Lambda\rho + f.\nabla\rho$ olarak tanımlı ∇: $Sec\wp \to A^1(B;\ \wp)$ bir Γ-reel lineer dönüşümdür.

B üzerindeki her X vektör alanı için $Sec\wp$'deki bir ∇_X operatörü

$$\nabla_X = i(X)\circ\nabla \tag{46}$$

olarak verilir.

Örnekler 21 :

1. $\wp$ trivyal olsun : ($M=B\times F$), $A(B;\wp)=A(B;F)$ 'dir. Bu durumda

$$\delta : \acute{S}(B;F) \to A^1(B;F) \tag{47}$$

dış türevi $\wp$'de bir lineer bağdır ve *standart bağ* adını alır.

2. Teğet demet: Bir M manifoldundaki bir lineer bağ, τ_B teğet demetinde bir ∇ lineer bağdır. Böyle bir bağ veridiğinde bir S: $\pounds(B)\times\pounds(B) \to \pounds(B)$ dönüşümü

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{48}$$

olarak alınabilir, bir τ_B-değerli 2-formdur: $S \in A^2(B;\tau_B)$ ve ∇'nın torsiyonu olarak adlandırılır.

Önerme 24 : Her $\wp$ vektör demetinin bir lineer bağı vardır.

İspat: Bakınız [1].□

Örnekler 22 :

1. $\wp$'nin duali $\wp^*$ olsun. $\wp^*$'da bir tek ∇^* lineer bağı $\rho^* \in Sec\wp^*$, $\rho \in Sec\wp$,

$$<\nabla^*\rho^*,\rho> + <\rho^*,\nabla\rho> = \delta<\rho^*,\rho> \tag{49}$$

olarak tanımlıdır. ∇^*'a ∇'nın duali denir.

2. Whitney Toplamı : $\wp \oplus \wp'$ demetindeki bir $\nabla_{\wp} \oplus \nabla_{\wp'}$ lineer bağı $\rho \in Sec\wp$, $\rho' \in Sec\wp'$ için

$$(\nabla_{\wp} \oplus \nabla_{\wp'})(\rho \oplus \rho') = \nabla_{\wp}\rho \oplus \nabla_{\wp'}\rho' \tag{50}$$

olarak verilir. $\nabla_{\wp}$ ve $\nabla_{\wp'}$ 'nin direkt toplamı adını alır. $\wp$ ve $\wp''$da $\nabla_{\wp}$ ve $\nabla_{\wp'}$'ya dual bağlar $\nabla_{\wp 1}$ ve $\nabla_{\wp' 1}$ ise $\nabla_{\wp 1} \oplus \nabla_{\wp' 1}$ bağı $\nabla_{\wp} \oplus \nabla_{\wp'}$ 'na dualdir.

2.10.7.2. Eğrilik

$\pounds(B) \times \pounds(B) \times \acute{S}ec\wp \to \acute{S}ec\wp$ dönüşümü

$$(X,Y,\rho) \to (\nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\rho \tag{51}$$

olarak verilir. $\acute{S}(B)$ üzerinde trilineer bir dönüşümdür. Dolayısıyla

$$R(X,Y)(\rho) = (\nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\rho \tag{52}$$

eşitliğini sağlayan bir tek $R \in A^2(B;L_{\wp})$ 2-formu vardır ve ∇ *lineer bağının eğriliği* adını alır.

Önerme 25 : Eğrilik formu aşağıdaki bağıntıları sağlar:

(1) $\psi \in A(B;\wp)$, $\nabla^2\psi = R(\psi)$ ve

(2) $\lambda_{\wp}$'deki bağ ∇' ise $\nabla' R = 0$ (Bianchi eşitliği).

İspat: Bakınız [1].

Örnekler 23.

1. Dual demetler: $x \in B$, $\alpha \in L_{Fx}$, $\alpha \to \alpha^*$ olarak tanımlı bir $L_{\wp} \to L_{\wp^*}$ güçlü demet dönüşümü olsun. $\Omega \to \Omega^*$ olrak tanımlı $A(B;L_{\wp}) \to A(B;L_{\wp^*})$ dönüşümü vardır. Bu durumda ∇'ya dual $\wp^*$'da ∇^* bağı için eğrilik $R_{\wp^*} = -(R_{\wp})^*$ 'dır.

2. Whitney toplam ve tensör çarpım : $\wp$ ve $\wp'$'nin lineer bağları $\nabla_{\wp}$ ve $\nabla_{\wp'}$, ve eğrilikleri $R_{\wp}$ ve $R_{\wp'}$ olsun.Bu durumda $\wp \oplus \wp'$ ve $\wp \otimes \wp'$'daki eğrilikler

$R_{\wp \oplus \wp'} = R_{\wp} \oplus R_{\wp'}$ ve $R_{\wp \otimes \wp'} = R_{\wp} \otimes 1_{\wp'} + 1_{\wp} \otimes R_{\wp'}$

olarak alınır.

Bir Bağ İçin Yatay Dönüşüm

$\wp = (M,\pi,B,F)$ reel vektör demetinde τ_M'nin V_M yatay altdemeti $z \in M$ noktasındaki lifidir ve $V_z(M) = \text{çek}(d\pi)_z$ yazılır. $(d\pi)_z : T_z(M) \to T_{\pi z}(B)$ lineer dönüşümleri bir $d\hat{\pi} : \tau_M \to \pi^*(\tau_B)$ güçlü demet dönüşümü ve güçlü demet dönüşümlerinin bir

$$O \to V_M \to \tau_M \xrightarrow{d\hat{\pi}} \pi^*(\tau_B) \to O \tag{53}$$

dizisi $\forall z \in M$'de bir kısa tam dizidir. $z \in M$, $\gamma_z : T_{\pi z}(B) \to T_z(M)$ lineer dönüşümlerinin bir ailesi $\gamma : \pi^*(\tau_B) \to \tau_M$ güçlü demet dönüşümüne $d\hat{\pi} \circ \gamma = 1$ ise, $\wp$ için bir *yatay form* adı verilir.

$\wp$ için bir yatay dönüşüm γ ise $z \in M$'de $T_z(M) = \text{gör}\gamma_z \oplus V_z(M)$ 'dir. Dolayısıyla $\text{gör}\gamma_z$ altuzayları τ_M'nin bir H_M yatay altdemetinin lifleridir. Şimdi $\wp$'de bir ∇ lineer bağının bir yatay dönüşüm belirlediğini gösterelim: $\forall z \in Sec\,\wp$ bir $(x \in B)$, $(d\pi)_x : T_x(B) \to T_{\rho(x)}(M)$ lineer dönüşümleri belirler. $j_x : F_x \to M$ içerme dönüşümünden $F_{\pi z} = T_z(F_{\pi z})$ ve bir $(dj_{\pi z})_z$ 'ı bir lineer izomorfizm olarak $w_z : F_{\pi z} \xrightarrow{\cong} V_z(M)$ tanımlanır. Buradan $\wp$'da bir lineer bağ ∇ ise $\forall \rho \in Sec\,\wp$ $(w \circ \nabla_\rho)_x(h) = w_{\rho(x)}(\nabla\rho(x;h))$ olarak verilen $(w \circ \nabla\rho)_x : T_x(B) \to V_{\rho(x)}(M)$ lineer dönüşümlerini belirler.

Önerme 16 : $\wp$'de bir lineer bağ ∇ olsun. $\wp$ için $x \in B$, $\rho \in Sec\,\wp$ $\gamma_{\rho(x)} = (d\rho)_x - (wo\nabla_\rho)_x$ olacak şekilde birtek γ yatay dönüşüm vardır.

İspat: Bakınız [1].

Tanım 77 :γ'ya ∇ ile birleşmeli yatay dönüşüm denir. Bu durumdaki H_M yatay demetine ∇ lineer bağı ile *birleşmeli yatay altdemet* adı verilir.

$T_M = H_M \oplus V_M$ parçalanışı $k : T_M \rightarrow V_M$ ∇ ile *birleşmeli dikey dönüşüm* adı verilir.

2.11. Homojen Uzaylar

E Lie cebiri ile bir G Lie grubu alınmış olsun. $K \subset G$ bir kapalı altgrup, G/K sol bölüm grubunun elemanları $a \in G$ ile aK formundadır ve G'nin bir altgrubudur.a $\to$aK projeksiyonu bir

$\pi : G \to G/K$

düzgün dikkesit belirler. Böylece bir esas lif demetidir. ($\pi(e)=\bar{e}$ alınır) Bu G/H manifoldunu bir *(düzgün) homojen uzay* denir.

Teorem 27 : G bir Lie grup, H bir kapalı altgrubu olsun.G/H homojen uzayı üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek düzgün yapı vardır:

(1) $\pi : G \to G/H$ projeksiyonu düzgündür;

(2) Herhangi bir M düzgün manifoldu için bir $f : G/H \to M$ dönüşümü düzgündür ancak ve ancak $f \circ \pi : G \to M$ düzgündür.

boyG/H = boyG-boyH.

İspat:Bakınız [1].

Sonuç 6: Teorem 27 de (2) şartı " (2) ′ $\pi : G \to G/H$ 'ın bir yerel dikkesiti vardır" ile değiştirdiğimizde teorem sağlanır.

İspat : Bir önceki teoremden açıkca görülür.

Sonuç 7 : $\pi : G \to G/H$ bir düzgün esas H-demetidir.

İspat: π: $G \to G/H$ 'ın bir yerel dikkesiti olduğundan $(G,\pi,G/H)$ bir esas H-demetidir. Hatta burada yerel dikkesitler düzgün olduğundan, bu demet bir düzgün lif demetidir.

Homojen Uzay Üzerinde Etki

G'nin bir kapalı altgrubu ile sol bölüm gruplarının homojen uzayı G/K, G/K üzerinde G'nin bir sol etkisi $a \in G$, $x \in G/K$ için $T(a, x) = ax$ olarak tanımlıdır. G'nin kendisi üzerindeki sol etkileri ve T'ye göre $\pi : G \to G/K$ projeksiyonu equivaryanttır.

Benzer olarak sağ bölüm gruplarında G'nin bir sağ etkisi tanımlıdır.K'nın normalliyeni $N_K = \{ x \in G \mid xK = Kx \} \subset G$ ile bir sağ etki s: $G/H \times N_K \to G/K$, $x \in G$, $a \in N_K$ için $s(x, a) = xa$ ile tanımlıdır ($a \in N_K$ olduğundan s iyi tanımlıdır). Düzgünlüğü için şu tablonun değişmeli olduğu görülmelidir:

$$\begin{array}{ccc} G \times N_K & \xrightarrow{\mu} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/K \times N_K & \xrightarrow[s]{} & G/K \end{array}$$

π: $G \to G/K$ dönüşümü G'nin bir bölüm manifoldunu verir. Ayrıca diyagramdan π projeksiyonu N_K 'nın G ve G/K üzerindeki sağ etkisi ile equivaryantır.

$K \subset N_K$ kapalı normal altgrup olduğundan N_K/K çarpan grubu belirlenir. s: $G/K \times N_K \to G/K$ etkisi ve $\rho : N_K \to N_K/K$ projeksiyonu ile aşağıdaki diyagram düzgün değişmelidir:

$$\begin{tikzcd} G/K \times N_K \arrow[rr, "s"] & & G/K \\ & G/K \times N_K/K \arrow[ul, "1 \times \rho"] \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Dolayısıyla G/K homojen uzayı üzerinde N_K/K'nın bir sağ etkisi s olduğu görülmüş olur.

Sonuç 8: G bir Lie grup, H bir kapalı altgrubu olsun.M manifoldu H üzerinde etkir olsun. Bu durumda $G \times_H M$ bir düzgün manifolddur ve $G \times_H M \to G/H$ bir düzgün lif demetidir. Lifi M'dir. Ayrıca önceki sonuca göre esas H-demeti ile birleşmelidir.

İspat : Sonuç 7'den $\pi : G \to G/H$ bir düzgün esas H-demetidir. $G \times_H M \to G/H$ lif demeti π ile birleşmeli olduğundan, bu dönüşümlerin düzgünlüğünden dolayı birleşmeli demet de düzgündür ve orjinali ile eştir. □

Sonuç 9: G bir Lie grup, H bir kapalı altgrubu olsun. $\pi : G \rightarrow G/H$ projeksiyonu Lie gruplarının bir homomorfisi olduğundan G/H bir Lie grubudur.

İspat: G'deki bir çarpım dönüşümü $\alpha : G \times G \rightarrow G$ olsun. Buradan bir $\alpha^* : G/H \times G/H \rightarrow G/H$ dönüşümü ve

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \pi \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H \times G/H & \xrightarrow{\alpha^*} & G/H \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. $\pi : G \rightarrow G/H$ üzerinde düzgün yerel dikkesitler vardır. Diyagramdan α^* düzgündür. Herbir gH elemanını $g^{-1}H$ eşleyen dönüşüm de düzgündür.

Sonuç 10 : G bir Lie grup, H bir kapalı altgrubu olsun. Bu durumda G/H üzerinde G'nin etkisi düzgündür.

İspat:
$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\alpha} & G \\ id \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times G/H & \xrightarrow{\vartheta} & G/H \end{array}$$

$\pi : G \rightarrow G/H$ 'nin düzgün yerel dikkesitleri olduğundan, yukarıdaki diyagramdan φ düzgündür.

2.11.1. Demetler ve Homojen Uzaylar

$F \subset E$, E,F Lie cebirleri ile G Lie grubu ve bir K kapalı altgrubu , e G'de birim eleman , $\pi_K(e)=e$, $\wp=(P,\pi,B,G)$ ve $\wp_K=(G,\pi_K,G/K,K)$ esas demetleri ve G'nin G/K'daki sol etkisi $T : G \times G/K \rightarrow G/K$ alınıyor.

2.11.2. Homojen Uzay Lifli Demetler

R esas etkisi ile $\wp=(P,\pi,B,G)$ esas demet, G'nin G/K'daki sol etkisi ile

$$\aleph=(P \times_G (G/K),\rho,B,G/K)$$

birleşmeli demet olsun. $P\times_G(G/K)=P/K$ alınır.

$$\begin{tikzcd}
P\times G/K \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi_P"'] & P/K \arrow[d, "\rho"] \\
P \arrow[r, "\pi"'] & B
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramından $p(z)=q(z,\bar{e})$ ile $p : P \to P/K$ tanımlanır.

Önerme 28 : R esas etkisinin K'ya kısıtlanışı $(P,p,P/K,K)$ esas demetidir.
Bir G Lie grubunun bir kapalı altgrubu H olsun. $\wp=(P,\pi,B,G)$ esas demet,

$$Œ=(G\times_H H/K,\ \rho,\ G/H,\ H/K) \quad \text{ve} \quad \wp\text{^}=(G,p,\ G\times_H H/K, H/K)$$

sırasıyla birleşmeli demet ve esas demettir.

G'nin G/K üzerindeki sol etkisi faktörleri birer diffeomorfizm (H'ın sol etkilerine göre equivaryant)

$$G\times_H H/K \longrightarrow G/K \quad \text{olan} \quad G\times H/K \longrightarrow G/K$$

düzgün dönüşümüne kısıtlanır. Bu dönüşümlerle

$$Œ = (\ G/K,\ \rho, G/K, H/K) \quad \text{ve} \quad \wp = (\ G,\ p, G/K, K)$$

demetlerini belirleriz. Burada $a\in G$, $\rho(aK)=aK$ ile Œ *standart esas demettir*.

$K\subset H$ normal altgrup. H/K çarpan grubunun G/K üzerindeki bir düzgün serbest sağ etkisi; $x\in G$, $a\in\overline{H}$'da $\quad x.a=x.a \quad$ alınır. Bu etki altında H/K'nın orbitleri $Œ=(G/K,\rho,G/H,H/K)$ demetindeki liflerle eştir. Œ bir esas H/K – demettir.

Sonuç 11 : $(d\pi)_e : E \to T_e\,(G/K)$ türevinden bir $E/F \xrightarrow{\cong} T_e\,(G/K)$ lineer izomorfizmi elde edilir.

Sonuç 12 : $\pi(O)=O$, $O_a=aO=a\pi(O)$, $\sigma_a=T_a o\sigma$ olmak üzere $\forall a\in G$'de $\pi o\sigma_a=\imath$ olacak biçimde bir $\sigma_a : O_a \to G$ düzgün dönüşümü vardır.

$T(a,eK)=T_a(eK)=aeK=a.\bar{e}$ dönüşümü ile

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1\times\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G\times G/K \arrow[r, "T"] & G/K \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. G/K ,G'nin bir bölüm manifoldudur.μ düzgün olduğundan T düzgündür. $a,b\in G$, $\bar{x}\in G/K$ için

$$(ab)\,\bar{x}=a(b\bar{x}) \qquad \text{ve} \qquad e\bar{x}=\bar{x}$$

özelliklerine sahip $T : G\times G/K \xrightarrow{\ \ -\ \ } G/K$ dönüşümü G'nin G/K üzerindeki sol etkisidir. G/K bölüm uzayı, $a,b\in G$ için $\bar{\mu}(\pi(a),\pi(b))=\pi(a,b)$ çarpım işlemi ile bir gruptur. G/K G'nin bir altmanifoldudur. μ düzgündür. G/K'da ters işlem düzgündür. Dolayısıyla G/K bir Lie grubudur. K'ya göre G'nin çarpan grubu adını alır.

Önerme 29 : Lie gruplarının bir örten homomorfisi $\varphi : G \to H$, çek $\varphi=K$ olsun. $K\subset G$ bir kapalı normal altgrup ve

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/K \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Değişmeli diyagramından $\psi : G/K \to H$ dönüşümü Lie gruplarının bir izomorfizmidir.

2.11.3. Homojen Uzay Tabanlı Demetler

Bir N manifoldu üzerinde K sol etkir olsun. G'nin bir $\Lambda : G\times(G\times_K N) \to (G\times_K N)$ sol etkisi ile

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{\mu\times\iota} & G\times N \\ \iota\times q \downarrow & & \downarrow q \\ G\times(G\times_K N) & \xrightarrow[\Lambda]{} & G\times_K N \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. T ile Λ , G'nin $\wp_{Œ}$ ile birleşmeli $Œ=(G\times_K N,\rho,G/K, N)$ demeti üzerinde bir etkisidir. G toplam ve taban uzaylarında etkir. Projeksiyon equivaryanttır: $\rho\circ\Lambda=T\circ(1\times\rho)$. $N_{\bar{e}}=\rho^{-1}(\bar{e})$ olsun. $a\in K$, $a.\bar{e}=\bar{e}$ olduğundan Λ bir

$$K\times N_{\bar{e}} \longrightarrow N_{\bar{e}}$$

sol etkisine kısıtlanır.q projeksiyonu bir

$$q_e : N \xrightarrow{\cong} N_{\bar{e}}$$

K-equivaryant difeomorfizmine kısıtlanabilir.

2.11.4. Homojen Uzay Tabanlı Vektör Demetleri

Homojen uzay tabanlı demetlerin sonuçlarını vektör demetlerine uyguladığımızda : Bir N vektör uzayında K'nın herbir temsili G/K üzerinde $\wp_K$ ile birleşmeli bir vektör demeti olur.

K'nın bir temsili (veya G/K üzerinde G etkimiş bir vektör demeti) ile başlayarak yukarıdakiler ard arda uygulandığında , bir temsil (veya G etkimiş bir vektör demeti) elde edilir. Bunlar equivaryant (veya equivaryant ve güçlü) olarak orjinallerine izomorftur.

Örnekler 24 :

(1) K'nın N'deki temsili trivial ise

$$G\times_K N = G/K\times N \qquad \text{ve} \qquad Œ =(G/K\times N, \rho, G/K, N)$$

trivialdir.

(2) K'nın N'deki temsili G'nin N'deki temsiline genişler olsun. $b\in G$, $y\in N$, $\varphi(b,y) = (b, b^{-1}.y)$ ile φ, $G\times N$ 'nin bir diffeomorfizmidir. K'nın $G\times N$'deki joint etkisi Q, G'nin a ile sağ dönüşümü ρ_a, $a\in K$ ile $\varphi\circ(\rho_a\times \iota) = Q_a\circ\varphi$ elde edilir. Buradan

$$\psi : G/K\times N \xrightarrow{\cong} G\times_K N$$

bir diffeomorfizmdir. Hatta güçlü demet izomorfizmidir. $b\in G$, $z\in G/K$, $y\in N$, $\psi(b.z,b.y)=b.\psi(z,y)$'dir.

2.11.5. Bir Homojen Uzayın Teğet Uzayı

$F\subset E$,E,F Lie cebirleri ile G ve K Lie gruplardır.

$$Œ=(G\times_K(E/F), \rho_{Œ}, G/K, E/F) \qquad \text{ve} \qquad \eta= (G\times_K F, \rho_\eta, G/K,F)$$

vektör demetleri olsun. G hem Œ hem de η 'da etkir. G'nin G/K'daki sol etkisi T, G'nin $\tau_{G/K}$ teğet demetinde bir dT sol etkisini verir.

Önerme 30 : Yukarıdaki hipotez ve notasyonla,

(1) Œ, $\tau_{G/K}$'ya güçlü ve equivaryant izomorftur.

(2) $Œ\oplus\eta$ vektör demeti trivialdir.

İspat :

(1) $(d\pi_K)_e$ ile $E/F \longrightarrow T_{\bar{e}}(G/K)$ lineer izomorfizmi elde ederiz. $a\in K$, $\pi_K\circ\lambda_a=T_a\circ\pi_K$ ve $\pi_K\circ\rho_a=\pi_K$ olduğundan

$(d\pi_K)_e\circ Ad_{G,K}(a)=dT_a\circ(d\pi_K)_e$

elde ederiz. Bu izomorfizm $Ad^{\perp}$ ve dT'ye göre equivaryanttır. Homojen uzay tabanlı vektör uzaylarının özellikleri ile Œ ve $\tau_{G/K}$ arsında güçlü ve equivaryant bir izomorfizm vardır.

(2) $F \to E \to E/F$ dizisi K-equivaryant olduğundan $\eta \to G\times_K E \to Œ$ güçlü demet dönüşümlerinin bir dizisidir. $\forall z\in G/K$ için $O \to F_z \to E_z \to (E/F)_z \to O$ kısıtlaması kısa tamdır.

$p\circ\sigma = \imath$ olacak şekilde bir $\sigma : Œ \to G\times_K E$ güçlü demet dönüşümü vardır. Dolayısıyla bir güçlü demet izomorfizmi $z\in G/K$, $\varphi\in F_z$, $u\in(E/F)_z$, $\varphi(u,v)=\sigma(u)+i(v)$ ile

$\varphi : Œ\oplus\eta \to G\times_K E$

tanımlıdır.

Diğer taraftan K'nın E'de $Ad_{G,K}$ gösterimi ,G'nin bir gösteriminin bir kısıtlanışıdır. Homojen uzay tabanlı vektör demetlerinin örneği ile G/K üzerinde $G\times_K E$ trivial demettir. Dolayısıyla $Œ\oplus\eta$ trivialdir.

2.11.6. Homojen Uzayın Kohomolojisi

$\wp_K=(G,\pi,G/K,K)$ esas demet, K'nın G üzerindeki esas etkisi μ_K, $a\in K$, $g\in G$ için $\mu_K : G\times K \to G$, $\mu_K(g,a)=ga$ 'dır. Diğer taraftan G'nin G ve G/K üzerindeki sol etkileri (π equivaryant olmak üzere)

$$(g_1 , g_2) \to g_1 g_2 \qquad \text{ve} \qquad (g_1, \pi g_2) \to \pi(g_1,g_2)$$

dır. Dolayısıyla π^* bir

$$\pi^*_I : A_I(G/K) \to A_L(G)$$

homomorfisine kısıtlanabilir. Hatta $\wp_K$ bir esas demet olduğundan

$$\pi^*: A(G/K) \xrightarrow{\cong} A_B(G)$$

bir izomorfizmdir. Dolayısıyla π^*,

$$\pi_I^*: A_I(G/K) \xrightarrow{\cong} A_B(G)\cap A_L(G)$$

izomorfizmlerine kısıtlanabilir. K'nın G üzerindeki etkisi bir sağ çarpımdır. Karşılık olan esas vektör alanları $k\in F$, G üzerindeki X_K sol invaryant vektör alanlarıdır. Dolayısıyla A(G)'nin yatay ve invaryant altcebirleri

$$A(G)_{iF=0}=\bigcap_{k\in F} çek(i(X_k)) \qquad \text{ve} \qquad A(G)_{K=I}=\bigcap_{a\in K} çek(\rho_a^* - \iota)\,.$$

olarak verilir. $A_B(G)$ taban cebiri bunların kesişimidir. $\tau_L : A_L(G) \xrightarrow{\cong} \Lambda E^*$ izomorfizmi $h\in E$, $g\in G$ için $\tau_L o i(X_h) = i_E(h) 0 \tau_L$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla τ_L, $A_L(G) \cap A(G)_{iF=0} \xrightarrow{\cong} (\Lambda E^*)_{iF=0}$ ve $A_L(G) \cap A(G)_{K=I} \xrightarrow{\cong} (\Lambda E^*)_{K=I}$ izomorfizmlerine kısıtlanabilir. τ_L ve π^*_I izomorfizmleri ile

$$\begin{array}{ccccc}
A(G) & \longleftarrow & A_L(G) & \xrightarrow{\tau_L} & \Lambda E^{*0} \\
\pi^* \uparrow & & \pi_I^* \uparrow & & \uparrow k \\
A(G/K) & \longleftarrow & A_I(G/K) & \xrightarrow[\tau_L o \pi_I^*]{} & (\Lambda E^*)_{iF=0,K=I}
\end{array}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Buradan

$$\begin{array}{ccccc}
A(G) & \longleftarrow & A_L(G) & \xrightarrow{\tau_L} & \Lambda E^{*} \\
\pi^* \uparrow & & \pi_I^* \uparrow & & \uparrow k \\
A(G/K) & \longleftarrow & A_I(G/K) & \xrightarrow[\tau_L o \pi_I^*]{} & (\Lambda E^*)_{iF=0,\theta F=0}
\end{array}$$

yazılır.

Teorem 31 : Bir G kompakt bağlantılı Lie grubu ve K bir kapalı bağlantılı altgrubu olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
H(G) & \xleftarrow[\cong]{} & H_L(G) & \xrightarrow{\tau_L} & H(E)^{*} \\
\pi^* \uparrow & & \pi_I^* \uparrow & & \uparrow k_\# \\
H(G/K) & \xleftarrow{\cong} & H_I(G/K) & \xrightarrow[\tau_L o \pi_I^*]{} & H((\Lambda E^*)_{iF=0,\,,\theta F=0})
\end{array}$$

değişmeli diyagramında tüm yatay dönüşümler cebir izomorfizmidir.

2.11.7. Homojen Uzay Tabanlı $\wp_K$ Esas Demetinde Bağlar

$\wp_K$=(G,π,G/K,K) esas demetinde $\pi : G \to G/K$ düzgün dönüşümü G'nin sol etkisine göre equivaryanttır. (G,π,G/K,K) esas demeti için G-invaryant esas bağları araştıralım.

V bir G-invaryant esas bağ olsun. e'deki dikey uzay $V_e(G)$ = çek $(d\pi)_e$ = F olarak verildiğinden V'nin E'ye V_e kısıtlanışı bir $V_e : E \to F$ projeksiyonudur. Hatta V bir G-invaryant esas bağ olduğundan a∈K için $Ad(a) \circ V_e = L_a \circ R_a^{-1} \circ V_e = V_e \circ Ad(a)$' dır.

Özel olarak a∈K için Ad(a) operatörüne göre çekV_e kararlıdır ve e'deki yatay altuzaydır. Böylece bağdan bir yatay altuzay elde edilmiş olur.

Önerme 32 :

$\alpha : V \to$ çek V_α dönüşümü G-invaryant esas bağlar kümesinden E'nin F'yi bütünleyen K-kararlı altuzaylarının kümesine bir birebir-örtendir.

İspat:

çekV_e = F = çek$W_e$olacak şekilde iki bağ V, W olsun. görV_e = görW_e olduğundan $V_e = W_e$ elde edilir. G-invaryant olduğundan $V = W$ 'dır. Dolayısıyla α birebirdir.

$E = F_1 \oplus F$ ile F'in tümleyeni ve (a∈K, Ada'ya göre kararlı bir altuzay $F_1 \subset E$ olsun. çek$V_e = F_1$ olacak şekilde bir $V_e : E \to F$ projeksiyonu ve V, T_G'de bir G-invaryant güçlü demet dönüşümü, g∈G için $V_g = L_g \circ V_e \circ L_g^{-1}$ olsun. Bu durumda V_g $L_g(F)$ üzerinde bir projeksiyondur.

π equivaryant olduğundan $L_g(=d\lambda_g)$ F'i g'deki dik uzaya izomorf resmeder. a∈K, Ad(a)'ya göre F_1 kararlı olduğundan $Ad(a) \circ V_e = V_e \circ R_a$.$R_a \circ L_g = L_g \circ R_a$ olduğundan g∈G, a∈K $R_a \circ V_g = V_{g.a} \circ R_a$. Buradan V bir G-invaryant esas bağdır. Tanımla çek$V_e = F_1$ ve dolayısıyla α örtendir.□

Sonuç 13 : (G,π,G/K,K) esas demeti bir G-invaryant esas bağ içerir ancak ve ancak $E = F_1 \oplus F$ olacak şekilde bir $F \subset E$ K-kararlı altuzayı vardır.

Sonuç 14 : K bağlantılı ise G-invaryant esas bağlarla $F_1 \subset E$ altuzayları arasında , $h \in F$ $(ad(h))F_1 \subset F_1$ ve $E = F_1 \oplus F$ olacak şekilde birebir eşleme vardır.

Sonuç 15 : K kompakt ise $\wp_K$ demetinin bir G-invaryant esas bağı vardır.

2.11.8. Homojen Uzay Tabanlı Esas Demette Eğrilik Ve Weil Homomorfizmi

$a \in K$'da Ad(a) operatörüne göre F_1 kararlı olmak üzere E'nin bir $E = F_1 \oplus F$ ayrışımı vardır. $p: E \to F$ ve $p_1 : E \to F_1$ projeksiyonlar olsun. İndirgenmiş G-invaryant esas bağına karşın $T_e(G)$'de p ve p_1 dikey ve yatay projeksiyonlardır. $h \in E$ olmak üzere $w(e;h) = p(h)$ olacak şekilde $A^1(G;F)$'deki tek sol invaryant 1-formu w eğrilik formudur.

V'nin Ω eğrilik formunu hesaplıyalım: X_h, X_k G üzerinde sol invaryant vektör alanları , $w(X_h)$, $w(X_k)$ fonksiyonları sol invaryant ve dolayısıyla sabit olduğundan

$$\delta w(X_h,X_k) = - w([X_h,X_k]) = - w(e;[h;k]) \tag{54}$$

Benzer olarak $\frac{1}{2}[w,w](X_h,X_k) = [w(e;h),w(e;k)]$ 'dır. $h,k \in E$ için

$$\Omega(e;h,k) = [p(h),p(k)] - p([h,k]) \tag{55}$$

olacak şekilde Ω E değerli sol invaryant 2-formu tektir. Buradan $h,k \in F_1$ ise

$$\Omega(e;h,k) = - p([h,k]) \tag{56}$$

dır. İnvaryant Weil homomorfizmi :

$$(h_{\wp_K})_I : (\vee F^*)_I \to H_I(G/K) \tag{57}$$

Burada $\Gamma \in (\vee^k F^*)_I$ için, $(h_{\wp_K})_I(\Gamma)$, bir tek $\Phi \in A_I^{2k}(G/K)$ sol invaryant diferensiyel formu ile temsil edilir. Bu diferensiyel form, $h_i \in F_1$ için;

$$(\pi^*\Phi)(e;h_1,\ldots,h_{2k}) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\sum_{\sigma\in S^{2k}} \in_\sigma \Gamma(p([h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)}]),\ldots,p([h_{\sigma(2k-1)},h_{\sigma(2k)}]) \qquad (58)$$

eşitliğini sağlar ve $(h_{\wp_K})(\Gamma)$'yu H(G/K)'da temsil eder.

2.12. Pontrjagin Sınıfları

Bir reel vektör demeti $\wp$ = (M,π,B,F) r-ranklı ve bir karakteristik homomorfizm $h^{\blacklozenge}_{\wp} : (\vee L_F^*)_I \rightarrow H(B;C)$ ve GL(F) etkisinde $\vee L^*_F$ cebirinin invaryant altcebiri $(\vee L^*_F)_I$ olsun.

$\varphi \in L_F$, r = boyF, k = 1,...,r $C_k^F \in (\vee^* L_F^*)_I$ karakteristik katsayıları ile

$$C_0^F(\vartheta) = 1,\ C_k^F(\vartheta) = \frac{1}{k!}C_k^F(\vartheta,\ldots,\vartheta) \qquad (59)$$

olmak üzere

$$\det(\vartheta + \lambda\iota) = \sum_{k=0}^{r} C_k^F(\vartheta)\lambda^{r-k} \qquad (60)$$

eşitliğini sağlar. $p_k(\wp)$, $\wp$'nin kohomoloji sınıfları,

$$0 \le 2k \le r,\quad p_k(\wp) = h^{\blacklozenge}_{\wp}(C_{2k}^F) \qquad (61)$$

$\wp$'nin Pontrjagin sınıflarıdır. Bu $p_k(\wp) \in H^{4k}(B)$ sınıflarının reel olduğu gösterildi. Pontrjagin sınıfları $\wp$ demetinin karakteristik cebirini üretir.

$p_k(\wp)$ sınıfı, $\wp$'de bir lineer bağın eğriliği R olmak üzere;

$$p_k = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}(2k)!}C_{2k}^F(R,\ldots,R) \qquad (62)$$

p_k diferensiyel formu ile gösterilir.

Bu

$$p(\wp) = \sum_{k=0}^{r} p_k(\wp) \qquad (63)$$

sınıfına $\wp$'nin *toplam Pontrjagin sınıfı* denir. $p_0(\wp) = 1$ olduğundan, $p(\wp)$'nın H(B) cebirinde tersi vardır. q ranklı bir trivyal demet $\in^q$ 'in, sıfır eğrilikli bir bağı olduğundan. $p(\in^q) = 1$'dir.

Not : Pontrjagin sınıflarının bu tanımı [8] 'deki tanımdan $(-1)^k$ işareti ile farklıdır.

Önerme 33 : Pontrjagin sınıfları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) Doğallık: Bir $\varphi: \wp \to \wp'$ demet dönüşümü, taban manifoldları arasında bir düzgün ψ dönüşümü veren, liflerde izomorfizme kısıtlanır olsun.Bu durumda

$$p(\wp) = \psi^{\#}(p(\wp')).$$

(2) Whitney toplamı: H tipik lifi ile B üzerinde ikinci bir vektör demeti $\wp'$ olsun.Bu durumda

$$p(\wp \oplus \wp') = p(\wp) . p(\wp').$$

İspat: Bakınız [1] .

Sonuç16 : $\wp \oplus \in^q = \wp' \oplus \in^p$ olsun.Bu durumda $p(\wp) = p(\wp')$ 'dır.

Sonuç 17 : $\wp \oplus ... \oplus \wp \oplus \in^p = \in^{rq+p}$ olsun.Bu durumda $p(\wp) = 1$'dir.

Sonuç 18 : $\wp \oplus \wp'$ trivivyal olsun. Bu durumda, $p(\wp) = p(\wp')^{-1}$ 'dir.

2.12.1. Homojen Uzayda Pontrjagin Sınıfları

G bi kompakt bağlantılı Lie grubu ve H bir kapalı altgrubu olsun. G/H homojen uzayının Pontrjagin sınıfları şöyle belirlenir: $\pi : G \to G/H$ projeksiyon olsun.

G ve H'ın Lie cebirleri E ve F , E'de bir pozitif tanımlı G-invaryant iççarpım olsun. $E = F \oplus F^{\perp}$, $\wp = G \times_H F^{\perp}$ ve $\wp' = G \times_H F$ vektör demetleri G/H üzerinde belirlidir.

n = boy G, $\wp = \tau_{G/H}$ ve $\wp \oplus \wp' = \in^n$ olduğundan $p(G/H) = p(\wp) = p(\wp')^{-1}$ olduğu biliniyor. F'in F ve $F^{\perp}$'deki indirgenmiş gösterimleri ad ve $ad^{\perp}$ alınarak, $p : E \to F$ projeksiyonu ile

$$p_k(G/K) = h^{\bullet}{}_{\wp}(C_{2k}) = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}}\, h_{\wp}(C_{2k}) \tag{63}$$

bağıntısıyla homojen uzay tabanlı birleşmeli vektör demetlerindeki Weil homomorfizmi özellikleri ile $p_k(G/H)$ için belirli bir Φ_k gösterimi elde edebiliriz. G/H üzerinde, $h_i \in F^{\perp}$

$(\pi^*\Phi_k)(e;h_1,\ldots,h_{4k})=$

$$\frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}2^{2k}(2k)!}\sum_{\sigma\in S^{4k}} \in_\sigma C_{2k}(ad^{\perp}p[h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)}],\ldots,ad^{\perp}p[h_{\sigma(4k-1)},h_{\sigma(4k)}]) \tag{64}$$

bağıntısını sağlayan tek kapalı invaryant 4k-formu Φ_k'dır.

Benzer olarak $p_k(\wp')$ 'da aşağıdaki şartı sağlayan ψ_k kapalı invaryant 4k-formu ile gösterilir: $h_i \in F^{\perp}$,

$$(\pi^*\psi_k)(e;h_1,\ldots,h_{4k})=\frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}2^{2k}(2k)!}\sum_{\sigma} \in_\sigma C_{2k}(adp[h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)}],\ldots,adp[h_{\sigma(4k-1)},h_{\sigma(4k)}]) \tag{65}$$

Dolayısıyla $p(G/H)$ ve $p(G/H)^{-1}$ Pontrjagin sınıfları

$$\Phi = \sum_k \phi_k \qquad \text{ve} \qquad \psi = \sum_k \psi_k \tag{66}$$

diferensiyel formları ile gösterilir.

Ayrıca G/H yönlü ve (2m) çift boyutlu olsun. G/H'ın Pfaffian sınıfı aşağıdaki şartı sağlayan tek türlü belirli Ξ diferensiyel formu ile gösterilir:

$$\pi^*\Xi(e;h_1,\ldots,h_{2m}) = \frac{1}{(2\pi)^m 2^m m!}\sum_{\sigma} \in_\sigma Pf(ad^{\perp}p[h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)}],\ldots,ad^{\perp}p[h_{\sigma(2m-1)},h_{\sigma(2m)}]) \tag{67}$$

3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmanın amacı homojen uzaylardaki karakteristik sınıflar üzerinde ileride yapılacak çalışmalar ve araştırmalar için esas tanım ve teoremleri birarada düzenli bir şekilde sunmaktır.

Karakteristik sınıflar kavramı, manifoldlar üzerindeki vektör alanları üzerinde Stiefel ve Whitney'in 1935'deki çalışmalarıyla oluşturulmuştur. Bir kompakt M manifoldu üzerinde sıfırdan farklı bir vektör alanı inşa etmek her zaman mümkün değildir. Bu sonlu sayısına kadar yapılabilir. Stiefel ve Whitney bu problemin bir genelleştirmesine çalıştılar. 1942'de Pontrjagin, farklı bir yöntemle bir kompakt yönlendirilmim M manifoldunun kohomoloji sınıfları ile çalıştı. Daha sonra S.S. Chern n kompleks boyutlu bir kompakt kompleks analitik M manifoldu için Chern sınıflarını tanımladı. Bu sınıflar kompleks vektör alanlarının varlığına engeller olarak karakterize edilebilir[14]. Singüler kohomolojide, karakteristik sınıflar vektör demetlerinin lineer bağımsız kesitlerinin belli bir sayısını bulmadaki engeller olarak gösterilmiştir Karakteristik sınıflar diferensiyel geometride eğrilik notasyonu ile yakından ilgilidir. deRham teoride, demet üzerindeki bir bağ kohomoloji sınıfını gösteren bir diferensiyel form elde etmek için kullanılır. Çalışmamızın yaklaşımı budur.

Esas olarak bir G/K homojen uzayının karakteristik sınıflarını açıklamayı hedefledik. Bunun için önce genel demetlerdeki özelliklere yer verdikten sonra, lifi veya taban uzayı G/H homojen uzayı olan demetleri inceledik..

Düzgün manifoldlar ve lif demetleri için diferensiyel formlar ve deRham teorisine yer verildi. G/H'ın teğet demeti K'nın gösterimleri ile ele alındı. Her $\wp$ vektör demetinin bir ∇ lineer bağı olduğu ve bu bağın $\wp^*$ dual demetinde ve birleşmeli vektör demetindeki bağı belirlediğine yer verildi. Bir reel vektör demetinin F yapı grubunun bir lineer dönüşümünün katsayıları kümesi $\vee L^*_F$'den alınan C_p^F kanonik elemanları ve karakteristik homomorfizmle taban uzayının kohomoloji sınıflarına yer verildi.

Taban manifoldu B, yapı grubu E Lie cebiri ile G Lie grubu olan bir demette

$$h: (\vee E^*)_I \longrightarrow H(B)$$

kanonik homomorfizminin görüntüsündeki kohomoloji sınıfları bu demetin karakteristik sınıflarıdır. Bir esas demette, esas bağ, demetin toplam uzayının teğet demetinin bir 'yatay' altdemetinden elde edilir. Bu bağdan, demetin eğriliği bulunur. E'de Γ invaryant simetrik fonksiyonlar için h(Γ) sınıfını temsil eden B'deki bir diferensiyel form, Γ'nın herbir bileşeninin yerine eğrilik formu alınarak belirlenebilmektedir. Bu h homomorfizminin bağın seçiminden bağımsız ve demet için invaryant olduğu görülmektedir. Böylece bir $\wp$ reel vektör demetinin Pontrjagin sınıfları, $C\times\wp$ kompleksleştirmesinin Pfaffian sınıflarına eş olur.

Son yıllarda, karakteristik sınıflar Gauge teori, düğüm (knot) değişmezleri, geometrik kuantizasyon, kapalı eğri (loop) grupları ve sonsuz boyutlu geometrideki bazı esas objelerin inşasında kullanıldı. Son çalışmalar özellikle düğümler için Jones polinomlarının Witten'in ele alış tarzı ile, ikinci karakteristik sınıfları belirlemiştir. Örneğin, bir bağlı vektör demetinin Chern-Simons sınıfları bunlardandır[28].

Bu çalışmanın iyi anlaşılabilmesi için demet, demette bağ ve eğrilik, kohomoloji kavramları ve bunlar arasındaki ilişkilerin iyi bilinmesi gerekir.

4. SONUÇLAR

1. Manifoldlarda ve homojen uzay tabanlı vektör demetlerinde deRham komoholojisi incelendi.

2. Her $\wp$ vektör demetinin bir ∇ lineer bağı olduğu ve bu bağın $\wp^*$ dual demetinde ve birleşmeli vektör demetindeki bağı belirlediği görüldü.

3. Trivyal demetin sıfır eğrilikli bir bağı olduğu, esas demette esas bağın, demetin toplam uzayının teğet demetinin bir yatay alt demetinden elde edildiği görüldü.

4. Bir Γ invaryant simetrik fonksiyon için $h(\Gamma)$ sınıfı B'deki bir diferensiyel formla gösterilebilmektedir.

5. Karakteristik (Weil) homomorfizminin bağın seçiminden bağımsız ve demet için invaryant olduğu görüldü.

5. KAYNAKLAR

1. Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R., Connections, Curvature and Cohomology, Volume I, II, Academic Press, Inc. (London) Ltd., London,1972.
2. Borel, A., and Hirzebruch, F., Characteristic Classes and Homogeneous Spaces I, Amer. J. Math. 80 (1958), 458-538; II, Amer. J. Math. 81 (1959), 315-382; III, Amer. J. Math. 82 (1960), 491-504.
3. Milnor, J.R., Stasheff, J.D., Characteristic Classes, Princeton University Press, New York University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1974.
4. Borel, A., Topology of Lie Groups and Characteristic Classes, Bull. Amer. Math. Soc., 61 (1955) 397-432.
5. Rosenknop, I. Z., Homology Groups of Homogeneous Spaces, C. R. Acad. Sci. URSS (N.S.) 85 (1952), 1219-1221.
6. Hungerford, T.W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.
7. Curtis, C.W., Linear Algebra, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.
8. Sigundur, H., Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, Cambridge, Massachusettes, 1962.
9. Armstrong, M.A., Basic Topology, McGraw-Hill Book Company (U.K.) Limited, Great Britain, 1979.
10. Husemoller, D., Fibre Bundles, Second Edition, Springer-Verlag, United States of America, 1966.
11. Ehresman, C., Sur la Topologie de Certains Espace Homogenes, Annals of Math., 35 (1934) 396-443.
12. Chern, S.S., Complex Manifolds Without Potential Theory, Springer-Verlag, New York, 1995.
13. Adams, J.F., Lectures on Lie Groups, W.A. Benjamin INC., New York Amsterdam, 1969.
14. Hirsch, W.M., Differential Topology, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1976.
15. Guillemin, V., Differential Topology, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
16. Kawakubo, K., The Theory of Transformation Groups, Oxford University Press, Tokyo, 1991.

17. Pontrjagin, L. S., On Homologies in Compact Lie Groups, Rec. Math. (Mat. Sb. J (N.S.) 48 (1939), 389-422.

18. Chern, S.S., Differential Geometry of Fibre Bundles, Proc. Internat. Congr. Math. Cambridge, Massachusetts, I950, II, pp.397-411, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

19. Wu, W.T., On Pontrjagin classes, I, II, III, IV, V, Sci. Sinica 3 (1954), 353-367; Acta Math. Sinica 4 (1954), 171-199; Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 11, I55-I72; Acta Math. Sinica 5 (1955), 37-63 and 401-410.

20. Zagier, D. B., The Pontrjagin Class of An Orbit Space, Topology, 1972.

21. Zagier, D. B., Equivalent Pontrjagin Classes and Applications to Orbit Spaces, "Lect. Notes in Math.," No. 290, Springer-Verlag, Berlin and New York, I972.

22. Steenrod, N., "The Topology of Fibre Bundles." Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1951.

23. Adler, A., Characteristic Classes of Homogeneous Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 86 (1957), 348-365.

24. Borel, A., Topology of Lie Groups and Characteristic Classes, Bull. Amer. Math. Soc., 61 (I 955), 397-432.

25. Bott, R., Homogeneous Vector Bundles, Ann. of Math. 66 (1957), 203-248.

26. Kobayashi, S., On Characteristic Classes Defined by Connections, Töhoku Math. J.13 (2), (1961), 381-385.

27. Brylinksi, J.L., Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization, Birkhauser, Boston, 1993.

28. Isham, C.J.,, Modern Differential Geometry, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London, 1989.

6. ÖZGEÇMİŞ

Esra Esin SAKA, 20.06.1971'de Trabzon'da doğdu. 24 Şubat İlkokulu, Cumhuriyet Ortaokulu, Trabzon Lisesi'nde öğrenimini tamamlayarak, 1988'de K.T.Ü. Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 1992'de bu bölümden mezun olarak Aralık 1992'de Rize Anadolu Lisesi'nde göreve başladı. Mart 1995'de Trabzon Kanuni Anadolu Lisesi'ne atandı. Aralık 1998'den beri K.T.Ü. 'de Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.