57778

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FABER POLİNOMLARI VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

İmdat İŞCAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

" Yüksek Lisans (Matematik) "

Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12.01.1996

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 01.02.1996

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Abdullah ÇAVUŞ

Jüri üyesi : Prof. Dr. Ergün BAYAR

Jüri üyesi : Prof. Dr. Danyal M. İSRAFİLOV

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Fazlı ARSLAN

Ocak 1996

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı; seviye çizgileri ile sınırlı, sınırlı bölgelerde analitik olan fonksiyonların bu bölgeler üzerinde Faber polinomlarının türevlerinin bir serisine açılabileceklerini Belyi integral gösteriminden faydalanarak incelemektir.

Öncelikle, tez konusunu seçen ve yoğun çalışmaları arasında bana yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Abdullah ÇAVUŞ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında yapıcı eleştirilerini aldığım Sayın Hocam Prof. Dr. Danyal I. MEHMETOĞLU'na ve bu tezi sabırla yazan değerli arkadaşım Mehmet BAŞKAN'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Trabzon, Ocak 1996 İmdat IŞCAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

"Faber Polinomları ve Yaklaşım Özellikleri" adlı bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm diğer bölümlere hazırlık niteliğinde olup; bu bölümde, analitik fonksiyonlar, kompleks değişkenli fonksiyonların eğrisel integrali, fonksiyon dizileri ve fonksiyon serileri, düzgün yakınsaklık, kuvvet serileri, Taylor serileri, Laurent serileri ve konform eşdeğerlilik ile ilgili bazı tanım ve teoremler (ispatsız) verildi.

İkinci bölümde, kompleks düzlemde sınırı bir Jordan eğrisi olan bir B kontiniumu için n. dereceden $F_n(z)$ Faber polinomları tanıtıldı ve onların integral gösterimleri verilerek, Faber polinomları ve Faber polinomlarının türevleri ile ilgili bazı özellikler sunuldu. Ayrıca B nin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ Faber polinomları serisi tanımlanarak, bu tipten serilerin CB nin $R>1$ yarıçaplı L_R seviye çizgisi içinde düzgün yakınsaklığı ile L_R seviye çizgisi içinde analitik olan bir fonksiyonunun Faber polinomlarının bir serisine açılabileceği gösterildi.

Üçüncü bölümde, yarıkonform dönüşüm, yarıkonform eğri, yarıkonform yansıma kavramlarının bilinen tanımları ile yarıkonform eğri ile sınırlı, sınırlı bir bölgede analitik ve kapanışında sürekli fonksiyonlar için Belyi integral gösterimi verildikten sonra, bu gösterimden faydalanılarak CB nin $R>1$ yarıçaplı L_R seviye çizgisi içinde analitik bir fonksiyonun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ şeklinde Faber polinomlarının türevlerinin bir serisine açılabileceği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Konform dönüşüm, Kontinium, Jordan eğrisi, Faber polinomları, seviye çizgisi, yarıkonform dönüşüm, yaırkonform eğri, yarıkonform yansıma, Belyi integral gösterimi

SUMMARY

This study entitled as " Faber polynomials and their approximation properties" consists of three chapters.

In the first chapter which is a preliminary form to the next ones some definitions and theorems (without proofs) concerning the analytic functions, line integrals of complex valued functions, series of functions and sequece of functions, uniform convergence, power series, Taylor series, Laurent series and conformal equivalence are given.

In Chapter 2, the Faber polynomials $F_n(z)$ of degree n for a continiuum B on the complex plane with a Jordan boundary are introduced , and then by giving their integral representations , some properties concerning the Faber polynomials and their derivatives are presented. In addition, by defining Faber polynomial series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ for B it is shown that those types of series are uniformly convergent in the contour line L_R , with radius $R>1$, of CB and that a function which is analytic in the contour line L_R can be expanded in a series of Faber polynomials .

In Chapter 3, after giving the known definitions of a quasiconformal mapping, a quasiconformal curve, a quasiconformal reflection, and also Belyi's integral representation for functions which are analytic in a region G with quasiconformal boundary and continious on $\overline{G}$, it is proved that a function which is analytic in the contour line L_R of CB can be expanded in a series of the form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$.

Key Words: An analytic function, a conformal mapping, a continiuum, a Jordan curve, Faber polynomials , a contour line, a quasiconformal mapping, a quasiconformal curve, a quasiconformal reflection, Belyi's integral representation.

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi.
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi.
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi.
$\mathbb{C}_{\infty}$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi.
$\forall$	Her.
$\exists$	Vardır, mevcuttur.
$\ni$	Öyleki.
$a \in A$	a noktası A kümesinin elemanıdır.
$a \notin A$	a noktası A kümesinin elamanı değildir.
$A \subset B$	A kümesi B kümesinin altındadır.
$A \supset B$	A kümesi B kümesini kapsar.
$A \setminus B$	A kümesinin B kümesinden farkı.
$\overline{G}$	G kümesinin kapanışı.
∂G	G nin sınır kümesi.
$H(G)$	G kümesi üzerinde tanımlı analitik fonksiyonların kümesi.
$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi.
$f \downarrow U$	f fonksiyonunun U kümesine kısıtlanışı.
$:=$	Tanım olarak eşittir.
$n!$	n faktoriyel.
$I(\gamma)$	γ Jordan eğrisinin içi.
$E(\gamma)$	γ Jordan eğrisinin dışı.
$\sup A$	A kümesinin en küçük üst sınırı.
$\inf A$	A kümesinin en büyük alt sınırı.

1. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, analitik fonsiyonlar hakkında ilerideki ispatlarımızda kullanılacak temel özellikler ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

1.1 Giriş

Tanım 1: G,$\mathbb{C}$-kompleks düzlemde açık bir küme, $a \in G$ ve $f: G \to \mathbb{C}$ olsun.

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

limiti mevcut ve sonlu ise f fonksiyonuna $a \in G$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon denir[1].

f fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ise $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ limitine, f nin $a \in G$ noktasındaki türevi denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.

Teorem 1: $G \subset \mathbb{C}$ açık bir altküme, $a \in G$ ve $f:G \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonun $a \in G$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $a \in G$ de sürekli ve $\forall z \in G$ için $f(z)=f(a)+(z-a)f^*(z)$ olacak şekilde bir tek $f^*:G \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun olmasıdır. Bu durumda $f'(a)=f^*(a)$ dır[1].

Sürekli fonksiyonların çarpımı ve toplamı sürekli olduğundan , f fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ise, teorem 1 den f nin $a \in G$ noktasında sürekli olduğu görülür.

Teorem 2: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f,g:G \to \mathbb{C}$, $a \in G$ noktasında türevlenebilir iki fonksiyon ise

i-) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda f:G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ve

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

dir.

ii-) $f+g,\ fg : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonları $a \in G$ noktasında türevlenebilir ve

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

dir.

iii-) $\forall z \in G$ için $g(z) \neq 0$ ise $\frac{f}{g} : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $a \in G$de türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

dir[1].

Teorem 3[Zincir kuralı]: $G, E \subset \mathbb{C}$ iki açık altküme, $f: G \to E$ ve $g: E \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonu $a \in G$ noktasında ve g fonksiyonu $f(a) \in E$ noktasında türevlenebilir ise $g \circ f : G \to \mathbb{C}$ bileşke fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ve

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

dir[1].

Teorem 4: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $z = x + iy \in G$ ve $f: G \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ise $\frac{\partial f(a)}{\partial x}, \frac{\partial f(a)}{\partial y}$ kısmi türevleri mevcut olup; bu kısmi türevler

$$f'(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} = -i \frac{\partial f(a)}{\partial y}$$

şartlarını sağlar[2].

Tanım 2: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $f : G \to \mathbb{C}$ ve $a \in G$ olsun. f nin a noktasında $\frac{\partial f(a)}{\partial x}, \frac{\partial f(a)}{\partial y}$ kısmi türevleri mevcut ise $\frac{\partial f(a)}{\partial z}$ ve $\frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır[2]:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x} - i \frac{\partial f(a)}{\partial y}\right)$$

ve

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x} + i\frac{\partial f(a)}{\partial y}\right).$$

Teorem 5: $f:G \to \mathbb{C}$, $a \in G$ de türevlenebilir ise $f'(a) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial z}$ ve $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}} = 0$ dır.

Tanım 3: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f : G \to \mathbb{C}$ olsun. Uygun bir $r>0$ sayısı için f fonksiyonu, a merkezli ve r yarıçaplı $D(a,r) := \{z : |z-a| < r\} \subset G$ açık dairesinin her noktasında türevlenebilir ise f ye a noktasında analitiktir denir[2].

f fonksiyonu G nin her noktasında analitik ise f ye G de analitiktir denir. G üzerinde tanımlı tüm analitik fonksiyonların kümesi $H(G)$ ile gösterilir.

Tanım 4: $S \subset \mathbb{C}$ bir altküme ve $f : S \to \mathbb{C}$ olsun. $S \subset G$ olan açık bir $G \subset \mathbb{C}$ altkümesi ve $\forall z \in S$ için $F(z)=f(z)$ olan G de analitik bir $F:G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bulunabilir ise f ye S üzerinde analitiktir denir[2].

Tanım 5: $G \subset \mathbb{C}$ açık ve $f \in H(G)$ olsun. $\forall z \in G$ için $f'(z)$ değerini alan $f':G \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna f nin türevi denir[1].

Teorem 6: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in H(G)$ olsun. $\forall z \in G$ için $f'(z)=0$ ise f fonksiyonu G de sabittir[1].

1.2 Kompleks Düzlemde Eğriler

Tanım 6: $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ise γ fonksiyonuna kompleks düzlemde bir eğri denir[3]. $\gamma(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç noktası, $\gamma(b)$ noktasına γ eğrisinin bitiş noktası ve

$$[\gamma] := \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$$

nokta kümesine γ eğrisinin izi adı verilir.

Karışıklığa sebep olmadıkça, $[\gamma]$ yerine çoğu kez γ yazılır.

Tanım 7: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, kompleks düzlemde verilen bir eğri olsun. $\gamma^{-}:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\gamma^{-}(t):=\gamma(a+b-t)$, eğrisine γ eğrisinin tersi denir[3].

Açık olarak γ^{-} nin başlangıç noktası, γ nın bitiş noktası ve γ^{-} nin bitiş noktası γ nın başlangıç noktasıdır. Ayrıca $[\gamma] = [\gamma^{-}]$ dir.

Tanım 8: $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ ve $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$ kompleks düzlemde $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(a_2)$ koşulunu sağlayan iki eğri olsun. $\gamma:[a_1,b_1+b_2-a_2]\to\mathbb{C}$,

$$\gamma(t):=\begin{cases}\gamma_1(t), & t\in[a_1,b_1],\\ \gamma_2(t+a_2-b_1), & t\in[b_1,b_1+b_2-a_2],\end{cases}$$

eğrisine, γ_1 eğrisi ile γ_2 eğrisinin çarpımı denir ve $\gamma:=\gamma_1\cdot\gamma_2$ ile gösterilir[3].

Tanımdan görülüyor ki; $[\gamma_1\cdot\gamma_2]=[\gamma_1]\cup[\gamma_2]$ dir.

Tanım 9: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir eğri olsun.

i-) $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise, γ eğrisine bir kapalı eğri ,

ii-) $\forall\, t_1,t_2\in[a,b], t_1\neq t_2$, için $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ ise γ eğrisine bir basit eğri,

iii-) $\forall\, t_1,t_2\in[a,b), t_1\neq t_2$, için $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ ve $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ eğrisine bir basit kapalı eğri veya bir Jordan eğrisi ,

iv-) [a,b] kapalı aralığının bir $P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ parçalanışı bulunabilir öyleki $\forall k\in\{1,2,\dots,n\}$ için $\gamma(t),(t_{k-1},t_k)$ aralıklarının her biri üzerinde sürekli türevlenebilir ve $\lim\limits_{t\to t_{k-1}^{+}}\gamma'(t)$, $\lim\limits_{t\to t_k^{-}}\gamma'(t)$, limitleri mevcut ise γ eğrisine parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri denir[3].

Kolayca gösterilebilir ki; $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ise γ^{-} eğrisi de parça-parça sürekli türevlenebilirdir. Benzer şekilde

γ_1, γ_2 kompleks düzlemde parça-parça sürekli türevlenebilir iki eğri ve $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ tanımlı ise, $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğridir.

Tanım 10: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir eğri ve $P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$,$[a,b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı olsun. $\wp([a,b])$, $[a,b]$ kapalı aralığının tüm P parçalanışının kümesi ve $P\in\wp([a,b])$ için $\ell(P):=\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|$ olsun. $\{\ell(P):P\in\wp([a,b])\}$ kümesi üstten sınırlı ise γ eğrisine ölçülebilir bir eğri ve

$$\ell_\gamma:=\operatorname{Sup}\{\ell(P):P\in\wp([a,b])\}\geq 0$$

sayısına γ eğrisinin uzunluğu denir[3].

Teorem 7: γ :[a,b]$\to\mathbb{C}$, parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ise γ eğrisi ölçülebilir ve $\ell_\gamma=\int_a^b|\gamma'(t)|dt$ dir[3].

Teorem 8[Jordan eğri teoremi]: γ kompleks düzlemde Jordan eğrisi ise $[\gamma]$, kompleks düzlemi, her birinin sınırı $[\gamma]$ olan biri sınırlı ve diğeri sınırsız olan tam iki ayrık bölgeye ayırır[3].

Bu bölgelerden,sınırlı olan bölgeye γ nın içi denir ve $I(\gamma)$ ile gösterilir. Sınırsız olan bölgeye ise γ nın dışı denir ve $E(\gamma)$ ile gösterilir.

Tanım 11: G, kompleks düzlemde açık bir küme ve γ :[a,b]$\to$G sürekli bir fonksiyon ise γ ya G de bir eğri denir.

Tanım 12: G, kompleks düzlemde bir bölge olsun. G de alınan her Γ Jordan eğrisi için $I(\Gamma)\subset G$ ise G bölgesine bir basit bağlantılı bölge denir[3].

Tanım 13: γ, kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi olsun. γ üzerinde hareket edildiğinde, $I(\gamma)$ hareketlinin solunda kalıyor ise γ eğrisine pozitif yönlendirilmiş bir eğri denir[4].

Tanım 14: Kompleks düzlemin kompakt ve bağlantılı bir K altkümesine bir kontinium denir[5].

Teorem 9: G, $\mathbb{C}$-kompleks düzleminde bir bölge olsun. G bölgesi basit bağlantılıdır ancak ve ancak $\mathbb{C}_\infty \setminus G$, $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzleminde bağlantılı ise[3].

Teorem 10: γ kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi ise $I(\gamma)$, $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölgedir; fakat $E(\gamma)$, $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge değildir[3].

1.3 Kompleks Değişkenli Fonksiyonların Eğrisel İntegrali

Kompleks değişkenli fonksiyonların eğrisel integrali, kompleks fonksiyonlar teorisinin en önemli kavramlarından birisidir. Eğrisel integrale başvurulmaksızın kompleks fonksiyonlar teorisindeki çoğu teoremlerin ispatı oldukça güçtür. Örnek olarak, açık bir kümede tanımlı analitik bir fonksiyonun türevinin sürekli olması ile istenilen her mertebeden türevinin olmasının ispatı, bunlardan birisidir.

Tanım 15: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ kompleks düzlemde parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ve $f(z)$, γ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

kompleks sayısına f nin γ eğrisi üzerinde eğrisel integrali denir[3].

Teorem 11: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ve f(z), γ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

i-) $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$,

ve

ii-) $M \geq 0$ ve $\forall z \in \gamma$ için $|f(z)| \leq M$ ise $\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq M\ell_{\gamma}$ dir[3].

Tanım 16: $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ ve $\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{C}$ parça-parça sürekli türevlenebilir iki eğri olsun. Parça-parça sürekli türevlenebilir, kesin monoton artan, ve $\gamma_1 \circ \tau = \gamma_2$ koşulunu sağlayan üzerine bire-bir bir $\tau:[c,d]\to[a,b]$ fonksiyonu varsa, γ_2 eğrisine γ_1 eğrisinin yeni bir parametrelenişi denir[2].

Teorem 12: γ_1, γ_2 kompleks düzlemde parça-parça sürekli türevlenebilir iki eğri ve f, $[\gamma_1]\cup[\gamma_2]$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.

i-) γ_2 eğrisi ,γ_1 in yeni bir parametrelenişi ise

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

ve

ii-) $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ tanımlı ise

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

dir[2].

Teorem 13: γ, $G\subset\mathbb{C}$ bölgesinde parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ve $g\in H(G)$ olsun. $f:[g\circ\gamma]\to\mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_{g\circ\gamma} f(w)dw = \int_{\gamma} f(g(z)g'(z)dz$$

dir[3].

Tanım 17: $G\subset\mathbb{C}$ açık ve $f:G\to\mathbb{C}$ olsun. $\forall z\in G$ için $F'(z)=f(z)$ koşulunu sağlayan bir $F\in H(G)$ fonksiyonu varsa F fonksiyonuna f nin G de bir ilkeli denir[3].

Teorem 14: $f(z)$, $G\subset\mathbb{C}$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon ve γ, G de z_1 noktasını z_2 noktasına birleştiren parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri olsun. $F\in H(G)$,f nin G de bir ilkeli ise

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1)$$

dir[3].

Teorem 15: $f(z)$, $G\subset\mathbb{C}$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon olsun. f nin G de bir ilkeli varsa, G de olan her kapalı parça-parça sürekli türevlenebilr γ eğrisi için

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

dir[3].

Teorem 16 [Cauchy İntegral Teoremi] **:** $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f\in H(G)$ olsun. γ, G de parça-parça sürekli türevlenebilir bir Jordan eğrisi ve $I(\gamma)\subset G$ ise

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

dir[3].

Teorem 17: $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ ve Γ kompleks düzlemde $\gamma_k\subset I(\Gamma)$,$k=1,\ldots,n$,ve $\forall j\neq k$ için$\gamma_j\subset E(\gamma_k)$ koşullarını sağlayan parça-parça sürekli türevlenebilir pozitif yönlendirilmiş Jordan eğrileri olsun. f, $\overline{E(\gamma_1)\cap\ldots\cap E(\gamma_n)\cap I(\Gamma)}$ kapanışını içeren bir G bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz$$

dir[3].

Teorem 18 [Cauchy İntegrali Formülü]: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $f\in H(G)$ ve γ, G de $I(\gamma)\subset G$ olan pozitif yönlendirilmiş parça-parça sürekli türevlenebilir bir Jordan eğrisi olsun. Bu taktirde $z\in I(\gamma)$ ise

$$f(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

dir.

İspat. $\varepsilon>0$ keyfi olsun. $z\in I(\gamma)$ ve f, $z\in I(\gamma)$ noktasında sürekli olduğundan $\overline{D}(z,\delta)\subset I(\gamma)$ ve $\forall\zeta\in\overline{D}(z,\delta)$ için $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta\equiv\delta(z,\varepsilon)>0$ sayısı vardır. $\sigma:=\partial\overline{D}(z,\delta)$ sınırı pozitif yönlendirilirse; teorem17 ve 11 e göre

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|$$

$$<\varepsilon$$

dir.

$\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ elde edilir.

Teorem 19: γ, kompleks düzlemde parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri, $f:[\gamma]\to\mathbb{C}$ sürekli ve n bir pozitif tamsayı olsun.

$F_n:\mathbb{C}\setminus[\gamma]\to\mathbb{C}$ fonksiyonu, $\forall z\in\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ için

$$F_n(z) := \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

olarak tanımlanırsa; F_n fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ bölgesinde analitik ve

$$F'_n(z) := n \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

dir[2].

Teorem 18 ve19 dan açık bir G kümesinde analitik bir fonksiyonun G de her mertebeden türevlenebilir olduğu görülür ve türevler için aşağıdaki Cauchy İntegral formülü elde edilir.

Teorem 20 [Türevler için Cauchy İntegral Formülü]: $G \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f \in H(G)$ ise her n doğal sayısı için f nin G de $f^{(n)}(z)$ türevi mevcut ve $I(\gamma) \subset G$ olan herhangi bir parça-parça sürekli türevlenebilir Jordan eğrisi için $z \in I(\gamma)$ ise

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

dir[2].

Teorem 21: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f \in H(G)$ ise $\forall z \in G$ için $f(z) = f(a) + (z-a) f_1(z)$ olacak şekilde bir tek $f_1 \in H(G)$ fonksiyonu vardır.

İspat. Teorem 1 e göre, $a \in G$ noktasında sürekli , $f'(a) = f_1(a)$ ve $\forall z \in G$ için $f(z) = f(a) + (z-a) f_1(z)$ koşullarını sağlayan bir tek $f_1 : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu

vardır.

$$f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}, & z \neq a \\ f'(a) & , z = a \end{cases}$$

ve f, G de analitik olduğundan $f_1 \in H(G\setminus\{a\})$ dır. $a \in G$ ve G açık olduğundan $\exists r>0 \ni \overline{D}(a,r) \subset G$ dir. $\gamma := \partial\overline{D}(a,r)$ olsun. f_1 fonksiyonu, γ üzerinde sürekli olduğundan teorem 19 a göre $g: D(a,r) \to \mathbb{C}$,

$g(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, fonksiyonu $D(a,r)$ de analitiktir. Diğer taraftan teorem 18 ve 20 den kolayca gösterilebilir ki; $\forall z \in D(a,r)$ için $g(z)=f_1(z)$ dir. $\forall z \in G$ için $f_1'(z)$ mevcut olduğundan $f_1 \in H(G)$ dir.

Teorem 22 [Taylor Formülü]: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in H(G)$, $a \in G$ ve $n \in \mathbb{N}$ bir doğal sayı ise $\forall z \in G$ için

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n f_n(z)$$

olacak şekilde bir tek $f_n \in H(G)$ fonksiyonu vardır ve f_n fonksiyonunun, $r>0$ için $\overline{D}(a,r) \subset G$ ve $\gamma := \partial\overline{D}(a,r)$ pozitif yönlendirilirse $\forall z \in D(a,r)$ için

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)} d\zeta$$

şeklinde bir gösterimi vardır[2].

Teorem 23: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in H(G)$ ve $a \in G$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(a) = 0$ ise f, G de sabittir[2].

Tanım 18: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in G$ ve $f \in H(G)$ olsun. $f(a)=0$ ise $a \in G$ noktasına f nin bir sıfır yeri denir[2].

Tanım 19: $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in G$ ve $f \in H(G)$ olsun. $f(a)=0$ ve $f \neq 0$ ise teorem 23 e göre $f^{(k)}(a) \neq 0$ olacak şekilde en az bir k doğal sayısı vardır. $f^{(k)}(a) \neq 0$ koşulunu sağlayan k doğal sayılarının en küçüğü m ile gösterilirse; a

noktasına f fonksiyonunun m. mertebeden bir sıfır yeri denir. m=1 ise a noktasına f fonksiyonunun bir basit sıfır yeri denir[2].

Tanımdan görülüyor ki, a noktası f fonksiyonunun m. mertebeden bir sıfır yeri ise $f(a)=f'(a)=...=f^{(m-1)}(a)=0$ ve $f^{(m)}(a)\neq 0$ dır.

Teorem 24: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $a\in G$ ve $f\in H(G)$ olsun. a noktasının f nin m. mertebeden bir sıfır yeri olması için gerek ve yeter koşul $\forall z\in G$ için $f(z)=(z-a)^m g(z)$ ve $g(a)\neq 0$ koşullarını sağlayan bir tek $g\in H(G)$ fonsiyonunun bulunmasıdır[3].

1.4 Analitik Fonksiyonların Yerel Topolojik Özellikleri

Teorem 25: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge $z_\circ\in G$ ve $f\in H(G)$ olsun. $z_\circ$ noktası $f-f(z_\circ)$ fonksiyonunun m. mertebeden bir sıfır yeri ise $\delta,\varepsilon>0$ sayıları bulunabilir öyleki $D(z_\circ,\varepsilon)\subset G$ ve $\forall a\in D(f(z_\circ),\delta)\setminus\{f(z_\circ)\}$ için $f(z)-a$ fonksiyonunun $D(z_\circ,\varepsilon)\setminus\{z_\circ\}$ açık kümesinde tam m tane farklı basit sıfır yeri vardır[2].

Teorem 26 [Açık Dönüşüm Teoremi]: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f\in H(G)$, G de sabit olmayan bir analitik fonsiyon ise $\forall A\subset G$ açık altkümesi için $f(A)\subset\mathbb{C}$ altkümesi açıktır[2].

Teorem 27: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f\in H(G)$ olsun. f fonksiyonu bire-bir ise $\forall z\in G$ için $f'(z)\neq 0$ dır.

İspat. Aksi halde $f'(z_0)=0$ olacak şekilde en az bir $z_\circ\in G$ noktası vardır. $f'(z_0)=0$ olduğundan $z_\circ$ noktası $f-f(z_\circ)$ fonksiyonunun en az 2. mertebeden bir sıfır yeridir. $z_\circ$, $f-f(z_\circ)$ fonksiyonunun m. mertebeden bir sıfır yeri ise teorem 25 e göre; δ ve $\varepsilon>0$ sayıları bulunabilir öyleki $D(z_\circ,\varepsilon)\subset G$ ve $\forall a\in D(f(z_\circ),\delta)\setminus\{f(z_\circ)\}$ için $f(z)$-a fonksiyonunun $D(z_\circ,\varepsilon)\setminus\{z_\circ\}$ açık kümesinde tam m tane farklı basit sıfır yeri vardır. Bu ise f nin bire-bir olması ile çelişir. O halde $\forall z\in G$ için $f'(z)\neq 0$ dır.

Teorem 28 [Ters Dönüşüm Teoremi]: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge, $z_\circ\in G$ ve $f\in H(G)$, G de sabit olmayan bir analitik fonsiyon olsun. $f'(z_0)\neq 0$ ise $z_\circ\in U\subset G$ ve $f(z_\circ)\in V\subset f(G)$ olacak şekilde iki açık U, V alt kümeleri vardır öyleki $f\downarrow U:U\to V$ üzerine bire-bir olup; $(f\downarrow U)^{-1}:V\to U$ ters dönüşümü analitiktir ve $\forall w\in V$ için $(f^{-1})'(w)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$, yani $\forall z\in G$ için $(f^{-1})'(f(z))=\dfrac{1}{f'(z)}$ dir[3].

Teorem 29 [Maksimum Modül Teoremi]: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve f, G de analitik ve sabit olmayan bir fonksiyon ise $|f|$, maksimum değerini G nin bir iç noktasında alamaz[3].

Teorem 30 [Minimum Modül Teoremi]: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $a\in G$ ve $f\in H(G)$ olsun. $\forall z\in G$ için $|f(a)|\leq|f(z)|$ ise ya $f(a)=0$ dır veya f, G de bir sabit fonksiyondur[3].

1.5 Analitik Fonksiyonların Ayrık Singüler Noktaları

Bir fonksiyonun analitik olmadığı bir noktaya o fonksiyonun bir singüler noktası adı verilir.

Tanım 20: $G\subset\mathbb{C}$ açık, $a\in G$ ve $f\in H(G\setminus\{a\})$ ise a noktasına f nin G de bir ayrık singüler noktası denir[2].

$a\in G$, f nin G de bir singüler noktası ise ya $\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=+\infty$, veya $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ limiti mevcut ve sonludur, ya da $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ limiti yoktur.

Tanım 21: $G \subset \mathbb{C}$ açık ve $a \in G$, f nin G de bir ayrık singüler noktası olsun.

i-) $\lim_{z \to a} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise a noktasına f nin bir kaldırılabilir singüler noktası ,

ii-) $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ ise a noktasına f nin bir kutup yeri veya bir kutup noktası ,

iii-) $\lim_{z \to a} f(z)$ limiti mevcut değil ise a noktasına f nin bir esaslı singüler noktası denir[3].

Teorem 31 [Riemann Teoremi]: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f \in H(G \setminus \{a\})$ olsun. a noktasının f nin bir kaldırılabilir singüler noktası olması için gerek ve yeter koşul $\forall z \in G \setminus \{a\}$ için $g(z) = f(z)$olacak şekilde bir tek $g \in H(G)$ fonsiyonunun bulunmasıdır[3].

Teorem 32: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f \in H(G \setminus \{a\})$ olsun. a noktasının f nin bir kutup yeri olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) = A$ olacak şekilde bir tek $m \geq 1$ tam sayısı ve $A \neq 0$ sayısının mecut olmasıdır[2].

m tamsayısına f nin a kutup yerinin mertebesi adı verilir ve $a \in G$, f nin mertebesi m olan bir kutup yeri ise, $a \in G$ noktasına f nin m. mertebeden bir kutup yeri denir.

Teorem 33: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f \in H(G \setminus \{a\})$ olsun. a noktasının f nin m. mertebeden bir kutup yeri olması için gerek ve yeter koşul, $\forall z \in G \setminus \{a\}$ için $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ ve $g(a) \neq 0$ olacak biçimde bir $g \in H(G)$ fonksiyonunun bulunmasıdır.

İspat. $a \in G$ noktası f nin m. mertebeden bir kutup yeri ise teorem 32 ye göre $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A \neq 0$ dır.

$h:G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\forall z \in G$ için

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^{m+2} f(z), & z \neq a \\ 0 & , z = a \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, açık olarak $h \in H(G)$ olup; $h(a) = h'(a) = 0$ ve $h''(a) = (m+2)(m+1)A \neq 0$ olduğundan, a noktası h fonksiyonunun 2. mertebeden bir sıfır yeridir. O halde teorem 24 e göre $g(a) \neq 0$ ve $\forall z \in G$ için $h(z) = (z-a)^2 g(z)$ koşullarını sağlayan bir tek $g \in H(G)$ fonksiyonu vardır ve bu g fonksiyonu teoremin şartlarını sağlar.

Tersine olarak $g(a) \neq 0$ ve $\forall z \in G \setminus \{a\}$ için $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ koşullarını sağlayan bir $g \in H(G)$ fonksiyonu varsa, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = g(a) \neq 0$ olduğundan teorem 32 ye göre $a \in G$ noktası, f fonksiyonunun m. mertebeden bir kutup yeridir.

Teorem 34: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f \in H(G \setminus \{a\})$ olsun. a noktasının, f nin m. mertebeden bir kutup yeri olması için gerek ve yeter koşul $\forall z \in G \setminus \{a\}$ için $f(z) = \dfrac{a_m}{(z-a)^m} + \ldots + \dfrac{a_1}{z-a} + g(z)$ olacak şekilde bir $g \in H(G)$ fonksiyonu ve $a_m \neq 0$ olan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sabitlerinin olmasıdır[3].

Tanım 22: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in G$ ve $f \in H(G \setminus \{a\})$ olsun. γ, G de bulunan pozitif yönlendirilmiş ve $a \in I(\gamma)$ olan parça-parça sürekli türevlenebilir Jordan eğrisi ise teorem 17 ye göre $\dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$ integralinin değeri γ dan bağımsızdır. γ dan bağımsız olan bu sayıya, f fonksiyonunun $a \in G$ noktasındaki rezidüsü denir ve

$$\operatorname{Re}z(f,a):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz$$

ile gösterilir[2].

Teorem 35 [Rezidü Teoremi]: $G\subset\mathbb{C}$ açık, bir küme ve $a_1,a_2,...,a_n\in G$ olsun. $f\in H(G\backslash\{a_1,...,a_n\})$ ve γ, $G\backslash\{a_1,a_2,...,a_n\}$ de $a_1,a_2,...,a_n\in I(\gamma)$ olan herhangi bir basit kapalı ve parça-parça sürekli türevlenebilir pozitif yönlendirilmiş eğri ise

$$\int_{\gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}z(f,a_k)$$

dir[2].

1.6 Analitik Fonksiyonların Sonsuzdaki durumu

Tanım 23: $r>0$ olmak üzere f, $\mathbb{C}\backslash\overline{D}(0,r)$ de tanımlı bir analitik fonksiyon ise $g:D(0,1/r)\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$, $g(w):=f(\frac{1}{w})$, analitik bir fonksiyon ve 0 noktası g nin bir ayrık singüler noktasıdır.

i-) 0 noktası g nin bir kaldırılabilir singüler noktası ise ∞noktasına f nin bir kaldırılabilir singüler noktası,

ii-) 0 noktası g nin m. mertebeden bir kutup yeri ise ∞noktasına f nin m. mertebeden bir kutup yeri ,

iii-) 0 noktası g nin bir esaslı singüler noktası ise ∞noktasına f nin bir esaslı singüler noktası

denir.

iv-) f fonksiyonu $\{\infty\}\cup\mathbb{C}\backslash\overline{D}(0,r)$ de tanımlı ve $g(w):=f(\frac{1}{w})$, 0 noktasında analitik ise f ye ∞ noktasında analitiktir denir[3].

Tanım 24: $G\subset\mathbb{C}_\infty$ açık ve $f:G\to\mathbb{C}$ olsun. f, G nin her noktasında analitik ise f

ye G üzerinde analitiktir denir.

1.7 Fonksiyon Dizileri ve Fonksiyon Serileri[3]

Tanım 25: $\{z_n\}$ bir kompleks sayı dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n \in \mathbb{N}$ $, n \geq N(\varepsilon)$, için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir ise , $\{z_n\}$ dizisine yakınsak ve $z_0 \in \mathbb{C}$ sayısına $\{z_n\}$ dizisinin bir limiti denir.

$\{z_n\}$ dizisi yakınsak ise limitin tek olduğu kolayca gösterilir. $\{z_n\}$ dizisi yakınsak ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası $\{z_n\}$ dizisinin limiti ise $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ yazılır.

Yakınsak olmayan bir diziye ıraksak bir dizi denir.

Teorem 36: $\{z_n\}$ bir kompleks sayı dizisi olsun. $\{z_n\}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall$ $n, m \in \mathbb{N}$, n ve $m \geq N(\varepsilon)$, için $|z_n - z_m| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısının bulunabilmesidir.

Tanım 26: $\{a_k\}$ bir kompleks dizi ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ ile tanımlı $\{s_n\}$ dizisine genel terimi a_k olan bir kompleks seri denir ve $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ile gösterilir. s_n sayısına ise $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ serisinin n. kısmi toplamı denir.

Tanım 27: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bir seri ve s_n, bu serinin n. kısmi toplamı olsun. $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$ ve s sonlu ise $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ yakınsak ve s ye $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ serisinin toplamı denir. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ve toplamı s ise $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$ yazılır.

Yakınsak olmayan bir seriye ıraksaktır denir.

Teorem 37: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$ dır.

Teorem 38: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\forall n\in\mathbb{N}$ $n\geq N(\varepsilon)$ ve $\forall p\in\mathbb{N}$ için $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$ olan bir $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısının bulunabilmesidir.

Teorem 39 [Karşılaştırma testi]: $N\in\mathbb{N}$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$, $\forall k\in\mathbb{N}, k\geq N$, için $0\leq u_k\leq v_k$ koşulunu sağlayan iki seri olsun. Bu taktirde;

i-) $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi yakınsaktır.

ii-) $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ serisi ıraksak ise $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ serisi ıraksaktır.

Tanım 28: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bir kompleks seri olsun. $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisine mutlak yakınsaktır denir.

Teorem 40: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi mutlak yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ve

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

dir.

Teorem 41[Kök Testi]: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bir kompleks seri ve $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = L$ olsun.

Bu taktirde;

i-) $L<1$ ise seri mutlak yakınsaktır.

ii-) $L>1$ ise seri ıraksaktır.

iii-) $L=1$ ise serinin yakınsaklığı ve ıraksaklığı hakkında bir şey söylenemez.

Tanım 29: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ verilen iki kompleks seri olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için genel terimi $c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j . b_{n-j}$ olan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisine, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi ile $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ serisinin Cauchy çarpımı denir ve

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) * \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

yazılır.

Teorem 42: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mutlak yakınsak ve toplamları sırası ile A ve B olan iki kompleks seri ise $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) * \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$ serisi mutlak yakınsak ve

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) * \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = A \cdot B$$

dir.

Yakınsak iki serinin Cauchy çarpımının her zaman yakınsak olması gerekmez. Örnek olarak; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ serileri göz önüne alındığında bu iki seri yakınsaktır. Fakat $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ serisi yakınsak olduğu halde;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}}\right)$$

serisi , $\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \right| \neq 0$ olduğundan yakınsak değildir.

Tanım 30: $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n : S \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonlarının oluşturduğu $\{f_n\}$ dizisine ortak tanım kümesi S olan bir fonksiyon dizisi denir.

Tanım 31: $\{f_n\}$, ortak tanım kümesi $S \subset \mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi ve $z_0 \in S$ olsun. $\{f_n(z_0)\}$ dizisi yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $z_0 \in S$ noktasında yakınsaktır denir. $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi S nin her noktasında yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $S \subset \mathbb{C}$ üzerinde noktasal yakınsaktır denir.

$\{f_n\}$, $S\subset\mathbb{C}$ üzerinde noktasal yakınsak bir fonksiyon dizisi ise $f:S\to\mathbb{C}$, $\forall z\in S$ için $f(z):=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, fonksiyonuna $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin limiti denir.

Tanım 32: $\{f_n\}$, ortak tanım kümesi $S\subset\mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi ve $f:S\to\mathbb{C}$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\forall z\in S$ ve $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(\varepsilon)$, için $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir ise, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $S\subset\mathbb{C}$ üzerinde $f: S\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n\overset{S}{\Rightarrow}f$ yazılır.

Tanımdan görülüyor ki; $f_n\overset{S}{\Rightarrow}f$ ise $\{f_n\}$ dizisi S üzerinde noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir.

Tanım 33: $\{f_n\}$ ortak tanım kümesi $S\subset\mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi ve $f:S\to\mathbb{C}$ olsun. $\forall K\subset S$ kompakt kümesi için $f_n\overset{K}{\Rightarrow}f$ ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine S üzerinde f ye hemen hemen düzgün yakınsaktır denir.

Teorem 43: $\{f_n\}$, ortak tanım kümesi $S\subset\mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi olsun. $\{f_n\}$ dizisinin S üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık$\forall z\in S$ ve $\forall n,m\in\mathbb{N}, m$ ve $n\geq N(\varepsilon)$, için $|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısının bulunabilmesidir.

Teorem 44: $G\subset\mathbb{C}$ açık bir küme ve $\{f_n\}$, G üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. $\{f_n\}$ dizisi G üzerinde $f:G\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise f fonksiyonu G üzerinde süreklidir.

Teorem 45: γ, kompleks düzlemde parça parça sürekli türevlenebilir bir eğri ve $\{f_n\}$, γ üzerinde tanımlı bir sürekli fonksiyon dizisi olsun. $f_n\overset{\gamma}{\Rightarrow}f$ ise $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$ mevcut ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz=\int_\gamma f(z)\,dz$$

dir.

Teorem 46: $G\subset\mathbb{C}$ açık bir küme ve $\{f_n\}$, G üzerinde tanımlı bir analitik fonksiyon dizisi olsun. $\{f_n\}$ dizisi G üzerinde $f:G\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise, f limit fonksiyonu G üzerinde analitik ve $\{f_n'\}$ dizisi G de f' türev fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Tanım 34: $\{f_k\}$ ortak tanım kümesi $S\subset\mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $s_n:S\to\mathbb{C}$ fonksiyonları $\forall z\in S$ için $s_n(z):=\sum_{k=0}^{n}f_k(z)$ olarak tanımlanırsa, $\{s_n\}$ fonksiyon dizisine S üzerinde tanımlı genel terimi f_k olan bir kompleks fonksiyon serisi denir ve $\sum_{k=0}^{\infty}f_k$ ile gösterilir. $s_n:=\sum_{k=0}^{n}f_k$ toplamına $\sum_{k=0}^{\infty}f_k$ serisinin n. kısmi toplamı denir.

Tanım 35: $\sum_{k=0}^{\infty}f_k$, $S\subset\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon serisi, $s_n=\sum_{k=0}^{n}f_k$ bu serinin n. kısmi toplamı ve $f:S\to\mathbb{C}$ olsun.

i-) $\{s_n\}$ dizisi S üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty}f_k$ fonksiyon serisine S üzerinde noktasal yakınsak ve $\forall z\in S$ için $f(z):=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z)$ olarak tanımlanan $f:S\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna $\sum_{k=0}^{\infty}f_k$ serisinin limiti denir.

ii-) $\{s_n\}$ dizisi S üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty}f_k$ fonksiyon serisi S üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve bu durum $\sum_{k=0}^{\infty}f_k\overset{S}{\Rightarrow}f$ ile gösterilir.

iii-) $\{s_n\}$ dizisi S nin her kompakt alt kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty}f_k$ fonksiyon serisine S üzerinde f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır denir.

Teorem 47: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, $S \subset \mathbb{C}$ kümesi üzerinde tanımlı bir kompleks fonksiyon serisi olsun. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ fonksiyon serisi S üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall z \in S$ ve $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$, için $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısının bulunabilmesidir.

Teorem 48: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, $G \subset \mathbb{C}$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon serisi olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonları sürekli ve $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ serisi G üzerinde bir $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise f, G de süreklidir.

Teorem 49: γ, kompleks düzlemde parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ve $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, γ üzerinde tanımlı bir sürekli fonksiyon serisi olsun. $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \overset{\gamma}{\Rightarrow} f$ ise $\int_\gamma f(z)dz$ integrali mevcut ve $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma f_k(z)dz$ dir.

Teorem 50: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, $G \subset \mathbb{C}$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon serisi olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $f_k : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonları analitik ve $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ serisi G üzerinde bir $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise; f, G üzerinde analitik, $\forall z \in G$ için

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$$

ve $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(z)$ serisi G de f' ye hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Teorem 51 [Düzgün Yakınsaklık İçin Weierstrass M-Testi]: $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, S üzerinde tanımlı bir fonksiyon serisi ve $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ yakınsak ve $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall z \in S$ için $|f_n(z)| \leq M_n$ ise $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ fonksiyon serisi S üzerinde düzgün yakınsaktır.

1.8 Kuvvet Serileri

Tanım 36: $a\in\mathbb{C}$, $\{a_n\}$ bir kompleks dizi ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ şeklinde bir fonksiyon serisine a merkezli ve a_n katsayılı bir kuvvet serisi denir[1].

Açık olarak; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisi $z=a\in\mathbb{C}$ noktasında yakınsaktır.

Teorem 52 [Cauchy - Hadamard Teoremi]: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ verilen bir kuvvet serisi olsun. Bu taktirde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek $0\le R\le+\infty$ genişletilmiş reel sayısı vardır.

i-) $R=0$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ serisi yalnız $z=a$ noktasında yakınsaktır.

ii-) $R=+\infty$ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ serisi $\mathbb{C}$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır.

iii-) $0<R<+\infty$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ serisi D(a;R) dairesinde mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır ve $|z-a|>R$ olan $\forall z\in\mathbb{C}$ noktasında ıraksaktır.

İspat. $R:=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ise $0\le R\le+\infty$ dir ve istenilen şartları sağlar.

i-) $R=0$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ serisi yalnız $a\in\mathbb{C}$ noktasında yakınsaktır.

Varsayalım ki, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ serisi $z_0\neq a$ olan bir $z_0\in\mathbb{C}$ noktasında yakınsak olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ yakınsak olduğundan teorem 37 ye göre $\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-a)^n=0$ dır. Yakınsak olan her dizi sınırlı olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $|a_n(z_0-a)^n|\le M$ olacak şekilde bir M>0 sayısı vardır. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\sqrt[n]{|a_n|}\le\sqrt[n]{M}/|z_0-a|$ olduğundan $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\le\dfrac{1}{|z_0-a|}$ yani $R\ge|z_0-a|>0$ elde edilir ki, bu $R=0$ olması ile çelişir.

ii-) $R=+\infty$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ serisi $\mathbb{C}$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır.

$K\subset\mathbb{C}$ herhangibir kompakt altküme ise $K\subset D(a,r)$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı vardır. $R=+\infty$, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\text{Inf}\left\{\text{Sup}\left\{\sqrt[k]{|a_k|}:k\geq n\right\}:n\in\mathbb{N}\right\}$ ve $R:=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ olduğundan; $\dfrac{1}{2r}>0$ sayısına karşılık $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(r)$ için $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|}:k\geq n\right\}<\dfrac{1}{2r}$ olacak şekilde bir $N(r)\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Son eşitsizlikten $\forall z\in K$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N(r)$ için $|a_n(z-a)^n|<\dfrac{1}{2^n}$ elde edilir. Bu ise teorem 51 e göre, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisinin K üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

iii-) $0<R<+\infty$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisi $D(a,R)$ açık dairesinde mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır. $K\subset D(a,R)$ herhangi bir kompakt altküme ise $K\subset D(a,r)$ olacak şekilde bir $0<r<R$ sayısı vardır.
$R^*>0$ sayısı $0<r<R^*<R$ koşulunu sağlayan bir sayı ise $\dfrac{1}{R}<\dfrac{1}{R^*}$ ve $\dfrac{1}{R}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N(R^*)$, için $\sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{1}{R^*}$ olacak şekilde bir $N(R^*)\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Son eşitsizlikten $\forall z\in K$ ve $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N(R^*)$, için $|a_n(z-a)^n|<\left(\dfrac{r}{R^*}\right)^n$ elde edilir.O halde teorem 51 e göre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisi , K üzerinde düzgün yakınsaktır.

$z_0\in\mathbb{C}$, $|z_0-a|>R$ olan bir nokta ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ serisinin ıraksak olduğunu gösterelim. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ yakınsak ise $\{a_n(z_0-a)^n\}$ dizisi sınırlı olduğundan, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $|a_n(z_0-a)^n|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Son eşitsizlikten $|z_0-a|\leq R$ elde edilir ve bu $|z_0-a|>R$ olması ile çelişir. O halde; $|z_0-a|>R$ ise , $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ serisi ıraksaktır.

Son olarak R nin tekliğini gösterelim.$0\leq R_1,R_2\leq+\infty$ sayıları teoremin şartlarını sağlayan iki sayı olsun. $R_1\neq R_2$ ise $R_1<|z_0-a|<R_2$ olan bir $z_0\in\mathbb{C}$ noktası alındığında $R_1<|z_0-a|$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ serisi ıraksaktır.

$|z_0-a|<R_2$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ serisi yakınsaktır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $R_1=R_2$ dir.

Tanım 37: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ verilen bir kuvvet serisi ise $R:=1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$ ile tanımlı $0\leq R\leq+\infty$ genişletilmiş reel sayısına $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı denir.

Tanım 38: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ yakınsaklık yarıçapı $0<R\leq+\infty$ olan bir kuvvet serisi olsun. $D(a,\infty):=\mathbb{C}$ ise $D(a,R)$ açık dairesine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık dairesi denir.

Cauchy-Hadamard teoremine göre, $\forall z\in D(a,R)$ için $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisi $D(a,R)$ üzerinde $f(z)$ ye mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n(z-a)^n$ fonksiyonları $D(a,R)$ de analitik olduğundan, teorem 50 ye göre $f\in H(D(a,R))$ dir.

Teorem 53: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ yakınsaklık yarıçapı $R>0$ olan bir kuvvet serisi ve $\forall z\in D(a,R)$ için $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ise $,\forall k\in\mathbb{N}$ ve $\forall z\in D(a,R)$ için

$$f^{(k)}(z):=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$$

dir ve $\forall k\in\mathbb{N}$ için $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ dır.

İspat. Teorem 50 den yararlanılarak tümevarım ispat metodu ile yapılır.

Tanım 39: $G\subset\mathbb{C}$ açık bir altküme, $a\in G$ ve $f\in H(G)$ olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n(f,a):=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f,a)(z-a)^n$ kuvvet serisine f nin a noktasındaki

Taylor serisi ve $P_n(f,a):=\sum_{k=0}^{n} a_k(f,a)(z-a)^k$ polinomuna f nin a noktasındaki n. dereceden Taylor polinomu denir.

Teorem 54 [TaylorTeoremi]: $G\subset\mathbb{C}$ açık, $R:=d(a,\partial G):=\inf\{|z-a|: z\in\partial G\}$ ve $f\in H(G)$ ise f nin a noktasındaki $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f,a)(z-a)^n$ Taylor serisi D(a,R) de f ye mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsaktır[2].

Tanım 40: $0\le r\le R\le +\infty$ ve $a\in\mathbb{C}$ olsun. $\Omega(a;r,R):=\{z: r<|z-a|<R\}$ açık altkümesine, a merkezli ve r, R yarıçaplı bir halka bölge denir.

Tanım 41: $f\in H(\Omega(a;r,R))$ olsun. $k\in\mathbb{Z}$ bir tamsayı ise $\dfrac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}$ fonksiyonu $\Omega(a;r,R)$ halkasında analitik olduğundan γ, $\Omega(a;r,R)$ de pozitif yönlendirilmiş parça-parça sürekli türevlenebilir herhangi bir basit kapalı eğri ise teorem 17 ye göre $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\dfrac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$ integralinin değeri γ eğrisinden bağımsızdır. $\forall k\in\mathbb{Z}$ için

$$a_k(f,a):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$$

ise

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(f,a)(z-a)^k:=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f,a)(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(f,a)(z-a)^{-k}$$

fonksiyon serisine, f nin a merkezli Laurent serisi, $a_k(f,a)$ katsayılarına f nin Laurent katsayıları denir[2].

Teorem 55: $f\in H(\Omega(a;r,R))$ ve $r<r_1<|z-a|<R_1<R$ olsun. γ_1,γ_2 sırası ile a merkezli ve r_1,R_1 yarıçaplı pozitif yönlendirilmiş çemberler ise $\forall z\in\Omega(a;r,R)$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

dir.

İspat. $z\in\Omega(a;r,R)$ keyfi , fakat sabit alınan bir nokta olsun. $f\in H(\Omega(a;r,R))$ olduğundan, $g:\Omega(a;r,R)\to\mathbb{C}$,

$$g(\zeta):=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & ,\zeta\neq z\\ f'(z) & ,\zeta=z\end{cases}$$

fonksiyonu $\Omega(a;r,R)$ halkasında analitiktir. O halde teorem 17 ye göre

$$\int_{\gamma_2}g(\zeta)d\zeta=\int_{\gamma_1}g(\zeta)d\zeta$$

dir. Bu eşitlikten

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

elde edilir.

Teorem 56: $f\in H(\Omega(a;r,R))$ ise, f nin $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(f,a)(z-a)^k$ Laurent serisi $\Omega(a;r,R)$ halkasında f ye noktasal yakınsaktır.

İspat. $z\in\Omega(a;r,R)$ keyfi fakat sabit bir nokta ise $r<r_1<|z-a|<R_1<R$ olacak şekilde r_1,R_1 sayıları vardır. γ_1,γ_2 teorem 55 deki çemberler ise,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

dir. $\forall\zeta\in\gamma_2$ için, $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{|z-a|}{R_1}<1$ ve f, γ_2 üzerinde sınırlı olduğundan teorem

51 e göre; $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}(z-a)^k$ fonksiyon serisi γ_2 üzerinde düzgün yakınsak

ve

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}(z-a)^k$$

dir. Eşitliğin iki tarafı $\frac{1}{2\pi i}$ ile çarpılıp; γ_2 üzerinde integral alınırsa , teorem 49 a göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f,a)(z-a)^k$$

elde edilir.

Benzer şekilde, f γ_1 üzerinde sınırlı ve $\forall \zeta \in \gamma_1$ için $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| = \frac{r_1}{|z-a|} < 1$ ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta-a)^{k-1}}{(z-a)^k}$ serisi, γ_1 üzerinde $-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f,a)(z-a)^{-k}$$

elde edilir. Sonuç olarak , $z \in \Omega(a;r,R)$ keyfi olduğundan $\forall z \in \Omega(a;r,R)$ için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f,a)(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(f,a)(z-a)^{-k}$$

dir.

Teorem 57: $f \in H(\Omega(a;r,R))$ ise f nin $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k(f,a)(z-a)^k$ Laurent serisi $\Omega(a;r,R)$ halkasında f ye hemen hemen düzgün yakınsaktır.

İspat. $\forall z \in \Omega(a;r,R)$ için teorem 56 ya göre

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f,a)(z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(f,a)(z-a)^{-k}$$

dir.

$$f_1(z):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f,a)(z-a)^k \quad , T_n(z):=\sum_{k=0}^{n}a_k(f,a)(z-a)^k$$

$$f_2(z):=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(f,a)(z-a)^{-k} \; , S_n(z):=\sum_{k=1}^{n}a_{-k}(f,a)(z-a)^{-k}$$

ise

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

ve

$$\sum_{k=-n}^{n}a_k(f,a)(z-a)^k=T_n(z)+S_n(z)$$

dir.

$K\subset\Omega(a;r,R)$ herhangi bir kompakt altküme ise, $\forall z\in K$ için $r<\rho^*<|z-a|<\rho<R$ olacak şekilde ρ,ρ^* sayıları vardır. $r_1,R_1>0$ sayıları $r<r_1<\rho^*$ ve $\rho<R_1<R$ olacak şekilde seçilirse; γ_2,γ_1 teorem 55 de tanımlanan çemberler olmak üzere $\forall z\in K$ için

$$f_1(z)-T_n(z)=\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

ve

$$f_2(z)-S_n(z)=-\frac{1}{2\pi i(z-a)^n}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)(\zeta-a)^n}{\zeta-z}d\zeta$$

dir. $M_2(f,R_1):=\sup\{|f(\zeta)|:\zeta\in\gamma_2\}$ ve $M_1(f,r_1):=\sup\{|f(\zeta)|:\zeta\in\gamma_1\}$ ise, $\forall z\in K$ için

$$|f_1(z)-T_n(z)|\le\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^n\frac{\rho}{R_1-\rho}M_2(f,R_1)$$

ve

$$|f_2(z)-S_n(z)|\le\left(\frac{r_1}{\rho^*}\right)^n\frac{r_1M_1(f,r_1)}{(\rho^*-r_1)}$$

dir. Böylece $\forall z\in K$ için

$$\left|f(z)-\sum_{k=-n}^{n}a_k(f,a)(z-a)^k\right| \leq \left(\frac{\rho}{R_1}\right)^n \frac{\rho}{R_1-\rho}M_2(f,R_1)+\left(\frac{r_1}{\rho^*}\right)^n \frac{r_1M_1(f,r_1)}{(\rho^*-r_1)}$$

elde edilir. $\frac{\rho}{R_1}<1$ ve $\frac{r_1}{\rho^*}<1$ olduğundan

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^n \frac{\rho}{R_1-\rho}M_2(f,R_1)+\left(\frac{r_1}{\rho^*}\right)^n \frac{r_1M_1(f,r_1)}{(\rho^*-r_1)}\right\}=0$$

dır. Sonuç olarak ;$\forall\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N(\varepsilon)$,ve $\forall z\in K$ için

$$\left|f(z)-\sum_{k=-n}^{n}a_k(f,a)(z-a)^k\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. O halde tanım 35 e göre f nin $\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(f,a)(z-a)^k$ Laurent serisi, $\Omega(a;r,R)$ halkasında f ye hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Tanım 42: $f\in H(\Omega(a;r,R))$ ve $\forall k\in\mathbb{Z}$ tamsayısı için $a_k(f,a)$ lar, f nin a noktasındaki Laurent katsayıları ise $\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(f,a)(z-a)^{-k}$ serisine f nin a noktasındaki esas kısmı denir[3].

Teorem 58: $f\in H(\Omega(a;r,R))$ ve $\forall k\in\mathbb{Z}$ için $a_k(f,a)$ lar, f nin a noktasındaki Laurent katsayıları olsun. a noktasının f nin m. mertebeden bir kutup yeri olması için gerek ve yeter koşul $a_{-m}(f,a)\neq 0$ ve $\forall k\in\mathbb{Z}$, $k<-m$, için $a_k(f,a)=0$ olmasıdır.

İspat. γ, $\Omega(a;r,R)$ de pozitif yönlendirilmiş parça parça sürekli türevlenebilir herhangibir Jordan eğrisi ise, $\forall k\in\mathbb{Z}$ için

$$a_k(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$$

dir.

i-) a noktası f nin m. mertebeden bir kutup yeri ise teorem 33 e göre $g(a)\neq 0$ ve $\forall z\in\Omega(a;r,R)$ için $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$ olacak şekilde bir $g\in H(D(a,R))$ fonksiyonu vardır. O halde teorem 16, 18 ve 20 ye göre

$$\begin{aligned} a_k(f,a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{g(z)}{(z-a)^{m+k+1}}dz \\ &= \begin{cases} 0 & ,k<-m \\ g(a) & ,k=-m \\ \dfrac{g^{(m+k)}(a)}{(m+k)!} & ,k>-m \end{cases} \end{aligned}$$

dir.

ii-) $a_{-m}(f,a)\neq 0$ ve $\forall k\in\mathbb{Z}$, $k<-m$, için $a_k(f,a)=0$ ise a noktası f nin m. mertebeden bir kutup noktasıdır.

$\forall k\in\mathbb{Z}$, $k<-m$, için $a_k(f,a)=0$ olduğundan teorem 56 ya göre $\forall z\in\Omega(a;r,R)$ için

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{-k}(f,a)}{(z-a)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f,a)(z-a)^k$$

dir. Bu ise $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=a_{-m}(f,a)\neq 0$ olduğunu gösterir ve teorem 32 ye göre a noktası f nin m. mertebeden bir kutup yeridir.

Teorem 59: $f\in H(\Omega(a;r,R))$ ve $\forall k\in\mathbb{Z}$ için $a_k(f,a)$ lar, f nin a noktasındaki Laurent katsayıları olsun. $\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}(z-a)^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$, $\Omega(a;r,R)$ halkasında f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak bir fonksiyon serisi ise $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $c_k = a_k(f,a)$ dir.

1.9 Konform Eşdeğerlilik ve Riemann Dönüşüm Teoremi

Tanım 43: G_1 ve G_2, kompleks düzleminde iki bölge ve $f:G_1 \to G_2$ bire-bir örten ve analitik bir fonksiyon ise f dönüşümüne bir konform dönüşüm denir.

G_1 bölgesini G_2 bölgesine resmeden bir konform dönüşüm bulunabilirse; G_1 bölgesi G_2 bölgesine konform eşdeğerdir denir. G_1 bölgesi G_2 bölgesine konform eşdeğer ise, teorem 28 e göre G_2 bölgesi de G_1 bölgesine konform eşdeğerdir[3].

Teorem 60 [Riemann Dönüşüm Teoremi]: G, kompleks düzlemde $G \neq \mathbb{C}$ olan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ ise G yi $U := \{z : |z| < 1\}$ açık birim dairesine dönüştüren ve $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $\varphi : G \to U$ konform dönüşümü vardır[3].

2. TEORİK ÇALIŞMA [FABER POLİNOMLARI]

Bu bölümde kompleks düzlemde sınırı bir Jordan eğrisi olan bir B kontiniumun n. dereceden $F_n(z)$ Faber polinomları tanımlanacak, Faber polinomlarının integral gösterimleri ile diğer bazı özellikleri incelenecek ve 1.8 de verilen kuvvet serilerine benzer şekilde Faber polinomları serisi tanımlanacak ve bu serilerin yakınsaklık özellikleri incelenecektir. Bölüm içinde, U ile kompleks düzlemde açık birim dairesi, B ile kompleks düzlemde sınırı bir Jordan eğrisi olan bir kontinium, L ile B nin pozitif yönlendirilmiş sınırı ve CB ile B nin genişletilmiş kompleks düzleme göre bütünleyeni gösterilecektir.

Teorem 61: B, kompleks düzlemde sınırı bir Jordan eğrisi olan bir kontinium ise $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}>0$ olacak şekilde bir $\Phi: CB \to C\overline{U}$ konform dönüşümü vardır.

İspat. $z_0 \in B$ sabit bir nokta olsun. $\eta: CB \to \mathbb{C}$, $\eta(z) := \dfrac{1}{z-z_0}$, dönüşümü CB basit bağlantılı bölgesini $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı bir $G := \eta(CB)$ bölgesine resmeden bir konform dönüşümdür ve $\eta(\infty)=0$ dır. Diğer taraftan Riemann dönüşüm teoremine göre, G yi U açık birim dairesi üzerine dönüştüren ve $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)>0$ koşullarını gerçekleyen bir tek $\varphi: G \to U$ konform dönüşümü vardır. $\psi: U \to C\overline{U}$, $\psi(0)=\infty$ ve $t\neq 0$ için $\psi(t)=\dfrac{1}{t}$, dönüşümü konform olduğundan; $\Phi := \psi\circ\varphi\circ\eta: CB \to C\overline{U}$, $\Phi(z)=\dfrac{1}{\varphi\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)}$, dönüşümü konformdur ve $\Phi(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}>0$ koşullarını sağlar.

2.1 Faber Polinomlarının Tanımı

Tanım 44: B, kompleks düzlemde sınırı bir Jordan eğrisi olan bir kontinium ve $\Phi: CB \to C\overline{U}$, teorem 61 deki şartları sağlayan konform dönüşüm olsun. $n \in \mathbb{N}$ ise $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$ olduğundan $\lim\limits_{z\to 0} z^n \Phi^n\left(\frac{1}{z}\right) > 0$ dır. O halde teorem 32 ye göre; $z=0$ noktası, $\Phi^n\left(\frac{1}{z}\right)$ fonksiyonunun n. mertebeden bir kutup yeridir ve teorem 58 e göre, yeteri kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\Omega(0;0,\varepsilon)$ halkasındaki laurent serisi, $a_n^{(n)} \neq 0$ olmak üzere $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{z^k} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} z^k$ şeklinde olup; $\forall z \in \Omega(0;0,\varepsilon)$ için

$$\Phi^n\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} z^k$$

dir. Bu eşitlikten $\forall z \in \Omega(0;\frac{1}{\varepsilon},+\infty)$ için

$$\Phi^n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{z^k} \tag{1}$$

elde edilir ve sağ yandaki seri, $\Omega(0;\frac{1}{\varepsilon},+\infty)$ halkasında $\Phi^n(z)$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

$$F_n(z) := a_n^{(n)} z^n + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}$$

polinomuna B nin n. dereceden Faber polinomu denir[6],[7],[8].

Tanım 45: $\Phi: CB \to C\overline{U}$, teorem 61 deki şartları sağlayan konform dönüşüm, $n \in \mathbb{N}$ ve F_n, B nin n. dereceden Faber polinomu olsun. $\omega_n : CB \to \mathbb{C}$, $\omega_n(z) := \Phi^n(z) - F_n(z)$, fonksiyonuna Φ^n fonksiyonunun esas kısmı denir. Açık olarak görülüyor ki; ω_n fonksiyonu CB bölgesinde analitiktir ve (1) e göre ∞ noktası ω_n nin en az 1. mertebeden bir sıfır yeridir. Öte yandan ω_n nin ∞ noktası komşuluğundaki Laurent serisi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{z^k}$ olup; $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{z^k}$ serisi yeteri kadar büyük $r>0$ sayıları için $\Omega(0;r,+\infty)$ halkasında ω_n ye hemen hemen düzgün yakınsaktır ve $\forall z\in\Omega(0;r,+\infty)$ için

$$\omega_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_{nk}}{z^k} \tag{2}$$

dir. Ayrıca $\forall z\in CB$ için

$$F_n(z)=\Phi^n(z)-\omega_n(z) \tag{3}$$

dir.

Bundan sonraki kısımlarda $\Phi:CB\to C\overline{U}$ ile $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}>0,\ \ \Phi(\infty)=\infty$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm ve Ψ ile onun Φ^{-1} tersi gösterilecektir.

Açık olarak, $\lim\limits_{w\to\infty}\frac{\Psi(w)}{w}>0$ ve $\Psi(\infty)=\infty$ olup; $\Psi:C\overline{U}\to CB$ dönüşümü, konformdur. Diğer taraftan Φ,Ψ dönüşümleri sırası ile $\overline{CB}$ ve CU üzerine sürekli genişletilebilir[3].

Tanım 46: $R>1$ olmak üzere $C\overline{U}$ de 0 merkezli R yarıçaplı γ_R çemberinin, CB bölgesindeki $L_R:=\Psi(\gamma_R):=\{z\in CB:|\Phi(z)|=R\}$resmine R yarıçaplı bir seviye çizgisi denir[7]. γ_R çemberi pozitif yönlendirilirse L_R seviye çizgisi CB de pozitif yönlüdür. Diğer taraftan $R_2>R_1>1$ ise $L_{R_1}\subset I(L_{R_2})$ dir.

2.2 Faber Polinomlarının İntegral Gösterimleri

Teorem 62: F_n, B nin n. dereceden Faber polinomu ve $R>1$ olsun. Bu taktirde

i-) $z\in I(L_R)$ ise

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R}\frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{4}$$

ii-) $z \in E(L_R)$ ise

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{5}$$

dir.

İspat. i-) $z \in I(L_R)$ ise, Cauchy integral formülü ve (3) kullanılırsa

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{F_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\Phi^n(\zeta) - \omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{6}$$

elde edilir. $R' > R$ ise teorem 17 ye göre

$$\int_{L_R} \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{L_{R'}} \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{7}$$

dir. $R'>R$ sayısı yeteri kadar büyük seçilirse, (2) ye göre $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{\zeta^k(\zeta - z)}$ serisi $L_{R'}$ üzerinde $\frac{\omega_n(\zeta)}{(\zeta - z)}$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olacağından teorem 49 a göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}} \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{nk}}{\zeta^k(\zeta - z)} \right) d\zeta$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}} \frac{\beta_{nk}}{\zeta^k(\zeta - z)} d\zeta \right)$$

$$= 0 \tag{8}$$

dir. (6), (7) ve (8) den

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

elde edilir.

ii-) $z \in E(L_R)$ olsun. $R'>R$ ve $r>0$ sayıları $D(z,r) \subset E(L_R) \cap I(L_{R'})$ olacak şekilde seçilsin. $\gamma(z,r)$, $D(z,r)$ nin pozitif yönlendirilmiş sınırı ise teorem 17 ye göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R'}} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(z,r)} \frac{\Phi^n(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

olduğundan , teorem 18 ve (4) den

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

elde edilir.

Teorem 63: $R \geq 1$ ve $z \in I(L_R)$ ise $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}} \tag{9}$$

dir ve $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$ serisi $I(L_R) x C\overline{D}(0,R)$ de hemen hemen düzgün yakınsaktır.

İspat. $z \in I(L_R)$ ise $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ fonksiyonu $C\overline{D}(0,R)$ de analitik ve $w=0$ noktası $\frac{\Psi'\left(1/w\right)}{\Psi\left(1/w\right) - z}$ fonksiyonunun 1. mertebeden bir sıfır yeri olduğundan, $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$'nin ∞ noktasının bir komşuluğundaki Laurent serisi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(z)}{w^{k+1}}$ şeklinde olup; bu seri bu komşulukta $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(z)}{w^{k+1}} \tag{10}$$

olduğundan, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{w^n \Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^n A_k(z)}{w^{k+1}} \tag{11}$$

dir. $R'>R$ sayısı yeteri kadar büyük seçilirse (11) in sağ tarafındaki seri $\gamma(0,R')\subset C\overline{D}(0,R)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan teorem 13, 49,62 ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(0,R')} \frac{w^n \Psi'(w)}{\Psi(w)-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(0,R')} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^n A_k(z)}{w^{k+1}}\right) dw$$

eşitliğinden , $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(z) = A_n(z) \tag{12}$$

elde edilir. (10) ve (12) ifadelerinden

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$$

dir. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$ serisinin $I(L_R)xC\overline{D}(0,R)$ üzerinde $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$K_1xK_2 \subset I(L_R)xC\overline{D}(0,R)$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. $r:= d(K_1, L_R):= \inf\{|z-\zeta|: z\in K_1, \zeta\in L_R\}$ ve $R_1:= d(0,K_2):= \inf\{|w|: w\in K_2\}$ ise r>0 ve $1\le R < R_1$ dir. (4) eşitliği ve teorem11 kullanılırsa $\forall (z,w)\in K_1xK_2$ için

$$\left|\frac{F_K(z)}{w^{k+1}}\right| = \left|\frac{1}{w^{k+1}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right)\right| \le \frac{\ell_{L_R}}{2\pi r R_1}\left(\frac{R}{R_1}\right)^k$$

elde edilir. $0<\frac{R}{R_1}<1$ olduğundan Weierstrass M-testine göre $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$ serisi $I(L_R)xC\overline{D}(0,R)$ üzerinde hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Teorem 64: $R\ge 1$ ve $z\in I(L_R)$ ise $\forall w \in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k'(z)}{w^{k+1}}$$

dir ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{F_k'(z)}{w^{k+1}}$ serisi $I(L_R)xC\overline{D}(0,R)$ de hemen hemen düzgün yakınsaktır.

İspat. $z\in I(L_R)$ ise $\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}$ fonksiyonu $C\overline{D}(0,R)$ de analitik ve w=0 noktası $\frac{\Psi'\left(1/w\right)}{(\Psi\left(1/w\right)-z)^2}$ fonksiyonunun 2. mertebeden bir sıfır yeri olduğundan, $\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}$'nin ∞ noktasının bir komşuluğundaki Laurent serisi $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(z)}{w^{k+1}}$ şeklinde olup; bu seri bu komşulukta $\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. $\forall w\in C\overline{D}(0,R)$ için

$$\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(z)}{w^{k+1}} \tag{13}$$

olduğundan, $n\in\mathbb{N}$ için

$$\frac{w^n\,\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^n\,A_k(z)}{w^{k+1}} \tag{14}$$

dir. R'>R sayısı yeteri kadar büyük seçilirse (14) in sağ tarafındaki seri $\gamma(0,R')\subset C\overline{D}(0,R)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan teorem 13, 49 ,19 ve 62 kullanılırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(0,R')}\frac{w^n\,\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(0,R')}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^nA_k(z)}{w^{k+1}}\right)dw$$

eşitliğinden $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, için

$$F_n'(z)=A_n(z) \tag{15}$$

elde edilir. (13) ve (15) ifadelerinden

$$\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k'(z)}{w^{k+1}}$$

olduğu görülür.

Son olarak $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k'(z)}{w^{k+1}}$ serisinin $I(L_R)\times C\overline{D}(0,R)$ üzerinde $\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$K_1\times K_2 \subset I(L_R)\times C\overline{D}(0,R)$ herhangi bir kompakt alt küme olsun.

$$r := d(K_1, L_R) := \inf\{|z-\zeta| : z\in K_1, \zeta\in L_R\}$$

ve

$$R_1 := d(0,K_2) := \inf\{|w| : w\in K_2\}$$

ise r>0 ve $1\le R<R_1$ dir. (4) eşitliği, teorem 19 ve 11 kullanılırsa $\forall (z,w)\in K_1\times K_2$ için

$$\left|\frac{F_k'(z)}{w^{k+1}}\right| = \left|\frac{1}{w^{k+1}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R}\frac{\Phi^k(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right)\right| \le \frac{\ell_{L_R}}{2\pi r^2 R_1}\left(\frac{R}{R_1}\right)^k$$

elde edilir. $0<\frac{R}{R_1}<1$ olduğundan Weierstrass M-testine göre $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k'(z)}{w^{k+1}}$ serisi $I(L_R)\times C\overline{D}(0,R)$ üzerinde hemen hemen düzgün yakınsaktır.

Teorem 65: $\left\{\sqrt[n]{|F_n(z)|}\right\}$ dizisi CB de $|\Phi(z)|$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

İspat. $K\subset CB$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. $\rho := d(0,\Phi(K))$ ise $\rho>1$'dir. r,R>0 sayıları $1<r<R<\rho$ olacak şekilde seçilirse; $K\subset E(L_R)\subset E(L_r)$ ve $\forall z\in K$ için $|\Phi(z)|>R$ dir.Teorem 62 ye göre, $\forall z\in K$ için

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

olduğundan, $\forall z\in K$ için

$$|F_n(z) - \Phi^n(z)| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{L_r}\frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right|$$

dir. O halde $\forall z \in K$ için

$$\left| \frac{|F_n(z)|}{|\Phi(z)|^n} - 1 \right| \leq \frac{\ell_{L_r}}{2\pi d(K, L_r)} \left(\frac{r}{R} \right)^n \tag{16}$$

dir. $0 < \frac{r}{R} < 1$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$, için

$$\frac{\ell_{L_r}}{2\pi d(K, L_r)} \left(\frac{r}{R} \right)^n < \frac{1}{2} \tag{17}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. (16) ve (17) den $\forall z \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$, için

$$\frac{1}{2}|\Phi(z)|^n < |F_n(z)| < \frac{3}{2}|\Phi(z)|^n \tag{18}$$

elde edilir. Bu ise $\sqrt[n]{|F_n(z)|} \overset{K}{\Rightarrow} |\Phi(z)|$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Teorem 66: $\left\{ \sqrt[n]{|F_n'(z)|} \right\}$ dizisi CB de $|\Phi(z)|$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

İspat. $K \subset CB$ herhangi bir kompakt alt küme olsun. $1 < r < R < \rho$ sayıları teorem 65 de olduğu gibi seçilirse , teorem 62 ye göre $\forall z \in K$ için

$$F_n(z) = \Phi^n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

dir . Teorem 19 a göre $\forall z \in K$ için

$$F_n'(z) = n\Phi^{n-1}(z)\Phi'(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{\Phi^n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \tag{19}$$

elde edilir.

$M_1 := \sup\{|\Phi(z)| : z \in K\}, M_2 := \sup\{|\Phi'(z)| : z \in K\}$, $m_1 := \inf\{|\Phi(z)| : z \in K\}$ ve $m_2 := \inf\{|\Phi'(z)| : z \in K\}$ olsun. $\forall z \in K$ için $\Phi(z) \neq 0$, $\Phi'(z) \neq 0$ ve sürekli fonksiyonların modülü kompakt kümeler üzerinde maksimum ve minimum değerini aldığından $m_1, m_2, M_1, M_2 > 0$ dır[2]. Diğer taraftan $\forall z \in K$ için $|\Phi(z)| > R$ olduğundan (19) eşitliğinden $\forall z \in K$ için

$$\left| \frac{|F_n'(z)|}{n|\Phi'(z)||\Phi(z)|^{n-1}} - 1 \right| \leq \frac{R\ell_{L_r}}{2\pi n\, m_2 d^2(K, L_r)} \left(\frac{r}{R} \right)^n \tag{20}$$

dir. $0 < \frac{r}{R} < 1$ olduğundan, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$, için

$$\frac{R\ell_{L_r}}{2\pi \acute{n}\, m_2 d^2(K, L_r)} \left(\frac{r}{R} \right)^n < \frac{1}{2} \tag{21}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. (20) ve (21) den, $\forall z \in K$ ve $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$, için

$$\frac{1}{2} \frac{m_2}{M_1} n|\Phi(z)|^n < |F_n'(z)| < \frac{3}{2} \frac{M_2}{m_1} n|\Phi(z)|^n$$

elde edilir. Bu ise $\sqrt[n]{|F_n'(z)|} \overset{K}{\Rightarrow} |\Phi(z)|$ olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Teorem 67: r>1 ise

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{F_k(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)} dz = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \tag{22}$$

dir.

İspat. $\omega_k(z)$, $\Phi^k(z)$ nin esas kısmı ise $\lim_{z \to \infty} \omega_k(z) = 0$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için bir $1 < r < R(\varepsilon)$ sayısı bulunabilir öyleki $\forall w \in C\overline{D}(0, R(\varepsilon))$ için $|\omega_k(\Psi(w))| < \varepsilon$ dir. Teorem 17 ye göre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{F_k(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{R(\varepsilon)}} \frac{F_k(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)} dz$$

olduğundan, (3) ve teorem 13 gözönüne alındığında

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{F_k(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R(\varepsilon)}}\frac{\Phi^k(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R(\varepsilon)}}\frac{\omega_k(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{F_k(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R(\varepsilon))} w^{k-n-1}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R(\varepsilon))}\frac{\omega_k(\Psi(w))}{w^{n+1}}dw$$

dir. Son eşitlikten teorem 11 e göre

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{F_k(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R(\varepsilon))} w^{k-n-1}dw\right|<\varepsilon$$

, ve $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{F_k(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R(\varepsilon))} w^{k-n-1}dw$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R(\varepsilon))} w^{k-n-1}dw=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

2.3 Faber Polinomları Serisi

Tanım 47: $B\subset\mathbb{C}$, sınırı bir Jordan eğrisi olan bir kontinium ve $\{F_n(z)\}$, B nin Faber Polinomları dizisi ve $\{a_n\}$ bir kompleks sayı dizisi ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nF_n(z)$$

serisine B nin bir Faber polinomları serisi denir[6].

Teorem 68: $\{a_n\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$ ve $R>1$olan bir dizi ise $\sum_{n=0}^{\infty}a_nF_n(z)$ serisi $I(L_R)$ de mutlak ve hemen hemen düzgün yakınsak ve $E(L_R)$ de ıraksaktır.

İspat. $K \subset I(L_R)$ herhangi bir kompakt altküme olsun. $1 < R' < R$ sayısı $K \subset I(L_{R'})$ olacak şekilde seçilsin. Teorem 29 a göre, $\forall z \in K$ için $|a_n F_n(z)| \leq |a_n||F_n(\zeta_0)|$ olacak şekilde bir $\zeta_0 \in L_{R'}$ noktası vardır. Teorem 65 e göre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||F_n(\zeta_0)|} = \frac{|\Phi(\zeta_0)|}{R} = \frac{R'}{R} < 1$$

oduğundan, teorem 41 ve 51den $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ serisinin K üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür.Son olarak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ serisinin $E(L_R)$ de ıraksak olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $z_0 \in E(L_R)$ keyfi fakat sabit alınan bir nokta olsun. $1 < R < R_1$ ve $z_0 \in L_{R_1}$ olacak şekilde $R_1 > 0$ sayısı vardır. $z_0 \in CB$ olduğundan teorem 65 e göre $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n F_n(z_0)|} = \frac{R_1}{R}$ ve $\frac{R_1}{R} > 1$ olduğundan teorem 41 e göre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z_0)$ serisi ıraksaktır. $z_0 \in E(L_R)$ keyfi olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ serisi $E(L_R)$ de ıraksaktır.

Teorem 69: $\{a_n\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ ve $R>1$ olan bir kompleks sayı dizisi olsun. $\forall z \in I(L_R)$ için $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ ise $f \in H(I(L_R))$ dir ve $1 < r < R$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)} dz$$

dir.

İspat. Teorem 68 e göre, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ serisi $I(L_R)$ de hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan, teorem 50 ye göre $f \in H(I(L_R))$ dir.

$1 < r_1 < r_2 < R$ olsun. $\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}$, $\overline{E(L_{r_1}) \cap I(L_{r_2})}$ yi içeren bir bölgede analitik olduğundan, teorem 17 ye göre;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{r_1}}\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{r_2}}\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz$$

dir. Bu $1<r<R$ ise, $\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz$ integralinin r den bağımsız olduğunu gösterir.

$1<r<R$ olsun. $\sum_{k=0}^{\infty}a_k F_k(z)$, $I(L_R)$ de f(z) ye hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty}a_k \frac{F_k(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}$ serisi L_r üzerinde $\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde, teorem 49 a göre

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{F_k(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz$$

dir. Son eşitlikten (22) göz önüne alındığında

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}dz$$

elde edilir.

Tanım 48: $R>1$ ve $f\in H(I(L_R))$ olsun. $1<r<R$ ise $\forall k\in\mathbb{N}$ için teorem 17 ye göre r den bağımsız olan

$$a_k(f,F):=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{f(z)\Phi'(z)}{\Phi^{k+1}(z)}dz$$

katsayılarına, f fonksiyonunun Faber katsayıları denir[6].

Teorem 70: $R>1$, $f\in H(I(L_R))$ ve $\{a_k(f,F)\}$, f nin Faber katsayıları dizisi ise

i-) $\forall z\in I(L_R)$ için

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f,F)F_k(z)$$

dir ve $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f,F)F_k(z)$ serisi $I(L_R)$ de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

ii-) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k F_k(z)$ Faber serisi $I(L_R)$ de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$c_k = a_k(f,F)$$

dir.

İspat. i-) $z \in I(L_R)$ olsun. $1 < r < R$ ise , teorem 18 e göre

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

dir. Teorem 13 gözönüne alınırsa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} f(\Psi(w)) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} dw \tag{23}$$

elde edilir. Teorem 63 e göre $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$ serisi $\partial D(0,r)$ üzerinde $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ve $f(\Psi(w))$, $\partial D(0,r)$ üzerinde sınırlı olduğundan; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\Psi(w))}{w^{k+1}} F_k(z)$, $\partial D(0,r)$ üzerinde $f(\Psi(w)) \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. (23) eşitliği ve teorem 49 dan $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f,F) F_k(z)$ elde edilir.

$K \subset I(L_R)$ herhangi bir kompakt altküme ise, $1 < r_1 < R$ ve $K \subset I(L_{r_1})$ olacak şekilde bir $r_1 > 0$ sayısı vardır. $r > 0$ sayısı $1 < r_1 < r < R$ olacak biçimde seçilirse;

$$a_k(f,F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{f(\zeta)\Phi'(\zeta)}{\Phi^{k+1}(\zeta)} d\zeta$$

ve (4) e göre $\forall z \in K$ için

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{r_1}} \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

olduğundan ,$M(r) := \sup\{|f(\zeta)\Phi'(\zeta)| : \zeta \in L_r\}$ ise teorem 11 e göre

$$|a_k(f,F)F_k(z)| < \frac{M(r)\ell_{L_r}\ell_{L_{r_1}}}{4\pi^2 d(K, L_{r_1})\, r}\left(\frac{r_1}{r}\right)^k$$

elde edilir. $0 < \frac{r_1}{r} < 1$ olduğundan Weierstrass M-testine göre $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f,F)\, F_k(z)$ serisi $I(L_R)$ üzerinde f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

ii-) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k F_k(z)$ Faber serisi $I(L_R)$ üzerinde $f \in H(I(L_R))$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{F_k(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}$ serisi $1 < r < R$ için L_r üzerinde $\frac{f(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olacağından teorem 49 ve (22) eşitliği kullanılırsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} \frac{f(z)\,\Phi'(z)}{\Phi^{n+1}(z)}\,dz = a_n(f,F)$$

elde edilir.

3. BULGULAR

$B \subset \mathbb{C}$ sınırı bir Jordan eğrisi olan bir kontinium, $\Phi: CB \to C\overline{U}$ teorem 61 in şartlarını sağlayan konform dönüşüm, $\Psi := \Phi^{-1}$ ve $\{F_n(z)\}$, B nin Faber polinomları dizisi olsun.

Bu bölümde yarıkonform dönüşümler ve yarıkonform eğrilerin bilinen tanımları verildikten sonra; yarıkonform bir eğri ile sınırlı, sınırlı bir G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ kapanışında sürekli fonksiyonların Belyi integral gösterimi verilecek ve bu gösterimden faydalanılarak; $R>1$ için $I(L_R)$ de analitik fonksiyonların, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ şeklinde bir fonksiyon serisine açılabileceği ve tersine olarak, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ şeklinde bir fonksiyon serisinin $I(L_R)$ de hemen hemen düzgün yakınsaklığı incelenecektir.

3.1 Yarıkonform Dönüşümler ve Yarıkonform Eğriler

Tanım 49: $A, B \subset \mathbb{C}$ iki bölge, $f: A \to B, \forall z \in A$ için $J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0$ şartını sağlayan C^1 sınıfından bir homeomorfizm olsun.

$$\sup_{z \in A} \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|} \le K < +\infty$$

ise, f dönüşümüne A üzerinde tanımlı bir K-yarıkonform dönüşüm ve $K \ge 1$ sayısına ise f nin yarıkonformluk katsayısı denir[9].

Tanımdan görülüyor ki; f, A üzerinde K- yarıkonform ve $k := \frac{K-1}{K+1}$ ise $\forall z \in A$ için $\frac{|f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)|} \le k < 1$ dir.

Ayrıca $f: A \to B$ dönüşümü konform ise $\forall z \in A$ için $f_{\bar{z}}(z) = 0$ olduğundan f dönüşümü bir 1- yarıkonform dönüşümdür.

Bundan sonra, aksi söylenmedikçe tüm yarıkonform dönüşümlerin K-yarıkonform olduğu kabul edilecektir.

Tanım 50: γ, kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi olsun. γ eğrisi, kompleks düzlemde tanımlı bir yarıkonform dönüşüm altında bir çemberin resmi ise; γ eğrisine bir yarıkonform eğri denir[10].

Tanım 51: γ kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi; $y:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $I(\gamma)$ yi $E(\gamma)$ ya, $E(\gamma)$ yı $I(\gamma)$ ya dönüştüren ve $\forall z\in\gamma$ için $y(z)=z$ koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. $\bar{y}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü, yarıkonform ise; y dönüşümüne γ eğrisine göre bir yarıkonform yansıma denir[11].

Teorem 71: γ kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi olsun. γ eğrisine göre yarıkonform yansımanın mevcut olabilmesi için gerek ve yeter koşul Jordan eğrisinin yarıkonform eğri olmasıdır[10].

Teorem 72 [Belyi İntegral Gösterimi]: $G\subset\mathbb{C}$, ∂G sınırı bir yarıkonform eğri olan sınırlı bir bölge olsun. f, G de analitik ve $\bar{G}$ de sürekli bir fonksiyon ve $y:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, ∂G sınırına göre bir yarıkonform yansıma ise; $\forall z\in G$ için

$$f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{CG}\frac{f(y(\zeta))}{(\zeta-z)^2}\frac{\partial y(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}d\sigma_\zeta$$

dir[11].

Teorem 73: G, genişletilmiş kompleks düzlemde ∂G sınırı parça-parça sürekli türevlenebilir Jordan eğrisi olan basit bağlantılı bir bölge ve $f(z)$, $\bar{G}$ üzerinde tanımlı sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. ∂G pozitif yönlendirilirse

$$2i\iint_G f_{\bar{z}}(z)d\sigma_z=\int_{\partial G}f(z)dz\begin{cases}\int_{\partial G}f(z)dz, & \text{G SINIRLI ise,}\\ -\int_{\partial G}f(z)dz, & \text{G SINIRSIZ ise.}\end{cases}$$

dir[12].

Teorem 74: $G\subset\mathbb{C}$,yarıkonform bir eğri ile sınırlı ,sınırlı bir bölge ve y, ∂G sınırına göre bir yarıkonform yansıma olsun. $\bar{y}$ dönüşümü, K- yarıkonform ise;

$$\iint_{CG}|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta \le \frac{\text{AlanG}}{1-k^2}$$

dir. Burada , $k=\dfrac{K-1}{K+1}$ dir.

İspat. $\bar{y}$, K- yarıkonform olduğundan

$$\left|\frac{\bar{y}_{\bar{\zeta}}}{\bar{y}_\zeta}\right| = \left|\frac{y_\zeta}{y_{\bar{\zeta}}}\right| \le k,\ k=\frac{K-1}{K+1}$$

ve

$$J_{\bar{y}} := |\bar{y}_\zeta|^2 - |\bar{y}_{\bar{\zeta}}|^2 = |y_{\bar{\zeta}}|^2 - |y_\zeta|^2 = -(|y_\zeta|^2 - |y_{\bar{\zeta}}|^2) > 0$$

dır. Buradan,

$$\iint_{CG}|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta = \iint_{CG} |y_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2 \frac{\left[-\left(|y_\zeta(\zeta)|^2 - |y_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2\right)\right]}{|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2 - |y_\zeta(\zeta)|^2} d\sigma_\zeta$$

$$= \iint_{CG} \frac{1}{1-\dfrac{|y_\zeta(\zeta)|^2}{|y_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2}} \left[-\left(|y_\zeta(\zeta)|^2 - |y_{\bar{\zeta}}(\zeta)|^2\right)\right] d\sigma_\zeta$$

$$\le \frac{1}{1-k^2}\iint_{CG}|J_y(\zeta)|\, d\sigma_\zeta$$

$$\le \frac{\text{Alan}(y(CG))}{1-k^2}$$

$$\le \frac{\text{Alan}(G)}{1-k^2}$$

elde edilir.

3.2 Faber Polinomlarının Türevlerinin Serisi

Teorem 75: $R>1, f\in H(I(L_R))$, $1<r<R$ ve $y_r(z), L_r$ eğrisine göre bir yarıkonform yansıma ise, $\forall k=0,1,\ldots$, doğal sayısı için

$$a_k(f) := -\frac{1}{\pi}\iint_{CI(L_r)} f(y_r(\zeta))\frac{\partial y_r(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{k+1}(\zeta)}d\sigma_\zeta$$

sayıları r den bağımsızdır.

İspat. $I(L_R)$ bölgesi basit bağlantılı olduğundan, f nin $I(L_R)$ bölgesinde bir F ilkel fonksiyonu vardır[3]. $\forall z\in I(L_R)$ için $F'(z)=f(z)$ olduğundan, teorem 73 e göre; $\forall k\in \mathbb{N}$ için

$$a_k(f) = -\frac{1}{\pi}\iint_{CI(L_r)} F'(y_r(\zeta))\frac{\partial y_r(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{k+1}(\zeta)}d\sigma_\zeta$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{CI(L_r)} \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left[F(y_r(\zeta))\frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{k+1}(\zeta)}\right]d\sigma_\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} F(y_r(\zeta))\frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{k+1}(\zeta)}d\zeta$$

dir. $y_r(\zeta)$ yarıkonform yansıması, L_r üzerinde sabit olduğundan

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} F(\zeta)\frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{k+1}(\zeta)}d\zeta$$

elde edilir. Ve teorem 17 ye göre, $a_k(f)$ katsayıları, $1<r<R$ olan r sayılarından bağımsızdır.

Bundan sonra $r>1$ ise ; $y_r(z)$ ile L_r seviye çizgisine göre yarıkonform yansıma gösterilecektir.

Teorem 76: $R>1$ ve $f\in H(I(L_R))$, $1<R_1<R$, olmak üzere $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$a_n(f):=-\frac{1}{\pi}\iint_{CI(L_{R_1})} f(y_{R_1}(\zeta))\frac{\partial y_{R_1}(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}d\sigma_\zeta \qquad (24)$$

ise

i-) $\forall z\in I(L_R)$ için

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)F_n'(z)$$

dir ve $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)F_n'(z)$ serisi $I(L_R)$ de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır.

ii-) $\sum_{n=1}^{\infty}c_n F_n'(z)$ serisi $I(L_R)$ de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise $\forall n\in\mathbb{N}$ için $c_n=a_n(f)$ dir.

iii-) f nin L_R üzerinde kaldırılabilir singüler nokta olmayan en az bir singüler noktası varsa

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n(f)|}=\frac{1}{R}$$

dir ve $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)F_n'(z)$ serisi $E(L_R)$ de ıraksaktır.

iv-) Tersine olarak; $\{a_n\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$ ve $1<R$ olan bir kompleks sayı dizisi ise $\sum_{n=1}^{\infty}a_n F_n'(z)$ serisi $I(L_R)$ de hemen hemen düzgün yakınsak, $E(L_R)$ de ıraksaktır. $\forall z\in I(L_R)$ için $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n F_n'(z)$ ise, $f\in H(I(L_R))$ dir ve f nin L_R üzerinde kaldırılabilir singüler nokta olmayan en az bir singüler noktası vardır.

İspat. i-) $z \in I(L_R)$ olsun. Bu durumda $z \in I(L_{R_1})$ olacak şekilde bir $1 < R_1 < R$ sayısı vardır. Teorem 72 ye göre

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{CI(L_{R_1})} \frac{f(y_{R_1}(\zeta))}{(\zeta - z)^2} \frac{\partial y_{R_1}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\sigma_\zeta$$

dir. $\zeta = \Psi(w)$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{CD(0,R_1)} f[y_{R_1}(\Psi(w))] \frac{\partial y_{R_1}(\Psi(w))}{\partial \bar{\zeta}} \overline{\Psi'(w)} \frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w) - z)^2} d\sigma_w$$

dir[13]. Teorem 64 e göre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n'(z)}{w^{n+1}}$ serisi $CD(0,R_1)$ bölgesinde $\frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Diğer taraftan $f[y_{R_1}(\Psi(w))] \frac{\partial y_{R_1}(\Psi(w))}{\partial \bar{\zeta}} \overline{\Psi'(w)}$ fonksiyonu $CD(0,R_1)$ bölgesinde sınırlı olduğundan; $\sum_{n=1}^{\infty} f(y_{R_1}(\Psi(w))) \frac{\partial y_{R_1}(\Psi(w))}{\partial \bar{\zeta}} \overline{\Psi'(w)} \frac{F_n'(z)}{w^{n+1}}$ serisi ,$CD(0,R_1)$ üzerinde $f[y_{R_1}(\Psi(w))] \frac{\partial y_{R_1}(\Psi(w))}{\partial \bar{\zeta}} \overline{\Psi'(w)} \frac{\Psi'(w)}{(\Psi(w)-z)^2}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi} \iint_{CD(0,R_1)} f[y_{R_1}(\Psi(w))] \frac{\partial y_{R_1}(\Psi(w))}{\partial \bar{\zeta}} \overline{\Psi'(w)} \frac{1}{w^{n+1}} d\sigma_w \right) F_n'(z)$$

dir[13]. Sağ tarafta $w = \Phi(\zeta)$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi} \iint_{CI(L_{R_1})} f(y_{R_1}(\zeta)) \frac{\partial y_{R_1}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\sigma_\zeta \right) F_n'(z)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) F_n'(z)$$

elde edilir. (24) den $R_1, 1 < R_1 < R$ olan keyfi bir sayı olmak üzere;

$$|a_n(f)| = \left| -\frac{1}{\pi} \iint_{CI(L_{R_1})} f(y_{R_1}(\zeta)) \frac{\partial y_{R_1}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\sigma_\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \iint\limits_{CI(L_{R_1})} \left|f(y_{R_1}(\zeta))\right| \left|\frac{\partial y_{R_1}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right| \left|\frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}\right| d\sigma_\zeta$$

olduğundan , Hölder eşitsizliğine [10] göre

$$\left|a_n(f)\right| \leq \frac{1}{\pi} \left(\iint\limits_{CI(L_{R_1})} \left|f(y_{R_1}(\zeta))\right|^2 \left|\frac{\partial y_{R_1}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right|^2 d\sigma_\zeta \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{CI(L_{R_1})} \frac{\left|\Phi'(\zeta)\right|^2}{\left|\Phi(\zeta)\right|^{2n+2}} d\sigma_\zeta \right)^{1/2}$$

dir. $M_1 := \sup\left\{ \left|f(\zeta)\right| : \zeta \in \overline{I(L_{R_1})} \right\}$ ise; $\bar{y}_{R_1}$, K- yarıkonform olduğundan,teorem 74 e

göre

$$\frac{1}{\pi} \left(\iint\limits_{CI(L_{R_1})} \left|f(y_{R_1}(\zeta))\right|^2 \left|\frac{\partial y_{R_1}(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}\right|^2 d\sigma_\zeta \right)^{1/2} \leq M_1^{1/2} \left(\frac{\mathrm{Alan} I(L_{R_1})}{1-k^2} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{K-1}{K+1}$$

dir. $\zeta = \Psi(w)$ değişken dönüşümü ile

$$\iint\limits_{CI(L_{R_1})} \frac{\left|\Phi'(\zeta)\right|^2}{\left|\Phi(\zeta)\right|^{2n+2}} d\sigma_\zeta = \iint\limits_{CD(0,R_1)} \frac{1}{\left|w\right|^{2n+2}} d\sigma_w$$

$$= \iint\limits_{[0,2\pi]\times[R_1,+\infty)} \frac{1}{r^{2n+1}} dr d\theta = \frac{\pi}{n R_1^{2n}}$$

, $\forall n \in \mathbb{N}$ için a_n katsayıları R_1 den bağımsız olduğundan ve 1< R_1 < R keyfi alındığından

$$\left|a_n\right| \leq M_1^{1/2} \left(\frac{\mathrm{Alan} I(L_{R_1})}{1-k^2} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{n R_1^{2n}} \right)^{1/2}$$

eşitsizliğinden

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n\right|} \leq \frac{1}{R} \qquad (25)$$

elde edilir.

$K \subset I(L_R)$ herhangi bir kompakt altküme olsun. Bu durumda $K \subset I(L_{R_2})$ olacak şekilde bir R_2, $1 < R_2 < R$, sayısı bulunabilir. Teorem 29 a göre $\forall z \in K$ için

$$\left|a_n F_n'(z)\right| \leq \left|a_n F_n'(\zeta_0)\right|$$

olacak şekilde bir $\zeta_0 \in L_{R_2}$ noktası vardır. (25) ve teorem 66 ya göre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n F_n'(\zeta_0)|} \le \frac{|\Phi(\zeta_0)|}{R} = \frac{R_2}{R} < 1$$

olduğundan; teorem 41 ve 51den , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ serisinin K üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür.

ii-) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k'(z)$ serisi $I(L_R)$ üzerinde $f \in H(I(L_R))$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak ise $1 < r < R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k'(y_r(\zeta)) \frac{\partial y_r(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}$ serisi $CI(L_r)$ üzerinde $f(y_r(\zeta)) \frac{\partial y_r(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olacağından

$$-\frac{1}{\pi} \iint_{CI(L_r)} f(y_r(\zeta)) \frac{\partial y_r(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\sigma_\zeta = -\frac{1}{\pi} \iint_{CI(L_r)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k F_k'(y_r(\zeta)) \frac{\partial y_r(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}\right) d\sigma_\zeta$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(-\frac{1}{\pi}\right) \iint_{CI(L_r)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[F_k(y_r(\zeta)) \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} \right] d\sigma_\zeta$$

dir. Teorem 73 ve (24) formülünden

$$a_n(f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} F_k(y_r(\zeta)) \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} F_k(\zeta) \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta$$

dir. (22) eşitliği gözönüne alınırsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_n = a_n(f)$ elde edilir.

iii-) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(f)|} < \frac{1}{R}$ ise

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(f)|} = \frac{1}{R_0} < \frac{1}{R}$$

olacak şekilde $1 < R < R_0$ sayısı vardır. Buradan i-) dekine benzer bir yöntem izlendiğinde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) F_n'(z)$ serisinin $I(L_{R_0})$ üzerinde bir g analitik fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak olduğu çıkar ve bu fonksiyon $I(L_R)$ de f

fonksiyonuna eşittir. Yani $\forall z \in I(L_R)$ için g(z) = f(z) dir. Son eşitlikten $z_0 \in L_R$, f nin kaldırılabilir singüler nokta olmayan bir singüler noktası ise;

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0)$$

elde edilir . Bu ise, z_0 noktasının f nin kaldırılabilir olmayan bir singüler noktası olması ile çelişir. O halde

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(f)|} = \frac{1}{R}$$

dir.

Son olarak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)F_n'(z)$ serisinin $E(L_R)$ de ıraksak olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. $z_0 \in E(L_R)$ keyfi bir nokta ise $1<R<r$ ve $z_0 \in L_r$ olacak şekilde bir r>0 sayısı vardır. $z_0 \in CB$ olduğundan teorem 66 ya göre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(f)F_n'(z_0)|} = \frac{r}{R}$$

ve $\frac{r}{R} > 1$ olduğundan teorem 41 e göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)F_n'(z_0)$ serisi ıraksaktır. $z_0 \in E(L_R)$ keyfi bir nokta olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)F_n'(z)$ serisi $E(L_R)$ de ıraksaktır.

iv-) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ ise i-), iii-) de olduğu gibi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ serisinin $I(L_R)$ de hemen hemen düzgün yakınsak ve $E(L_R)$ de ıraksak olduğu gösterilir. $\forall z \in I(L_R)$ için $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ serisi $I(L_R)$de f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ve teorem 50 ye göre $f \in H(I(L_R))$dir.

Son olarak; f fonksiyonunun L_R üzerinde kaldırılabilir singüler noktası olmayan en az bir singüler noktasının olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Aksi halde , f fonksiyonu L_R üzerinde her noktada analitiktir veya f nin L_R üzerinde en az bir kaldırılabilir singüler noktası vardır. O halde; $1<R<R_1$ olmak üzere $g \downarrow I(L_R) = f$ olacak şekilde bir $g \in H(I(L_{R_1}))$ fonksiyonu vardır. i-) den $\forall z \in I(L_{R_1})$ için

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)F_n'(z)$$

ve

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(g)|} \leq \frac{1}{R_1} < \frac{1}{R} \tag{26}$$

dir. Diğer taraftan $\forall z \in I(L_R)$ için $g(z) = f(z)$ olduğundan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(g)|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

dir. Bu (26) ile çelişir. O halde f nin L_R üzerinde kaldırılabilir singüler nokta olmayan en az bir singüler noktası vardır.

4. İRDELEME

B sınırı bir Jordan eğrisi olan bir kontinium ve $\{F_n\}$, B nin Faber polinomları dizisi olsun . $R>1$ için L_R, CB de bir seviye çizgisi ve $f \in H(I(L_R))$ ise; $I(L_R)$ basit bağlantılı olduğundan f nin $I(L_R)$ üzerindeki ilkeli F ile gösterilirse, teorém 70 e göre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(F,F)F_n(z)$ serisi $I(L_R)$ de F fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak olduğundan, teorem 50 gözönüne alındığında $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(F,F)F_n'(z)$ serisi $I(L_R)$ üzerinde $F'=f$ fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, $I(L_R)$ de analitik olan fonksiyonlara $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n F_n'(z)$ şeklindeki fonksiyon serileri ile hemen hemen düzgün yaklaşım problemi, teorem 50 ve 70 in bir sonucudur, ancak katsayılar için önce f nin ilkelinin hesaplanmasına ve sonra bu ilkelin Faber katsayılarının hesaplanmasına ihtiyaç vardır.

$I(L_R)$ de analitik olan fonksiyonlara Belyi integral gösterimi ve Green teoremi kullanılarak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n F_n'(z)$ şeklindeki bir fonksiyon serisi ile $I(L_R)$ de hemen hemen düzgün yakınsaklığın teorem 76 da verilen ispatında katsayıların direkt olarak f nin değerleri ile hesaplandığı görülür

5. SONUÇLAR

$\{F_n\}$,sınırı bir Jordan eğrisi olan bir B kontiniumun Faber polinomları dizisi ; Φ, teorem 61 in şartlarını sağlayan konform dönüşüm ve $R>1$ için L_R ler , CB de seviye çizgileri olsun.

1-) F_n polinomlarının $I(L_R)$ ve $E(L_R)$ de sırası ile (4) ve (5) eşitlikleri ile belirli integral gösterimleri verildi.

2-) $\left\{\sqrt[n]{|F_n(z)|}\right\}$ ve $\left\{\sqrt[n]{|F_n'(z)|}\right\}$ dizilerinin CB de $|\Phi(z)|$ ye hemen hemen düzgün yakınsak olduğu gösterildi.

3-) $\{a_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{R}$ olan bir kompleks dizi ise $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z)$ şeklindeki Faber polinomları serisinin $I(L_R)$ de hemen hemen düzgün yakınsak ve $E(L_R)$ de ıraksak olduğu gösterildi. Ayrıca $I(L_R)$ de analitik fonksiyonların, bu bölgede $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(f,F)F_n(z)$ şeklinde Faber polinomları serisine tek türlü açılabilecekleri gösterildi.

4-) $f\in H(I(L_R))$ için $a_n(f)$ katsayıları (23) ile tanımlandığında , Belyi integral gösterimi ve Green teoremi yardımıyla $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)F_n'(z)$ serisinin $I(L_R)$ de f fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsak; f nin L_R üzerinde kaldırılabilir singüler nokta olmayan en az bir singüler noktasının olması halinde $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n(f)|}=\dfrac{1}{R}$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(f)F_n'(z)$ serisinin $E(L_R)$ de ıraksak olduğu gösterildi.

Tersine olarak; $\{a_n\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{R}$ koşulunu sağlayan bir kompleks dizi ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ serisinin $I(L_R)$ de hemen hemen düzgün yakınsak, $E(L_R)$ de ıraksak ve $\forall z \in I(L_R)$ için $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n'(z)$ ise f nin L_R üzerinde kaldırılabilir singüler nokta olmayan en az bir singüler noktasının olduğu gösterildi.

6. ÖNERİLER

1-) G kompleks düzlemde sınırı bir Jordan eğrisi olan sınırlı bölge ;$\{F_n\}$, $\overline{G}$ nin Faber polinomları dizisi ve $H^*(G)$,$H(G)$ nin bir altsınıfı olsun. $H^*(G)$ bir normlu lineer uzay olarak göz önüne alındığında $H^*(G)$ daki fonksiyonlara $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k F_k'(z)\right\}$ şeklindeki fonksiyon dizileri ile yaklaşım problemi ∂G sınırının özelliklerine bağlı olarak incelenebilir. ∂G sınırının yarıkonform olması halinde bu tip problemler; G de analitik ve $\overline{G}$ de sürekli olan fonksiyonların $A(\overline{G})$ uzayında supremum normuna göre [14] de , G de analitik fonksiyonların $A^2(G)$ Bergman uzayında [15] de incelenmiştir.

2-) G, yarıkonform sınırlı iki bağlantılı bir bölge ve $0 \notin G$ olsun. γ, Γ iki yarı konform eğri olmak üzere $\partial G = \gamma \cup \Gamma$, $\gamma \subset I(\Gamma)$, ve $\{F_n\}, \{\tilde{F}_n\}$ sırası ile $\overline{I(\Gamma)}$ ve $\overline{I(\gamma)}$ nin Faber polinomları dizisi ise $A(\overline{G})$ ve $A^2(G)$ uzaylarındaki fonksiyonlara $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k F_k'(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k'(\frac{1}{z})\right\}$ şeklindeki bir fonksiyon dizisi ile yaklaşım problemi incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Gleason, A.M. , Fundemantals of Absract Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A. , 1966.

[2] Ahlfors, L.V., Complex Analysis, second edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. , Tokyo, 1966.

[3] Depree, J.D. ve Oehring, C.C. , Elements of Complex Analysis , Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A. , 1969.

[4] Fulk, W. , Complex Variables , Marcel Dekker, Inc., U.S.A., 1993.

[5] Markushevich, A.I., Theory of Functions of A Complex Variable, Volume I, Prentice-Hall, Inc., U.S.A., 1965.

[6] Markushevich, A.I., Theory of Functions of A Complex Variable, VolumeIII, Prentice-Hall, Inc., U.S.A., 1965.

[7] Gaier, D., Lectures on Complex Approximation, Birkhauser Boston, Inc., U.S.A., 1987.

[8] Smirnov, V.I. ve Lebedev, N.A., Functions of A Comlex Variable, The M.I.T. Press, U.S.A., 1968.

[9] Ahlfors, L.V., Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand Company, U.S.A., 1987.

[10] Lehto, O. ve Virtanen, K.I., Quasiconformal Mappings in the Plane , Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York,1973.

[11] Belyi, V.I., Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary, Math. USSR-Sb, Volume 31(1977), 289-317.

[12] Gonzalez, M.O., Classical Complex Analysis, Marcel Dekker, Inc., U.S.A.,1992.

[13] Buck, R.C., Advanced Calculus, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. , Tokyo, 1965.

[14] Israfilov, D.M., On approximation by partial sums of generalized Faber series in domains with a quasiconformal boundary(Russian), Izv. Acad.Nauk. Az. SSR, No.5(1981),10-16.

[15] Çavuş, A., Approximation by generalized Faber series in Bergman spaces on finite regions with a quasiconformal boundary, Journal of Approximation Theory (to appear).

8. ÖZGEÇMİŞ

İmdat İŞCAN, 7 / 5 / 1972 de Giresun'da doğdu. 1982 yılında Aksu Seka İlkokulu'ndan, 1985 yılında Giresun Merkez Ortaokulu'ndan, 1988 yılında Giresun Lisesi'nden mezun oldu.

1988 yılında K.T.Ü. Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği proğramına kayıt oldu ve 1992 yılında bu proğramdan mezun oldu. 1993 yılında aynı üniversitede Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) proğramına başladı.

1993 yılından itibaren K.T.Ü. Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Bildiği yabancı dil ise İngilizce'dir.