9815

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

P-KARAKTERİSTİKTE AYRIŞAMAZ GÖSTERİMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sultan YAMAK

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

HAZİRAN 1990
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK PROGRAMI

P-KARAKTERİSTİKTE AYRIŞAMAZ GÖSTERİMLER

Sultan YAMAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 1.06.1990
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 9.07.1990

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Yavuz GÜNDÜZALP
Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.Ali PANCAR
Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.M.Sabri TERZİ
Enstitü Müdürü : Doç.Dr.Temel SAVAŞKAN

HAZİRAN 1990

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı sonlu bir G grubunun P-karakteristikte ayrışamaz gösterimlerinin sınıfını incelemektir.

Bu çalışmayı bana öneren ve çalışma süresince hiçbir yardımdan kaçınmayan saygıdeğer hocalarım Sayın Prof.Dr.Yavuz GÜNDÜZALP ve Yrd.Doç.Dr.M.Sabri TERZİ'ye teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Çalışma süresince beraber tartıştığımız meslektaşım Sayın Arş.Gör.Osman KAZANCI'ya ve bu çalışmayı daktilo eden Sayın Tülay KUKUL'a teşekkür ederim.

Sultan YAMAK

HAZİRAN, 1990

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Gösterim Teorisi, Cayle'yin 1854 de göstermiş olduğu "Her sonlu G grubunun G kümesi üzerindeki simetrik gruba gömülebilir" teorisiyle başlar. Bu adım matematikçilere her sonlu grubun keyfi bir K-cismi üzerindeki tersinir kare matrislerin grubu içine dönüşümlerin var olabileceği fikrini vermiştir. Sonlu bir grubun Remark Ayrışımındaki ayrışamaz bileşenleri, G nın ayrışamaz gösterimleri ile izomrofi hariç aynı olarak karşımıza çıkar. Bu adımla başlayan temel soru, bir sonlu grubun ayrışamaz gösterimlerinin sayısı hakkında fikir edinmektir. Problem iki adımda ele alınmıştır.

$\mathrm{ch}(K)=0$ olması durumunda 1854 de Cayley tarafından atılan ilk adım günümüzde "ādi gösterim" teoresi adını almıştır. Bu adımda $\mathrm{ch}(K) \nmid |G|$ durumunda KG grup cebirinin yapısı, Wedderburn yapı teoremi ve Maschke Teoreminin sonucu ile tam olarak belirlenmiştir.

$\mathrm{ch}(K) \mid |G|$ olması durumunda KG grup cebirinin yapısı tam olarak karakterize edilememiştir. R.BRAUER tarafından şekillenen adım günümüzde "modülar gösterim teorisi" veya "BRAUER teori" olarak gelmiştir. Bu konuda temel bir çalışma niteliği taşıyan D.G. Higman'ın 1954 deki "p-karakteristikle ayrışamaz gösterimler" adlı çalışması büyük öneme sahiptir. Çünkü p-sylow altgrupların ayrışamaz gösterimleri ile G grubunun ayrışamaz gösterimleri arasındaki ilişkiyi açıkladığından bu çalışmayı günümüz lojiğiyle tanıtacağız. Bu çalışmanın tanıtımını üç bölümde derledik. Ancak Esas İdeal Bölgesi üzerindeki modüllerin yapısını okuyucu tarafından bilindiğini kabul ediyoruz .

I. Bölümde D.G. Higmanın çalışmasının takibi için gerekli ön bilgiler ve "ādi gösterim teorisi" nin yapısını D.L ,(1971) H,T.W (1977), kaynaklarından derledik. Krull-Remark Schmidt Teoremini (1.7.6) vererek Artinian cebirler üzerindeki sonlu üretenli modüllerin ayrışamaz modüllerden oluşan Remark ayrışımlarını inceledik. Artinian cebirler üzerindeki ayrışamaz modüller genel olarak basit modül olmadıkları için yarıbasit cebirler üzerinde verilen Schur Lemma'sına paralel olarak her ayrışamaz modüle **endomorfiler cebirinin lokal olması** durumunda karakterize ettik. G nın mertebesi sonlu olduğunda KG grup cebiri Artinian olacağından KG nın yapısını belirlemek için Artinian cebirleri bu bölümde derledik. Bu bölümün sonunda birim elemanlı Artinian F cebir A nın F-gösterimlerinin $\mathbb{R}(A,F)$ kategori ile A-sol modüllerin ${}_A\mathbb{M}$ kategorisi arasındaki kategorik denkliğin özelliklerini

inceledik. Bundan yararlanarak sonlu bir G grubunun F-gösterimlerini FG grup cebirinin F gösterimleri yardımıyla elde ettik.

II. Bölümde Artinian cebirler üzerindeki projektif modüllerin yapısını inceledik. Artinian cebirler üzerindeki esas ayrışamaz modüller projektif olup cebirin yapısını tanımada büyük öneme sahiptir. Ayrışamaz projektif A-modüllerin kategorisi ile basit A/J(A)-modüllerin kategorileri arasındaki kategorik denklik (2.1.4) ile belirlendi. Wedderburu yapı teoreminin Artinian cebirlere bilinen şekli ile genelleştirme; $P,Q \in {}_A M$ esas ayrışamaz modüller öyleki ${}_A M(P,Q) \neq 0$ ve $P \neq Q$ olacak biçimde mevcut olabileceğinden ortadan kalkmıştır. Bu noktada yeni bir yapıya ihtiyaç vardır. Bu yapı bir Artinian cebirin quiveridir. A cebirin quiverini $\Gamma(A)$ ile gösterecek olursak A nın yapısı $\Gamma(A)$ nın yapısı ile karakterize edilir. Bu bölümün sonunda Artinian cebirlerin sonlu ve sonsuz gösterim tipi kavramları verildi.

III. Bölümde modüllerin "Tensor Çarpımı" ve "İndüklenmiş Modüller" Curtis, C.W. kaynağından derlenerek yazıldı. Bu bölüm D.G. Higman'ın çalışması için temel teşkil eder. Burada KG K-cebirinin p-Sylow altgrupları üzerindeki ayrışamaz modülleri G 'nın ayrışamaz modüllerine indüklenişi derlendi. Bu bölümde çalışmayı net olarak belirleyen teorem (3.2.3) ile verildi. Son olarak konuyla ilgili bizce ilginç olan problemleri çözerek bitirdik.

SUMMARY

The theory of representations starts with Cayley's theory which states that every finite group G can be embedded into a symetric group on G.

This basis had leaded to the mathematicions that there would be transformations from every finite group into a group of invertible square matrices on an arbitrary field K.Indecomposable components of a finite group in Remark's decomposition stands for the same with idecomposable representations of G except isomorphic cases. The fundamental question originated from this idea is to get an idea about the number of indecomposable representations. This problem have been dwelt on two stages.

In the case $k(K)=0$, the first information given by Cayley in 1854 has been known as **"Ordinary Representation Theory"** today. In this case if $k(K) \nmid |G|$, the structure of the group algebra KG had been determined as a result of weddenburn's structure theorem and Maschke's Theorem. If $k(K) \mid |G|$ the structure of the group algebra KG has not been characterized exactly. In case of $k(K) \mid |G|$, what R.Brauer developed is known as "Modulary Representations Theory" or "Brauer's Theory". In this subject, the paper of D.G.HIGMAN enfitled "Indecomposable Representation at Characteristic-p" has been of more importance. We will introduce thes work of D.G.HIGMAN in terms of todays mathematical logical concepts for it describes the relation between indecomposable representation of p-sylow subgroups and decomposable representations of the group G. We have compiled this study into three chapters. Yet, we assume that the reader is aware of structures of Modules Over ve Principal Ideal Domain.

In the first Chapter, we have gathered the background information and the structure of the simple representation theory needed to follow HIGMAN's work from the sources (DORNHOFF,L.(1971), HUNGERDFORD,T.W. (1987), PIERCE, R.S. (1982)). We examined Remark's decompositions composed of finitely generated indecomposable modules on Artinian algebras by stating Krull-Remark-Schmedt theorem (Theorem 1.1.6) since indecomposable modules on Artinian algebras are not simple modules in general.

In case that the algebra of endomorphism is local, we have characterized indecomposable modules as being parallel to Schur's Lemma given on semisimple algebras, we set Artinian algebras in thes chapter in order to determine the

structure of the group algebra KG since the KG group algebra will be an Artinian algebra in case that the order of the group G is finite. At the end of this Chapter we investigated the properties of categorial equivalence between the category $\underline{\underline{R}}(A,F)$ of F-representations of an Artinian F-algebra A with unity and the category ${}_A\underline{\underline{M}}$ of left A-modules. Using this we obtained the F-representations of a finite group G by using the F-representations of the group algebra FG.

In the second Chapter, we have studied the structure of projective modules over Artinian algebras. Principal indecomposable modules over Artinian algebras are projective modules and thus they are of maro importance. The equivalency between the category indecomposable projective A-modules and the simple $A/\mathfrak{J}(A)$-modules has been characterized in Theorem 2.1.4. The program of generalizing the wedderburn Structure Theorem to Artinian algebras breaks down Chiefly because of the exitence of principal indecomposable modules Pand Q that are not isomorphic, but ${}_A\underline{\underline{M}}(P,Q)\neq 0$. At this stage a new structure is required, and it is the guiver of on Artinian algebra. If the guiver of algebra A is shown by $\Gamma(A)$, the structure of A is characterized by the structure of $\Gamma(A)$. In the last fort of this Chapter, it has been given the concept of finite and infinite representation types of Artinian algebras.

In the third Chapter, **Tensor Products of Modules** and **Induced Modules** have been given by compiling from the source (Curtis, C.W., REINER,I. (1962)), This chapter is the main basis for D.G.HIGMAN's work and on extension of indecomposable modules of K-algebra KG on p-bylow subgroups into indecomposable modules of a group G has been investigated. Also theorem which describes this work clearly has been given by theorem (3.2.3). Finally, we have completed this work by solving some interesting problems-in our orpinion-related with subject.

BÖLÜM I

1. KATEGORİLER VE FUNKTORLAR

Bir **kategori** nesnelerin bir $\mathbb{K}$ sınıfı ve aşağıdaki iki özellikle verilir.

(i) $\mathbb{K}$ nın nesnelerinin her bir (A,B) ikilisi için bir $Mor_{\mathbb{K}}(A,B)$ kümesi vardır öyle ki $(A,B)\neq(C,D)$ nesne ikilileri için

$$Mor_{\mathbb{K}}(A,B)\cap Mor_{\mathbb{K}}(C,D)=\emptyset$$

verilir. $Mor_{\mathbb{K}}(A,B)$ nın elemanlarına **A dan B ye morfiler** denir. $\alpha\in Mor_{\mathbb{K}}(A,B)$ ise $\alpha:A\longrightarrow B$ veya $A\xrightarrow{\alpha}B$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

(ii) $\mathbb{K}$ nın nesnelerinin her bir (A,B,C) üçlüsü için bileşke adı verilen bir

$$Mor_{\mathbb{K}}(A,B)\times Mor_{\mathbb{K}}(B,C)\longrightarrow Mor_{\mathbb{K}}(A,C)\ \ ((\alpha,\beta)\longrightarrow\beta\alpha)$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri gerçeklemek üzere mevcuttur.

(I) $\alpha:A\longrightarrow B$, $\beta:B\longrightarrow C$, $\gamma:C\longrightarrow D$ morfiler ise

$$\gamma(\beta\alpha)=(\gamma\beta)\alpha \tag{1.1.1}$$

dır.

(II) $\mathbb{K}$ nın her B nesnesi için bir $1_B:B\longrightarrow B$ morfisi $\alpha: A\longrightarrow B$, $\beta:B\longrightarrow C$ keyfi morfiler için

$$1_B\alpha=\alpha\ ,\ \beta 1_B=\beta \tag{1.1.2}$$

olacak biçimde mevcuttur.

Nesneleri genel olarak A,B,C,... ve morfileri $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ ile göstereceğiz.

$\alpha:A\rightarrow B$ morfisine bir denkliktir denir $:\Longleftrightarrow$ Bir $\beta:B\longrightarrow A$ morfisi

$$\alpha\beta=1_B \ \text{ ve } \ \beta\alpha=1_A \tag{1.1.3}$$

olacak biçimde mevcuttur. Bu durumda A ile B nesnelerine **denktir** denir ve $A\cong B$ ile gösterilir. Açık olarak "$\cong$" bağıntısı $\mathbb{K}$ kategorisinde bir denklik bağıntısıdır.

$\mathbb{K}$ nın nesnelerinin kümesini $\underline{\mathbb{K}}$ ve $Mor_{\mathbb{K}}(A,B)$ kümesini $\underline{\mathbb{K}}(A,B)$ ile göstereceğiz.

$\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ iki kategori olsun. $\mathbb{K}$ dan $\mathbb{L}$ ye bir F **kovaryant funktoru** F_o ve F_M dönüşümlerinden oluşan ve aşağıdaki şartları sağlayan bir $F=(F_o,F_M)$ dönüşüm çiftidir.

(i) $A,B \in \mathbb{K}$ ve $\alpha \in \mathbb{K}(A,B)$ için $F_M(\alpha) \in \mathbb{L}(F_o(A),F_o(B))$ (1.1.4)

dır.

(ii) $A,B,C \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}(A,B)$ ve $\beta \in \mathbb{K}(B,C)$ için

$$F_M(\beta\alpha) = F_M(\beta)F_M(\alpha) \tag{1.1.5}$$

dır.

(iii) Her $A \in \mathbb{K}$ için $F_M(1_A) = 1_{F_o(A)}$ (1.1.6)

dır.

$\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$ kategoriler

$F=(F_o,F_M):\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ $T=(T_o,T_M): \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{M}$

kovaryant funktorlar ise $TF=(T_oF_o,T_MF_M): \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{M}$ 'e bir kovaryant funktor olduğu açıktır.

Her $\mathbb{K}$ kategorisi için $1_{\mathbb{K}_o}(A):=A$ ile $1_{\mathbb{K}_o}:\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dönüşümü ve $\alpha \in \mathbb{K}(A,B)$ için $1_M(\alpha):=\alpha$ ile morfiler tanımlanırsa $1_{\mathbb{K}}(1_{\mathbb{K}_o},1_M):\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ bir kovaryant funktordur. Buna **idantik kovaryant** funktor denir.

$\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ iki kategori ve $F:\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{L}$ bir kovaryant funktor olsun.

F kovaryant funktoruna **izomorfi** denir $\Longleftrightarrow \exists T:\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{K}$ kovaryant funktoru öyle ki

$$TF = 1_{\mathbb{K}} \quad \text{ve} \quad FT = 1_{\mathbb{L}} \tag{1.1.7}$$

dır. Bu durumda $\mathbb{K}$ ile $\mathbb{L}$ kategorilerine **denktir** denir ve $\mathbb{K} \cong \mathbb{L}$ ile gösterilir.

Kategorilere ait örnekleri ilerleyen konularımızda vereceğiz.

2. MODÜLLER VE HOMOMORFİLER

Bu bölümde modül, modül homomorfilerinin tanımları ve özellikleri verilecektir.

Bir **R halkası** iki ikili işlemli "+", "." bir küme öyle ki (R,+) bir Abel grubu, (R,.) bir yarı grup ve iki yanlı distributif özelliğini gerçekleyen bir kümedir. (R,.) işlemine göre birim eleman varsa bunu $1_R=1$ ile gösterip birim elemanlı halka diye adlandıracağız. Aksi söylenmedikçe bütün halkalarımız birim elemanlı alınacak.

Bir M **R-sol modülü** (M,+) bir Abel grubu ve

$R\times M \longrightarrow M \quad ((r,m) \longrightarrow rm)$

skaler dönüşümü aşağıdaki özellikleri gerçekleyecek biçimde mevcuttur.

$r,r_1,r_2 \in R,\quad m,m_1,m_2 \in M$ olmak üzere,

(i) $(r_1.r_2)m = r_1(r_2m)$ (1.2.1)

(ii) $r(m_1+m_2)=rm_1+rm_2 \quad (r_1+r_2)m=r_1m+r_2m_2$

(iii) $(1.m = m)$

son koşul ile M ye **üniter R-sol modül** denir.
Aksi söylenmedikçe bütün modüller üniter alınacaktır.

(1.2.1) koşulları $M\times R \longrightarrow M \quad ((m,r) \longrightarrow mr)$

dönüşümü ile sağdan verilirse **M ye R-sağ modül** diyeceğiz.

Bütün R-sol(sağ) modüllerin kümesini ${}_R\underline{M}(\underline{M}_R)$ ile gösterelim.

$M \in {}_R\underline{M}$ ve N(M,+) nın bir alt grubu R-sol modül ise N ye M nın bir **R-altmodülü** veya kısaca **altmodülü** denir. M nın bütün altmodüllerinin kümesini $\Lambda({}_AM)$ veya kısaca $\Lambda(M)$ ile gösterelim. N M nın bir altmodülü ise (M/N,+) faktör grubunun R ile soldan etkisini aşağıda açıklayalım. $r \in R,\quad m \in M$

$r.(m+N) := rm+N$

skaler dönüşümü ile $M/N \in {}_R\underline{M}$ olduğu açıktır. M/N faktör grubu ile oluşturulan R-sol modüle M nın N'ye göre **faktör modülü** denir.

R,R' halkalar $\varphi:R \longrightarrow R'$ dönüşümü "+", "." işlemlerine göre yarı grup homomorfileri ($\varphi(1)=1$) ise

φ ye R den R' ye bir (üniter) halka homomorfisi denir. Bu durumda

$R\times R' \longrightarrow R' \quad ((r,r') \longrightarrow \varphi(r)r'$ (1.2.2)

$R'\times R \longrightarrow R' \quad (r',r) \longrightarrow r'\,\varphi(r)$

skaler çarpımları ile R' R-sol modül ve R-sağ modül oldukları φ nın halka homomorfisi olmasından açıktır.

$M \in {}_{R'}\underline{M}$, $\varphi:R \longrightarrow R'$ halka homomorfisi olsun.
$r \in R$, $m \in M$ için

$r.m := \varphi(r)m$

ile M nın R ile soldan etkisi açıklansın bu skaler çarpım ile M nın R-sol modül olduğu açıktır. Bu özelliklerden dolayı R bir halka ise (1.2.2) de $\varphi=1_R$ alınarak R R-sol ve sağ modül yapılır. Buna R **regüler** R-sol(sağ)

modül denir. R halkası regüler R-sol(sağ) modül yapısı ile ele aldığımızda ${}^{0}R(R^{0})$ ile göstereceğiz.
$\Lambda^{l}(R)$ ve $\Lambda^{r}(R)$ kümelerinin elemanlarına sırasıyla R nın **sol ve sağ idealleri** denir ve $\Lambda^{l}(R)$, $\Lambda^{r}(R)$ kümeleri ile gösterilir. $\Lambda(R)=\Lambda^{r}(R)\cap\Lambda^{l}(R)$ kümesinin elemanlarına R nın **idealleri** denir.

$M,N\in{}_R\underline{\underline{M}}$ ve $\varphi:M\longrightarrow N$ (+) bir grup homomorfisi olsun.

φ ye **R-modül homomorfisi** denir $:\Longleftrightarrow$ Her $r\in R$, $m\in M$ için

$$\varphi(rm) = r\varphi(m)$$

dır.

$\operatorname{Im}\varphi=\{\ \varphi(m)\mid m\in M\ \}\in\Lambda(N)$, $\operatorname{Ker}\varphi=\{\ m\in M\mid \varphi(m)=0\ \}\in\Lambda(M)$
kümelerine sırasıyla φ **nın resmi** ve φ **nın çekirdeği** denir.

φ ye **R-epimorfi (monomorfi)** denir $:\Longleftrightarrow$

$$\operatorname{Im}\varphi = N \quad (\operatorname{Ker}\varphi=0)$$

dır.

φ ye **R-izomorfi** denir$:\Longleftrightarrow$ φ R-epimorfi ve monomorfidir. Bu durumda $M\cong N$ yazılır.

$M,N\in{}_R\underline{\underline{M}}$ için ${}_R\underline{\underline{M}}(M,N)$ ile M den N'e bütün R-modül homomorfilerini gösterelim.

$\varphi,\psi\in{}_R\underline{\underline{M}}(M,N)$, $m\in M$ olmak üzere

$$(\varphi+\psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m)$$

ile tanımlanan $\varphi+\psi:(M,+)\longrightarrow(N,+)$ bir Abel grup homomorfisidir. Bu işlemle $({}_R\underline{\underline{M}}(M,N),+)$ bir Abel grubu olacağı açıktır.
$M=N$, ψ, $\varphi\in{}_R\underline{\underline{M}}(M,M)$, $m\in M$ olsun.

$$(\varphi\psi)(m) = \varphi(\psi(m))$$

ile tanımlanan $\varphi\psi:M\longrightarrow M$ dönüşümü bir R-modül homomorfisi olduğu açıktır. Bu iki işleme göre ${}_R\underline{\underline{M}}(M,M)$ 1_M birim elemanlı bir halkadır. Bu halkaya M nın **endomorfiler halkası** denir ve kısaca ${}_R\underline{\underline{M}}(M)$ ile gösterilir.

$M\in{}_R\underline{\underline{M}}$ için aşağıda tanımlayacağımız işlemle ${}_R\underline{\underline{M}}(M)$ nın M üzerindeki sağdan etkisini açıklayalım.

$m\in M$, $\varphi\in{}_R\underline{\underline{M}}(M)$ olmak üzere

$$m.\varphi = \varphi(m)$$

ile tanımlansın. Bu skaler çarpım ile $M\in{}_R\underline{\underline{M}}_{R'}$ $R':={}_R\underline{\underline{M}}(M)$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Daha fazla olarak her

$r \in R$, $m \in M$, $\varphi \in {}_R\underline{\underline{M}}(M)$ için

$$r.(m\varphi)=r.\varphi(m)=\varphi(rm)=(rm).\varphi \qquad (1.2.3)$$

özelliğini gerçekler. Bu koşullarda M ye R-${}_R M(M)$ ikili modül denir.

R,S halkalar, $M \in {}_R M \cap M_S$ olsun.

M'e R-S **ikili modül** denir:$\Longleftrightarrow$ Her $r \in R$, $m \in M$, $s \in S$ için

$$r.(ms) = (rm)s$$

dır. Bütün R-S ikili modüllerin kümesini ${}_R\underline{\underline{M}}_S$ ile gösterilim. R-R- ikili modüle kısaca **R-ikili modül** denir.

R-modül deyince aksi söylenmedikce daima R-sol modül kastedilecektir.

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$ için (M,+) ve (R,+) nın birim elemanlarını "o" ile göstereceğiz.

R bir halka olsun

(i) R ye **komutatif halka** denir:$\Longleftrightarrow$ Her $r,r' \in R$ için $rr'=r'r$ dır.

(ii) $r \in R$ ye **sıfır bölen** denir :$\Longleftrightarrow$ $\exists r' \in R\setminus\{0\}$ öyle ki $rr'=r'r=0$ dır. (Burada $R \neq 0$ kabul edilecektir.)

(iii) R ye **sıfır bölensiz** halka denir :$\Longleftrightarrow$ 0 R de biricik sıfır bölendir.

(iv) R ye **tamlık bölgesi** denir :$\Longleftrightarrow$ $|R| \geqslant 2$ sıfır bölensiz ve komutatiftir.

(v) $a \in R$ ye **sol(sağ) tersinir** :$\Longleftrightarrow$R birim elemanlı ve $\exists a',a'' \in R$ öyle ki $a'a=1(aa''=1)$ dır.

(vi) $a \in R$ ye **tersinir eleman** denir:$\Longleftrightarrow$ a sol ve sağ tersinir. Tersinir elemanların oluşturduğu kümeyi **U(R)** ile gösterelim.

(vii) R ye **çarpık cisim** (bölme halkası) denir:$\Longleftrightarrow$$|R| \geqslant 2$ ve $U(R)=R\setminus\{0\}$ dır.

(viii) R ye **cisim** denir:$\Longleftrightarrow$ R komutatif çarpık cisimdir.

(ix) K bir cisim ise ${}_K\underline{\underline{M}}$ nın elemanlarına **K-vektör** veya **K-lineer** uzay denir. $\Lambda({}_K\underline{\underline{M}})$ nın elemanlarına da **K-alt(vektör)** uzayları diyeceğiz.

Bu çalışmamızda aksi söylenmedikçe K daima bir cisim olarak alınacaktır.

$M \in {}_R M$ için $0:=\{0\}$, $M \in \Lambda(M)$ oldukları açıktır.

Bu altmodüllere M nın **tirivial altmodülleri** denir.

$M,N,P \in {}_R\underline{\underline{M}}$, $\varphi \in {}_R\underline{\underline{M}}(M,N)$, $\psi \in {}_R\underline{\underline{M}}(N,P)$ olsun.

Bu taktirde her $m \in M$ için

$$(\psi\varphi)(m):=\psi(\varphi(m))$$

ile tanımlansın. Buna göre

$$_R\underline{\underline{M}}(M,N)\times {}_R\underline{\underline{M}}(N,P) \longrightarrow {}_R\underline{\underline{M}}(M,P) \quad ((\varphi,\psi) \longrightarrow \psi\varphi) \qquad (1.2.4)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır ve kategori tanımında (I) özelliğini gerçekler. Bu bilgiler ışığı altında nesneleri $_R\underline{\underline{M}}$ nın elemanları olan ve her (M,N) nesne çiftleri için

$Mor_R(M,N) = {}_R\underline{\underline{M}}(M,N)$ kümesi tanımlanırsa $_R\underline{\underline{M}}$ nesneler kümesi bir kategoridir. Her $M \in {}_R\underline{\underline{M}}$ için 1_M birim morfidir.

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$ ve $\{M_i \mid i \in I\} \subset \Lambda(M)$ olsun. Bu taktirde

$$\bigcap_{i\in I} M_i \in \Lambda(M)$$

olduğu açıktır. Bu altmodüle $\{M_i \mid i \in I\}$ ailesinin **arakesiti** denir. $X \subset M$ bir alt küme olsun. M nın X kümesini içeren tüm altmodüllerinin arakesitine **X ile üretilen altmodül** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Bir sonlu küme ile üretilen modüle **sonlu üretenli modül**, bir tek eleman tarafından üretilen **modüle devirli modül** denir. Sonlu üretenli R-sol (sağ, R-S ikili) modüllerin kümesini

$_R\underline{\underline{M}}^f$ ($\underline{\underline{M}}^f_R$, $_R\underline{\underline{M}}^f_S$) ile gösterilecektir.

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$, $X \subset M$ olsun. Bu taktirde,

$$\langle X \rangle = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R,\ n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\},\ x_i \in X \right\}, & X \neq \emptyset \\ 0 & , X = \emptyset \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

olduğu açıktır.

$\{M_i \mid i \in I\} \subset \Lambda(M)$ için

$$\langle \bigcup_{i\in I} M_i \rangle \in \Lambda(M)$$

altmodülüne $\{M_i \mid i \in I\}$ ailesinin **toplamı** denir ve $\sum_{i\in I} M_i$ ile gösterilir.

(1.2.5) ile

$$\sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{i\in I} m_{\lambda_i} \mid \lambda_i \in \Lambda ,\ m_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

olduğu kolaylıkla elde edilir.

$$M = \sum_{i\in I} M_i \quad \text{ve her } j\in I \text{ için}$$
$$M_j \cap \sum_{i\neq j} M_i = 0 \qquad (1.2.6)$$

ise M ye $\{M_i \mid i\in I\}$ ailesinin bir **(iç) direkt toplamı** denir ve $M=\bigoplus_{i\in I} M_i$ yazılır. $I=\{1,2,\dots,n\}$ ise

$$M_i = \sum_{i\in I} M_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \text{ ve } \qquad \bigoplus_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

ile göstereceğiz.

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$ olsun.

(i) $X := \{x_1,x_2,\dots,x_n\} \subset M$ altkümesine **R-serbest** veya **lineer bağımsızdır** denir $:\Longleftrightarrow [r_i \in R,\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0 \Longleftrightarrow r_i=0\ (i=1,2,\dots,n)]$ (1.2.7) dır.

(ii) $X\subset M$ altkümesine **R-serbest (lineer bağımsız)** dır denir$:\Longleftrightarrow X$ in her sonlu altkümesi R-serbest (lineer bağımsız) dır.

(iii) X R-serbest ve $\langle X\rangle = M$ ise X'e M nın bir **R-bazı** denir.

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$, $N, N' \in \Lambda(M)$ olsun.

N ye M nin **direkt terimi (faktörü)** denir $:\Longleftrightarrow M=N\oplus N'$ dır.

M ye **direkt ayrışamaz** R-modül denir$:\Longleftrightarrow$ 0 ve M M nın yegâne direkt terimidir.

$\Lambda(M)$ nın her elemanı direkt terim ise $\Lambda(M)$'e **komplimentlenebilir** denir.

$(\Lambda, \leqslant)$ bölümsel (kısmi) sıralanmış bir küme olsun. Her $a,b\in\Lambda$ için

$$\text{Sup}\{a,b\} = a\vee b \quad \text{ve} \quad \text{İnf}\{a,b\} = a\wedge b$$

mevcut ise Λ ya bir **kafes** denir.

Λ ya **tam kafes** denir$:\Longleftrightarrow$Her $\emptyset \neq \Lambda' \subset \Lambda$ için $\text{Süp}\{\Lambda', \leqslant\}$, $\text{inf}\{\Lambda', \leqslant\}$ mevcuttur.

Λ, Λ' iki kafes ve $f:\Lambda \longrightarrow \Lambda'$ bir tam eşleme olsun.

f ye **kafes izomorfi** denir.$\Longleftrightarrow$ Her $a,b\in\Lambda$ için

$$f(a\vee b) = f(a) \vee f(b) \quad \text{ve} \quad f(a\wedge b) = f(a)\wedge f(b)$$

dır. Bu tanımlara göre $M\in {}_R\underline{\underline{M}}$ ise $(\Lambda(M), \subset)$ bölümsel sıralanmış bir kümedir. Bu sıralamaya göre $\Lambda(M)$ bir tam kafestir. Gerçekten $\{N_i \mid i\in I\} \subset \Lambda(M)$ ise

$$\text{Sup}\{N_i \mid i\in I\} = \sum_{i\in I} N_i \quad \text{ve} \quad \text{İnf}\{N_i \mid i\in I\} = \bigcap_{i\in I} N_i$$

olduğundan iddia açıktır.

Modül homomorfileri için tanımlardan hemen elde edilebilen bazı özellikleri aşağıda sıralayabiliriz.

(1.2.8)

$M,N,P \in {}_R\underline{\underline{M}}$ $\quad \alpha \in {}_R\underline{\underline{M}}(M,N)$, $\quad \beta \in {}_R\underline{\underline{M}}(N,P)$ olsun.

(1) β, α monomorfi, (epimorfi) ise $\beta\alpha$ monomorfi (epimorfi) dır.

(2) $\beta\alpha$ monomorfi (epimorfi) ise α monomorfi (β epimorfi) dır.

(3) $U \in \Lambda(M)$, $V \in \Lambda(N)$ ise

$\alpha(\alpha^{-1}(V)) = V \cap \text{İm}\alpha$, $\quad \alpha^{-1}(\alpha(U)) = U + \text{Ker}\alpha$

$\text{Ker}(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(\text{Ker}\beta)$, $\quad \text{im}(\beta\alpha) = \beta(\text{İm}\alpha)$

dır.

Modüller İçin İzomorfi Teoremleri :

(1.2.9)

(i) $M,N \in {}_R\underline{\underline{M}}$, $\quad \alpha \in {}_R\underline{\underline{M}}(N,M)$ ise $N/\text{Ker}\alpha \cong \text{İm}\alpha$

dır.

(ii) $N, N' \in \Lambda(M)$ ise $N'+N/N \cong N'/(N' \cap N)$

dır.

(iii) $N,N' \in \Lambda(M)$, $N \subset N'$ ise $N'/N \in \Lambda(M/N)$ ve $(M/N)/(N'/N) \cong M/N'$

dır.

(1.2.10)

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$, $N, N' \in \Lambda(M)$, $M = N \oplus N'$ ise $M/N \cong N'$ dır.

(1.2.11)

$M, N, P \in {}_R\underline{\underline{M}}$, $\alpha \in {}_R\underline{\underline{M}}(M,N)$, $\beta \in {}_R\underline{\underline{M}}(N,P)$, $\lambda \in {}_R\underline{\underline{M}}(M,P)$ ve $\quad \lambda = \beta\alpha$ olsun.
Bu taktirde aşağıdakiler doğrudur.

(1) $\beta^{-1}(\text{İm}\lambda) = \text{İm}\alpha + \text{Ker}\beta$, $\quad \alpha(\text{Ker}\lambda) = \text{İm}\alpha \cap \text{Ker}\beta$ dır.

(2) λ epimorfi ise $\text{İm}\alpha + \text{Ker}\beta = N$

λ monomorfi ise $\text{İm}\alpha \cap \text{Ker}\beta = 0$

λ izomorfi ise $\text{İm}\alpha \oplus \text{Ker}\beta = N$

dır.

$I \neq \emptyset$ $\quad \{M_i \mid i \in I\} \subset {}_R\underline{\underline{M}}$ ailesi verilsin.

$$M=:\prod_{i\in I} M_i = \left\{ \alpha : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i \;\middle|\; \text{her } i\in I \text{ için } \alpha(i)\in M_i,\ \alpha \text{ bir dönüşüm} \right\}$$

kümesine $\{M_i \mid i\in I\}$ ailesinin **kartezyen çarpımı** denir. Şimdi M üzerinde bir R-modül yapısı açıklayalım.

$\alpha\in M$ için $m_i := \alpha(i)$ ve $\alpha=(\alpha(i))_{i\in I} = (m_i)_{i\in I} = (m_i)$

notasyonları tanımlansın. (m_i), $(n_i) \in M$, $r\in R$ olsun.

$$(m_i) + (n_i) = (m_i + n_i)$$

$$r(m_i) = (rm_i)$$

işlemleri ile $M=\prod_{i\in I} M_i \in {}_R\underline{M}$ olduğu açıktır. $(m_i)\in M$ için

$$\operatorname{des}(m_i) = \{ i\in I \mid m_i \neq 0 \} \subset I$$

altkümesine (m_i) nın **desteği** denir.

$$\coprod_{i\in I} M_i := \{ (m_i)\in \prod_{i\in I} M_i \mid \operatorname{des}(m_i) \text{ sonlu küme} \} \in \Lambda(\prod_{i\in I} M_i)$$

olduğu açıktır. $\prod_{i\in I} M_i$ $(\coprod_{i\in I} M_i)$ modülüne $\{M_i \mid i\in I\}$ ailesinin **direkt çarpımı (direkt toplamı)** denir.

M $\{M_i \mid i\in I\}$ ailesinin direkt çarpımı olsun. Her $\alpha\in I$ için

$$\pi_\alpha((m_i)) = m_\alpha$$

ile tanımlanan $\pi_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$ dönüşümü bir R-modül epimorfisi olduğu açıktır. π_α ya α**. projeksiyon** denir.

$m_\alpha \in M_\alpha$ için

$$m_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha\neq\beta \\ m_\alpha, & \alpha=\beta \end{cases}$$

olmak üzere,

$$i_\alpha(m_\alpha) := (m_{\alpha\beta})$$

ile tanımlanan $i_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$ dönüşümü bir R-modül monomorfisidir. Bu homomorfiye α**. injeksiyon** denir.

Modüllerin özel seçimi için aşağıdaki notasyonları verelim.

(1) Her $\alpha\in I$ için $M_\alpha = M$ ise $\prod_{i\in I} M_i = M^I$, $\coprod_{i\in I} M_i = M^{(I)}$

ile gösterilecek

(2) $I = \{1,2,\ldots,n\}$ için $\coprod_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i = \prod_{i=1}^{n} M_i$

ile gösterilecek.

Her $\alpha \in I$'için

$i_\alpha(M_\alpha) \cong M_\alpha$ ve $\coprod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} i_i(M_i)$

olduğundan $\coprod_{i\in I} M_i$ yerine $\bigoplus_{i\in I} M_i$ yazacağız.

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$ **serbest R-modül** denir $:\Longleftrightarrow \exists\, X \subset M$ öyle ki X M nın bir R- bazıdır.

(1.2.10)

M R-serbest modül $\Longleftrightarrow M_i \cong {}^{\circ}R$ olmak üzere $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$

(1.2.11)

$\{M_i \mid i \in I\} \subset {}_R\underline{\underline{M}}$ π_i, i_i sırasıyla i. projeksiyon ve injeksiyonlar olsun. Bu taktirde aşağıdakiler doğrudur.

(i) Her $i,j \in I$ için $\pi_i i_j = \delta_{ij}.1_{M_i}$

dır.

(ii) $I = \{1,2,\ldots,n\}$ ise $\sum_{i\in I} i_i\pi_i = 1_{\bigoplus_{i=1}^{n} M_i}$.

dır.

(1.2.12)

R bir halka ise ${}^{\circ}R^{(I)}$ kartınalı $|I|$ olan bir baza sahip serbest R-modüldür.

(1.2.13)

Her R-modül bir serbest R-modülün epimorf resmidir.

3. TAM DİZİLER, ARTİNİAN VE NOETHERİAN MODÜLLER:

$M', M, M'' \in {}_R\underline{\underline{M}}$ ve $\varphi \in {}_R\underline{\underline{M}}(M', M)$, $\psi \in {}_R\underline{\underline{M}}(M, M'')$ olsun.

$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'$ (φ, ψ) modül homomorfilerinin ikilisine **tamdır** denir$:\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$

$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M$ **disizi tamdır**$:\Longleftrightarrow \varphi$ R-monomorfi

$M \xrightarrow{\psi} M' \longrightarrow 0$ **dizisi tamdır**$:\Longleftrightarrow \psi$ R-epimorfi

dır.

$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ dizisine ${}_R\underline{\underline{M}}$de **tamdır** denir:$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$, φ monomorfi, ψ epimorfi dır. Bu durumda (1.2.9) ile $M/\mathrm{Im}\varphi \cong M''$ dır.

$N \in \Lambda(M)$ ve $\nu_N(m) := m+N$

dönüşümü $\nu_N : M \longrightarrow M/N$ bir R-modül **kanonik** epimorfidir. Buna göre

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_N} M \xrightarrow{\nu_N} M/N \longrightarrow 0 \quad {}_R\underline{\underline{M}}$$

de bir tam dizidir.

$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ tam dizisine **parçalanabilir** denir:$\Longleftrightarrow$
$\exists\ \theta \in {}_R\underline{\underline{M}}(M'',M)$ öyleki $\psi\theta = 1_{M''}$ dır.

(1.3.1)

$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \quad {}_R\underline{\underline{M}}$ de bir tam dizi olsun.
$M', M'' \in {}_R\underline{\underline{M}}^f$ ise $M \in {}_R\underline{\underline{M}}^f$
dır. Ancak tersi genel olarak doğru değildir.

(1.3.2)

$M \in {}_R\underline{\underline{M}}$ $N_i \in \Lambda(M)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ise

$$0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} N_i \xrightarrow{1_{\bigcap_{i=1}^{n} N_i}} M \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{n}(M/N_i) \ , \quad \psi(m) := (m+N_1,\ldots,m+N_n) .$$

dizisi tamdır. ψ in genel olarak örten olması gerekmez.

Bir $M \in {}_R\underline{\underline{M}}$ modülüne **Artinian (Noetherian)** denir:$\Longleftrightarrow$Aşağıdaki denk şartlardan birini gerçekler.

(i) $\Lambda(M)$ in boş olmayan her altkümesi "$\subset$" bağıntısına göre bir minimal (maksimal) elemana sahiptir.

(ii) $\Lambda(M)$ de azalan (artan) her zincir sonludur. Yani;

Her $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ $(M_1 \subset M_2 \subset \ldots .)$

M nın azalan (artan) altmodüllerinin zinciri için $\exists\ n \in \mathbb{N}^*$ öyle ki her $i \geqslant 0$ için $M_n = M_{n+i}$

dır.

(1.3.3)

$M \in {}_R\underline{M}$ olsun.

M Noetheriandir $\Longleftrightarrow$ Her $N \in \Lambda(M)$ için N sonlu üretenlidir.

İspat :

M Noetherian bir R-modül ve $N \in \Lambda(M)$ olsun. N_o N nın sonlu üretenli altmodüllerinin maksimal elemanı olsun. Her $n \in N$ için $N_o + Rn = N_o$ olduğundan $N = N_o$ elde edilir. Bu ise N nın sonlu üretenli olduğunu verir. Tersine olarak $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ $\Lambda(M)$ de keyfi bir artan zincir olsun. Bu taktirde $M_o = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \Lambda(M)$ dır. Buradan Hipotezden $\exists\, m_1, m_2, \ldots, m_n \in M_o$ öyle ki $M_o = \langle m_o, m_1, \ldots, m_n \rangle$ dır. Böylece $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ öyle ki $m_i \in M_{\lambda_n}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ dir. Sonuç olarak her $i \geqslant 0$ için $M_{\lambda_n} = M_{\lambda_n + i}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla denklik tamamlanır.

(1.3.4)

$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ ${}_R\underline{M}$ de bir tam dizi olsun.

M Artinian (Noetherian) $\Longleftrightarrow$ M', M'' Artinian (Noetherian) dır.

İspat :

$\Longrightarrow$ M Artinian ise M' nun Artinian olduğu açıktır. $\{M''_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda(M'')$ de azalan bir zincir ise $\{\psi^{-1}(M''_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda(M)$ de azalan bir zincirdir. Buradan $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ öyle ki her $i \geqslant 0$ için

$$\psi^{-1}(M''_n) = \psi^{-1}(M''_{n+i})$$

ıır. Buradan (1.2.8) ile her $i \geqslant 0$ için $M''_n = M''_{n+i}$ olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla M" Artiniandır.

$\Longleftarrow$: M', M'' artinian ve $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda(M)$ keyfi bir azalan zincir olsun. Buradan

$$\{\psi(M_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda(M'') \quad \text{ve} \quad \{\varphi^{-1}(M_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \Lambda(M')$$ azalan zincirlerdir. Hipotezden $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ öyle ki her $i \geqslant 0$ için

$$\psi(M_n) = \psi(M_{n+i}) \quad \text{ve} \quad \varphi^{-1}(M_n) = \varphi^{-1}(M_{n+i})$$

ıır. Buradan (1.2.8) ve dizinin tamlığından

$$M_n + \operatorname{Im}\varphi = M_{n+i} + \operatorname{Im}\varphi \quad \text{ve} \quad \operatorname{Im}\varphi \cap M_n = \operatorname{Im}\varphi \cap M_{n+i}$$

lduğu açıktır. Dolayısıyla M Artinian bir R-modüldür.

oetherin olması durumu benzer şekilde yapılır.

(1.3.5)

$M_i \in {}_R\underline{M}$ $(1 \leq i \leq n)$ olsun. Bu taktirde;

$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ Artinian (Noetherian) $\Longleftrightarrow$ M_i $(1 \leq i \leq n)$ Artinial (Noetherian) dır.

İspat :

n=2 için $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$

dizisi ${}_R\underline{M}$ de tam olduğundan (1.3.4) ile iddia n=2 olması durumunda açıktır. İddiayı tamamlamak için n üzerinden tümevarım uygulayarak ispat tamamlanır.

$M \in {}_A\underline{M}$ $M_i \in \bigwedge(M)$ $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere

$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$

sonlu zincirine M de bir **seri** denir. M_i $(0 \leq i \leq n)$'e bu serinin **terimleri**, M_{i+1}/M_i $(i < n)$'e serinin **faktörleri** denir.

$M \in {}_A\underline{M}$ olsun.

M ye **basit modül** denir $\Longleftrightarrow$ $M \neq 0$ ve $\bigwedge(M) = \{0, M\}$ dır.

$T = \{M_0, M_1, \ldots, M_n\}$ $S = \{N_0, N_1, \ldots, N_m\}$ M de iki seri olsun.

S ye T nın bir **inceltilmişidir** $:\Longleftrightarrow$ $T \subset S$

dır. S ye bir **esas** denir: $\Longleftrightarrow$ S nın tüm faktörleri basittir.

S ile T serilerine **denktir** denir: $\Longleftrightarrow$ S ile T nin sıfır olmayan faktörleri değişik bir sırada izomorftur. Schreier Teoremi ile bir R-modülün iki serisinin daima bir denk inceltilmişleri vardır. Jordan-Holder Teoremi ile iki esas serinin denk olacağı gösterilir. Buradan bir esas seriye sahip R-modülün bütün esas serilerinin faktörlerinin sayıları aynıdır. Bu sayıya M modülünün **uzunluğu** denir ve $\ell(M)$ ile gösterilir.

(1.3.6)

$0 \neq M \in {}_R\underline{M}$ bir esas seriye sahiptir $\Longleftrightarrow$
M artinian ve Noetheriandır.

İspat $:\Longrightarrow$

$\ell(M)=n$ olsun. Buradan $\bigwedge(M)$ de azalan veya artan her zincir en fazla n+1 elemanlıdır. Buradan M Artinian ve Noetheriandır.

:

$\Leftarrow$:

M Noetherian ise $\exists N \in \mathcal{L}$ (M) öyle ki M/N basittir. (1.3.4) ve

$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ $_A\underline{M}$ - bir tam dizi olduğundan N Noetheriandır. Buradan yine benzer işlemler N üzerinden uygulanırsa

$\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ M_{n+1}/M_n basit R-modül olacak biçimde bulunabilir. M Artinian olduğundan bu zincir bir yerde o olacaktır. Buradan M bir esas seriye sahiptir. $M \in {}_A\underline{M}$ için basitçe aşağıdakileri yazabiliriz.

$M=0 \Leftrightarrow \ell(M)=0$ ve M basit $\Leftrightarrow \ell(M)=1$ (1.3.7)

R birim elemanlı ve komütatif bir halka olsun.

A ya bir **R-cebir** denir: $\Leftrightarrow$ i) $A \in {}_R\underline{M}$ üniter modül

ii) A birim elemanlı bir halka

iii) Her $a,b \in A$, $r \in R$ için $r(a.b)=(ra)b$

dır. A bir R-cebir ve A nın merkezi

$Z(A) = \{ x\in A \mid \text{her } a \in A \text{ için } xa=ax \}$

olsun. Bu taktirde $R \longrightarrow Z(A)$ $(r \longrightarrow r.1_A)$ dönüşümü bir üniter halka homomorfisidir. Tersine A birim elemanlı bir halka ve R den Z(A) ya bir üniter halka homomorfisi varsa (1.2.2) ile A bir R-cebir yapılır. Bu bilgiler neticesinde A bir K-cebir ise $K \subseteq A$ kabul edebiliriz. Zorn'Lemması ile her K-cebiri serbesttir. Daha fazla olarak her K-cebirinin keyfi iki K-bazının kardınalı aynı olduğundan , tektürlü olarak bellidir. Bu çalışmamızda bazı tektürlü olan K-bazın kardınalını $|A:K|$ ile göstereceğiz. "R-cebir" ifasedinde R nın önemi yok ise kısaca cebir diyeceğiz.

A,B R-cebirler ve $\theta: A \longrightarrow B$ üniter halka homomorfisi olsun.

θ **R-cebir homomorfisi (epimorfisi), monomorfisi)** dir: $\Leftrightarrow$

$\theta \in {}_R\underline{M}(A,B)$ (epimorfi, monomorfi) dır.

θ **R-cebir izomorfisidir** : $\Leftrightarrow$ θ R-cebir epimorfisi ve monomorfisidir. Bu durumda $A \cong B$ ile gösterilir.

A bir R-cebir, $B \subseteq A$ olsun.

B A nın bir **R-altcebiri** dir : $\Leftrightarrow$ B bir R-cebirdir.

$A_1, A_2, \ldots A_n$ R-cebirler ise $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i \in {}_R\underline{M}$ modülünü aşağıdaki gibi bir R-cebir yapabiliriz.

$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in \bigoplus A_i$ için

$(a_1,a_2,\ldots,a_n).(b_1,b_2,\ldots,b_n)=(a_1.b_1,a_2.b_2,\ldots,a_n.b_n)$ ile tanımlanan işleme göre $\bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ bir R-cebirdir.

Bunu $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$ ile göstereceğiz.

A,B R-cebirler $\theta : A \longrightarrow B$ R-cebir homomorfisi olsun. $\mathrm{Ker}\theta = \{ a \in A \mid \theta(a)=0 \}$ alt kümesine **θ nın çekirdeği** denir. $\mathrm{Ker}\theta \in \Lambda(A)$ olduğu açıktır. A bir R-cebir, $I \in \Lambda(A)$ olsun. Bu taktirde $A/_I$ faktör halkası $r \in R$, $a+I \in A/_I$ için

$$r(a+I) := ra+I$$

ile bir R-cebirdir. A/I R-cebirine **faktör cebiri** denir. Her $a \in A$ için

$\nu(a) := a+I$ dönüşümü $\nu : A \longrightarrow A/I$ ye $\mathrm{Ker}\nu = I$ olan bir R-cebir epimorfisidir. Buna **kanonik epimorfi** denir.

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ $\alpha \in {}_A\underline{\underline{M}}(M)$ ve $r \in R$ olsun.

$$(r.\alpha)(m) := r.\alpha(m)$$

yardımıyla $r\alpha \in {}_A\underline{\underline{M}}(M)$ elemanları açıklansın. Bu işlemlere göre ${}_A\underline{\underline{M}}(M)$ bir R-cebirdir.

(1.3.8) A bir R-cebir ise $A \cong {}_A\underline{\underline{M}}({}^oA)$ (R-cebir olarak) dır.

İspat :

Her $a \in A$ için $\lambda_a(b) := ba$ ile $\lambda_a \in {}_A\underline{\underline{M}}({}^oA)$ elemanlarını tanımlayalım.

$$\psi(\varphi) := \varphi(1_A)$$

dönüşümü $\psi : {}_A\underline{\underline{M}}({}^oA) \longrightarrow A$ bir R-cebir izomorfisi tanımlar gerçekten in bir R-cebir monomorfisi olduğu açıktır. $a \in A$ için $\varphi = \lambda_a$ alınırsa $\psi(\varphi) = \varphi(1) = a$ olduğu elde edilir. Buradan ψ bir R-cebir izomorfisidir.

$\theta : A \longrightarrow B$ R-cebir homomorfisi ve $M \in {}_B\underline{\underline{M}}$ olsun.
$m \in M$, $a \in A$ için

$$a.m := \theta(a).m \tag{1.3.9}$$

işlemi ile A nın M üzerindeki soldan etkisi açıklansın.
Buradan $M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ olduğu açıktır. Bu şekilde elde edilen $M \in {}_AM$ modülünü ${}_\theta M$ ile gösterelim.

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ ve $X \subseteq M$ olsun.

$\mathrm{ann}_A(X) = \{ a \in A \mid aX=0 \} \subseteq A$ altkümesine **X in annılatörü** denir. $\mathrm{ann}_A(M) \in \Lambda(A)$ olduğu açıktır.

M modülüne **sadıktır** denir $:\Longleftrightarrow$ $\mathrm{ann}_A(M) = 0$

(1.3.10)

A,B R-cebirler , $\theta:A \longrightarrow B$ R-cebir epimorfisi $N \in {}_{A}\underline{\underline{M}}$ olsun. Bu taktirde $\exists M \in {}_{B}M$ öyle ki

$$N = {}_{\theta}M \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\theta \subseteq \mathrm{ann}_A(N)$$

dır.

İspat : $:\Longrightarrow$ Açıktır.

$\Longleftarrow$: Her $b \in B$ için θ epimorfi olduğundan $\exists a_b \in A$ öyle ki $\theta(a_b)=b$ dır. Her $m \in N$, $b \in B$ için

$$bm := a_b m$$

ile B nın N üzerindeki etkisi açıklansın. Bu modül çarpımı ile $\mathrm{Ker}\theta \subseteq \mathrm{ann}_A(N)$ olduğundan N bir B-modül ve ${}_{\theta}N=N$ olduğu açıktır.

(1.3.11)

A bir R-cebir $I \in \Lambda(A)$, $N \in {}_{A/I}\underline{\underline{M}}$ ve $\nu:A \longrightarrow A/I$ kanonik R-cebir epimorfisi olsun. Bu taktirde,

$$N \text{ sadıktır} \Longleftrightarrow \mathrm{ann}({}_{\nu}N)=I$$

dır.

İspat : (1.3.10) da $\theta=\nu$ alınarak ispat yapılır.

$M \in {}_{A}M$ **yarıbasittir** $:\Longleftrightarrow$ M basit modüllerin direkt toplamıdır.

A bir R-cebir, $M \in \Lambda^{l}(A)$ olsun.

M **minimal** $:\Longleftrightarrow$ $M \in \Lambda({}^{o}A)$ basit modüldür.

M **maksimal** $:\Longleftrightarrow$ ${}^{o}A_{/M}$ A-basit modül

(1.3.12)

$N \in {}_{A}\underline{\underline{M}}$, $N \neq 0$ için aşağıdakiler denktir.

(i) N basittir.

(ii) Her $n \in N \setminus \{0\}$ için $N=An$

(iii) $M \in \Lambda^{l}(A)$ maksimal öyle ki $N \cong {}^{o}A/M$

dır.

İspat :

(i)$\Longleftrightarrow$(ii) ve (iii)$\Longrightarrow$(i) oldukları açıktır.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) $0 \neq n \in N$ olsun. Her $x \in A$ için $\theta(x)=xn$ ile tanımlanan $\theta : A \longrightarrow N$ dönüşümü (i) ile örtendir. Buradan (1.2.9) (i) ile ${}^{o}A/_{Ker\theta} \cong N$ elde edilir. $Ker\theta = M$ dersek tanımdan M nın maksimal olduğu açıktır.

(1.3.13)

$N,M \in {}_{A}\underline{M}$ ve $\phi \in {}_{A}\underline{M}(N,M) \setminus \{0\}$ için aşağıdaki üç özellik **schur Lemması** diye bilinir.

(i) N basit ise ϕ monomorfi,

(ii) M basit ise ϕ epimorfi.

(iii)M,N basit ise ϕ bir izomorfizm.

İspat : $Ker\phi \in \Lambda(N)$ ve $Im\phi \in \Lambda(M)$ oldukları kullanılarak hemen elde edilir.

(1.3.14)

$N \in {}_{A}\underline{M}$ yarıbasit ise aşağıdakiler denktir.

(i) N basıt modül

(ii) ${}_{A}\underline{M}(N)$ R-bölme cebiri

(iii) N direkt ayrışamazdır.

ispat :

(i): $\Longrightarrow$ (ii) (1.3.13) den elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $N=N_1 \oplus N_2$ olsun. $\Pi_1 \in {}_{A}\underline{M}(N)$ ve $\Pi_1^2=\Pi_1$ olduğundan $\Pi_1=0$ veya $\Pi_1 \in U({}_{A}\underline{M}(N))$ dır. Buradan $Ker\Pi_1=0$ veya $1_N = \Pi_1$ elde edilir. Buradan $N=N_2$ veya $N=N_1$ dır.

Sonuç olarak $N_1=0$ veya $N_2=0$ dır. Dolayısıyla N ayrışamazdır.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) aşağıdaki teoremle elde edilir.

(1.3.15.)

$M \in {}_{A}\underline{M}$ için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M yarıbasıttır

(ii) $M = \sum\limits_{\substack{N \in \Lambda(M) \\ N \text{ basıt}}} N$

(iii) $\Lambda(M)$ komplimentlenebilir kafes.

İspat :

(i)$\Longrightarrow$(ii) tanımdan açıktır.

(ii)$\Longrightarrow$(i) $M=\sum_{i\in I} N_i$ (her $i\in I$ için N_i basit) olsun. Zorn Lemmasısya $\exists J\subseteq I$ maksimal altküme öyle ki $M'=\sum_{i\in J} N_i$ toplamı direkt toplamdır. I=J ise ispat biter. O halde $I\setminus J\neq\emptyset$ olsun. Her $i\in I\setminus J$ için $M'\cap N_i\in\Lambda(N_i)$ olduğundan $N_i\cap M'=0$ veya $N_i\cap M'=N_i$ dır. J maksimal altküme olduğundan $N_i\cap M'=N_i$ dır. Yani her $i\in I\setminus J$ için $N_i\subseteq M'$ ve buradan M=M' elde edilir. Dolayısıyla M yarıbasıttır.

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

I. Adım : Her $N\in\Lambda(M)$ için $\Lambda(N)$ komplimentlenebilir olduğunu gösterelim. $W\in\Lambda(N)$ ise $\exists W'\in\Lambda(M)$ öyle ki $M=W\oplus W'$ dır. Buradan $N=W\oplus(W'\cap N)$ elde edilir. Böylece $\Lambda(N)$ in komplimentlenebilir olduğu elde edilir.

II. Adım : Her $N\in\Lambda(M)\setminus\{0\}$ için N nın bir basit altmodül içerdiğini gösterelim.

$0\neq n_o\in N$ ve $N_o\in\Lambda(N)$, $n_o\notin N_o$ koşulunu gerçekleyen maksimal altmodül olsun. I. adımdan dolayı $\exists N_1\in\Lambda(N)$ öyleki $N=N_o\oplus N_1$ dır. N_1 basit değil ise I. Adımdan dolayı $\exists N_2,N_3\in\Lambda(N_1)$ öyleki $N_1=N_2\oplus N_3$ $N_2\neq 0$, $N_3\neq 0$ olacak biçimde vardır. Buradan
$N=N_o\oplus N_2\oplus N_3$ ve $N_o=(N_o\oplus N_2)\cap(N_o\oplus N_3)$ elde edilir.
$n_o\notin N_o$ olduğundan $n_o\notin N_o\oplus N_2$ veya $n_o\notin N_o\oplus N_3$ elde edilirki bu $n_o\notin N_o$ olan N_o altmodülünün maksimal olması ile çelişir. O halde N_1 basit olmak zorundadır.

$N\in\Lambda(M)$ M nın bütün basit altmodüllerinin direkt toplamı olsun. (iii) ile $\exists W\in\Lambda(M)$ öyle ki $M=N\oplus W$ dır. N nın tanımı ve II. Adım ile W=0 olmak zorundadır. O halde M=N ve M yarıbasıttır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$M=\sum_{i\in I} N_i$ ve $P\in\Lambda(M)$ keyfi verilsin. Zorn Lemması ile

$$\sum M_i+P=\bigoplus_{i\in J} M_i\oplus P$$

olacak şekilde $J\subseteq I$ maksimal altkümesi vardır.

$$M':=\bigoplus_{i\in J} M_i\oplus P \quad \text{olsun.}$$

I = J ise ispat biter. O halde $I\setminus J\neq\emptyset$ ve $i\in I\setminus J$ keyfi verilsin. J maksimal olduğundan $M'\cap N_i\neq 0$ dır. O halde $M'\cap N_i=N_i$ ve $M'\supseteq N_i$ elde edilir.

Sonuç olarak $M=M_1$ ve P M nın direkt faktörüdür. Buradan $\Lambda(M)$ komplimentlenebilirdir.

(1.3.16)

$M \in {}_A\underline{M}$ yarıbasıt ise her $N \in \Lambda(M)$ için N ve $M/_N$ yarıbasıttır.

İspat : (1.3.15) I. Adım ile $\Lambda(N)$ komplimentlenebilir olduğundan N yarıbasıttır. Benzer şekilde $\Lambda(M/_N)$ nın komplimentlenebilir olduğu elde edilerek $M/_N$ nın yarıbasıt olduğu görülür.

(1.3.17)

Yarıbasıt modüllerin direkt toplamıda yarıbasıttır.

İspat :

(1.3.15) ve tanımın sonucudur.

(1.3.18)

$M = \bigoplus_{\substack{i\in I \\ N_i \text{ basit}}} N_i$, $N \in {}_A\underline{M}$ basıt , ve $\alpha \in {}_A\underline{M}(N,M)\setminus\{0\}$ ise

$\exists\, j \in I$ öyleki $M = \alpha(N) \oplus (\bigoplus_{i\in I\setminus\{j\}} N_i)$ dır.

İspat :

(1.3.15) ile $\exists\, J \subset I$ öyleki $M = \alpha(N) \oplus (\bigoplus_{i\in J} N_i)$ dır. Schur Lemması ile $N \cong \alpha(N) = M/\bigoplus_{i\in J} N_i \cong \bigoplus_{i\in I\setminus J} N_i$

N basıt olduğundan $|I\setminus J| = 1$ ve $J = I\setminus\{j\}$ elde edilir. Buradan

$$M = \alpha(N) \oplus (\bigoplus_{i\in I\setminus\{j\}} N_i)$$

dır.

${}_A\underline{M}$ kategorisindeki basıt A-modüllerin izomorfi sınıflarının temsilciler sistemi $\{ N_i \mid i \in J \}$ olsun. Her $M \in {}_A\underline{M}$ için

$$M(i) = \sum_{\substack{N \cong N_i \\ N \in \Lambda(M) \text{ basıt}}} N$$

ile tanımlansın.

(1.3.19)

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ yarıbasıt ise $M = \bigoplus_{i \in J} M(i)$ dır.

İspat :

$M_i := \bigoplus_{j \in K_i} N_{ij}$ $N_{ij} \cong N_i$ için $M = \bigoplus_{i \in J} M_i$ olduğu açıktır. $K_i = \{j \mid N_{ij} \cong N_i\}$

$M_i \subset M(i)$ dır. $N_i \cong N \in \Lambda(M)$ olsun. $M_i' := \bigoplus_{j \in J \setminus \{i\}} M_j$

$M = M_i \oplus M_i'$ ve $\pi : M \longrightarrow M_i'$ ayrışımla ilgili projeksiyon olsun. (3.1.18) ile $\pi(N)=0$ ve buradan $N \subset M_i$ elde edilir. Sonuç olarak $M(i) \subset M_i$ olup $M_i = M(i)$ dır. Böylece $M = \bigoplus_{i \in J} M(i)$ elde edilir.

(1.3.20)

$M, M' \in {}_A\underline{\underline{M}}$ yarıbasit modüller ve $\varphi \in {}_A\underline{\underline{M}}(M, M')$ ise her $i \in J$ için $\varphi(M(i)) \subset M'(i)$ dır.

İspat :

(1.3.18) den açıktır.

(1.3.21)

$M, M' \in {}_A\underline{\underline{M}}$ yarıbasit modüller,

$M(i) = \oplus n_i N_i$, $M'(i) = \oplus m_i N_i$

olsun. Bu taktirde

$M \cong M' \Longleftrightarrow$ Her $i \in J$ için $n_i = m_i$

dır.

İspat :

$\Longleftarrow$: Trivialdir.

$\Longrightarrow$: $\varphi : M \longrightarrow M'$ A-modül izomorfisi olsun. (1.3.19) ile

$\varphi(M(i)) = M'(i)$

dır. $i \in J$ keyfi verilsin. $n_i = 0$ ise $M'(i) = \varphi(0) = 0$ olduğundan $m_i = 0$ dır. $n_i = m \geqslant 1$ olsun. Buradan $M(i) = \bigoplus_{j=1}^{m} N_{ij}$ dır.

$M'(i) = \bigoplus_{k \in K} N_{ik}'$ ise her $k \in K$ $1 \leqslant j \leqslant m$ için

$N_{ij} \cong N'_{ik} \cong N_i$ ve $|K| = m_i$ dır. (1.3.18) ile $\ell \in I$ öyleki
$\varphi(N_{im}) \oplus (\bigoplus_{\substack{k \neq \ell \\ k \in I}} N'_{ik}) = M'(i) = \varphi(N_{im}) \oplus \varphi(N_{i1} \oplus \ldots \oplus N_{im-1})$
dır. Sonuç olarak

$$N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \ldots \oplus N_{im-1} \cong \varphi(N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \ldots \oplus N_{im-1}) \cong M(i)/\varphi(N_{im}) \cong \bigoplus_{\substack{k \neq \ell \\ k \in I}} N'_{ik}$$

elde edilir. İnduksiyonla $m-1 = I \setminus \{\ell\}$ elde edilerek $m_i = n_i$ sonucuna varılır. Eğer m_i sonlu ise benzer tartışmayı φ^{-1} üzerinde yaparak $m_i = n_i$ elde edilir. O halde m_i ve n_i yi sonsuz kabul edebiliriz. (1.3.12) ile

$$M(i) = \bigoplus_{k \in K} A_{u_k} \quad M'(i) = \bigoplus_{\ell \in L} Au_\ell \quad |K| = n_i\,, \quad |L| = m_i$$

şeklinde yazılır. $P(L) := \{ L' \subset L \mid |L'| < \infty \}$ ve her $k \in K$ için $\varphi(u_k) = \sum_{\substack{\ell \in L'_k \\ |L'_k| < \infty}} a_\ell u'_{k\ell}$

olsun. Buradan her $k \in K$ için $\phi(k) := L'_k$ yardımıyla tanımlanan $\phi : K \longrightarrow P(L)$ dönüşümü örtendir. Buradan

$$L = \bigcup_{k \in K} L'_k \quad \text{ve} \quad m_i = |L| \leq \sum_{k \in K} L'_k \leq |K| \cdot |N_{ij}| = |K| = n_i$$

elde edilir. Benzer tartışmalar L üzerinde yapılırsa $n_i \leq m_i$ elde edilerek (Hungerford, T.W. (1987) S.) ile $m_i = n_i$ olduğu görülür.

(1.3.22)

$M \in {}_A\underline{M}$ yarıbasıt ise aşağıdakiler denktir.

(i) M sonlu tane basıt modülün direkt toplamıdır.

(ii) M Artınıandır.

(iii) M Noetheriandır.

(iv) M bir esas seriye sahiptir.

İspat :

(1.3.6) ile (iv)$\Longleftrightarrow$(ii) ve (iii) elde edilir. (1.3.5) ve (1.3.6) ile (i) den (ii), (iii) ve (iv) elde edilir. M yarıbasıt olduğundan basıt modüllerin direkt toplamı şeklinde yazılabilir. Buradan (ii) veya (iii) doğru ise (i) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$M \in {}_A\underline{M}$ için $\bigcap \{ N \mid N \in \Lambda(M)$ ve M/N basıt$\} \in \Lambda(M)$ altmodülüne **M nın radıkalı** denir ve $\mathrm{rad}_A(M)$ ile gösterilir.

Tanımdan görülüyor ki M $M/_N$ basit olacak şekilde bir N altmodülüne sahip değil ise $rad_A(M)= M$ dır.

(1.3.23)

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ için aşağıdakiler doğrudur.

(i) $N \in \Lambda(M)$ $rad_A(M/N)=0$ ise $rad_A(M) \subset N$

(ii) $rad_A(M/rad_A(M))=0$

dır.

İspat :

(i) $(\Lambda_N(M) = \{ N' \in \Lambda(M) \mid N \subset N' \}, \subset)$ ve

$(\Lambda(M/_N), \subset)$ kafeslerini gözönüne alalım. $N' \in \Lambda_N(M)$ için $f(N') = N'/_N$ dönüşümü ile

$f: \Lambda_N(M) \longrightarrow \Lambda(M/_N)$ bir kafes izomorfitanımlar. Buradan (i) gerçeklenir. (ii) ise (i) ile elde edilir.

(1.3.24)

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ yarıbasıt ise $rad_A(M)=0$ dır.

İspat :

$N \in \Lambda(M)$ basit olsun. (1.3.15) ile $\exists N' \in \Lambda(M)$ öyleki $M=N' \oplus N$ dır. $M/_{N'}$ basıt olduğundan $rad_A(M) \subsetneq N'$ elde edilir. M basit modüllerin direkt toplamı olduğundan $rad_A(M) = 0$ elde edilir.

(1.3.25)

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ olsun.

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}^f$ yarıbasıt $\Longleftrightarrow$ M Artinian ve $rad_A(M)=0$

dır.

İspat :

$:\Longrightarrow$ (1.3.24) ve (1.3.22) ile elde edilir.

$\Longleftarrow$: M yarıbasıt değil ise M artinian olduğundan $\exists N \in \Lambda(M)$ minimal öyleki N yarıbasıt değil. (1.3.4) ile N Artiniandir. Bunun sonucu olarak $N' \in \Lambda(N)$ öyleki N' basıttır. $rad_A(M)=0$ olduğundan $\exists V \in \Lambda(M)$ maksimal öyleki $V \cap N'=0$ dır. Buradan $M=V \oplus N'$ elde edilir.

Ayrıca $N=N\cap V \oplus N'$ elde edilir. N nın minimalliğinden $N\cap V$ yarıbasıt modül ve N' basit olduğundan N yarıbasit elde edilir. Bu ise N nın seçimine aykırıdır. O halde M yarıbasıttır. (1.3.22) ile $M \in {}_A\underline{M}^f$ olduğu açıktır.

4. YARIBASIT CEBİRLER

A bir R-cebir olsun.

A ya **R-sol yarıbasıt** cebir denir $:\Longleftrightarrow {}^oA \in {}_A\underline{M}$ yarıbasıttır.

A ya R-sol **Artinian (Noetherian)** cebir denir $:\Longleftrightarrow$ ${}^oA \in {}_A\underline{M}$ Artinian (Noetherian) dır. Benzer tanımlar R-sağ cebirler için verilir.

Her A cebiri sonlu üretenli olduğu açıktır.

(1.4.1)

A sol yarıbasıt R-cebir ise A minimal sol ideallerin direkt toplamı şeklinde yazılabilir.

İspat :

(1.3.25) ve (1.3.22) ile hemen elde edilir.

(1.4.2)

Bir R-cebir A yarıbasittir$:\Longleftrightarrow$ A sol Artinian ve $rad_A({}^oA)=0$ dır.

İspat :

${}^oA$ sonlu üretenli olduğundan (1.3.25) ile ispat tamamlanır.

(1.4.3)

A bir K-cebir, $|A:K|<\infty$ olsun

K-cebir A sol(sağ) yarıbasit $\Longleftrightarrow rad_A({}^oA)=0$ dır.

İspat :

$|A:K|<\infty$ ve $\Lambda^l(A)\subset\Lambda({}_K\hat{\ })$ olduğundan A sol Artinian cebirdir. Buradan (1.4.2) ile ispat tamamlanır.

(1.4.4)

A sol yarıbasıt bir R-cebir olsun. Bu taktirde her $M \in {}_A\underline{M}$ yarıbasıttır.

Üstelik basit A-modüller A nın minimal sol ideallerine izomorf ve bütün minimal sol idealler basıttır.

İspat :

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ keyfi verilsin. (1.2.13) ile $\exists$ $F \in {}_A\underline{\underline{M}}$ serbest ve $W \in \Lambda(F)$ öyleki $F/_W \cong M$ dır. (1.2.10) ve (1.3.17) ile $F/_W$ nın yarıbasit olduğu açıktır. Buradan M yarıbasıttır. $M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ basıt modül ise (1.3.12) ile $\exists N' \in \Lambda^{\ell}(A)$ maksimal öyleki $M \cong {}^{O}A/N'$ dır. A yarıbasıt cebir olduğundan $\exists N \in \Lambda^{\ell}(A)$ öyleki $N \oplus N' = A$ ve ${}^{O}A/_{N'} \cong N$ alacağından $M \cong N$ elde edilir. Minimal sol ideallerin basit olacağı açıktır.

(1.4.5)

A,B R-cebirler, $\theta: A \longrightarrow B$ bir R-cebir epimorfisi olsun. A yarıbasit cebir ise B yarıbasit cebirdir.

İspat :

$B \in {}_A\underline{\underline{M}}$ olduğundan B A-yarıbasıt modüldür.
$Ker\theta = ann_A(B)$ olduğu açıktır.

$B = \bigoplus_{i \in I} N_i$ $(N_i \in \Lambda({}_AB)$, N_i basıt) olarak yazılsın.

$ann_A(N_i) \supset ann_A(B) = Ker\theta$ olduklarından $N_i \in {}_B\underline{\underline{M}}$ basittir. Buradan B yarıbasıttır.

(1.4.6)

A bir R-cebir $A = A_1 \oplus A_2$ ve $M \in \Lambda^{\ell}(A_1)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler doğrudur.

(i) $M \in \Lambda^{\ell}(A)$

(ii) ${}_A\underline{\underline{M}}(M,M) = {}_{A_1}\underline{\underline{M}}(M,M)$

(iii) ${}_A\underline{\underline{M}}(M,A) = {}_A\underline{\underline{M}}(M,A_1) = {}_{A_1}\underline{\underline{M}}(M,A_1)$

(iv) $\Lambda({}_{A_1}M) = \Lambda({}_AM)$

(v) $M \in \Lambda^{\ell}(A)$ minimaldır $\Longleftrightarrow$ $M \in \Lambda(A_1)$ minimaldır.

(vi) $Min(\Lambda^{\ell}(A)) = Min(\Lambda^{\ell}(A_1)) \cup Min(\Lambda^{\ell}(A_2))$ dır.

İspat :

(i) den (v)'e kadar istenen özellikler basıt olarak elde edilir. $N \in \Lambda^{\ell}(A)$

minimal olsun. $A_iN \subset A_i \cap N$ (i=1,2) olduğundan $A_1N=N$ veya $A_2N=N$ olmak zorundadır. Buradan $N=A_1 \cap N \subset A_1$ veya $N=A_2 \cap N \subset A_2$ elde edilir. Dolayısıyla $N \in Min(\Lambda^{\ell}(A_1)) \cup Min(\Lambda^{\ell}(A_2))$ dır. (v)'den eşitlik kolaylıkla elde edilir.

(1.4.7)

A_1, A_2 sol yarıbasıt R-cebir ise $A_1 \dotplus A_2$ sol yarıbasıt R-cebirdir.

İspat :

(1.4.6) den açıktır.

(1.4.8)

A bir R-cebir, $N \in \Lambda^{\ell}(A)$ minimal ve $x \in A$ ise $Nx=0$ veya $Nx \cong N$ dır.

İspat :

$x \in A$ için $\varphi(n)=nx$ dönüşümü $\varphi: N \longrightarrow Nx$ bir A-modül epimorfisidir. N basıt olduğundan Schur Lemması ile $Nx=0$ veya $Nx \cong N$ elde edilir.

(1.4.9)

A bir R-cebir, $N \in \Lambda^{\ell}(A)$ öyleki $N^k=0$ $(k>0)$ olsun. $P \in {}_A\underline{\underline{M}}$ basit ise $NP=0$ dır. Üstelik $N \subset rad_A({}^oA)$ dır.

İspat :

P basit olduğundan $NP=0$ veya $NP=P$ dır.

$NP = P$ ise $P=NP=N^2P=\ldots=N^kP= P=0$
elde edilir ki bu P nın basitlığı ile çelişir. O halde $NP=0$ dır. $M \in \Lambda(A)$ maksimal ise $N.({}^oA/M)=0$ olacağından $N \subset M$ dır. Buradan $N \subset rad_A({}^oA)$ elde edilir.

(1.4.10)

A sol yarıbasıt bir R-cebir, $N_1, N_2 \in \Lambda^{\ell}(A)$ minimal ise aşağıdakiler denktir.

(i) $N_1 \cong N_2$

(ii) $N_2N_1 \neq 0$

(iii) $\exists\, x \in A$ öyleki $N_2x \cong N$

dır.

İspat :

(i) $\Longrightarrow$ (iii) $\phi : N_1 \longrightarrow N_2$ izomorfi olsun. Buradan

$\phi(N_2N_1)=N_2\phi(N_1)=N_2^2 \neq 0$

olduğundan $N_2N_1 \neq 0$ dır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $N_2N_1 \neq 0$ ise $\exists\, x_1 \in N_1$ öyle ki $N_2x \neq 0$

dır. $N_2x \in \Lambda(N_1)$ olduğundan

$N_1 \cong N_2x$ ve (1.4.8) ile $N_1 \cong N_2x \cong N_2$ elde edilir.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) (1.4.8) ile açıktır.

(1.4.11)

A sol yarıbasıt cebir ise ${}_A\underline{M}$ de basit modüllerin izomorfi sınıflarının sınıf teksilciler sistemi sonludur.

İspat :

A yarıbasıt ise 1.4.1 ile $N_i \in \Lambda^{\ell}(A)$ minimal olmak üzere $A=\bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ dır. $M \in {}_A\underline{M}$ basit ise (1.4.4) ile

$\exists\, N \in \Lambda^{\ell}(A)$ minimal öyle ki $M \cong N$ dır.

A yarıbasıt olduğundan $\exists\, N' \in \Lambda^{\ell}(A)$ öyle ki ${}^{o}A = N \oplus N'$ dır. (1.3.22) ile $\exists\, 1 \leqslant i \leqslant n$ öyle ki $M \cong N_i$ dır. Buradan $\exists\, 1 \leqslant i \leqslant n$ öyleki $M \cong N_i$ elde edilir.

A bir R-cebir olsun.

A ya **basit cebir** denir $:\Longleftrightarrow$ $A \neq 0$ ve $\Lambda(A)=\{0,A\}$ dır.

(1.4.12)

A bir basıt cebir olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar denktir.

(i) A yarıbasıttır.

(ii) A sol Artinian

(iii) Min ($\Lambda^{\ell}(A)$, $\subset$) $\neq \emptyset$

İspat :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) (1.4.2) den açıktır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $A \in \Lambda^{\ell}(A)$ $A \neq 0$ olduğundan $\mathrm{Min}(\Lambda^{\ell}(A), \subset) \neq \emptyset$ dır.

(iii)$\Longrightarrow$(i) $N \in \overset{\ell}{\Lambda}(A)$ minimal olsun. Buradan A basıt cebir olduğundan $A=NA=\sum_{x\in A} Nx$ elde edilir. Ancak $Nx\neq 0$ ise (1.4.8) den $Nx \cong N$ olacağından Nx basıt moduldur. Buradan (1.3.15) ile A yarıbasıt cebirdir.

(1.4.13)

A bir sol yarıbasıt cebir olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

(i) A basıt cebirdir.

(ii) A nın bütün minimal sol idealleri izomorftur.

(iii) Bütün basıt A-modüller izomorftur.

İspat :

(ii)$\Longrightarrow$(iii) (1.4.4) den açıktır.

(i)$\Longrightarrow$ (ii) A basıt cebir, $N_1,N_2 \in \overset{\ell}{\Lambda}(A)$ minimal olsunlar. Bu taktirde $N_1N_2A=A$ olduğundan $N_1N_2\neq 0$ dır. (1.4.10) ile $N_1 \cong N_2$ elde edilir.

(ii)$\Longrightarrow$ (i) $J \in \Lambda(A) \setminus \{0\}$ olsun. Buradan $\exists\, N \in \overset{\ell}{\Lambda}(A)$ minimal öyleki $N \subset J$ dır. A yarıbasıt cebir olduğundan (1.4.10) ile $A=\sum_{x\in A} Nx \subset J$ elde edilir. Buradan A=J olup A basit cebirdir.

5. MATRİSLER VE HOMOMORFİLER

A bir R-cebir ve $M_1,M_2,\ldots,M_n \in {}_A\underline{\underline{M}}$ olsun.

$$[{}_A\underline{\underline{M}}(M_j,M_i)] := \begin{bmatrix} {}_A\underline{\underline{M}}(M_1,M_2), & {}_A\underline{\underline{M}}(M_2,M_1)\ldots{}_A\underline{\underline{M}}(M_n,M_1) \\ \vdots & \\ {}_A\underline{\underline{M}}(M_1,M_n), & {}_A\underline{\underline{M}}(M_2,M_n)\ldots{}_A\underline{\underline{M}}(M_n,M_n) \end{bmatrix}$$

$$:=\left\{ [\varphi_{ij}] \;\middle|\; \varphi_{ij} \in [{}_A\underline{\underline{M}}(M_j,M_i)] \quad 1\leq i,j\leq n \right\}$$

$[\varphi_{ij}]$, $[\psi_{ij}] \in [{}_A\underline{\underline{M}}(M_j,M_i)]$, $\lambda \in R$ olmak üzere

$$[\varphi_{ij}] + [\psi_{ij}] := [\varphi_{ij} + \psi_{ij}]$$
$$[\varphi_{ij}]\,[\psi_{ij}] := \Big[\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}\,\psi_{kj}\Big]$$
$$\lambda[\varphi_{ij}] := [\lambda\varphi_{ij}]$$

ile tanımlanan işlemlere göre $[{}_A\underline{\underline{M}}(M_j,M_i)]$ bir R-cebirdir.

(1.5.1)

$M:=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, $1\leq j\leq n$ için $\pi_j:M\longrightarrow M_j$, $i_j:M_j\longrightarrow M$ sırasıyla j. projeksiyonlar ve injeksiyonlar olsun. $\alpha: {}_A\underline{M}(M,M)\longrightarrow [{}_A\underline{M}(M_j,M_i)]$ $\alpha(\varphi):=[\pi_i\varphi i_j]$ dönüşümü bir R-cebir izomorfisidir.

İspat :

α nın R-cebir homomorfisi olduğu açıktır.

$\beta: [{}_A\underline{M}(M_j,M_i)]\longrightarrow {}_A\underline{M}(M,M)$, $\beta([\varphi_{ij}]):=\sum i_i\varphi_{ij}\pi_j$ dönüşümü bir R-cebir homomorfisidir ve $\alpha\beta=id_{[{}_A\underline{M}(M_j,M_i)]}$ ve $\beta\alpha=id_{[{}_A\underline{M}(M,M)]}$ dir.

Buradan α bir R-cebir izomorfisidir.

(1.5.2)

A bir R-cebir, $M\in {}_A\underline{M}$ olsun. Bu taktirde

$${}_A\underline{M}(\oplus_n M)\cong M_n({}_A\underline{M}(M))$$

dir.

İspat :

(1.5.1)'e göre ${}_AM(\oplus_n M)\cong [{}_A\underline{M}(M)]=M_n({}_A\underline{M}(M))$ dır.

(1.5.3)

A bir R-cebir M ${}_A\underline{M}$ n-elemanlı bir baza sahip A-modül ise

$${}_A\underline{M}(M)\cong M_n(A)$$

dır.

İspat : (1.2.10) ile $M\cong\oplus\, n\mathring{A}$ yazılabilir. (1.5.2) ile

$${}_A\underline{M}(M)\cong {}_A\underline{M}(\oplus\, n\mathring{A})\cong M_n({}_A\underline{M}(\mathring{A}))\overset{(1.3.8)}{=} M_n(\mathring{A})$$

elde edilir.

(1.5.4)

A bir R-cebir $\{M_i \mid 1\leq i\leq n\}\subseteq {}_AM$ öyleki her $1\leq i,j\leq n$ $(i\neq j)$ için ${}_A\underline{M}(M_j,M_i)=0$ ise ${}_A\underline{M}(\bigoplus_{i=1} M_i)\cong {}_A\underline{M}(M_1)\dotplus {}_A\underline{M}(M_2)\dotplus\ldots\dotplus {}_A\underline{M}(M_n)$ dir.

İspat :

(1.5.1)'e göre $_A\underline{\underline{M}}(\hat{\bigoplus_{i=1}} M_i \cong [_A\underline{\underline{M}}(M_j,M_i)] = \begin{bmatrix} _A\underline{\underline{M}}(M_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & _A\underline{\underline{M}}(M_n) \end{bmatrix}$

$\cong {_A\underline{\underline{M}}}(M_1)\dot{+}\dots\dot{+}{_A\underline{\underline{M}}}(M_n)$

(1.5.5) (Wedderburn Yapı Teoremi)

A sol (sağ) yarıbasit R-cebir olsun.

i) $\exists n_1,n_2,\dots,n_r \in \mathbb{N}^*$ ve $D_1,D_2,\dots,D_r$, R-bölme cebirleri öyleki

$A \cong \dot{+}_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$

ii) (i) koşulunu gerçekleyen (n_i,D_i) $(1 \leq i \leq r)$ ikilileri A ile izomorfi hariç tek türlüdür. Yani; $(n_i,D_i) \cong (n_j,D_y) :\Leftrightarrow n_i=n_j$ ve $D_i \cong D_j$ dir.

(iii) Tersine olarak $n_i \in \mathbb{N}^*$, D_i $(1\leq i\leq r)$ R-bölme cebiri ise $\dot{+}_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ sol (sağ) yarıbasittir.

İspat :

i): (1.4.11)'e göre izomorf olmayan minimal sol idealler sonludur. Bunlar $N_1,N_2,\dots,N_r$ ise $A \cong \dot{+} (\bigoplus_{i=1}^{r} n_iN_i)$, $M_i := \bigoplus n_iN_i$ diyelim. $N_i \not\cong N_j (i\neq j)$ olduğundan $_A\underline{\underline{M}}(M_j,M_i)=0$ $(i\neq j)$ dır. (1.5.4) ile $A \cong \dot{+}_{i=1}^{r} M_{n_i}(_A\underline{\underline{M}}(N_i))$ dir. N_i ler basit modül olduğundan (1.3.13) ile $D_i := {_A\underline{\underline{M}}}(N_i)$ bölme cebirdir.

ii) $A \cong \dot{+}_{i=1}^{s} A_i$, A_i ler basit öyleki $A_i \cong M_{n_i}(C_i)$, C_i bölme cebiri olarak verilsin. (1.4.10) ve problem (6) ile $\exists P_i \in \widehat{\ \ }(A)$ minimal $P_i \subseteq A_i$ idealinin m_i kopyesinin direkt toplamına izomorf ve $C_i \cong {_{A_i}\underline{\underline{M}}}(P_i)={_A\underline{\underline{M}}}(P_i))$ dır. Her bir A_i A nın P_i yi içeren bir sol ideali olduğundan (1.4.10) ile her $(i\neq j)$ için $P_i \not\cong P_j$ dir. Problem (6) ile r=s ve uygun bir sıralama ile $m_i=n_i$, $P_i \cong N_i$ ve $C_i \cong {_A\underline{\underline{M}}}(P_i) \cong {_A\underline{\underline{M}}}(N_i) \cong D_i$ elde edilir.

iii) Problem (6) ve (1.4.7) ile $\dot{+}_{i=1}^{r} M_{n_i}(D_i)$ sol(sağ) yarıbasittir.

(1.5.6)

A sol(sağ) Artinian R-cebir olsun. A basittir $\Leftrightarrow \exists! n > 0$ D bölme cebiri öyleki $A \cong M_n(D)$ dir. Burada D izomorfi hariç tek türlüdür.

İspat :

(1.4.12), (1.54) ve problem (6) ile açıktır.

Bazı K cisimleri için $[A:K]<\infty$ bir bölme cebiri ise A komutatiftir. Bu durumda yapı teoremi sonlu boyutlu cebirler hakkında D_i lerin cisim olması gerektiği sonucunu verir. Bu sonuç K-cebirsel kapalı olduğu zaman optimumdur.

(1.5.7)

K cebirsel kapalı bir cisim D K-bölme cebiri öyleki $[D:K]<\infty$ ise D=K dır.

İspat :

$[D:K]=m$ ve $t\in D$ olsun. $\exists!\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in K(\exists\,\alpha_i\neq 0)$ öyleki $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i t^i=0$ dır. Buradan $\exists \mathrm{ind}(t,K)=f(x)\in K[x]$ minimal polinom öyleki $f(t)=0$ dır. K cebirsel kapalı olduğundan $f(x)=x-a$ şeklindedir. $f(t)=0$ olduğundan $t=a\in K$ elde edilir.

(1.5.8)

K cebirsel kapalı bir cisim ve $[A:K]<\infty$ bir K-cebir olsun. Bu taktirde A yarıbasittir. $\Leftrightarrow$ $\exists!\, 1<n_1\leqslant n_2\leqslant \ldots \leqslant n_r$ öyleki $A\cong \dotplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(K)$

A basittir $\Leftrightarrow \exists$ $n>0$ öyleki $|A:K|=n^2$ olmak üzere $A\cong M_n(K)$ dır.

İspat :

(1.5.4), (1.5.6) ve (1.5.7) den açıktır.

(1.5.9) (Maschke Teoremi)

G sonlu bir grup, K bir cisim olsun. Bu taktirde KG grup cebiri yarıbasittir.$\Leftrightarrow$ $\mathrm{k}(K)\nmid |G|$ dir.

İspat :

$V\in \mathcal{L}(KG)$ ise $N\in \Lambda({}_K KG)$ öyleki $KG=V\oplus N$ (K-vektör uzayı olarak) $\pi:KG\longrightarrow V$ projeksiyonu $\mathrm{Ker}\pi=N$ dir. K da $|G|^{-1}$ mevcut olduğundan

$$\pi^*:KG\longrightarrow KG,\ \pi^*(x):=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\pi(gx)$$

ile tanımlanan dönüşüm KG-modül homomorfisidir. $x\in V$ ise

$$\pi^*(x) \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\pi(gx) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}gx = \frac{1}{|G|}|G|x = x$$

elde edilir. Buradan $\pi^*\downarrow V=id_V$ dır. $y\in KG$ $g\in G$ ise $\pi(gy)\in V$ olduğundan

$\pi^*(y)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\pi(gy)\in V$ elde edilir. Buradan $V=\pi^*(KG)$ ve

$\pi^{*2}=\pi^*$ sonucu ile $KG=\pi^*(KG)\oplus(1-\pi^*)(KG)=V\oplus(1-\pi^*)(KG)$

elde edilir. Buradan $\Lambda^{\ell}(KG)$ komplimentlenebilirdir. (1.3.5) den KG yarıbasittir. "$\Longrightarrow$" $k(K)\mid |G|=n$ olsun. Buradan her $x\in G$ için $n.x=0$ dır. $e:=\sum_{x\in G} x\in KG\setminus\{0\}$ ve her $y\in G$ için $ey=e$ olup $e^2=0$ dır. $N:=KGe$ diyelim. $N\in\Lambda^{KG}(KG)\setminus\{0\}$ ve $N^2=0$ dır. $[KG:K]=|G|<\infty$ olduğundan KG Artinian cebirdir. Buradan (1.4.9) ile $0\neq N\subseteq rad(_{KG}KG)$ elde edilir ki bu sonuç ile K-cebir KG yarıbasit değildir.

$k(\mathbb{C})=0\nmid |G|$ olduğundan sonlu bir grubun klasik grup gösterimlerinde $\mathbb{C}G$ grup cebiri kullanılır. Eğer K cebirsel kapalı ve $k(K)\nmid|G|$ ise Maschke Teoremi ile $\exists$ $n_i\in\mathbb{N}^*$ $(i=1,2,\ldots,r)$ öyleki

$KG\cong\dotplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(K)$ olacak şekilde elde edilir. Buradaki $n_i\in\mathbb{N}^*$ sayılarına G nin **indirgenemez gösterimlerinin dereceleri** denir. Diğer bir ifade ile $n_i(1\leq i\leq r)$ ler basit KG modüllerin K boyutlarıdır. K cebirsel kapalı bir cisim olmak üzere $k(K)\nmid|G|$ ise yukarıdaki r doğal sayısı G deki eşlenik sınıflarının sayısıdır. Gerçekten $KG\cong\dotplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(K)$ olduğundan

$Z(KG)\cong\dotplus_{i=1}^{r} Z(M_{n_i}(K))\cong\dotplus_{i=1}^{r} K:=\oplus rK$ olduğundan $[Z(KG):K]=r$ elde edilir.

$K_1,K_2,\ldots,K_m$ G nin farklı eşlenik sınıfları olsun. $c_i:=\sum_{x\in K_i} x$ elemanı her $g\in G$ için $g^{-1}c_ig=c_i$ olduğundan $c_i\in Z(KG)$ elde edilir. $\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ K-lineer bağımsız

$\sum_{g\in G} a_g g\in Z(KG)$ ve $h\in G$ olsun . Bu taktirde

$\sum_{g\in G} a_g g=\sum_{g\in G} a_g g^h=\sum_{g\in G} a_{hgh^{-1}}g$ olduğundan $a_g=a_{hgh^{-1}}$ dir. $(h\in G)$

Buradan

$\sum_{g\in G} a_g g=\sum_{i=1}^{m} a_{g_i}\sum_{g\in K_i} g=\sum_{i=1}^{m} a_{g_i}c_i$ olduğundan $\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$ $Z(KG)$ nın K-tabanıdır. Buradan $r=m$ elde edilir.

6. ARTİNİAN CEBİRLER VE AYRIŞAMAZ MODÜLLER

(1.6.1)

$M_1, M_2 \in {}_A\underline{M}$, $\psi \in {}_A\underline{M}(M_1,M_2)$ ise $\psi(\mathrm{rad}({}_AM_1) \subseteq \mathrm{rad}({}_AM_2)$ ve $\bar{\psi}(m+\mathrm{rad}_A(M_1)) := \psi(m) + \mathrm{rad}_A(M_2)$ yardımıyla tanımlanan $\bar{\psi}: M_1/_{\mathrm{rad}({}_AM_1)} \longrightarrow M_2/_{\mathrm{rad}({}_AM_2)}$ dönüşümü bir A-modül homomorfisidir.

İspat :

$N \in \Lambda(M_2)$ ise $\Phi(m+\psi^{-1}(N)) := \psi(m)+N$ yardımıyla tanımlanan $\Phi: M_1/_{\psi^{-1}(N)} \longrightarrow M_2/_N$ dönüşümü bir A-modül homomorfisidir. Buna göre N maksimal ise $\psi^{-1}(N)=M_1$ veya $M_1/_{\psi^{-1}(N)} \cong M_{2/N}$ basit olduğundan $\mathrm{rad}({}_AM_1) \subseteq \psi^{-1}(N)$ elde edilir. Buradan $\psi(\mathrm{rad}({}_AM_1)) \subseteq \mathrm{rad}({}_AM_2)$ elde edilir. nın A-modül homomorfisi olduğu açıktır.

(1.6.2)

A bir R-cebir $|A|>1$ ise $\mathrm{rad}_A A \in \Lambda(A) \setminus \{A\}$ dır.

İspat :

Her $x \in A$ için $A \longrightarrow A(y \longrightarrow yx)$ ile A nın bir A-endomorfisi tanımlanır. (1.6.1) ile $(\mathrm{rad}_A A)x \subseteq \mathrm{rad}_A A$ dır. Buradan $\mathrm{rad}_A A \in \Lambda^l(A) \cap \Lambda^r(A) = \Lambda(A)$ olduğu elde edilir. A birim elemanlı olduğundan Zorn Lemması ile A nın bir M maksimal ideali elde edilir. Bu ise $\mathrm{rad}_A A \neq A$ olacağını verir.

(1.6.3)

A sol Artinian R-cebir ise $A/_{\mathrm{rad}_A A}$ yarıbasit R-cebirdir.

İspat :

A sol Artinian olduğundan (1.3.4), (1.3.13) ile $A/_{\mathrm{rad}_A A}$ sol Artinian R-cebir ve $\mathrm{rad}_A({}^oA/_{\mathrm{rad}_A(oA)})=0$ dır. (1.3.25) ile $A/_{\mathrm{rad}({}_AA)}$ A-yarıbasittir. (1.3.10) ve (1.4.4) ile ${}^oA/_{\mathrm{rad}_A(A)}$-modül olarak yarıbasittir. Buradan $A/_{\mathrm{rad}_A A}$ yarıbasit R-cebirdir.

(1,6.4)

$M \in {}_A\underline{M}$ ise $(\mathrm{rad}_A A)M \subseteq \mathrm{rad}\ ({}_AM)$ dir.

İspat :

Her $m \in M$ için . için $A \longrightarrow M(x \longrightarrow xm)$ bir A-modül homomorfisi ve (1.6.1) den $(rad({}_AA))M \subset rad({}_AM)$ dir. Buradan

$rad({}_AA).M \subseteq rad({}_AM)$ dir.

(1.6.5)

$M \in {}_A\underline{M}$ ve $u \in M$ ise aşağıdakiler denktir.

i) $u \in rad({}_AM)$

ii) $N \in \Lambda(M)$, $Au+N=M$ ise $N=M$ dir.

İspat :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Bir $N \in \Lambda(M)$ için $Au+N=M$ ve $N \neq M$ olsun. Buradan $u \in N$ dir. Zorn Lemması ile $\exists P \supseteq N$ maksimal öyleki $u \notin P$ dir. M/P basit olduğundan $rad({}_AM) \subseteq P$ dir. Bu ise $u \notin rad({}_AM)$ çelişkisini verir.

(1.6.6) (Modüller İçin Nakayama Lemması)

$M \in {}_A\underline{M}$, $P \in \Lambda(M)$ aşağıdaki koşulu gerçeklesin.

$+ N = M$ koşulunu gerçekleyen tüm $N \in \Lambda(M)$ için $N=M$ dir. (1)

Bu taktirde $P \subseteq rad_A(M)$ dir. Tersine olarak P veya M sonlu üretenli ise (1) koşulu gerçeklenir.

İspat :

$u \in P \setminus rad({}_AM)$ ise (1.6.5) ile $\exists N \in \Lambda(M)$ öyleki

$N \neq M = Au+N$ $P+N=M$ elde edileceğinden (1) gerçeklenmesi halinde $P \subseteq rad({}_AM)$ dır.

Tersine olarak P veya M sonlu üretenli, $N \in \Lambda(M)$, $N+P=M$ olacak şekilde verilsin. M sonlu üretenli ise $\exists Q \in \Lambda(P)$ sonlu üretenli öyleki,

$Q+N=M$ dir. $Q := \sum_{i=1}^{n} Au_i$ olsun. (1.6.5) ile $M = \sum_{i=1}^{n} Au_i + N = \sum_{i=1}^{n} Au_i + N$

...... $= Au_n+N=N$ ve $M=N$ elde edilir. Buradan (1) koşulu gerçeklenir.

(1.6.7) (Cebirler için Nakayama Lemması)

A bir R-cebir ve $P \in \Lambda^{l}(A)$ ise aşağıdaki koşullar denktir.

i) $P \subseteq rad_A({}^oA)$

ii) $M \in {}_A\underline{M}^f$ ve $N \in \Lambda(M)$ öyleki $N+PM=M$ ise $N=M$ dir.

iii) $G = \{ 1+x \mid x \in P \} \subseteq U(A)$ dır.

İspat :

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $x \in P$ keyfi verilsin. $y=1+x$ ise $1=y-x \in Ay+P=A$ elde edilir. (ii) den ${}^oA$ sonlu üretenli olduğundan $Ay=A$ ve özellikle $1 = zy = z(1+x) = z+zx$ dir. Buradan $x \in P$ ve $P \in \Lambda^l(A)$ olduğundan $z=1-zx \in G$ dir. Buradan G nin her elemanı sağ inverse sahip olduğundan G bir gruptur ve $G \subseteq U(A)$ elde edilir.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) $x \in P$ ve $x \notin rad_A({}^oA)$ ise $\exists N \in \Lambda^l(A)$ maksimal öyleki $x \notin N$ dir. Buradan $N \subsetneq N+Ax=A$ ve $1=ax+n$ ve $1-ax \in G$ olduğundan $n \in A^o$ elde edilir. Yani $N=A$ olup bu N in maksimalliği ile çelişir. O halde $P \subseteq rad_A({}^oA)$ dır.

(1.6.8)

$M \in {}_A\underline{M}^f$ ve $(rad_A A)M=M$ ise $M=0$ dır.

İspat :

(1.6.7) de $P=rad_A({}^oA)$ ve $N=0$ alınarak elde edilir.

Bu sonuç birim elemanlı R-cebir A nın radikalinin basit A-modüllerin annilatörlerinin arakesiti olduğunu söyler.

(1.6.2) ve (1.6.7) ile $rad_A({}^oA) \subseteq rad_A(A^o)$ dır.

$rad({}^oA)=rad(A^o)\,) \in \Lambda(A)'$ ya A nın **jacobson radikali** denir.

(1.6.9)

$$J(A) := \bigcap_{\substack{N \in \Lambda^l(A) \\ N \text{ maksimal}}} N = \bigcap_{\substack{N \in \Lambda^r(A) \\ N \text{ maksimal}}} N = \{ x \in A \mid y \in A \text{ için } 1+yx \in U(A) \}$$

$$= \{ x \in A \mid y \in A \text{ için } 1+yx \in U(A) \}$$

dır.

Bundan sonra bir R-cebir A nın radikalinden Jacobson radikali anlaşılacaktır.

(1.6.10)

A bir R-cebir, $M \in \Lambda^l(A) \cup \Lambda^r(A)$ öyleki, her $x \in M$ için

$1+x \in U(A)$ ise $M \subset J(A)$ dır. Daha fazla olarak $rad_A(A/M) = 0$ ise $M = J(A)$ dır.

İspat :

(1.3.23) (i) ve (1.6.7) den açıktır.

A bir R-cebir ve $a \in A$ olsun. a'ya **nilpotentir** denir: $\Longleftrightarrow \exists n > 0$ öyleki $a^n = 0$ dır.

(1.6.11)

A bir R-cebir ve $M \in \mathcal{N}(A) \cup \mathcal{N}^r(A)$ ve her $x \in M$ nilpotent ise $M \subset J(A)$ dır.

İspat :

$x^n = 0$ ise $(1+x)\left(\sum_{i=0}^{n} (-x)^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (-x)^i (1+x) = 1$ olduğundan $x \in U(A)$ elde edilir. O halde (1.6.10) ile ispat açıktır.

(1.6.12)

A,B R-cebirler olsun.

i) $\theta : A \longrightarrow B$ R-cebir epimorfisi ise $\theta(J(A)) \subseteq J(B)$.

ii) $J(A \dotplus B) = J(A) \dotplus J(B)$ dir.

İspat :

i) (1.3.10) ve (1.6.1) ile $\theta(J(A)) \subseteq rad(_AB) \subseteq rad(_BB) = J(B)$ dir.

ii) $\pi_1 : A \dotplus B \longrightarrow A$ ve $\pi_2 : A \dotplus B \longrightarrow B$ projeksiyonları R-cebir epimorfileri olduğundan $J(A \dotplus B) = (\pi_1 + \pi_2)(J(A \dotplus B)) \subseteq J(A) \dotplus J(B)$ dir. Diğer yandan $x \in J(A)$, $y \in J(B)$ keyfi elemanlar ise (1.6.9) ile $(1_A, 1_B) + (x, y) \in U(A \dotplus B)$ elde edilir. Buradan (1.6.10) ile $J(A) \dotplus J(B) \subseteq J(A \dotplus B)$ dır. Dolayısıyla $J(A \dotplus B) = J(A) \dotplus J(B)$ dir.

(1.6.13)

A sol (sağ) Artinian R-cebir ise $\exists k > 0$ öyleki $J(A)^k = 0$ olur.

İspat :

$J(A) \supseteq J(A)^2 \supseteq \ldots\ldots \supseteq J(A)^k \ldots\ldots$ azalan zinciri sonlu olduğundan $\exists k > 0$ öyleki $J(A)^k = J(A)^{k+1}$ dir. Eğer $J(A)^k \neq 0$ ise

$\mathcal{V} := \{ M \in \Lambda^l(A) \mid M \neq 0,\ J(A)M = M \} \ni J(A)^k$ olduğundan $\mathcal{V} \neq \emptyset$ dır. $L \in Min(\mathcal{V}, \subseteq)$ olsun. Buradan $L \neq 0$ ve $J(A)L = L$ olduğundan $J(A)^k L = L$ elde edilir. $\exists x \in L$ öyleki $J(A)^k x \neq 0$, $J(A)^k x \in \mathcal{V}$ ve $J(A)^k x \subset L$ olduğundan $J(A)^k x = L$ ve $L = Ax$ elde edilir. Buradan L sonlu üretenlidir ve $J(A)L = L$ olduğundan (1.6.8) ile $L = 0$ elde edilirki bu $L \in \mathcal{V}$ olması ile çelişir. O halde $J(A)^k = 0$ dır.

(1.6.14)

A sol (sağ) Artinian R-cebir $M \in \Lambda^l(A) \cup \Lambda^r(A)$ ise aşağıdakiler denktir.

$M \subseteq J(A) \Longleftrightarrow \exists k > 0$ öyleki $M^k = 0 \Longleftrightarrow M$ in her elemanı nilpotenttir.

İspat :

(1.6.11) ve (1.6.13) ile hemen görülür.

(1.6.15)

A sol (sağ) Artinian R-cebir, $M \in {}_A\underline{M}$ Artinian ise M Notheriadır.

İspat :

A Artinian olduğundan (1.6.3) ile $A/J(A)$ yarıbasittir.

$V_i := J(A)^i M \in \Lambda(M)$ elemanları için (1.6.13) ile $\exists k > 0$ öyleki $V_k = 0$ dır.

$V_{i+1} = J(A)V_i \subseteq V_i$ olduğundan $V_i/V_{i+1} \in {}_{A/J(A)}\underline{M}$ dir. (1.6.6) ile V_i/V_{i+1} yarıbasittir. Daha fazla olarak V_i/V_{i+1} Artinian olduğundan (1.3.22) ile esas seriye sahiptir. Buna göre bu esas seriler ile M de bir esas seri elde edilir. Buradan (1.3.6) ile M Notheriandır. Sonuç olarak aşağıdaki özellik verilebilir.

(1.6.16)

A bir R-cebir olsun. A sol (sağ) Artinian ise A sol (sağ) Notheriandır.

(1.6.17)

A Artinian bir R-cebir, $M \in {}_A\underline{M}$ ise aşağıdakiler denktir.

M Artinian $\Longleftrightarrow$ M Noetherian $\Longleftrightarrow M \in {}_A\underline{M}^f$ dir.

İspat :

Denklik için (1.6.15) : ve (1.3.4) ile sadece $M \in {}_A\underline{M}^f$ için M in Artinian olduğunu göstermek yeterlidir. M sonlu üretenli ise $M = \sum_{i=1}^{m} Am_i$ şeklindedir. $\varphi : A^n \longrightarrow M$, $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$ dönüşümü A-modül epimorfisidir. Buradan (1.2.9) ile $A^n/\ker\varphi \cong M$ ve (1.3.4), (1.3.5) ile M Artinian olduğu elde edilir.

K bir cisim $n>0$ ve $\alpha := [\alpha_{ij}] \in M_n(K)$ olmak üzere $tr\alpha := \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \in K$ elemanına **α nın izi** denir. Aşağıdaki sonuç bu tanım ile hemen elde edilir.

(1.6.18)

K bir cisim ve $n>0$ olsun. Bu taktirde $tr : M_n(K) \longrightarrow K$ $tr(\alpha) := tr\alpha$ dönüşümü K-lineerdir. Daha fazla olarak problem (5) ile α nilpotent ise $tr\alpha = 0$ dır.

(1.6.19)

$M_n(K)$, K-cebiri nilpotent elemanlar tarafından üretilemez.

İspat :

Aksi halde $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in M_n(K)$ nilpotent elemanlar öyleki

$\varepsilon_{kk} := [\delta_{ik} \cdot \delta_{jk}] = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_m\alpha_m$ ve $1 = tr(\varepsilon_{kk}) = \sum a_i tr(\alpha_i)$ ve (1.6.18) ile $1 = \sum_{i=1}^{m} a_i 0 = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde iddia doğrudur.

(1.6.20)

A sonlu boyutlu K-cebir, B A nın nilpotent elemanlar tarafından üretilen çarpıma kapalı bir K-altuzayı ise $\exists k>0$ öyleki $B^k = 0$ dır.

İspat :

I. adım : K nın cebirsel kapalı olduğunu kabul edebiliriz. Gerçekten, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ A nın bir K-tabanı olsun. $c_{ijk} \in K$ öyleki $x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_k$ dır. $F \supset K$ nın cebirsel kapanışı olsun. $A' := \bigoplus_{i=1}^{m} F x_i$ K-vektör uzayı üzerindeki $x_i x_j := \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} x_k$ çarpımı ile A' bir F-cebir dir.

Daha fazla olarak $A \subseteq (A')_K$ bir altcebirdir. Diğer yandan $B' := FB$ için $B \subseteq (B')_K$ altcebirdir. B nilpotent elemanlar tarafından K-uzay olarak üretildiğinden B' F-uzay olarak nilpotent elemanlar tarafından üretilir. Böylece $(B')^k=0$ ise $B^k=0$ olacağından K yı cebirsel kapalı alabiliriz.

II.Adım : $B \in \Lambda(A)$ dır. $B \in \Lambda(B+K.1_A)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise B nin çarpıma kapalı olmasından elde edilir.

III.Adım : A yarıbasit ise B=0 olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer A yarıbasit değil ise (1.6.2) ile $J(A) \neq 0$ ve $A/J(A)$ yarıbasittir.

$B+J(A)/J(A) \in \Lambda(A/J(A))$ ve $B+J(A)/J(A)$ B nin epimorf resmi olduğundan nilpotent elemanlar tarafından üretilir. Şu halde III. Adım $B+J(A)=J(A)$ yani $B \subseteq J(A)$ ve (1.6.14) ile $\exists k>0$ öyleki $B^k=0$ dır. Dolayısıyla A nın yarıbasit olduğunu kabul edebiliriz.

(1.5.7) ile $\exists A_i \cong M_{n_i}(K)$ $1 \leq i \leq t$ olmak üzere $A \cong A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_t$ yazabiliriz. $\pi_i : A \longrightarrow A_i$ i. projeksiyon olsun. Her $1<i<t$ için $\pi_i(B) \in \Lambda(A_i)$ olduğundan $\pi_i(B)=0$ veya $\pi_i(B)=A_i$ dir. A_i nilpotent elemanlar tarafından üretilmediğinden $\pi_i(B)=0$ olmalıdır. Buradan

$B \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} \operatorname{Ker} \pi_i = 0$ ve B=0 elde edilir.

K bir cisim G sonlu bir grup olsun. Eğer $k(F) \nmid G$ ise Maschke Teoremi ile $J(F/G)=0$ dır. Bizim amacımız $k(F) \mid |G|$ olduğu zaman $J(FG)$ ne olduğunu belirlemeye çalışmaktır.

(1.6.21)

F bir cisim $k(F)=p>0$, G sonlu bir grup ve $H \leq G$ p-sylow altgrup ise $J(FG) = \sum_{x \in H \setminus \{1\}} FG(x-1)$ dir. Daha fazla olarak G bir p-grup ise

$$J(FG) = \sum_{x \in G \setminus \{1\}} F(x-1) \text{ dir.}$$

İspat :

$A := FG$ olsun. $\nu : G \longrightarrow G/H$ kanonik epimorfi olmak üzere

$\bar{\nu}\left(\sum_{x \in G} a_x x\right) := \sum_{x \in G} a_x \nu(x)$ yardımıyla tanımlanan $\bar{\nu} : FG \longrightarrow F(G/H)$ dönüşümünün F-cebir epimorfisi olduğu açıktır. $\{ y_i H \mid 1 \leq i \leq m \}$ H nın G deki sol yansınıflarının bir tam sistemi olsun.

$$\nu(y) = \nu(y_i) \Leftrightarrow y \in y_i H$$

dır. Buradan dolayı $z = \sum_{y \in G} a_y y \in FG$ olmak üzere

$\bar{\mho}(z)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{x\in H} a_{y_i}x\right)\mho(y_i)$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Özellikle $\bar{\mho}(z)=0$ ise her $1\leq i\leq m$ için $\sum_{x\in H} ay_{it}x=0$ ve $a_{y_i}=-\sum_{x\in H\setminus\{1\}} a_{y_i}x$ dir.

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{x\in H\setminus\{1\}} a_{y_i}xy_i(x-1)=\left(\sum_{i=1}^{m} a_{y_i}xy_i\right)\left(\sum_{x\in H\setminus\{1\}}(x-1)\right)\in A\cdot\sum_{x\in H\setminus\{1\}}(x-1)$$

elde edilir. Tersine olarak

$$z\in A\sum_{x\in H\setminus\{1\}}(x-1) \text{ ise } \mho(z)\in\bar{\mho}(A)(\bar{\mho}(x)-\bar{\mho}(1))=0$$

olduğundan $\operatorname{Ker}\mho=A\sum_{x\in H\setminus\{1\}}(x-1):=J$ dır. Buradan $J\in\Lambda(FG)$ ve $A/J\cong F(G/H)$ olduğu (1.2.9) ile açıktır. H p-sylow altgrup olduğundan $p\nmid|G/H|$ ve Maschke Teoremi ile $J(F(G/H))=0$ olduğu elde edilerek $J(A/J)=0$ elde edilir. Buradan (1.3.23) (i) ile $J\supset J(A)$, $B:=\sum_{x\in H\setminus\{1\}}F(x-1)$ kümesi çarpıma kapalı bir F-altuzaydır.

$|H|=P^n$ ise $(x-1)^{P^n}=x^{P^n}-1=1-1=0$ olduğundan B nilpotent elemanlar tarafından üretilir. FG sonlu boyutlu bir F-cebir olduğundan (1.6.20) ile $\exists k>0$ öyleki $B^k=0$ dır. $J=FGB$ olduğundan $J^k=0$ elde edilir. (1.6.14) ile $J\subset J(A)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $J(FG)=\sum_{x\in H\setminus\{1\}}FG(x-1)$ dir.

Eğer G sonlu bir p-grup ve $x\in G\setminus\{1\}$ ise her $y\in G$ için $y(x-1)=(yx-1)+(x-1)$ olduğundan $J(FG)=\sum_{x\in G\setminus\{1\}}F(x-1)$ elde edilir. Bu durumda

$$FG=F1_G+J(FG)$$

dir.

7. AYRIŞAMAZ MODÜLLER

Bu paragraftaki amacımız yarıbasit cebirlerden daha genel cebirleri incelemektir. Wedderburn Yapı Teoreminin bir genelleştirmesi ile birlikte ayrışamaz modüllerin endomorfiler cebiri dilinde schur Lemması karakterize edilecektir. Kısaca yarıbasit cebirler için söylenenler Artinian cebirlere adapte edilecektir.

(1.7.1)

$M\in{}_A\mathcal{M}$ Artinian veya Notherian ise M ayrışamaz A-sol modüllerin sonlu bir direkt toplamı şeklinde yazılır.

İspat :

$M=0$ ise $M=\bigoplus_{i\in\emptyset}N_i$ olduğundan iddia doğrudur. O halde $M\neq 0$ kabul edebiliriz. İspatı M in Artinian olması durumunda yapalım.

$M \in \mathcal{A} := \{ N \in \Lambda(M) \mid N \neq 0$ ve $\exists N' \in \Lambda(M)$ öyleki $M = N \oplus N' \}$

olduğundan $\mathcal{A} \neq \emptyset$ dır. O halde $Min(\mathcal{A}, \subset) \neq \emptyset$ dır. $N_1 \in Min(\mathcal{A}, \subset)$ olsun. Buradan N_1 ayrışamaz ve $\exists N^1 \in \Lambda(M)$ öyleki $M = N_1 \oplus N^1$ dır. Eğer $N^1 \neq 0$ ise benzer işlemler N^1 için tekrarlanarak $\exists N_2$ ayrışamaz öyleki $N^1 = N_2 \oplus N^2$ elde edilir. $N^1 \supset N^2 \supset \ldots$ kesin azalan zinciri bir yerde sıfır olmalıdır. O halde $\exists\, k > 0$ öyleki $N^k = 0$ dır.

Şu halde $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$ elde edilir.

Eğer M Notherian ise $0 \in \mathcal{A}' := \{ N \in \Lambda(M) \mid N \neq M$ ve $\exists N' \in \Lambda(M)$ $M = N \oplus N' \}$ olduğundan $\mathcal{A}' \neq \emptyset$ dır. Buradan $Mak(\mathcal{A}', \subset) \neq \emptyset$ dır. $N_1 \in Mak(\mathcal{A}', \subset)$ ise $\exists N^1 \in \Lambda(M)$ öyleki $M = N_1 \oplus N^1$ ve N^1 minimaldir. O halde N^1 ayrışamazdır. Eğer $N_1 \neq 0$ benzer işlemler ile $N_1 = N_2 \oplus N^2$, N^2 ayrışamaz ve $N_2 \neq N_1$ dir. O halde $N^1 \subset N^1 + N^2 \subset \ldots$ kesin artan bir zincir olduğundan $\exists \ell > 0$ öyleki $N^\ell = M$ ve $N_\ell = 0$ dır.

Şu halde $M = N^1 + N^2 \oplus \ldots \oplus N^\ell$ elde edilerek iddia tamamlanmış olur.

Basit modüllerin ayrışamaz oldukları açıktır. Tersi yarıbasit cebirler üzerindeki modüller için doğrudur. Basit modüllerin schur Lemması ile yapılan karakterizasyonuna benzer bir karakterizasyonla ayrışamaz modüller için endomorfiler cebirini kullanarak elde edeceğiz.

A bir R-cebir olsun $A/J(A)$ R-bölme cebiri ise A ya **lokal cebir** denir. A lokal cebir ise $1_A \neq 0$ olacağı açıktır.

(1.7.2)

A bir R-cebir $(A \neq 0)$ ise aşağıdakiler denktir.

i) A lokal cebirdir.

ii) $A \setminus U(A) \subset J(A)$

iii) $(A \setminus U(A), +)$ kapalıdır.

İspat :

i) $\Longrightarrow$ ii) $x \notin J(A)$ ise $\exists y \in A$ öyleki $(x+J(A)) \cdot (y+J(A)) = 1+J(A)$ $=(y+J(A))(x+J(A))$ dır. Bu ise $1-xy$, $1-yx \in J(A)$ olduğunu verir. (1.6.9) dan $xy = 1+(xy-1)$, $yx = 1+(yx-1) \in U(A)$ dır. Buradan x sol, sağ tersinir dolayısıyla tersinirdir. Buradan $A \setminus U(A) \subset J(A)$ dır.

ii) $\Longrightarrow$ iii) $x, y \in A \setminus U(A)$ ise $x, y \in J(A)$ ve $J(A)$ ideal olduğundan

$x+y \in J(A)$ ve $x+y \notin U(A)$ elde edilir. O halde $x+y \in A\setminus U(A)$ ve $(A\setminus U(A)\ +)$ kapalıdır.

iii) $\Longrightarrow$ i) $x+J(A) \neq J(A)$ ise $x \notin J(A)$ olduğundan $\exists$ $y,z \in A$ öyleki $1+xy$, $1+yx \notin U(A)$ (1.6.9) dır. Fakat $1 \notin A\setminus U(A)$ olduğundan $xy,yx \in U(A)$ olmalıdır. Buradan x tersinirdir. O halde $\exists z \in A$ öyleki $xz=zx=1$ ve

$$x + J(A) \in U(A/_{J(A)})$$

elde edilir.

(1.7.3)

$N \in {}_A\underline{M}$ ve ${}_A\underline{M}(N)$ lokal cebir ise $N \neq 0$ ve N ayrışamazdır.

İspat :

$id_N \neq 0$ olduğundan $N \neq 0$ dır. Eğer $N=N_1 \oplus N_2$ ise π_1, π_2 projeksiyonları için $\pi_1+\pi_2 = id_N \in U({}_A\underline{M}(N))$ olduğundan (1.7.2) ye göre π_1 veya $\pi_2 \in U({}_A\underline{M}(N))$ olmalıdır. Buradan dolayı $\pi_1=id_N$ veya $\pi_2=id_N$ dir. Dolayısıyla $N_2=0$ veya $N_1=0$ elde edilir. Yani N ayrışamazdır.

(1.7.4)

1) A bir R-cebir, $M \in {}_A\underline{M}$ ve $\varphi \in {}_A\underline{M}(M)$ olsun.

i) M Artinian ise $\exists n_o \in \mathbb{N}^*$ öyleki her $n \geqslant n_o$ için $M=Ker(\varphi^n)+\dot{I}m(\varphi^n)$

ii) M Artinian ve φ monomorfi ise φ otomorfidir.

iii) M Notherian ise $\exists n_o \in \mathbb{N}^*$ öyleki her $n \geqslant n_o$ için

$0 = Ker(\varphi^n) \cap \dot{I}m(\varphi^n)$

iv) M Notherian ve φ epimorfi ise φ otomorfidir.

2) $M \in {}_A\underline{M}$ Artinian, Notherian ve $\varphi \in {}_A\underline{M}(M)$ ise

i) $\exists n_o \in \mathbb{N}^*$ öyleki her $n \geqslant n_o$ için $M=Ker(\varphi^n) \oplus \dot{I}m(\varphi^n)$

ii) φ otomorfidir $\Longleftrightarrow$ φ monomorfi $\Longleftrightarrow$ φ endomorfidir.

iii) $\exists P,Q \in \Lambda(M)$ öyleki $\varphi(P) \subset P$ ve $\varphi(Q) \subset Q$, $\varphi\downarrow P : P \longrightarrow P$ otomorfi ve $\varphi\downarrow Q : Q \longrightarrow Q$ nilpotenttir.

İspat :

(1) i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $Im(\varphi^n) \in \Lambda(M)$ olduğundan $Im\,\varphi \supset \dot{I}m(\varphi^2) \supset \ldots$ $\dot{I}m(\varphi^n) \supset \ldots$ azalan zinciri ve M Artinian olduğundan $\exists$ $n_o > 0$ öyleki

her $n \geqslant n_0$ için $\mathrm{Im}(\varphi^n)=\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^{n_o})$ dır. Buradan her $n \geqslant n_0$ için

$\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^{2n})=\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^n)$ ve (1.2.8) ile $\varphi^n(\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^n))=\varphi^n(M)$

dir. Yine (1.2.8) ile $\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^n)+\mathrm{Ker}(\varphi^n)=M$ elde edilir.

ii) M Artinian ve φ monomorfi ise (1.2.8) ile φ^n monomorfi ve (i) den $M=\mathrm{Im}(\varphi^{n_o})=\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}\,\varphi$ elde edilir ki buradan φ epimorfidir. φ monomorfi ve epimorfi olduğundan φ otomorfidir.

iii) $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}(\varphi^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(\varphi^n) \subset \ldots$ artan zinciri ve M notherian olduğundan $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ öyleki her $n \geqslant n_0$ için $\mathrm{Ker}(\varphi^n)=\mathrm{Ker}(\varphi^{n_o})$ dır. Özellikle her $n \geqslant n_0$ için $\mathrm{Ker}(\varphi^n) = \mathrm{Ker}(\varphi^{2n})$ ve (1.2.6) ile

$\mathrm{Ker}(\varphi^n)=(\varphi^n)^{-1}(\mathrm{Ker}(\varphi^n))$, $\varphi^n(\mathrm{Ker}(\varphi^n))=\varphi^n((\varphi^n)^{-1})(\mathrm{Ker}\varphi^n))=\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^n)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^n)$

elde edilir. Fakat $\varphi^n(\mathrm{Ker}\,\varphi^n)=0$ olduğundan her $n \geqslant n_0$ için

$0 = \mathrm{Ker}(\varphi^n) \cap \dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^n)$

elde edilir.

iv) M Notherian ve φ epimorfi ise (1.2.8) ile φ^n epimorfidir. Buradan iii) ile $\mathrm{Ker}(\varphi^n)=0$ ve $\mathrm{Ker}(\varphi)=0$ olacağından φ monomorfidir. Dolayısıyla φ otomorfidir.

2) (i) ve ii) (1) den hemen elde edilir.

iii) (i) de $P:=\mathrm{im}(\varphi^{n_o})$, $Q:=\mathrm{Ker}(\varphi^{n_o})$ alalım.

$\varphi(P)=\mathrm{Im}(\varphi^{n_o+1})$ olduğundan $\varphi(P)=P$ $\varphi{\downarrow}P: P \longrightarrow P$ epimorfi ve $P \oplus Q=M$ ve M Notherian olduğundan (1.3.4) ile P Notherian ve (1) den $\varphi{\downarrow}P$ bir otomorfidir. $\varphi^{n_o}(Q)=\varphi^{n_o}(\mathrm{Ker}(\varphi^{n_o}))=\varphi^{n_o}((\varphi^{n_o})^{-1}(0)=\dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(\varphi^{n_o}) \cap 0=0$ olduğundan $(\varphi{\downarrow}Q)^{n_o}=0$ yani $\varphi{\downarrow}Q$ nilpotenttir.

(1.7.5)

$M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ Artinian ve Notherian olsun. Bu taktirde M ayrışamazdır $\Leftrightarrow {}_A\underline{\underline{M}}(M)$ lokal cebirdir.

İspat :

" $\Longrightarrow$ " M ayrışamaz ise (1.7.4) ile $\varphi \in {}_A\underline{\underline{M}}(M)$ nilpotent veya birimdir. (1.7.2) ile ${}_A\underline{\underline{M}}(M)$ lokal cebirdir.
" $\Longleftarrow$ " (1.7.3) den açıktır.

(1.7.6) (KRULL - REMARK - SCHMIDT TEOREMİ)

$M \in {}_A\underline{M}$ ve $M = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = \bigoplus_{j=1}^{m} W_j$ öyleki her $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ için ${}_A\underline{M}(V_i)$, ${}_A\underline{M}(W_j)$ lokal cebirler ise n=m ve $\exists\, \delta \in S_n$ öyleki $V_i \cong W_{\delta(i)}$ dir.

İspat :

$\pi_i : M \longrightarrow V_i$, $i_i : V_i \longrightarrow M$, $\pi_j' : M \longrightarrow W_j$ $i_j' : W_j \longrightarrow M$ ilgili i. projeksiyonlar ve injeksiyonlar olsunlar. (1.2.11) ile $\pi_1 i_1 = \mathrm{Id}_{V_1}$ ve $\mathrm{Id}_M = \sum_{j=1}^{m} i_j' \pi_j'$ dir.

Buradan

$$\mathrm{id}_{V_1} = \pi_1 i_1 = \pi_1 \Big(\sum_{j=1}^{m} (i_j' \pi_j') \Big) i_1 = \sum_{j=1}^{m} \pi_1 i_j' \pi_j' i_1$$

elde edilir. ${}_A\underline{M}(V_1)$ lokal cebir olduğundan (1.7.2) ye göre $\exists$ $1 \leq j \leq m$ öyleki $\pi_1 i_j' \pi_j' i_1 \in U({}_A\underline{M}(V_1))$ dir. Bunu $\pi_1 i_1' \pi_1' i_1$ ile yer değiştirelim.

$\alpha := \pi_1' i_1$ olarak tanımlanırsa $\alpha(V_1) \subset W_1$ olduğu açıktır. Şimdi $M = \alpha(V_1) \oplus (\bigoplus_{i=2}^{n} V_i)$ olduğunu gösterelim. $v \in \alpha(V_1) \cap \sum_{i=2}^{n} V_i$ ise $\exists v_1 \in V_1$ öyleki $v = \alpha(v_1)$ ve $v \in \sum_{i=2}^{n} V_i$ dir. Buradan $v = \pi_1' i_1(v_1)$, $v \in \sum_{i=2}^{n} V_i$

$0 = \pi_1(v) = \pi_1 i_1' \pi_1' i_1(v_1)$ ve $\pi_1 i_1' \pi_1' i_1$ otomorfi olduğundan $v_1 = 0$ yani $v = 0$ olduğu elde edilir. $v \in M$ keyfi olsun. $\exists$ $u \in V_1$ öyleki

$\pi_1(v) = \pi_1 i_1' \pi_1' i_1(u)$ dır. $\pi_1(v - i_1' \pi_1' i_1(u)) = 0$ ise $v - i_1' \pi_1' i_1(u) \in \sum_{i=2}^{n} V_i$ yani $v \in \alpha(V_1) + \sum_{i=2}^{n} V_i$ elde edilir. Dolayısıyla $M = \alpha(V_1) \oplus \sum_{i=2}^{n} V_i$ dir.

$\alpha(V_1) \subset W_1$ olduğundan $W_1 = \alpha(V_1) \oplus (\sum_{i=2}^{n} V_i \cap W_1)$ ve (1.7.3) ile W_1 ayrışamaz olduğundan $\alpha(V_1) = 0$ veya $\sum_{i=2}^{n} V_i \cap W_1 = 0$ dır.

$\pi_1 i_1' \pi_1' i_1$ birim olduğundan $\alpha(V_1) \neq 0$, $\sum_{i=2}^{n} V_i \cap W_1 = 0$ ve $W_1 = \alpha(V_1)$ elde edilir. Şu halde

$$M = W_1 \oplus \sum_{i=2}^{n} V_i \quad \text{dir. Buradan}$$

$$\sum_{j=2}^{m} W_j \cong M/W_1 \cong \sum_{i=2}^{n} V_i$$

sonucuna varılır. Min(n,m) üzerinden indüksiyonla m=n ve $\exists\, \delta \in S_n$ öyleki $V_i \cong W_{\delta(i)}$ dir.

(1.7.7)

$M \in {}_A\underline{M}$ Artinian ve Notherian olsun. Bu taktirde $M_i \in {}_A\underline{M}$ $1 \leq i \leq n$ ayrışamaz olmak üzere $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ayrışımı izomorfi hariç tektürlüdür.

İspat :

(1.7.1), (1.7.5) ve (1.7.6) ile hemen görülür.

8. CEBİRLERİN GÖSTERİMLERİ

A bir F-cebir ve $\theta : A \longrightarrow M_n(F)$ $(\theta \neq 0)$ bir F-cebir homomorfisi ise θ ya A nın **bir F-cebir** gösterimi denir. $n \in \mathbb{N}^*$ doğal sayısına θ gösteriminin derecesi denir ve $d^o\theta$ ile gösterilir. $\mathrm{Ker}\theta = 0$ ise θ ya sadık gösterim denir. θ sadık gösterim ise $|A:F| < \infty$ olacağı açıktır. A nın bütün F-cebir gösterimlerinin kümesini $\underline{\underline{R}}(A,F)$ ile göstereceğiz.

$\theta, \psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ $d^o\theta = n$, $d^o\psi = m$ ve $\alpha \in M_{mxn}(F)$ matrisi her $x \in A$ için $\alpha\theta(x) = \psi(x)\alpha$ ise α ya θ ile ψ'ı kenetliyor denir.

$\underline{\underline{R}}(\theta,\psi) := \{\alpha \in M_{mxn}(F) \mid \alpha$, θ ile ψ yı kenetliyor $\}$ olsun. Buna göre $\alpha \in \underline{\underline{R}}(\theta,\psi)$, $\beta \in \underline{\underline{R}}(\psi,\chi)$ ise $\underline{\underline{R}}(\theta,\chi)$ olduğu açıktır. Böylece $\underline{\underline{R}}(A,F)$ yukarıdaki matris çarpımı işlemi ile bir kategori oluşturur.

$\theta, \psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ gösterimlerine denktir denir:$\Longleftrightarrow$ $\theta, \psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ kategorisinde denk objelerdir ve bu $\theta \cong \psi$ ile gösterilir. Açık olarak $\theta \cong \psi$ ise $\exists \alpha \in M_n(F)$ öyleki her $x \in A$ için $\theta(x) = \alpha^{-1}\psi(x)\alpha$ dır. Gösterimlerin denkliği $\underline{\underline{R}}(A,F)$ de bir denklik bağıntısıdır.

$\theta \in R(A,F)$ $d^o\theta = n$ ve $M_\theta := \{ [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t \mid m_i \in F \quad 1 \leqslant i \leqslant n \}$ ile tanımlanan M_θ F-vektör uzayıdır. $a \in A$, $[m_1, m_2, \ldots, m_n]^t \in M_\theta$ için

$$a . [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t := \theta(a) [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t$$

ile A nın M_θ üzerindeki soldan etkisi açıklanırsa $M_\theta \in {}_A\underline{\underline{M}}$ dir.

Her bir $\alpha \in \underline{\underline{R}}(\theta,\psi)$ için $\mu_\alpha([m_1, m_2, \ldots, m_n]^t) = \alpha . [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t$ ile $\mu_\alpha : M_\theta \longrightarrow M_\psi$ tanımlansın. Bu taktirde $\mu_\alpha \in {}_A\underline{\underline{M}}(M_\theta, M_\psi)$ dır. O halde $F = (F_0, F_M)$, $F_0(\theta) := M_\theta$, $F_M(\alpha) := \mu_\alpha$ ile $F : \underline{\underline{R}}(A,F) \longrightarrow {}_A\underline{\underline{M}}$ tanımlansın. $F = (F_0, F_M)$ bir kovaryant funtordur. Bu funktorun aşağıdaki özellikleri vardır.

(1.8.1)

A bir F-cebir ve $\theta, \psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ olsun.

i) α , $\beta \in \underline{\underline{R}}(\theta,\psi)$ ve $\mu_\alpha = \mu_\beta$ ise $\alpha = \beta$ dır.

ii) $\varphi \in {}_A\underline{\underline{M}}(M_\theta, M_\psi)$ ise $\exists$ $\alpha \in R(\theta,\psi)$ öyleki $\mu_\alpha = \varphi$ dir.

iii) $N \in {}_A\underline{\underline{M}}$ öyleki $|N:F| = n < \infty$ ise $\exists\, \theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ öyleki $M_\theta \cong N$ dir.

iv) $\theta, \psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$, $\theta \cong \psi \Longleftrightarrow M_\theta \cong M_\psi$ dır.

v) A F-cebir, $|A:F| = n < \infty$ ise $\exists\, \theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ sadık gösterim öyleki $d^o\theta = n$ dir.

İspat :

i) $\mu_\alpha = \mu_\beta$ ise her $[m_1, m_2, \ldots, m_n] \in M_\theta$ için $\alpha [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t = \beta\, [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t$ ve sonuç olarak $\alpha = \beta$ elde edilir.

ii) $\varphi \in {}_A\underline{\underline{M}}(M_\theta, M_\psi)$ ise $\varphi : M_\theta \longrightarrow M_\psi$ K-lineer dönüşümdür. Buradan $\exists \alpha \in M_{m \times n}(F)$ öyleki $\varphi([m_1, m_2, \ldots, m_n]^t) = \alpha \,.\, [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t$ ...(*)
φ A-modül homomorfisi olduğundan

$$\alpha\,\theta(x)\, [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t = \alpha \,.\, x\, [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t \overset{(*)}{=} \varphi(x\,[m_1, m_2, \ldots, m_n]^t$$

$$= x .\, \varphi([m_1, m_2, \ldots, m_n]^t) = x .\, \alpha\, [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t$$

$$= \psi(x)\, \alpha\, [m_1, m_2, \ldots, m_n]^t$$

ve $\alpha\,\theta(x) = \psi(x)\alpha$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\alpha \in \underline{\underline{R}}(\theta, \psi)$ dır.

iii) $N \in {}_A\underline{\underline{M}}$, $|N:K| = n < \infty$ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ N nın F-tabanı olsun. Buradan $a \in A$, $u_i \in N$ için $au_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} u_j$ şeklinde yazılabilir. Buradan $\chi(a) := [\alpha_{ji}]$ ile tanımlanan $\chi : A \longrightarrow M_n(F)$ dönüşümünün R-cebir homomorfisi olduğu kolaylıkla elde edilir. Buradan $\chi \in \underline{\underline{R}}(A, F)$ dır.

$$m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in N \quad \text{ve} \quad \phi(m) := [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t$$

dönüşümü ile $\phi : N \longrightarrow M_\chi$ bir F-lineer dönüşümdür.
$\phi \in {}_A\underline{\underline{M}}(N, M_\chi)$ birebir ve örten olduğu kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla $N \cong M_\chi$ dır.

iv) $\alpha \in R(\theta, \psi)$ tersinir ise $\mu_{\alpha^{-1}} = (\mu_\alpha)^{-1}$ olduğundan (ii) ile

$$M_\theta \cong M_\psi \Longleftrightarrow \theta \cong \psi$$

elde edilir.

(v) (iii) den ${}^oA \cong M_\theta$ ve $d^o\theta = |A:F| = n < \infty$ ve $\mathrm{Ker}\theta = \mathrm{ann}_A(M_\theta) = 0$ elde edilir.

G sonlu bir grup $GL(n, F) = U(M_n(F))$ ve

$\theta: G \longrightarrow GL(n,F)$ bir dönüşüm olsun.

θ ya G nin bir **F-gösterimi** denir $\Longleftrightarrow$ θ bir grup homomorfisidir. $n \in \mathbb{N}^*$'e θ gösteriminin **derecesi** denir ve $d^o\theta$ ile gösterilir. Bir G grubunun bütün F-gösterimlerinin kümesini $\underline{\underline{R}}(G,F)$ ile gösterelim. Yani $\underline{\underline{R}}(G,F)=\{\theta \mid \theta$ G nın bir F- gösterimi $\}$ dır.

$d^o\theta=n$ $d^o\psi=m, \theta,\psi \in \underline{\underline{R}}(G,F)$ olsun. $\alpha \in M_{mxn}(F)$ ve her $g \in G$ için

$$\alpha\theta(g) = \psi(g)\alpha$$

ise α ya θ ile ψ dönüşümlerini **kenetleniyor** denir.

$\underline{\underline{R}}(\theta,\psi):=\{\alpha \mid \alpha$ θ ile ψ dönüşümlerini kenetliyor $\}$ kümesi üzerinde

$\alpha \in \underline{\underline{R}}(\theta,\psi)$, $\beta \in \underline{\underline{R}}(\psi,\chi)$ için $\beta\alpha \in \underline{\underline{R}}(\theta,\chi)$

dönüşümü ile $\underline{\underline{R}}(G,F)$ bir kategori yapılır.

$A=FG$ bir F-cebir, ψ, $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ve $\alpha \in \underline{\underline{R}}(\theta,\psi)$ olsun.

$T_o(\theta):=\theta\downarrow G$, $T_M(\alpha):=\alpha$ ile tanımlanan

$T=(T_o,T_M):\underline{\underline{R}}(A,F) \longrightarrow \underline{\underline{R}}(G,F)$ dönüşümünün bir izomorfi kovaryant funktor olduğu açıktır.

$d^o\theta=n$, $d^o\psi=m$, $\theta,\psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ olsun. Her $x \in A$ için

$$(\theta \oplus \psi)(x) := \begin{bmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & \psi(x) \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile $\theta \oplus \psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ olduğu kolaylıkla gösterilir.

$d^o(\theta \oplus \psi)=d^o\theta + d^o\psi$ dır. $\theta \oplus \psi$ gösterimine θ ile ψ gösterimlerinin direkt toplamı denir. $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ olsun.

θ ya **ayrışamaz** denir $\Longleftrightarrow$ $\theta_1,\theta_2 \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ve $\theta = \theta_1 \oplus \theta_2$ ise $\theta_1=0$ veya $\theta_2=0$ dır. Ayrışamaz olmayan gösterimlere **ayrışabilir** denir.

(1.8.2)

A bir F-cebir, $\theta,\psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ise aşağıdakiler doğrudur.

(i) $M_{\theta \oplus \psi} \cong M_\theta \oplus M_\psi$

(ii) θ ayrışamaz $\Longleftrightarrow$ $M_\theta \in {}_A\underline{\underline{M}}$ ayrışamazdır,

iii) $\exists \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ayrışamaz modüller öyleki

$\theta \cong \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \ldots \oplus \psi_r$ dir.

(iv) $\psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \ldots \oplus \psi_r = \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \ldots \oplus \chi_s$, $\psi_i, \chi_j \in \underline{\underline{R}}(A;F)$

($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$) ayrışamaz ise

$r=s$ ve $\exists \delta \in S_r$ öyleki $\psi_i = \chi_{\delta(i)}$ dır.

İspat :

(i) $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t \in M_\theta$, $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^t \in M_\psi$ $d^o\theta=n$, $d^o\psi=m$ olmak üzere

$$\varphi([\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]^t , [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m]^t) := [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_m]^t$$

ile $\varphi : M_\theta \oplus M_\psi \longrightarrow M_{\theta \oplus \psi}$ dönüşümü bir A-modül izomorfisi olduğu kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla $M_\theta \oplus M_\psi = M_{\theta \oplus \psi}$ dır.

(ii) (1.8.1) ve (i) ile açıktır.

(iii) $d^o\theta=n$ ve $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ise $|M_\theta : F| = n < \infty$ ve M_θ Aritinandır. (1.7.1) ile $\exists N_i \in \Lambda(M_\theta)$ ayrışamaz modüller öyleki $M_\theta = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ dır. $N_i \in \Lambda(M_\theta)$ olduğundan N_i bir F-vektör uzayıdır. Burad $|N_i : F| < n$ dır. (1.8.1) ile $\exists \psi_i \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ öyleki $N \cong M_{\psi_i}$ ve (ii) den ψ_i ayrışamazdır. Buradan;

$M_\theta \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_\psi$ ve (i) ile $M_\theta \cong M_{\bigoplus_{i=1}^{r} \psi_i}$ dır. (1.8.1) den $\theta \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \psi_i$ elde edilir.

(iv) $\theta_i, \psi_j \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$) ayrışamaz gösterimle öyleki $\bigoplus_{i=1}^{r} \theta_i \cong \bigoplus_{j=1}^{s} \psi_j$ olsun. (i) ve (1.8.1) ile $\bigoplus_{i=1}^{r} M_{\theta_i} = \bigoplus_{j=1}^{s} M_{\psi_j}$ elde edilir. (1.7.7) ile $r=s$ ve $\exists \delta \in S_r$ öyleki $M_{\theta_i} = M_{\psi_{\delta(i)}}$ ve (1.8.1) ile $\theta_i = \psi_{\delta(i)}$ elde edilir.

(1.8.3) A F-cebir $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ise aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $\exists \psi_1, \psi_2 \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ ve $\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & 0 \\ * & \psi_2(x) \end{bmatrix}$ öyleki

$\theta \cong \psi$ dır.

(ii) $\exists \chi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$, $d^o\chi < d^o\theta$ $\alpha \neq 0$ öyleki $\alpha \in R(\theta, \chi)$ dır.

(iii) $M_\theta \in {}_A\underline{\underline{M}}$ basit değil.

İspat :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\chi := \psi_1$ $\alpha = [I:0] \in M_{r \times (n-r)}(F) \setminus \{0\}$

alınarak elde edilir.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) $\alpha\neq 0$ ise $\mu_\alpha: M_\theta \longrightarrow M_\chi$ sıfır olmayan bir homomorfidir. Eğer M_θ basit ise $d^o\theta = |M_\theta:F| \leqslant |M_\chi:F| = d^o\chi$ ve $d^o\theta \leqslant d^o\chi$ çelişkisi elde edilir. O halde M_θ basit değildir.

(iii)$\Longrightarrow$(i) M_θ basit olmasın. Buradan $\exists\, N \in \Lambda(M_\theta)\setminus\{0, M_\theta\}$ olacak biçimde vardır, $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n\}$ N nın bir F-tabanı ve $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots u_n\}$ M_θ nın bir F-tabanı olsun.

$x \in A$, $[u_1, u_2, \ldots, u_n]^t \in M_\theta$ olsun.

$$x.\,[u_1, u_2, \ldots, u_n]^t := \chi(x)\,[u_1, u_2, \ldots, u_n]^t$$

ile tanımlanan $\chi: A \longrightarrow M_n(F)$ dönüşümü (1.8.1) (iii) ile bir F-cebir homomorfisi ve $M_\theta \cong M_\psi$ dır. Buradan $\chi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ dır. Fakat $N \in \Lambda(M_0)$ olduğundan $1 \leqslant i \leqslant r < j \leqslant n$ için $\alpha_{ji} = 0$ dır. Dolayısıyla

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_1(x) & 0 \\ * & \psi_2(x) \end{bmatrix}$$ formundadır.

(1.8.3) un koşullarının en az birini gerçeklemeyen $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ gösterimine **indirgenemez** (basit) gösterim denir.

(1.8.4)

$N \in {}_A\underline{\underline{M}}$ olsun.

N basit ise N ayrışamaz ve $J(A) \subset \mathrm{ann}({}_AN)$ dır.
Tersi A nın sol(sağ) artinian olması durumunda doğrudur.

İspat :

N basit ise N nın ayrışamaz olduğu açıktır. (1.6.4) ile $J(A)N \subset \mathrm{rad}({}_AN) = 0$ dır. Buradan $J(A) \subset \mathrm{ann}({}_AN)$ elde edilir.

Tersine A sol(sağ) Artinian cebir, $J(A) \subset \mathrm{ann}({}_AN)$ ve N ayrışamaz olsun. (1.3.10) ile $N \in {}_{A/J(A)}\underline{\underline{M}}$ dır. (1.6.3) ve (1.4.4) ile $N \in {}_{A/J(A)}\underline{\underline{M}}$ yarıbasit modüldür. (1.3.14) ile N basit $A/J(A)$ - modül ve(1.4. ile N basit A-modüldür.

(1.8.4) A yarıbasit F-cebir, $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ olsun.

θ ayrışamazdır$\Longleftrightarrow$ θ indirgenemezdir.

İspat :

(1.8.3) ile açıktır.

(1.8.5)

A sol Artinian bir F-cebir olsun.

(i) A nın indirgenemez gösterimlerinin ayrık sınıflarının sayısı $A/_{J(A)}$ yarıbasit cebirinin basit cebirlere parçalanışının sayısıdır.

(ii) F cebirsel kapalı $|A:F|<\infty$ ise A nın denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısının $|Z(A/_{J(A)}):F|$ dır.

İspat :

(i) (1.8.4) ile basit A-modüllerin sınıfı ile basit $A/_{J(A)}$-modüllerin sınıfları arasında birebir bir tekabül kurulur. (1.5.5) ile $A/_{J(A)} = \dotplus_{i=1}^{r} A_i$ A_i basit $A/_{J(A)}$-modül, olarak yazılabilir. (1.4.4) ile her basit $A/_{J(A)}$-modül $A/_{J(A)}$ nın bir minimal sol idealine izomorfdır. (1.4.11) ile $1\leq i\leq r$ öyleki A_i nın minimal sol ideallerine izomorftur. (1.4.13) ile A_i deki bütün minimal sol idealler izomorf olduğundan $A/_{J(A)}$-basit modüllerin izomorf olmayanlarının sayısı en fazla r tanedir.

(ii) A sonlu boyutlu bir F-cebir ve F cebirsel kapalı bir (1.5.7) ile $r=|Z(A/_{J(A)}):F|$ ve $A/_{J(A)} \cong \dotplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F)$ olarak elde edilmiş idi. Buradan (i) ile A nın denk olmayan indirgenemez gösterimlerinin sayısı $|Z(A/_{J(A)}):F|$ olarak elde edilir.

BÖLÜM II

1. ARTİNİAN CEBİRLER ÜZERİNDEKİ PROJEKTİF MODÜLLER

Artinian cebirler üzerindeki ayrışamaz modüller cebirinin yapısını tanımada önemli rol oynar. Onlar regüler sol modülün direk terimleridir. Bunun için Artinial cebirler üzerindeki projektif modüllerin yapısını incelemek zorunludur.

$P \in {}_A\underline{M}$ modülüne projektif modül denir $:\Longleftrightarrow \exists M \in {}_A\underline{M}$ serbest öyleki $M = N \oplus N'$ ve $N \cong P$

(2.1.1)

$N, M, P \in {}_A\underline{M}$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) P projektif modüldür.

(ii) $\theta \in {}_A\underline{M}(N,M)$ epimorfi ise her $\varphi \in {}_A\underline{M}(P,M)$ için $\exists \psi \in {}_A\underline{M}(P,N)$ öyleki

$$\varphi = \theta\psi$$

dır. Diğer bir ifade ile;

$\bar{\theta}(\psi) := \theta\psi$ yardımıyla tanımlanan

$\bar{\theta}: {}_A\underline{M}(P,N) \longrightarrow {}_A\underline{M}(P,M)$ dönüşümü bir R-epimorfidir.

(iii) $N \in {}_A\underline{M}$ ve $\theta : N \longrightarrow P$ A-modül epimorfisi ise

$\exists Q \in {}_A\underline{M}$ öyleki $Q \cong P$ ve $N = \mathrm{Ker}\theta \oplus Q$

dır.

İspat :

(i)$\Longrightarrow$(ii) P projektif modül ise $\exists F \in {}_A\underline{M}$ serbest öyleki F P'ye izomorf olan bir direkt terim içerir. Bu sebeple P'yi F nın direkt terimi olarak kabul etmemiz genelliği bozmaz. O halde $\exists Q \in \bigwedge(F)$ öyleki $F = P \oplus Q$ dır. $\pi_p : F \longrightarrow P$ projeksiyon olsun. X F nın bir A tabanı olsun. θ örten olduğundan her $x \in X$ için $\theta^{-1}\varphi\pi_p(x) \neq \emptyset$ dır. Seçme aksiyomuyla

$\theta\chi(x) = \varphi\pi_p(x)$

olacak biçimde $\chi : X \longrightarrow N$ bir dönüşüm vardır. X F nın bir A-bazı olduğundan χ X den F ye aşağıdaki gibi genişletilebilir. $a = \sum_{x\in X} a_x . x$ (sonlu toplam üzerinden)

$$\bar{\chi}(a) := \sum_{x\in X} a_x \chi(x)$$

yardımıyla $\bar{\chi} : F \longrightarrow N$ A-modül homomorfisi olduğu açıktır. $\theta\bar{\chi} = \varphi\pi_p$ ve $\psi := \bar{\chi}\downarrow P$ olarak gözönüne alındığında $\theta\psi = \varphi$ elde edilir.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii) $\theta : N \longrightarrow P$ bir A-modül epimorfisi olsun. (ii) den $\exists\chi : P \longrightarrow N$ A-modül homomorfisi öyleki $\theta\chi = 1_P$ dır. (1.2.8) den $N = Ker\theta \oplus Im\chi$ dır. $Q := Im\chi$ tanımlanırsa $Q \cong N/_{Ker\theta} \cong Im\theta = P$ elde edilerek ispat tamamlanır.

(iii)$\Longrightarrow$ (i) (1.2.12) den $\exists F \in {}_A\underline{M}$ serbest öyleki $\theta : F \longrightarrow P$ bir A-modül epimorfisidir. (iii) den $\exists M' \in \Lambda(F)$ öyleki $M' \oplus Ker\theta = F$ dır. Buradan $M' \cong F/_{Ker\theta} \cong P$ elde edilir. Tanımdan P projektif bir modüldür.

(2.1.2)

A bir R-cebir olsun.

(a) $M \in {}_A\underline{M}$ serbest ise M projektiftir.

(b) Projektif modüllerin direkt toplamıda projektiftir.

(c) Bir projektif modülün direkt terimide projektiftir.

(d) A sol yarıbasit $\Longleftrightarrow$ Her $M \in {}_A\underline{M}$ için M projektiftir.

İspat :

(a) Tanımdan açık.

(b) $\{M_i \mid i\in I\}$ projektif modüllerin bir ailesi olsun. $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ $N', N'' \in {}_A\underline{M}$ ve $\theta \in {}_A\underline{M}(N', N'')$ epimorfi olsun. $\varphi \in {}_A\underline{M}(M, N'')$ keyfi verilsin. Her $k \in I$ için M_k lar projektif olduğundan (2.1.1) (ii) ile $\varphi i_k = \theta\chi_k$ olacak biçimde $\chi_k : M_k \longrightarrow N'$ A-modül homomorfileri vardır. Buradan $\exists\chi : M \longrightarrow N'$ öyleki $\chi_k = \chi i_k$ dır. (Bk.z [ ]) Sonuç olarak $(\theta\chi) i_k = \theta\chi_k = \varphi i_k$ olduğundan $\theta\chi = \varphi$ elde edilir. Buradan (2.1.1) (ii) den M projektiftir.

(c) P projektif $P = P' \oplus P''$ ve $\theta \in {}_A\underline{M}(N, M)$ epimorfi olsun. $\varphi : P' \longrightarrow N$ keyfi bir A-modül homomorfisi ise P projektif olduğundan $\exists\chi : P \longrightarrow N$ öyleki

$\theta\chi = \varphi\pi_{p'}$

dır. $\bar{\chi}:=\chi\pi_{p'}$ ile tanımlanan $\bar{\chi}:P'\longrightarrow N$ A-modül homomorfisi $\theta\bar{\chi}=\varphi$ koşulunu gerçekler. Buradan (2.1.1) den P' projektiftir.

(d) $\Longrightarrow$

A sol yarıbasit olsun. $M\in {}_A\underline{M}$ keyfi verilsin. Buradan (1.4.4) ile M yarıbasittir. Dolayısıyla $\exists N_i\in\Lambda(A)$ minimal öyleki $M\cong\bigoplus_{i\in I}N_i$ dır. $\{1_A\}$ A nın bir A-tabanı olduğundan serbesttir. (a) ile ${}^oA$ projektiftir. (c) ile her $i\in I$ için N_i projektiftir. (b) ile M nın projektif olduğu elde edilir.

$:\Longrightarrow$

$N\in\overset{l}{\Lambda}(A)$ keyfi verilsin. $\nu:A\longrightarrow {}^oA/N$ bir kanonik epimorfidir. Hipotezden ${}^oA/N$ projektif olduğundan (2.1.1) ile $\exists N'\in\overset{l}{\Lambda}(A)$ öyleki $A=\mathrm{Ker}\,\nu\oplus N'$ dır. $\mathrm{Ker}\,\nu=N$ olduğundan N direkt terimdir. Buradan $\overset{l}{\Lambda}(A)$ komplimentlenebilirdir. (1.3.15) ile ${}^oA$ yarıbasittir.

Şimdi $P,Q\in{}_A\underline{M}$ olmak üzere ${}_A\underline{M}(P,Q)$ ile ${}_{A/J(A)}\underline{M}(P/_{J(A)},Q/_{J(A)Q})$ arasındaki ilişkiyi araştıralım.
A sol Artinian P,Q projektif modül olduğu zaman aralarındaki ilişki çok yakındır. $M\in{}_A\underline{M}$ ise

$M/_{J(A)M}\in{}_A\underline{M}\cap\underline{M}_{A/J(A)}$ olduğundan ${}_A\underline{M}(P/_{J(A)P},Q/_{J(A)Q})={}_{A/J(A)}\underline{M}(P/_{J(A)P},Q/_{J(A)Q})$

olduğu açıktır.

A bir R-cebir, $I\in\Lambda(A)$ ve $P\in{}_A\underline{M}$ olsun.

$F_o(P):=P/_{IP}$, ve $\varphi\in{}_A\underline{M}(P,Q)$ için $F_M(\varphi):=\bar{\varphi}$

$\varphi(IP)=I\varphi(P)\subset IQ$ olduğundan $\bar{\varphi}(p+IP):=\varphi(p)+IQ$

ile tanımlanan dönüşüm açık olarak A/I-modül homomorfisidir. Bu dönüşümler ile

$$F=(F_o,F_M):\ {}_A\underline{M}\longrightarrow {}_{\bar{A}}\underline{M}$$

kategorileri arasında bir kovaryant funktor olduğu görülür. Daha fazla olarak

$\nu_P:P\longrightarrow P/_{IP}$ kanonik projeksiyonlar ise

$\nu_Q:Q\longrightarrow Q/_{IQ}$ $\nu_Q\varphi=F_M(\varphi)\nu_P$,

dır. Diğer deyişle aşağıdaki diyagram komutatiftir.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\nu_P"] \arrow[d, "\varphi"'] & P/_{IP} \arrow[d, "=F_M(\varphi)=\bar{\varphi}"] \\ Q \arrow[r, "\nu_Q"'] & Q/IQ \end{tikzcd}$$

(2.1.3)

Veriler (2.1.2) deki gibi olmak üzere

$$\nu_Q = \theta(\varphi)\nu_P$$

olacak biçimde $\theta: {}_A\underline{\underline{M}}(P,Q) \longrightarrow {}_{A/I}\underline{\underline{M}}(P/_{IP},Q/_{IQ})$ dönüşümü vardır. θ yı $\theta(P,Q)$ ile gösterecek olursak aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $\varphi \in {}_A\underline{\underline{M}}(P,Q)$, $\psi \in {}_A\underline{\underline{M}}(N,P)$ ise

$$\theta(N,Q)(\varphi o \psi) = \theta(P,Q)(\varphi)\theta(N,P)(\psi)$$

dır.

(ii) $\theta(P,P)$: ${}_A\underline{\underline{M}}(P) \longrightarrow {}_{A/I}\underline{\underline{M}}(P/_{IP})$ R-cebir homomorfisidir.

(iii) P projektif $\theta(P,Q)$ R-modül epimorfisidir.

İspat :

$\theta(\varphi):=\overline{\varphi}$ ile tanımlansın. $\overline{\varphi} \in {}_{A/I}\underline{\underline{M}}(P/_{IP},Q/_{IQ})$ olduğu açıktır. (i) ve (ii) bu dönüşümle kolaylıkla elde edilir.

(iii) $\varphi^* \in {}_{A/I}\underline{\underline{M}}(P/_{IP},Q/_{IQ})$ keyfi verilsin. P projektif ve $\nu_Q:Q \longrightarrow Q/_{IQ}$ kanonik epimorfi olduğundan (2.1.1) (ii) ile $\exists\ \psi:P \longrightarrow Q$ öyleki $\nu_Q\varphi = \varphi^*\nu_P$ dır. Buradan $\theta(P,Q)(\varphi) = \varphi^*$ elde edilerek ispat tamamlanır.

(2.1.4)

A sol Artinian R-cebir, $P,Q \in {}_A\underline{\underline{M}}$ projektif olsun.

(i) ${}_A\underline{\underline{M}}(P)/_{J({}_A\underline{\underline{M}}(P))} \cong {}_{A/J(A)}\underline{\underline{M}}(P/_{J(A)P})$ (R-cebir olarak)

(ii) $P \cong Q \Longleftrightarrow P/_{J(A)P} \cong Q/_{J(A)Q}$

(iii) $P \in \Lambda(A)$ direk terim olsun.

P ayrışamazdır $\Longleftrightarrow P/J(A)P \in {}_{A/J(A)}\underline{\underline{M}}$ basittir.

İspat :

Notasyon kısalığı için $J=J(A)$ $\overline{A}=A/J$, $\overline{P}=P/_{JP}$ olarak alınırsa (2.1.3) ile $\theta=\theta(P,P):{}_A\underline{\underline{M}}(P) \longrightarrow {}_{\overline{A}}\underline{\underline{M}}(\overline{P})$ bir R-cebir epimorfisidir.

$\varphi \in \mathrm{Ker}\theta$ olsun. Buradan $\theta(\varphi)=0$ yani $\nu_P\ \varphi=0$ dır. Dolayısıyla $\varphi(P) \subset \mathrm{Ker}\,\nu_P = JP$ dır. A Artinian olduğundan $\exists\, k>0$ öyleki $J^k=0$ dır. Buradan $\varphi^k=0$ elde edilerek φ nın nilpotent olduğu gösterilir. (1.6.11) ile $\mathrm{Ker}\theta \subset J({}_A\underline{M}(P))$ elde edilir. Diğer yandan $\bar{A}$ yarıbasit olduğundan $\bar{P}$ yarbasit $\bar{A}$-modüldür. Problem ( ) ile $J({}_{\bar{A}}\underline{M}(\bar{P}))=0$ dır.

Buradan $J({}_A\underline{M}(P)/_{\mathrm{Ker}\theta})=0$ ve (1.3.24) ile $J({}_A\underline{M}(P)) \subset \mathrm{Ker}\theta$ sonucuna varılarak $J({}_A\underline{M}(P))=\mathrm{Ker}\theta$ olduğu elde edilir.

Dolayısıyla $\quad {}_A\underline{M}(P)/J({}_A\underline{M}(P)) \cong {}_{\bar{A}}\underline{M}(\bar{P})$

elde edilir.

(ii) A sol Artinian cebir, $P,Q \in {}_A\underline{M}$ projektif modül olsun.

$:\Longrightarrow$ $\varphi \in {}_A\underline{M}(P,Q)$ izomorfi ise θ nın funktorial özelliğinden $\theta(\varphi^{-1})=\theta(\varphi)^{-1}$ olup $\theta(\varphi) \in {}_{\bar{A}}\underline{M}(\bar{P},\bar{Q})$ izomorfidir.

$\Longleftarrow:$ Tersine olarak $\varkappa:\bar{P} \longrightarrow \bar{Q}$ bir A-izomorfi verilsin. P,Q projektif olduğundan (2.1.3) (ii) ile $\exists\ \varphi,\psi$ öyleki $\theta=\theta(P,Q)(\varphi)=\varkappa$ ve $\theta(P,Q)(\psi)=\varkappa^{-1}$ dır.

$$\theta(\psi\varphi) = 1_{\bar{P}} \quad \text{ve} \quad \theta(\varphi\psi) = 1_{\bar{Q}}$$

oldukları açıktır. Buradan (i) ile $\varphi\psi - 1_Q \in J({}_A\underline{M}(Q))$ ve $\psi\varphi - 1_P \in J({}_A\underline{M}(P))$ elde edilir. (1.6.9) ile $\varphi\psi \in U({}_A\underline{M}(Q))$ ve $\psi\varphi \in U({}_A\underline{M}(Q))$ elde edilir. Buradan (1.2.5) ile φ nın epimorfi ve monomorfi olduğu elde edilirek ispat tamamlanır.

(iii) $P \in \overset{\ell}{\Lambda}(A)$ direkt terim olsun. (1.3.6) ile P Artinian ve Noetheriandır. (1.7.5) ile P ayrışamazdır $\Longleftrightarrow$ ${}_A\underline{M}(P)$ lokal cebirdir $\Longleftrightarrow$ ${}_{\bar{A}}\underline{M}(\bar{P})$ $/J({}_A\underline{M}(P))$ bölme cebiridir $\Longleftrightarrow \bar{P}$ basittir. (Burada $\bar{A}$ yarıbasit cebir ve Schur lemması kullanıldı).

${}^{o}A$ in ayrışamaz direkt terimlerine **esas ayrışamaz** sol A-modüller denir.

(2.1.5)

A sol Artinian bir R-cebir $\bar{\Lambda}({}^{o}A)$ A nın esas ayrışamaz A-modüllerinin ve $\Lambda({}_{\bar{A}}\underline{M})$ ilede basit $\bar{A}$-modüllerin izomorfi sınıflarını gösterelim. Bu taktirde $\quad \bar{\Lambda}({}^{o}A) \cong \bar{\Lambda}({}_{\bar{A}}\underline{M})$ (küme anlamında) dır.

İspat :

$H(P):=\bar{P}$ ile tanımlanan $H:\bar{\Lambda}({}^{o}A) \longrightarrow \bar{\Lambda}({}_{\bar{A}}\underline{M})$ dönüşümünün birebir ve örten olduğunu gösterelim.

A sol Artinian olduğundan ^{o}A, Artinian ve Noetheriandır.

(1.3.6), (1.7.1) ile $\exists P_i$ $(1 \leq i \leq n)$ esas ayrışamaz modüller öyleki $^{o}A = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ şeklinde yazılır. Dolayısıyla $\overline{P} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{P}_i$ elde edilir.

$N \in \Lambda({}_{\bar{A}}M)$ ise (1.4.4), (1.4.11) ile $\exists 1 \leq i \leq n$ öyleki $N \cong \overline{P}_i$ elde edilir. Buradan $H(P_i)=N$ elde edilir. Dolayısıyla H örten ve (2.1.4) (ii) ile H birebirdir.

(2.1.6) (Yapı Teoremi)

A sol Artinian bir R-cebir olsun. Bu taktirde her $P \in {}_{A}\underline{M}$ projektif modül esas ayrışamaz A-modüllerin bir direkt toplamına izomorftur. Bu izomorfi direkt terimlerin izomorfisi hariç olmak üzere tek türlüdür.

İspat :

P projektif olsun. $\bar{A}$ yarıbasit olduğundan $\overline{P}=P/J(A)P \in {}_{\bar{A}}\underline{M}$ yarıbasittir. Buradan

$\exists N_i (i \in I)$ $N_i \in \Lambda(\overline{P})$ basit öyleki

$\overline{P} = \bigoplus_{i \in I} N_i$

dır. (2.1.5) ile her $i \in I$ için $\exists P_i \in {}_{A}\underline{M}$ esas ayrışamaz öyleki $N_i \cong \overline{P}_i$ dır. Buradan $\overline{P} \cong \bigoplus_{i \in I} \overline{P}_i$ ve sonuç olarak $\overline{P} \cong \overline{\bigoplus_{i \in I} P_i}$ elde edilir.

(2.1.4) ile $P \cong \bigoplus_{i \in I} P_i$ elde edilerek iddianın birinci kısmı tamamlanmış olur.

Eğer $\bigoplus_{i \in I} P_i = \bigoplus_{j \in J} Q_j$ P_i, Q_j $(i \in I,\ j \in J)$ esas ayrışamaz modüller ise $\bigoplus_{i \in I} \overline{P}_i = \bigoplus_{j \in J} \overline{Q}_j$ ve (2.1.4) ile $\overline{Q}_j$, $\overline{P}_i$ $(i \in I,\ j \in J)$ basit A-modüllerdir. (1.3.21) ile $\delta: I \longrightarrow J$ birebir ve örten öyleki $\overline{P}_i \cong \overline{Q}_{\delta(i)}$ dır. (2.1.4) ile $P_i \cong Q_{\delta(i)}$ elde edilerek ispat tamamlanır. Aşağıdaki sonuçları hemen elde edebiliriz.

(2.1.7)

A sol Artinian bir R-cebir olsun.

(i) $P \in {}_{A}\underline{M}$ ayrışamaz, projektif ise P bir esas ayrışamaz A-modüle izomorftur. Özellikle ayrışamaz projektif modüller devirlidir.

(ii) P ayrışamaz, projektif A-modül ve $N \in \Lambda(P) \setminus \{P\}$ ise $N \subset J(A)P$ dır.

İspat :

(i) (2.1.6) ile $\exists P' \in \Lambda^{\ell}(A)$ esas ayrışamaz modül öyleki

$P \cong P'$ ve $\bar{P} \cong \bar{P}'$

ıır. $\bar{P}'$ basit olduğundan devirlidir. Buradan $\bar{P}$ devirlidir. $\exists \bar{x} \in \bar{P}$ öyleki $=\langle \bar{x} \rangle$ dır. Dolayısıyla $P=J(A)P+\langle x\rangle$ ve (1.6.7) ile $P=\langle x\rangle$ olarak elde edilir.

(ii) $N \not\subseteq J(A)P$ ise $N+J(A)P/J(A)P \in \Lambda(P/J(A)P)\setminus\{0\}$ ve $P/J(A)P$ basit olduğundan

$N+J(A)P/J(A)P = P/J(A)P$ ve $N+J(A)P=P$

elde edilir. (1.6.7) ile $N=P$ çelişkisi elde edileceğinden $N \subset J(A)P$ olmak zorundadır.

A bir R-cebir olsun.

$e \in R$ de **idempotenttir** $:\Longleftrightarrow e^2=e$

e idempotentine **pirimitifdir** denir $:\Longleftrightarrow f \in A$ idempotenti $0 \neq f \neq e$ $ef=fe=f$ olacak biçimde yoktur.

(2.1.8)

A bir R-cebir, $P \in \Lambda^{\ell}(A)$ olsun.

(i) $e \in A$ idempotent ve $P=Ae$ olsun.

$P=\bigoplus_{i=1}^{m} Q_i$ ise $\exists e_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ öyleki $Q_i \in \Lambda^{\ell}(A)$

$e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, $e_i e = e e_i = e_i$ ve $Q_i = Ae_i$

ır.

(ii) P direkt faktördür $\Longleftrightarrow \exists e \in A$ idempotent öyleki $P=Ae$ dır.

(iii) P ayrışamaz $\Longleftrightarrow e=f_1+f_2$, $f_i f_j = \delta_{ij} f_i$ $1 \leqslant i , j \leqslant 2$ ise $f_1=0$ veya $f_2=0$ dır.

İspat :

(i) $P=Ae=\bigoplus_{i=1}^{m} Q_i$ olsun. Dolayısıyla $\exists e_i \in Q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ öyleki $e=\sum_{i=1}^{m} e_i$ dır. $x \in Q_i$ ise $x \in P$ ve $\exists x' \in A$ öyleki $x=x'e$ olacağından $x=xe$ dır. Bunun sonucu olarak her $1 \leqslant i \leqslant m$ için $e_i = ee_i$ ve $xe=\sum_{i=1}^{m} xe_i$ elde edilerek

$$x - xe_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} xe_j \in Q_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} Q_j \Big) = 0$$

sonucu ile $x=xe_i \in Ae_i$ neticesine varılır. Buradan,

$Q_i \subset Ae_i \subset AQ_i \subset Q$ olduğundan $Q_i = Ae_i$ dır. Yukarıdaki x yerine e_i alınarak her $1 \leqslant i,j \leqslant m$ $(i \neq j)$ için

$$e_i e_j = 0 \text{ ve } e_i = e_i^2$$

olduğu görülür. Sonuç olarak her $1 \leqslant i,j \leqslant m$ için

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i \text{ ve } Q_i = Ae_i$$

elde edilir.

(ii)

$:\Longrightarrow$ P ayrışamaz olsun. Eğer e pirimitif değil ise $0 \neq e \neq f$, $ef = fe = f$ olacak şekilde bir f idempotent elemanı vardır. $e_1 := e - f$, $e_2 := f$ ile tanımlanırsa $e_i^2 = e_i$ $Ae_i \subset P$ $(i=1,2)$ ve $P = Ae_1 \oplus Ae_2$, $Ae_i \neq 0$ $(i=1,2)$ elde edilir.

$\Longleftarrow$: $e = e_1 + e_2$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ $(i=1,2)$ ise $e_1 = 0$ veya $e_2 = 0$ olsun. Eğer P ayrışabilir ise $P_i \neq 0$ $(i=1,2)$ olmak üzere $P = P_1 \oplus P_2$ dır. (i) ile $\exists$ $e_i \in P_i$ öyleki $e = e_1 + e_2$ $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ ve $P_i = Ae_i$ dır. Hipotezden $e_1 = 0$ veya $e_2 = 0$ dır. Buradan $P_1 = 0$ veya $P_2 = 0$ dır. Bu ise $P_i \neq 0$ $(i=1,2)$ olması ile çelişir. O halde (iii) deki ifadeler birbirine denktir.

(2.1.9)

A bir R-cebir olsun.

(i) $P \in \Lambda^{l}(A)$ direkt faktör ve $M \in {}_A\underline{\underline{M}}$ olsun. Bu taktirde

$${}_A\underline{\underline{M}}(P,M) = \{ \lambda_u \downarrow P \mid u \in M \}$$

dır.

(ii) $e, f \in A$ idempotentler olsun. Bu taktirde

${}_A\underline{\underline{M}}(Ae, Af) \cong eAf$ (R-modül) ve ${}_A\underline{\underline{M}}(Ae) \cong eAe$ (R-cebir)dir, özellikle A sol (sağ) Artinian R-cebir ise eAe de sol (sağ) Artinian R-cebirdir.

İspat :

(i) $u \in M$ için $\lambda_u(a) = au$ yardımıyla tanımlanan $\lambda_u : A \longrightarrow M$ bir A-modül homomorfisidir. Buradan

$$\{ \lambda_u \downarrow P \mid u \in M \} \subset {}_A\underline{\underline{M}}(P,M)$$

olduğu açıktır. Tersine olarak $\varphi \in {}_A\underline{\underline{M}}(P,M)$ ise (2.1.8) (ii) ile $P = Ae$ olacak biçimde bir e idempotent elemanı vardır. Buradan $\varphi = \lambda_{\varphi(e)} \downarrow P$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Sonuç olarak ${}_A\underline{\underline{M}}(P,M) = \{ \lambda_u \downarrow P \mid u \in M \}$ elde edilir.

(ii), (i) ile ${}_{A}\underline{\underline{M}}(Ae,Af)=\{\ \lambda_{af}\downarrow Ae \mid a\in A\}$ olduğu açıktır. Ancak $\lambda_{af}\downarrow Ae = \lambda_{eaf}\downarrow Ae$ olduğundan

$${}_{A}\underline{\underline{M}}(Ae,Af) = \{\ \lambda_{eaf}\downarrow Ae \mid a\in A\ \}$$

elde edilir. $a\in A$ için

$$\Psi(eaf) = \lambda_{eaf}\downarrow Ae$$

yardımıyla tanımlanan $\Psi: eAf \longrightarrow {}_{A}\underline{\underline{M}}(Ae,Af)$ dönüşümü istenen özelliği gerçekler. Şimdi A sol Artinian olduğunda eAe nın sol Artinian olduğunu gösterelim.

$N\in\overset{\ell}{\Lambda}(eAe)$ ise $AN\in\overset{\ell}{\Lambda}(A)$ olduğu açıktır. $e\in eAe$ R-cebirinin birim elemanı olduğundan

$$eN=Ne=N \quad \text{dır.}$$

$(AN)=eAeN\subset N$ ve $N=eN\subset eAN$ olduğundan $N=eAN$ dır. Buradan her $N\in\Lambda(eAe)$ için

$$\Psi(N) = AN$$

ile $\Psi: \overset{\ell}{\Lambda}(eAe) \longrightarrow \overset{\ell}{\Lambda}(A)$ dönüşümünün birebir olduğu açıktır. Bu ise eAe nın artinian olduğunu verir. Aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

(2.1.10)

A bir R-cebir, P=Ae direkt terim ve $M\in {}_{A}\underline{\underline{M}}$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

(i) ${}_{A}\underline{\underline{M}}(P,M)\neq 0$

(ii) $PM\neq 0$

(iii) $eM\neq 0$

İspat :

(2.1.9) dan açıktır.

(2.1.11)

A sol Artinian R-cebir, $e,f\in A$ pirimitif idempotentler P=Ae, Q=Af, $P\not\cong Q$ ise aşağıdakiler denktir.

(i) ${}_{A}\underline{\underline{M}}(P,Q)\neq 0$

(ii) $PJ(A)Q\neq 0$

(iii) $eJ(A)f\neq 0$

İspat :

$PJ(A)Q=AeJ(A)Af=AeJ(A)f$ olduğundan (ii) ile (iii) denktir. $P\not\cong Q$ ise (2.1.4) ile $P/J(A)J, Q/J(A)Q \in {}_{A/J(A)}\underline{M}$ basit ve $P/J(A)P \not\cong Q/J(A)Q$ dır.

$0\neq \varphi \in {}_A\underline{M}(P,Q)$ ise $\bar{\varphi} \in {}_{A/J(A)}\underline{M}(P/J(A)P, Q/J(A)Q)$ olduğundan (1.8.13) ile $\bar{\varphi}=0$ dır. Buradan $\varphi(P) \subset J(A)Q$ elde edilir. $0\neq \mathrm{Im}\varphi = P\varphi(e) \subset PJ(A)Q$ dır. Tersine olarak $0\neq eJ(A)f\subset eAf$ ise (2.1.10) ile ${}_A\underline{M}(P,Q)\neq 0$ olacağından (iii) ile (i) nin denk oldukları elde edilerek ispat tamamlanır.

Dikkat edilirse Artinian cebirler üzerinde Wedderburn Yapı Teoremi taşınamıyor. Çünkü öyle P,Q ayrışamaz modülleri bulunabilir ki $P \not\cong Q$ olduğu halde ${}_A\underline{M}(P,Q) \neq 0$ olabiliyor.

A sol Artinian R-cebir, $e_1,e_2,\ldots,e_n\in A$ pirimitif idempotentler öyleki $P_i=Ae_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ izomorf olmayan esas ayrışamaz A-modüllerin bir tam sistemi olsun. Bu taktirde A nın bir **yönlü quiveri** $\Gamma(A)=(V,E)$ ikilisidir. Burada

$V=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ **kenarların** kümesi ve

$E=\{(e_i,e_j) \mid e_iJ(A)e_j\neq 0\}$ **köşelerin** kümesi olarak alınıyor.

$\Gamma_1(A)=(V_1,E_1)$, $\Gamma_2(A)=(V_2,E_2)$ A nın iki quiveri olsun. $\Gamma_1(A)$ ile $\Gamma_2(A)$ quiverlerine **denktir** denir $:\Longleftrightarrow$ $\delta:V_1\longrightarrow V_2$ birebir, örten öyleki $(e_i,e_j)\in E_1$ ise $(\delta(e_i),\delta(e_j))\in E_2$ dır. $\Gamma_1(A)$, $\Gamma_2(A)$ quiverleri denk ise $\Gamma_1(A)=\Gamma_2(A)$ yazılır.

(2.1.12)

$\Gamma(A)$ kenarların kümesindeki pirimitif idempotentlerin seçiminden bağımsızdır. Daha fazla olarak A,B R-cebirler $A\cong B$ ise $\Gamma(A)=\Gamma(B)$ dır.

İspat :

e,e',f,f' pirimitif idempotentler öyleki

$$Ae\cong Ae', \quad Af\cong Af'$$

olsun. Bu taktirde $eJ(A)f\neq 0 \Longleftrightarrow e'J(A)f'\neq 0$ dır. Gerçekten $Af\cong Af'$ ise $J(A)f\cong J(A)f'$ dır. Buradan ${}_A\underline{M}(Ae,J(A)f)\cong {}_A\underline{M}(Ae',J(A)f')$ elde edilerek (2.1.10) ile $eJ(A)f\neq 0 \Longleftrightarrow e'J(A)f'\neq 0$

olduğu elde edilir. Bu sonuç bizi iddianın doğruluğuna götürür.

A yarıbasit cebir ise açık olarak $\Gamma(A)=(V,\emptyset)$ dır. Bunun terside doğrudur. Kenarların kümesi tek elemanlı ise A/J(A) basit cebirdir. Eğer A cebiri komutatif ise köşelerin kümesi (e_i,e_j) basit formundadır.

Artinian Cebirlerin Yapısı

A bir R-cebir olsun. A ya **Asıl cebir** denir:$\Longleftrightarrow A/_{J(A)}$ basit cebirdir.

(2.1.13)

A bir sol Artinian Asıl cebir ise bütün esas ayrışamaz A-modüller izomorftur. Daha fazla olarak $\exists !$ $n>0$, B lokal cebiri (izomorfi hariç tek türlü) öyleki $A \cong M_n(B)$ dır.

İspat :

A sol Artinian Asal cebir ise $A/_{J(A)}$ basit, ve yarıbasit cebirdir. (1.4.13) ile bütün basit $A/_{J(A)}$-modüller izomorftur. (2.1.5) ile bütün esas ayrışamaz modüller izomorftur. Sonuç olarak $\exists$ P esas ayrışamaz A-modül öyleki ${}^{o}A \cong \bigoplus nP$ dır. (1.5.2) ile $B := {}_{A}\underline{M}(P)$ olmak üzere ${}^{o}A \cong M_n(B)$ dır. A Artinian ve Noetherian olduğundan (1.7.5) ile B lokal cebirdir. (2.1.8) ile $\exists$ $e \in A$ pirimitif idempotent öyleki P=Ae dır. (2.1.9) ile ${}_{A}\underline{M}(Ae)$ Artiniandır. C lokal cebir olmak üzere $M_m(C)=A' \cong A$ ise problem(6) ile $A' \cong \bigoplus_{i=1}^{m} A\varepsilon_{ii}$ ve $C \cong \varepsilon_{11}A'\varepsilon_{11} \cong {}_{A}\underline{M}(A'\varepsilon_{11})$ dir. $A'\varepsilon_{11}$ esas ayrışamaz A'-modül dır. Krull-Schmıd Teoremi ile m=n ve $C \cong B$ elde edilir.

Bu teoremin terside doğrudur. Bunu $J(M_n(B))=M_n(J(B))$ olması ile hemen elde edebiliriz. Genel olarak Artinian cebirlerin Asıl cebir olmaları gerekmez. Artinian cebirlerin quiverlerin geometrik yapıları cebirler hakkında bize fikir verirler.

$\Gamma_1=(V_1,E_1)$, $\Gamma_2=(V_2,E_2)$, $V_1 \cap V_2=\emptyset$ ise

$\Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2 = (V_1 \dot{\cup} V_2, E_1 \dot{\cup} E_2)$ quiverine Γ_1 ve Γ_2 quiverinin **ayrık birleşimi** denir.

$\Gamma=(V,E)$, $V=V_1 \dot{\cup} V_2$ quiveri verilmiş ise

$\Gamma=(V_1,E \cap (V_1 x V_1)) \dot{\cup} (V_2,E \cap (V_2 x V_2))$ quiverlerinin ayrık birleşimleri biçiminde yazılır. Bu durumda bir kenarı V_1 de diğer kenarı V_2'de olan bir köşe yoktur. Bir Γ quiveri boş olmayan iki quiverin ayrık birleşimi biçiminde yazılamıyorsa quivere **bağlantılı quiver** denir. Bu quiverin tüm köşelerinin kenarlar ile birbirine bağlı olduğunu söyler.

Bununla birlikte aşağıdaki teoremlerle her quiveri denklik hariç olmak üzere bağlantısız quiverlerin ayrık birleşimleri olarak tektürlü yazacağız.

(2.1.14)

$A=B\dot{+}C$ Artinian cebir ise $\Gamma(A)=\Gamma(B)\,\dot{\cup}\,\Gamma(C)$

dır.

İspat :

$\Gamma(B)=(V_1,E_1)$, $\Gamma(C)=(V_2,E_2)$ $V_1=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$

$V_2=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$ olsun. Burada $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ve $f_1,f_2,\ldots,f_m$ sırasıyla B ve C nın pirimitif idempotentlerin bir tam sistemi olsun. Buradan e_i,f_j $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ A da pirimitif idempotentlerdir. Daha fazla olarak

$Ae_i=Be_i$, $Af_j=Bf_j$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $1\leqslant j\leqslant m)$

ayrışamaz A-modüllerdir. $\exists\, n_i,\ m_j>0$ doğal sayıları öyleki

${}^{o}B=\bigoplus_{i=1}^{n}(\oplus n_i Be_i)$ ve ${}^{o}C=\bigoplus_{j=1}^{m}(\oplus m_j\ C f_j)$

dır. Buradan ${}^{o}A={}^{o}B\oplus{}^{o}C=\bigoplus_{i=1}^{n}(\oplus n_i Ae_i)\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}(\oplus m_j\ Af_j)$

elde edilir. Krull-Schmidt Teoremi ile her esas ayrışamaz A-modül için $\exists!$ $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$ öyleki $P\cong Aei$ veya $P\cong Afj$ dır. (1.6.12) ile $J(A)=J(B)\dot{+}J(C)$ olduğundan her (i,j) için $o=e_iJ(A)f_j=f_jJ(A)e_i$ dır. Daha fazla olarak

$e_iJ(A)e_k\neq 0\Longleftrightarrow e_iJ(B)e_k\neq 0$

$f_jJ(A)f_\ell\neq\Longleftrightarrow f_jJ(C)f_\ell\neq 0$

dır. Buradan $\Gamma(A)=(V_1\,\dot{\cup}\,V_2,E_1\cup E_2)=\Gamma(B)\,\dot{\cup}\,\Gamma(C)$

elde edilir.

(2.1.15)

A bir sol Artinian cebir, $\Gamma(A)=\Gamma_1\,\dot{\cup}\,\Gamma_2$ ise $\exists\, B,C$ R-cebirleri öyleki $\Gamma(B)=\Gamma_1$, $\Gamma(C)=\Gamma_2$ olmak üzere $\Gamma(A)=\Gamma(B)\,\dot{\cup}\,\Gamma(C)$ ve $A=B\dot{+}C$ dır.

İspat :

$\Gamma_1=(V_1,E_1)$, $\Gamma_2=(V_2,E_2)$ olmak üzere

$\Gamma(A)=(V_1\,\dot{\cup}\,V_2,E_1\cup E_2)$ olsun. Buradan

${}^{o}A=(\bigoplus_{i=1}^{n}P_i)\oplus(\bigoplus_{j=1}^{m}Q_j)$ A nın esas ayrışamaz modüllerden oluşan bir parçalanışı olsun. Her Her $e\in V_1$ ve ve $f\in V_2$ için $\exists$ $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$ öyleki

$Ae \cong P_i$ ve $Af \cong Q_j$ dır. $B:=\bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, $C:=\bigoplus_{j=1}^{m} Q_j$ ile tanımlansın. Buradan $E_1 \subset V_1 x V_1$, $E_2 \subset V_2 x V_2$ olduğundan (2.1.11) ile her $1 < i \leq n$, $1 \leq j < m$ için

$${}_A\underline{M}(P_i,Q_j) = {}_A\underline{M}(Q_j,P_i)=0$$

dır. Sonuç olarak ${}_A\underline{M}(B,C)={}_A\underline{M}(C,B)=0$ olduğundan B ve C A nın idealleridir. Buradan $A=B\dot{+}C$ dır.

$e \in V_1$ ise $Ae=Be$ ayrışamaz B-modüldür. $e' \in V_1$ ve $e' \neq e$ ise $Be \not\cong Be'$ olduğu açıktır. Buradan V_1 in elemanları B için pirimitif idempotentlerin bir tam sistemidir. Benzer şekilde V_2 nin C için pirimitif idempotentlerin bir tam sistemi olduğu gösterilir. Buradan $\Gamma(B)= \Gamma_1$ ve $\Gamma(C)=\Gamma_2$ elde edilerek ispat tamamlanır.

$A \neq 0$ bir sol Artinian cebir olsun.

A bir **Blokdur** $:\Longleftrightarrow$ $\Gamma(A)$ bağlantılı quiver.

(2.1.16)

A sol Artinian bir R-cebir olsun. Bu taktirde aşağıdakiler doğrudur.

(i) A Blokların çarpımı olarak birtek şekilde yazılır.

(ii) Her blok ayrışamaz bir cebirdir.

İspat :

(i) $\Gamma(A)$ quiverini bağlantılı quiverlerin ayrık birleşimi olarak $\Gamma(A)= \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} \Gamma_r$ yazalım. (2.1.15) ile B_i sol Artinian cebirler öyleki $\Gamma(B_i)=\Gamma_i$ ve $A=\dot{+}_{i=1}^{r} B_i$ dır. $\Gamma(B_i)= \Gamma_i$ bağlantılı quiverler olduğundan B_i cebirleri Bloktur.

(ii) (2.1.15) ile Blokların cebir olarak ayrışamaz oldukları açıktır.

A bir R-cebir olsun.

A ya **indirgenmiştir** denir:$\Longleftrightarrow$ $A/J(A)$ sonlu tane bölme cebirinin direkt toplamıdır. Bu bölümde verilen bir sol Artinian R-cebir A için A ile tektürlük belirli bir B temel cebirinin varlığını gösterelim. Bu bölümde A daima sol Artinian bir R-cebiri gösterilecektir.

(2.1.17)

$P_1,P_2,\ldots,P_n$ esas ayrışamaz A-modüller ve
$P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$

olsun. Bu taktirde;

${}_{A}\underline{M}(P)$ indirgenmiş cebirdir $\Longleftrightarrow$ Her $1 \leq i,j \leq n$ $(i \neq j)$ için $P_i \not\cong P_j$ dır.

İspat :

P projektif olduğundan (2.1.4) ile

$${}_{A}\underline{M}(P)/J({}_{A}\underline{M}(P)) \cong {}_{A/J(A)}\underline{M}(P/J(A)P) = {}_{A/J(A)}\underline{M}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} P_i/J(A)P_i\right)$$

dır. Yine (2.1.4) ile $P_i/J(A)P_i$ basit $A/_{J(A)}$-modüldür. Buradan ${}_{A}\underline{M}/J({}_{A}\underline{M}(P))$ bölme cebirlerinin direkt toplamıdır.
her $1 \leq i, j \leq n$ $(i \neq j)$ için için $P_i/J(A)P_i \not\cong P_j/J(A)P_j$ dır (2.1.4) ile her $1 \leq i,j \leq n$ $(i \neq j)$ için $P_i \not\cong P_j$ dır.

(2.1.18)

A bir R-cebir, $P \in \Lambda^{\ell}(A)$ direkt terim olsun. P_i ayrışamaz A-modüller ve $P = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ ise aşağıdakiler denktir.

(i) $P/_{J(A)P}$ sadık $A/_{J(A)}$-modüldür.

(ii) PA=A

(iii) Her esas ayrışamaz A-modül bir veya birden çok P_j ye izomorftur.

İspat :

(ii) koşulu $A/_{J(A)}(P+J(A)/_{J(A)}) = A/_{J(A)}$ ile denk olduğu açıktır.

(iii) koşulu ile her basit $A/_{J(A)}$-modül M için $\exists\, 1 \leq i \leq n$ öyleki $M \cong P_i/_{J(A)P_i}$ koşulu ile denktir.

O halde ispatı J(A)=0 yani A nın yarıbasit olması durumunda yapabiliriz.

(i) $:\Longrightarrow$ (ii)

${}^{o}A = PA \oplus Q$ olsun. $Q \neq 0$ ise ${}^{o}A$ Artinian olduğundan $\exists N \in \Lambda(Q) \setminus \{0\}$ öyleki NP=0 ve N minimaldır. Buradan $N \subset \mathrm{ann}_A(P)=0$ elde edilirki bu ise N nın minimal olması ile çelişir. O halde Q=0 ve A=PA elde edilir.

(ii) $:\Longrightarrow$ (iii)

PA=A ve $M \in {}_{A}\underline{M}$ ayrışamaz olsun. ${}^{o}A$ yarıbasit olduğundan (1.3.15) ile $\exists N \in \Lambda({}^{o}A)$ minimal öyleki $M \cong N$ dır. Buradan $N \in \Lambda^{\ell}(PA)$ minimaldır.

$P=Ae$, $P_i=Ae_i$, $e=e_1+e_2+\ldots+e_n$, $e_ie_j = \delta_{ij}e_i$ $(1 \leq i,j \leq n)$

olacak biçimde vardır.

(PA)$N\neq 0$ olduğundan özellikle $eN\neq 0$ dır. Buradan $\exists$ $1\leqslant i\leqslant n$ öyleki $e_iN\neq 0$ olup $P_iN\neq 0$ dır. P_i, N minimal $P_iN\neq 0$ olduğundan (1.4.10) dan $P_i \cong N$ dır. Buradan $\exists 1\leqslant i\leqslant n$ için $M \cong P_i$ elde edilir.

(iii)$:\Longrightarrow$(ii)

${}^{o}A=PA\oplus Q$ olsun. $Q\neq 0$ ise $\exists N\in\Lambda(Q)\setminus\{0\}$ öyleki N minimaldir. (iii) den $\exists 1\leqslant i\leqslant n$ öyleki $N\cong P_i$ dir. (1.4.10) ile $P_iN\neq 0$ olup $PN\neq 0$ elde edilir. Bu ise $PA\cap Q=0$ olması ile çelişir. O halde $Q=0$ yani $PA=A$ dır.

(ii)$\Longrightarrow$(i)

$a\in ann_A(P)$ olsun. O halde $aP=0$ ve $aPA=0$ dır. Buradan $aA=0$ olup $1_A\in A$ olduğundan $a=0$ elde edilir. Bu sonuçla P sadık bir A-modüldür.

(2.1.19)

A sol Artinian bir R-cebir. $P\in\Lambda({}^{o}A)$ öyleki

(i) $P\in\Lambda({}^{o}A)$ direkt terimdir.

(ii) $PA=A$

(iii) ${}_{A}\underline{M}(P)$ indirgenmiş cebirdir.

(i), (ii), (iii) koşullarını gerçekleyen $P\in\Lambda({}^{o}A)$ izomorfi hariç tektürlüdür.

İspat :

${}^{o}A$ Artinian cebir olduğundan $A/_{J(A)}$ yarıbasit ve Artiniandır.

$\{\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots,\bar{P}_n\}$ $\overset{\ell}{\Lambda}(A/_{J(A)})$ daki minimal ve basit modüllerin izomorfi sınıflarının sınıf temsilcileri olsun. (1.4.11) ile $\exists P_i$ esas ayrışamaz modülleri öyleki

$$P_i \cong P_i/_{J(A)P_i} \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

dır. $P=\oplus P_i$ olsun. Buna göre (2.1.17) ile ${}_{A}\underline{M}(P)$ temel cebirdir. Açık olarak böyle bir P izomorfi hariç tektürlüdür. Önermedeki (i),(ii),(iii) koşullarını gerçekleyen $P\in\overset{\ell}{\Lambda}(A)$ olsun. Bu taktirde $B:=M_n(P)$ ye A nın **temel cebiri** denir. P izomorfi hariç tek türlü olduğundan B izomorfi hariç tek türlüdür.

Örnek

A yarıbasit cebir olsun. (1.5.5) ile $\exists n_i > 0$, D_i bölme cebirleri öyleki $A_i = M_{n_i}(D_i)$ ve $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\ldots\dotplus A_r$ dır. Her $1\leqslant i\leqslant r$ için $A_i$ler basit olduğundan $P_i \subset A_i$ direkt terim öyleki $D_i \cong {}_{A}\underline{\underline{M}}(P_i)$ dır. Burada P_i ler basit A-modüller öyleki A nın direkt terimleridir.

$P := \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ olsun. Buradan $PA=A$ ve ${}_{A}\underline{\underline{M}}(P) \cong D_1 \dot{+} D_2 \dot{+} \ldots \dot{+} D_r$ indirgenmiştir. Sonuç olarak ${}_{A}\underline{\underline{M}}$ (P) A nın temel cebiridir.

(2.1.20)

A sol Artinian R-cebir B Anın temel cebiri olmak üzere aşağıdaki koşullar gerçeklenir.

(i) B sol Artiniandır.

(ii) $\exists\ \psi : \Lambda(A) \longrightarrow \Lambda(B)$ kafes izomorfi öyleki $\psi(J(A))=J(B)$, $I_1, I_2 \in \Lambda(A)$ için $\psi(I_1.I_2)=\psi(I_1).\psi(I_2)$ ve

(iii) $\Gamma(A) = \Gamma(B)$

dır.

İspat :

$P_1, P_2, \ldots, P_r$ esas ayrışamaz A-sol modüllerin izomorfi sınıflarının sınıf temsilcilerinin bir tam kümesi olmak üzere

$$P = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$$

olsun. Bu taktirde (2.1.19) ile $P \in \Lambda(A)$ direkt terim, $PA=A$ ve ${}_{A}\underline{\underline{M}}(P)=B$ A nın temel cebiridir. (2.1.8) ile $e, e_1, e_2, \ldots, e_r$ idempotent elemanları $P=Ae$, $e=e_1+e_2+\ldots+e_r$ $e_ie_j=\delta_{ij}e_j$ $(1 \leq i,j \leq r)$ olacak biçimde vardır. (2.1.19) ile $B={}_{A}\underline{\underline{M}}(P)={}_{A}\underline{\underline{M}}(Ae) \cong eAe$ R-cebir izomorfisidir. $N \in \Lambda^{\ell}(eAe)$ ise $AN \in \Lambda^{\ell}(A)$ dır. (2.1.9) ile $N \longrightarrow AN$ dönüşümü $\Lambda^{\ell}(eAe)$ ile $\Lambda^{\ell}(A)$ arasında sırayı koruyan bir dönüşümdür. Özellikle A sol Artinian ise $B \cong eAe$ olduğundan B sol Artiniandır.

Benzer şekilde $J \in \Lambda(eAe)$ $AJ \in \Lambda^{\ell}(A)$ ve $I \in \Lambda(A)$ ise $eIe \in \Lambda(eAe)$ dır. Daha fazla olarak $J \subset eAe$ olduğundan

$eAJAe=eAeJeAe=BJB=J$ ve $AeIeAe=AeAIAeA=AIA=I$

dır. Böylece her $J \in \Lambda(eAe)$, $I \in \Lambda(A)$ için

$\varphi(J):=AJA$ $\psi(I)=eIe$

yardımıyla tanımlanan $\varphi : \Lambda(eAe) \longrightarrow \Lambda(A)$, $\psi : \Lambda(A) \longrightarrow \Lambda(eAe)$ dönüşümleri, $\varphi\psi=1_{\Lambda(A)}$, $\psi\varphi=1_{\Lambda(eAe)}$ özelliklerini gerçekledikleri açıktır. ψ nın kafes izomorfi olduğu açıktır. Üstelik

$$\psi(I_1 I_2)=eI_1I_2e=eI_1AeAI_2e=(eI_1e)(eI_2e) = \psi(I_1)\psi(I_2)$$

dır.

$$J(A) = \bigcap_{\substack{M\in\Lambda(^oA) \\ ^oA/M \text{ basit}}} M \quad , \quad J(B) = \bigcap_{\substack{N\in\Lambda(^oB) \\ ^oB/N \text{ basit.}}} N$$

oldukları bilindiğine göre her $M\in\Lambda(^oA)$, $^oA/M$ basit modülü için $\psi(M)\in\Lambda^l(B)$ $^oB/\psi(M)$ basittir. Bunun terside doğrudur. Buradan $\psi(J(A))=J(B)$ elde edilir.

Şimdi $\Gamma(A)= \Gamma(B)$ olduğunu gösterelim.

$eP \cong B$ olduğundan $eP=B$ olarak alabiliriz. Buradan $B=eP= \bigoplus_{i=1}^{n} eP_i$, $eP_i=eAe_i=Be_i$ ayrışamazdır.

${}_A\underline{\underline{M}}(Be_i) \cong e_iBe_i = e_iAe_i \cong {}_A\underline{\underline{M}}(Ae_i) = {}_A\underline{\underline{M}}(P_i)$ lokal cebirdir.

Eğer $Be_i \cong Be_j$ ise (2.1.9) dan $Ae_i \cong Ae_j$ dır. Buradan $i=j$ elde edilir. Dolayısıyla

Be_1, $be_2,\dots,Be_r$ esas ayrışamaz B-sol modüllerin izomorfi sınıflarının sınıf temsilcilerinin tam sistemidir. Böylece $\Gamma(B)$ ile $\Gamma(A)$ aynı $\{e_1,e_2,\dots,e_r\}$ köşe kümelerine sahiptir.

$e_iJ(B)e_j=e_ieJ(A)ee_j=e_iJ(A)e_j$ olduğundan $\Gamma(A)=\Gamma(B)$ dır.

A sol Artinian bir R-cebir olsun.

A ya sonlu **gösterimlerin tipine sahiptir** denir $\Leftrightarrow$ Sonlu üretenli izomorf olmayan ayrışamaz A-sol modüllerin sayısı sonludur.

Sonlu gösterim tipine sahip olmayan bir R-cebire **sonsuz gösterim tipine** sahiptir denir.

A sol Artinian yarıbasit cebir ise (1.3.23) , (1.4.11) ile A sonlu gösterim tipine sahiptir.

BÖLÜM III

1. MODÜLLERİN TENSÖR ÇARPIMI VE İNDÜKLENMİŞ MODÜLLER

$M\in \underline{\underline{M}}_R$, $N\in {}_R\underline{\underline{M}}$ ve F MxN üzerindeki serbest Abelyen grup olsun. H, $m_1,m_2\in M$ $n_1,n_2\in N$, $r\in R$ olmak üzere;

$$(m_1+m_2,n_1) - (m_1,n_1) - (m_2,n_1)$$
$$(m_1,n_1+n_2) - (m_1,n_1) - (m_1,n_2) \qquad (3.1.1)$$
$$(m_1r,n_1) - (m_1,rn_1)$$

biçimindeki elemanların ürettiği alt grup olsun. F/H faktör grubuna M ve N nin **tensör çarpımı** denir.

ve $\quad M\otimes_R N:=F/_H$

ile gösterilir. $(m,n)+H:=m\otimes n$ yazarsak

$$M\otimes_R N=\langle\{ m\otimes n \mid m\in M, \ n\in N \}\rangle$$

olduğu açıktır. $m,m_1,m_2\in M$, $n,n_1,n_2\in N$, $r\in R$ ise aşağıdaki özellikler (3.1.1) ile hemen elde edilir.

$$m\otimes (n_1+n_2)=m\otimes n_1+m\otimes n_2$$
$$(m_1+m_2)\otimes n = m_1\otimes n+m_2\otimes n \qquad (3.1.2)$$
$$mr\otimes n=m\otimes rn$$

$M\in \underline{\underline{M}}_R$, $N\in {}_R\underline{\underline{M}}$ ve P bir Abel grubu olsun. Bir $f:MxN \longrightarrow P$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri gerçekliyor ise f'e bir **R-denge dönüşümü** denir. $r\in R$, $m_i\in M$, $n_i\in N$ $(i=1,2)$

(i) $f(m_1+m_2,n_1)=f(m_1,n_1)+f(m_2,n_1)$

(ii) $f(m_1,n_1+n_2)=f(m_1,n_1)+f(m_1,n_2)$

(iii) $f(m_1.r,n_1)=f(m_1,r.n_1)$

(3.1.3)

$M\in \underline{\underline{M}}_R$ ve $N\in {}_R\underline{\underline{M}}$, F MxN üzerindeki serbest Abelyen grup ve

$\nu : F \longrightarrow F/_H := M \otimes_R N$ ile tanımlanan kanonik grup epimorfisi olsun, $(m,n) \in M x N$ $i(m,n) := m \otimes n$ biçiminde tanımlanan $i = \nu o i_{MxN} : MxN \longrightarrow M \otimes_R N$ dönüşümü bir R-denge dönüşümüdür. Buna **doğal denge** dönüşümü denir.

İspat :

(3.1.2) özelliklerinin açık bir sonucudur.

(3.1.4)

$M \in \underline{\underline{M}}_R$, $N \in {}_R\underline{\underline{M}}$ ve P keyfi bir Abel grubu olsun. Bu taktirde her $f : MxN \longrightarrow P$ denge dönüşümü için $hoi = f$ olacak biçimde bir tek $h : M \otimes_R N \longrightarrow P$ grup homomorfisi vardır. Burada i (3.1.3) de verilen R-denge dönüşümüdür.

İspat :

P bir Abel grup, $f : MxN \longrightarrow P$ bir R-denge dönüşümü olsun. (F, i_{MxN}) serbest abel grubu olduğu için $goi_{MxN} = f$ olacak biçimde bir tek $g : F \longrightarrow P$ grup homomorfisi vardır. f bir R-denge dönüşümü olduğundan $H \leqslant Kerg$ dir. Buradan $ho\nu = g$ olacak biçimde bir $h : M \otimes_R N \longrightarrow P$ grup homomorfisi vardır. Buradan

$$f = goi_{MxN} = (ho\nu) i_{MxN} = ho\nu oi_{MxN} = hoi$$

elde edilir. g nin tek türlü oluşundan h nın tekliği elde edilir.

(3.1.5)

$M_i \in \underline{\underline{M}}_R$, $N_i \in {}_R\underline{\underline{M}}$, $(i=1,2)$ $f \in \underline{\underline{M}}_R(M_1, M_2)$ $g \in {}_R\underline{\underline{M}}(N_1, N_2)$ olsun. Bu taktirde

$$h(m \otimes n) := f(m) \otimes g(n)$$

yardımıyla tanımlanan $h : M_1 \otimes_R N_1 \longrightarrow M_2 \otimes_R N_2$ yardımıyla tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfisidir.

İspat :

$t(m,n) = f(m) \otimes g(n)$ yardımıyla tanımlanan $t : M_1 x N_1 \longrightarrow M_2 \otimes_R N_2$ dönüşümü bir R-denge dönüşümüdür. Dolayısıyla (3.1.4) den bir tek

$h : M_1 \otimes_R N_1 \longrightarrow M_2 \otimes_R N_2$ grup homomorfisi

$hoi = t$ olacak biçimde vardır. (3.1.4) de verilen h homomorfisine f ile g homomorfilerinin **tensör çarpımı** denir ve $f \otimes g$ ile gösterilir.

(3.1.6)

$M_1, M_2 \in \Lambda(M)$, $M \in \underline{\underline{M}}_R$, $M = M_1 \oplus M_2$ ve $N \in {}_R\underline{\underline{M}}$ ise

$$M \otimes_R N \cong M_1 \otimes N \oplus M_2 \otimes N \quad \text{(grup izomorfisi)}$$

dır.

İspat :

$\pi_i : M \longrightarrow M_i$ $(i=1,2)$ i. projeksiyonlar olsun. Buradan (1.2.11) ile $\pi_1+\pi_2=1$ ve $\pi_i\pi_j=\delta_{ij}\pi_i$ $(i=1,2)$ dır.

$\theta_i := \pi_i \otimes 1$ $(i=1,2)$ dönüşümleri $M \otimes_R N$ nın grup endomorfileridir. Daha fazla olarak

$$\theta_1+\theta_2=1 \quad \text{ve} \quad \theta_i\theta_j=\delta_{ij}\theta_i \quad (i=1,2)$$

oldukları açıktır. $T_i := \mathrm{Im}\,\theta_i$ olarak tanımlanırsa

$$M \otimes_R N = T_1 \oplus T_2$$

olduğu açıktır. Şimdi $T_i \cong M_i \otimes_R N$ olduğunu gösterelim.

$i : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ doğal denge dönüşümü olsun. $M_1 \times N \subset M \times N$ olduğundan $i_1 := i\downarrow M_1 \times N : M_1 \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ bir R-denge dönüşümüdür.

$\pi_1(M)=M_1$ olduğundan T_1 in tanımından $i_1(M_1 \times N)$ T_1 in gerenidir. Şimdi i_1 in $M_1 \otimes_R N$ için doğal denge dönüşümü olduğunu gösterelim. P bir Abel grubu ve $g : M_1 \times N \longrightarrow P$ bir denge dönüşümü olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_R N \arrow[drr, dashed, "g^*"] & & \\
M \times N \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\pi_1 \times 1"'] & & M_1 \times N \arrow[r, "g"'] & P
\end{tikzcd}$$

diyagramı ve (3.1.4) ile $g^* : M \otimes_R N \longrightarrow P$ dönüşümü

$$g^* i = g \circ (\pi_1 \times 1)$$

olacak biçimde tektürlü mevcuttur.

$$g_1 := g^* \downarrow T_1$$

ile tanımlanan $g_1 : T_1 \longrightarrow P$ dönüşümü bir grup homomorfisidir. Daha fazla olarak her $m_1 \in M_1$, $n \in N$ için

$$(g_1 i_1)(m_1,n) = g_1 i(m_1,n) = g^*(i(m_1,n)) = g_o(\pi_1 \times 1)((m_1,n)) = g(m_1,n)$$

olduğundan $g_1 i_1 = g$ elde edilir. (1.3.4) ile $M_1 \otimes_R N$ tensör çarpımı izomorfi hariç tektürlü olduğundan $T_1 \cong M_1 \otimes_R N$ elde edilir.

Benzer biçimde $T_2 \cong M_2 \otimes_R N$ elde edilir. Sonuç olarak

$$M \otimes_R N = T_1 \oplus T_2 \cong M_1 \otimes_R N \oplus M_2 \otimes_R N$$ (Sağdan dış direkt toplam)

dır.

(3.1.7)

$M \in {}_S\underline{\underline{M}}_R$ ve $N \in {}_R\underline{\underline{M}}$ olsun. $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$ için

$$s(m \otimes n) := sm \otimes n$$

ile S nın $M \otimes_R N$ üzerinde açıklanan etkisi ile $M \otimes_R N$ S-sol modüldür.

İspat :

$s \in S$, $(m,n) \in M \times N$ için

$$i_S(m,n) := sm \otimes n$$

ile $i_s : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ dönüşümü bir R-denge dönüşümüdür. (3.1.4) ile $\mathscr{g}_s(m \otimes n) = sm \otimes n$ olacak biçimde bir $\mathscr{g}_s : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$'e grup homomorfisi vardır. Bunu kullanarak $M \otimes_R N$ Abel grubunun S ile soldan etkisi S-sol modül özelliklerini gerçekler. Buradan $M \otimes_R N$ S-solmodüldür.

(3.1.8)

$N \in {}_R\underline{\underline{M}}$ ise $R \otimes_R N \cong {}_R N$

dır.

İspat :

$R \in {}_R\underline{\underline{M}}_R$ olduğundan $R \otimes_R N$ R-sol modüldür. Her $r \in R$, $n \in N$ için

$$h(r,n) := rn$$

yardımıyla tanımlanan $h : R \times N \longrightarrow N$ dönüşümü bir R-denge dönüşümüdür. (3.1.4) ile $f(r \otimes n) = h(r,n) = rn$ olacak biçimde bir tek $f : R \otimes_R N \longrightarrow N$ grup homomorfisi vardır. Öte yandan her n N için

$$\psi(n) = 1 \otimes n$$

yardımıyla $\psi : N \longrightarrow R \otimes_R N$ dönüşümü bir grup homomorfisidir. Ayrıca $\psi f = 1_{R \otimes_R N}$ ve $f\psi = 1_N$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Buradan f bir grup izomorfisidir. f nın R-modül homomorfisi olduğu açıktır.

(3.1.9)

$L \in \underline{\underline{M}}_R$, $M \in {}_R\underline{\underline{M}}_S$ ve $N \in {}_S\underline{\underline{M}}$ olsun. Bu taktirde

$$(L \otimes_R M) \otimes_S N \cong L \otimes_R (M \otimes_S N)$$

dır.

İspat :

(3.1.7) ile $L \otimes_R M \in \underline{\underline{M}}_S$ ve $M \otimes_S N \in {}_R\underline{\underline{M}}$ oldukları açıktır. O halde $(L \otimes_R M) \otimes_S N$, $L \otimes_R (M \otimes_S N)$ anlamlıdırlar. Her $\ell \in L$, $m \in M$, $n \in N$ için

$$\alpha((\ell \otimes m) \otimes n) = \ell \otimes (m \otimes n)$$

$$\beta(\otimes (m \otimes n)) = (\ell \otimes m) \otimes n$$

yardımıyla tanımlanan

$$\alpha : (L \otimes_R M) \otimes_S N \longrightarrow L \otimes_R (M \otimes_S N)$$

$$\beta : L \otimes_R (M \otimes_S N) \longrightarrow (L \otimes_R M) \otimes_S N$$

dönüşümlerinin grup homomorfileri oldukları açıktır. Ayrıca

$$\alpha\beta = 1_{L \otimes_R (M \otimes_S N)} \quad \text{ve} \quad \beta\alpha = 1_{(L \otimes_R M) \otimes_S N}$$

olduğundan α bir grup izomorfisidir.

(3.1.10)

M,N K-vektör uzayları olsun. Bu taktirde M K-K ikili modüldür. $k \in K$, $m \otimes n \in M \otimes_K N$ için

$$k(m \otimes n) = km \otimes n$$

ile K nın $M \otimes_K N$ üzerindeki etkisi açıklansın. Buna göre $M \otimes_K N$ K-vektör uzayıdır.

Eğer $\{ m_i \mid 1 \leq i \leq r \}$ ve $\{ n_j \mid 1 \leq j \leq s \}$ sırasıyla M ve N nin iki K-bazı ise $\{ m_i \otimes n_j \mid 1 \leq i \leq r, \ 1 \leq j \leq s \}$ $M \otimes_K N$ nın bir K-bazıdır.

İspat :

Yukarıda tanımlanan K nın $M \otimes_K N$ üzerindeki etkisi ile $M \otimes_K N$ nın bir K-vektör uzayı olduğu açıktır. $M = \bigoplus_{i=1}^{r} Km_i$ olduğu açıktır. (3.1.6), (3.1.8) ile

$$M \otimes_K N \cong \bigoplus_{i=1}^{r} N \quad \text{dır.}$$

Buradan $|M \otimes_K N:K| = |M:K|\,|N:K| = r.s$ dır. (3.1.2) ile $M \otimes_K N$ nın her elemanı

$$\sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r}} \alpha_{ij}(m_i \otimes n_j)$$

şeklinde yazılabilir. $M \otimes_K N$ nın K-boyutlu r.s olduğundan
$\{ m_i \otimes n_j \mid 1 \le i \le r, \quad 1 \le j \le s \}$ $M \otimes_K N$ nın K-bazıdır.

M,N K-vektör uzayı ise $M \otimes_K N$ yerine kısaca $M \otimes N$ yazılır.

Genel olarak $m \in M$ $m \neq 0$, $n \in N$ $n \neq 0$ için $m \otimes n = 0$ olabilir. Ancak $m \in M$ bir baz elemanı ve $n \in N$ için $m \otimes n = 0$ ise $n=0$ olmak zorundadır.

G bir sonlugrup $H \le G$ bir altgrup ve K bir cisim olsun. Buradan KH KG nın bir altcebiridir. Sonuç olarak KG KH-KH ikilimodüldür. $M \in {}_{KH}\underline{M}$ olsun. Bu taktirde

$$M^G := KG \otimes_{KH} M$$

(3.1.7) ile KG-sol modüldür. Burada $m \in M$, $a \in KG$, $g \in G$ için

$$g.(a \otimes m) = ga \otimes m$$

ile G nın M^G üzerindeki etkisi açıklansın. Bu taktirde lineer olarak G nın etkisi KG ye genişletilir. KG-modül M^G ye **M ile indüklenmiş modül** denir.

$V_1, V_2 \in {}_{KH}\underline{M}$, $\alpha \in {}_{KH}\underline{M}(V_1, V_2)$ için

$$\alpha^G := 1 \otimes \alpha$$

ile tanımlansın. Bu taktirde $\alpha^G \in {}_{KG}\underline{M}(V_1^G, V_2^G)$ olduğu açıktır. $N \in {}_{KG}M$ ise N_H N nin öperatör bölgesini KH ya kısıtlayarak elde edilen modülü gösterecek olursak $N_H \in {}_{KH}\underline{M}$ dır.

(3.1.11)

K bir cisim, G bir grup, $H \le G$ bir altgrup olsun. V_1, V_2, V ${}_{KH}\underline{M}$ ve $\alpha \in {}_{KH}\underline{M}(V_1, V_2)$

$$\mathbb{F}_o(V) := V^G \qquad \mathbb{F}_M(\alpha) := \alpha^G$$

ile tanımlanan $\mathbb{F} := (\mathbb{F}_o, \mathbb{F}_M) : {}_{KH}\underline{M} \longrightarrow {}_{KG}\underline{M}$ dönüşümü bir kovaryant funktordur.

(a) $V_i \in {}_{KH}\underline{M}$ $(i=1,2,3)$, $\alpha \in {}_{KH}\underline{M}(V_1, V_2)$, $\beta \in {}_{KH}\underline{M}(V_2, V_3)$ olsun. Bu taktirde

$$(\beta\alpha)^G = \beta^G \alpha^G$$

dır.

(b) $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \longrightarrow 0$ $_{KH}\underline{\underline{M}}$-kategorisinde bir tam dizi ise

$$0 \longrightarrow V_1^G \xrightarrow{\alpha^G} V_2^G \xrightarrow{\beta^G} V_3^G \longrightarrow 0$$ $_{KG}\underline{\underline{M}}$ kategorisinde bir tam dizidir.

(c) Eğer α bir monomorfi ise $V_2^G/V_2{}^G \cong V_3^G \cong (V_2/V_1)^G$ dır.

İspat :

(a) $a \in KG$, $v_1 \in V_1$ olsun.

$$(\beta^G \alpha^G)(a\otimes v_1) = \beta^G(1\otimes\alpha)(a\otimes v_1) = \beta^G(a\otimes\alpha(v_1)) = (1\otimes\beta)(a\otimes\alpha(v_1)) = a\otimes(\beta\alpha)(v_1).$$

olduğundan $(\beta\alpha)^G = \beta^G \alpha^G$ elde edilir.

(b) $0 \longrightarrow V_1^G \xrightarrow{\alpha^G} V_2^G \xrightarrow{\beta^G} V_3^G \longrightarrow 0$ $_{KG}\underline{\underline{M}}$ de tam dizi olduğunu göstermek için aşağıdakileri göstermek gerekir.

(i) α^G monomorfi

(ii) $\operatorname{Im} \alpha^G = \operatorname{Ker} \beta^G$

(iii) β^G epimorfi

T G nın H daki bir sol transversalı olsun. Buradan $r := [G:H]$ olmak üzere $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} t_i H$ ve G nın her elemanı $k \in H$, $t_i \in T$ $(1 \leq i \leq r)$ olmak üzere $t_i k$ şeklinde tektürlü yazılır. Burada $t_1 = 1$ olarak alınacaktır. Buradan

$$KG = \bigoplus_{t\in T} t(KH)$$

şeklinde yazılır. Buradan (3.1.6) ile

$$M^G = \bigoplus_{t\in T} (t(KH) \otimes_{KH} M)$$

elde edilir. $b \in KH$, $m \in M$ $t \in T$ için

$$tb \otimes m := t \otimes bm$$

yazımı ile $M^G = \bigoplus_{t\in T} t \otimes M$ olarak yazılabilir.
$b \in KH$ ve $t \in T$ için $tb \longrightarrow b$ dönüşümü ile $KHt \cong KH$ KH-modül izomorfisidir. (3.1.8) ile

$$t(KH) \otimes_{KH} M = KH \otimes_{KH} M \cong M$$

dır. Buradan $|M^G:K| = [G:H]\,|M:K|$ olduğu elde edilir. Daha fazla olarak M^G nın her elemanı $\sum_{t\in T} t \otimes u_t$ bir tek olarak yazılır. Eğer $m_1, m_2, \ldots, m_s$ M nın bir K-bazı ise

$\{t \otimes m_i \mid t \in T,\ 1 \leq i \leq s\}$ M^G nin bir K-bazıdır.

$N_1, N_2 \in {}_{KH}\underline{\underline{M}}$ ve $\gamma \in {}_{KH}\underline{\underline{M}}(V_1, V_2)$ için İm γ^G ve Ker γ^G yı oluşturalım. Yukarıdaki tartışma ile

$$N_i^G = \bigoplus_{t \in T} (t \otimes N_i) \quad (i=1,2)$$

olduğunu elde ettik.

$$\sum_{t \in T} t \otimes n_t \in \operatorname{Ker} \gamma^G \quad \text{ise} \quad \sum_{t \in T} t \otimes \gamma(n_t) = 0 \quad \text{dır.}$$

Buradan yine önceki tartışma ile her $t \in T$ için $\gamma(n_t)=0$ elde edilir. Buradan her $t \in T$ için $n_t \in \operatorname{Ker} \gamma$ dır. Bu sonuçla

$\operatorname{Ker} \gamma^G \subseteq (\operatorname{Ker} \gamma)^G$ elde edilir. $(\operatorname{Ker} \gamma)^G \subset \operatorname{Ker} \gamma^G$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\operatorname{Ker} \gamma^G = (\operatorname{Ker} \gamma)^G$ elde edilir. Benzer şekilde $\text{İm}\, \gamma^G = (\text{İm}\, \gamma)^G$ elde edilir. Bu ara yardımcı özellikleri kullanarak (ii), (i), (iii) yı gösterelim.

$\text{İm}\, \alpha = \operatorname{Ker} \beta$ olduğundan $\text{Im}\, \alpha^G = (\text{İm}\, \alpha)^G = (\operatorname{Ker} \beta)^G = \operatorname{Ker} \beta^G$ elde edilerek (ii) gösterilir. α monomorfi olduğundan

$$\operatorname{Ker} \alpha^G = (\operatorname{Ker} \alpha)^G = KG \otimes_{KH} \operatorname{Ker} \alpha = KG \otimes_{KH} 0 = 0$$

olduğundan α^G monomorfisidir. $\text{İm}\, \beta = V_2$ olduğundan

$\text{İm}\, \beta^G = (\text{İm}\, \beta)^G = V_2^G$ elde edilir. Buradan β^G epimorfidir. Dolayısıyla (i), (iii) elde edilir. Sonuç olarak ,

$$0 \longrightarrow V_1^G \xrightarrow{\alpha^G} V_2^G \xrightarrow{\beta^G} V_3^G \longrightarrow 0 \quad {}_{KG}\underline{\underline{M}} \text{ de bir tam dizidir.}$$

$$1_M^G := 1 \otimes 1_M : KG \otimes_{KH} M \longrightarrow KG \otimes_{KH} M\text{'e } 1_M^G (a \otimes m) = a \otimes 1_M(m) = a \otimes m$$

olduğundan $1_M^G = 1_{M^G}$ elde edilir. Buradan (a) özelliği ile $\mathbb{F}$ nın bir kovaryant funktor olduğu açıktır.

(c) α monomorfi ise $V_2/V_1 \cong V_3$ $\quad V_1^G/V_2^G \cong V_3^G \cong (V_2/V_1)^G$ elde edilir.

(3.1.12)

G bir grup, $H \leq G$ bir alt grup ve T H nın G deki sol transversalı olsun. (Yani her $x \in G$ için $|xH \cap T| = 1$)

a) Her $V \in {}_{KH}\underline{\underline{M}}$ ve $v \in V$ için

$$\eta(v) := 1 \otimes v$$

ile tanımlanan $\eta : V \longrightarrow (V^G)_H$ dönüşümü bir KH-monomorfidir. Daha fazla olarak V; $(V^G)_H$ nın bir direkt faktörüne izomorftur.

b) $W \in {}_{KG}\underline{\underline{M}}$, $w_t \in W$ olmak üzere

$$\varepsilon\Big(\sum_{t\in T}(t \otimes w_t)\Big) := \sum_{t\in T} t.w_t$$

ile tanımlanan $\varepsilon : (W_H)^G \longrightarrow W$ dönüşümü bir KG-epimorfidir. Daha fazla olarak

$$(\mathrm{Ker}\ \varepsilon)_H \oplus \eta(W_H) \cong ((W_H)^G)_H$$

c) $W \in {}_{KG}\underline{\underline{M}}$ ve $w \in W$ olmak üzere

$$\mu(w) := \sum_{t\in T} t \otimes t^{-1}w$$

ile tanımlanan $\mu : W \longrightarrow (W_H)^G$ dönüşümü bir KG-monomorfidir. μ T transversalının seçiminden bağımsızdır. Daha fazla olarak ($\mu(W))_H$; $((W_H)^G)_H$ nin bir direkt terimidir ve her $w \in W$ için $(\varepsilon\mu)(w) = |G:H|.\ w$ dır. Ayrıca $[G:H]$ K da tersinir ise $(W_H)^G = \mu(W) \oplus \mathrm{Ker}\varepsilon$ dır.

İspat :

(a) $v \in V$ ve $\eta(v) = 1 \otimes v = 0$ olsun. (3.1.8) deki tartışmadan $v=0$ elde edilir. buradan η bir monomorfidir. $V^{\backprime} := \bigoplus_{t\in T\setminus\{1\}} t \otimes V$ olmak üzere

$V^G = (1 \otimes V) \oplus V^{\backprime}$ olduğu (3.1.2) den açıktır.

$t \notin H$, ve $k \in H$ için $kt = t_1k_1$ $t_1 \in T$, $k_1 \in H$ $t^{\backprime} \notin H$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan her $h \in H$, $t \in T$, $v \in V^{\backprime}$ için

$$h(t \otimes v) = ht \otimes v = t_1h_1 \otimes v = t_1 \otimes h_1v \in V^{\backprime}$$

dır. Bu özellikle $V^{\backprime}$ ${}_{KH}\underline{\underline{M}}$ olduğu açıktır.
Özellikle $1 \otimes V$ $(V^G)_H$ nın direkt terimidir. Fakat V $\eta(V) = 1 \otimes V$ ile KH-izomorfizm olduğundan (a) elde edilir.

(b) $g \in G$ olsun. Her $t \in T$ için $gt = t_1h_1$ $t_1 \in T$, $h_1 \in H$ olacak şekilde vardır. Buradan

$$g\Big(\sum_{t\in T} t \otimes w_t\Big) = \sum_{t\in T} gt \otimes w_t = \sum_{t\in T} t_1h_1 \otimes w_t = \sum_{t\in T} t' \otimes h_1w_t'$$

elde edilir.

$$\varepsilon\Big(g\Big(\sum_{t\in T} t \otimes w_t\Big)\Big) = \varepsilon\Big(\sum_{t'\in T} t' \otimes (t'^{-1}.gt)w_t = \sum_{t'\in T} t't'^{-1}gtw_t$$

$$\sum_{t\in T} gtw_t = g\sum_{t\in T} tw_t = g\,\varepsilon(\sum_{t\in T}(t\otimes w_t))$$

ile ε bir KG-epimorfisidir. $\eta(W_H)\cap(\mathrm{Ker}\,\varepsilon)_H = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\sum_{t\in T} t\otimes w_t - (\sum_{t\in T} tw_t)\otimes 1\in \mathrm{Ker}\,\varepsilon$$

olduğundan

$$((V_H)^G)_H \cong (\mathrm{Ker}\,\varepsilon)_H \oplus \eta(W_H)$$

elde edilir.

(c) T' G nın H daki başka bir sol transversalı olsun. Buradan her $t\in T$ için $t=t'u_t$ $t'\in T'$, $u_t\in H$ olacak biçimde bulunabilir. Buradan

$$\sum_{t\in T} t\otimes t^{-1}w = \sum_{t'\in T'} t'u_t\otimes u_t^{-1}t'^{-1}w = \sum_{t'\in T'} t'\otimes u_tu_t^{-1}.t'^{-1}w = \sum_{t'\in T'} t'\otimes t'^{-1}w$$

elde edilir. Buradan μ seçilen transversalın seçiminden bağımsızdır. Her $g\in G$ için

$$\mu(gw) = \sum_{t\in T} t\otimes t^{-1}(gw) = \sum_{t\in T} g(g^{-1}t)\otimes(g^{-1}t)^{-1}w = g\sum_{t\in T} g^{-1}t\otimes(g^{-1}t)^{-1}w$$
$$= g\,\mu(w)$$

olduğundan μ bir KG-modül homomorfisidir. Buradan

$$((W_H)^G)_H = \bigoplus_{t\in T} t\otimes w_H \quad \text{ve}$$

$W' = \bigoplus_{t\in T\setminus\{1\}} t\otimes w_H \in {}_{KH}\underline{M}$ modülü $\mu(W_H)$ nın bir komplimentidir. Diğer bir değişle

$$\mu(w) = \sum_{t\in T} t\otimes t^{-1}w \in \mu(W)\cap W'$$

ise $w=0$ dır. Öte yandan $T\cap H = \{1\}$ olduğundan

$$\sum_{t\in T} t\otimes w_t - \sum_{t\in T} t\otimes t^{-1}1.w_1 \in W'$$

olduğundan

$$((W_H)^G)_H = W' \oplus (\mu(W))_H$$

elde edilir. Diğer yandan

$$(\varepsilon\mu)(W) = \sum_{t\in T} tt^{-1}w = [G:H].w$$

elde edilir. Eğer $[G:H]\in U(F)$ ise $\varepsilon' := [G:H]^{-1}\varepsilon$

yazılırsa $\mu \varepsilon' = 1$ dır. Buradan (1.2.11) ile

$$(W_H)^G = \text{İm}\,\mu \oplus \text{Ker}\,\varepsilon' = \mu(W) \oplus \text{Ker}\,\varepsilon$$

elde edilir.

§ 2. P> 0 KAREKTERİSTİKTE AYRIŞAMAZ GÖSTERİMLER

(3.2.1) Huppert, B.- Blackburn, N (1982)

K ($k(K)=p>0$) bir cisim ve G devirli olmayan bir p-grup olsun. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ için K-boyutlu $2n+1$ olan ayrışamaz KG-modül vardır.

İspat :

Her devirli olmayan p-grup için $G/_H \cong A \times A$, $|A| = p$ olacak biçimde bir faktör grubuna haiz olduğunu gösterelim. Bunu G nın mertebesi üzerinden indüksiyonla yapacağız. G nın Abel grubu olması durumunda Elemanter bölme teoreminden istenen özellik hemen elde edilir. Eğer G Abel değil ise $Z(G) \ntrianglelefteq G$ ve $G/_{Z(G)}$ devirli değildir. Buradan $|G/_{Z(G)}| < |G|$ olduğundan $\exists L \trianglelefteq G/Z(G)$ öyleki

$$(G/_{Z(G)})/_L \cong A \times A \qquad |A| = p$$

dır.

$\nu : G \longrightarrow G/Z(G)$ kanonik grup epimorfisi için $H := \nu^{-1}(L) \triangleleft G$ olarak alınırsa

$$G/_H \cong (G/_{Z(G)}) / (H/_{Z(G)}) \cong (G/Z(G))/_L \cong A \times A$$

elde edilir.

$$\overline{\nu}\Big(\sum_{g\in G} r_g . g\Big) := \sum_{g\in G} r_g . \nu(g)$$

yardımıyla tanımlanan $\overline{\nu} : KG \longrightarrow K(G/H)$ dönüşümü bir K-cebir epimorfisi olduğu açıktır. Buradan (1.2.2.) ile her $K(G/_H)$ modül bir KG-modül yapılabileceğinden G yı (p,p) tipinde kabul edebiliriz. Yani;

$$G = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \quad |g_i| = p \quad (i=1,2)$$

olsun. $n\in\mathbb{N}$, $n>0$ $|V:K|=2n+1$ olan bir K-vektör uzayı verilsin. $\{v_o,v_1,\dots,v_n,w_1,w_2,\dots,w_n\}$ V nın bir K-bazı olsun.

$$g_1w_i=w_i+v_i \quad 1\leq i\leq n\ ,\ g_2w_i=w_i+v_{i-1} \quad 1\leq i\leq n$$

$$g_1v_i=v_i \quad 0\leq i\leq n,\ g_2v_i=v_i \quad 0\leq i\leq n$$

ile G nın V üzerindeki soldan etkisi açıklansın. Bunu lineer olarak KG ye genişletebiliriz. Dolayısıyla $V\in {}_{KG}\underline{M}$ yapılır. Şimdi V nın ayrışamaz KG-modül olduğunu gösterelim.

$W:=\langle w_1,w_2,\dots,w_n\rangle$ olmak üzere $\pi:V\longrightarrow W$ K-projeksiyon olsun. Buradan $\mathrm{Ker}\,\pi=\langle v_o,v_1,\dots,v_n\rangle$ dır. $(g_1-1)w_i=v_i$ $(g_2-1)\ w_i=v_{i-1}$, $1\leq i\leq n$ olduğundan,

(g_1-1) W dan $\langle v_1,v_2,\dots,v_n\rangle$ 'e ve (g_2-1) W dan $\langle v_o,v_1,\dots,v_{n-1}\rangle$ 'e birer K-izomorfi belirlerler.

Eğer V ayrışabilir ise $\exists\, V_1,V_2\in\Lambda(V)\setminus\{0\}$ öyleki

$$V=V_1\oplus V_2$$

dır. $n_i:=|\pi(V_i):K|$ (i=1,2) ile tanımlansın. Buradan

$$W=\pi(V)=\pi(V_1)+\pi(V_2)$$

olduğundan

$$n=|W:K|\leq|\pi(V_1):K|+|\pi(V_2):K|=n_1+n_2$$

elde edilir.

$$|V_1:K|+|V_2:K|=|V:K|=2n+1\leq 2(n_1+n_2)+1<(2n_1+1)+(2n_2+1)$$

olduğu açıktır. Buradan $\exists$ $1\leq i\leq 2$ öyleki

$$|V_i:K|<2n_i+1$$

$$V_i/(V_i\cap\mathrm{Ker}\,\pi)\cong\pi(V_i) \quad \text{ve} \quad |\pi(V_i):K|=n_i$$

olduğundan $|V_i\cap\mathrm{Ker}\,\pi:K|<n_i+1$ dır. Fakat,

$$(g_1-1)V_i+(g_2-1)V_i\subset V_i\cap\mathrm{Ker}\,\pi$$

olduğundan

$$|(g_1-1)V_i+(g_2-1)V_i:K|\leq n_i$$

dır. Daha fazla olarak her $v\in V$ için $v-\pi(v)\in\langle v_o,v_1,\dots,v_n\rangle$ olduğundan her $g\in G$ için

$$(g-1)(v-\pi(v))=0$$

dır. Buradan her $g \in G$ için $(g-1)v=(g-1)\pi(v)$ elde edilir.
Buradan

$$(g_1-1)\pi(V_i)+(g_2-1)\pi(V_i) \subseteq (g_1-1)V_i+(g_2-1)V_i$$

olacağından

$$|(g_1-1)\pi(V_i)+(g_2-1)\pi(V_i):K| \leq n_i$$

elde edilir.

$(g_2-1)\pi(V_i) \subset (g_1-1)\pi(V_i)$ ve $n_i > 0$ olduğundan $\exists$ $k \leq n$ öyleki

$$\pi(V_i) \subset \langle w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\rangle$$

dır. Burada k bu koşulu gerçekleyen en büyük doğal sayı olsun. Buradan $\exists\, w \in \pi(V_i)$ öyleki $w=c_kw_k+\ldots+c_nw_n$ ve $c_k \neq 0$ dır.

$$(g_2-1)w=c_kv_{k-1}+\ldots+c_nv_{n-1} \notin \langle v_k,\ldots,v_n\rangle$$

dır. Fakat $(g_1-1)\pi(V_i) \subset \langle v_k,\ldots,v_n\rangle$ olması ile çelişir.

O halde ${}_{KG}\underline{M}$ kategorisinde 1,3,5,7,... K-boyutlu ayrışamaz KG-modüller bulunur. Buradan KG K-cebiri sonsuz gösterim tipine sahipdir.

Devirli p-grupları için durum farklıdır. Bu özelliği incelemeden önce p-grupların grup cebiri için genel bazı sonuçlarını gösterelim.

(3.2.2)

K ($k(K)=p > 0$) olan bir cisim ve G bir p-grup olsun.

(a) Basit KG-modüllerin sayısı bir tanedir.

(b) $J(KG)=\left\{ \sum_{g\in G} r_g g \;\middle|\; \sum_{g\in G} r_g=0 \right\}$

dır ve J(KG) KG nın biricik maksimal idealidir.

(c) I KG nın öz sol idelali ise $KG/_I \in {}_{KG}\underline{M}$ ayrışamazdır. Özellikle tek üretenli serbest KG-modüller ayrışamazdır.

(d) KG bir tek minimal sol ideale sahiptir. Bu

$$e = \sum_{g\in G} g \quad \text{olmak üzere} \quad Ke$$

dır.

(e) KG nın sıfırdan farklı her altmodülü ayrışamazdır.

İspat :

(a) (1.6.21) ile $KG=K.1_G \oplus J(KG)$ olduğundan $KG/J(KG) \cong K$ olup

$KG/_{J(KG)} \in {}_{KG}\underline{M}$ basittir. Buradan J(KG) maksimal idealdir. J(KG) maksimal sol (sağ) ideallerin arekesiti olduğundan J(KG) biricik maksimal idealdir. (1.8.4) ile basit KG-modüllerin sayısı bir tektir.

(b) $\varphi\left(\sum_{g\in G} r_g g\right) := \sum_{g\in G} r_g$

yardımıyla tanımlanan $\varphi : KG \longrightarrow K$ dönüşümü bir K-cebir epimorfisidir.

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \left\{ \sum_{g\in G} r_g g \;\middle|\; \sum_{g\in G} r_g g = 0 \right\} \in \Lambda(KG)$ olup $KG/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \cong K$

dır. Buradan $J(KG/\mathrm{Ker}\,\varphi) = 0$ ve $J(KG) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$
elde edilir. (a) ile J(KG) maksimal olduğundan $J(KG)=\mathrm{Ker}\,\varphi$ elde edilir.

(c) $KG/_I$ nın biricik maksimal altmodülü $J(KG)/_I$ olduğundan (a) ile $KG/_I$ ${}_{KG}\underline{M}$ ayrışamazdır.

(D) I, KG nın minimal sol ideali ise (a) ile G nın I üzerindeki gösterimi birimdir. Buradan $\exists$ $e \in KG$ öyleki her $g \in G$ için $ge=e$ ve $I=Ke$ dir.

$e = \sum_{g^*\in G} r_{g^*} g^*$ ise her $g \in G$ için $e=ge$ olduğundan

$$e = \sum_{g^*\in G} r_{g^*} g^* = ge = \sum_{g^*\in G} r_{g^*} g g^* = \sum_{t\in G} r_{g^{-1}t}\, t = \sum_{g^*\in G} r_{g^*} g^*$$

$$\Longleftrightarrow \; r_{g^{-1}t} = r_{g^*} \,, \quad g \in G \text{ dır.}$$

Buradan $\exists$ $r \in K$ öyleki $r_{g^*}=r$ $(g^* \in G)$ dır. Sonuç olarak $e = r\sum_{g\in G} g$ elde edilir. Buradan $I=Ke$ dır.

(e) L KG nın sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. Eğer L ayrışabilir ise $\exists$ $L_1, L_2 \neq 0$ olmak üzere $L = L_1 \oplus L_2$ olarak yazılsın. (d) ile bir tek I minimal sol ideali bulunabileceğinden

$I \subset L_1$ ve $I \subset L_2$ dır. Buradan $0 \neq I \subset I_1 \cap I_2$ çelişkisi elde edilir. O halde L ayrışamaz KG-modüldür.

(3.2.3)

$G = \langle g \rangle$ sonlu devirli grup ve K bir cisim olsun.

(a) Her ayrışamaz KG-modül KG nın bir epimorf resmidir.

(b) $k(K)=p>0$ ve G bir p-grup $(|G|=p^n,\ n>0$ olsun.

(i) Her $1 \leq i \leq p^n$ için KG, $|KG/_M : K| = i$ olan tam bir tane M altmodülüne sahiptir. Daha fazla olarak $M = J(KG)^i$ olup $J(KG)^i = (g-1)^i$ dır.

(ii) $1 \leq i \leq p^n$ için $V_i := KG/_{J(KG)^i}$ olsun. Bu taktirde V_i $|V_i : K| = i$ olan bir ayrışamaz KG-modül ve V_i,

$$gv_1 = v_1, \quad gv_j = v_j + v_{j-1} \quad (j=2,3,\ldots,i)$$

olacak şekilde bir $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ K-bazına sahiptir.

(iii) Her ayrışamaz KG-modül V için $\exists$ $1 \leq i \leq p^n$ öyleki $V \cong V_i$ dır.

İspat :

$V \in {}_{KG}\underline{\underline{M}}$ ayrışamaz olsun. $g \in G$, $v \in V$

$\sigma(v) = gv$

ile $\sigma : V \longrightarrow V$ K-lineer dönüşümü tanımlansın. t K-üzerinde belirsiz olmak üzere $f(t) \in K[t]$, $v \in V$ için

$$f(t).v = f(\sigma)v$$

ile tanımlanan skaler dönüşüm ile V K[t]- modül olacağı açıktır.

K[t] esas ideal bölgesi (Her ideali devirli) olduğundan V devirli K[t] altmodüllerin direkt toplamıdır [ ]. Fakat bir K[t] altmodül KG-altmodül olarak aynı olduğundan ve V ayrışamaz KG-modül olduğundan V devirli KG-modüldür. $V = \langle a \rangle$ olsun. Buradan $r \in KG$, için

$$\varphi(r) := ra$$

dönüşümü ile $\varphi : KG \longrightarrow V$ ye bir KG-epimorfidir.

(b) $\alpha\left(\sum_{i=0}^{m} a_i t^i\right) := \sum_{i=0}^{m} a_i g^i$ yardımıyla tanımlanan $\alpha : K[t] \longrightarrow KG$ dönüşümü bir K-cebir epimorfisidir. $\operatorname{Ker}\alpha = \langle (t-1)^{p^n} \rangle$ olduğu açıktır. Buradan (1.2.9) ile

$$KG \cong K[t]/_{\langle (t-1)^{p^n} \rangle}$$

dır. Böylece KG nın her altmodülüne karşılık K[t] de $\langle (t-1)^{p^n} \rangle \subset I$ koşulunu gerçekleyecek şekilde bir ideale karşılık getirilir. K[t] esas ideal bölgesi olduğundan

$$\exists f(t) \in K[t] \quad f(t) \mid (t-1)^{p^n} \quad \text{öyleki} \quad I = \langle f(t) \rangle$$

dır. Buradan $\exists$ $1 \leq i \leq p^n$ öyleki $f(t) = (t-1)^i$, ve $I = \langle (t-1)^i \rangle$ dır. Buradan

$$\alpha(I) = \langle (g-1)^i \rangle = KG(g-1)^i \quad \text{elde edilir.}$$

(1.6.21) ile $J(KG) = \sum_{i=1}^{p^n} K(g^i-1)$ dır.

Fakat $g^i-1=(\sum_{i=0}^{i-1} g^k)(g-1)$ olduğundan $J(KG)=KG(g-1)$ elde edilir. Böylece KG nın altmodülleri

$$KG(g-1)^i = J(KG)^i \quad 1 \leq i \leq p^n$$

olarak elde edilmiş olur. Dolayısıyla

$$|KG/_{J(KG)^i}:K| = |K[t]/_{\langle (t-1)^i \rangle}:K| = d^o((t-1)^i)=i$$

elde edilir. Böylece (i) nin ispatı tamamlanmış olur. (3.2.2)(c) ile $V_i=KG/_{J(KG)^i}$ ayrışamaz KG-modüldür.

$$v_i:=1+J(KG)^i, \quad v_j:=(g-1)^{i-j} \quad j=1,2,\ldots,i-1$$

ile tanımlansın. $\{v_1,v_2,\ldots v_i\}$ V_i nin bir K-tabanı olduğu kolaylıkla elde edilir. Ayrıca

$$gv_1=v_1, \quad gv_j=v_j+v_{j-1} \quad j=2,3,\ldots,i-1$$

olduğu açıktır.

(iii) $V \in {}_{KG}\underline{M}$ ayrışamaz olsun. (a) ile $V = KG/_W$ olacak şekilde bir $W \in \Lambda(KG)$ vardır. Buradan (i) ile

$$\exists\ 1 \leq i \leq p^n \quad \text{öyleki} \quad W=KG(g-1)^i$$

dır. Böylece $V \cong KG/_W = V_i$ elde edilir.

(3.2.3) Huppert, B. Blackburn, N. (1982) ,

K $(k(K)=p>0)$ bir cisim ve P G nın bir p-sylow altgrubu olsun.

(i) P devirli değil ise istenen her doğal sayıdan büyük ayrışamaz KG-modül vardır.

(ii) P devirli ise ayrışamaz KG-modüllerin sayısı en fazla $|G|$ mertebesi kadardır. Üstelik her ayrışamaz KG-modül KG nın bir epimorf resmidir.

İspat :

(i) P devirli değil ise (3.2.1) ile her $n>0$ için $|V_n:K| = 2n+1$ olan ayrışamaz KP-modül vardır. (3.1.2)(a) ile V_n $(V_n^G)_P$ nın bir direkt terimine KP-izomorfiktir. Buradan Krull-schmidt teoremi ile $\exists W \in \Lambda(V_n^G)$ ayrışamaz direkt faktör öyleki V_n W_P nın bir direkt faktörüne izomorfiktir. Buradan

$|W:K| \geq |V_n:K| = 2n+1$

elde edilir.

(ii) P devirli ise (3.2.3) ile $\exists\ v_1, v_2, \ldots,\ |V_i:K| = i$ ayrışamaz KP-modüller vardır öyleki her ayrışamaz KP-modül bunlardan birine izomorftur. Her ayrışamaz KG-modül V için $\exists\ j \leq |V:K|$ öyleki V, V_j^G nın bir direkt faktörü ile izomorfiktir. Gerçekten, P G nın p-sylow altgrubu olduğundan $[G:P]$ nın K da tersi vardır, (3.1.2)(c) ile V (V_p^G) nın bir direkt terimine izomorftur.

U_i ler ayrışamaz KP-modüller olmak üzere $V_p = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i$ şeklinde yazılsın. Krull-Schmidt Teoremi ile $\exists\ 1 \leq i \leq s$ öyleki V U_i^G nın bir direkt terimi ile izomorfiktir.

$|V:K| \geq |U_i:K|$ olduğu açıktır. Buradan V $j \leq |V:K|$ olmak üzere V_j^G nın bir direkt terimi ile izomorftur. V_j^G nın ayrışamaz direkt faktörlerinin izomorf olmayanların sayısı en fazla $[G:P]$ olduğundan

$|V_j^G :K| = [G:P]\cdot j$ dır. Buradan ayrışamaz KG-modüllerin sayısı en fazla $|G|$ kadardır. Yani KG K-cebiri sonlu gösterim tipine sahiptir. (3.2.3) ile her V_j KP-nın bir epimorf resmidir. (3.1.8) deki kovaryant funktor ile her V_j^G KP^G nın bir epimorf resmidir. Ancak $KP^G \cong KG$ olduğundan V_j^G KG-nın bir epimorf resmidir.

PROBLEMLER

1-) G devirli olmayan bir p-sylow altgruba sahip olan bir sonlu grup ise keyfi her derecede bir gösterime haizdir. K ($k(K)=p>0$) olan bir cisim olarak alınıyor.

Çözüm

$H=\langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a|=|b|=p$ olan bir grup için bunu göstermek yeter.

$$A:=\theta(a):=\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n x C \end{bmatrix} \quad B:=\theta(b):=\theta(a)+\begin{bmatrix} 0 & Z \\ 0 & J_n x D \end{bmatrix} \quad \ldots(*)$$

$$C:=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Z:=[\,010\ldots0\,],\ J_n:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & .1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve } D:=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. Buna göre $\theta \in \underline{R}(H,K)$ olduğu açıktır.

$$\theta(a)\theta(b) = \theta(b)\theta(a)$$

olduğu tanımlarından kontrol edilerek gösterilir. $k(K)=p>0$ olduğundan

$$\theta(a)^P = \theta(b)^P = I$$

dır. Şimdi biz θ gösteriminin ayrışamaz olduğunu gösterelim. (1.5.7), (1.8.1), (1.8.2) ve $\underline{R}(FG,F) \cong \underline{R}(G,F)$ özelliklerini kullanarak A ve B ile değişmeli olan her matrisin nilpotent veya birim (tersinir) olduğunu göstermek yeterlidir.

$$E=\begin{bmatrix} e & X \\ Y & E' \end{bmatrix} \qquad X:=[\,x_1x_2\ldots x_n\,] \qquad x_i=[\,x_1^i\ x_2^i\,]$$

$$Y:=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad y_i:=\begin{bmatrix} y_1^i \\ y_2^i \end{bmatrix} \qquad E':=\left[\,E_{ij}\,\right]_{2n\times 2n} \quad E_{ij} \quad 2.$$

(*) $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ olmak üzere $AxB = [\,a_{ij}B\,]=[a_{ij}(b_{kl})]$ matrisine A ile B matrisinin **tensorçarpımı** denir.

dereceden matrisler olarak verilsin.

$$B-A = \begin{bmatrix} 0 & Z \\ 0 & J_n \dot{x} D \end{bmatrix}$$

olduğu açıktır. Eğer E A ve B matrisleri ile değişmeli olsun. Buradan AE=EA ve BE=EB dır. Buradan E,

$$A-I= \begin{bmatrix} 0 & \\ & I_n xD \end{bmatrix}$$

matrisi ilede değişmelidir. Buradan

$$(I_n \dot{x} D)Y = 0, X(I_n \dot{x} D)=0, \quad E'(I_n \dot{x} D)=(I_n \dot{x} D)E'$$

dır. Birinci denklemden $Dy_i=0$ elde edildiğinden $y_i=[\, y_1^i \;\; 0]^t$ dır. Buradan $Y=[\, y_1^1 \; 0 \; y_1^2 \; 0 \ldots y_1^n \; 0\,]^t$ elde edilir.
İknici denklemden $x_i D=0$ elde edildiğinden $x_i=[\,0 \;\; x_2^i\,]$ dır. Buradan

$$X=[\, 0x_2^1 0 \ldots 0x_2^n\,] \qquad \text{(I)}$$

elde edilir. Üçüncü denklemden $E_{ij}D=DE_{ij}$ olduğundan

$$E_{ij}= \begin{bmatrix} e_{ij} & * \\ 0 & e_{ij} \end{bmatrix}$$

formundadır.

E B ile değişmeli olduğundan E $B-A=\begin{bmatrix} 0 & Z \\ & J_n \dot{x} D \end{bmatrix}$

ilede değişmelidir. Buradan

$$X(J_n \dot{x} D)=0, \quad zE'=eZ \quad \text{ve} \quad (J_n \dot{x} D)E'=YZ+E'(J_n \dot{x} D)$$

elde edilir. Birinci denklemden

$$e_{11}=e, \quad e_{12}=e_{13}=\ldots=e_{1n}=0$$

elde edilir. İkinci denklemden

$$E_{i1}D=Dy_1^{i-1} \quad \text{ve} \quad E_{ij}D=D_{i-1.j-1} \qquad 2 \leq i \leq n)$$

$$E_{ni}D=0 \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad Dy_n=0$$

elde edilir. Buradan

$$e_{i1}=y_1^{i-1}, \quad e_{ij}=e_{i-1j-1} \qquad 2 \leq i \leq n$$

$$e_{ni}=0 \quad \text{ve} \quad y_2^n=0 \quad 1 \leq i \leq n$$

a) $i < j$ ise

$$e_{ij} = e_{1,j-i+1} = 0$$

b) $j < i$ $\quad e_{ij} = e_{n,j+n-i} = 0$

elde edilir. Buradan $i \neq j$ için $e_{ij}=0$ ve $y_2^i=0$ $(1 \leq i \leq n)$ dır. Daha fazla olarak $e_{ii}=e$, $(i=1,2,\ldots,n)$ dır. Buradan aşağıdakilere sahibiz.

$$Y = [0\ 0\ \ldots\ 0]^t \qquad \text{II}$$

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i \neq j) \;, \quad E_{ii} = \begin{bmatrix} e & * \\ 0 & e \end{bmatrix} \qquad \text{III}$$

(I), (II) ve (III) ile E nın birinci sütünü, her çift sütün ve 1.satır dışında her tek satırın sıfır olmayan elemanı diogonal üzerinde e olarak elde edilir. Buradan $\det E = e^{2n+1}$ olarak elde edilir.

(i) $e=0$ ise $E^2=0$ olduğundan E nilpotentdir.

(ii) $e \neq 0$ ise $e^{2n+1} \neq 0$ ve $\det E \neq 0$ olduğundan $E \in U(M_{2n+1}(F))$ elde edilir.

2-) F bir cisim $k(F)=p>0$ ve $H=\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ $|a|=|b|=p$ olsun. $\varepsilon \in F$ keyfi verilsin.

$$\theta_\varepsilon(a) := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \theta_\varepsilon(b) = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan $\theta_\varepsilon : H \longrightarrow M_2(F)$ dönüşümü H nın bir gösterimidir.

ε, $\varepsilon' \in F$ olsun.

$$\theta_\varepsilon \cong \theta_{\varepsilon'} \Longleftrightarrow \varepsilon = \varepsilon'$$

dır.

$\Leftarrow$: Açıktır.

$\Rightarrow$: $\theta_\varepsilon \cong \theta_{\varepsilon'}$ ise $\exists\, \alpha \in M_2(F)$ $\quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ öyleki

$\theta_\varepsilon(a)\alpha = \alpha\theta_{\varepsilon'}(a)$ ve $\theta_\varepsilon(b)\alpha = \alpha\theta_{\varepsilon'}(b)$ ve α terisinirdir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eşitliklerinden elde edilebilen bağıntıları elde edelim.

$\alpha_{11}+\alpha_{21}=\alpha_{11}$ $\quad \alpha_{12}+\alpha_{22}=\alpha_{11}+\alpha_{12}$, $\quad \alpha_{11}+\varepsilon\alpha_{21}=\alpha_{11}$,

$\alpha_{12}+\varepsilon\alpha_{22}=\alpha_{11}\varepsilon'+\alpha_{12}$, $\quad \alpha_{22}=\alpha_{21}\varepsilon'+\alpha_{22}$

$\alpha_{22}=\alpha_{11}$ $\quad \alpha_{21}=0$, $\quad \varepsilon\alpha_{22}=\alpha_{11}\varepsilon'$,

$\det\alpha=\alpha_{11}\alpha_{22}=\alpha_{11}^2\neq 0$ olacağından $\varepsilon=\varepsilon'$ elde edilir.

3–) $G=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ $\quad k(K)=p>0$ bir cisim, $|a|=|b|=p$ olsun.
$|V:K|=3$ $\{v_1,v_2,v_3\}$ K-tabanı olsun.

$av_i=v_i \quad (i=1,2) \qquad bv_i=v_i \quad (i=1,2)$

$av_3=v_1+v_3 \qquad bv_3=v_2+v_3$

ile tanımlanırsa $V\in{}_{KG}\underline{\underline{M}}$ dır. Buradan

(i) $_{KG}\underline{\underline{M}}(V)\cong\left\{\begin{bmatrix} a' & 0 & b' \\ 0 & a' & c' \\ 0 & 0 & a'\end{bmatrix} \;\middle|\; a',b',c'\in K\right\}$

(ii) $N=\langle b\rangle$ ise $V_N=\langle v_1\rangle\oplus\langle v_2,v_3\rangle$ V_N nın ayrışamaz KN-modüllerinin bir parçalanışıdır.

Çözüm

$\alpha\in{}_{KG}\underline{\underline{M}}(V)$ keyfi verilsin.

$\alpha(v_1)=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3$

$\alpha(v_2)=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3v_3$

$\alpha(v_3)=\gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\gamma_3v_3$ olarak yazılır.

$\alpha(av_1)=a\alpha(v_1)$ olduğundan $\alpha(v_1)=a\alpha(v_1)$ dır. Buradan $\alpha_3=0$ olarak elde edilir.

$\alpha(av_2)=a\alpha(v_2)$ olduğundan $\alpha(v_2)=a\alpha(v_2)$ dır. Buradan $\beta_3=0$ olarak elde edilir.

$\alpha(av_3)=a\alpha(v_3)$ $\quad \alpha(v_1+v_3)=a\alpha(v_3)$ $\quad \alpha(v_1)+\alpha(v_3)=a\alpha(v_3)$ dır.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\gamma_1&=\gamma_1+\gamma_3 \\ \alpha_2+\gamma_2&=\gamma_2 \\ \alpha_3+\gamma_3&=\gamma_3 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &\alpha_1=\gamma_3 \\ &\alpha_2=\alpha_3=0 \end{aligned}$$ elde edilir.

$\alpha(bV_3)=b\,\alpha(V_3) \Rightarrow \alpha(V_2+V_3)=b\,\alpha(V_3) \Rightarrow \alpha(V_2)+\alpha(V_3)=b\,\alpha(V_3)$

dır. Buradan $\left.\begin{array}{l}\beta_1+\gamma_1=\gamma_1\\ \beta_2+\gamma_2=\gamma_2+\gamma_3\\ \beta_3+\gamma_3=\gamma_3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\beta_1=0\\ \\ \beta_2=\gamma_3\end{array}$

$\alpha_1=\beta_2=\gamma_3=:a^1$

$\Rightarrow \beta_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_3=0$ olsun. Buradan

$\gamma_1=:b^1,\ \gamma_2=:c'$

$$\theta(\alpha)=\begin{bmatrix} a^1 & 0 & b^1\\ 0 & a^1 & c^1\\ 0 & 0 & a^1\end{bmatrix}$$ ile tanımlanırsa

$$\theta:\ {}_{KG}\underline{\underline{M}}(V) \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} a^1 & 0 & b^1\\ 0 & a^1 & c^1\\ 0 & 0 & a^1\end{bmatrix} \;\middle|\; a^1,b^1,c^1\in K \right\} =:W$$ dönüşümü

bir izomorfidir.

$$W = KI \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & K\\ 0 & 0 & K\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ olduğundan

$$J(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K\\ 0 & 0 & K\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ olup $W/_{J(W)} \cong K$ dır.

Buradan ${}_{KG}\underline{\underline{M}}(V)/_{J({}_{KG}\underline{\underline{M}}(V))} \cong K$ cisimdir.

Buradan ${}_{KG}\underline{\underline{M}}(V)$ lokal cebirdir. (1.7.3) ile V KG-modül ayrışamazdır. Ancak $N=\langle b\rangle$ ise $\langle V_1\rangle$, $\langle V_2,V_3\rangle \in \Lambda(V_N)\setminus\{0\}$ dır. Ayrıca $V_N=\langle V_1\rangle\oplus\langle V_2,V_3\rangle$ olduğundan V_N ayrışabilir KN-modüldür. $\langle V_1\rangle$ ve $\langle V_2,V_3\rangle$ ün KN-modül olarak ayrışamaz oldukları K-üzerindeki boyutlarından açıktır.

4-) K $k(K)=p>0$ bir sonsuz cisim, $G=\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ $|a| = |b| = p$ olsun. Bu taktirde KG-sonsuz gösterim tipine haizder.

Çözüm

$\varepsilon\in K\setminus\{0\}$ keyfi verilsin.

θ_ε problem 2 deki gibi tanımlansın. Eğer θ_ε gösterimleri ayrışabilirse $\exists\ \theta_1,\theta_2 \in \underline{\underline{R}}(G,K)$ $\theta_2,\theta_1 \neq 0$ öyleki $\theta_\varepsilon = \theta_1 \oplus \theta_2$ dır. $2 = d^o\theta_\varepsilon = d^o\theta_1 + d^o\theta_2$ olduğundan $d^o\theta_1 = d^o\theta_2 = 1$ olmak zorundadır. Buradan

$$\theta\ (a) = \begin{bmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & b^1 \end{bmatrix}$$

formunda bir matris olacağından bu bir çelişkidir. Buradan K sonsuz olduğundan problem (2) ile $\underline{\underline{R}}(G,K)$ da ayrışamaz gösterimlerin sayısı sonsuzdur. $\underline{\underline{R}}(G,K) \cong \underline{\underline{R}}(KG,K)$ olduğundan $\underline{\underline{R}}(KG,K)$ de ayrışamaz gösterimlerin sayısı sonsuzdur. (1.8.3) ile KG-cebiri sonsuz gösterim tipine sahiptir.

5-) F bir cisim $k(F)=0$ olsun.

a) A sonlu boyutlu bir F-cebir, $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$, $x \in A$ olsun.

$\chi_\theta(x) = tr(\theta(x))$ ile tanımlanan $\chi_\theta : A \longrightarrow F$ dönüşümü F-lineerdir. Bu F-lineer dönüşümüne θ ile üretilen **karakter** denir.

(i) $\chi_\theta \in {}_F\underline{\underline{M}}(A,F)$ ve $\chi_\theta(1_A) = d^o\theta$ dır.

(ii) $\chi_\theta\ (J(A)) = 0$

(iii) $\theta,\psi \in \underline{\underline{R}}(A;F)$, $\theta \cong \psi \Rightarrow \chi_\theta = \chi_\psi$

(iv) $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$ ${}_A\underline{\underline{M}}$ üzerinde tam dizi ve A-modül olarak sonlu boyutlu iseler $\chi_M = \chi_N + \chi_P$ olduğunu gösteriniz. Burada M sonlu boyutlu olduğundan $\exists$ $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ öyleki $M_\theta \cong M$ dır. $\chi_\theta := \chi_M$ ile gösteriyoruz.

(v) M bir sonlu boyutlu A-modül ise $\exists$ N yarıbasit A-modül öyleki $\chi_M = \chi_N$ dır.

$X(A) = \langle \{ \chi_\theta \mid \theta \in \underline{\underline{R}}(A,F) \} \rangle$ (grup olarak üretilen) altgrubu tanımlayalım.

(vi) $X(A) = \langle \{ \chi_\theta \mid \theta$ indirgenemez $\} \rangle$

(vii) $X(A/_{J(A)}) \cong X\ (A)$

(viii) $A = B \dotplus C$ ise $X(A) \cong X(B) \oplus X(C)$

(ix) $X(M_n(F)) \cong \mathbb{Z}$

(x) F cebirsel kapalı ise X(A) indirgenemez gösterimler ile elde edilen karakterlerin ürettiği bir serbest $\mathbb{Z}$-modüldür.

b) F cebirsel kapalı bir cisim $\theta,\psi \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ indirgenemez ve $\alpha \in \underline{\underline{R}}(\theta,\psi)(\alpha \neq 0)$ ise $\exists$ $c \in F$ öyleki $\alpha = cI_n$, $n = d^o\theta$ dır.

Çözümler: (a)

(i) $a,b\in A$, $r\in F$, $\theta(a)=[a_{ij}]$ $\theta(b)=[b_{ij}]$ olsun.

$\chi_\theta(a+rb)= \ldots =tr(\theta(a+rb))=tr(\theta(a)+r\theta(b))$

$=tr([a_{ij}+rb_{ij}])=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+rb_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+r\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\chi_\theta(a)+r\chi_\theta(b)$

elde edilir. Buradan $\chi_\theta\in {}_F\underline{M}(A,F)$ elde edilir.

$\chi_\theta(1_A)=tr(\theta(1_A))=tr(I_n)=n=d^o\theta$ olduğu açıktır. (Burada θ F-cebir homomorfisi olduğundan $\theta(1_A)=I_n$ olduğunu kullandık)

(ii) Önce $a\in A$ nilpotent ise $tr(\theta(a))=0$ olduğunu gösterelim. $|A:F|=n$ olduğundan $A=\langle v_1,v_2,\ldots,v_n\rangle$ $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ F-tabanı olsun. Buradan $\alpha\in {}_F\underline{M}(A)$ ise $\alpha(v_i):=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}v_j$ biçiminde yazılabilir.

$\Psi(\alpha):=[\alpha_{ji}]$

ile tanımlanırsa $\Psi:{}_F\underline{M}(A)\longrightarrow M_n(F)$ dönüşümünün bir F-cebir izomorfisi olduğu açıktır. $a\in A$ nilpotent ise $\theta(a)\in M_n(F)$ de nilpotenttir. Buradan $\exists\ T\in {}_F\underline{M}(A)$ nilpotent öyleki $\Psi(T)=\theta(a)$ dır.

Şimdi $T(w_1)=0$, $T(w_i)\in\langle w_1,w_2,\ldots,w_{i-1}\rangle$ $(i=2,\ldots,n)$ koşullarını gerçekleyen bir $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ F-tabanının bulunabileceğini gösterelim. $T=0$ ise A nın her F-tabanı bu özelliği sağlar.

$T\neq 0$ olsun. T nilpotent olduğundan $\exists k\in\mathbb{N}^*$ öyleki $T^k\neq 0$ ve $T^{k+1}=0$ dır. $T^k\neq 0$ olduğundan $\exists\ x_1\in A$ öyleki $T^k(x_1)\neq 0$ dır. $w_1:=T^k(x_1)$ olarak tanımlanırsa $\{w_1\}$ lineer bağımsızdır.

$W_1:=\langle w_1\rangle$ olsun. $W_1=A$ ise ispat biter. O halde $W_1\neq A$ kabul edebiliriz.

$T(A)\subset W_1$ ise A nın $\{w_1\}$ 'i içeren her tabanı istenen koşulu gerçekler. $T(A)\not\subset W_1$ olarak kabul edebiliriz. Buradan $\exists$ $x_2\in A$ öyleki $T(x_2)\notin W_1$ dır. Buradan $\{T(x_1),w_1\}$ F-lineer bağımsızdır. $T^{n_1}(x_2)\notin W_1$ ve $T^{n_1+1}(x_2)\in W_1$ olsun. $w_2:=T^{n_1}(x_2)$ ile tanımlanırsa $T(w_2)\in W_1=\langle w_1\rangle$ elde edilir. Buradan

$\{w_1,w_2,\ldots,w_i\}$ $T(w_j)\in\langle w_1,w_2,\ldots,w_{j-1}\rangle$ $(1\leq j\leq i)$ koşulunu gerçekleyen lineer bağımsız bir küme olsun.

$W_i=\langle w_1,w_2,\ldots,w_i\rangle=A$ ise ispat biter. O halde $W_i\neq A$ kabu edebiliriz.

$T(A)\subset W_i$ ise $\{w_1,w_2,\ldots,w_i\}$ yi içeren A nın her F-tabanı istenen koşulu gerçekler. O halde $T(A)\not\subset W_i$ olarak alınabilir. $\exists\ x_{i+1}\in A$ öyleki $T(x_{i+1})\notin\langle w_1,w_2,\ldots,w_i\rangle$ dır.

$T^{n_i}(x_{i+1})\notin\langle w_1,\ldots,w_i\rangle$ ve $T^{n_i+1}(x_{i+1})\in\langle w_1,w_2,\ldots,w_i\rangle$ olacak biçimde seçilsin.

$w_{i+1}:=T^{n_i}(x_{i+1})$ olarak alınırsa $T(w_{i+1}) \in \langle w_1,w_2,\ldots,w_i\rangle$ ve $\{w_1,w_2,\ldots,w_i,w_{i+1}\}$ lineer bağımsızdır. $|A:F| < \infty$ olduğundan bu işleme devam edilirek sonlu adımda A nın bir tabanına ulaşılır.

$T(w_1)=0$, $T(W_i) \in \langle w_1,w_2,\ldots,w_{i-1}\rangle$ $(i=2,3,..,n)$ olsun.

$T(w_1) = 0$

$T(w_2) = \lambda_{12}w_1$

$T(w_3) = \lambda_{13}w_1 + \lambda_{23}w_2$

$\vdots$

$T(w_n)= \lambda_{1n}w_1 + \lambda_{2n}w_2 + \ldots + \lambda_{n-1n}w_{n-1}$ dır. Buradan $\exists$ $A \in M_n(F)$ tersinir matrisi öyleki

$$\psi(T)=A.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \lambda_{12} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & 0 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \lambda_{3n} \ldots 0 \end{bmatrix}.A^{-1} \text{ dır.} \qquad B:=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \lambda_{12} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & 0 \ldots 0 \\ \vdots & & \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \lambda_{3n} \ldots 0 \end{bmatrix}$$

şimdi $\chi_\theta(a) = tr\theta(a) = tr(\psi(T))=tr(ABA^{-1})$ dır.

$tr(AB)=tr(BA)$ olduğu açıktır. Buradan $tr(ABA^{-1})=tr(A(A^{-1}B))=trB=0$

elde edilir. Dolayısıyla $\chi_\theta(a)=0$ ....(*)

dır. $|A:F|<\infty$ olduğundan A sol(sağ) Artinian bir cebirdir. (1.6.13) ile $\exists$ $k>0$ öyleki $J(A)^k=0$ dır. Buradan $J(A)$ nın her elemanı nilpotentdır. (*) ile her $a \in J(A)$ için $\chi_\theta(a)=0$ dır. Buradan $\chi_\theta(J(A))=0$ elde edilir.

(iii) $\theta \cong \psi$ ise $\exists \alpha \in M_n(F)$ $(n=d^o\theta)$ öyleki

Her $a \in A$ için $\theta(a)= \alpha^{-1}\psi(a)\alpha(a)$ dır. Buradan $tr\theta(a))=tr\,\psi(a)$ elde edileceğinden $\chi_\theta(a)=\chi_\psi(a)$ elde edilir. Yani $\chi_\theta=\chi_\psi$ dır.

(iv) $N,M,P \in {}_{A}\underline{\underline{M}}$ sonlu boyutlu olduğundan

$\exists$ $\theta \in \underline{\underline{R}}(A,F)$ öyleki $M_\theta \cong M$ $N \in \Lambda(M)$ kabul edebiliriz.

$\{u_{r+1}, u_{r+2},\ldots,u_n\}$ N nin bir F-tabanı ve $\{u_1,u_2,\ldots,u_r,u_{r+1},\ldots,u_n\}$ M nın bir F-tabanı olsun. (1.8.3) deki ispat kopya edilerek $N = M_{\psi_1}$ ve $P = M/_N \cong M_{\psi_2}$ öyleki $\theta \cong \psi$ ve her $x \in A$ için

$$\psi(x)=\begin{bmatrix} \psi_1(x) & 0 \\ * & \psi_2(x) \end{bmatrix}$$

dır. Buradan $tr\,\psi(x)=tr\,\psi_1(x)+tr\,\psi_2(x)$ dır. Buradan

(iii) ile $\chi_M = \chi_N + \chi_p$ elde edilir.

(v) M sonlu boyutlu sol A-modül olduğundan M Artinian bir A-modüldür. M yarıbasit ise N=M alınarak ispat tamamlanır. M yarıbasit olmasın 1.3.25 ile $rad_A(M) \neq 0$ dır. (1.3.23) ile $rad_A(M/rad_A(M))=0$ dır. Buradan $M/rad_A(M)$ Artinian olduğundan (1.3.23) ile $M/rad(M)$ yarıbasittir. $|A:F| < \infty$ olduğundan A sol-Artinian bir F-cebirdir. Buradan $rad_A(M)=J(A)M$ dır. Fakat (ii) ile $\theta \in \underline{R}(A,F)$ için $\chi_\theta(J(A))=0$ dır. Buradan $N:=rad_A(M)$ ile tanımlanırsa $\chi_N=0$ dır. $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_N} M \xrightarrow{\nu_N} M/N \longrightarrow 0$ tamdizi olduğundan (iv) ile $\chi_M = \chi_{(M/N)}$ elde edilir.

(vi)

θ $\underline{R}(A,F)$ olsun. Buradan $|M_\theta:F| < \infty$ olduğundan (v) ile $\exists$ N yarıbasit A-modül öyleki $\chi_\theta = \chi_N$ dır.

N Artinian A-modül olduğundan $N = \oplus N_i (N_i \in \Lambda(N))$ (basit modül) olacak biçimde yazılır (1.3.22), (1.8.1), (1.8.3) ile $\exists$ $\theta_i \in \underline{R}(A,F)$ öyleki $N_i = M_{\theta_i}$ ve $N \cong M_\psi$ dır. (1.8.2) ile $\psi = \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \ldots \oplus \theta_m$ elde edilir. N_i'ler basit olduğundan θ_i ler basit gösterimlerdir. $\chi_N = \lambda_\psi = \chi_{\theta_1} + \ldots + \chi_{\theta_m}$ olduğu açıktır. Buradan $X(A) = \langle \{ \chi_\theta \mid \theta$ indirgenemez (basit) gösterim$\} \rangle$dır.

(vii) $\nu: A \longrightarrow A/J(A)$ kanonik F-cebir epimorfisi olsun. $\bar{\theta} \in \underline{R}(A/J(A),F)$ için $\theta := \bar{\theta} \circ \nu \in \underline{R}(A,F)$ olduğu açıktır. O halde $\psi(\bar{\theta})=\theta$ dönüşümü $\psi: \underline{R}(A/J(A),F) \longrightarrow \underline{R}(A,F)$ bir grup izomorfisi olduğu açıktır.

(vii) $\theta \in \underline{R}(A,F)$ için $\psi(\chi_\theta) = (\chi_\theta \downarrow B, \chi_\theta \downarrow C)$ ile tanımlanan $\psi: X(A) \longrightarrow X(B) \oplus X(C)$ dönüşümü bir grup izomorfisidir.

(ix) $M_n(F)$ yarıbasit bir F-cebirdir. Problem(6) ve (1.4.13) ile bütün minimal sol idealler izomorftur. (vi) ile $X(M_n(F))$ devirlidir. Buradan $\exists$ $\theta \in \underline{R}(A,F)$ $(A:=M_n(F))$ indirgenemez öyleki $X(A) = \langle \chi_\theta \rangle$ dır. $d^o\theta = n$ olsun. $m \in \mathbb{Z}$ ve $m\chi_\theta = 0$ olsun. Buradan $m\chi_\theta(1_A) = mn.1_F = 0$, $k(F)=0$ olduğundan $mn=0 \overset{n \neq 0}{\Longrightarrow} m=0$ elde edilir. O halde X(A) sonsuz devirli bir gruptur. Buradan $X(A) \cong \mathbb{Z}$ dır.

(x) F cebirsel kapalı olsun. Buradan $A/J(A) \cong M_{n_1}(F) \dotplus M_{n_2}(F) \dotplus \ldots \dotplus M_{n_r}(F)$ dır. $X(A) \cong X(A/J(A)) = \oplus X(M_{n_i}(F)) = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}$ elde edilir. Buradan X(A) $\mathbb{Z}$-serbest modüldür.

(b) θ, ψ indirgenemez olduğundan M_θ, M_ψ basit modüllerdir. $\alpha \neq 0$ olduğundan $\mu_\alpha \in {}_A\underline{M}(M_\theta, M_\psi) \setminus \{0\}$ dır. Buradan (1.3.13) ile $M_\theta \cong M_\psi$ ve α

tersinirdir. F cebirsel kapalı olduğundan $_A\underline{\underline{M}}(M_\theta)=F.1_{M_\theta}$ formundadır. Buradan $\exists$ $c\in F$ öyleki $\alpha=cI_n$ dır.

6-) $A:=M_n(D)$ (D bir bölme cebiri) olsun. $\varepsilon_{kk}:=[\delta_{ik}\cdot\delta_{jk}]$ $N_k:=A\,\varepsilon_{kk}$ ile tanımlansın. Bu taktirde

(i) $N_i\in\Lambda^\ell(A)$ minimal

(ii) $^oA=\oplus N_i$

(iii) Her $(i\neq j)$ için $N_i\cong N_j$

(öv) ^oA basit ve yarıbasit cebir.

(v) $_A\underline{\underline{M}}(N_i)\cong D$

Çözüm

$\varepsilon_{k\ell}:=[\delta_{ik}\cdot\delta_{j\ell}]$ ile tanımlansın. Açık olarak

$\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{rs}=\delta_{jr}\,\varepsilon_{is}$ olduğunu biliyoruz. $N_i\in\Lambda^\ell(A)$ olduğu açıktır.

$\alpha=[z_{jk}]\in M_n(D)$ keyfi olsun. Bu taktirde

$$\alpha=\sum_{j,k} z_{jk}\,\varepsilon_{jk}$$

dır. Bundan dolayı

$$\alpha\varepsilon_{ii}=\sum_j z_{ji}\,\varepsilon_{ji}$$

dır. Buradan

$N_i=\bigoplus_{j=1}^{n} D\,\varepsilon_{ji}$ ve $A=\oplus N_i$ (D-modül olarak) elde edilir.

$z_j\neq 0$ olmak üzere $\beta=\sum_k z_k\,\varepsilon_{ki}$ ise keyfi bir $w_t\in D$ için

$$\left(\sum_t w_t\, z_j^{-1}\,\varepsilon_{tj}\right)\beta=\sum_t w_t\,\varepsilon_{ti}\in N_i$$

yani $0\neq\beta\in N_i$ ise $A\beta=N_i$ dır. (1.3.12) ile N_i basittir. Daha fazla olarak $N_j=A\,\varepsilon_{jj}=A(\varepsilon_{ji}\,\varepsilon_{ij})=N_i\,\varepsilon_{ij}$ dır. (1.4.8) ile $N_i\cong N_j$ elde edilir. A nın yarıbasit olduğu açıktır. (1.4.11) ve (1.4.13) ile A basit cebirdir. Buradan (i) den (iv) e kadar olan kısım elde edilir. Her $z\in D$ için

$$\lambda_z(\alpha)=\alpha.z$$

yardımıyla tanımlanırsa $\lambda_z\in{}_A\underline{\underline{M}}(N_i)$ dır. Her bir $z\in D$ için $\lambda(z):=\lambda_z$ ile $\lambda: D\longrightarrow{}_A\underline{\underline{M}}(N_i)$ dönüşümü monomorfidir. $\varphi\in{}_A\underline{\underline{M}}(N_i)$ için $\varphi(\varepsilon_{ii})=\beta\,\varepsilon_{ii}$ diyelim.

$\varphi(\varepsilon_{ii})=\varphi(\varepsilon_{ii}^2)=\varepsilon_{ii}\varphi(\varepsilon_{ii})=\varepsilon_{ii}\,\beta\,\varepsilon_{ii}=z\,\varepsilon_{ii}$ dır. Buradan

$\varphi=\lambda_z$ elde edilir. Yani $D\cong{}_A\underline{\underline{M}}(N_i)$ dır.

7-) A bir komutatif Artinian R-cebir ise aşağıdakiler denktir.

(i) A sonlu gösterim tipine sahiptir.

(ii) A_i R-cebirler öyleki $A_i/_{J(A_i)}$ cisim, $\left| J(A_i)/_{J(A_i)^2} : A_i/_{J(A_i)} \right| \leq 1$ olmak üzere

$$A \cong A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_r$$

dır.

(iii) $F_i := A_i/J(A_i)$ cisimleri ve $n_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A \cong F_1[t]/\langle t^{n_1}\rangle \dot{+} \ldots \dot{+} F_r[t]/\langle t^{n_r}\rangle$$

dır.

Çözüm

(i)$\Longrightarrow$(ii): A sonlu gösterim tipine sahip olsun. Bu taktirde (1.7.1) ile $\exists\, Q_{i_r}$ $(1 \leq i \leq r)$ esas ayrışamaz A-modül olmak üzere ${}^{0}A = \bigoplus_{i=1}^{r} Q_i$ şeklinde yazılır. (2.1.8) ile $\exists\, e_i \in A$ pirimitif idempotentleri öyleki $Q_i \doteq Ae_i$ şeklindedir. A sonlu gösterim tipine sahip olduğundan bütün esas ayrışamaz A-modüller (izomorf olmayan) bunlardır.

$$Q_i \not\cong Q_j \quad (i \neq j) \text{ ve } A \text{ komutatif}$$

olduğundan, (2.1.11.) ile ${}_A\underline{\underline{M}}(Q_i, Q_j) = 0$ $(i \neq j)$ dır. Ayrıca $Q_i = Ae_i$ A komutatif olduğundan idealdir. $e_i \in Q_i$ de birim elemandır. Q_i R-cebirdir. Bunları A_i ile gösterelim. Buradan

$$A \cong A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \dot{+} A_r$$

elde edilir. $A_i/_{J(A_i)}$ basit $A/_{J(A)}$ -modüldür. A_i komutatif olduğundan $A_i/_{J(A_i)}$ cisimdir. $J(A_i)/J(A_i)^2$ $A_i/_{J(A_i)}$-modül olarak düşünebiliriz. $J(A_i)/_{J(A_i)^2}$ A_i Artinian olduğundan sonlu boyutlu bir $A_i/_{J(A_i)}$-vektör uzaydır.

O halde $J(A_i)/_{J(A_i)^2} = \langle a_1 + J(A_i)^2, \ldots, a_n + J(A_i)^2 \rangle$ $A_i/_{J(A_i)}$-vektör uzayı olarak verilsin. Buradan

$$J(A_i)/J(A_i)^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + J(A_i))(a_i + J(A_i)^2) \;\middle|\; \lambda_i \in A_i \right\}$$

$$= \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) + J(A_i)^2 \;\middle|\; \lambda_i \in A_i \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$J(A_i) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle + J(A_i)^2$$

elde edilir. $M=J(A)$, $N=\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ seçilerek Nakayama Lemması ile

$J(A_i)=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ elde edilir. Buradan

$J(A_i)=\langle a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\rangle + A_i a_n$

dır. $a_n \in J(A_i)$ olduğundan (1.6.5) ile

$$J(A_i)=\langle a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\rangle$$

elde edilir. Böylece (n-1) adımda $J(A_i)=\langle a_1\rangle$ elde edilir. Böylece $|J(A_i)/J(A_i)^2 : A_i/J(A_i)| \leqslant 1$ dır.

(ii) :⟹ (iii)

$A\cong A_1 \dotplus \dots \dotplus A_r$ $A_i/J(A_i)=:F_i$ cisim ve $|(J(A_i)/J(A_i)^2 : F_i| \leqslant 1$ olsun.

a) Eğer $|J(A_i)/J(A_i)^2 : F_i| = 0$ ise $J(A_i)=J(A_i)^2$ dır. A Aritinian olduğundan A_i ler Artiniandır. Buradan $J(A_i)$ Artinian ve $J(A_i)$ sonlu üretenlidir. Buradan cebirler için Nakayama Lemmasında $M=J(A_i)$ ve $N=0$ alınarak $J(A_i)=0$ elde edilir. O halde

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i t^i\right):=a_0$$

yardımıyla tanımlanan $f: F_i[t] \longrightarrow A_i$ dönüşümü bir F_i-cebir epimorfisidir. Burada $J(A_i)=0$ olduğundan $F_i=A_i$ alabiliriz. Buradan $\mathrm{Ker} f=\langle t\rangle$ olduğu açıktır.

Sonuç olarak $A_i \cong F_i[t]/\langle t\rangle$ elde edilir.

b) $|J(A_i)/J(A_i)^2 : F_i| = 1$ olsun.

Buradan $\exists$ $a\in J(A_i)$ öyleki

$J(A_i)/J(A_i)^2 = \langle a+J(A_i)^2\rangle$ $A_i/J(A_i)$-vektör uzayı olarak. Buradan

$$J(A_i)/J(A_i)^2 = \{(\lambda+J(A_i))(a+J(A_i)^2) \mid \lambda\in A_i\}$$
$$= \{\lambda a+J(A_i)^2 \mid \lambda\in A_i\}$$

elde edilir. Buradan

$$J(A_i)=\langle a\rangle + J(A_i)^2$$

dır. Cebirler için Nakayama Lemması ile

$J(A_i)=\langle a\rangle$ elde edilir. A_i Aritinian olduğundan $J(A_i)$ nilpotenttir. Buradan $\exists$ $n_i > 0$ öyleki

$a^{n_i}=0$ ve $a^{n_i-1}\neq 0$ dır. $f(t)\in F_i[t]$ için

$\psi(f(t)) = f(a)$

yardımıyla $\psi: F_i[t] \longrightarrow A_i$ dönüşmü bir F_i-cebir epimorfisidir. $f(t)=t^{n_i}$ polinomu a yı sıfır yeri kabul eden minimal polinom olduğundan $Ker\psi=\langle t^{n_i}\rangle$ dır. Buradan

$$F_i[x]/\langle t^{n_i}\rangle \cong A_i$$

elde edilir. Buradan $\exists\ n_i \in \mathbb{N}$ öyleki

$$F_i[t]/\langle t^{n_i}\rangle \cong A_i \quad (1 \leq i \leq r)$$

dır. Buradan

$$A \cong F_i[t]/\langle t^{n_1}\rangle \dot{+} \dots \dot{+} F_i[t]/\langle t^{n_r}\rangle$$

elde edilir.

(iii):$\Longrightarrow$ (i)

A ve B Artinian cebirler olmak üzere

$A \dot{+} B$ sonlu gösterim tipine sahiptir $\Longleftrightarrow$

A ve B sonlu gösterim tipine sahiptir.

Bunu göstermek zor değildir. O halde

Her $1 \leq i \leq r$ için $F_i[t]/\langle t^{n_i}\rangle$ cebirinin sonlu gösterim tipine sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\nu(f(t))=f(t)+\langle t^{n_i}\rangle$$

yardımıyla tanımlanan $\nu: F_i[t] \longrightarrow F_i[t]/\langle t^{n_i}\rangle$ dönüşümü bir F_i-cebir epimorfisidir.

$$B_i := F_i[t]/\langle t^{n_i}\rangle$$

ile tanımlansın.

$V \in {}_A\underline{M}$ sonlu üretenli ve ayrışamaz olsun. (1.2.2) ile $V \in {}_{F_i[t]}\underline{M}$ sonlu üretenli ve ayrışamazdır.

(HUNGERFORD, T.W. 1974) Esas İdeal Bölgesi üzerindeki modüllerin temel teormi ile $\exists\ p \in F_i[t]$ asal eleman öyleki

$$V \cong_{F_i[t]} F_i[t]/\langle p^n\rangle$$

dır. Buradan $ann_{F_i[t]}V = ann_{F_i[t]}\, {}^{F_i[t]}/\langle p^n\rangle$ $\qquad ann_{F_i[t]}V \in \Lambda(F_i[t])$ olduğundan $\exists\ f(t) \in F_i[t]$ öyleki

$ann_{F_i[t]}V = \langle g(t)\rangle$ dır. Buradan

$g(t)V = 0$ ve $\nu(g(t))V=(g(t)+\langle t^{n_i}\rangle)V = 0$

$\Rightarrow$ $(g(t) + \langle t^{n_i}\rangle)(F_i[t]/_{\langle p^n\rangle})=0$ elde edilir.

Buradan $(g(t) +\langle t^{n_i}\rangle)(1+\langle p^n\rangle) = g(t)+\langle p^n\rangle = \langle p^n\rangle$ ve $g(t)\in\langle p^n\rangle$ dır.

Buradan $p^n | g(t)$ elde edilerek

$\mathrm{ann}_{F_i[t]} V = \mathrm{ann}_{F_i[t]} (F_i[t]/_{\langle p^n\rangle}) = \langle p^n\rangle$

elde edilir.

B_i nın bir tek maksimal ideali olduğundan B_i lokal cebirdir. Dolayısıyla $\mathrm{ann}_A(V)\subset J(A) = \langle t\rangle/_{\langle t^{n_i}\rangle}$ dır. $p^n+\langle t^{n_i}\rangle\in \mathrm{ann}_A(V)$ olduğundan

$p^n +\langle t^{n_i}\rangle \in\langle t\rangle / _{\langle t^{n_i}\rangle}$ elde edilerek $p^n \in \langle t\rangle$ olduğu görülür. Buradan $t\,|\,p^n$ dır. t ve p asal elemanlar olduğundan $r\in U(F_i[t])$ olmak üzere $t=rp$ dır. Buradan

$\mathrm{ann}_{F_i[t]}(V) =\langle t^n\rangle =\mathrm{ann}_{F_i[t]}(F_i[t]/\langle t^n\rangle)$

elde edilir. $t^{n_i}V=(t^{n_i}+\langle t^{n_i}\rangle)V=0$ olduğundan

$t^{n_i}\in \mathrm{ann}_{F_i[t]}V=\langle t^n\rangle$ dır. Buradan $t^n\,|\,t^{n_i}$ yani $n < n_i$ elde edilir. Sonuç olarak her $V\in {}_A\underline{\underline{M}}$ ayrışamaz ve sonlu üretenli modül için $\exists\ n \leq k$ öyleki $V \cong F_i[t]/_{\langle t^n\rangle}$ dır. Buradan izomorf olmayan ayrışamaz ve sonlu üretenli modüllerin sayısı sonludur. Yani B_i sonlu gösterim tipine sahiptir.

KAYNAKLAR

ANDERSON,F.W., FULLER K.R.(1973) **Rings and Categories of Modules.** Springer-Verlag, New York, Heidelberg Berlin.

CURTIS,C.W., REINER,I. (1962) **Representation Theory of Finite Grups and Associative Algebras.** Wiley-Intersıcience New York.

DORNHOFF, L.(1971) **Grup Representation Theory,** Part A.B. Marcel Dekker Inc, New York.

GRAY, M. (1970) **A.Radical Approach to Algebra.** Addison-Wesley.

HIGMAN,D.G. (1954) **Indecomposition Representation at Characteristic p,** Duke Math. J21 (377-381)

HUNGERFORD,T.W. (1987) **Algebra** Springer-Verlag, New York.

HUPPERT,B-BLACKBURN,N (1982) **Finite Groups II.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

PIERCE,R.S. (1982) **Associate Algebras.** Springer-Verlag. New York Heidelberg Berlin.

SUZUKI,M. (1982) **Group Theory I.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

ÖZGEÇMİŞ

1963 yılında Rize-Çamlıhemşin'de doğan Sultan YAMAK 1975 yılında Pazar Alçılı İlkokulunu, 1978 yılında Rize Merkez Ortaokulunu ve 1981 yılında Pazar Lisesi'ni bitirdi. 1983 yılında Karadeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı. 1987 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans proğramına başladı. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Matematiğin Temelleri ve Lojik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi