

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

83317

ÇOK-BOYUTLU KAOTİK SİSTEMLERİN SENKRONİZASYONU VE  
HABERLEŞMEDE KULLANILMASI

Selahattin KINDIKOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
“Fizik Doktora”

Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10.03.1999

Tezin Savunma Tarihi : 22.04.1999

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Rifat YAZICI

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Ömer YAVAS

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Erhan COŞKUN

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Asım KADIOĞLU

TC. YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANİZASYON MERKEZİ

Trabzon 1999

## ÖNSÖZ

Doğal olayların incelenmesi, model sistemlerden yararlanılarak yapılabilmektedir. Oluşturulan modellerin çözümleri için kullanılan yöntemler doğrusal yaklaşımlardır. Gelişen teknolojiye paralel olarak, doğrusal olmayan yöntemlerde problem çözümlerinde başarı ile uygulanmaktadır.

Doktora çalışmam boyunca tez danışmanlığımı üslenip ilginç bir çalışma konusuna yönlendirilmemde büyük emeği olan hocam Doç. Dr. Rıfat YAZICI'ya ve Fizik Bölümü öğretim elemanı olmama rağmen, bir başka bölümün öğretim elemanı ile çalışmama fırsat veren başta Bölüm Başkanı hocam Prof. Dr. Ali İhsan KOPYA'ya ve yetişmemde emeği geçen hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmanın çeşitli aşamalarında her türlü eleştiri ve literatür eksikliğinin giderilmesinde büyük katkısı olan Kırıkkale Üniversitesi öğretim üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Ahmet Yaşar ÖZBAN'a ve çeşitli konularda emeği geçen araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu çalışma KTÜ Araştırma Fonunun 96.112.004.5 numaralı araştırma projesi ile maddi olarak desteklediği için KTÜ yönetimine teşekkürlerimi sunarım.

Selahattin KINDIKOĞLU

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	X
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Çalışmanın Amacı.....	3
1.3. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sistemler.....	5
1.3.1. Doğrusal Sistemlerin Kararlılık Analizleri.....	5
1.3.2. Lyapunov'un Kararlılık Kriteri.....	6
1.3.3. Lyapunov'un İkinci Yöntemi.....	7
1.3.4. Dinamik Sistemlerin Sayısal Çözümleri.....	17
1.3.5. Kayıp ve Diverjansı.....	19
1.4. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Kaotik İncelenmesi.....	23
1.4.1. Kaosa Sürüklenme.....	23
1.4.2. Başlangıç Koşullarına Duyar Bağımlılık.....	28
1.4.3. Lyapunov Üstelleri (Spektrumları).....	33
1.4.4. Kolmogorov Entropisi.....	40
1.4.5. Fraktal ve Lyapunov Boyut.....	41
1.4.6. Zaman Serileri.....	45
1.4.7. Poincare Haritaları.....	46
1.4.8. Güç Spektrumları.....	48
1.4.9. Senkronizasyon.....	51
1.4.10. Kuadratik Form.....	55

2. YAILAN ÇALIŞMALAR.....	61
2.1.1. 3-boyutlu Van der Pol-Duffing Osilatörü (VPDO) .....	61
2.1.2. 3-boyutlu Sistemlerde Lyapunov Spektrumu.....	66
2.1.3. VPDO'de Poincare Haritası .....	69
2.1.4. VPDO'de Güç Spektrumu .....	71
2.1.5. Lyapunov Üstelleri ile Poincare Alanları Arasındaki İlişki.....	71
2.2. Yüksek Boyutlu Sistemlerin Oluşturulması.....	74
2.2.1. Sistemin Diverjansı.....	76
2.2.2. Lyapunov Üstelleri ve Kolmogorov Entropisi.....	77
2.2.3. Tek Değişkenle Sürme.....	83
2.2.4. 2-değişkenle Sürme.....	85
2.2.5. 3-değişkenle Sürme.....	88
2.2.6. 4-değişkenle Sürme.....	92
2.2.7. 3-boyutlu Lorenz ve VPDO Sistemlerinin Senkronizasyonu.....	93
3. SONUÇLAR.....	98
4. ÖNERİLER.....	100
5. KAYNAKLAR.....	101
6. EKLER.....	108
ÖZGEÇMİŞ.....	111

## ÖZET

Genelde doğal olayların çoğu doğrusal olmayan sistemlerin davranışlarına benzer. Doğrusal sistemlerin davranışını kestirmek kolay olmasına rağmen, doğrusal olmayan sistemlerin davranışını kestirmek, hele kaotik davranış gösteriyorsa, oldukça zordur.

Çalışmada, ilk olarak doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin tanımları yanında, bir sistemin kararlılığı ve diverjans kavramları verildi. Kaos için evrensel olan yollar belirtilerek bilinen temel kaotik analiz yöntemlerinden Lyapunov spektrumlarına, Kolmogorov entropisine, Lyapunov ve fraktal boyutlarına, zaman serilerine, Poincare haritalarına ve güç spektrumlarına kısaca değinildi.

Daha sonra, kaotik Van der Pol-Duffing osilatörünün (VPDO) davranışları, bilinen kaotik analiz yöntemleri ile incelendi ve bu çeşit sistemlerle gizli haberleşmenin yapılabirliği araştırıldı. Pecora ve Carroll'un Rössler ve Lorenz sistemlerini kullanarak senkronizasyona getirdikleri yaklaşım, 3-boyutlu VPDO'ne uygulandı. Daha sonra, eldeki sistemle birden fazla bilginin bir anda karşı tarafa iletilmesi için, sistemin boyutu 4, 5, 6, 7 ve 8'e yükseltilerek elde edilen alt sistemlerin kaotik analizleri yapılarak senkronizasyon sonuçları bilgisayar benzetileri ile doğrulandı. Sistem boyutu ile Kolmogorov entropisi arasında uygun matematiksel bir bağıntı elde edildi. Oluşturulan yüksek boyutlu VPDO sistemlerinde, bir veya birden fazla değişkenle sürme durumlarında cevap alt sistemlerinin kararlılıkları için uygun Lyapunov fonksiyonları bulundu.

Son olarak, 3-boyutlu Lorenz ve VPDO sistemlerinin birbirleri ile senkron oldukları gösterildi.

**Anahtar Kelimeler:** Kaos, Garip Çeker, Lyapunov Üstelleri, Lyapunov ve Fraktal Boyut, Periyot Çiftlenimleme, Poincare Haritası, Entropi, Kolmogorov Entropisi, Ana Sistem, Süren Alt Sistem, Cevap Alt Sistemi.

## SUMMARY

### **Synchronizing Multiple-Dimensional Chaotic Systems and Using Them in Communication**

In general, most of natural phenomenon looks like the dynamic behavior of nonlinear systems. Although it is easy to predict the behavior of linear systems, to predict that of nonlinear systems becomes rather difficult, especially where it exhibits chaos.

In this work, first an introduction to linear and nonlinear system characteristics, the concepts stability and divergence are discussed in detail. Some known routes by which a nonlinear system can proceed to chaos are introduced, and to further illuminate the routes an outline of some additional system analysis methods such as Lyapunov spectrum, Kolmogorov entropy, Lyapunov and fractal dimensions, time series, Poincare maps, and power spectrum are presented.

After, the behavior of chaotic Van der Pol-Duffing oscillators (VPDO), selected as a sample chaotic dynamic system is investigated using known chaotic analysis methods, and then applied to the communication field to achieve more secure communication. Since such communication requires synchronization of transmitter with receiver the method proposed by Pecora and Carroll for synchronizing Rössler and Lorenz systems is applied to the 3-dimensional VPDO. To allow the transmission of more than one information at the same time, the dimension of the system used is increased to produce several driving signal, each of which is for one information. So, the drive system is divided into several subsystems to increase the dimension up to 4, 5, 6, 7, or 8, and the synchronization results are verified by the computer simulation. In addition, derived is a robust relationship between system dimension and Kolmogorov entropy. In multi-dimensional VPDO systems made appropriate Lyapunov functions have been found to establish the stabilization of response subsystems of the systems used in the case where there are one or more driving variables.

Finally, it has been shown that synchronization between 3-dimensional Lorenz and VPDO systems are achieved using single state variable.

**Key Words: Chaos, Strange Attractor, Lyapunov Exponents, Lyapunov and Fractal Dimension, Period-Doubling, Poincare Map, Entropy, Kolmogorov Entropy, Master System, Drive Subsystem, Slave Subsystem.**

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Bir RLC devresi.....	8
Şekil 2. Kuvvet altındaki yay, kütle ve susturucudan oluşmuş bir sistem....	10
Şekil 3. Yay, kütle ve susturucudan oluşan bir sistemin durum değişkenlerinin zamanla değişimi.....	11
Şekil 4. Yay, kütle ve susturucudan oluşan sistemin faz düzlemindeki durum değişimleri.....	11
Şekil 5. Faz düzleminde sabit enerji yüzeylerinin zamanla olan azalmaları...	13
Şekil 6. Enerji ve enerji azalmasının zamanla değişimi.....	13
Şekil 7. Pozitif tanımlı bir fonksiyonun gösterimi.....	16
Şekil 8. Lyapunov kararlılık kriterinin sağlanması.....	16
Şekil 9. x, y değişkenli durum uzayında başlangıç koşulları ile belirlenen dikdörtgen.....	20
Şekil 10. Bir sistemin kaos yollarından birisi olan $2^n$ şeklindeki evrensel kaos yolunun şematik olarak gösterimi.....	26
Şekil 11. 3-boyutlu Lorenz sistemine ait (a) xy, (b) xz, (c) yz (kaotik) ve (d) xy (periyodik) faz görünüşleri.....	30
Şekil 12. BVP osilatörüne ait faz görünümü.....	31
Şekil 13. Faz uzayında komşu iki yörüngenin zamanla gelişimleri.....	31
Şekil 14. Komşu iki yörüngenin başlangıç koşullarında $10^{-8}$ kadarlık bir farkın olması, kısa bir zaman sonra hissedilir boyutlara ulaşır.....	32
Şekil 15. Dinamik bir sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığı.....	34
Şekil 16. (57) denklem sistemi ile verilen Rössler sisteminin dört farklı C değeri için xy-faz çizimleri.....	35
Şekil 17. r sistem parametresine bağlı olarak Lyapunov üstelinin bir boyutlu hareketteki değişimi.....	37
Şekil 18. 3-boyutlu Lorenz sisteminde özel parametre değerleri için Lyapunov üstellerinin kararlılığı (Grassberger, 1983).....	38
Şekil 19. Kaotik çekicilere ilişkin Lyapunov üstellerinin ve Lyapunov boyutunun sistem parametresi ile değişimi (Romeiras, 1992).....	39
Şekil 20. Sistem boyutu ile Kolmogorov entropisinin değişimi. (a) Mackey-Glass denklemi, (b) Henon haritası (Grassberger, 1983).....	42

Şekil 21.	Sismik kayıtlardan elde edilen sonuçlar için Kolmogorov entropisinin sistem boyutu ile değişimi (Correig, 1997).....	43
Şekil 22.	(a) Normal, (b) Hasta bir insan için EEG işaretleri.....	46
Şekil 23.	Kaotik Lorenz sistemi için (a) x ve (b) y durum değişkenlerinin zamanla gelişimleri.....	47
Şekil 24.	Dinamik bir sisteme ait Poincare haritasının gösterimi (Ott,1981)..	48
Şekil 25.	BVP osilatörüne ait Poincare haritası (Rajaserker, 1993).....	49
Şekil 26.	Rössler sistemine ait güç spektrumu (Carroll, 1993).....	50
Şekil 27.	5-boyutlu Lorenz sisteminin $x_1$ durum değişkeni ile sürülmesi durumunda, $x - x'$ farkının sifıra gitmesi (He, 1992).....	60
Şekil 28.	3-boyutlu kaotik VPDO sisteminin devre diyagramı.....	62
Şekil 29.	3-boyutlu kaotik VPDO'de (a) $x_1$ , (b) $x_2$ ve (c) $x_3$ 'ün zamanla olan gelişimleri.....	64
Şekil 30.	3-boyutlu kaotik VPDO sisteminde (a) $x_1x_2$ , (b) $x_1x_3$ ve (c) $x_2x_3$ 'ün faz görünüşleri.....	66
Şekil 31.	3-boyutlu periyodik VPDO sisteminde (a) $x_1x_2$ , (b) $x_1x_3$ ve (c) $x_2x_3$ 'ün faz görünüşleri.....	68
Şekil 32.	3-boyutlu periyodik VPDO sistemine ait Poincare haritaları (a) Kaotik, (b) Periyodik durum.....	70
Şekil 33.	3-boyutlu VPDO sistemine ait güç spektrumları (a) Kaotik, (b) Periyodik çekici durumları.....	72
Şekil 34.	3-boyutlu kaotik Lorenz ve VPDO sistemleri için Lyapunov üstellerinin doğruluğunu gösteren değişim.....	73
Şekil 35.	5-boyutlu kaotik VPDO sisteminde (a) $x_1x_2$ , (b) $x_4x_2$ ve (c) $x_4x_1$ 'in faz görünüşleri.....	79
Şekil 36.	4-boyutlu kaotik VPDO sisteminde özel parametre değerleri için Lyapunov üstellerinin kararlılığı.....	79
Şekil 37.	Kaotik VPDO sisteminde, sistem boyutu ile Kolmogorov entropisinin değişimi (a) Benzeti, (b) Sayısal sonuçlar.....	82
Şekil 38.	Diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan en uygun adım uzunluklarının seçimi.....	83
Şekil 39.	5-boyutlu kaotik VPDO sisteminin $x_3$ durum değişkeni ile sürülmesinde $x_1 - x'_1$ , $x_2 - x'_2$ , $x_4 - x'_4$ ve $x_5 - x'_5$ farklarının sifıra gitmeleri.....	85
Şekil 40.	5-boyutlu kaotik VPDO sisteminin $x_3$ durum değişkeni ile sürülmesinde $x_1 - x'_1$ , $x_2 - x'_2$ , $x_4 - x'_4$ ve $x_5 - x'_5$ farklarının sifıra gitmeleri.....	86



Şekil 41.	8-boyutlu VPDO sisteminde süren ve cevap sistemlerin senkronizasyonu.....	94
Şekil 42.	Ana ve cevap sistemlerinin blok diyagramı.....	94
Şekil 43.	Birleştirilmiş 3-boyutlu Lorenz ve VPDO sistemlerinin x durum değişkeni ile sürülmesi durumunda (a) $y - y'$ ve (b) $z - z'$ farklarının sıfıra gitmeleri.....	97



## TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Lojistik haritada ( $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ ) $2^n$ şeklindeki dallanmalara karşı gelen r parametre değerleri	26
Tablo 2. Trigonometrik bir fonksiyon için b genlik parametresine ait dallanma değerleri(Kındıkoğlu, 1998).	27
Tablo 3. Sürekli otonom sistem çekicilerinin spektral çeşitleri(Baier.1991)	38
Tablo 4. Değişik sistemlerin Lyapunov üstelleri ve bunlarla ilişkili olan $h_K$ (Kolmogorov entropileri) ve $D_{KY}$ (Kaplan-Yorke) Lyapunov boyutları (Sano, 1985)	43
Tablo 5. Değişik sistemlerin Lyapunov üstelleri ve bunlarla ilişkili olan $h_K$ (Kolmogorov entropileri) ve $D_{KY}$ (Kaplan-Yorke) Lyapunov boyutları (Sano, 1985)	45
Tablo 6. 3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemlerinde değişik alt sistemler için Lyapunov üstelleri (Güemez, 1995)...	59
Tablo 7. 3-boyutlu kaotik VPDO Lyapunov üstellerinin H adım uzunluğu ile değişimi.....	63
Tablo 8. 3, 4 ve 5-boyutlu VPDO'lerine ait sistem parametreleri, Lyapunov üstelleri, Lyapunov boyutları ve Kolmogorov entropileri	69
Tablo 9. (121) denklem sisteminin denge noktaları ve Jakobiyenin özdeğerleri	76
Tablo 10. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-boyutlu kaotik VPDO'de $\alpha$ fiziksel sistem parametresine bağlı olarak sistemin diverjansı ile en küçük Lyapunov üstelinin çakıştırılması	77
Tablo 11. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-boyutlu kaotik VPDO sisteminde Kolmogorov entropisinin benzeti ve teorik değerleri ve Lyapunov boyutunun $H = 0.001$ adım uzunluğunda sistem boyutu ile olan değişimi	81
Tablo 12. 5-boyutlu kaotik VPDO $\lambda_i$ (Lyapunov üstelleri), $D_L(K-Y)$ (Lyapunov boyutu) ve $h_K$ (Kolmogorov entropisi)'nin $H$ (adım uzunluğu), $N$ (iterasyon sayısı) ve $S$ (alan genişliği) ile olan ilişkisi	81
Tablo 13. (121) sisteminin tek değişkenle sürülmesi durumunda, meydana gelen kararlı alt sistemler. Tablodaki değerler $m = 100$ , $\alpha=0.33478194$ , $\beta = 300$ fiziksel parametreleri ve $x_1 = -0.59$ , $x_2 = 0.00$ , $x_3 = . -0.59$ , $x_4 = 0.479$ ve $x_5 = 0.11$ başlangıç koşullarıyla elde edilmiştir	87

Tablo 14.	2-değişkenle sürme durumunda oluşan 3-değişkenli cevap alt sistemleri	89
Tablo 15	3-değişkenle sürme durumunda oluşan iki değişkenli cevap alt sistemleri	91
Tablo 16.	3-değişkenle sürme durumunda, süren alt sistemlerin kaotik olmalarını sağlayan Lyapunov üstelleri	92



## SEMBOLLER DİZİNİ

$b$	: Genlik
$C$	: Kondansatör
$da$	: Sonsuz küçük yüzey elemanı
$C_1, C_2$	: Kondansatör
$D_L$	: Lyapunov boyut
$D_F$	: Fraktal boyut
$D_\omega$	: Sisteme ait jakobiyen
$\text{div}F(x)$	: Bir vektör fonksiyonunun diverjansı
$E$	: Enerji
$F(x,y,z)$	: $x, y, z$ durum değişkenlerini içeren vektör alanı
$h_K$	: Kolmogorov entropisi
$H$	: Hamiltoniyen
$I$	: Akım
$I(\epsilon, T)$	: $T$ zamanında bir gözlemede kazanılan bilgi miktarı
$L$	: Bobin
$m = C_2/C_1$	: Van der Pol-Duffing osilatörü için fiziksel parametre değeri
$P(\omega)$	: Güç spektrumu
$P_i(t)$	: $t$ zamanındaki sistem yörüngesinin durumu
$P_i(0)$	: $t = 0$ zamanındaki sistem yörüngesinin durumu
$R$	: Direnç
$V$	: Gerilim
VPDO	: Van der Pol-Duffing osilatörü
$\delta$	: Feigenbaum sabiti
$\epsilon$	: Sonsuz küçük bir yarıçap
$x(\omega)$	: $x(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü
$\lambda_i$	: Lyapunov üstelleri
	: Durum değişkenlerinin zamana göre türevleri
$\tau$	: Benzeti periyodu
$\alpha = -(1+ar)$	: VPDO için fiziksel parametre değeri
$\beta = C_2 r^2 / L$	: VPDO için fiziksel parametre değeri
$\mu = (br^3)^{1/2} v$	: VPDO için fiziksel parametre değeri
$\phi$	: Akı
	: İki kuyulu potansiyel

## 1. GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Hayatta karşılaşılan her problem, bilim ve teknolojide zamanla sağlanan gelişmelerle aşılabilecektir. Buna örnek olarak, 1831 yılında Faraday,  $\omega$  frekansı ile dik olarak titreşen sıkışmış su dalgalarını gözleyerek,  $\omega/2$  frekanslı alt harmonikleri keşfetti. Daha sonraları, Lord Rayleigh bu deneyi tekrarladı ve "Theory of Sound" (1877) adlı makalesinde yaptığı çalışmaları açıkladı. Faraday'dan 150 yıl sonra, aynı deney gelişen modern tekniklerle Keolian tarafından tekrar yapılarak Faraday'ın sonuçları doğrulandı.

Kalp atışları elektrik devreleri ile benzer davranışlar gösterdikleri için 1920'li yıllarda Van der Pol tarafından modellendi. Bundan 20 yıl sonra yarıiletken teknolojisinde temel bir gelişme olarak kabul edilen Hall olayı ile iletkenlerdeki akım taşıyıcılarının çeşitleri belirlendi ve bunu izleyen yıllarda tranzistörlü elektrik devreleri ve takip eden yıllarda çok küçük hacim işgal eden yarıiletken yongaların ve hatta kaotik yongaların da bulunması bilgisayarlarda ve diğer teknolojik aletlerde hacim ve hız bakımından önemli gelişmelere yol açmıştır.

1963 yılında meteoroloji bilgini E. N. Lorenz, atmosfer olaylarını açıklığa kavuşturmak için, basit bir matematik modelle sayısal gözlemlerini yayınladı (Lorenz, 1963). Daha sonraki yıllarda üç tane diferansiyel denklemin oluşturduğu ve kendi adı ile söylenen bu model, doğrusal olmayan sistemlerin modern anlamda araştırılanların ilkinin oluşturmaktadır. 1971 yılında D. Ruelle ve F. Takens, kayıplı sistemlerde "garip çeker" ("strange attractor") ismini ilk kullananlar oldu (Eckmann,1985; Schuster, 1988). 1975 yılında kaos kelimesi Li ve Yorke tarafından ortaya atıldı. 1976'da R. M. May, karmaşık sistemlerin periyot çiftlenimi (period doubling bifurcation) ile kaosa girebileceklerini gösterdi (May, 1976). Daha sonra bunu evrensel bir sabit olarak isimlendiren ve kendi adı ile anılan Feigenbaum oldu (Feigenbaum,1980).

Kaotik dinamiğin varlığı Poincare, Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Levinson, Smale, Kolmogorov ve onun öğrencileri ile diğer araştırmacıların birçok önemli katkıları

ile matematik literatüründe tartışıldı. Doğadaki her sistemin bir elektrik devre karşılığı kolayca bulunduğundan dolayı, gerçek sistemlerin gösterdikleri davranışlar elektrik devreleri üzerinde izlenmektedir. Doğrusal olmayan iki denklemden meydana gelen Van der Pol (1889-1959) denklemi elektrik devrelerinde, mekanik sistemlerin harmonik osilasyonlarında ve kalp atışlarında uygulama alanı bulmaktadır. Diğer önemli, doğrusal olmayan denklem de Duffing denklemidir. Van der Pol denkleminin esası elektrik titreşimlerine dayanırken, Duffing denklemi mekanik titreşimlerinde birçok uygulama alanı bulmaktadır. Bu sebeple çalışma kaotik Van der Pol-Duffing osilatörü üzerinde yapılmıştır. Kaotik hareketlerin açıkça görüldüğü alanları aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür (Rasband,1990).

1. Türbülans, kaotik davranışın görüldüğü deterministik sistemlerin klasik bir örneğidir. Türbülansa geçiş problemi yetmişli ve seksenli yıllarda çeşitli kişiler tarafından araştırıldı. Rayleigh-Bernard yoğunlaşması olarak adlandırılan akışkanlardaki termal yoğunlaşma, türbülansa diğer bir örnektir. Lorenz'ın kaotik hareketlerdeki ilk uygulaması türbülansla ilişkili idi. Lorenz modeli tarihsel olarak önemli olup, Lorenz denklemleri kaotik dinamikler için önemli örneklerden biridir.

2. Süpersonik panel kanatları, süpersonik hızlı uçaklar ve roketler kaotik teknikle incelendi.

3. Bazı kimyasal reaksiyonlardan, özellikle Belousof-Zhabotinsky reaksiyonu kaotik dinamikleri ortaya koyduğu için çok önemlidir.

4. Optiksel olarak iki kararlı lazer boşlukları birçok kişi tarafından seksenli yılların başında incelendi. Bu tarihlerde sürekli bir dalga lazerinde kaosa ilişkin birçok ölçümler yapıldı.

5. Zor olarak yapılan kalp atışları veya anormal kalp atışları Glass ve arkadaşları tarafından tartışıldı. Kalbin dinamiklerine ilave olarak, kalbin gerçek yapısı fraktal olarak adlandırılan kendine benzer geometrik yapıların birkaç tekrarına sahiptir. Fraktal yapılar, doğrusal olmayan dinamiklerin ortak bir sonucudur. Kalbin büyümesine ve gelişmesine ilişkin hareketler henüz bilinmemektedir. Fraktal yapılar kalbin damar sisteminde ayrıntılı olarak mevcuttur. Bundan başka kalbin kendi kendine olan atmaları düzensiz bir fraktal şebeke yolu ile karıncıklara taşınır. Fizyolojide böyle birçok fraktal yapının olduğu bilinmektedir.

6. Kaotik dinamikleri açıklayan doğrusal olmayan devrelerin birçok örnekleri vardır. En tanınmış örneklerden biri, doğrusal olmayan titreşimlerin bir modeli olan ve Van der Pol tarafından tanımlanan osilatördür. Doğrusal olmayan devreler üzerinde çok sayıda çalışma yapılmış ve tartışılmış, bunların sonucunda, doğrusal olmayan sistemlerin modellenmesi sağlanmış ve onlara eşdeğer analog devreler üretilmiştir .

7. Ekolojik ve biyolojik büyüme dinamikleri, kaotik dinamiklerin varlığını ortaya koyan dinamik bir sistemin birer basit ve öğretici örnekleridir. Böyle bir denklem yıldan yıla çakışmayan biyolojik büyümelerin değişimlerini tanımlar. Bu denkleme ve onun önemine May işaret etmiştir.

8. Uyarılmış elastik sistemlerin titreşimleri, çift-kuyulu potansiyel sistemler için deneysel örnekler sağladı. Bu sistemler, deneysel ve teorik olarak birçok kişi tarafından incelenmiştir.

9. Kaotik dinamik modeller ters döndürülmüş jeomagnetik alanın temsili için önerildi ve incelendi.

10. Kaotik dinamik davranışın birçok çeşidi basit plazma sistemlerinde araştırıldı.

11. Birçok araştırmacı, beyin tarafından bilgilerin işlenmesinde kaotik sinirsel faaliyetlerin önemli rol oynadığını EEG verilerine dayanarak öne sürmüştür. Buna ilişkin bilgiler Nicolis (1995)'de görülebilir. Beyindeki sinir işaretlerinin kaotik oldukları bilinmektedir, ve bu yüzden onların potansiyel senkronizasyonları araştırılmaya değerdir.

## 1.2. Çalışmanın Amacı

Bir elektrik devresi, devre parametrelerinin yavaş değişimi altında ya bir osilatör veya bir yükselteç olarak çalışabilir. Parametrelerin kritik bir değeri, devre dinamiklerinin dallanması olarak adlandırılır. Sisteme ait parametre uzayında, dallanma değerlerinin bir kümesi biliniyorsa, buradan optimum işlem koşullarında çalışabilen bir osilatör tasarlanabilir. Doğrusal olmayan devre dinamiğinde ilgilenilen problemlerden bir tanesi, parametre uzayındaki dallanma değerleri kümesinin araştırılmasıdır.

Kaotik işaretler geniş bantlı ve gürültüye benzer olduğu için, gizli haberleşmede kullanılmasına olanak sağlamaktadır. Ayrıca sistem kontrolünün bu çeşit işaretlerle yapılabileceği son yıllarda yapılan ilginç araştırmalar sayesinde görülmüştür.

Kaotik işaretler gizli haberleşmede ilk olarak basit türden 3-boyutlu doğrusal olmayan terimli Lorenz ve Rössler sistemlerinde kullanıldı (Pecora, 1990). Daha sonraki bir çalışmada 3-boyutlu VPDO'ü kullanıldı (Muralı, 1993).

Bu tezde bir anda birden fazla mesajın iletilmesi amaçlandı. Bu amacı gerçekleştirmek için yüksek boyutlu kaotik sistemlerin oluşturulması kaçınılmaz oldu. 3-boyutlu kaotik VPDO devresinde durum değişkeni olarak davranan kondansatör veya bobin gibi elemanların sayılarının artırılması ile daha yüksek boyutlu, örneğin 4, 5, 6, 7, ve 8-boyutlu kaotik VPDO denklemleri oluşturuldu.

Elektrik devrelerinde enerji depolayan kondansatör ve bobin gibi devre elemanlarının sınırsız bir şekilde çoğaltılması ile sonsuz enerjili sistemlerin oluşturulmasını sınırlayan entropi kavramı ile sistem boyutu arasında uygun bir bağıntı elde edildi.

Birden çok pozitif Lyapunov üstelli sistemler hiperkaotik olarak adlandırılır. Bu sistemler bir pozitif Lyapunov üstelli 3-boyutlu sistemlere göre gizli haberleşmede daha güvenilir olarak kullanılmaktadır (Tamasevicius, 1997). Yüksek boyutlu VPDO ile bir anda 2, 3, ve 4 mesajın iletilmesi işlemi bilgisayar benzetileri ile gerçekleştirildi. Bu işlemler yapılırken cevap alt sistemlerinin asimtotik kararlı olmaları için, kendileri pozitif tanımlı ve türevleri negatif olan Lyapunov fonksiyonları bulundu. Aynı zamanda cevap alt sistemlerinin asimtotik kararlı olmaları ve senkronizasyonun sağlanmasının önemli bir kriteri olan cevap alt sistemlerinin negatif Lyapunov üstellerine sahip oldukları gösterildi.

Ayrıca, bu çalışmada 3-boyutlu Lorenz ve VPDO sistemleri arasında senkronizasyon işleminin yapılabileceği bilgisayar benzetileri ile gösterildi. Bu işlem, uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunarak doğrulandı.



### 1.3. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sistemler

Pratik olarak doğada doğrusal sistem yoktur, fakat çözümlerinin güçlüğünden dolayı doğrusal olmayan sistemler daha kolay olsun diye çoğu kez doğrusallaştırılarak çözümlenmeye çalışılmıştır. Buna örnek olarak, Ohm yasası verilebilir.

$$V = RI \quad (1)$$

Burada  $V$  gerilim,  $R$  direnç ve  $I$  de akımdır. Akımın alternatif olduğu varsayılırsa aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$I = A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t \quad (2)$$

Gerçek sistemlerde (1) denkleminin verdiği sonuçları elde etmek mümkün değildir. Çünkü gerçekte, akımla gerilim arasında

$$V = R_0 I + R_1 I^2 \quad (3)$$

denkleminle verilen doğrusal olmayan bir ilişki söz konusudur. Burada  $\omega_1$  ve  $\omega_2$  frekanslarına ilave olarak,  $V$  gerilimi  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  ve  $\omega_1 \pm \omega_2$  frekanslarını da içermelidir. Buradaki  $R_1$  katsayısı doğrusal olmayan bir katsayı olarak etkisini göstermektedir (Bai-Lin, 1990).

#### 1.3.1. Doğrusal Sistemlerin Kararlılık Analizleri

Cisimlerin hareketleri genellikle diferansiyel denklemler vasıtasıyla incelenir. Çözümlerin kararlılık ve kararsızlıklarını çözüm fonksiyonlarının davranışları ile elde ederiz. Fakat birçok problemde, örneğin doğrusal olmayan problemlerde diferansiyel denklemin çözümü çok zor olabilir. Bu gibi durumlarda diferansiyel denklemin tanımladığı hareketin kararlı veya kararsız olup olmadığı hakkında diferansiyel denklemin

Lyapunov kriterleri vasıtasıyla bilgi edinilebilir. Zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin asimtotik kararlılıklarının araştırılmasının birçok yolu vardır. Örneğin sürekli zamanlı bir sistem aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$\frac{d[x]}{dt} = [A][x] \quad (4)$$

Böyle bir sistemin orijininin asimtotik kararlılığının gerek ve yeter koşulu,  $A$  katsayılar matrisinin bütün öz değerlerinin negatif reel kısımlara sahip olmalarıdır. Zamanla değişmeyen doğrusal sistemlerin Lyapunov anlamındaki kararlılıklarının araştırılması için (4) denklemi ile verilen sistemi düşünelim. Burada  $x$ ,  $n$  boyutlu bir durum vektörü ve  $A$  da  $n \times n$  boyutlu sabit bir matristir.  $A$ 'nın tekil olmadığını (katsayılar matrisinin determinanı sıfırdan farklı) kabul edelim. Buradan sadece  $x = 0$ , bir denge durumudur. Zamanla değişmeyen doğrusal bir sistemin denge durumunun kararlılığı Lyapunov'un ikinci yönteminin kullanılması ile araştırılabilir.

### 1.3.2. Lyapunov'un Kararlılık Kriteri

A. M. Lyapunov (1857-1918), dinamik bir sistemin kararlılık yöntemini geliştirilmiş enerji düşüncesine dayanarak geliştirdi (Shinners, 1992). Lyapunov doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığının incelenmesini iki sınıfa ayırdı. Birinci yöntem sistemin diferansiyel denklemlerinin çözülebilirliğine dayandırılmıştır. Sistemin kararlılığı veya kararsızlığı bu çözümlerden belirlenebilir. Lyapunov'un ilk yaklaşımı olarak bilinen bu yaklaşım, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için önemli bir şey söylemez. Bununla beraber, Lyapunov kendi ilk yönteminde belirttiği gibi, sistemin çözümünü bir seri şeklinde elde ettikten sonra, ikinci yöntem kullanılarak kararlılık hakkında bilgi edinilebilir. Lyapunov, kararlılık bilgisinden sıkça yararlanarak doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini sağladı.

Lyapunov'un ilk yöntemini göstermek için, bir  $M$  noktasının civarında doğrusal olmamanın tek bir değere sahip olduğu (yani hiç bir histerisizin olmadığı) ve her dereceden türevlerin mevcut olduğunu kabul edelim. Doğrusal olmayan,  $y = f(x)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi Taylor serisine açılın.

$$y = y(M) + (x - M) \left( \frac{dy}{dx} \right)_M + \frac{1}{2!} (x - M)^2 \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_M + \dots + \frac{1}{n!} (x - M)^n \left( \frac{d^n y}{dx^n} \right)_M + \dots \quad (5)$$

Bu serinin ilk iki terimi, doğrusallığın sağlanamadığı nokta civarında doğrusal yaklaşıklık temsil etmektedir. Lyapunov şunu sağladı: Doğrusal yaklaşıkların diferansiyel denklemlerine karşı gelen karakteristik denklemin köklerinin gerçel kısımlarının sıfırdan farklı olmaları durumunda; doğrusal yaklaşıkların denklemleri doğrusal olmayan bir sistemin kararlılığı sorusuna daima doğru yanıt verir. Bu teoremi şu şekilde özetlemek mümkündür: Doğrusal olmayan bir denklemin, doğrusal bir yaklaşımı kullanılır ve buradan da ilgili sistemin kararlılığı tanımlanır. Doğrusallaştırılmış karakteristik denklemin köklerinin işaretlerine bakılarak, sistem hakkında aşağıda özetlenen sonuçlara varılır.

1. Kökler negatif ise, hareket ilgili nokta civarında kararlıdır.
2. Köklerden her hangi birinin gerçel kısımlarından biri pozitif ise, hareket ilgili nokta civarında kararsızdır.
3. Köklerin gerçel kısımları sıfır ise, tartışılmaya değer bir durum yoktur.

Burada şunu vurgulamakta yarar vardır; Lyapunov'un ilk yöntemi denge noktasının yakın civarında kararlılıkları belirlemede kullanılır.

### 1.3.3. Lyapunov'un İkinci Yöntemi

Bu yöntem, sistemin davranışlarını tanımlayan diferansiyel denklemin çözümüne sahip olmadan, sistemin kararlılığını tanımlamada kullanılır. Asimtotik kararlılığın araştırılmasında faydalanılan tekniklerden birisi de Lyapunov fonksiyonlarının kullanılmasıdır. Lyapunov fonksiyonları yüksek boyutlu kaotik sistemleri oluşturmak için kullanılmaktadır (Sano, 1985). Lyapunov'un ikinci yönteminde, belli özelliklere sahip kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamına benzeyecek şekilde durum değişkenlerinden bir fonksiyon oluşturulur ve fonksiyonun zamana göre türevi alınır. Oluşturulan fonksiyonun türevi, sistemin yörüngeleri boyunca negatif ise, sisteme asimtotik kararlıdır denir. Bu yöntemle örnek olarak direnç , kondansatör, ve bobinden oluşmuş elektriksel bir devre Şekil 1'de, ve yay, kütle, ve susturucudan oluşmuş mekanik bir düzen Şekil 2'de gösterilmiştir.

Şekil 1'de verilen RLC devresinin Lyapunov kararlılığı araştırılsın. Bu sistemi yöneten denklem  $q$  yüküne göre ikinci mertebeden olup aşağıdaki gibi yazılabilir (Chen, 1968).

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad (6)$$

Aşağıdaki

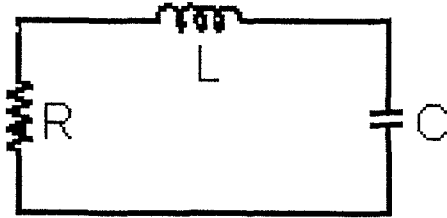
$$\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= i = \frac{dq}{dt} \end{aligned} \quad (7)$$

dönüşümler yardımıyla

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC} x_1 - \frac{R}{L} x_2 \end{aligned} \quad (8)$$

yazılabilir. Pozitif tanımlı ve türevi negatif olan Lyapunov fonksiyonu deneme-yanılma yöntemiyle aşağıdaki gibi seçilsin.

$$E = \frac{1}{2} L x_2^2 + \frac{1}{2C} x_1^2 \quad (9)$$



Şekil 1. Bir RLC devresi.

Fonksiyonun türevi alınıp ve uygun değerler yerlerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{dE}{dt} = Lx_2\dot{x}_2 + \frac{1}{C}x_1\dot{x}_1 \\ \dot{E} &= Lx_2\left(-\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2\right) + \frac{1}{C}x_1x_2 \\ \dot{E} &= -\frac{1}{C}x_1x_2 - Rx_2^2 + \frac{1}{C}x_1x_2 \\ \dot{E} &= -Rx_2^2 \leq 0.\end{aligned}\tag{10}$$

(10) denkleminde de görüldüğü gibi, enerji fonksiyonuna karşılık gelen ve Lyapunov fonksiyonu olarak seçilen (9) denkleminin zamana göre türevi negatiftir ve bu da, sistemin orijinine karşılık gelir.

(9) ve (10) denklemlerinden de görüldüğü gibi, Lyapunov'un asimtotik kararlılık teoreminin iki koşulu olan enerjinin pozitif tanımlı ve türevinin negatif olma koşulları sağlanmaktadır. (10) denklemi, R direnci ile orantılı olarak enerjinin veya gücün değişim hızını göstermektedir.

Şekil 2'de yay, kütle ve susturucudan oluşmuş sistem aşağıda verilen diferansiyel denklemle temsil edilir (Shinners, 1992).

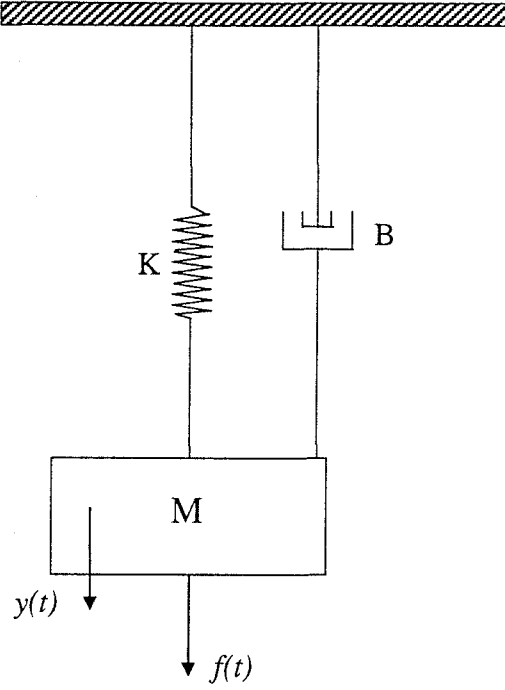
$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)\tag{11}$$

$M = K = B = 1$  ve  $f(t) = 0$  olarak alındığında (11) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 0\tag{12}$$

Durum değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t).\end{aligned}\tag{13}$$



Şekil 2. Kuvvet altındaki yay, kütle ve susturucudan oluşmuş bir sistem.

olur. Bu sistem iki tane birinci mertebeden diferansiyel denklemlerle tanımlanır.

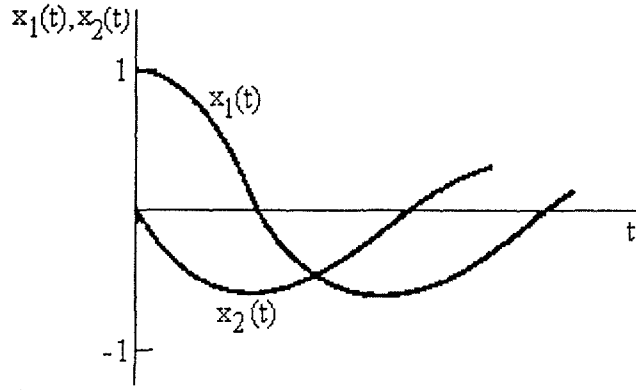
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) = \dot{y}(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \end{aligned} \quad (14)$$

Başlangıç koşulları

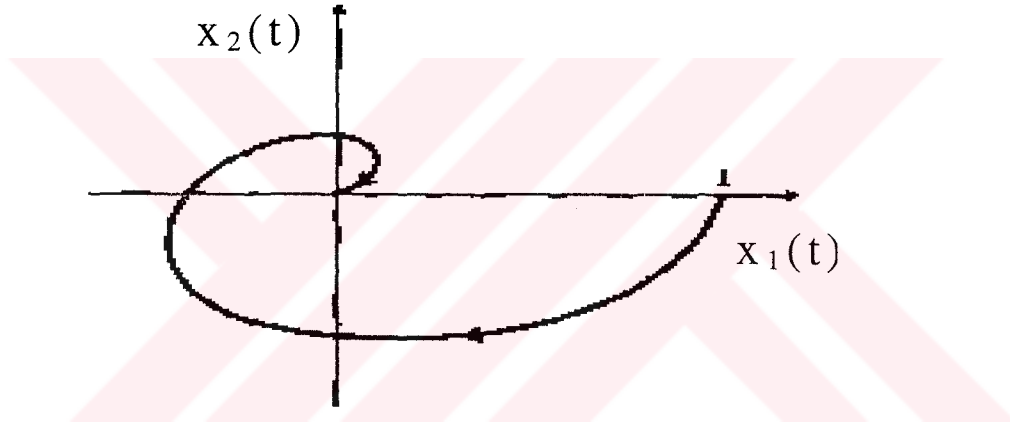
$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

şeklinde seçilirse bu basit sistem kolaylıkla çözülebilir.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.15 \exp(-t/2) \sin(0.866t + \pi/3) \\ x_2(t) &= -1.15 \exp(-t/2) \sin(0.866t). \end{aligned} \quad (16)$$



Şekil 3. Yay, kütle ve susturucudan oluşan bir sistemin durum değişkenlerinin zamanla değişimi.



Şekil 4. Yay, kütle ve susturucudan oluşan sistemin faz düzlemindeki durum değişkenleri.

(16) denklemlerinin zamanla olan değişimleri Şekil 3'te ve faz düzlemindeki değişimleri de Şekil 4'te çizilmiştir. Bu şekiller böyle basit bir mekaniksel sistemin dinamiklerini ve kararlılığını bütünüyle belirler, ve ayrıca sistemin kararlı olduğunu da gösterir.

Şimdi bu basit sisteme, enerji bakımından bakalım. Sistemde depolanmış enerji veya buna karşı gelen kendisi pozitif tanımlı ve türevi negatif olan Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilmiş olsun.

$$E(t) = \frac{1}{2} Kx_1^2(t) + \frac{1}{2} Mx_2^2(t) \quad (17)$$

Bu örneğimizde  $K = M = 1$  olarak alındığında,

$$E(t) = \frac{1}{2} x_1^2(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) \quad (18)$$

elde edilir. Bu toplam enerji, susturucuda ısı olarak aşağıdaki hızda kaybolur.

$$\dot{E}(t) = -B\dot{x}_1(t)x_2(t) = -Bx_2^2(t) \quad (19)$$

$B=1$  olduğu için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{E}(t) = -x_2^2(t) \leq 0 \quad (20)$$

(18) denklemi,  $x_1(t)x_2(t)$  düzleminde sabit olarak depo edilmiş enerji eğrisini tanımlar. Açıkça bu enerji eğrileri, böyle basit örnekler için Şekil 5 de görüldüğü gibi çemberlerdir. (20) denkleminin diğer önemli bir gözlemi, enerjideki değişim daima negatiftir ve bu sebepten dolayı Şekil 5'deki çemberler geçen zamanla küçülmektedir. (16) denklemleri, (18) ve (20) denklemlerinde uygun yerlere yazıldıklarında  $E$  ve  $\dot{E}$ 'nin zamanla olan değişimleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} E &= 0.667e^{-t} (\sin^2(0.866t) + \sin^2(0.866t + \pi/3)) \\ \dot{E} &= -1.333e^{-t} \sin^2(0.866t). \end{aligned} \quad (21)$$

$E$  ve  $\dot{E}$ 'nin zamanla olan değişimi Şekil 6'da gösterilmiştir. Şekil 5 ve 6'nın karşılaştırılması ile görülmektedir ki, sistemde depolanan toplam enerji, zaman sonsuza yaklaştığında sıfıra yaklaşır. Bu da, sistemin asimtotik kararlı olduğunu gösterir. Bununla orijini kaplayan bir R durum bölgesi içerisinde herhangi bir  $x(t)$  noktasından orijine geri dönlür.

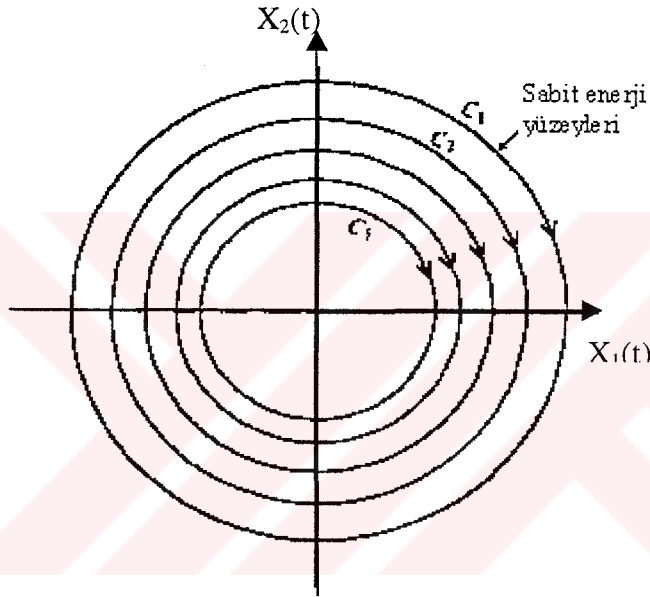
Doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığı, durum vektörünün giriş türü ve genliği ile değişen özel bir durum uzayına bağlıdır. Bundan dolayı, doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığı aşağıdaki gibi bölgesel olarak da sınıflandırılabilir.

1. Yerel veya küçük bölgedeki kararlılık,

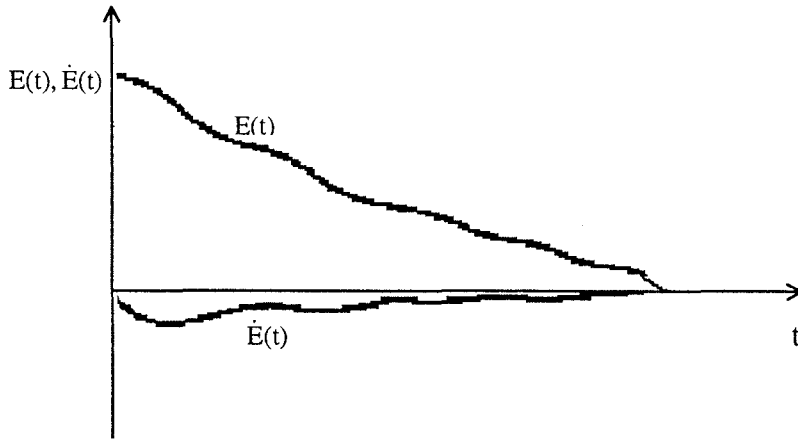


2. Sonlu kararlılık,
3. Genel veya büyük bölgedeki kararlılık.

Doğrusal olmayan bir sistem, uygulanan küçük bir uyardan sonra hep aynı nokta civarında kalıyorsa, yerel olarak kararlıdır denir. Sonlu kararlılık, sonlu boyutlara sahip bir  $R$  bölgesindeki herhangi bir  $x(t)$  noktasından, hep aynı noktaya sistemin dönüşünü gösterir. Eğer  $R$  bölgesi tüm sonlu bir durum uzayını kapsarsa, o sisteme genel kararlıdır denir. Bu incelemeler, aşağıdaki gibi seçilen enerji fonksiyonuna dayanılarak yapılır.



Şekil 5. Faz düzleminde sabit enerji yüzeylerinin zamanla olan azalmaları.



Şekil 6. Enerji ve enerji azalmasının zamanla değişimi .

$$E(t) = \frac{1}{2} x_1^2(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) \quad (22)$$

Bu fonksiyon çok ilginç iki özelliğe sahiptir. Bunların birincisi,  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ 'nin sıfırdan farklı bütün değerleri için fonksiyonun pozitif olmasıdır. İkincisi de  $x_1(t) = x_2(t) = 0$  olduğunda fonksiyonun sıfıra eşit olmasıdır. Bu özelliklere sahip olan bir fonksiyon pozitif tanımlı olarak adlandırılır.  $x_1(t)$   $x_2(t)$  düzlemine üçüncü boyut olarak  $E(t)$ 'nin ilave edilmesi ile pozitif tanımlı olan  $E(x_1, x_2)$  fonksiyonu Şekil 7'de gösterildiği gibi 3-boyutlu bir küre yüzeyidir.

Lyapunov kararlılık teoremi şimdi, n-boyutlu durum uzayına uygulanabilir. n. mertebeden bir dinamik sistem için pozitif tanımlı bir  $E(t)$  fonksiyonu bulunabiliyor ve sistemin yörüngesi boyunca zamana göre türevi negatif oluyorsa, ilgili sistem için asimtotik kararlı olduğu söylenir. Genelde pozitif tanımlı fonksiyonu bulmak kolaydır, fakat yörüngeler boyunca  $\dot{E}(t) \leq 0$  olacak şekilde bir fonksiyonun bulunması çok zordur.

Lyapunov'un ikinci yönteminin sağlanması Şekil 7'deki faz düzlemi incelenerek görülebilir. Sabit  $E(t)$  eğrileri  $C_1$ ,  $C_2$  ve  $C_3$  eğrileri ile gösterildi. P başlangıç durumunda, bu ikinci mertebeden faz yörüngeleri aşağıdaki durum denklemleri ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) &= F_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (23)$$

Pozitif tanımlı  $E(t)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$E(t) = a^2 x_1^2(t) + b^2 x_2^2(t) \quad (24)$$

Burada a ve b bilinmeyen katsayılardır.  $E(t)$  büyüklüğü ardışık olarak daha büyük sabit değerler alır.

$$E(t) = 0, C_1, C_2, C_3, \dots \quad (25)$$

Burada  $0 < C_1 < C_2 < C_3 < \dots$  dir. (24) denkleminin sonuçları, aşağıdaki denklem kümesini verir.

$$\begin{aligned} a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= 0, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= C_1, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 &= C_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (26)$$

$E(t) = 0$  olduğunda, (26) denklemi faz düzleminin orijini gösterir; diğer değerler için denklemler faz düzleminde elipsleri tanımlar. Şekil 8'den de görüldüğü gibi, her bir sonradan gelen elips kendinden önce gelenleri içerir.  $E(t)$  fonksiyonunun zamana göre türevi

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\partial E(t)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial E(t)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \quad (27)$$

veya

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\partial E(t)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial E(t)}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) \quad (28)$$

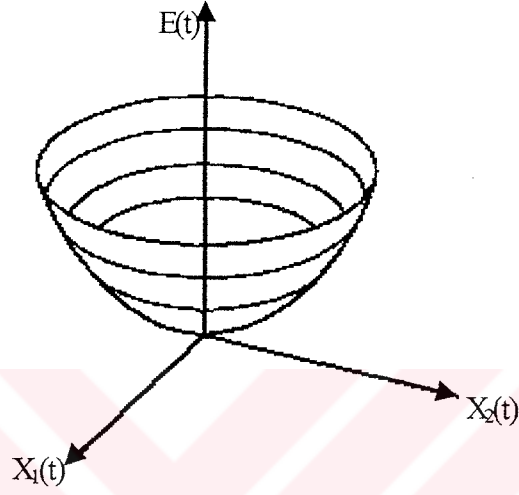
olarak yazılabilir. (23) denklemi, (28) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\partial E(t)}{\partial x_1} F_1(x_1, x_2) + \frac{\partial E(t)}{\partial x_2} F_2(x_1, x_2) \quad (29)$$

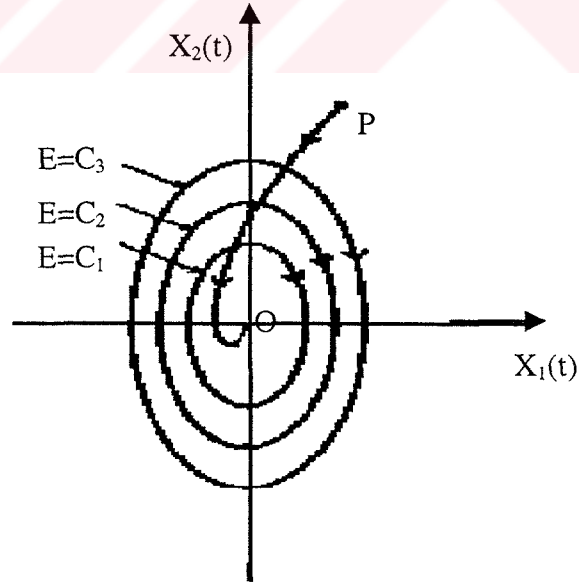
bağıntısı elde edilir. Gösterildiği gibi, (24) denkleminin kısmi türevi alınırsa, (29) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\frac{dE(t)}{dt} = 2a^2 x_1 F_1(x_1, x_2) + 2b^2 x_2 F_2(x_1, x_2) \quad (30)$$

$\frac{dE(t)}{dt}$  negatif ise, sistemin davranışı kendi P başlangıç noktasından  $E(t)$ 'nin daha küçük değerleri yönünde ve orijine (merkeze) doğru hareket etmelidir. Sistem bu takdirde asimtotik olarak kararlı olacaktır.



Şekil 7. Pozitif tanımlı bir fonksiyonun gösterimi.



Şekil 8. Lyapunov kararlılık kriterinin sağlanması.

Bir başka örnek olarak denklemleri aşağıdaki şekilde verilmiş olan yörüngede dönen bir uzay aracının davranışı incelensin (Anand, 1974).

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= -B \omega_x \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= -B \omega_z \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= -B \omega_y \end{aligned} \quad (31)$$

Burada  $I_x, I_y, I_z$  eylemsizlikleri,  $B$  pozitif susturucu sabitini ve  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  ise açısal hızları göstermektedir. Bu örnekte  $(0, 0, 0)$  noktasının asimtotik olarak kararlı olduğunu gösterelim. Bunun için Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi düşünülün.

$$E = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \quad (32)$$

$E$  fonksiyonu  $\omega_x, \omega_y$  ve  $\omega_z$  'nin bütün değerleri için pozitif olduğundan dolayı, pozitif tanımlı olup ve sadece  $(0, 0, 0)$  noktasında sıfırdır. Bu fonksiyon için  $\dot{E}$  oluşturulur

$$\dot{E} = I_x \dot{\omega}_x \omega_x + I_y \dot{\omega}_y \omega_y + I_z \dot{\omega}_z \omega_z \quad (33)$$

ve uygun değerler yerlerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\dot{E} = -(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \leq 0. \quad (34)$$

Sistem için seçilen ve (32) denklemi ile verilen Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi sadece  $(0, 0, 0)$  noktasında sıfırdır ve (34) denkleminin sonucuna göre de sistem asimtotik olarak kararlıdır.

#### 1.3.4. Dinamik Sistemlerin Sayısal Çözümleri

Dinamik sistemlerin zamanla olan gelişimlerini anlamak, sistemi tanımlayan diferansiyel denklemi veya denklem sistemini analitik veya sayısal olarak çözmekle mümkündür. Analitik çözümü bulunamayan birinci, ikinci veya daha yüksek mertebeli tek

değişkenli veya çok değişkenli doğrusal olmayan denklemlerle verilen sistemler, denklem sisteminin özelliğine bağlı olarak değişik sayısal yöntemlerle çözülebilir. Bu yöntemlerden etkili, kararlı, programlanması kolay, yüksek dereceli türev gerektirmeyen bir tanesi Runge-Kutta yöntemidir (Haken, 1985; Lambert, 1977; Mathews, 1992).

Dinamik bir sistem  $a \leq t \leq b$  aralığında

$$\begin{aligned} y(a) &= \alpha_1 \\ y'(a) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ y^{m-1}(a) &= \alpha_m \end{aligned} \quad (35)$$

başlangıç koşullarına sahip ve  $m$ . mertebeden türevle,

$$y^m(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \quad (36)$$

şeklinde ifade edilen bir hareket denkleminde sahipse,

$$\begin{aligned} u_1 &= y \\ u_2 &= y' \\ &\vdots \\ u_m &= y^{(m-1)} \end{aligned} \quad (37)$$

dönüşümleri ve  $u_1(a) = \alpha_1, u_2(a) = \alpha_2, \dots, u_m(a) = \alpha_m$  başlangıç koşulları ile şekilde

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{m-1}' &= u_m \\ u_m' &= f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (38)$$

birinci mertebe denklem sistemine indirgenebilir. Sonuçta  $y(t)$  çözümü  $u_1$  değişkeninin elde edilmesi anlamına gelir. Her bir birinci mertebe diferansiyel denklemi çözmek için kullanılacak 6.mertebe Runge-Kutta yöntemi tek adım ile başlayabilen bir yöntemdir.

$h$  adım uzunluğu olmak üzere  $x = x_n$ ,  $x = x_n + h/2$  ve  $x = x_n + h$  'da hesaplanan eğimlerin ağırlıklı ortalaması kullanılır. 6.mertebe Runge-Kutta yöntemi için tekrarlı (successive) olan işlemler

$$u_{i+1} = u_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

şeklinde verilir. Burada

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, u_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{4}, u_i + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{3h}{8}, u_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(t_i + \frac{12h}{13}, u_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 &= hf\left(t_i + h, u_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \end{aligned} \quad (39)$$

şeklindedir ve hata mertebesi  $h^5$  dir.

### 1.3.5. Kayıp ve Diverjans

Şekil 9 da gösterildiği gibi,  $x$  ve  $y$  değişkenlerinin  $(x_B, y_B)$  ve  $(x_A, y_A)$  koordinatları ile belirlenen küçük bir alandaki başlangıç koordinatları ile bir inceleme başlatılsın (Hilborn, 1994).

Böyle bir alanın değişim oranı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A = (x_B - x_A)(y_B - y_A) \quad (40)$$

$$\frac{dA}{dt} = (x_B - x_A)\{f_2(x_A, y_B) - f_2(x_A, y_A)\} + \{f_1(x_B, y_A) - f_1(x_A, y_A)\}(y_B - y_A) \quad (41)$$

Burada kullanılan zaman gelişim denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y)\end{aligned}\quad (42)$$

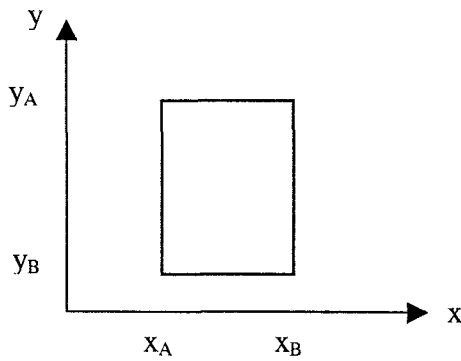
Taylor serisi açılımı kullanılırsa,

$$f_1(x_B, y_A) = f_1(x_A, y_A) + (x_B - x_A) \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots \quad (43)$$

benzer ifadeler  $f_2$  içinde yazılır ve bu seri açılımları (41) denkleminde yerine koyulup A ile bölümdükten sonra aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad (44)$$

Başlangıç koşullarını içeren bir alanın genişleme veya büyümesi, zaman gelişim fonksiyonlarının kısmi türevleri ile tanımlanır. (44) denkleminin sağ tarafı negatif ise başlangıçtaki faz uzayı alanı sifıra doğru küçülür, ve bu yüzden sistemin kayıplı olduğu söylenir. Dinamik sisteme ait yörüngeler, geometrik boyutu, orijinal uzay boyutundan küçük olan bir çekiciye dönüşür. İki durumlu uzay boyutları için, çekici bir nokta veya bir eğri olabilir. n-boyutlu durum için, durum uzayında başlangıç koşullarının n-boyutlu V hacminin gelişimi aşağıdaki denklemle verilir.



Şekil 9.  $x, y$  değişkenli durum uzayında başlangıç koşulları ile belirlenen bir dikdörtgen.



$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv \text{div}f \quad (45)$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı,  $f_i$  fonksiyon kümesinin diverjansı olarak adlandırılır.  $\text{div}(f) < 0$  olması durumunda, başlangıç koşullarının belirlediği başlangıç hacmi, orijinal durum uzayı boyutundan daha az boyutlu olan bir geometrik bölgeye dönüşür, ve bu durum uzayının en az bir çekiciye sahip olduğu söylenir.

n-boyutlu dinamik bir sistem için diverjans ifadesi aşağıdaki şekilde verilebilir (Hilborn, 1994; Shaw, 1981).

$$\text{div}F(x) = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_n} \quad (46)$$

Bir sistemin toplam enerjisi ile diverjansı arasındaki ilişkiyi ortaya koymak için, örnek olarak zorlanmamış Duffing osilatörünün faz uzayının (47) denklemi ile verilen genel yapısı incelenir (Wiggins, 1990).

$$\ddot{x} - x + \delta \dot{x} + x^3 = 0 \quad (47)$$

(47) denklemi aynı zamanda birinci mertebeden bir denklem sistemi biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 - \delta y. \end{aligned} \quad (48)$$

Böyle bir denklem sisteminin  $(x,y) = (0,0)$  ve  $(\pm 1,0)$  şeklinde olan üç belirli noktası, (48) denklemlerinin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek bulunur ve  $\delta > 0$  için sistem, kapalı bir yörüngeye sahip değildir.  $\delta = 0$  için zorlanmamış, sönümsüz Duffing osilatörü bir ilk integrale veya fonksiyonun seviye eğrileri sistemin yörüngelerini veren bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonuna sahiptir. Daha fiziksel terimlerle ifade edilirse,

zorlanmamış sönümsüz Duffing osilatörü yörüngeler üzerinde sabit bir enerji fonksiyonuna sahip korunumlu bir sistemdir. Bu durum aşağıdaki gibi açıklanabilir: (47) denklem sisteminde  $\delta=0$  alınıp ve bütün terimler  $\dot{x}$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} - \dot{x}x + \dot{x}x^3 &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

bulunur. Bundan dolayı

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = E = \text{sabit} \quad (50)$$

veya

$$H(x, y) = E = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (51)$$

şeklinde yazılır. Bu, zorlanmamış sönümsüz Duffing osilatörünün bir ilk integrali veya birim kütleyle sahip bir sistem için  $\frac{y^2}{2}$  terimi kinetik enerji ve  $V(x) \equiv -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$  potansiyel enerji olarak düşünülürse, E sistemin toplam enerjine karşı düşer. Bu sebepten dolayı bu fonksiyonun seviye eğrileri, böyle bir sistemin faz uzayının genel yapısını verir.

Genelde bir serbestlik dereceli problemlerde (örneğin iki boyutlu faz uzayındaki vektör alanları) sahip olunan ilk integral, sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplamı olarak düşünülür. Zorlanmamış sönümsüz Duffing osilatörünün ilk integrali  $H(x, y)$  ile gösterilsin. Böyle bir sistem gerçek Hamiltoniyen sistem olarak düşünüldüğü için aşağıda verilen Hamiltoniyen denklemlerini sağlamalıdır.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (52)$$

(51) Hamiltoniyen ifadesi veya sistemin toplam enerjisi, (52) Hamiltoniyen denklemlerinde yerine yazılırsa, sistemin korunumlu olduğu aşağıdaki gibi kolayca görülür.

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} \\ \frac{dH}{dt} &= (-x + x^3)y + y(x - x^3) = -xy + x^3y + xy - x^3y = 0 \\ \frac{dH}{dt} &= 0\end{aligned}\quad (53)$$

(53) denkleminde Hamiltoniyenin zamanla olan değişiminin sıfır olması, kendisinin sabit olmasına karşılık gelir. Buda sistemin korunumlu olduğunu gösterir. Korunumlu sistemlerin diverjansları her zaman sıfırdır.

## 1.4. Doğrusal Olmayan Sistemlerin Kaotik İncelenmesi

### 1.4.1. Kaosa Sürüklenme

Doğadaki doğrusal sistemler, geçen zamanla hiç bir yeni bilgi üretmezken, doğrusal olmayan sistemler zaman gelişimlerinde daima yeni bilgiler üretir (Farmer, 1982). Buna örnek olmak üzere, laminar ve türbülanslı akışlar arasındaki fark gösterilebilir. Laminar akışta, sistemin hareketi sınır ve başlangıç koşulları ile belirlenir, ve akış tarafından yeni bilgi üretilmez, ve bu nedenle genelde hareket tahmin edilebilir. Diğer taraftan türbülanslı akışta, akış kendi kendine sürekli bilgi üretir ve bu gerçek, tahmin edilebilirliği ve terslenebilirliği imkansız hale getirir. Bu özelliğinden dolayı, doğrusal olmayan sistemler günümüzdeki ilginç araştırma konuları arasındadır. Böyle sistemler hakkında bilgi edinmek için sistemin komşu yörüngelerinin üstel kapanma ve uzaklaşmalarına (Lyapunov üstellerine), Kolmogorov entropisine, çekicinin fraktal boyutuna, sistem değişkenlerinin zamanla olan gelişimlerine ve Poincare haritalarına bakılmalıdır (Hilborn, 1994; Rosenstein, 1993).

Kaos normal olarak düzen veya tahmin edilebilirliğin yokluğu veya rastgele kuvvetlerin sonucu olmayan dinamik sistemdeki doğrusal olmamadan dolayı düzensiz ve tahmin edilemez davranışlardır. Böylece hava durumu, duman parçacıklarının yükselmesi veya market stoklamasının kaotik olduğu söylenebilir. Kaos çalışmalarının beklenmedik iki sürprizi vardır: (1) kaotik davranışın her yerde olması ve (2) kaos yollarının evrenselliğidir. Kaos olarak adlandırılan davranış, uzun yıllar önce güneş sisteminin kararlılığı probleminde, matematikçi Henri Poincare tarafından meşhur üç cisim problemi ile ortaya konulmuştu.

Bir sistemin kaosa nasıl geçtiğini anlamak için şu sorunun sorulması uygundur. Doğrusal olmayan bir sistemin davranışı, sistem için var olan kontrol parametresine veya parametrelerine bağlı olarak nasıl değişir?

Kaosun mümkün birkaç yolu burada kısaca açıklanacaktır. İlk olarak kaosun evrensel bir yolunun olmadığı söylenebilir. Bununla beraber, kaotik duruma ulaşmadan önce farklı kararsızlıkların zengin bir hiyerarşisinin olduğu bilinmektedir.

Sistemin enerjisi, Reynolds sayısı veya bir laserin güç pompası gibi, kontrol parametreleri arttığı zaman, sistemin  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  frekanslarının sayıları tedricen artar. Akışkanlar dinamiğinde bu olay Landau-Hopf resmi olarak adlandırılır. Bu resimde akışkanın türbülans durumu, osilasyon frekansları arasındaki basit olmayan bir ilişki yardımıyla sonsuz sayıdaki osilasyonla karakterize edilir (Bai-Lin, 1990; Grassberger, 1984; Kawakam, 1984).

Kaotik davranışın bir boyuttaki örneği göz önünde bulundursun. Bir boyutlu olan ve lojistik denklem olarak bilinen ifade aşağıdaki şekilde verilmektedir (Varma, 1991).

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (54)$$

Burada  $x$ , sistemin bir değişkeni,  $r$  ise bir kontrol parametresi olup  $x \in (0,1)$  ve  $r \in (0,4)$  değerlerini almaktadır.  $r$  parametresi değiştirildiğinde, adı geçen sistem  $2^n$  biçiminde periyot çiftleme yolu ile kaosa sürüklenmektedir.  $r < 1$  durumunda bütün yığılmalar sifıra yaklaşır.  $1 < r < 3$  için yığılmalar ya monoton olarak bir noktaya kapanacaklar ya da artan  $r$  ile belirli bir değerde osilasyona neden olacaktır.  $3 < r < 3.5$  de sistem iki periyotlu,  $r = 3.5$  için dört periyotlu ve  $r = 3.56$  için de sekiz periyotlu bir osilasyona uğramaktadır. Artan  $r$

değeri ile sistemin davranışı daha karmaşık olacak, fakat  $r = 3.83$  civarında tekrar periyodik davranışlar gözlenirken;  $r = 4$  için sistemin davranışı tamamen tahmin edilemez bir durum göstermektedir. İşte böyle bir davranış kaotik olarak adlandırılabilir. Periyot çiftleme ile gerçekleşen kaos yolu literatürde  $2^n$  şeklinde verilmekte olup Şekil 10'da şematik olarak gösterilmiştir.

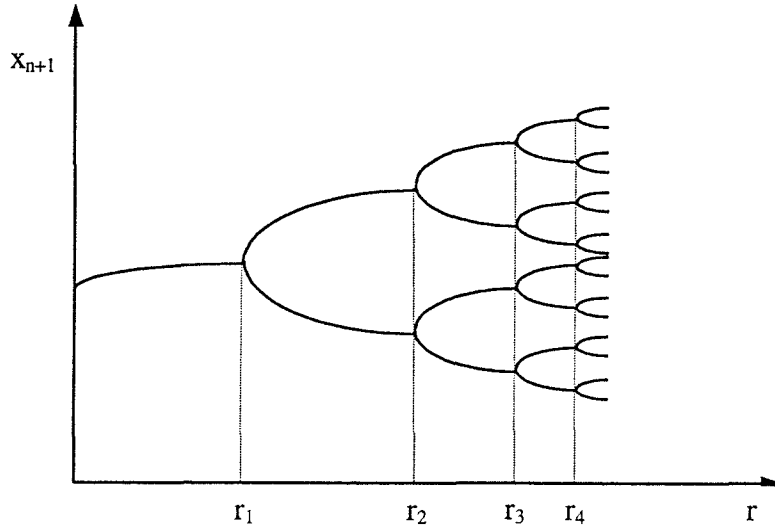
Kaosun en meşhur yolu, periyot çiftleme yoludur. Bu olay esasta tek periyotlu titreşime sahip bir sistemin, örneğin  $r$  gibi bir parametresinin değişiminin belirli değerlerinde periyodun çiftlenerek  $2T, 4T, \dots$  gibi davranışlar göstermesi şeklinde ortaya çıkar. Bu olayın en önemli karakteristiği  $r$  değerleri için bir ayarlama kuralının olmasıdır.  $r_{n-1}, r_n$  ve  $r_{n+1}$  parametre değerleri, periyot çiftlenmesi için kritik değerler ise,  $n \rightarrow \infty$  için

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta = 4.6692016 \quad (55)$$

değeri sağlanır.  $\delta$  sayısı Feigenbaum sayısı olarak bilinir. Şekil 10'da,  $r$  kontrol parametresinin değer artışına bağlı olarak belirli değerlerde osilasyonların periyodu çiftleşir. Bu geçiş türünün evrenselliği Feigenbaum tarafından araştırıldı ve kendi adı ile anılan evrensel sabitin değeri Tablo 1'de görüldüğü gibi 4.668002 olarak bulundu (Feigenbaum, 1980). Periyot çiftleme ile kaosa girişin ikinci örneği, trigonometrik fonksiyonla elde edilmiş ve sonuçlar Tablo 2'de verilmiştir.

Kaos için ikinci bir yol şu şekilde tanımlanabilir. Sistemin bir parametresi  $a$  değerinden  $b$  değerine geçiş yaptığı zaman, bir garip çekici yok olabilir, buradan tersine olarak parametre  $b$  den  $a$  ya geçtiğinde çekici tekrar ortaya çıkabilir. Böylece bir garip çekicinin aniden ortaya çıkması mümkün bir kaos yoludur (Grebogi, 1983; Pastor-Diaz, 1995).

Kaosun diğer bir yolu bir olayın aralıklarla oluşmasıdır (intermittency). Bu durumda, tipik fiziksel nicelik belli bir süre durgun kalırken, belli zaman periyotlarında aniden kaotik patlamalar gösterir, daha sonra tekrar durgun bir duruma ulaşılır; fakat belli bir zaman sonra bir başka kaotik patlama gösterir ve bu olay böyle devam eder.



Şekil 10. Bir sistemin kaos yollarından birisi olan  $2^n$  şeklindeki evrensel kaos yolunun şematik olarak gösterimi.

Tablo 1. Lojistik haritada  $(x_{n+1} = rx_n(1 - x_n))$   $2^n$  şeklindeki dallanmalara karşı gelen  $r$  parametresinin değerleri (Lundqvist, 1988).

	$r_i$	$1/\delta_i$	Evrensel Feigenbaum Sayısı ( $\delta_i$ )
$2^2$	3.44949	0.2105	4.7514799
$2^3$	3.54409	0.2148	4.656199
$2^4$	3.56440	0.2142	4.668106
$2^5$	3.56875	0.2144	4.668847
$2^6$	3.56969	0.2142	4.668002

Periyot çiftlemeye bir başka örnek, kalp atışlarının benzetiminde kullanılan denklem olup aşağıdaki ifade ile verilmektedir (Ahmet, 1993; Casdaglı, 1989; Courtemanche, 1989; Glass, 1983; Mackey, 1977).

$$x_{n+1} = x_n + \tau + b \sin(2\pi x_n) \quad (56)$$

Bu trigonometrik fonksiyonda  $b$  genlik ve  $\tau$  benzetim periyodu olarak adlandırılmaktadır. Benzetilerde  $b + \tau = 1$  koşulunun sağlanması önemlidir.

Tablo 2. Trigonometrik bir fonksiyon için b genlik parametresine ait dallanma değerleri (Kındıkoğlu, 1998).

	$\tau_i$	$b_i$	$1/\delta_i$	$\delta_i$
$2^2$	0.424998	0.575001	0.272648	3.667732
$2^3$	0.418182	0.581817	0.272086	3.675302
$2^4$	0.416327	0.583672	0.272008	3.676357
$2^5$	0.415822	0.584177	0.272000	3.676459

Bu trigonometrik fonksiyonun temsil ettiği sistem,  $2^1$  dallanmaya karşı gelen  $\tau$  değerinde iki kararlı,  $2^2$  'ye karşı gelen  $\tau$  değerinde dört kararlı,  $2^3$  'e karşı gelen  $\tau$  değerinde sekiz kararlı durumda bulunuyor ve böyle devam edildiğinde periyot çiftleme yöntemi ile sistemin kaosa gittiği gözlenmektedir. Tablo 2'deki değerler  $x(0) = 0.05$  başlangıç koşulu ile hesaplanmış ve az sayıdaki iterasyonlardan sonra kararlı bir durum elde edilmiştir.

Kaotik davranışın 3-boyuttaki örneği için Lorenz sistemi incelenmiştir. Atmosferdeki karışım olaylarını açıklığa kavuşturmak için 1963 yılında akışkan sistemlerin Navier-Stokes denklemlerinden yararlanarak hipotezini geliştiren E. N. Lorenz üç tane birinci dereceden diferansiyel denklemle oluşturduğu doğrusal olmayan sistemini (E-8)'de vermiştir(Lorenz, 1963; Khayat, 1995).

Lorenz denklemlerinde x akışkanın akışını, y yükselen ve alçalan akış elemanları arasındaki sıcaklık farkını karakterize ederken, z ise dikey sıcaklık profilinin denge noktasından bozulması ile orantılıdır. Ayrıca  $\sigma$  ve b ayarlanabilir parametrelerdir ve bunlar sıra ile 10 ve 8/3 değerlerini alırken, r'nin çeşitli değerleri için intermittency (aralıklarla oluşma) ve kriz gibi kaotik geçişler gözlenmiştir. Daha sonraki yıllarda bu sistem, diğer birçok araştırmacı tarafından gerek matematiksel yönden ve gerekse de, sistemin elektrik devre karşılığı oluşturularak ayrıntılı olarak araştırma konusu olmuş ve halen daha araştırılmaktadır. Bunlardan birinin sonuçlarını şu şekilde sıralamak mümkündür.

1. r'nin 166.0 ve 166.2 arasında,  $r = 166.0$ 'a karşı düşen periyodik çekiciden  $r = 166.2$ 'ye karşı düşen kaotik çekiciye olan bir intermittency (aralıklarla oluşma) geçişi gözlenmiştir.



2.  $r = 24.06$ 'nın aşağısındaki değerlerde iki tane periyodik çekici vardır.  $r$ 'nin değeri  $24.06$ 'nın üzerine çıkarıldığında biri kaotik ve diğer ikisi periyodik olan üç çekici gözlenmiştir (Grebogi, 1987).

3-boyutlu Lorenz sisteminin  $xy$ ,  $xz$  ve  $yz$  kaotik faz görünüşleri Şekil 11 (a), (b) ve (c)'de çizilmiştir. Aynı sisteme ait ve  $\sigma=16$ ,  $r = 40$  ve  $b = 1/8$  parametre değerleri için periyodik bir çekici Şekil 11 (d)'de görülmektedir. Aynı zamanda Bonhoeffer-Van der Pol (BVP) osilatörüne ait kaotik faz görünümü Şekil 12'de verilmiştir.

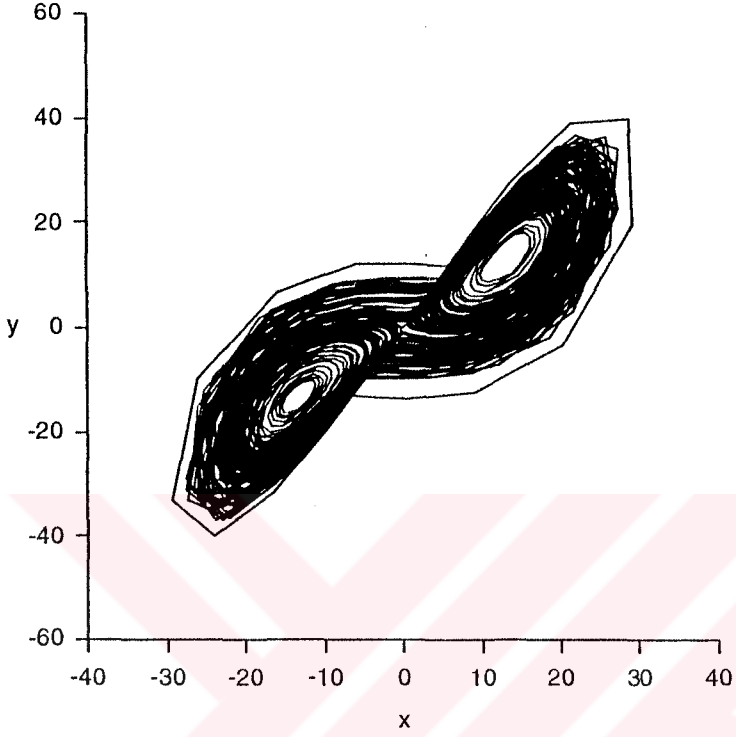
#### 1.4.2. Başlangıç Koşullarına Duyar Bağımlılık

Bir çekicinin dinamiklerine ve başlangıç koşullarına duyar bağımlılık üstel biçimde etki ediyorsa, o çekici kaotiktir denir. İki yörünge üzerinde aralarında  $\Delta(0)$  kadar fark bulunan biri  $x_1(0)$  ve diğeri  $x_2(0) = x_1(0) + \Delta(0)$  olan komşu iki başlangıç koşulu gözönüne alınsın. Belli bir  $t$  süresi sonunda bu iki yörünge üzerinde varılan noktalar  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  olsun. Bu  $t$  süresi sonunda yörünge arasındaki fark  $\Delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$  dir. Eğer  $|\Delta(0)| \rightarrow 0$  giderken büyük  $t$ 'ler için yörüngeler sınırlı kalıp, çözümler arasındaki  $|\Delta(t)|$  farkı,  $\Delta(0)$  vektöründeki tipik bir yönlenme ile üstel olarak büyüyorsa (örneğin,  $|\Delta(t)|/|\Delta(0)| \sim \exp(ht)$ ,  $h>0$ ), o zaman böyle bir sistemin başlangıç koşullarına duyar bağımlı olduğu ve bunun sonucu olarak kaotik olduğu söylenir. Başlangıç koşullarının bu duyar bağımlılığı Şekil 13'de gösterilmiştir.

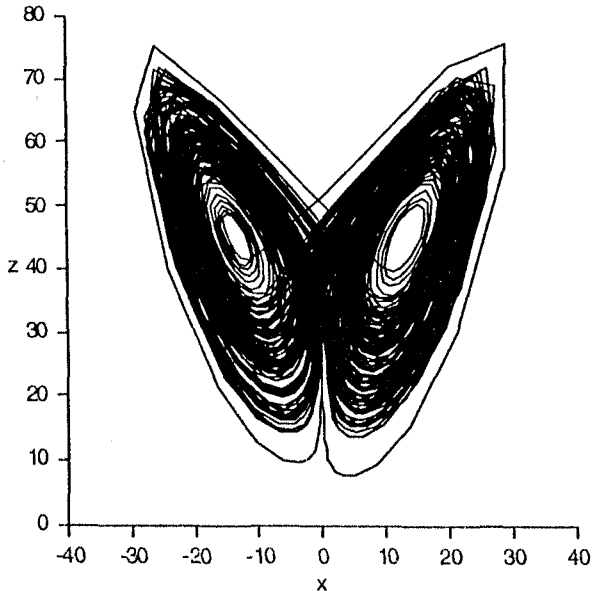
Örnek olarak lojistik denklem incelenir. Burada  $r = 2.5$  ve  $x$ 'in başlangıç değerleri sırasıyla  $x_1(0) = 0.700000000$  ve  $x_2(0) = 0.700000001$  alınarak iki sayısal hesaplama yapılmıştır. Sonuçlar Şekil 14'te gösterilmiştir. En azından ilk otuz iterasyonda ( $n = 30$ ) sonuçlar arasında bir farkın olmadığı gözlenirken,  $n = 39$ 'dan sonra, başlangıç değerleri arasındaki farkın  $1/10^8$  kadar küçük olmasına karşılık, sonuçlar arasındaki fark oldukça büyümüştür (Thornton, 1995). Bir başka örnek olarak da, dinamik bir sistemin başlangıç koşullarına duyarlı olduğunu göstermek için  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ve  $(x'_0, y'_0) = (0.00001, 0)$  başlangıç koşullu iki yörüngenin  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ... ve  $(x'_0, y'_0)$ ,  $(x'_1, y'_1)$ ... zaman gelişimleri hesaplanmış olsun. Bu başlangıç koşulları altında sistemin zamanla değişimi Şekil 15'te gösterilmiştir (Vieira, 1992). Şekil 15 (a) ve (b) sistemin bu iki başlangıç koşuluna göre değişimini gösterirken, Şekil 15 (c) ise bu iki değişim arasındaki farkı göstermektedir.  $x_k$  ve  $x'_k$  zaman gelişimlerinin başlangıçları birbirlerinden ayırt



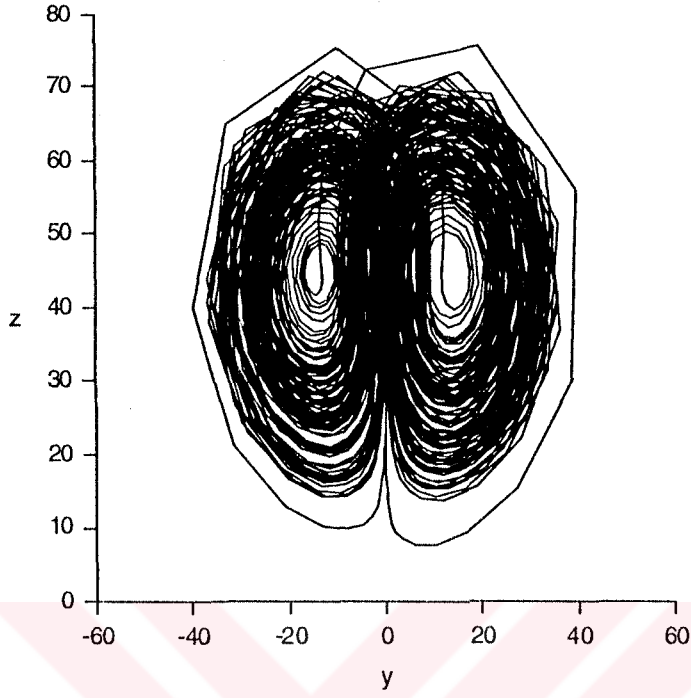
edilemezken, belli bir iterasyondan sonra gelişimler arasındaki fark kendisini göstermektedir (Peitgen, 1992).



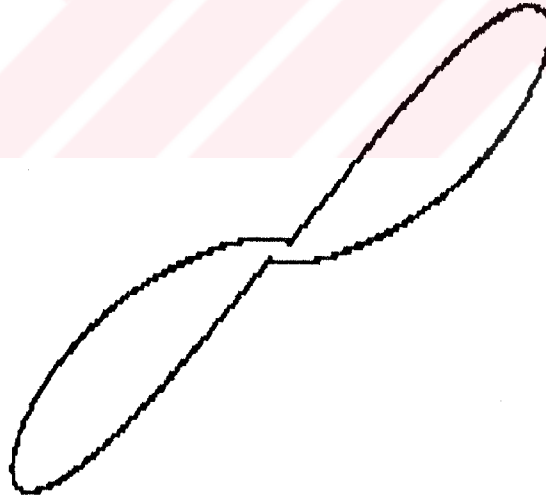
(a)



(b)

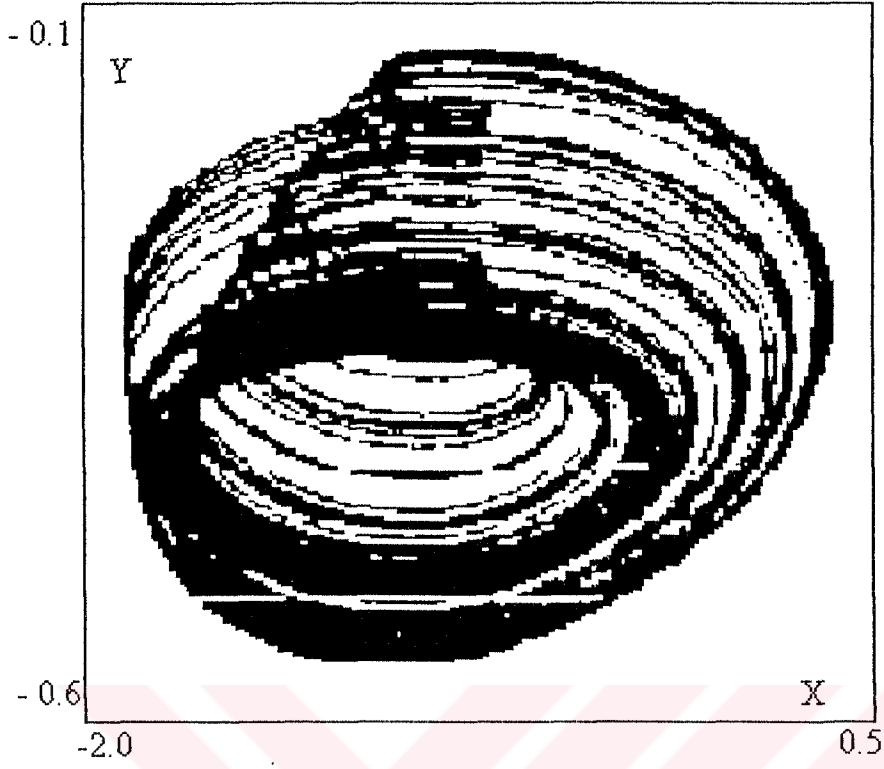


(c)

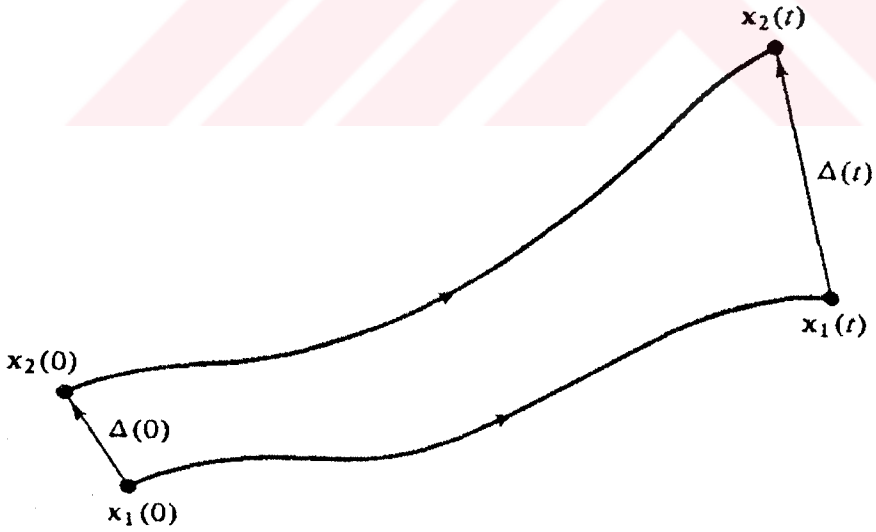


(d)

Şekil 11. 3-boyutlu Lorenz sistemine ait (a) xy, (b) xz, (c) yz (kaotik) ve(d) xy (periyodik) faz görünüşleri. Bu şekillerde  $\sigma = 16$  ,  $r = 40$ ,  $b = 4$  (kaotik) ve  $b = 1/8$  (periyodik) fiziksel parametreleri ve  $H = 0.001$  adım uzunluğu kullanılarak çizilmiştir.

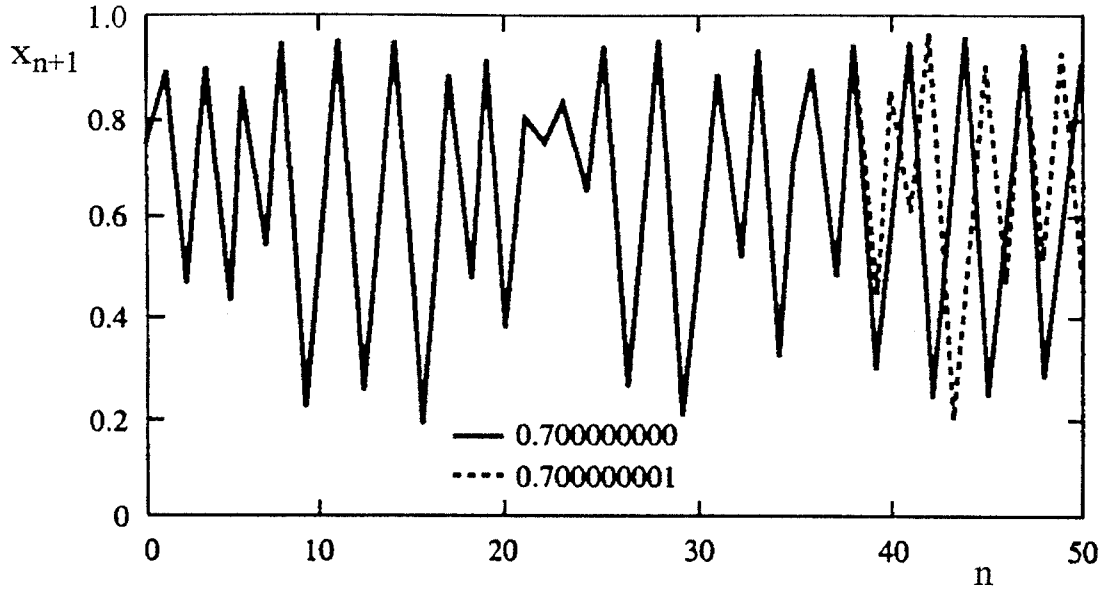


Şekil 12. BVP osilatörüne ait faz görünümü.



Şekil 13. Faz uzayında komşu iki yörünge nin zamanla gelişimleri.

Sürekli dinamik sistemlerin benzetileri için yaygın yol, birinci dereceden diferansiyel denklemlerdir. Böyle  $n$  tane bağımsız değişkenli bir sistem  $n$  tane birbirine



Şekil 14. Komşu iki yörüngenin başlangıç koşullarında  $10^{-8}$  kadarlık bir farkın olması, kısa bir zaman sonra hissedilir boyutlara ulaşır.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -(y+z) \\
 \dot{y} &= x+ay \\
 \dot{z} &= b+z(x-C)
 \end{aligned} \tag{57}$$

bağlı diferansiyel denklemle tanımlanır. Böyle denklemlerde kaosu gözükmesi için iki koşul olmalıdır (Bai-Lin, 1990).

1. Denklemlerin sağ taraflarında en az bir tane doğrusal olmayan terim,
2. En az üç tane bağımsız değişken olmalıdır.

Basit kaotik diferansiyel denklem sistemini incelemek amacıyla, Rössler denklemlerini incelemek uygundur (Wolf, 1985). Bu sistemde sadece  $z$  ve  $x$ 'in çarpımı şeklindeki bir tane basit çeşit doğrusal olmayan terim vardır. Bu yapı, kaotik davranış gösteren en basit diferansiyel denklem modellerinden birisidir.  $C$  sabitinin farklı değerleri için (57) denklem sistemine ilişkin yörüngelerin  $xy$ -düzlemindeki izdüşümleri Şekil 16'da gösterilmiştir.  $C$  artırılınca; yörüngeler bir maksimumlu basit bir limit çevrimden (limit cycle) kalkarak, iki maksimumlu bir limit çevrimden geçtikten sonra dört maksimumlu bir limit çevrimine döner, ve devam edilirse  $C = 5$ 'te artık herhangi bir görünebilen periyodiklik kalmaz.

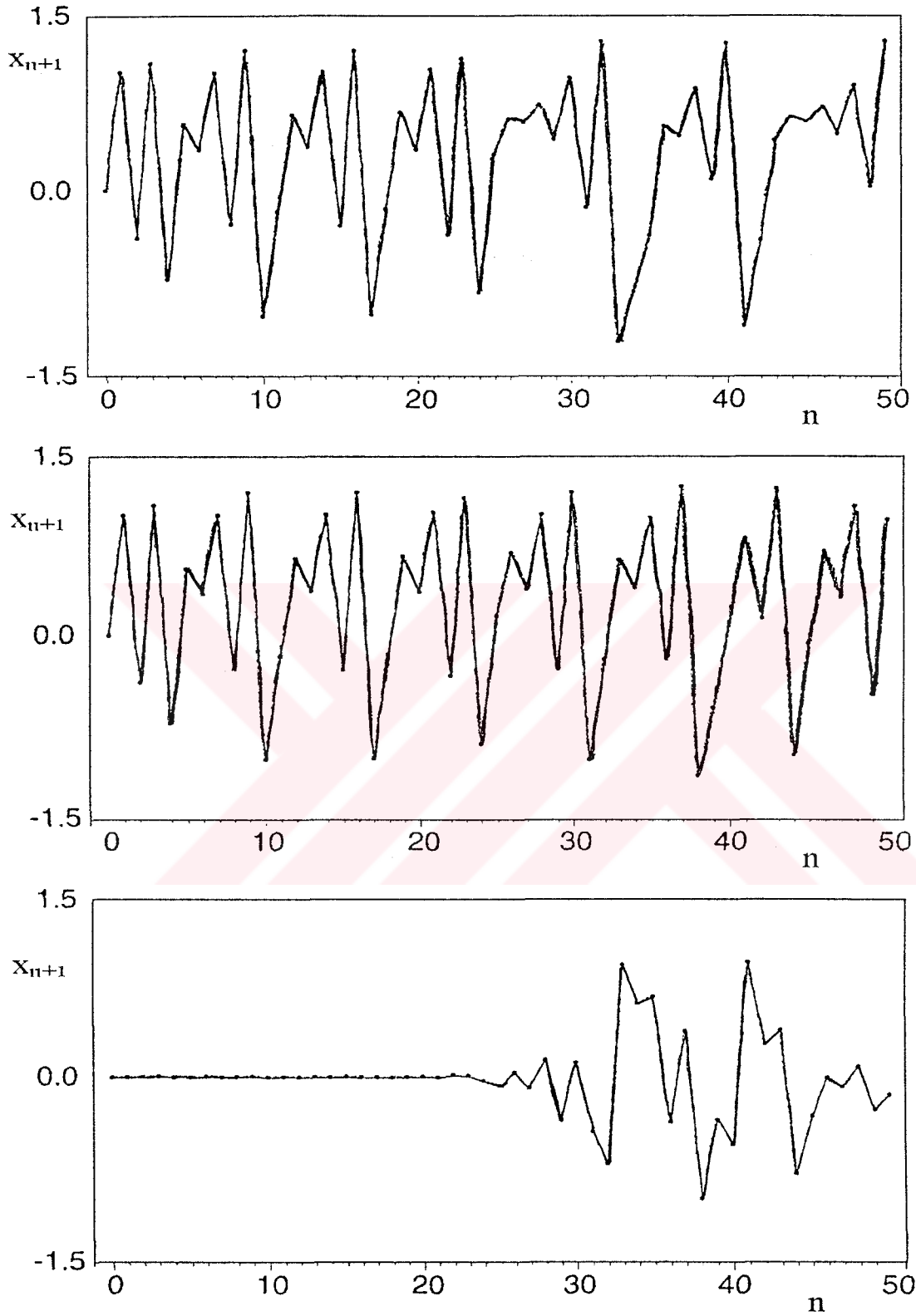
Bu sistem, C parametresinin artan değerleri ile periyot çiftlenimi şeklinde kaosa girmektedir. Bu kritik parametre değeri  $C > 4.233$  olarak hesaplanmıştır. Bu parametre değerinde sistemin Lyapunov üsteli sıfırdan büyük bir değer almaktadır ve bu mümkün bir kaos yoludur (Bai-Lin, 1990; Rietmen, 1989). Fark denklemlerine benzer olarak, n tane birbirine bağlı birinci dereceden diferansiyel denklem sisteminin n tane Lyapunov üsteli vardır. Bu üstellerle ilgili kaos kriteri, en az bir üstelin sıfırdan büyük ve toplamlarının negatif olmasıdır.

### 1.4.3. Lyapunov Üstelleri (Spektrumu)

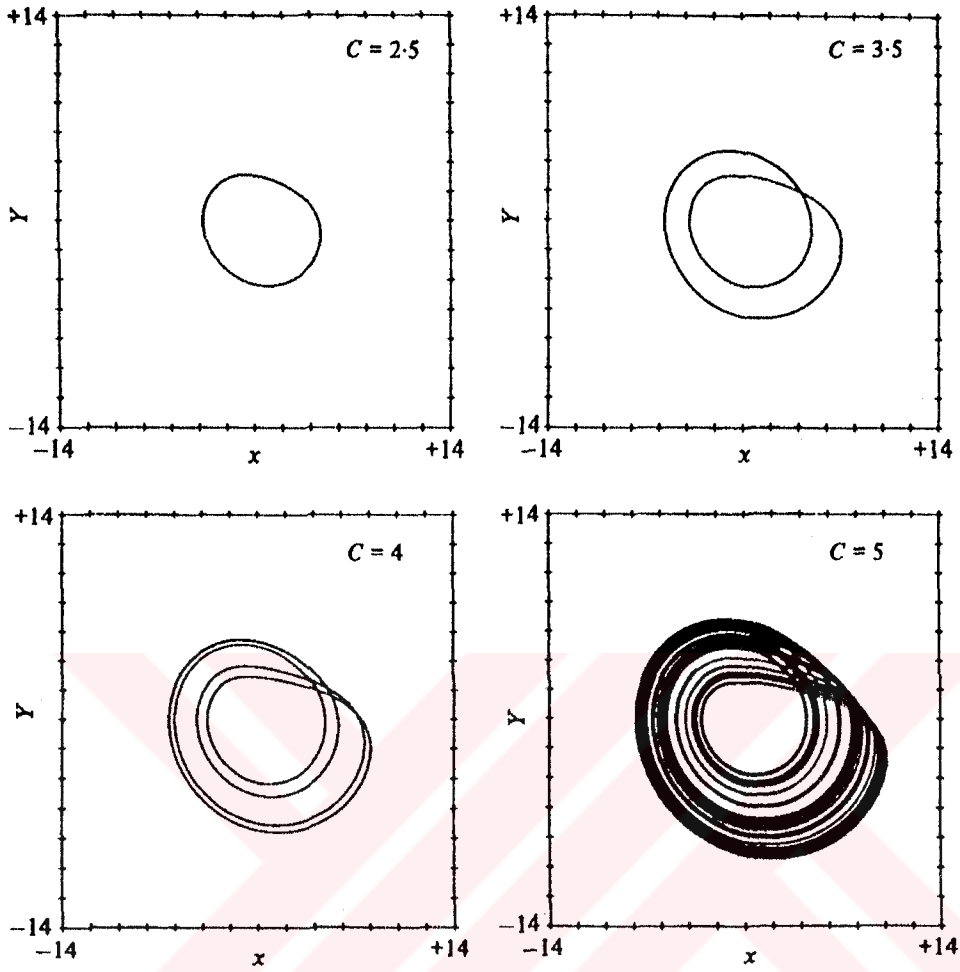
Kaotik davranışa izin veren üç veya daha büyük boyutlu durum uzayının önemli bir özelliği, sisteme ait durum uzayı yörüngelerinin birbirlerini kesmeden ve aynı şekilde birbirlerini tekrarlamadan sınırlı bir uzay bölgesinde kalmalarıdır. Açıkça böyle yörüngeler geometrik bir çekici ile sonlanmaktadır. Gerçekte böyle çekiciler garip çekiçi olarak adlandırılır. Çekici üzerindeki davranış kaotik ise, yani çekici üzerindeki komşu yörüngeler ortalama üstel olarak birbirlerinden sapıyorlarsa, böyle çekiciler kaotik olarak adlandırılır. Birçok yazar, garip çekici ve kaotik çekici terimlerini birbirleri yerine kullanmaktadır. n boyutlu faz uzayında sürekli bir dinamik sistemin verildiği kabul edilsin. Böyle bir sistemde, başlangıç koşullarına bağlı olarak sonsuz küçük n boyutlu bir kürenin uzun zaman davranışları gözlenirse, sistem akışının yerel bozulmasından dolayı n-boyutlu bir elipsoid şeklini alacaktır.  $\lambda_i$  ile gösterilen i. bir boyutlu Lyapunov üsteli, elipsoidin  $P_i(t)$  ana eksenini cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanır (Farmer, 1982; Gencay, 1992; Wolf, 1985; Zeng, 1991; Yavaş ve Akkaş, 1996).

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{P_i(t)}{P_i(0)} \quad (58)$$

Burada  $\lambda_i$  en büyükten en küçüğe doğru sıralanır. Böylece Lyapunov üstelleri, faz uzayındaki farklı yönlerin genişleme ve sıkışması ile ilgilidir. Burada dikkat edilmesi gereken durum, elipsoidin doğrusal boyu  $2^{\lambda_1 t}$  kadar, ilk iki ana eksen ile tanımlanan alanın  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$  kadar ve ilk üç ana eksen ile tanımlanan hacimin de  $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$  kadar ve



Şekil 15. Dinamik bir sistemin başlangıç koşullarına duyarlılığı. (a)  $(x_0, y_0) = (0,0)$  başlangıç koşulu için değişim. (b)  $(x'_0, y'_0) = (0.00001, 0)$  başlangıç koşulu için değişim. (c) Bu iki değişim arasındaki fark.



Şekil 16. (57) denklem sistemi ile verilen Rössler sisteminin dört farklı  $C$  değeri için  $xy$ -faz çizimleri. Bu şekillerde  $a = 0.2$  ve  $b = 0.2$  parametre değerleri kullanılmıştır.

v.s. büyümesidir (Peitgen, 1992; Wolf, 1985). Bu özellik üstelerin spektrumunun diğer bir tanımını verir; ve ilk  $j$  tane üstelin toplamı, bir  $j$  hacim elemanının uzun süreli üstel büyüme hızı ile tanımlanır.

Sistemin kaosta olması için en az bir pozitif üstelin olması ve bütün üstelerin toplamlarının negatif olması gerekir. (54) denklemi ile verilen bir boyutlu sistemde,  $r$  parametresinin fonksiyonu olarak Lyapunov üstelinin değişimi Şekil 17'de verilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi  $\lambda > 0$  kaos için gereklidir. Aynı zamanda bu durum sistemin başlangıç koşullarına bağımlılığını da içermektedir. Şekilde 17'de  $r_1$  ve  $r_2$  ile gösterilen parametre değerlerinde, ilgili sistem bir kararlı durumdan iki kararlı ve iki kararlı durumdan dört kararlı duruma geçerken;  $r_\infty$  parametre değerinde de tamamen periyodikliğini kaybedip kontrolü yapılamayan bir davranış göstermektedir.  $r = 4$  için sistem kaostadır.

3-boyutlu dinamik sistemlerin analizlerinde karşılaşılan Lyapunov spektrumları aşağıdaki gibi sıralanır (Farmer, 1982; Froyland, 1984; Russel, 1980; Wolf, 1985).

1. (-, -, -) : sabit bir nokta
2. (0, -, -): limit (sınırlı) çevrim
3. (0, 0, 0): iki-torus
4. (+, 0, -): garip çekici

Yukarıda işaretleri ile verilen Lyapunov spektrumlarının anlamlarını kısaca verelim.

(-, -, -): Sistem akışı her yönü ile büzülecek ve ilgili sistem sıfır boyutlu bir nokta çekicisi ile sonlanacak.

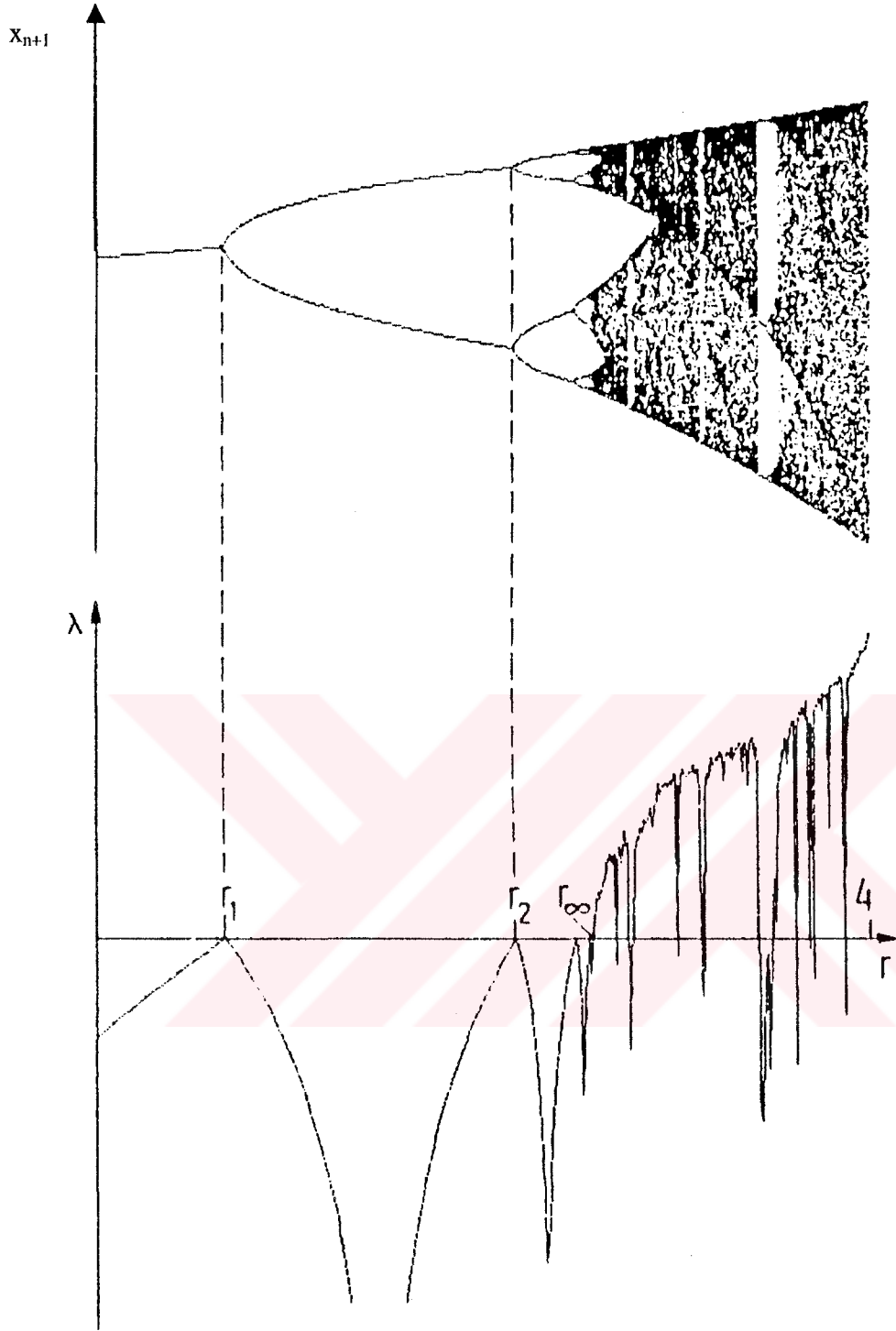
(0, -, -): Akış altındaki sistem sadece bir yönde değişmeye uğramadan, diğer iki yönde oluşacak büzülmelemlerle bir boyutlu sınırlı bir çekiciye yaklaşacaktır.

(0, 0, -): İncelenmekte olan sistem, iki yönde bir değişime uğramazken, üçüncü yönde bir büzümeye uğrayarak, sistemin faz uzayı 2-torus diye adlandırılan sanki periyodik bir çekici ile sonuçlanır. Bu çeşit hareketler bir ve iki boyutlu durum uzaylarında gözükmezler ve hareket iki farklı frekansa sahip olup, asla kendisini tekrarlamaz.

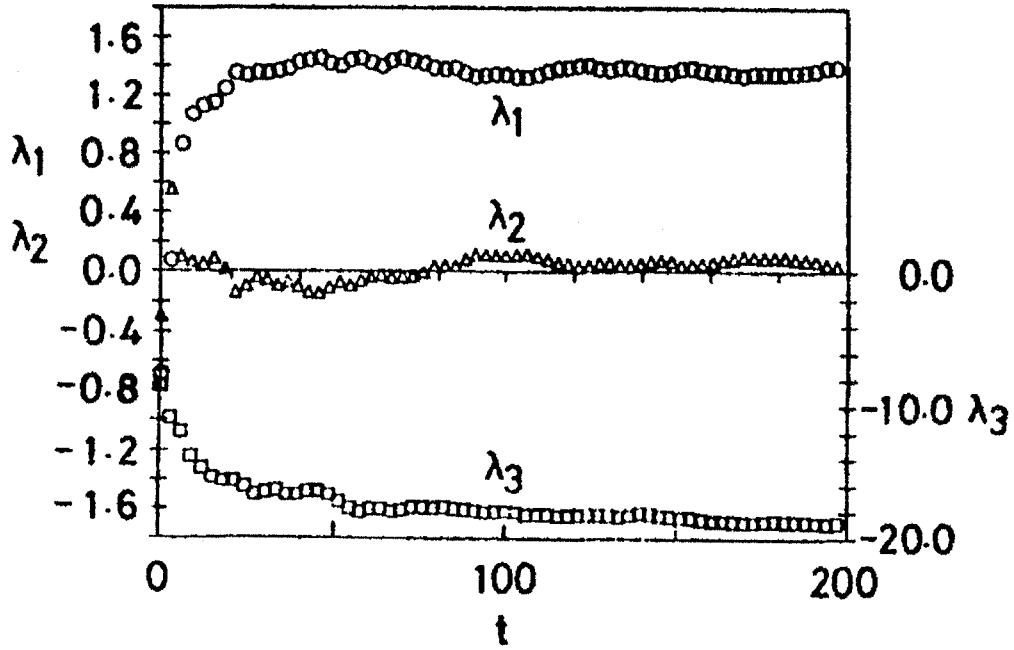
3-boyutlu kaotik sistemlerin sahip oldukları Lyapunov spektrumu (+, 0, -) şeklinde olup, bu üstelerin iterasyon sayıları ile değişimleri Şekil 18'de verilmiştir. 20-30 milyon iterasyondan sonra üstelerin kararlı bir değişim sergiledikleri şekilden görülmektedir (Grassberger, 1983).

4-boyutlu dinamik sistemlerin Lyapunov spektrumları (+, +, 0, -), (+, 0, 0, -) ve (+, 0, -, -) şeklinde sıralanabilir (Farmer, 1982; Yavaş ve Akkaş, 1996). Dinamik sistemlerin Lyapunov spektrumlarında iki pozitif üstelin bulunması, sistemin davranışının hiperkaos





Şekil 17.  $r$  sistem parametresine bağlı olarak Lyapunov üstelinin bir boyutlu hareketteki değişimi.



Şekil 18. 3-boyutlu Lorenz sisteminde özel parametre değerleri için Lyapunov üstellerinin kararlılığı (Grassberger, 1983).

Tablo 3. Sürekli otonom sistem çekiçlerinin spektral çeşitler (Baier, 1991).

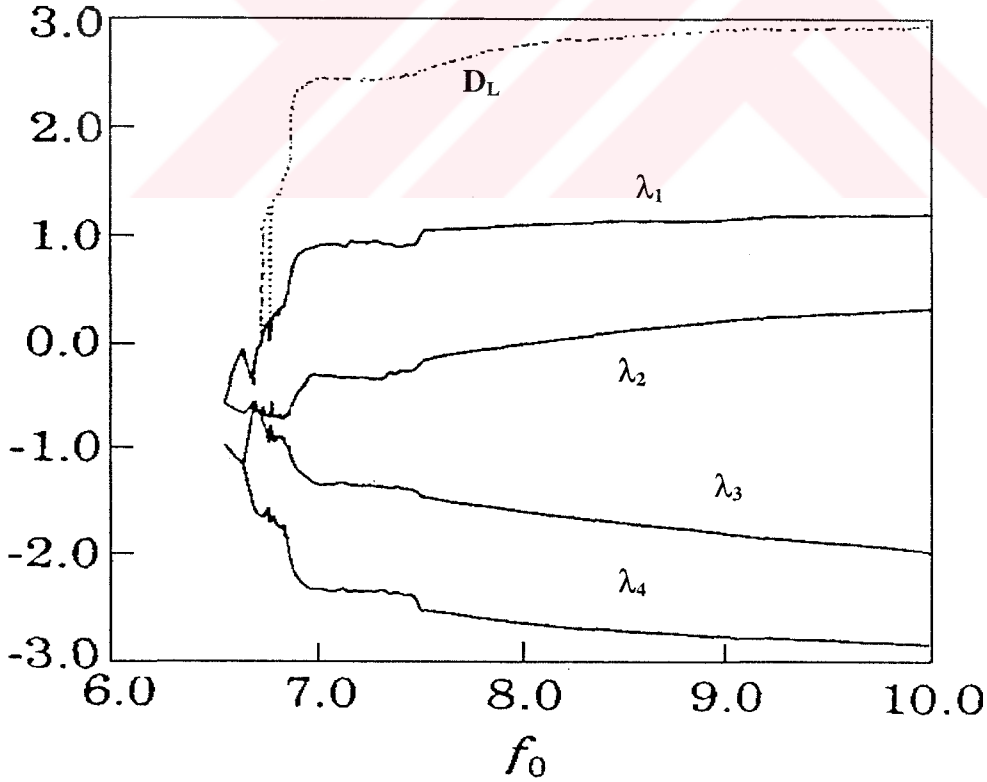
Boyut(N)	Çekicinin boyutu	Lyapunov üsteli	Çekicinin boyutu(D)
1	Denge durumu	-	0
2	Sınırlı çevrim	0,-	1
3	Torus $T^2$	0, 0, -	2
	Kaos $C^1$	+, 0, -	$2 < D < 3$
4	Hipertorus $T^3$	0, 0, 0, -	3
	Kaos $T^3$	+, 0, 0, -	$3 < D < 4$
	Hiperkaos $C^2$	+, +, 0, -	$3 < D < 4$
N	Denge durumu	- ...	0
	Sınırlı çevrim	0 - ...	1
	(N-1) torus	0 ... - ...	1
	(N-2) torus	+ ... 0 ... - ...	$(k+1) < D < N$

olarak adlandırılmasının nedenidir (Baier, 1991; Kapitanik, 1991; Lai, 1997). Tablo 3'te görülen N topolojik boyut, D sınırlı kümenin çekici veya fraktal (Hausdorff) boyutudur. Hiperkaotik davranış içerisinde bulunan 4-boyutlu Rössler sistemine ait Lyapunov

spektrumu (+, +, 0, -) şeklinde olup, Tablo 3 ve Tablo 5'te gösterilmiştir. Yukarıda ve çeşitli Tablolarda verilen Lyapunov spektrumlarının işaretleri fiziksel olarak şu şekilde açıklanabilir:

- + : Çekici üzerindeki genişlemeyi gösterir,
- \_ : Çekici üzerindeki büzülme (sıkışmayı) gösterir,
- 0 : Çekici üzerinde herhangi bir değişikliğe neden olmaz.

Ortasından mesnetlenmiş kütleli bir çubuğa ikinci bir kütleli çubuk bu mesnet noktasından bağlanmış ve bu ikinci çubuğun diğer ucu başka bir mesnet noktasına yerleştirilmiş bir mekanik sistem incelenir. Her iki çubuk kendi mesnet noktaları etrafında döndürülebilmektedir. Ortasından mesnetlenmiş çubuğun uçlarında eşit kütlelerin olduğu, ortasında ise başka bir kütle bulduğu ve bir uçundan da belirli aralıklarla darbelendiği varsayılıyor. Çift rotor olarak bilinen böyle bir mekanik düzen 4-boyutlu bir sistem oluşturur. Bu sistemin zaman gelişimini tanımlayan 4-boyutlu haritası  $f_0$  kontrol parametresinin (sabit şiddetli periyodik kuvvet) fonksiyonu olarak Şekil 19'da gösterilmiştir (Romeiras,1992).



Şekil 19. Kaotik çekicilere ilişkin Lyapunov üstellerinin ve Lyapunov boyutunun sistem parametresi ile değişimi (Romeiras,1992).

#### 1.4.4. Kolmogorov Entropisi

Tahmin edilebilir (integre edilebilir) sistemler ileriye dönük gelişmelerinde yeni bilgiler üretmezler ve bu sebepten dolayı entropileri sıfırdır. Bunun yanında, kaotik dinamik sistemler yeni ölçümlerle sürekli bilgi üretirler ve entropileri pozitiftir (Farmer, 1982). Fizikte entropi, bir sistemin girilebilir durumlarının (sistemle ilgili yararlanılabilen makroskobik bilgi ile çelişmeksizin, bir sistemin içinde bulunabileceği herhangi bir mikrodurum) logaritması olarak tanımlanırken, olasılık teorisinde entropi, deneylerin performansında yok edilen belirsizlik veya kazanılan bilginin bir ölçüsüdür (Benettin, 1976; Young, 1983). Enerjisi mükemmel dağılmış moleküler bir sistem termodinamik anlamda ölüdür. Bunun yanında farklı moleküler enerji dağılımına sahip bir sistem mekanik iş yapabilme olanağına sahiptir. Moleküler seviyede entropi kavramı düzenlilik kavramı ile sıkı sıkıya ilişkilidir. Bir durum ne kadar düzensiz ise entropisi de o kadar büyüktür. Buna örnek olmak üzere suyun bilindiği gibi katı, sıvı ve buhar fazları göz önünde bulundursun. Sıvı ve buhar fazlarına ilişkin entropi değerleri  $h(\text{sıvı}) = 1.3062$  (kJ/kgK),  $h(\text{buhar}) = 7.3554$  (kJ/kgK) (Çambel, 1993) dir. Bu sonuçlardan da görüldüğü gibi entropisi büyük olan buhar fazlı sistem daha çok düzensizliğe sahiptir. Entropi, Lyapunov üstellerine benzeyen ve sistemin kaos'ta olup olmadığını belirleyen diğer önemli fiziksel bir büyüklüktür. Kayıplı dinamik sistemlerin, bilgi ile ilişkili olan en temel özelliklerinden biri Kolmogorov entropisidir. Bir T anında sistemin bir yörüngesinin  $\epsilon$  duyarlılıkla gözlenmesi ile kazanılan  $I(\epsilon, T)$  bilgisi entropi ile ilişkilidir. Kolmogorov entropisi çok uzun yapılan gözlemlerin sonucunda elde edilir. Bunu matematiksel olarak aşağıdaki gibi vermek mümkündür (Farmer, 1983; Hilborn, 1994; Jacobs, 1989; Rosenstein, 1993).

$$h_K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(\epsilon, T)}{T} \quad (59)$$

Buradaki  $\epsilon$  duyarlılığı x durum vektörünün her hangi bir koordinatının bir ölçümdeki belirsizliğidir. Düzenli deterministik hareketlerde Kolmogorov entropisi sıfır ve rastgele gürültüye neden olan sistemlerde sonsuzdur. Kaotik sistemlerde de sıfırdan büyük sonlu bir değer almaktadır. Genelde kaotik sistemlerde Kolmogorov entropisi, Oseledec ve

Piesin'in matematiksel sonuçlarına dayanan ve pozitif Lyapunov üstellerin toplamları olarak tanımlanan aşağıdaki ifade ile verilir.

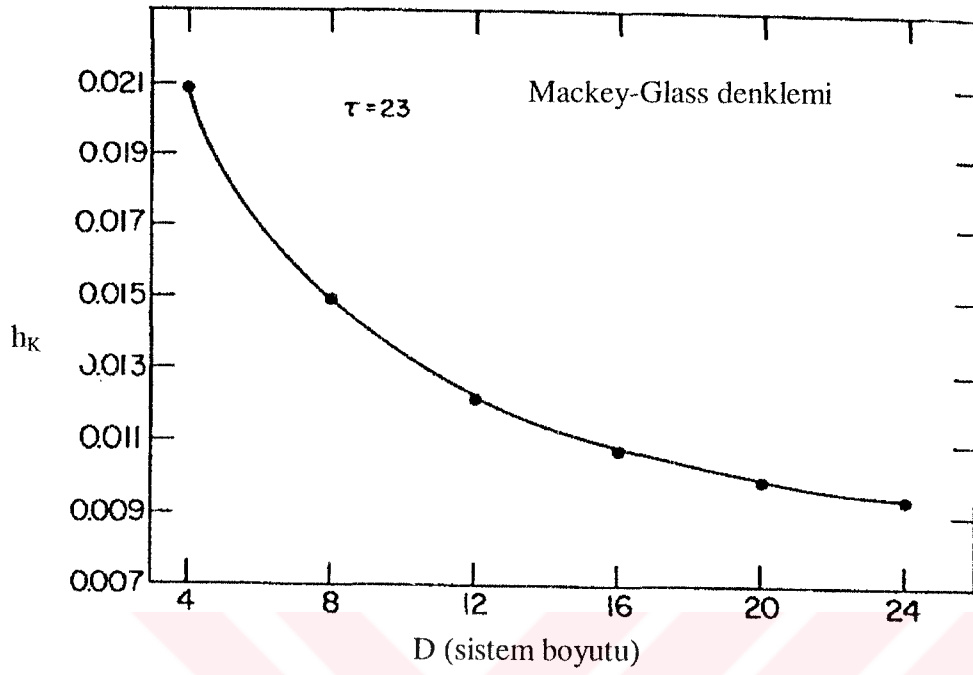
$$h_K = \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \geq 0}}^n \lambda_i \quad (60)$$

G. Benettin ve arkadaşları, gravitasyonel potansiyellerle birbirlerine bağlanan bir boyutlu N tane paralel tabakadan meydana gelmiş, yani N serbestlik dereceli sistemlerdeki çalışmada, Kolmogorov entropisinin serbestlik derecesi ile doğrusal olarak arttığını gösterdiler (Benettin, 1979). Mackey-Glass ve Henon sistemlerini örnek alan P. Grassberger ve I. Procaccia'nın çalışmalarında da Kolmogorov entropisinin artan sistem boyutu ile sürekli artmayıp sonlu bir limit değerine yaklaştığı gösterilmiştir (Grassberger, 1983). Bu iki ayrı çalışmadaki entropi değerleri, sistemler basit dereceden kaotikliğe sahip oldukları için, küçük değerli olup, bunların sayısal değerleri  $k_H$  (Henon) = 0.325 ve  $h_K$  (Mackey-Glass denklemi) = 0.008 dir.

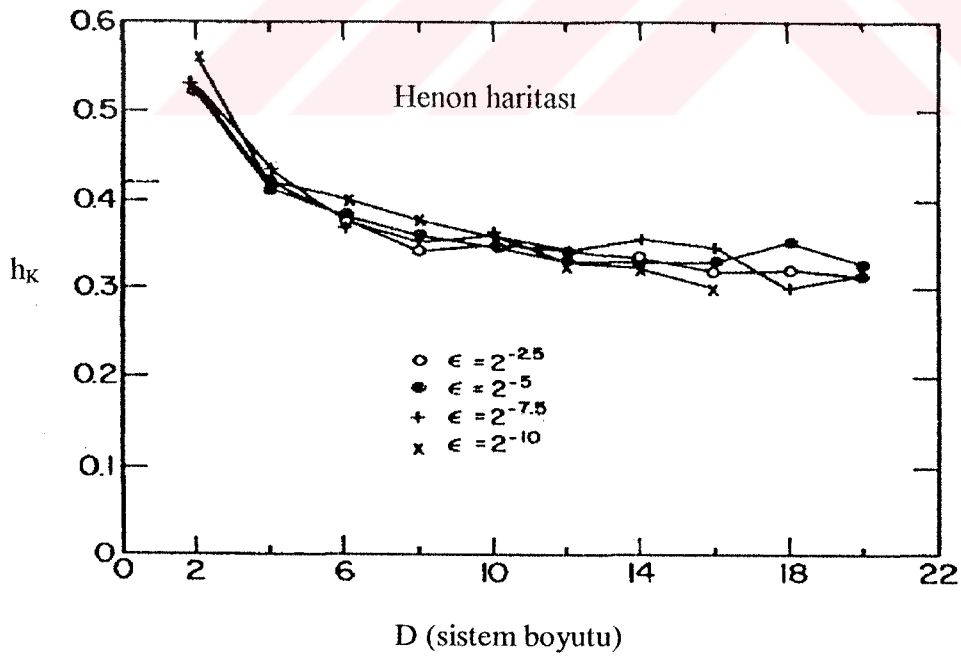
Bu sistemlerle ilgili olarak, Kolmogorov entropisi ile sistem boyutu arasındaki değişim Şekil 20'de verilmiştir. Bir başka çalışma da Antoni M. Correig tarafından Antartika'da Ocak-Şubat 1990 periyodunu içeren ve olaylar arasında ortalama 136 dakika olan 546 veriden oluşmuş sismik kayıtların üzerinde yapılmış ve bu kayıtların analizinden elde edilmiş sonuçlar Şekil 21'de verilmiştir (Correig, 1997). Bu çalışma ile artan sistem boyutu ile sonlu bir Kolmogorov entropisi elde edilmiştir. Ayrıca, değişik boyutlu sistemlerde pozitif Lyapunov üstellerin toplamları olarak verilen Kolmogorov entropileri Tablo 4'te verilmiştir.

#### 1.4.5. Fraktal ve Lyapunov Boyut

Fraktal boyutun kesin bir tanımını vermeden önce, fraktal yapıları karakterize eden nitel özellikler ilk olarak tanımlanmalıdır. İlk özellik kendine benzerliği vurgulanmalıdır. Tekrarlanmış büyütmelerde fraktal yapılar genellikle hep aynı gözükürler ve fraktal yapıların ölçek değişmez yapılar oldukları söylenir. Bulutlar küre şeklinde değildir, dağlar koni şeklinde değildir, ağaç kabuğu yumuşak değildir ve ne de şimşek doğru boyunca ilerler (Bai-Lin, 1990).

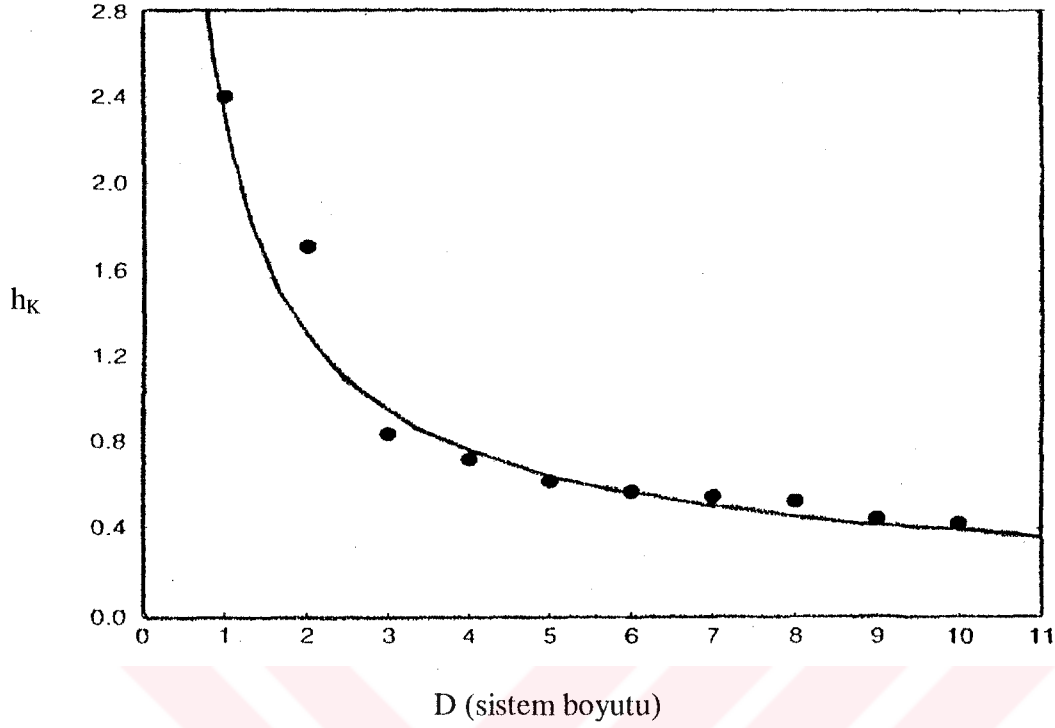


(a)



(b)

Şekil 20. Sistem boyutu ile Kolmogorov entropisinin değişimi. (a) Mackey-Glass denklemi, (b) Henon haritası (Grassberger, 1983).



Şekil 21. Sismik kayıtlardan elde edilen sonuçlar için Kolmogorov entropisinin sistem boyutu ile değişimi (Correig, 1997).

Tablo 4. Değişik sistemlerin Lyapunov üstelleri ve bunlarla ilişkili olan  $h_K$  (Kolmogorov entropileri)  $D_{KY}$  (Kaplan – Yorke) Lyapunov boyutları (Sano, 1985).

Sistem	Lyapunov üstelleri
Henon haritası ( $a = 1.4, b = 0.3$ )	0.417
	-1.58
	$h_K = 0.417, D_{KY} = 1.26$
Lorenz denklemleri ( $r = 40, \sigma = 16, b = 4$ )	1.37
	0.00
	-22.37
	$h_K = 1.37, D_{KY} = 2.06$
Rössler denklemleri ( $a = b = 0.2, c = 5.7$ )	0.069
	-0.0002
	-4.978
	$h_K = 0.069, D_{KY} = 2.01$
Mackey-Glass denklemleri ( $a = 0.2, b = 0.1, c = 10, T = 30$ )	0.0071
	0.0027
	0.000
	-0.0167
	-0.0245
	$h_K = 0.0098, D_{KY} = 3.54$

Doğada belli kısıtlamalar içerisinde araştırılan sistemlerin boyutu tam sayılarla ifade edilir. Fakat gerçeğe yakın sistemlerde bu durumun bulunması mümkün değildir. Çünkü gerçek sistemlerde kayıp vardır. Bunun açık bir örneği türbülanslı akışlarda görülmektedir. Bir akışkan akmış olduğu uzay bölgesini tam anlamıyla doldurarak akmaz, bunun sonucu olarak çalışılan sistemin gerçek boyutu daima, bulunulan uzayın boyutundan küçüktür.

Kayıplı sistemlerin belirlenmelerinde boyut kavramı önemli bir yer tutmaktadır, ve boyutun tanımı da çeşitli şekillerde yapılmıştır. Tam sayı olmayan kesirli boyutların en basiti fraktal boyut olup, en rahat Cantor kümesi olarak adlandırılan yapı ile açıklanabilir. Bu iş için birim uzunluklu bir çubuk alınarak üç eşit parçaya bölünüp ortadaki kısım atılır. İkinci aşamada, geriye kalan parçalara benzer işlem uygulanır. Sonuçta sonlu uzunluklu ve sonsuz sayıda noktadan oluşmuş bir küme elde edilir. Böyle bir kümenin fraktal boyutu, aşağıdaki şekilde ifade edilir (Crawford, 1984; Feder, 1989; Jacobs, 1989; Rietmen, 1989; Yavaş ve Akkaş, 1995).

$$D_F = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309 \quad (61)$$

1-boyutlu sistemlerde fraktal boyut sıfırdan büyük birden küçük, 2-boyutlu sistemlerde ikiden küçük, birden büyüktür. Kayıplı sistemlerin geometrik yapılarının açıklanmasında önemli yer tutan boyut kavramına, çeşitli araştırmacılar küçük farklarla yeni tanımlamalar getirmişlerdir. Bunlardan en fazla kullanılanı ve yüksek boyutlu sistemlerde daha iyi sonuçlar vereni Kaplan-Yorke varsayımdır. Bu varsayıma göre hesaplanan boyut aşağıdaki ifade ile verilmektedir (Crutchfield, 1980; Wolf, 1985).

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (62)$$

Burada  $j$  bir tam sayıdır ve  $\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0$  ile  $\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$  koşulları sağlamalıdır.



Tablo 5. Değişik boyutlu çeşitli sistemlerde sistem parametrelerinin değerleri, Lyapunov üstelleri ve Lyapunov boyutları

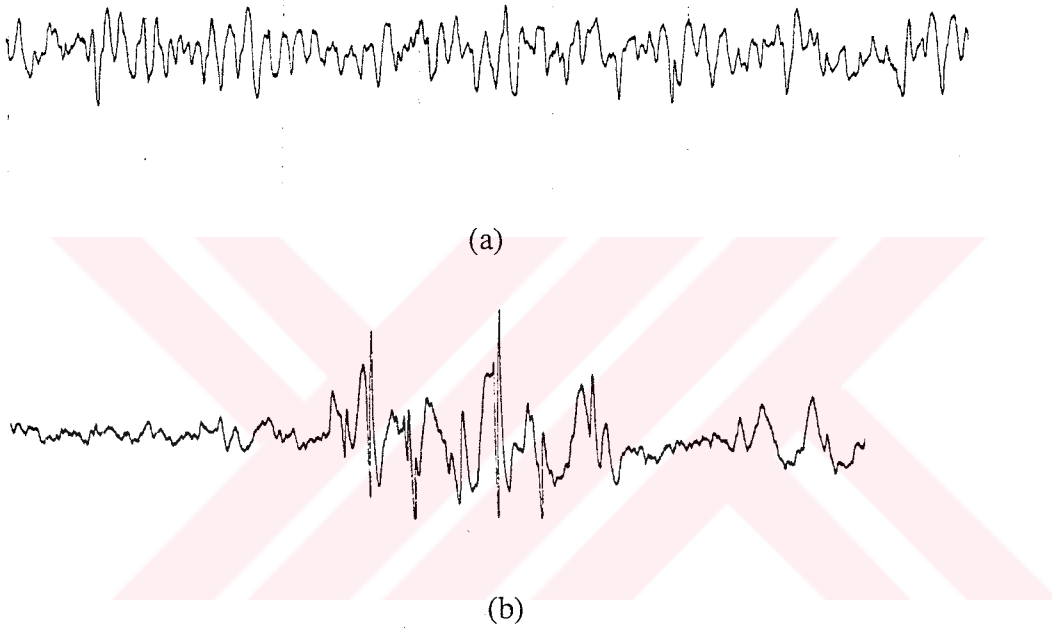
Sistem	Parametre Değerleri	Lyapunov Spektrumu	Lyapunov Boyutu
Henon (Wolf, 1985) $x_{n+1} = 1 - ax_n + y_n$ $y_{n+1} = bx_{n+1}$	$a = 1.4; b = 0.3$	$\lambda_1 = 0.603$ $\lambda_2 = -2.34$	$D_L = 1.26$
Rössler-kaos (Wolf, 1985) $\dot{x} = -(y + z)$ $\dot{y} = x + ay$ $\dot{z} = b + z(x - c)$	$a = 0.15; b = 0.2$ $c = 10.0$	$\lambda_1 = 0.13$ $\lambda_2 = 0.00$ $\lambda_3 = -14.1$	$D_L = 2.01$
Lorenz (Wolf, 1985) $\dot{x} = \sigma(y - x)$ $\dot{y} = x(r - z) - y$ $\dot{z} = xy - bz$	$\sigma = 16; R = 45.92$ $b = 4.0$	$\lambda_1 = 2.16$ $\lambda_2 = 0.00$ $\lambda_3 = -32.4$	$D_L = 2.07$
Rössler-hiperkaos (Wolf, 1985) $\dot{x} = -(y + z)$ $\dot{y} = x + ay + w$ $\dot{z} = b + xz$ $\dot{w} = cw - dz$	$a = 0.25; b = 3.0$ $c = 0.05; d = 0.5$	$\lambda_1 = 0.16$ $\lambda_2 = 0.03$ $\lambda_3 = 0.00$ $\lambda_4 = -39.0$	$D_L = 3.005$
Zorlanmış Toda (Yavaş ve Akkaş, 1996) $\dot{x} = y$ $\dot{y} = -cy + 1 - \exp(-x) + f \sin(\omega t)$ $\dot{\phi} = \omega$	$c = 0.1$ $\omega = 0.6,$ $f = 3.1$	$\lambda_1 = 0.104$ $\lambda_2 = 0.00$ $\lambda_3 = -0.236$	$D_L = 2.43$

Tablo 5'te sıralanmış olan sistemler için hesaplanan Lyapunov boyutları Kaplan-Yorke yöntemine göre hesaplanmıştır. Bu sistemlerden ilk dördü Wolf (1985)'tan ve beşincisi Yavaş (1992)'tan alınmıştır.

#### 1.4.6. Zaman Serileri

İnsan ve hayvanın biyolojik fonksiyonlarının bir çoğu ile bazı doğal olaylar (örneğin atmosferik olaylar, yer sarsıntıları ve çeşitli hastalıkların yayılımı gibi) zaman

serileri yardımı ile analiz edilebilir. Bunun esası zamanın fonksiyonu olarak basınç veya hacim gibi belirli bir değişkenin kaydedilmiş grafiğine dayanır. Bir elektrokardiyogram (EKG)'da ve electroencephalogram (EEG)'da gerilim değişimleri zamana göre çizilir. Şekil 22(a)'da normal bir insandan alınan EEG işaretlerinin zamanla değişimleri görülürken, Şekil 22(b)'de hasta bir insandan alınan ve düzensiz olarak adlandırılan EEG işaretleri görülmektedir.



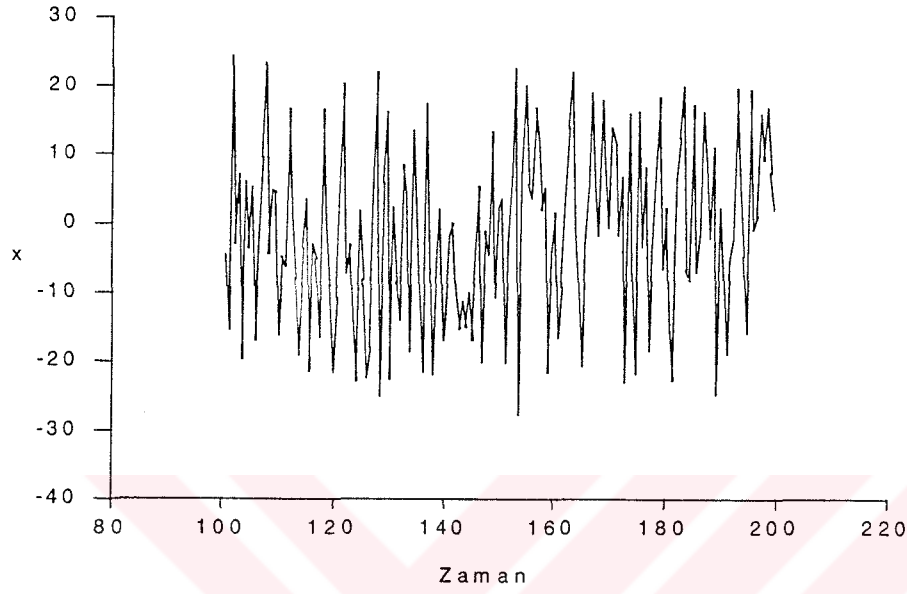
Şekil 22. (a) Normal, (b) Hasta bir insan için EEG işaretleri.

3-boyutlu kaotik Lorenz sisteminde  $\sigma = 16$ ,  $r = 40$  ve  $b = 4$  parametre değerleri için  $x$  ve  $y$  durum değişkenlerinin zaman görünümleri Şekil 23'te çizilmiştir.

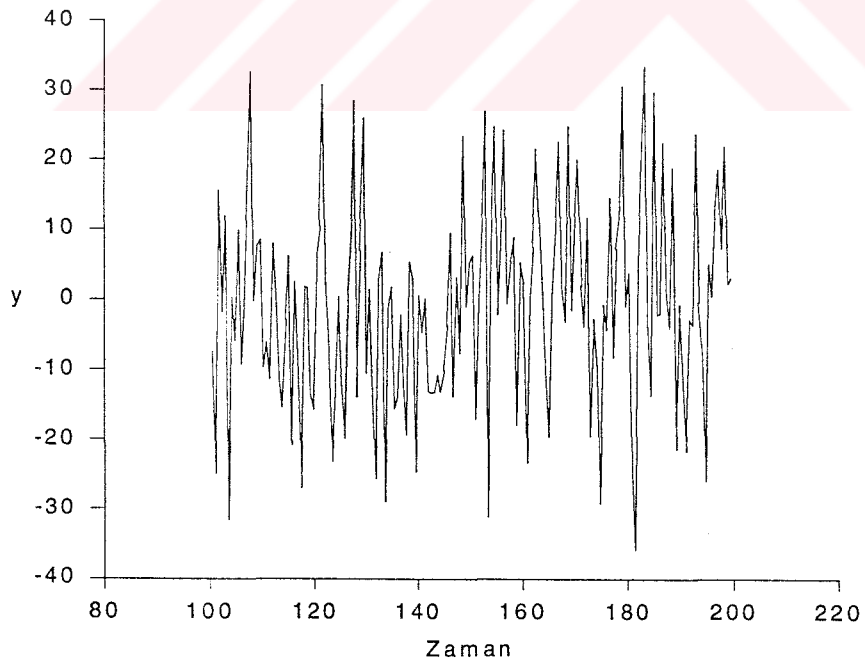
#### 1.4.7. Poincare Haritaları

Poincare haritaları ilk olarak, çiftleşmiş iki osilatörün (Henon-Heiles) bağlanmasında ortaya konuldu. Burada faz uzayındaki bir yörünge aynı faz uzayındaki bir düzlem üzerine izdüşürülür. Bu durum Şekil 24'de görülmektedir. Böyle bir izdüşümde, düzenli hareketler için, sabit enerjili bir yörünge için izdüşümü kapalı bir eğridir ve sistemin enerjisi yavaş değiştiğinde, yavaş değişen bir eğri elde edilir. Yeterince yüksek

enerjilerdeki sistem kaotik olur ve bunun Poincare haritası izole olmuş noktaların rastgele dağılmış bir görünümündedir (Lundqvist, 1988). Yarı periyodik sistemlerin olması



(a)



(b)

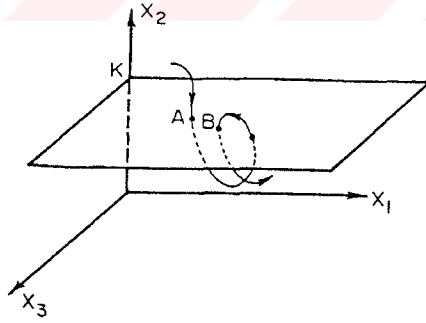
Şekil 23. Kaotik Lorenz sistemi için (a)  $x$  ve (b)  $y$  durum değişkenlerinin zamanla gelişimleri.

durumunda, düzlemlerle olan kesişimler kapalı bir eğri üzerine düşen noktalara neden olur. Kaotik bir bölgede, bir düzlemlerle olan kesişimle bir sonraki arasındaki ilişki tahmin edilemez. Böylece, basit her hangi bir eğri üzerine düşmeyen noktaların kümesi düzlem üzerinde düzensiz bir şekilde karşı düşer (Nicolis, 1995; Sanz-Serna, 1994; Thornton, 1995; Karaesmen, 1992).

Kaotik hareketin karakteristik bir özelliği, faz uzayındaki komşu noktalardan geçen eğriler, düzenli harekette olduğu gibi kapanmazlar, tersine üstel olarak ayrılırlar. Bu durum aynı zamanda başlangıç koşullarına oldukça duyarlı olmayı gösterir.

Çok serbestlik derecesine sahip sistemlerin, çok boyutlu faz uzayındaki yörünge hareketlerinin Poincare haritaları ile tartışılması çok pratik değildir. Genel olarak Poincare haritalarının kullanılmasında  $n$  boyutlu bir faz uzayı,  $(n-1)$  boyutlu hiper bir düzlemlerle kesilir, fakat onların analitik olarak araştırılması çok zordur. Bundan dolayı, bir veya iki boyutlu haritalı basit sistemlerin araştırılması daha iyi sonuçlar vermektedir. Poincare haritaları sistemlerin bütün dinamiklerini içermeseler bile, kaotik hareketin kaos yolu gibi bazı önemli özelliklerinin anlaşılmasında oldukça faydalıdır.

Bonhoeffer-Van der Pol (BVP) osilatörüne ait Poincare haritası Şekil 25'de gösterilmiştir (Rajaserkar, 1993).

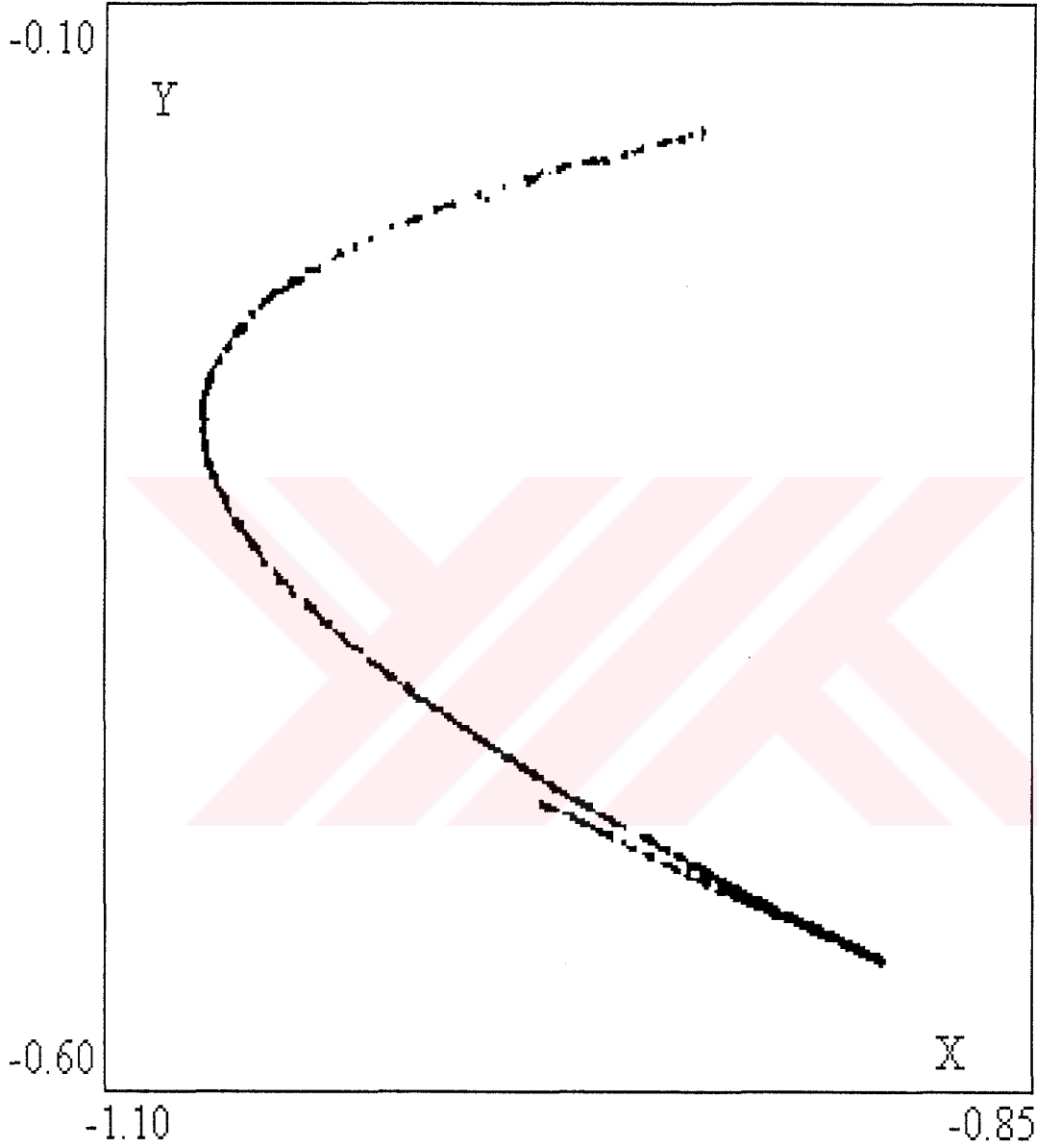


Şekil 24. Dinamik bir sisteme ait Poincare haritasının gösterimi (Ott,1981).

#### 1.4.8. Güç Spektrumu

Herhangi bir  $x(t)$  fonksiyonu periyodik bileşenlerin üst üste gelmesi ile oluşturulabilir.  $x(t)$  periyodik ise, spektrum frekansları, temel frekansın tam katları olan

salınımların doğrusal birleşimi olarak ifade edilir. Bu birleşim Fourier serisini oluşturur.  $x(t)$  periyodik değilse, sürekli frekanslı salınımların bir birleşimi ile temsil edilebilir. Böyle



Şekil 25. BVP osilatörüne ait Poincare haritası (Rajaserker, 1993).

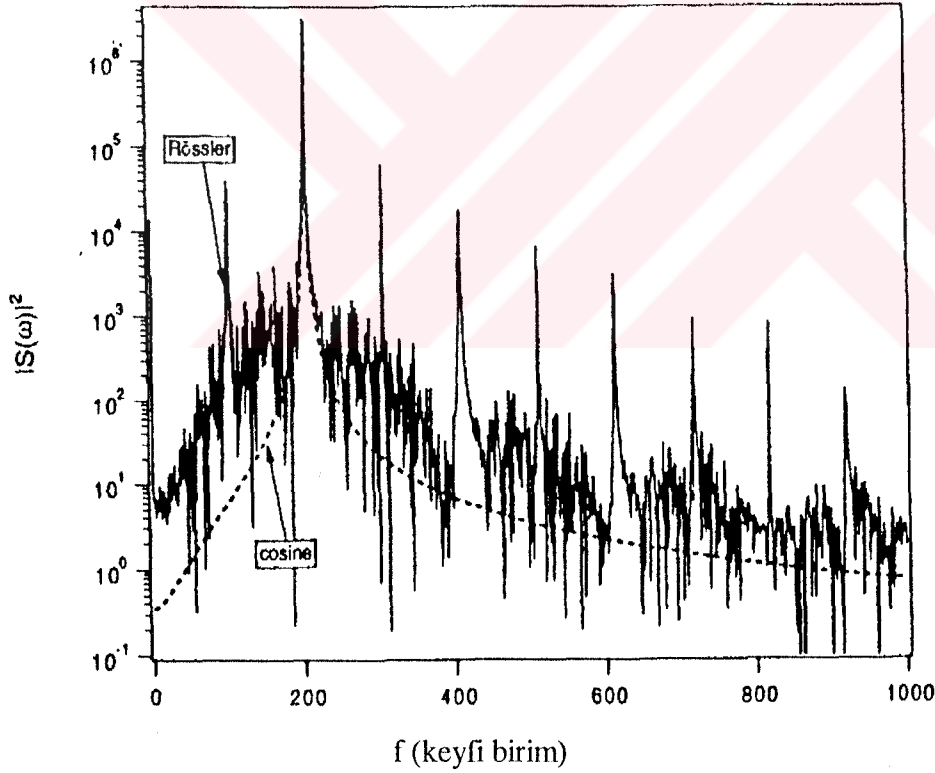
bir spektrum ise Fourier dönüşümünü verir. Karmaşık ve çok periyotlu davranış ile kaos arasındaki ayırımı yapmak için, denklemini aşağıda verilen  $x(t)$  işaretinin Fourier dönüşümünden sıkça yararlanır (Carroll, 1993; Lundqvist, 1988; Yavaş ve Akkaş, 1995).

$$x(\omega) = \int dt \exp(i\omega t)x(t) \quad (71)$$

Fourier dönüşümü genelde kompleks değerli bir fonksiyon olduğu için, dönüşümün modül karesi gerçel değerli fonksiyon olarak kullanılır. Güç spektrumu aşağıdaki ifade ile verilir.

$$p(\omega) = |x(\omega)|^2 \quad (72)$$

Rössler sistemine ait ve 4096 veriden oluşmuş güç spektrumu Şekil 26'da görülmektedir (Carroll, 1993).



Şekil 26. Rössler sistemine ait güç spektrumu (Carroll, 1993).

### 1.4.9. Senkronizasyon

Kaotik sistemlerin senkronizasyonu hakkında kısa bilgi aşağıda verilmeye çalışılacaktır. Dinamik bir sistem aşağıdaki diferansiyel denklemlerle tanımlansın.

$$\dot{u}(t) = f(u) \quad (73)$$

Bu sistem  $u = (v, w)$  şeklinde iki alt sisteme bölünsün

$$\dot{v} = g(v, w) \quad (74)$$

$$\dot{w} = h(v, w) \quad (75)$$

Burada  $v = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $g = (f_1(u), \dots, f_m(u))$ ,  $w = (u_{m+1}, \dots, u_n)$  ve  $h = (f_{m+1}(u), \dots, f_n(u))$ .  $u_i$  değişkenlerinin yeniden düzenlenmesi  $v, w, g, h$ 'in aldığı değerlerden önce olduğu için bölme işlemi tamamen keyfidir. İlk cevap sistemi,  $w$  sistemi ile aynı olan yeni bir  $w'$  alt sistemi ile oluşturulabilir. Bu amaçla  $h$  fonksiyonunda  $v'$  yerine  $v$  değişken takımı koyulur, ve bu yeni sisteme (74) ve (75) denklemleri eklenerek aşağıdaki sistem bulunur.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= g(v, w), \\ \dot{w} &= h(v, w), \\ \dot{w}' &= h(v, w'). \end{aligned} \quad (76)$$

(73) denklemi ile yönetilen sistem ana (master) sistem olarak düşünölsün. Bu sistem birbirinden bağımsız olan  $v$  ve  $w$  gibi iki alt sisteme bölünsün. Bu iki alt sistem (74) ve (75) denklemleri ile verilebilir. Cevap alt sistemi aşağıda verilen iki alt sistemle yönetilir.

$$v' = v \quad (77)$$

$$\dot{w}' = h(v, w') \quad (78)$$

(78) denklemi  $w$  için (75) denklemine oldukça benzer olmakla beraber  $w$  ve  $w'$  farklı başlangıç koşullarına sahiptir. Böylece ana sistem (74) ve (75) denklemlerinden, cevap sistemi ise (77) ve (78) denklemlerinden meydana gelmiştir. Yukarıdaki ifadeler E-8 denklemi ile verilen Lorenz sistemine uygulandığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir (He, 1992).

$$v' = v = x = x' \quad (79)$$

$$w = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$w' = \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$g = \sigma(y - x) \quad (82)$$

$$h = \begin{bmatrix} rx - y - xz \\ xy - bz \end{bmatrix} \quad (83)$$

(80) cevap alt sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-x \\ x-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rx \\ 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

$w'$  cevap alt sistemi,  $w$  cevap alt sisteminin bütün değişkenleri üzerine üs işareti konularak (84) denklemi ile verilebilir. Şimdi üssüz ve üslü değişkenler arasındaki fark yıldız sembolü ile temsil edilsin, yani  $y^* = y - y'$  ve  $z^* = z - z'$  olsun. Bu durumda aşağıdaki denklem elde edilir.



$$\dot{w}' = \begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-x \\ x-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ z^* \end{bmatrix} \quad (85)$$

Bir cevap alt sisteminin asimtotik kararlılığını test etmenin pratik yollarından birisi, kendisi pozitif tanımlı ve türevi negatif olan uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulmaktır. Aynı zamanda bu fonksiyon, sistemin toplam enerjisine karşılık gelmektedir. Şimdi Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilsin.

$$E = \frac{1}{2}(y^{*2} + z^{*2}) \quad (86)$$

(86) denkleminde zamana göre türev alıp, uygun değerler yerlerine yazıldığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned} \dot{E} &= y^* \dot{y}^* + z^* \dot{z}^* \\ \dot{E} &= y^* (-y^* - xz^*) + z^* (xy^* - bz^*) \\ \dot{E} &= -y^{*2} - bz^{*2} \leq 0 \end{aligned} \quad (87)$$

(87) denklemi sadece sistemin orijininde geçerlidir, ve bu sebepten dolayı (80) cevap alt sistemi asimtotik olarak kararlıdır.

Cevap sistemi ne zaman kararlı bir alt sistemdir? Bu soruya yanıt verebilmek için, şöyle bir yol izlenir.  $w(t)$ 'nin  $w(0)$  başlangıç koşullu bir yörüngesinin olduğunu ve  $t=0$  da  $w'(0)$  komşuluğundan başlayan bir yörünge düşünölsün. Bu koşullar altında  $\Delta w(t) = |w(t) - w'(t)| \rightarrow 0$  mıdır? Bu durum vektör alanları kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{w} &= h(v, w) - h(v, w') \\ \Delta \dot{w} &= D_w h(v, w) \Delta w + O(v, w). \end{aligned} \quad (88)$$

Burada  $D_w h$ , cevap değişkenlerine göre cevap vektör alanının Jakobiyenidir ve  $O(v, w)$  ise yüksek dereceden terimleri ihtiva etmektedir. Küçük  $\Delta w$ 'nın limit değerinde yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\Delta \dot{w} = D_w h(v, w) \Delta w. \quad (89)$$

Normal olarak,  $w(t)$  sabit (belirli nokta) veya periyodik bir yörüngeyi temsil ettiği zaman  $D_w h$ 'in öz değerleri belirlenebilir ve bu yolla  $w(t)$ 'nin kararlılığı belirlenebilir. Bununla beraber  $w$  sistemi  $v$  kaotik işaretleriyle sürülmek istenir ve bu basit çözümler çalışmaz. Bunun bir çözümü, Lyapunov üstellerini hesaplamakla bulunur. Bu nicelikler, çekici üzerinde ortalanmış yörünge boyunca küçük yerdeğiştirmelerin genişleme veya sıkışmasını tanımlayan üstellerdir (Carroll, 1991; Farmer, 1982; Pecora, 1991; Wolf, 1985). Diğer bir deyişle bu üsteller yörüngedeki küçük yerdeğiştirmelerin, kararlı veya kararsız yönlerde olup olmadıklarını ifade ederler. Eğer kararlı bir alt sistem için aranıyorsa, tüm küçük bozulmalar üstel olarak sifıra gidecek şekilde bu üstellerin negatif olması istenebilir. Bu hesaplama (89) denkleminin  $(u, v, w)$  sistemi boyunca integrasyonu ile yapılır.

3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemlerinin tek değişkenle sürülmeleri durumun, cevap alt sistemlerinin kararlı olmaları için, bütün Lyapunov üstellerinin negatif oldukları Tablo 6'da verilmiştir (Güemez, 1995). (E-9) denklemi ile verilen 5-boyutlu Lorenz sisteminin tek değişkenle sürülmesi durumunda, senkronizasyonun sağlandığı Şekil 27'de verilmiştir (He, 1992). Bu senkronizasyonun matematiksel olarak sağlanmasının önemli göstergesi için kendisi pozitif tanımlı ve türevi negatif olan Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_3^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2}) & (\beta > 0, a > 0) & (90) \\ \dot{E} &= -x_2^{*2} - \beta x_3^{*2} - a x_4^{*2} - 8x_5^{*2} \leq 0 \end{aligned}$$

$\dot{E} \leq 0$  olması, cevap alt sisteminin asimtotik kararlı olduğunu ve ana sistemle senkron olduğunu gösterir.

### 1. 4. 10. Kuadratik Form

Homojen polinom tipinde ve kuadratik yapıda olan Lyapunov fonksiyonları aşağıdaki gibi verilir.

$$E = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2 \quad (91)$$

(91) denklemini  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değişkenleri için kuadratik şekil olarak adlandırılır. (91) denklemini daha kısa biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (92)$$

Kuadratik biçim, matris gösterimi ile aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$E = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (93)$$

Simetrik  $[a_{ij}]$  matrisi, kuadratik biçimin matrisi olarak adlandırılır.

$n$  değişken durumunda  $E = [x]^T [a_{ih}] [x]$  gerçel, simetrik ve kuadratik biçimi, aşağıdaki koşul sağlandığında pozitif yarı tanımlı olarak adlandırılır.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \geq 0 \quad (94)$$

burada  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 'in gerçel değerleri için bütün sonlu değerlerde (93) ifadesi geçerlidir.

N değişkenli bir  $E = [x]^T [b_{ij}] [x]$  gerçel simetrik kuadratik biçim, aşağıdaki koşul sağlandığında pozitif tanımlı olarak adlandırılır. Bu koşula göre  $[x]^T [b_{ij}] [x]$  yarı tanımlı olmalı ve buna ilaveten  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere yalnız  $x_i = 0$  için

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j = 0 \quad (95)$$

olmalıdır.

$\frac{d}{dt}[x] = [A][x]$  biçimli bir doğrusal sisteme ilişkin Lyapunov fonksiyonun seçiminde aşağıdaki yol izlenebilir. Kuadratik biçimli oldukları için aşağıdaki fonksiyon seçilebilir.

$$E = [x]^T [a][x] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (96)$$

Burada belirli olmayan elemanlar  $[a]$  ile gösterildi. Örneğin ikinci dereceden bir sistem için  $[a]$  aşağıdaki şekli alır.

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (97)$$

(96) denkleminin zamana göre türevi alınır,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d[x]^T}{dt} [a][x] + [x]^T [a] \frac{d[x]}{dt} \\ \frac{dE}{dt} &= [x]^T \{ [A]^T [a] + [a][A] \} [x]\end{aligned}\quad (98)$$

$\dot{E}$  fonksiyonu negatif tanımlı olacak şekilde sınırlanır, yani

$$[x]^T \{ [A]^T [a] + [a][A] \} [x] = \text{negatif tanımlı} \quad (99)$$

veya kısaca

$$[a][A] + [A]^T [a] = [-I] \quad (100)$$

yazılabilir.

$[a]$  matrisinin her bir elemanının değeri tanımlandıktan sonra  $[a]$ 'nın işaret tanımlılığı test edilir.  $[a]$  pozitif tanımlı ise,  $[x]^T [a][x]$  ilgili sistem için Lyapunov fonksiyonudur.

Lyapunov fonksiyonun bulunmasına ilişkin olarak Şekil 1'de verilen RLC devresi göz önünde bulundurulsun. Devredeki fiziksel parametre değerleri  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$  ve  $C = \frac{1}{16} \mu\text{F}$  olarak alınırsa devreyi tanımlayan denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\frac{df_1}{dt} &= \dot{x}_1 = x_2, \\ \frac{df_2}{dt} &= \dot{x}_2 = -16x_1 - 10x_2.\end{aligned}\quad (101)$$

(101) denklem sistemi, matris biçiminde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (102)$$

(102) denklem sistemi için Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki biçimde seçilmiş olsun.

$$\begin{aligned} E &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ E &= [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 0-16 \\ 1-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (103)$$

(100) bağıntısı bu sistem için uygulanırsa,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0-16 \\ 1-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (104)$$

bulunur. Bu matrisel denklemin çözümünden

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{372}{320} \\ a_{12} &= \frac{1}{32} \\ a_{22} &= \frac{17}{320} \end{aligned} \quad (105)$$

bulunur. Bu değerler (103) bağıntısında yerine koyulursa

$$E = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 68/5 & \\ 8 & 117/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (106)$$

bulunur. Burada

$$|68/5| > 0$$

$$\begin{vmatrix} 68/5 & 8 \\ 8 & 117/20 \end{vmatrix} > 0$$

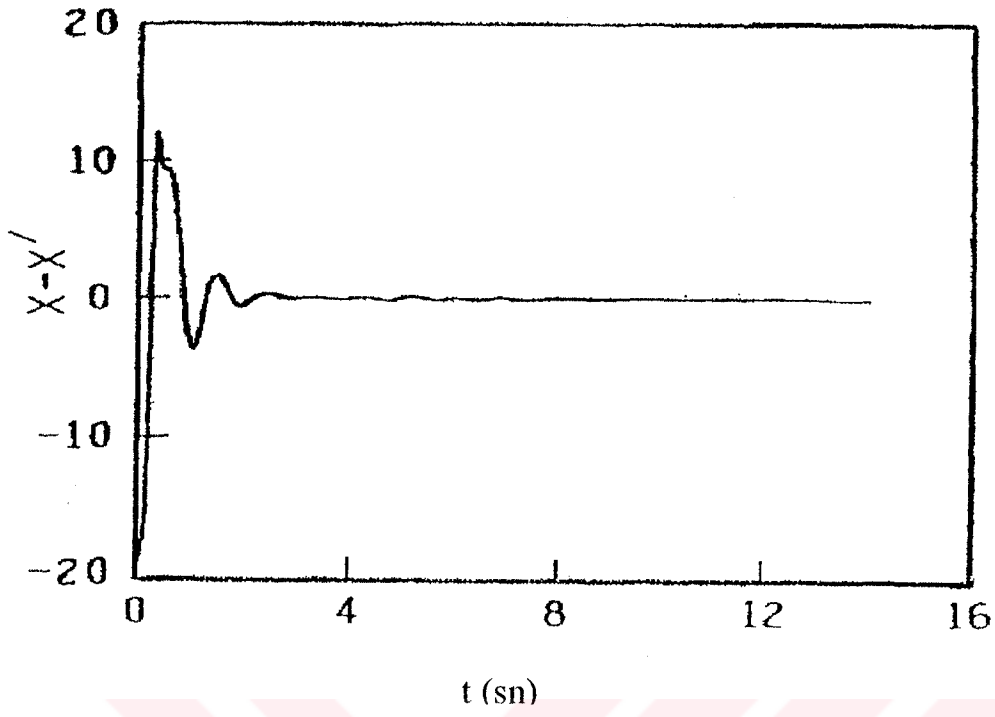
olduğu için  $E(x)$  fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Ayrıca aşağıdaki  $\frac{dE}{dt}$  ifadesi incelenirse negatif tanımlı olduğu kolayca görülebilir.

$$\frac{dE}{dt} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} -256-160 \\ -160-101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Bu yüzden (102) sistemi asimtotik kararlıdır.

Tablo 6. 3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemlerinde değişik alt sistemler için Lyapunov üstelleri (Güemez, 1995).

Sistem	Süren alt sistem	Lyapunov üstelleri
Loernz ( $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ )	$\sigma y(t)$	(-1.8003, -1.86663, -10.000)
Rössler ( $a = b = 0.2, c = 4.6$ )	$ay(t)$	(-0.0583, -0.1234, -4.2432)



Şekil 27. 5-boyutlu Lorenz sisteminin  $x_1$  durum değişkeni ile sürülmesi durumunda,  $t \rightarrow \infty$  için  $x - x'$  farkının sifira gitmesi (He, 1992).



## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1.1. 3-boyutlu Van der Pol-Duffing Osilatörü (VPDO)

Simulasyonunu yapılmaya çalışılan iki kuyulu kaotik VPDO, doğrusal olmayan Langevin denklemleri ile aşağıdaki gibi verilmektedir (King, 1992, Gomes, 1992).

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{d\psi}{dx} = f(t) \quad (108)$$

Burada  $\gamma$  sönüm sabiti,  $\psi$  iki kuyu potansiyeli ve  $f(t)$  rasgele kuvvet veya beyaz gürültü olarak yorumlanmaktadır.

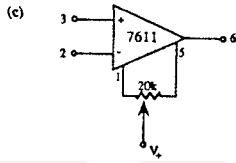
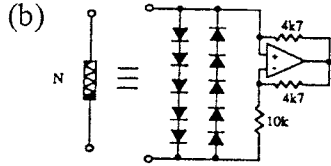
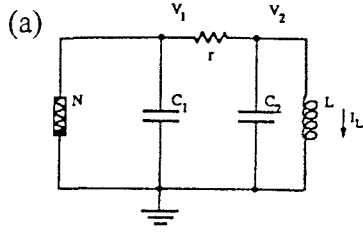
Kaotik VPDO devresinin fiziksel yapısı Şekil 28'de gösterilmiştir. Devre N ile gösterilen doğrusal olmayan negatif direnç, diyot ve işlemsel yükselteçlerin bir kümesinden oluşmuştur. Doğrusal olmayan bir elemanın akım-gerilim ilişkisi aşağıdaki ifade ile verilmektedir.

$$I_N(V) = \gamma + aV + bV^3 \quad (109)$$

Burada  $a < 0$  ve  $b > 0$  dır. Devre düğümlerine Kirchoff'un akımlar yasası uygulanırsa aşağıda görülen denklem sistemi kolayca elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -m(x_1^3 - \alpha x_1 + \mu - x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2 \end{aligned} \quad (110)$$

Durum değişkenleri üzerindeki noktalar zamana göre türevi göstermektedir.  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  sırası ile  $C_1$  ve  $C_2$  kapasitelerinin uçlarındaki gerilimleri ve L bobininin içinden geçen akıma karşılık gelmektedir. Burada devre parametreleri  $m$  ve  $\beta$  daima pozitif olacak şekilde aşağıdaki gibi verilir,



Şekil 28. 3-boyutlu kaotik VPDO sisteminin devre diyagramı. (a) Osilatörün eşdeğer devresi.

(Kullanılan devre elemanları  $C_1=0.001\mu\text{F}$ ,  $C_2=0.1\mu\text{F}$ ,  $L=100\text{mH}$ ( $15\Omega$  dc direnci),  $r=20\text{k}\Omega$  dır.) (b) Devredeki doğrusal olmayan negatif direncin yapısı. Bu doğrusalsızlık IN4148 diyotlarının bir dizisi ile belirlenir. Negatif direncin doğrusal kısmı için 7611 işlemsel yükselteci ve dirençler kullanılarak  $a^{-1} = -10\text{k}\Omega$ 'luk bir direnç elde edilir. (c) Katlama parametrelerini kontrol etmek için kullanılan (b)'deki yükseltece eklenen devre.

$$m = C_2 / C_1, \quad \alpha = -(1+ar), \quad \beta = C_2 r^2 / L, \quad \mu = (b r^3)^{1/2} v \quad (111)$$

$\mu$  ile çift kuyunun göreceli derinliği kontrol edilir ve katlanmalarını sağlar.  $\mu = 0$  olduğunda kuyular eşit olasılığa sahiptir, ve osilatör sisteminin boyutsuz hale getirilmiş denklemleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -m(x_1^3 - \alpha x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2 \end{aligned} \quad (112)$$

3-boyutlu VPDO  $x_1$ ,  $x_2$  ve  $x_3$  durum değişkenlerine ait zaman gelişimleri Şekil 29 (a)-(c)'de verilmiştir. Bu şekiller incelendiğinde hiç bir periyodikliğin olmadığı görülmektedir. Aynı sisteme ait faz görünüşleri de Şekil 30(a)-(c)'de çizilmiştir. Her iki duruma ilişkin şekillerde  $m = 100$ ,  $\alpha = 0.33148572$  ve  $\beta = 300$  fiziksel parametre değerleri ve  $H = 0.001$  adım uzunluğu kullanılmıştır. (112) sisteminin periyodik çekicileri de Şekil

31(a)-(c)'de görülmektedir. Bu durumdaki fiziksel parametreler  $m = 100$ ,  $\alpha = 0.11$  ve  $\beta = 300$  olup adım uzunluğu  $H = 0.001$  olarak alınmıştır.

Kayıplı sistemlerde, sistemin diverjansı negatif sabit bir değer almaktadır (Karaesmen, 1992). 3-boyutlu kaotik Lorenz ve VPDO sistemlerinin vektör alanlarının diverjansları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\text{divF}(x) = -(\sigma + 1 + b) \quad (113)$$

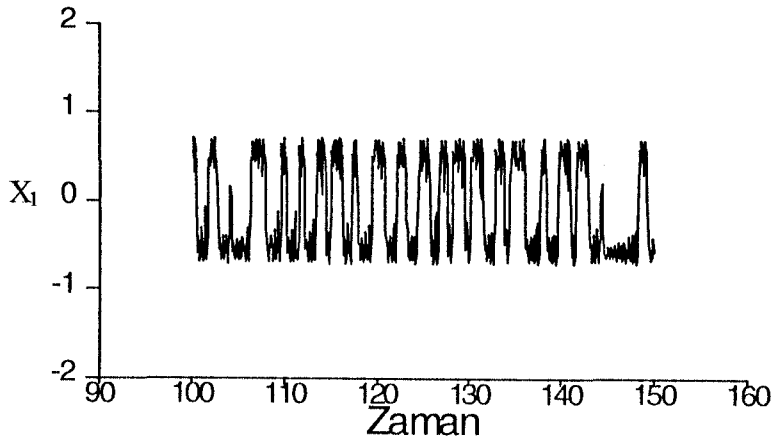
$$\text{divF}(x) = -3m x_1^2 + \alpha m - 1 \quad (114)$$

(113) denkleminde de görüldüğü gibi Lorenz sisteminin diverjansı sadece sistemin fiziksel parametrelerine bağlı olurken; (114) denkleminde VPDO diverjans ifadesi fiziksel parametrelerin yanında, sistemin bir denge (dinlenme) noktasını da içermektedir. Bu diverjans ifadesi Lorenz sisteminde  $\sigma = 16$ ,  $b = 4$  parametre değerleri için  $\text{divF}(x) = -21$  olarak hesaplanırken (Shimada,1979), VPDO  $m$  ve  $\alpha$  sistem için parametrelerini ve  $x_1$  denge noktasını da içermektedir. Sistemin ilginç davranışları  $\alpha$  fiziksel parametresinin değişik değerlerinde gözlemlendi.  $m=100$  ve  $x_1 = -0.59$  olarak alındığında, (114) denkleminin  $\alpha$  sistem parametresinin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

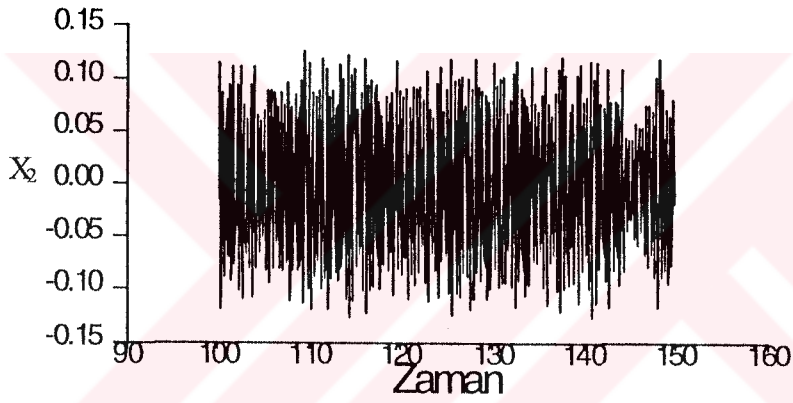
$$\text{divF}(x) = -105.43 + 100\alpha \quad (115)$$

Tablo 7. 3-boyutlu kaotik VPDO Lyapunov üstellerinin  $H$  adım uzunluğu ile değişimi

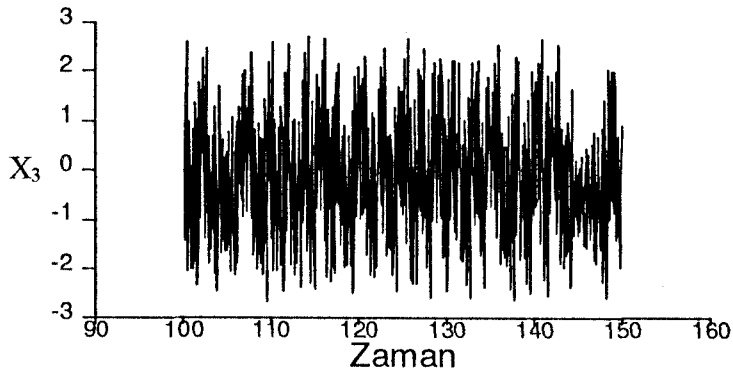
H	divF(x)	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\sum \lambda_i < 0$
0.01	-72.281428	2.46	3.23	-66.85	-60.16
0.001	-72.281428	2.16	0.44	-72.29	-71.69
0.0001	-72.281428	2.13	0.04	-73.30	-71.13
0.00001	-72.281428	2.13	0.00	-73.55	-71.42



(a)

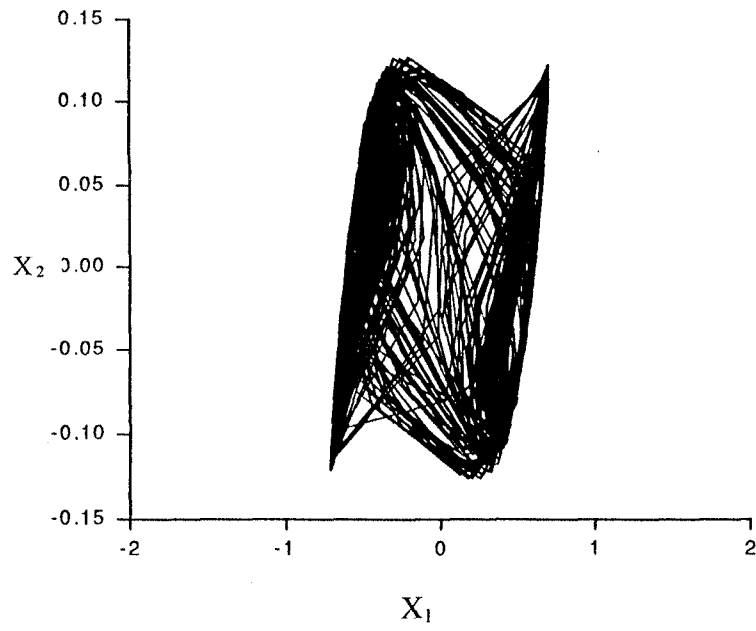


(b)

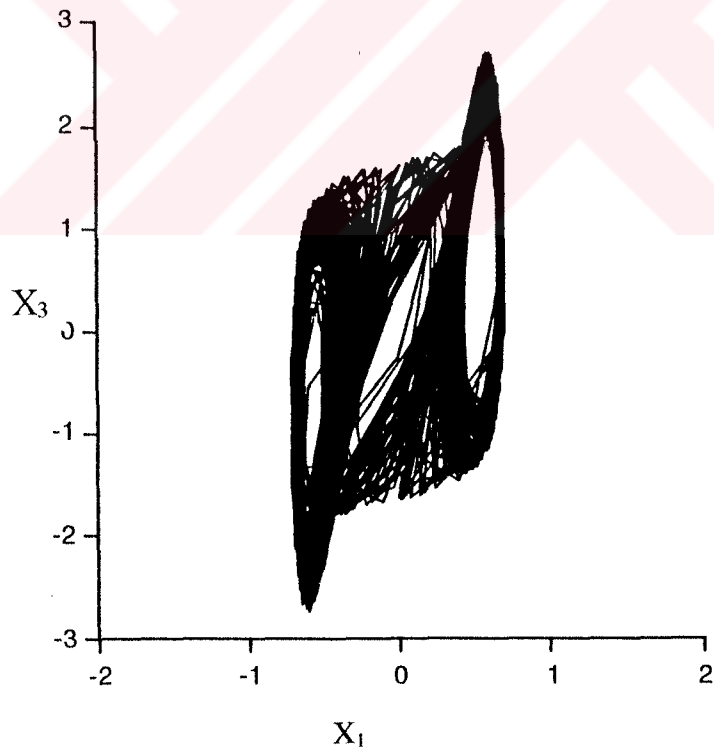


(c)

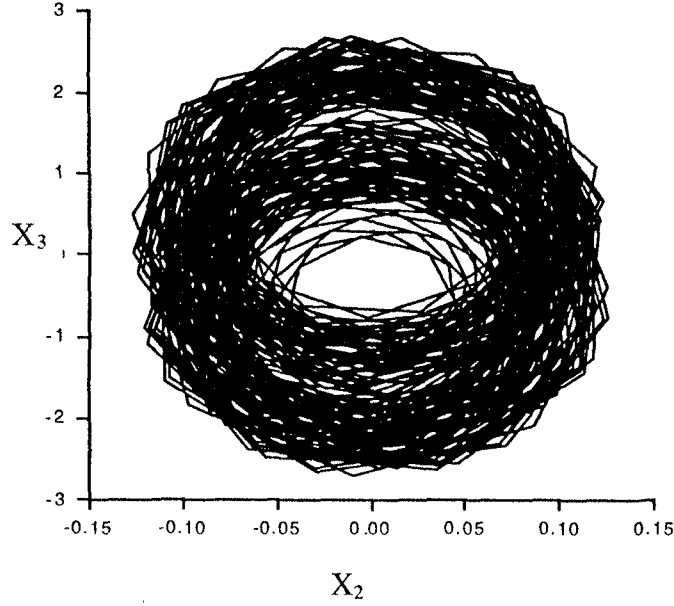
Şekil 29. 3-boyutlu kaotik VPDO (a)  $x_1$ , (b)  $x_2$  ve (c)  $x_3$ 'ün zamanla olan gelişimleri. Bu zaman serilerinde  $m = 100$ ,  $\alpha = 0.33148572$  ve  $\beta = 300$  fiziksel parametre değerleri ile  $H = 0.001$  adım uzunluğu kullanılmıştır.



(a)



(b)



(c)

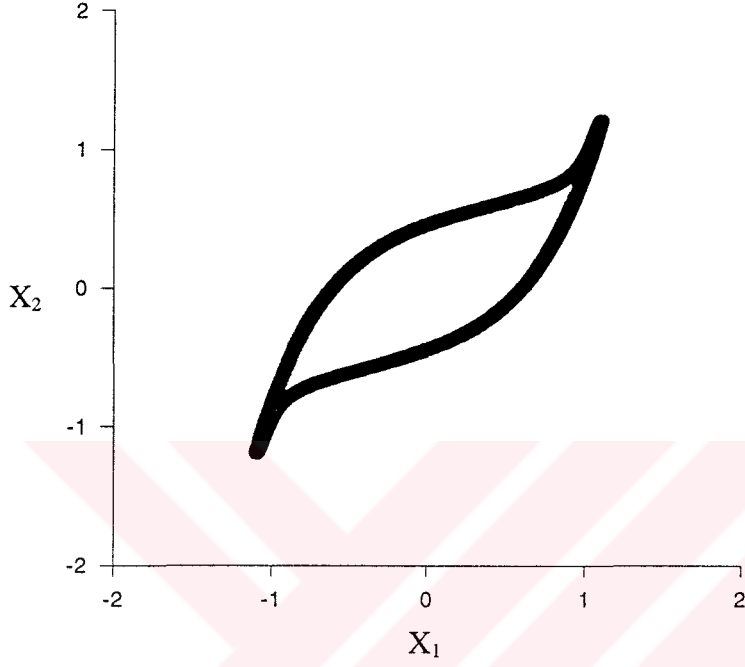
Şekil 30. 3-boyutlu kaotik VPDO sisteminde  $x_1x_2$ ,  $x_1x_3$  ve  $x_2x_3$ 'ün faz görünüşleri. Bu şekiller  $m = 100$ ,  $\alpha = 0.33148572$  ve  $\beta = 300$  fiziksel parametre değerleri ile  $H = 0.001$  adım uzunluğu kullanılarak çizilmiştir.

Sistemin davranışlarında önemli etkisi olan  $\alpha$  parametresi  $\alpha = 0.33148572$  olarak alınır, diverjansın matematiksel değeri  $\text{div}F(x) = -72.281428$  olarak elde edilir. Aynı zamanda bu değer  $H=0.001$  adım uzunluğundaki sistemin en küçük Lyapunov üsteline karşılık gelmektedir. Değişik  $H$  adım uzunluklarında Lyapunov üstellerinin değerleri Tablo 7'de verilmiştir. Tabloda diverjansın değeri, en küçük Lyapunov üsteline  $H = 0.001$  adım uzunluğunda eşitlenebilmiştir.

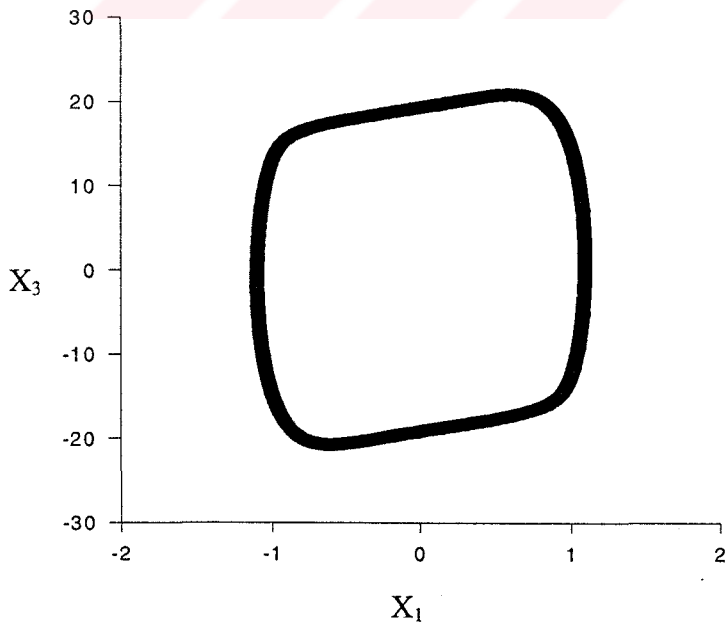
### 2.1.2. 3-boyutlu Sistemlerde Lyapunov Spektrumu

Dinamik bir sistemin Lyapunov üstelleri, komşu yörüngelerin birbirlerinden üstel olarak ayrılmalarının veya yaklaşmalarının bir ölçüsü olarak tanımlanır. 3-boyutlu kaotik sistemler sadece (+, 0, -) biçimindeki Lyapunov spektrumuna sahiptir. 3-boyutlu kaotik VPDO ait Lyapunov spektrumları Alan WOLF'un geliştirdiği program kullanılarak elde

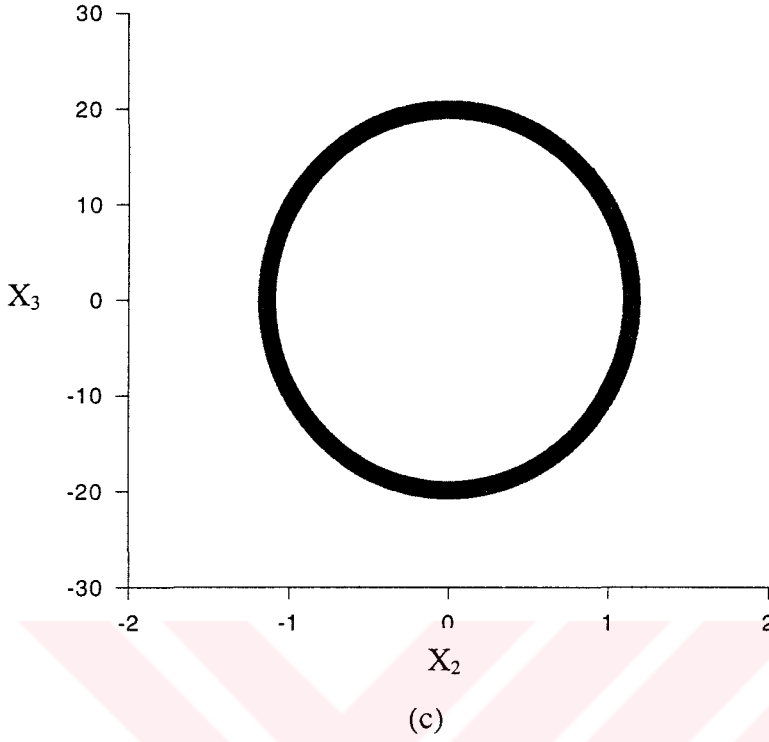
edildi. Aynı program, 3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemlerine de uygulanarak, literatürde verilen sonuçlara ve Tablo 4 ve Tablo 5'tekilere yakın değerler elde edilmiştir.



(a)



(b)



Şekil 31. 3-boyutlu periyodik VPDO sisteminde (a)  $x_1x_2$ , (b)  $x_1x_3$  ve (c)  $x_2x_3$ 'ün faz görünüşleri. Bu şekiller  $m = 100$ ,  $\alpha = 0.11$ ,  $\beta = 300$  fiziksel parametre değerleri ile  $H = 0.001$  adım uzunluğu kullanılarak çizilmiştir.

3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemleri, iki durum değişkeninin çarpımları biçiminde doğrusal olmayan basit türden terimler içermektedir. Bunun yanında burada kullanılan 3-boyutlu VPDO sistemi  $x_1^3$  şeklinde yüksek dereceden doğrusal olmayan bir terim içermektedir. Basit doğrusal olmayan terimli sistemlerde Lyapunov spektrumu  $H = 0.001$  adım uzunluğunda elde edilirken, 3-boyutlu kaotik VPDO de,  $x_1^3$  gibi terimden dolayı, (+, 0, -) biçimindeki Lyapunov spektrumu  $H = 0.00001$  adım uzunluğunda elde edilebildi. Buna benzer bir çalışma (Kapitanik, 1991)'de bulunabilir. Ayrıca değişik karakterdeki doğrusal olmayan terimlerin varlığı, istenilen sonuçlara ulaşmada farklı sayıda iterasyonları gerekli kılmaktadır. Yani 3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemlerinde 20-30 milyon iterasyonla yetinilirken, 3-boyutlu VPDO'de yapılan iterasyon sayısı 200 milyonla olurken, 8-boyutlu VPDO'deki tipik iterasyon sayısı 800 milyon olmuştur. 3, 4 ve 5-



boyutlu VPDO'lerinde belli fiziksel parametre değerlerinde elde edilmiş Lyapunov üstelleri, Kolmogorov entropileri ve Lyapunov boyutları Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. 3, 4 ve 5-boyutlu VPDO'lerine ait sistem parametreleri, Lyapunov üstelleri, Lyapunov boyutları ve Kolmogorov entropileri

3-boyutlu VPDO (kaos)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -m(x_1^3 - \alpha x_1 - x_2), & m &= 100 & \lambda_1 &= 2.13 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3, & \beta &= 300 & \lambda_2 &= 0.00 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2, & \alpha &= 0.33148572 & \lambda_3 &= -73.55 \\ & & & & h_K &= 2.13 \end{aligned} \quad D_L = 2.02$$

4-boyutlu VPDO (hiperkaos)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -m(x_1^3 - \alpha x_1) + x_4, & m &= 100 & \lambda_1 &= 2.13 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3, & \beta &= 300 & \lambda_2 &= 0.43 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2, & \alpha &= 0.33148572 & \lambda_3 &= 0.00 \\ \dot{x}_4 &= -x_2 + x_3 - dx_4, & d &= 1.25 & \lambda_4 &= -75.42 \\ & & & & h_K &= 2.45 \end{aligned} \quad D_L = 3.03$$

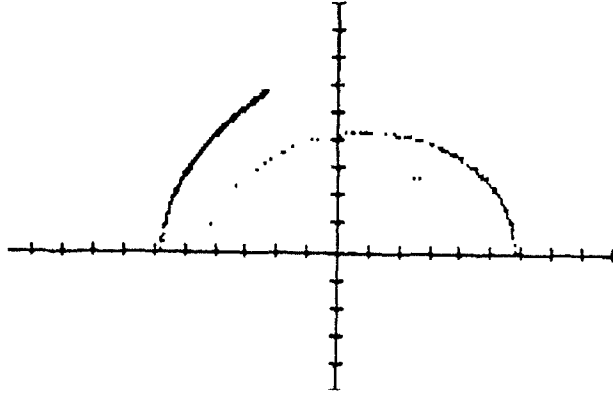
5-boyutlu VPDO (hiperkaos)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -m(x_1^3 - \alpha x_1 - x_2) + x_5, & & & \lambda_1 &= 2.13 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3, & m &= 100 & \lambda_2 &= 0.44 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2, & \beta &= 300 & \lambda_3 &= 0.00 \\ \dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5, & \alpha &= 0.33148572 & \lambda_4 &= 0.00 \\ \dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - x_5, & & & \lambda_5 &= -75.52 \\ & & & & h_K &= 2.48 \end{aligned} \quad D_L = 4.03$$

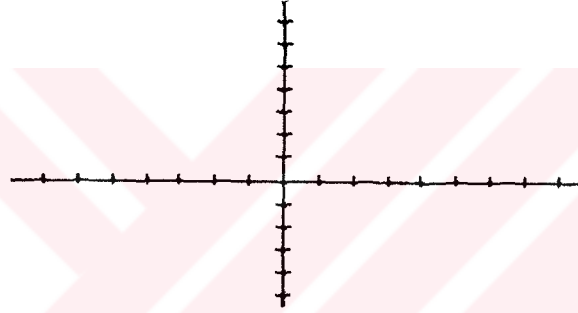
### 2.1.3. VPDO'de Poincare Haritası

3-boyutlu VPDO sistemi için kaotik ve periyodik hareket durumlarına karşılık gelen Poincare haritaları Şekil 32 (a) ve (b)'de verilmiştir. Dinamik sistemlerin davranışlarını modellemede kullanılan sürekli ( $\dot{x} = f(x)$ ) ve ayrık ( $x_{n+1} = f(x_n)$ ) zamanlı diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini yapıp ve bunlarla ilgili çeşitli geometrik şekillerin (zaman serileri, faz görünümüleri ve Poincare haritaları) oluşturulmalarında yaygın olarak kullanılan PHASER (Koçak, 1986) programından yararlanıldı. Kullanılan algoritma Runge-Kutta olup, bu program, adım uzunluğu  $H = 0.015$ , fiziksel parametreler  $m = 100$ ,  $\beta = 300$  ve  $\alpha = 0.33148572$  (kaotik),  $\alpha = 0.11$  (periyodik), başlangıç koşulları da  $x_1 = -$

0.987,  $x_2 = -0.007$  ve  $x_3 = -0.876$  (kaotik) ve  $x_1 = -0.59$ ,  $x_2 = 0.00$  ve  $x_3 = 0.479$  (periyodik) olarak kullanılmıştır. Her iki şekil için de yeterince büyük zaman ayrılmıştır.



(a)



(b)

Şekil 32. 3-boyutlu VPDO sistemine ait Poincare haritaları. (a) Kaotik durum, (b) Periyodik durum.

Örneğin, kaotik durum için programın icra süresi 5000 saniye iken periyodik durumda 600 saniyelik bir zaman periyodu kullanılmıştır.

Şekil 32 (a), Şekil 24 ve Şekil 25'de ilgili sistemlere ait Poincare haritaları, noktaların rastgele bir dağılımından meydana gelmiştir. Böyle görünümün düşük boyutlardaki dinamik sistemlerin kaosta olmalarının önemli bir göstergesidir. Buna karşılık Şekil 32 (b)'deki görünümde, 3-boyutlu VPDO sistemine ait Poincare haritası tek bir noktadan meydana gelmiştir. Böyle bir Poincare haritası sistemin kararlı bir durumuna karşılık gelmektedir.

### 2.1.4. VPDO'de Güç Spektrumu

3-boyutlu VPDO sisteminin kaotik ve periyodik durumlar için güç spektrumları Şekil 33(a) ve (b)'de verilmiştir. Tamamıyla periyodik olmayan kaotik hareket, düşük frekanslarda sürekli geniş bir spektruma sahip iken, çok periyotlu hareket durumunda, her bir frekansa karşı gelen çizgilerin keskin bir spektrumu söz konusudur. Bu şekildeki spektrumlar 16384 veriden oluşmuş olup, verilerin oluşturulmasında Runge-Kutta yöntemi kullanılmış ve adım uzunluğu olarak da  $H = 0.001$  alınmıştır.

### 2.1.5. Lyapunov Üstelleri ile Poincare Alanları Arasındaki İlişki

Bir dinamik sistem için  $\lambda_1$  en büyük Lyapunov üsteli ve  $\lambda_2$  de en küçük Lyapunov üsteli olarak kabul edilirse; verilen bir  $\Delta t$  zaman aralığında sistemin faz uzayı alanının bu üstellerle değişimi aşağıdaki ifade ile verilmektedir (By Jiin-Po,1991).

$$A_{n+1} = A_n 2^{(\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t} \quad (116)$$

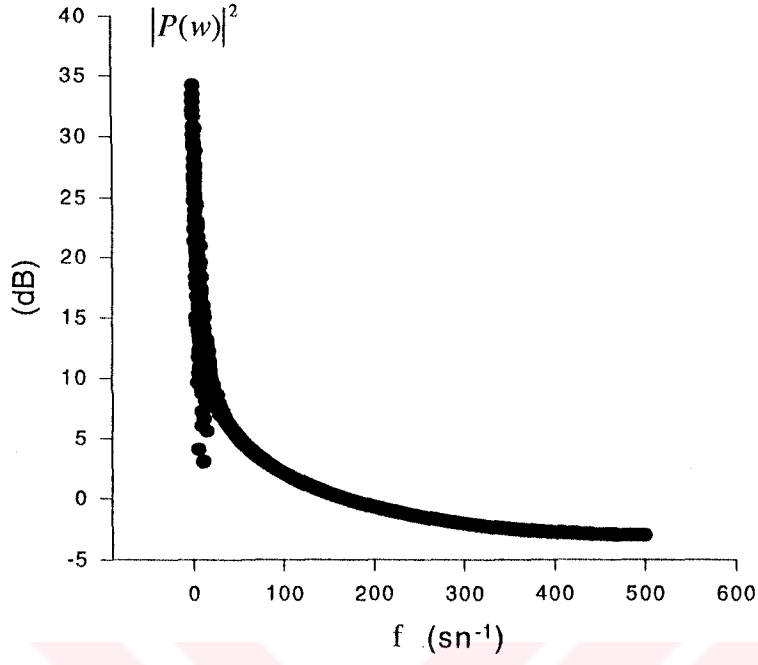
Kayıplı dinamik sistemlerde Lyapunov üstellerinin toplamı, sönüm katsayıları ile orantılıdır. Aynı başlangıç koşullarına karşılık gelen ardışık Poincare alanları aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$A_{n+1} = A_n e^{-C\Delta t} \quad (117)$$

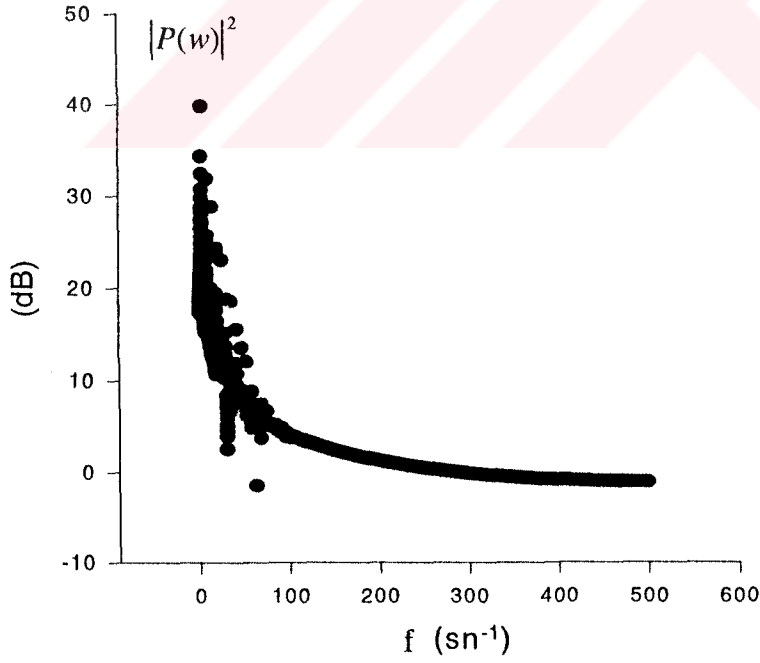
(116) ve (117) denklemleri birleştirildiğinde aşağıda yazılan ifadeye ulaşılır.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-C}{\ln 2} = -1.4427C \quad (118)$$

Böylece Lyapunov üstellerinin doğruluğunun kontrolü için kullanılacak bir sonuç elde



(a)



(b)

Şekil 33. 3-boyutlu VPDO sistemine ait güç spektrumları.  
 (a) Kaotik, (b) Peryodik çekici durumları.

edilmiş olur.  $C = 0$  durumu Hamiltoniyen sistemlerin akışlarına ve faz uzayı elemanlarının sıkıştırılmazlığına karşı gelen ve aşağıda verilen Liouville teoremini ifade eder (Shaw,1981;Ott, 1993; Sanz-Serna, 1994).

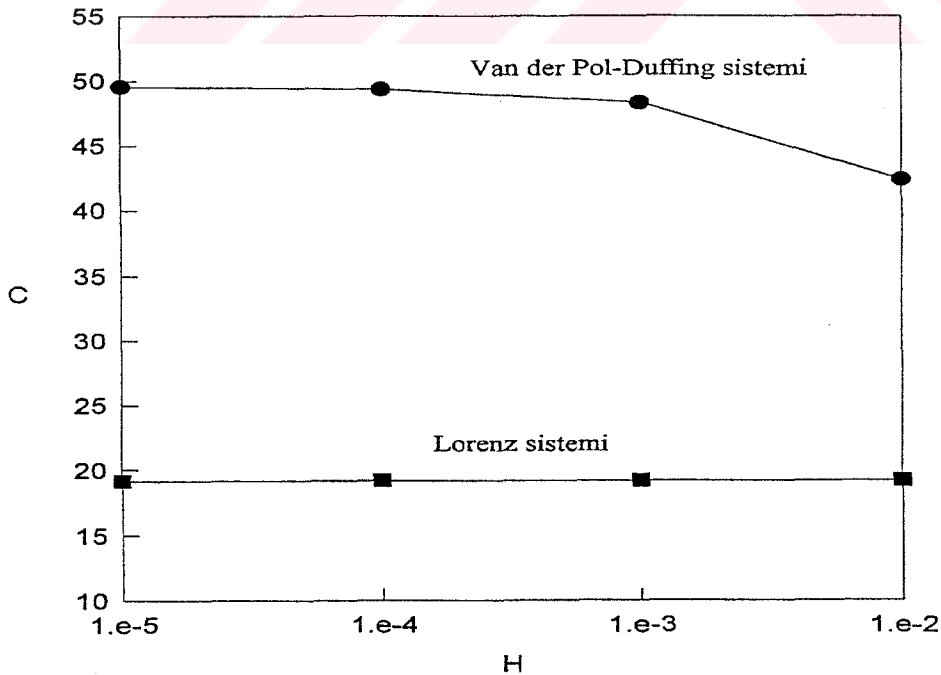
$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = 0 \quad (119)$$

Bu koşulun sağlanması,  $A_{n+1} = A_n$  olmasını gerektirir. Böyle bir durumda Lyapunov üstelleri için, aşağıdaki sonuç elde edilir (By Jiin-Po, 1991; Yavaş, 1995).

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (120)$$

Böyle çekicilerin Lyapunov boyutu  $D_L = 2$  olarak bulunmaktadır.

Şekil 34'te  $C$  kararlılık sabitinin  $H$  adım uzunluğu ile olan değişimi görülmektedir. Bu değişim 3-boyutlu Lorenz sisteminde hemen hemen sabit olurken, 3-boyutlu VPDO'de aynı değişim küçük adım uzunluklarında elde edilebilmiştir. Bu farklılığın esas nedeni, ilgili sistemlerin içerdikleri doğrusal olmayan terimlerden kaynaklanmaktadır.



Şekil 34. 3-boyutlu kaotik Lorenz ve VPDO sistemleri için Lyapunov üstelinin doğruluğunu gösteren değişim.

BU YAPRAĞIN KOPYASI İZMİR İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ KÜTÜPHANESİNE GİRİŞTİRİLMİŞTİR.

## 2.2. Yüksek Boyutlu Sistemlerin Oluşturulması

Aynı iki kaotik sistem faz uzayında hemen hemen aynı başlangıç koşulları ile başlasalar bile, faz uzayındaki yörüngeleri birbirlerinden uzaklaşır. Bu uzaklaşma başlangıç koşulları aynı olsa bile görülür (He, 1992).

Kaotik işaretlerin haberleşme sistemlerinde kullanılması amacına paralel olarak, haberleşmede bir anda tek bir mesajın iletilmesi zaman ve ekonomik bakımdan verimli bir işlem değildir. Bu problemi ortadan kaldırmak için, yüksek boyutlu sistemlerin teşkil edilmesi zorunlu olmuştur. Kaotik işaretlerin gürültüye benzer ve geniş bantlı olmalarından dolayı, böyle sistemlerden haberleşmede yararlanmak kaçınılmazdır. İki pozitif Lyapunov üstelli hiperkaotik sistemlerle haberleşme yapılması, bir pozitif Lyapunov üstelli düşük seviyeli kaotik sistemlerle yapılmasından daha güvenilirdir (Tamasevicius, 1997). Bu çeşit sistemleri oluştururken dikkat edilmesi gereken noktalar aşağıda verilmiştir (He, 1992; Güemez, 1995):

1. Sistemin negatif sabit bir diverjansa sahip olması; bu koşul kayıplı bir sisteme giden adımdır,
2. Sistemin denge noktaları ve bunlara karşı gelen Jakobiyen ve özdeğerleri hesaplanmalı ve bu denge noktalarının hiç birinin kararlı olmadığından emin olunmalıdır.

Yukardaki koşulları sağlayacak şekilde 4, 5, 6, 7, 8-boyutlu kaotik VPDO sistemleri Şekil 28(a)'daki devre dikkate alınarak oluşturulmuş ve bunlardan 5 (Yazıcı, 1995) ve 8-boyutlu olanları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 + x_5, \\
 \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3, \\
 \dot{x}_3 &= \beta x_2, \\
 \dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5, \\
 \dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - x_5,
 \end{aligned}
 \tag{121}$$

ve

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 + x_5, \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3, \\
\dot{x}_3 &= \beta x_2, \\
\dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5 + x_7, \\
\dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - x_5, \\
\dot{x}_6 &= -x_2 - x_3 - 9x_6, \\
\dot{x}_7 &= -x_7^3 + x_8, \\
\dot{x}_8 &= -x_2 - x_4 - 12x_8.
\end{aligned} \tag{122}$$

Bunun yanında yüksek boyutlu sistemlerde, kaotik analiz için önemli olan entropi kavramının sistem boyutu ile nasıl değiştiğine bakmak için 2-boyutlu kaotik VPDO sistemi de oluşturuldu. Üzerinde çalışılan bütün sistemler ekler kısmında verilmiştir.

Böyle sistemlerin denge noktaları, sistemlerdeki denklemlerin sağ tarafları sıfıra eşitlenerek elde edilen denklemlerin çözümlerinden bulunur. Bu denge noktalarına karşı gelen öz değerler ise sistemin Jakobiyeninden elde edilir. (121) ve (122) sistemlerinin Jakobiyen matrisleri sırasıyla (123) ve (124) denklemlerinde verilmiştir.

$$J(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} -3mx_1^2 + \alpha m & m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_4^2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{123}$$

$$J(x) = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} -mx_1^2 + \alpha m & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_4^2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_7^2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \tag{124}$$

(121) denklem sisteminden ve Jakobiyen matrisinden elde edilen sırasıyla denge noktaları ve öz değerler Tablo 9'da görülmektedir.

Tablo 9. (121) denklem sisteminin denge noktaları ve Jakobiyenin özdeğerleri

Denklem sisteminin kökleri					Jakobiyenin öz değerleri		
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$			
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-70.77	-1.58±16.74i	-48.60±0.87i
0.59	0.00	0.59	0.48	0.11	-70.77	-0.85±0.97i	0.18±17.15i
-0.59	0.00	-0.59	0.48	0.11	-70.77	-0.85±0.99i	0.18±17.15i

### 2.2.1. Sistemin Diverjansı

Kaotik sistemlerde dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, sistemin kayıplı olması için sabit ve negatif diverjansa sahip olmasıdır. (121) ve (122) sistemlerinin diverjansları aşağıda olduğu gibi hesaplanabilir.

$$\text{div}F(x) = -3mx_1^2 + \alpha m - 3x_4^2 - 2 \quad (125)$$

$$\text{div}F(x) = -3mx_1^2 + \alpha m - 3x_4^2 - x_7^2 - 23 \quad (126)$$

(125) ve (126) denklemlerinden de görüldüğü gibi, diverjans ifadeleri  $x_1$ ,  $x_4$  ve  $x_7$  denge noktaları ile  $\alpha$  ve  $m$  fiziksel sistem parametrelerine bağlıdır. 3-boyutlu kaotik VPDO sisteminin kaotik analizinden de bilindiği gibi, sistemin ilginç davranışları  $\alpha$ 'nın değişik değerlerinde gözlenmektedir. Bundan dolayı,  $m = 100$  fiziksel parametre değeri ve Tablo 9'daki denge noktalarının değerleri kullanılarak, (125) ve (126) denklemleri aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\text{div}F(x) = -107.118323 + 100\alpha \quad (127)$$

$$\text{div}F(x) = -127.9175 + 100\alpha \quad (128)$$



Tablo 10. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-boyutlu kaotik VPDO  $\alpha$  fiziksel sistem parametresine bağlı olarak sistemin diverjansı ile en küçük Lyapunov üstelinin karşılaştırılması

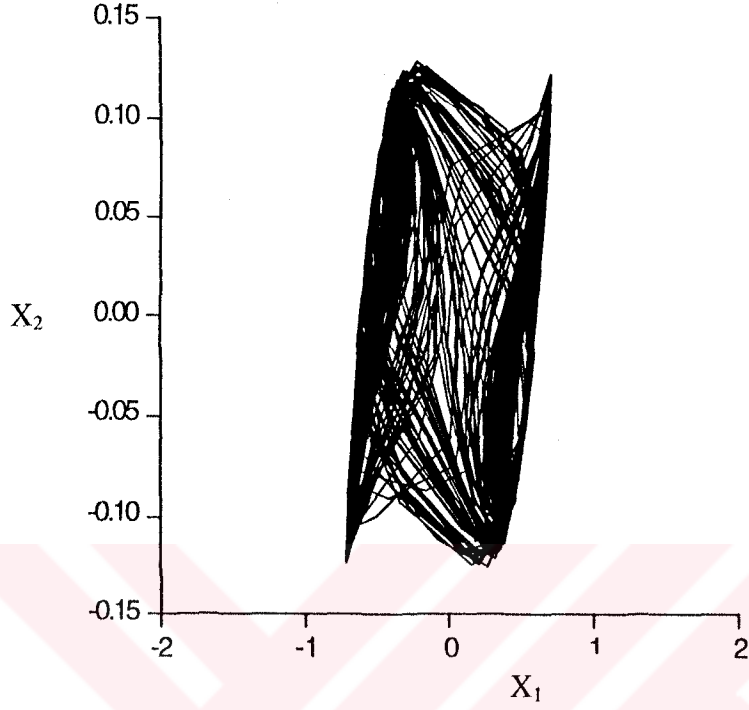
H	D	$\alpha$	divF(x)	En küçük Lyp.üsteli
0.001	2	0.28973	-68.3260	-68.3265
0.001	3	0.33148572	-72.2814	-72.2946
0.001	4	0.3434000	-75.66	-75.671
0.001	5	0.33478194	-73.6401	-73.6401
0.001	6	0.31930000	-77.8186	-77.8285
0.001	7	0.33213850	-78.00544	-78.0541
0.001	8	0.39051	-88.8665	-88.8518

(127) ve (128) denklemlerinde diverjans ifadeleri sadece  $\alpha$  sistem parametresinin bir fonksiyonu olmaktadır. Her iki sistem için, Lyapunov spektrumlarının elde edilmesinde kullanılan dört adımlı Runge-Kutta yönteminde,  $H = 0.001$  adım uzunluğunda elde edilen en küçük Lyapunov üstelleri, 5 ve 8-boyutlu sistemler için sırasıyla  $\alpha = 0.33478194$  ve  $\alpha=0.39049895$  değerlerinde, sistemlerin diverjanslarına eşitlenmiştir. Bu sonuçlar bütün sistemleri kapsayacak şekilde Tablo 10'da verilmiştir. Bu karşılaştırma işlemi, daha düşük dereceli kaotik terim içeren sistemlere göre daha fazla sayıdaki iterasyonlarla elde edilmiştir. Yapılan iterasyon sayısı ortalama olarak  $800 \cdot 10^6$  mertebesinde dir. (121) sistemine ait  $x_1x_2$ ,  $x_4x_2$  ve  $x_4x_1$ 'e ilişkin faz görünimleri Şekil 35'te verilmiştir.

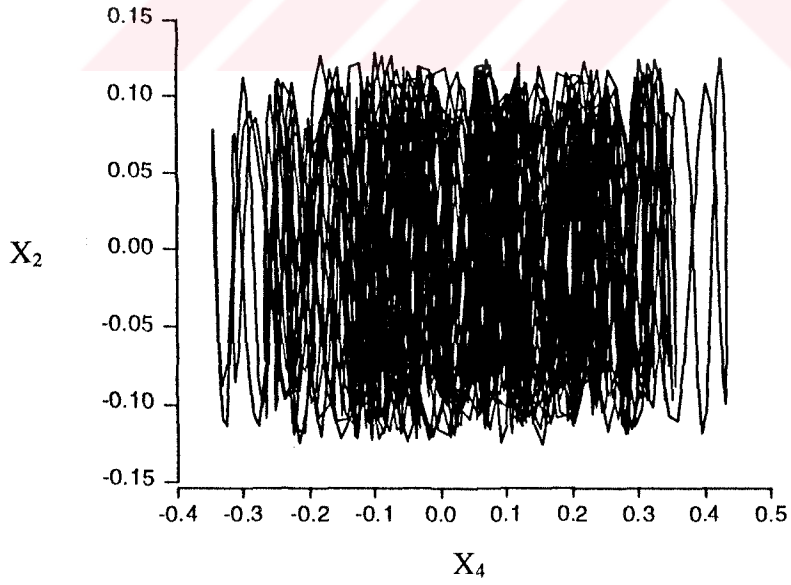
### 2.2.2. Lyapunov Üstelleri ve Kolmogorov Entropisi

Lyapunov üstellerinden yararlanılarak hesaplanan boyut ve entropi kaotik çekici üzerinde global olan değişmezlerdir. İki çekici aynı boyut ve entropiye sahip olsa bile, farklı dinamiklerle karakterize edilebilirler (Bai, Lin, 1990). Örneğin 3-boyutlu Lorenz sistemine ait çekici için sistem dinamiklerinin kaotik olduğu değerler  $\sigma = 10.0$ ,  $r = 28.0$ ,  $b = 8/3$  (Lorenz, 1963),  $\sigma = 16.0$ ,  $r = 40.0$ ,  $b = 4$  (Shimada, 1979),  $\sigma = 10.0$ ,  $r = 60.0$ ,  $b = 8/3$  (He, 1992) ve  $\sigma = 16.0$ ,  $r = 45.92$ ,  $b = 4.0$  (Wolf, 1985) şeklinde sıralanabilir. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-boyutlu kaotik VPDO sistemlerinde

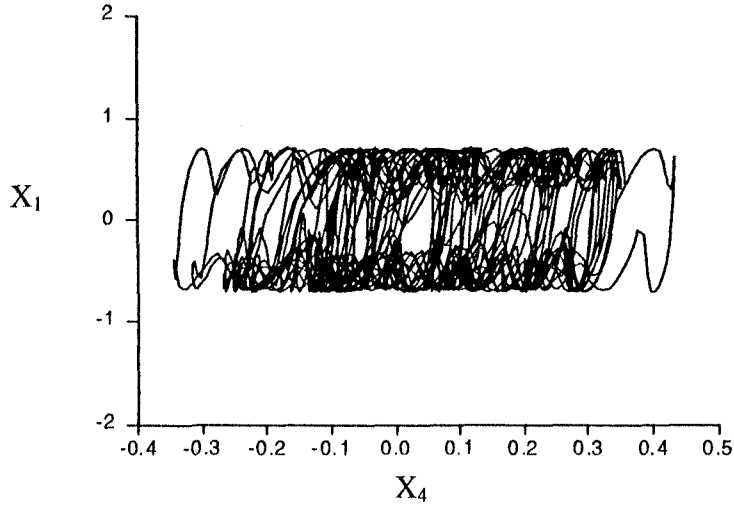
Lyapunov üstelleri, 3-boyutlu sistemler için kullanılan ve 2.1.2 kısmında bahsedilen programda, boyut artırımı ve doğrusallaştırma kısımlarında uygun değişiklikler yapılarak elde edilmeye çalışıldı.



(a)

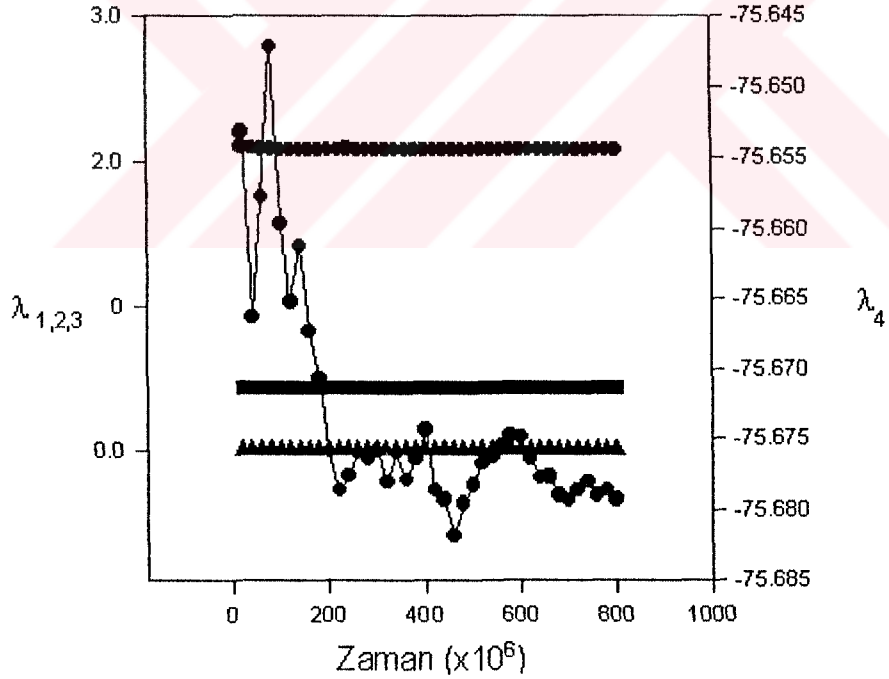


(b)



(c)

Şekil 35. 5-boyutlu kaotik VPDO sisteminde (a)  $x_1x_2$ , (b)  $x_4x_2$  ve (c)  $x_4x_1$ 'in faz görünümleri. Bu şekiller  $m = 100$ ,  $\beta = 300$  ve  $\alpha = 0.33478194$  fiziksel parametre değerleri ve  $H = 0.001$  adım uzunluğu kullanılarak çizilmiştir.



Şekil 36. 4-boyutlu kaotik VPDO sisteminde özel parametre değerleri için Lyapunov üstellerinin kararlılığı

4-boyutlu kaotik VPDO sistemi için Lyapunov üstellerinin kararlılıkları Şekil 36'da verilmiştir. Bu şekilden de görüldüğü gibi, Lyapunov spektrumu (+, +, 0, -) şeklindedir, ve böyle bir spektruma hiperkaos adı verilir. Şekil 36 ve Şekil 18'in karşılaştırılmasından 2.2.1 kısmında bahsedilen şu önemli sonucu görmek mümkündür. Lorenz sisteminde üsteller kısa bir zaman içerisinde kararlı yapıya ulaşıırken, VPDO'de bu durum büyük sayıdaki iterasyonları gerektirmiştir. Bunun nedeni, ilgili sistemlerin farklı özellikteki doğrusal olmayan terimleri ( $xy$  ve  $x_1^3$  gibi) içermeleridir. Üstellerin kararlı bir yapıya ulaşmaları, içerilen kaotiklik derecesi ile yakından ilişkilidir.

3-boyutlu sistemlerin kaotik analizlerinde açıklandığı gibi, bir sistemin Kolmogorov entropisi pozitif Lyapunov üstellerin toplamıdır. Sistem boyutunun 3'ten 4, 5, 6, 7 ve 8'e çıkarılmasında entropinin, artan sistem boyutu ile azaldığı gözlemlendi. Bu değişim Şekil 37 (a)'da gösterilmiştir. Kolmogorov entropisinin sistem boyutuna bağlılığı, Şekil 37(a)'dan yararlanarak  $h_K(D) = D / (A + BD)$  bağıntısıyla verilebilir.

$$h_K(D) = \frac{D}{-0.172971359 + 0.446849555D} \quad (129)$$

(129) bağıntısının tanımladığı eğri Şekil 37(b)'de verilmiştir. (129) denkleminde  $D \rightarrow \infty$  limitine yaklaştığında  $h_K = 2.237659336 \approx \sqrt{5}$  gibi sonlu bir değer almaktadır. Burada oluşturulan değişik boyutlu sistemlerin belli sabit enerjilerde olmalarına dikkat edildi. Yani, kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamı olarak tanımlanan sistem diverjansı belli değerleri aldı. Benzer bir çalışma Grassberger tarafından yapılmış ve bulunduğu sonuç Şekil 20'de verilmiştir. Bu şekilden görüleceği gibi, boyut artınca Kolmogorov entropisi belli bir limit değerine ( $h_K = 0.325$  ve  $h_K = 0.008$ ) yaklaşmaktadır. Bir başka çalışma da Antoni M. Correig tarafından yapılmış olup, sonuç Şekil 21'de verilmiştir. Yüksek dereceden kaotikliğe sahip, VPDO sisteminde, Kolmogorov entropisinin limit değeri, diğer çalışmalara nazaran yukarıda verildiği gibi oldukça yüksektir. Bunun en önemli nedeni, çalışılan sistemlerde yüksek dereceden ( $x^3$ 'lü) kaotik terimlerin olması veya büyük diverjansa sahip olmalarından kaynaklanmaktadır.

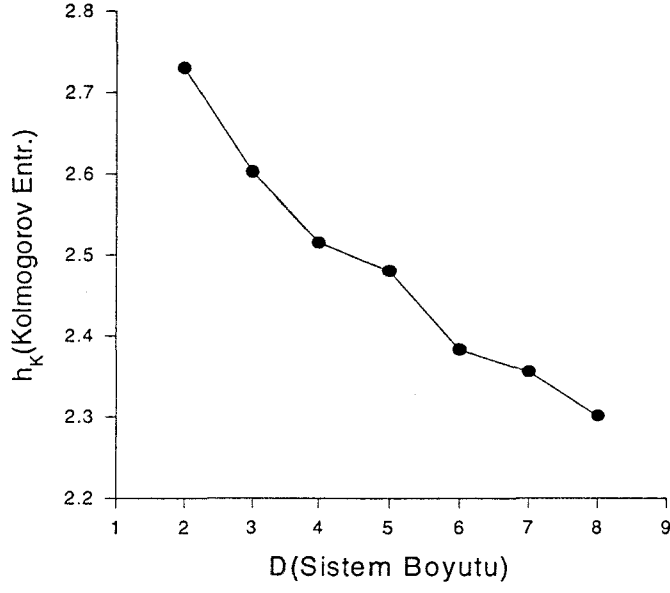
Kaplan-Yorke varsayımına göre hesaplanmış Lyapunov boyutu ve pozitif Lyapunov üstellerin toplamları olan Kolmogorov entropileri birlikte Tablo 11 ve 12’de verilmiştir. Tablo 12’den de görüldüğü gibi, en uygun sonuçlar  $H = 0.001$  adım uzunluğunda elde edilmiştir. Adım uzunluğu küçülünce, denklemlerin S çözüm alanları da küçülmektedir. Bu ise istenmeyen bir durumdur. Tersine büyük adım uzunluklarında, çözüm alanı genişlediği için yine istenmeyen sonuçlarla karşılaşmaktadır. Literatürdeki 3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemleri için verilen sonuçlara ancak  $H = 0.001$  adım uzunluğunda ulaşılabilmektedir. Adım uzunlukları ve bunlara karşı gelen çözüm alanlarının sembolik gösterimleri Şekil 38’de gösterilmiştir. Buradan da görüldüğü gibi, en uygun adım uzunluğu problemin içerdiği doğrusal olmayan terimin yapısına sıkı bir şekilde bağlıdır. Çünkü 3-boyutlu kaotik sistemlerin (+, 0, -) şeklindeki Lyapunov spektrumu, 3-boyutlu Lorenz sistemi için  $H = 0.001$  adım uzunluğunda elde edilirken (Wolf, 1985), aynı spektrum farklı kaotik yapıya sahip olan yine 3-boyutlu VPDO sisteminde ancak  $H = 0.00001$  adım uzunluğunda elde edilmiştir. Değişik sistemler için hesaplanmış Lyapunov üstelleri ve bunlardan yararlanılarak hesaplanan Kolmogorov entropileri ve fraktal boyutları Tablo 4’te verilmiştir (Sano, 1985).

Tablo 11. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-boyutlu kaotik VPDO sisteminde Kolmogorov entropisinin benzeti, teorik değerleri ve Lyapunov boyutunun  $H = 0.001$  adım uzunluğunda sistem boyutu ile olan değişimi

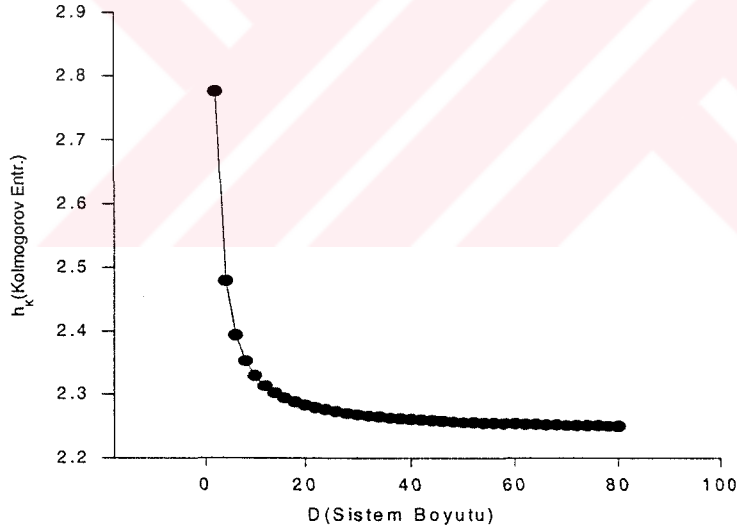
D	2	3	4	5	6	7	8
$h_K(\text{Benz})$	2.7289	2.6014	2.5125	2.4795	2.3824	2.3550	2.3006
$h_K(\text{Teo})$	2.7749	2.5694	2.4776	2.4256	2.3922	2.3688	2.3516
$\Delta h_K$	0.046	0.032	0.034	0.053	0.009	0.013	0.015
$D_L$	1.03	2.03	3.033	4.033	5.030	6.030	7.025

Tablo 12. 5-boyutlu kaotik VPDO’de  $\lambda_i$  (Lyapunov üstelleri),  $D_L(K - Y)$  (Lyapunov boyutu) ve  $h_K$  (Kolmogorov entropisi)’nin  $H$ (adım uzunluğu),  $N$ (iterasyon sayısı) ve  $S$  (alan genişliği) ile olan ilişkisi

H	$N(10^6)$	S(Alan)	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$h_K$	$D_L$
$10^{-2}$	95	$95 \cdot 10^4$	3.27	2.36	0.00	0.00	-68.10	5.63	4.08
$10^{-3}$	200	$2 \cdot 10^5$	2.06	0.44	0.00	0.00	-73.64	2.50	4.03
$10^{-4}$	200	$2 \cdot 10^4$	2.03	0.04	0.00	0.00	-74.68	2.07	4.02
$10^{-5}$	330	3300	2.05	0.01	0.00	0.00	-75.02	2.05	4.02

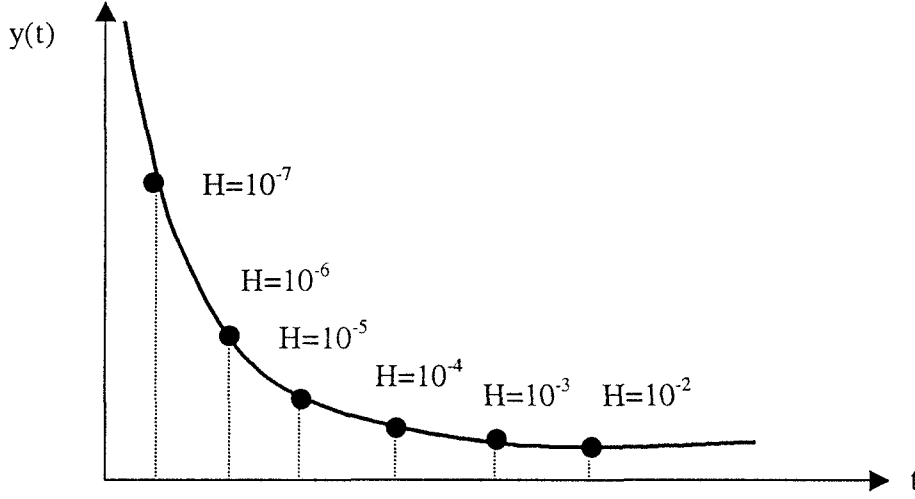


(a)



(b)

Şekil 37. Kaotik VPDO sisteminde, sistem boyutu ile Kolmogorov entropisinin değişimi.  
 (a) Benzeti (simulation) sonuçları (b) Sayısal (nümerik) sonuçlar.



Şekil 38. Diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan uygun adım uzunluklarının seçimi.

### 2.2.3. Tek Değişkenle Sürme

(121) sisteminin  $x_2$  değişkeni ile sürülmesi (Yazıcı, 1995)'de açıklanmıştır. Ayrıca, aynı sistemin  $x_3$  değişkeni ile sürülmesi için oluşturulan cevap alt sistemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}'_1 &= -mx'_1{}^3 + \alpha mx'_1 + mx'_2 + x'_5, \\
 \dot{x}'_2 &= x'_1 - x'_2 - x_3, \\
 \dot{x}'_4 &= -x'_4{}^3 + x'_5, \\
 \dot{x}'_5 &= -x'_1 - x'_4 - x'_5.
 \end{aligned}
 \tag{130}$$

(130) denklem sisteminde değişken gibi görülen  $x_3$ , artık bir durum değişkeni olmayıp, sistemde bir parametre olarak işlem görmektedir. Süren ve cevap sistemlerin dinamik değişkenleri arasındaki farkları yıldız sembolü ile gösterirsek; yani  $x_1^* = x_1 - x'_1$ ,  $x_2^* = x_2 - x'_2$ ,  $x_4^* = x_4 - x'_4$  ve  $x_5^* = x_5 - x'_5$  şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki sistem elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^* &= m(\alpha - k_1)x_1^* + mx_2^* + x_5^*, \\
\dot{x}_2^* &= x_1^* - x_2^*, \\
\dot{x}_4^* &= -k_2x_4^* + x_5^*, \\
\dot{x}_5^* &= -x_1^* - x_4^* - x_5^*.
\end{aligned} \tag{131}$$

Burada  $k_1 = x_1^2 + x_1x_1' + x_1'^2 \geq 0$  ve  $k_2 = x_4^2 + x_4x_4' + x_4'^2 \geq 0$  dir. Ana ve cevap alt sistemler arasında senkronizasyonun sağlanması için (131) sisteminin her bir durum değişkeninin zaman gelişimleri kısa bir zaman içerisinde sıfır olmalıdır. Bu durum Şekil 39'da gösterilmiştir. Benzer olarak (121) sisteminin sadece  $x_2$  ile sürülmesi durumunda  $x_1 - x_1'$ ,  $x_3 - x_3'$ ,  $x_4 - x_4'$  ve  $x_5 - x_5'$  farklarının kısa sürede sıfıra gittikleri Şekil 40'da görülmektedir. Benzer bir çalışma 1.4.9. kısmında, (E-9) denklemi ile verilen 5-boyutlu Lorenz sisteminin tek değişkenle sürülmesi ile gerçekleştirilen benzetisi sonucu Şekil 27'de verilmiştir.

(131) cevap alt sisteminin kararlılığı için, kendisi pozitif tanımlı ve türevi negatif olan uygun bir Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilebilir.

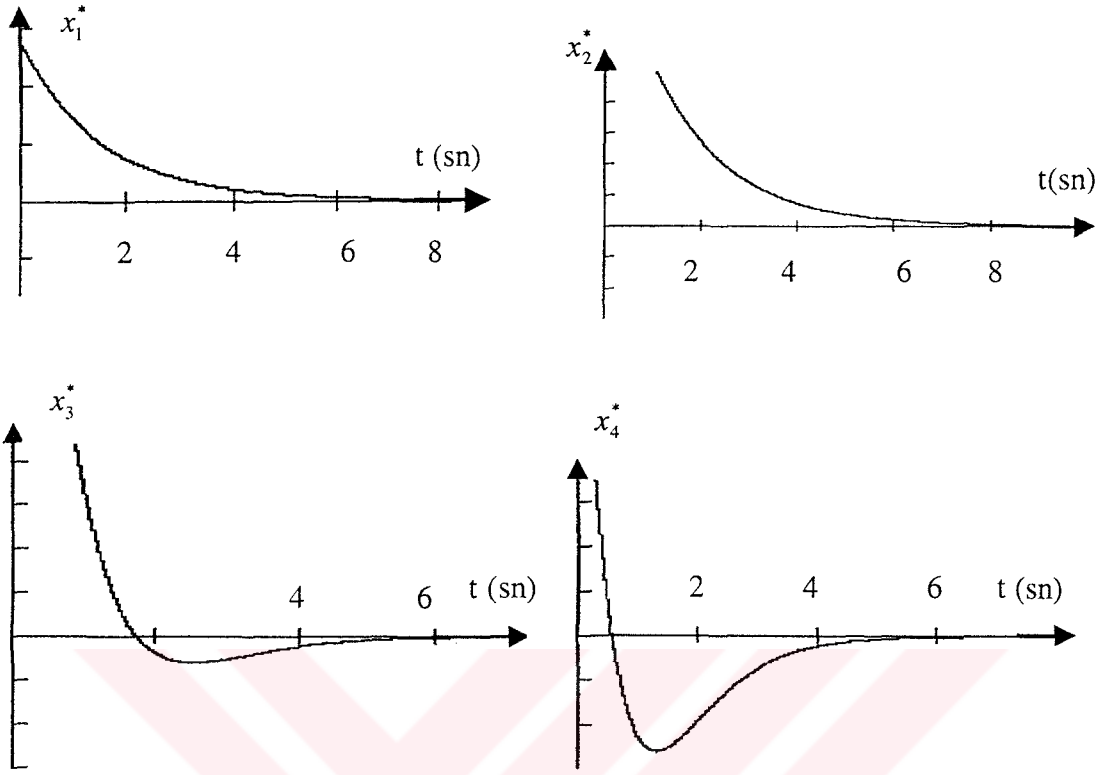
$$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2}) \tag{132}$$

(132) denkleminin zamana göre türevi alınıp, ilgili değerler yerlerine yazıldığında, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^*x_2^* - x_2^{*2} - k_2x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0 \tag{133}$$

Burada  $m(\alpha - k_1) < \frac{101^2}{4}$  koşulu sağlandığında (133) denklemi geçerli olmaktadır.  $\dot{E} = 0$  ifadesi sadece sistemin orijininde geçerlidir (Cuomo, 1993; He, 1992; John, 1994; Lai, 1993). (133) denkleminin sağlanmasından dolayı (130) cevap alt sistemi asimtotik olarak kararlıdır. Böylece (121) ana sistemi ile (130) cevap alt sistemi birbirlerine senkron olur. Yani üssüz ve üslü durum değişkenleri arasındaki farklar kısa sürede sıfıra gider.



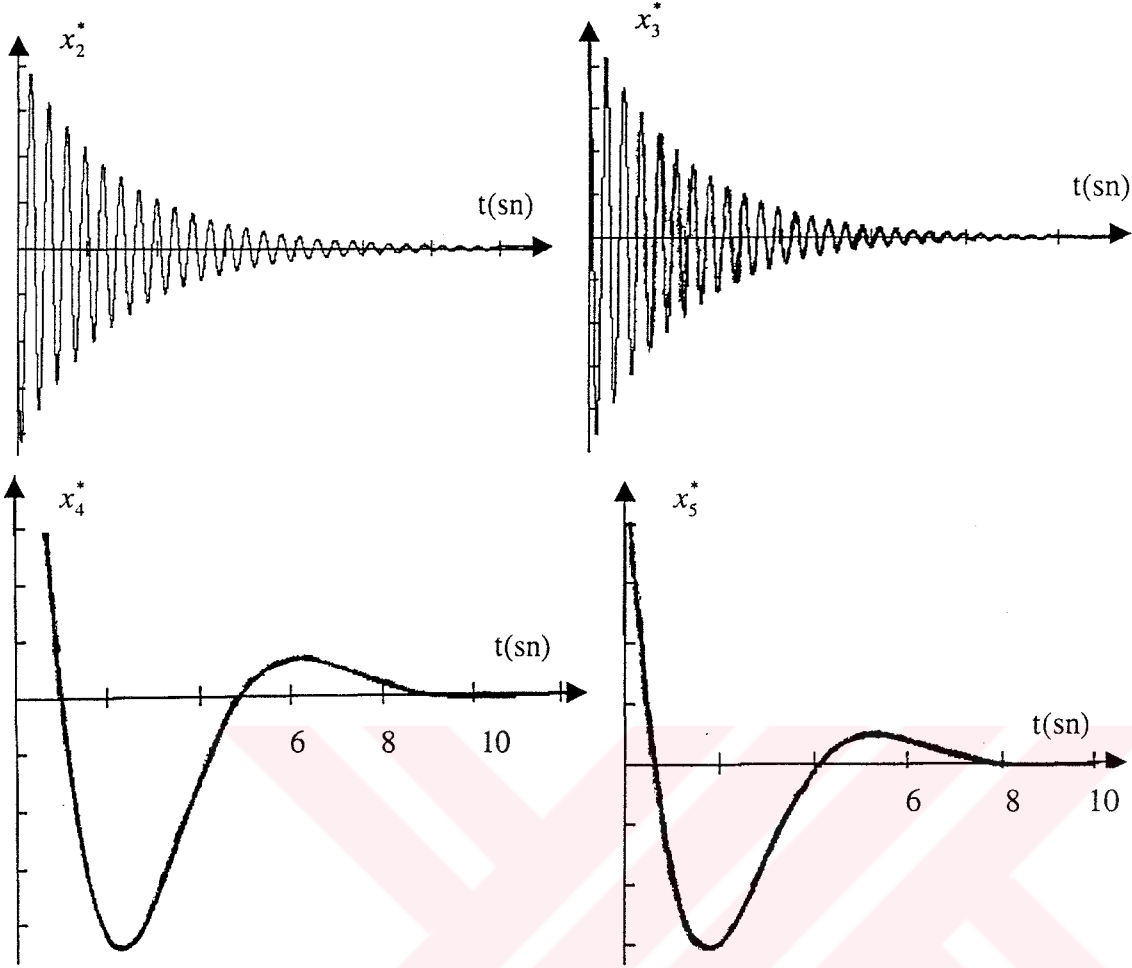


Şekil 39. 5-boyutlu kaotik VPDO sisteminin  $x_3$  durum değişkeni ile sürülmesinde  $x_1 - x_1'$ ,  $x_2 - x_2'$ ,  $x_4 - x_4'$  ve  $x_5 - x_5'$  farklarının sıfıra gitmeleri.

(121) sisteminin, diğer  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$  ve  $x_5$  değişkenleri ile ayrı ayrı sürülmeleri durumunda, oluşan 4-boyutlu cevap alt sistemlerinin kararlılıkları için bütün alt Lyapunov üstelleri negatif olmalıdır (Pecora, 1992; Carroll, 1994). Bu üstellerle ilgili sonuçlar, ve cevap alt sistemlerin kararlılıkları için kendileri pozitif tanımlı ve türevleri negatif olan Lyapunov fonksiyonları Tablo 13'te görülmektedir. Benzer bir çalışmanın sonuçları Tablo 4'te verilmiştir.

#### 2.2.4. 2-değişkenle Sürme

Yüksek boyutlu sistemlerin oluşturulmasındaki esas amaç, bir anda birden fazla bilgiyi karşı tarafa iletmektir.  $x_1, x_2, x_3, x_4$  ve  $x_5$  değişkenlerinden oluşan ilk ana sistem, bu beş değişkenin ikili kombinasyonları ile oluşturulan süren alt sistemler, geriye kalan değişkenleri içeren cevap



Şekil 40. 5-boyutlu kaotik VPDO sisteminin  $x_1$  durum değişkeni ile sürülmesinde  $x_2 - x'_2$ ,  $x_3 - x'_3$ ,  $x_4 - x'_4$  ve  $x_5 - x'_5$  farklarının sıfıra gitmeleri.

alt sistemlerin kararlılıkları için kendileri pozitif tanımlı ve türevleri negatif olan Lyapunov fonksiyonları ve hepsi negatif olan Lyapunov üstelleri Tablo 14'de görülmektedir. Örnek olarak, 5-boyutlu VPDO sistemi,  $x_2$  ve  $x_5$  değişkenleri ile aynı anda sürüldüğü varsayılınsın, diğer bir deyişle bir anda iki mesaj iletilmiş olsun. Böyle bir durumda oluşan cevap alt sistemi aşağıda olduğu gibi yazılabilir.

Tablo 13. (121) sisteminin tek değişkenle sürülmesi durumunda, meydana gelen kararlı alt sistemler. Tablodaki değerler  $m = 100$ ,  $\alpha = 0.33478194$ ,  $\beta = 300$  fiziksel parametreleri ve  $x_1 = -0.59$ ,  $x_2 = 0.00$ ,  $x_3 = -0.59$ ,  $x_4 = 0.479$  ve  $x_5 = 0.11$  başlangıç koşullarıyla elde edilmiştir.

Süren alt sistem	Cevap alt sistemi	Lyapunov fonksiyonları ve türevleri	Lyapunov üstelleri
$x_1$	$x_2, x_3, x_4, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_3^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = -x_2^{*2} + (\beta - 1)x_2^*x_3^* - k_1x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0$ $(k_1 \frac{(\beta - 1)^2}{4} < 0)$	-0.74, -0.04, -0.92, 0.0
$x_2$	$x_1, x_3, x_4, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_3^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} - k_2x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0$ $(k_1 > \alpha)$	-94.8, 0.0, -0.96, 0.0
$x_3$	$x_1, x_2, x_4, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^*x_2^* - x_2^{*2} - k_2x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0$ $(m(\alpha - k_1) < \frac{101^2}{4})$	-1.05, -504.6, -2.39, 0.0
$x_4$	$x_1, x_2, x_3, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^*x_2^* - x_2^{*2} + 299x_2^*x_3^* - x_5^{*2} \leq 0$ $(m(\alpha - k_1) > \frac{4}{299^2})$	-0.61, 0.0, -905.8, 0.0
$x_5$	$x_1, x_2, x_3, x_4$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} + x_4^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^*x_2^* + 299x_2^*x_3^* - x_2^{*2} - k_2x_4^{*2} \leq 0$ $(k_2m(\alpha - k_1) > \frac{4}{299^2})$	-0.69, -0.22, -126.2, 0.0

$$\dot{x}_1' = -mx_1'^3 + \alpha mx_1' + mx_2 + x_5,$$

$$\dot{x}_3' = \beta x_2,$$

$$\dot{x}_4' = -x_4'^3 + x_5.$$

(134)

2.2.3. kısmında yapılan değişken dönüşümüne benzer bir dönüşümle aşağıdaki denklem sistemi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^* &= m(\alpha - k_1)x_1^*, \\ \dot{x}_4^* &= k_2x_4^*.\end{aligned}\tag{135}$$

Burada  $k_1 = x_1^2 + x_1x_1' + x_1'^2 \geq 0$  ve  $k_2 = x_4^2 + x_4x_4' + x_4'^2 \geq 0$  olarak tanımlanır. (135) sisteminin asimtotik kararlılığı için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonu seçilsin.

$$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_4^{*2})\tag{136}$$

Bu fonksiyonun zamana göre türevi alınıp, uygun değerler yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} - k_2x_4^{*2} \leq 0\tag{137}$$

(137) denkleminde  $k_2m(\alpha - k_1) < 0$  koşulunun sağlanması durumunda, (135) cevap alt sistemi asimtotik olarak kararlıdır.

### 2.2.5. 3-değişkenle Sürme

Aynı anda birden fazla bilgiyi karşı tarafa iletmek için daha önce geliştirilen 5-boyutlu sistemden yararlanılacaktır. Bu sistem  $x_1, x_3$  ve  $x_5$  gibi 3-değişkenle aynı anda sürülmüş olsun. Bu durumda oluşacak 2-boyutlu cevap alt sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_2' &= x_1 - x_2' - x_3, \\ \dot{x}_4' &= -x_4'^3 + x_5.\end{aligned}\tag{138}$$

Tablo 14. 2-değişkenle sürme durumunda oluşan 3-değişkenli cevap alt sistemleri

Süren alt sistemi	Cevap alt sistemi	Lyapunov fonksiyonları ve türevleri	Lyapunov üstelleri
$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_4^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = -k_1 x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0, \quad (k_1 > 0)$	-0.76, -0.76, -1.26
$x_1, x_3$	$x_2, x_4, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = -x_2^{*2} - k_1 x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0, \quad (k_1 > 0)$	-0.72, -0.72, -1.45
$x_1, x_4$	$x_2, x_3, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_3^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = -x_2^{*2} + 299x_2^*x_3^* - x_5^{*2} \leq 0$	-0.72, -0.60, -1.04
$x_1, x_5$	$x_2, x_3, x_4$	$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_3^{*2} + x_4^{*2})$ $\dot{E} = -x_2^{*2} + 299x_2^*x_3^* - k_1 x_4^{*2} \leq 0, \quad (k_1 > 0)$	-0.72, -0.54, -2.15
$x_2, x_3$	$x_1, x_4, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} - k_2 x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0, \quad (mk_2(\alpha - k_1) < 0)$	-1.20, -1.20, -90.22
$x_2, x_4$	$x_1, x_3, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_3^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} - x_5^{*2} \leq 0, \quad (m(\alpha - k_1) < 0)$	-1.46, 0.00, -91.32
$x_2, x_5$	$x_1, x_3, x_4$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_4^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} - k_2 x_4^{*2} \leq 0, \quad (k_2 m(\alpha - k_1) < 0)$	-4.70, 0.00, -74.16
$x_3, x_4$	$x_1, x_2, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^*x_2^* - x_2^{*2} - x_5^{*2} \leq 0$ $(m(\alpha - k_1) > \frac{101^2}{4})$	-1.05, -1.44, -500.26
$x_3, x_5$	$x_1, x_2, x_4$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_4^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^*x_2^* - x_2^{*2} - k_2 x_4^{*2} \leq 0$ $(m(\alpha - k_1) > \frac{101^2}{4})$	-0.10, -1.04, -504.20
$x_4, x_5$	$x_1, x_2, x_3$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^*x_2^* - x_2^{*2} + 299x_2^*x_3^* \leq 0$ $(m(\alpha - k_1) > \frac{4}{299^2})$	-0.69, -0.23, -124.43

(138) denklem sistemindeki  $x_1, x_3$  ve  $x_5$  sistem değişkenleri birer parametre olarak değerlendirilmektedir. Kısım 2.2.3.'te yapılan düzenlemeye benzer olarak (138) denklem sistemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}\dot{x}_2^* &= -x_2^*, \\ \dot{x}_4^* &= -k_1 x_4^*\end{aligned}\quad (139)$$

bulunur. (139) denklem sisteminin kararlılığı için, kendisi pozitif tanımlı ve türevi negatif olan uygun bir Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilsin.

$$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_4^{*2}) \quad (140)$$

E enerjisinin zamana göre türevi alınıp, ilgili değerler yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{E} = -x_2^{*2} - k_1 x_4^{*2} \leq 0, \quad (k_1 > 0) \quad (141)$$

$\dot{E} = 0$  durumu orijini gösterir ve  $\dot{E}$ 'nin negatif olması sistemin kararlı olduğunu önemli bir göstergesidir (He, 1992; Cuomo, 1993). 5-boyutlu sistemde, diğer değişkenlerin üçlü kombinasyonları ile sürme durumunda benzer işlemler yapıldı ve bulunan sonuçlar Tablo 15'te özetlendi. Bu tablodan da görüldüğü gibi, cevap alt sistemlerin kararlılıkları için matematiksel olarak kendileri pozitif tanımlı ve türevleri negatif olan Lyapunov fonksiyonlarının bulunmaları yanında, tüm Lyapunov üstellerinin de negatif oldukları doğrulandı. Tablodaki Lyapunov üstelleri  $m = 100, \beta = 300$  ve  $\alpha = 0.33478194$  fiziksel parametre değerlerinde ve  $x_1 = -0.59, x_2 = 0.00, x_3 = -0.59, x_4 = 0.479$  ve  $x_5 = 0.11$  başlangıç koşulları ile elde edilmiştir.

3-değişkenle sürme durumunda, süren alt sistemlerin kaotiklik koşulu, sisteme ait en az bir pozitif Lyapunov üstelinin olması ve üstellerin toplamalarının negatifliğine dayanır (Farmer, 1982; Varma, 1991; Wolf, 1985; Yavaş, 1996). Bununla ilgili sonuçlar Tablo 16'de özetlenmiştir.

Tablo 15. 3-değişkenle sürme durumunda oluşan 2-değişkenli cevap alt sistemleri

Süren alt sistem	Cevap alt sistemi	Lyapunov fonksiyonları ve türevleri	Lyapunov üstelleri
$x_1, x_2, x_3$	$x_4, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_4^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = -k_1 x_4^{*2} - x_5^{*2} \leq 0, (k_1 > 0)$	-0.72, -0.72
$x_1, x_2, x_4$	$x_3, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_3^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = -x_5^{*2} \leq 0$	-0.02, -1.46
$x_1, x_2, x_5$	$x_3, x_4$	$E = \frac{1}{2}(x_3^{*2} + x_4^{*2})$ $\dot{E} = -k_1 x_4^{*2}$	0.00, -0.0083
$x_2, x_3, x_4$	$x_1, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} - x_5^{*2} \leq 0, (m(\alpha - k_1) < 0)$	-1.44, -87.49
$x_2, x_3, x_5$	$x_1, x_4$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_4^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} - k_2 x_4^{*2} \leq 0, (mk_2(\alpha - k_1) < 0)$	-0.15, -94.30
$x_3, x_4, x_5$	$x_1, x_2$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_2^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} + 101x_1^* x_2^* - x_2^{*2} \leq 0$ $(m(\alpha - k_1) < \frac{101^2}{4})$	-1.34, -143.28
$x_2, x_4, x_5$	$x_1, x_3$	$E = \frac{1}{2}(x_1^{*2} + x_3^{*2})$ $\dot{E} = m(\alpha - k_1)x_1^{*2} \leq 0, (k_1 > \alpha)$	0.00, -95.55
$x_1, x_4, x_5$	$x_2, x_3$	$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_3^{*2})$ $\dot{E} = -x_2^{*2} + 299x_2^* x_3^* \leq 0$	-0.76, -0.32
$x_1, x_3, x_5$	$x_2, x_4$	$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_4^{*2})$ $\dot{E} = -x_2^{*2} - k_1 x_4^{*2} \leq 0, (k_1 > 0)$	-0.15, -1.44
$x_1, x_3, x_4$	$x_2, x_5$	$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_5^{*2})$ $\dot{E} = -x_2^{*2} - x_5^{*2} \leq 0$	-1.44, -1.44

Tablo 16. 3-değişkenle sürme durumunda, süren alt sistemlerin kaotik olmalarını sağlayan Lyapunov üstelleri

Süren sistem	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\sum \lambda_i < 0$
$x_1, x_2, x_3$	1.88	0.46	-79.10	-76.74
$x_1, x_2, x_4$	8.89	-6.92	-1808.29	-1806.30
$x_1, x_2, x_5$	9.33	-1.33	-1889.45	-1881.45
$x_2, x_3, x_4$	44.73	-13.83	-65.45	-34.45
$x_2, x_3, x_5$	64.86	0.22	-66.49	-1.41
$x_3, x_4, x_5$	7.12	0.09	-10.80	-3.59

Tablodaki büyüklükler  $m = 100, \beta = 300$  ve  $\alpha = 0.33478194$  fiziksel parametre değerlerinde ve  $x_1 = -0.59, x_2 = 0.00, x_3 = -0.59, x_4 = 0.479$  ve  $x_5 = 0.11$  başlangıç koşulları ile elde edilmiştir.

#### 2.2.6. 4-değişkenle Sürme

(122) denklem sistemi,  $x_1, x_3, x_6$  ve  $x_7$  değişkenleri ile aynı anda sürülmüş olsun. Oluşacak herhangi bir 4-boyutlu cevap alt sistemi aşağıdaki denklemle verilebilir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}'_2 &= x_1 - x'_2 - x_3, \\
 \dot{x}'_4 &= -x'^3_4 + x'_5 + x_7, \\
 \dot{x}'_5 &= -x_1 - x'_4 - x'_5, \\
 \dot{x}'_8 &= -x'_2 - x'_4 - 12x'_8.
 \end{aligned} \tag{142}$$

(142) denklem sisteminde gözükten  $x_1, x_3$  ve  $x_7$  durum değişkenleri parametre olarak işlem görmektedir. Kısım 2.2.3.'teki benzer düzenleme yapıldığında (143) denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^*_2 &= -x^*_2, \\
 \dot{x}^*_4 &= -k_1 x^*_4 + x^*_5, \\
 \dot{x}^*_5 &= -x^*_4 - x^*_5, \\
 \dot{x}^*_8 &= -x^*_2 - x^*_4 - 12x^*_8.
 \end{aligned} \tag{143}$$



(142) cevap alt sisteminin kararlılığı için, kendisi pozitif tanımlı ve türevi negatif olan bir Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilsin.

$$E = \frac{1}{2}(x_2^{*2} + x_4^{*2} + x_5^{*2} + x_8^{*2}) \quad (144)$$

(144) denkleminin zamana göre türevini alıp ilgili değerler yerlerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir.

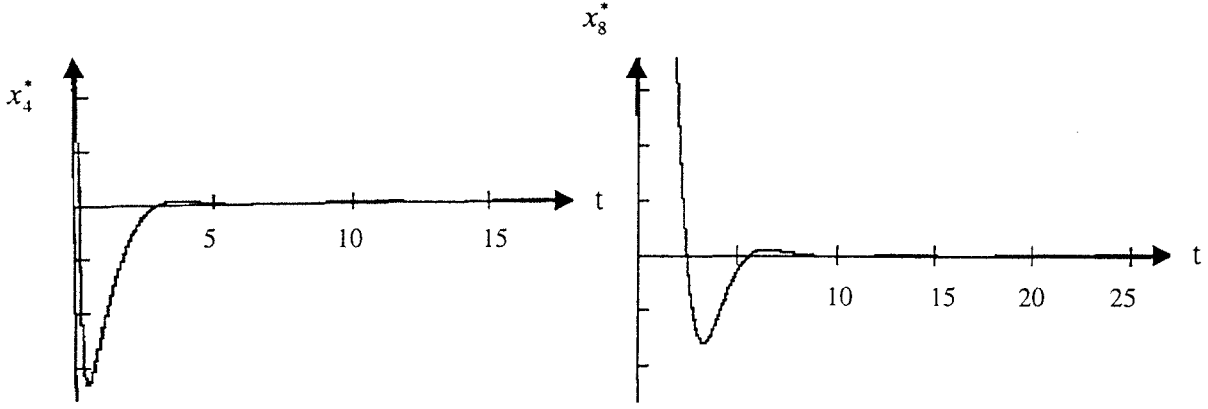
$$E = -x_2^{*2} - k_1 x_4^{*2} - x_5^{*2} - 12x_8^{*2} - x_2^* x_8^* - x_4^* x_8^* \leq 0 \quad (145)$$

(145) denklemi  $k_1 < \frac{1}{47}$  koşulu sağlandığında geçerli olup, bu koşulla (142) cevap alt sistemi asimtotik kararlı olur.

Yukarıda verilen senkronizasyon koşulları, seçilen örnek sistemler için bilgisayar benzetileri kullanılarak doğrulandı. Örneğin 8-boyutlu VPDOsistemi  $x_1, x_3, x_6$  ve  $x_7$  değişkenleri ile aynı anda sürüldüğünde (yani aynı anda dört mesajın iletilmesi durumunda) meydana gelen alt sistemler (142) denklemleri ile verilmektedir. Kısım 2.2.3.'teki düzenlemelerin sonucunda, (142) cevap alt sistemi elde edilmiş oldu. Bu sistemde  $H = 0.001, k_1 = 0.75$  alındığında  $x_4^*, x_5^*$  ve  $x_8^*$  veya onların eşdeğerleri olan  $(x_4 - x_4'), (x_5 - x_5')$  ve  $(x_8 - x_8')$  farklarının zamanla olan değişimleri kısa bir zaman içerisinde sifira gittiği Şekil 41 (a) ve (b)'den görülmektedir.

### 2.2.7. 3-boyutlu Lorenz ve VPDO Sistemlerinin Senkronizasyonu

Senkronizasyon cazip bir olaydır. Bunun genelleştirilmiş gösterimi Şekil 42'de verilmiştir. Bu kısımda farklı iki kaotik sistemin birbirlerinden çıkarılması ile bileşik bir sistem elde ediliyor. Oluşturulan bu bileşik sisteme Pecora ve Carroll'un senkronizasyon yöntemi uygulanıyor. (E-8) ve (112) denklemleri ile verilen 3-boyutlu Lorenz ve VPDO sistemleri göz önünde bulundursun. Bu

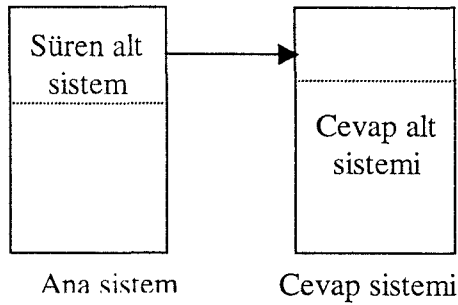


Şekil 41. 8-boyutlu VPDO sisteminde süren ve cevap sistemlerin senkronizasyonu.

denklemlerde  $x = x_L - x_D$ ,  $y = y_L - y_D$  ve  $z = z_L - z_D$  şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa, 3-boyutlu bileşik bir sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx^3 - (\sigma + \alpha m)x + (\sigma - m)y \\ \dot{y} &= (r - 1)x - (x - 1)z \\ \dot{z} &= (x - \beta)y - bz\end{aligned}\quad (146)$$

(146) bileşik sistemi sıra ile  $x$ ,  $y$  ve  $z$  durum değişkenlerinin her biri ile ayrı ayrı sürülmesi durumunda, geriye kalan diğer iki değişkenle oluşturulan cevap alt sistemler sırasıyla aşağıda olduğu gibi elde edilir.



Şekil 42. Ana ve cevap sistemlerinin blok diyagramı.

$$\begin{aligned}\dot{y}' &= (r-1)x - (x-1)z' \\ \dot{z}' &= (x-\beta)y' - bz'\end{aligned}\quad (147)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= mx'^3 - (\sigma + \alpha m)x' + (\sigma - m)y' \\ \dot{y}' &= (r-1)x' - (x'-1)z\end{aligned}\quad (148)$$

Burada  $x^* = x - x'$  ,  $y^* = y - y'$  ve  $z^* = z - z'$  şeklinde bir dönüşüm yapılırsa aşağıda yazılan yeni sistemler elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}\dot{y}^* &= (1-x)z^* \\ \dot{z}^* &= (x-\beta)y^* - bz^*\end{aligned}\quad (149)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}^* &= (km - \sigma - \alpha m)x^* \\ \dot{z}^* &= yx^* - bz^*\end{aligned}\quad (150)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}^* &= (km - \sigma - \alpha m)x^* + (\sigma - m)y^* \\ \dot{y}^* &= (r-1-z)x^*\end{aligned}\quad (151)$$

(149-151) sistemlerine ait kendileri pozitif tanımlı ve türevleri negatif olan uygun Lyapunov fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$E = \frac{1}{2}(y^{*2} + z^{*2}) \quad (152)$$

$$E = \frac{1}{2}(x^{*2} + z^{*2}) \quad (153)$$

$$E = \frac{1}{2}(x^{*2} + y^{*2}) \quad (154)$$

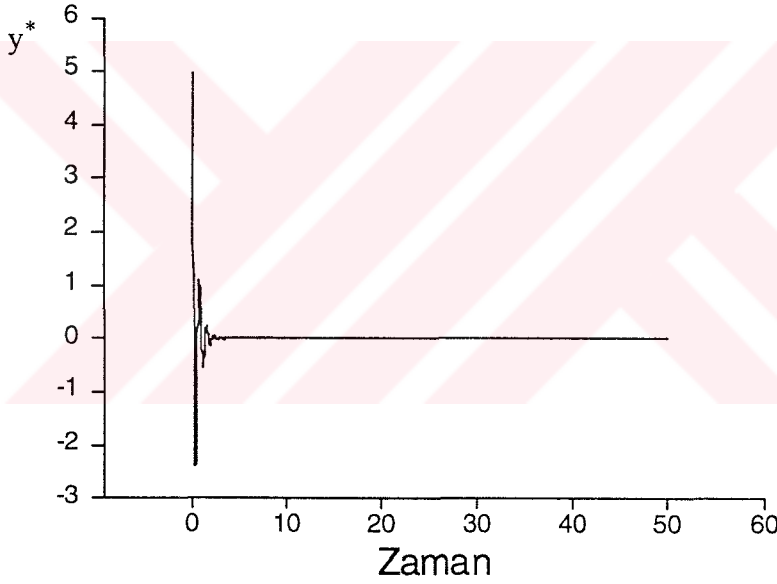
(152-154) denklemlerinin zamana göre türevleri alındıktan sonra ilgili değerler yerlerine yazılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\dot{E} = (1 - \beta)y^*z^* - bz^{*2} \leq 0 \quad (155)$$

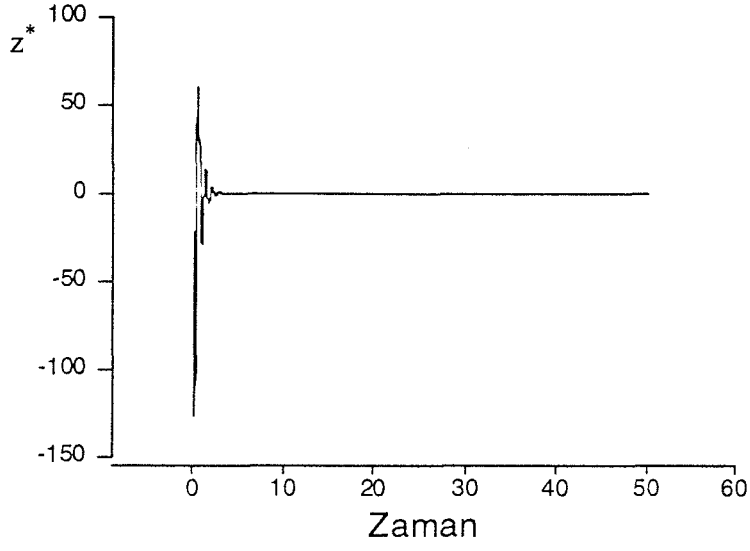
$$\dot{E} = (km - \sigma - \alpha m)x^{*2} + yx^*z^* - bz^{*2} \leq 0 \quad (156)$$

$$\dot{E} = (km - \sigma - \alpha m)x^{*2} + (\sigma + r - m - 1 - z)x^*y^* \leq 0 \quad (157)$$

Bu bileşik sistemlerin birbirlerine senkron oldukları Şekil 43(a)-(b)'den görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 43. Birleştirilmiş 3-boyutlu Lorenz ve VPDO sistemlerinin  $x$  durum değişkeni ile sürülmesi durumunda, (a)  $y - y'$  ve (b)  $z - z'$  farklarının sifira gitmeleri.

### 3. SONUÇLAR

Günümüzde gizli haberleşme değişik yöntemlerle yapılabilmesine rağmen, son gelişmeler gizli haberleşmenin kaotik yöntemle daha güvenilir biçimde yapılabileceğini göstermiştir. Pecora ve Carroll gizli haberleşmede, basit türden kaotik terim içeren 3-boyutlu Lorenz ve Rössler sistemlerini, R. He ve İ. G. Vaidya 5-boyutlu Lorenz sistemini, K. Murali ve M. Lakshmanan ise 3-boyutlu VPDO sistemini ve hatta A. Tamasevicius hiperkaotik sistemleri tek değişkenle sürme durumlarında kullandılar.

Haberleşme sistemlerinde göz önünde bulundurulacak en önemli noktalardan biri; iletişimi sağlayacak birimin kapasitesidir. Yani aynı anda birden fazla haberin iletilmesi durumudur. Düşük boyutlu sistemler bir anda birden fazla iletişim olanağı sağlayamadığından yüksek boyutlu kaotik sistemlerin oluşturulması bir zorunluluk olmuştur.

Ayrıca, gizli haberleşmenin esas amacı iletilen bilginin başkası tarafından herhangi bir yolla kolayca çözümlenip anlaşılabilmesidir. Böyle bilgi taşıma işlemi tek pozitif Lyapunov üstelli kaotik sistemlerden ziyade, iki pozitif Lyapunov üstelli hiperkaotik sistemlerle yapılabileceği gösterildi.

Bu amaçla, Pecora ve Carroll'un senkronizasyona getirdikleri yaklaşım bu çalışmada 3-boyutlu Lorenz ve VPDO sistemlerine uygulandı ve literatürle uyumlu sonuçlar elde edildi. Aynı anda çok sayıda haber iletebilmek amacıyla 4, 5, 6, 7 ve 8-boyutlu kaotik VPDO sistemleri oluşturuldu. Bu sistemlerin kaotik davranış göstermeleri için, negatif diverjansa sahip olmaları sağlandı.

Yüksek boyutlu sistemlerin kaotik analizlerinde, düşük boyutlu sistemlerde iyi sonuçlar veren Poincare haritaları kullanılmamaktadır. Bunun yanında, yüksek boyutlu sistemlerde önemli bir kaotiklik koşulu, sıfırdan büyük sonlu bir Kolmogorov entropisinin varlığıdır. Bu amaçla, oluşturulan sistemlerin boyutları ile Kolmogorov entropisi arasında uygun bir ilişki bulundu ve sonsuz boyutlu sistemlerin olması durumunda  $\sqrt{5}$  gibi sonlu bir Kolmogorov entropisi elde edildi.

Gürültüye benzer olmalarından dolayı, kaotik işaretler gizli haberleşme ve sistem kontrolünde kullanılmaktadır. Bununla beraber bugüne kadar bu konuda yapılan çalışmalar sadece bir mesajın iletilmesini göstermiştir. Bu çalışmada 1, 2, 3 ve

4 mesajın birlikte iletilmesi için uygun kaotik sistemler oluşturulmuş ve elde edilen süren alt sistemlerin kaotiklik, cevap alt sistemlerin ise kararlılık koşulları araştırılmıştır. Aynı zamanda 3-boyutlu VPDO sistemi ile 3-boyutlu Lorenz sistemlerinin birbirleri ile senkron çalışabilecekleri gösterildi.



#### 4. ÖNERİLER

Bu çalışmada, kaotik sistemlerle gizli haberleşmenin yapılabilirliği bilgisayar benzetileri ile gösterildi. Burada benzetili araştırması yapılan sistemlerin elektrik devre karşılıkları kurularak olayların fiziksel olarak doğrulanması bir başka çalışma ile yapılabilir.

Bir çok sistem gibi kaotik davranış gösteren hava durum tahminlerinin tarım, sanayi ve turizm bakımından büyük önemi vardır. Bu amaçla meteoroloji istasyonlarından elde edilecek sıcaklık, yağış, v.s. gibi kayıtlar bilinen kaotik analiz yöntemleri (Lyapunov üstelleri) ile analiz edilerek daha doğru tahminlerin yapılması sağlanabilir.

Ayrıca, kalp atışlarını en iyi modelleyen (56) denklemi daha ayrıntılı biçimde incelenerek, belli hastalıklara (kalp rahatsızlıkları) karşı gelen uygun parametre ve başlangıç koşullarının bulunup, sağlıklı insan kalbının verdiği davranışlar arasında bir ilişkinin kurulması sağlanabilir.

Dinamik bir sistem gibi düşünülen tümör büyümesi insan vücudunun çeşitli kısımlarında görülmektedir. Tümör büyümesi hastadan hastaya farklılık gösterir. Farklı parametrelere karşı gelecek şekilde çeşitli tümör büyümeleri matematiksel olarak modellenebilir.



## 5. KAYNAKLAR

- Ahmet, E., Fractals and Chaos in Cancer Models, International Journal of Theoretical Physics, Vol.32, No.2, (1993) 353-355.
- Anand, D. K., Introduction to Control Systems, Pergamon Press Inc, 1974.
- Bai-Lin, H., Chaos II., Institute of Theoretical Physics, World Scientific, 1990.
- Baier, G. ve Klein, M., A Chaotic Hierarchy, World Scientific, 1991.
- Beck, C. ve Schögl, F., Thermodynamics of Chaotic System, Cambridge University Press, 1995.
- Benettin, G., Galgani, L., Strelcyn, J. M., Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments, Phys. Rev. A, Vol. 14, No. 6, (1976) 2338-2345.
- Benettin, G. Froeschle, C. ve Scheidecker, J. P., Kolmogorov entropy of a dynamical system with an increasing number of degrees of freedom, Phys. Rev. A, Vol. 19, No. 6, (1979) 2454-2460.
- Brandstater, A., Swift, J., Harry, L. S. ve Wolf, A., Low-Dimensional Chaos in a Hydrodynamic System, Phys. Rev., Lett., Vol. 51, No. 16, (1983) 1442-1445.
- Carrol, T., L. ve Pecora, L., M., Synchronizing Chaotic Circuits, IEEE Transactions on Circuit and Systems, Vol. 38, No. 4, (1991) 453-456.
- Carrol, T., L. ve Pecora, L., M., Using Chaos to Keep Period-Multiplied System in Phase, Phys. Rev. E, Vol. 48, No.4, (1993) 2426-2436.
- Carrol, T., L., Synchronizing Chaotic Systems Using Filtered Signals, Phys. Rev. E, Vol. 50, No. 4, (1994) 2580-2587.
- Casartelli, M., Diana, E., Galgani, L. ve A. Scotti, Numerical Computations on a Stochastic Parameter Related to the Kolmogorov Entropy, Phys. Rev. A, Vol. 13, No. 5, (1976) 1921-1925.
- Casdagli, M., Nonlinear prediction of Chaotic Time Series, Physica D 35 (1989) 335-356.

Chen, C. ve Haas, I. J., Elements of Control Systems Analysis, Prentice-Hall, 1968.

Correig, A., M., Urquize, M., Vila, J. ve Marti, J., Analysis of the Temporal Occurrence of Seismicity at Deception Island (Antarctica). A Nonlinear Approach, Pure and Applied Geophysich, 149 (1997) 553-574.

Courtemanche, M., Glass, L., Belair, J., Scagliotti, D., ve Gordon, D., A Circle Map in a Human heart, Physica D 40 (1989) 299-310.

Crawford, J. D. ve Omohundro, S., On the Global Structure of Period Doubling Flows, Physica 13D (1984) 161-180.

Crutchfield, J. Farmer, D. at all, Power Spectral Analysis of a Dynamical System, Phys. Lett. A 76 (1980) 1-4.

Cuomo, K. M., Member, IEEE, Oppenheim, A. V., Fellow, IEEE ve Strogatz, S. H., Synchronization of Lorenz-Based Chaotic Circuits with Application to Communication, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 40, No.10, (1993) 626-632.

Çambel, A. B., Applied Chaos Theory, Academic Press, Inc., 1993.

Eckmann, J. P., Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, Reviews of Modern Physics, Vol. 57, No. 3 (1985) 617-656.

Farmer, J. D., Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional Dynamical System, Physica 4D (1982) 366-393.

Farmer, J. D., Ott, E. ve Yorke, J. A., The Dimension of Chaotic Attractors, Physica 7D (1983) 153-180.

Feder, J., Fractals, Plenum Press, New York and London, 1989.

Feigenbaum, M., J., Universal Behavior in Nonlinear Systems, Los Alamos Science 1 (1980) 4-27.

Froyland, J. ve Alfsen, K. H., Lyapunov Exponent Spectra for the Lorenz Model, Phys. Rev. A, Vol.29, No. 5 (1984) 2928-2931.

- Gencay, R. ve Dechert, W. D., An Algorithm for the  $n$  Lyapunov Exponents of an  $n$ -Dimensional Unknown Dynamical System, *Physica D* 59 (1992) 142-157.
- Glass, L., Guevara, M. R. ve Shrier, A., Bifurcation and Chaos in a Periodically Stimulated Cardiac Oscillator, *Physica D* 7 (1983) 89-101.
- Gomes, M. G. ve King, G. P., Bistable Chaos. II. Bifurcation analysis, *Phys. Rev. A*, Vol. 46, No.6 (1992) 3100-3110.
- Grassberger, P. ve Procaccia, I., Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal, *Phys. Rev. A*, Vol. 28, No. 4, (1983) 2591-2593.
- Grassberger, P. ve Procaccia, I., Dimension and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach, *Physica D* 13 (1984) 34-54.
- Grebogi, C., Ott, E. ve Yorke, J. A., Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos, *Physica D* 7 (1983) 181-200.
- Grebogi, C., Ott, E. ve Yorke, J. A., Chaos, Strange Attractors, and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics, *Science*, Vol. 238 (1987) 632-638.
- Gulck, D., *Encounter with Chaos*, McGraw-Hill., Inc. New-York, 1992.
- Güemez, J. ve Matias, M. A., Modified Method for Synchronizing and Cascading Chaotic Systems, *Phys. Rev. E*, Vol. 52, No. 3 (1995) R2145-R2148.
- Haken, H., *Order in Chaos*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52 (1985) 635-652.
- He, R. ve Vaidya, P. G., Analysis and Synthesis of Synchronous Periodic and Chaotic Systems, *Phys. Rev. A*, Vol. 46, No. 12 (1992) 7387-7392.
- Hilborn, R. C., *Chaos and Nonlinear Dynamics, Introduction for Scientists and Engineers*, New York, Oxford, Oxford University Press, 1994.
- Jacobs, E. W., Bulsara, A. R. ve Schieve, W. C., Homoclinic and Chaotic Transitions in the rf Squid, *Physica D* 34 (1989) 439-448.

- Jiin-Po Yeh, Student Member, ASCE ve Frank DiMaggio, Fellow, ASCE, Chaotic motion of pendulum with support in circular orbit, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 2 (1991) 329-347.
- John, J. K. ve Amritkar, R. E., Synchronization of Unstable Orbits using Adaptive Control, *Phys. Rev. E*, Vol. 49, No. 6 (1994) 4843-4848.
- Kapitanik, T. ve Steeb, W. H., Transition to hyperchaos in coupled generalized Van der Pol equations, *Physics Letters A*, Vol. 152, No. 1, 2 (1991) 33-36.
- Karaesmen, E.; İleri, L.; Akkaş, N., Chaotic Dynamic Analysis of Viscoelastic Shallow Spherical Shells, *Computer and Structures*, Vol. 44, No. 4, (1992) 851-857.
- Kawakami, H., Bifurcation of Periodic Responses in Forced Dynamical Nonlinear Circuits: Computation of Bifurcation Values of the System Parameters, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. Cas-31, No.3 (1984) 248-260.
- Khayat, R. E., Fluid Elasticity and the Transition to Chaos in Thermal Convection, *Phys. Rev. E*, Vol. 51, No. 1 (1995) 380-399.
- King, G. P. ve Gaito, S. T., Bistable chaos. I. Unfolding the cusp, *Phys. Rev. A*, Vol. 46, No. 6 (1992) 3092-3099.
- Kındıkoğlu, S., Yazıcı, R., Sonsuz Boyutlu Kaotik Sistemlerde Sonlu Kolmogorov Entropisi, *Celal Bayar Üniversitesi Fen-Ed. Fak. Dergisi Fen Bilimleri Serisi (Fizik) 2* ISSN 1301-2428 (1998) 206-212.
- Koçak, H., *Differential and Difference Equations Through Computer Experiments*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986.
- Lai, Y. C. ve Grebogi, C., Synchronization of Chaotic Trajectories Using Control, *Phys. Rev. E*, Vol. 47, No. 4 (1993) 2357-2360.
- Lai, Ying-Cheng, Synchronism in symmetric hyperchaotic systems, *Phys. Rev. E*, Vol. 55, No. 5 (1997) R4861-R4864.
- Lambert, J. D., *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley ve Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1977.

- Lorenz, E. N., Deterministik Nonperiodic Flow, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130-141.
- Lundqvist, S., March, N. M. ve Tosi, M. P., *Order and Chaos in Nonlinear Physical Systems*, Plenum Press, New York, 1988.
- Mackey, M. ve Glass, L., Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems, *Science*, Vol. 197 (1977) 287-289.
- May, R. M., Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics, *Nature*, Vol. 261 (1976) 459-467.
- Mathews, J. H., *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, Second Edition, Prentice-Hall International, Inc., 1992.
- Nicolis, G., *Introduction to Nonlinear Science*, Cambridge University, 1995.
- Ott, E., Strange Attractors and Chaotic Motion of Dynamical Systems, *Review of Modern Physics*, Vol. 53, No. 4 (1981) 655-671.
- Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1993.
- Pastor-Diaz, I. ve Lopez-Fraguas, A., Dynamics of Two Coupled Van der Pol Oscillators, *Phys. Rev. E*, Vol.52, No. 2 (1995) 1480-1489.
- Pecora, L. M. ve Carroll, T. L., Synchronization in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64, No. 8 (1990) 821-824.
- Pecora, L. M. ve Carroll, T. L., Synchronization Chaotic Circuits, *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, Vol. 38, No. 4 (1991) 453-456.
- Peitgen, H. O., Jürgens, H. ve Saupe, D., *Chaos and Fractals New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1992.
- Rajaserkar, S. ve Lakashmanan, M., Algorithms for Controlling Chaotic Motion: Application for the BVP Oscillator, *Physica D* 67 (1993) 282-300.

- Rasband, S. N. , Chaotic Dynamic of Nonlinear Systems, John Wiley ve Joons. Inc., 1990.
- Rietman, E., Exploding The Geometry of Nature, Computer Modeling of Chaos, Fractals, Celluar Automata and Neural Network, Winderest, Printed in the United States of America, 1989.
- Romeiras, F. J., Grebogi, C., Ott, E. ve Dayawansa, W. P., Controlling Chaotic Dynamical Systems, Physica D 58 (1992) 165-192.
- Rosenstein M. T., Collins, J. J., Luca ve C. J. De., A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets, Physica D 65 (1993) 117-134.
- Russel, D. A., Ott, E. ve Hanson, J. D., Dimension of Strange Attractors, Phys. Rev. Lett., Vol. 45, No. 14 (1180) 1175-1178.
- Sano, M. ve Sawada, Y., Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series, Phys. Rev. Lett., Vol. 55, No. 10 (1985) 1082-1085.
- Sanz-Sena, J. ve Calvo, M. P., Numerical Hamiltonian Problems, Chapman ve Hall, 1994.
- Schuster, H. G., Deterministic Chaos An Introduction, Physik-Verlag, 1988.
- Shaw, R., Strange Attractors, Chaotic Behavior and Information Flow, Z. Naurforsch 36a (1981) 80-112.
- Shimada, I., Nagashima, T., A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems, Progress of Theoretical Physics, Vol. 61, No. 6 (1979) 1605-1616.
- Tamasevicius, A. ve Cenys, A., Synchronizing hperchaos with a single variable, Phys. Rev. E., Vol. 55, No. 1 (1997) 297-299.
- Thornton, M. ve Marion, J. B., Classical Dynamic of Particles and Systems, Four Edition, 1995.
- Tongue, B. H., Characteristics of Numerical Simulation of Chaotic Systems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 54 (1987) 695-699.
- Varma, V. S., The Period-Doubling Route to Chaos, Doğa-Tr. J. of Physics, 15 (1991) 366-348.

- Vieira, M. de S., Lichtenberg, A. J. ve Lieberman, M. A., Synchronization of Regular and Chaotic Systems, *Phys. Rev. A*, Vol. 46, No. 12 (1992) R7359-R7362.
- Yavaş, Ö., Örgü Titreşimleri ve Örgülerde Kaotik Analiz, Doktora Tezi, Ankara Üniv. Fen Fakültesi, ANKARA, 1992.
- Yavaş, Ö. ve Akkaş, N., Chaotic Behaviour in Nonlinear Lattices, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 33, No. 1, (1995) 77-94.
- Yavaş, Ö. ve Akkaş, N., Chaos in Planar Oscillatons of a Toda Particle, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 34, No. 5, (1996) 561-577.
- Yazıcı, R., Kındıkoğlu, S. ve Turhal, M., Modelling of Two Chaotic Synchronized Systems, 2. International Mechatronic Design and Modelling, METU, 13-15 November (1995) 201-209.
- Young, Lai-Sang, Entropy, Lyapunov Exponents and Hausdorff Dimension in Differentiable Dynamical Systems, *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, Vol. Cas-30, No. 8 (1983) 599-607.
- Zeng, X., Eykholt, R. ve Pielke, R. A., Estimating the Lyapunov-Exponent Spectrum from Short Time Series of Low Precision, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 66, No. 25 (1991) 3229-3232.
- Wiggins, S., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag New York, Inc., 1990.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. ve Vastano, J. A., Determing Lyapunov exponents from a time series, *Physica 16 D* (1985) 285-317.

## 6. EKLER

Bu bölüm çalışmanın koşullarını sağlayacak şekilde oluşturulan alçak ve yüksek boyutlu kaotik VPDO denklem sistemlerini içermektedir. Çalışmanın uygun yerlerinde de açıklandığı gibi, değişik boyutlardaki sistemler oluşturulurken şu kriterler göz önünde bulunduruldu (He, 1992):

1. Sistemlerin negatif diverjanslı olmaları,
2. Sistemlerin jakobiyenlerinden elde edilen denge (rest) noktalarının tamamının kararsız olduklarından emin olunmalı,
3. En küçük Lyapunov üstellerinin sistem diverjansına karşılık gelmeleri şeklinde sıralanabilir.

Bu koşulları sağlayacak şekilde oluşturulan 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-boyutlu kaotik Van der Pol-Duffing osilatör sistemleri sırası ile aşağıda olduğu gibidir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + 1.985 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2.875 - x_2\end{aligned}\quad (E-1)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2\end{aligned}\quad (E-2)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 + x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2 \\ \dot{x}_4 &= -x_2 + x_3 - 1.25x_4\end{aligned}\quad (E-3)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 + x_5 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= \beta x_2 \\ \dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5 \\ \dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - 0.25x_5\end{aligned}\quad (E-4)$$



$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 + x_4 \\
\dot{x}_2 &= 0.875 + x_1 - x_2 - x_3 \\
\dot{x}_3 &= \beta x_2 \\
\dot{x}_4 &= -x_2 - x_4^3 - x_6 \\
\dot{x}_5 &= -x_2 - x_4 - 5x_5 \\
\dot{x}_6 &= x_1 - x_3 - x_6
\end{aligned} \tag{E-5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 + x_4 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 - x_7 \\
\dot{x}_3 &= \beta x_2 \\
\dot{x}_4 &= -x_2 - x_4^3 - x_6 \\
\dot{x}_5 &= -x_2 - x_4 - 5x_5 \\
\dot{x}_6 &= x_1 - x_4 - x_6 \\
\dot{x}_7 &= x_2 - x_5 - x_7^3
\end{aligned} \tag{E-6}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -mx_1^3 + \alpha mx_1 + mx_2 + x_5 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 \\
\dot{x}_3 &= \beta x_2 \\
\dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5 + x_7 \\
\dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - x_5 \\
\dot{x}_6 &= -x_2 - x_3 - 9x_6 \\
\dot{x}_7 &= -x_7^3 + x_8 \\
\dot{x}_8 &= -x_2 - x_4 - 12x_8
\end{aligned} \tag{E-7}$$

Denklemler sisteminin her birinde gözüken  $m$ ,  $\beta$  ve  $\alpha$  fiziksel sistem parametreleri, bölüm 4'de tanımlandığı gibi olup;  $m = 100$ ,  $\beta = 300$  sabit değerleri kullanılırken  $\alpha$  için böyle bir seçim yapılamadı. Bunun en önemli nedeni, sistemlerin diverjanslarının hesaplanmasında bu parametre açıkça kendisini göstermesidir ve sistem ilginç olan davranışlarını bunun değişik değerlerinde göstermektedir.

Kaotik davranış gösteren sistemlerin modern anlamdaki ilk örneği, 3-boyutlu Lorenz sistemidir. Bu sistem birinci dereceden ve basit türden doğrusal olmayan terim içeren üç tane diferansiyel denklemden oluşmuş sistem aşağıdaki şekilde verilir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{E-8}$$

Pecora ve Carroll'un senkronizasyonunu gerçekleştirmek için He (1992) tarafından oluşturulan 5-boyutlu Lorenz sistemi aşağıdaki denklem sistemi ile verilmektedir.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) + x_5, \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3, \\ \dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5, \\ \dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - 8x_5.\end{aligned}\tag{E-9}$$

## ÖZGEÇMİŞ

Selahattin KİNDİKOĞLU

19. 12. 1959 yılında Trabzon'un Arsin ilçesine bağlı Çubuklu köyünde doğdu. İlkokulu Araklı Ortaköy İlkokulu'nda ve Trabzon Cumhuriyet Ortaokulunu bitirip, Haziran 1976 tarihinde Trabzon Lisesinden mezun oldu. (1976-1977) Eğitim Öğretim yılında Trabzon Fatih Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümünde ikinci sınıfa geçti.

(1978-1981) yıllarında K. T. Ü. Temel Bilimler Fakültesi Fizik Lisans Bölümünü birincilikle bitirdi. Aynı bölümde (1982-1984) yıllarında Türk Eğitim Vakfının bursunu alarak Yüksek Lisansı tamamladı. Ekim 1983 yılından beri aynı bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Evli, bir çocuğu olup, İngilizce bilmektedir.