

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**MERKEZCİL OLMAYAN MANNİNG-ROSEN POTANSİYELİ İÇİN**  
**SCHRÖDİNGER VE KLEİN-FOCK-GORDON DENKLEMLERİNİN ANALİTİK**  
**ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Oğuzhan UZUN**

**ARALIK 2012**  
**TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**MERKEZCİL OLMAYAN MANNİNG-ROSEN POTANSİYELİ İÇİN  
SCHRÖDİNGER VE KLEİN-FOCK-GORDON DENKLEMLERİNİN ANALİTİK  
ÇÖZÜMLERİ**

**Oğuzhan UZUN**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde  
"YÜKSEK LİSANS (FİZİK)"  
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11.12.2012  
Tezin Savunma Tarihi : 27.12.2012**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Coşkun AYDIN**

**Trabzon 2012**

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Ana Bilim Dalında  
Oğuzhan UZUN Tarafından Hazırlanan

MERKEZCİL OLMAYAN MANNİNG ROSEN POTANSİYELİ İÇİN  
SCHRÖDİNGER ve KLEİN-FOCK-GORDON DENKLEMLERİNİN ANALİTİK  
ÇÖZÜMLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 11.12.2012 tarihli ve 1485 sayılı  
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Azer AHMADOV .....  
Üye : Doç. Dr. Selçukhan AYDIN.....  
Üye : Yrd. Doç.Dr. Coşkun AYDIN.....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ  
Enstitü Müdürü

## ÖNSÖZ

“Gözlerimiz önünde serili bulunan doğa, büyük bir kitap gibidir. Ancak yazılmış olduğu dili biliyorsak bu kitabı okuyabiliriz, bu kitap matematik diliyle yazılmıştır” diyen Gallileo gibi sayısız birçok insan içgüdüsel olarak doğayı anlamaya çalışmıştır. Bu amaçla birçok çalışma yapılmış, matematik ve fizik alanında büyük ilerlemeler gerçekleştirilmiş, hatta Newton ve Maxwell yasaları ile fizikçiler neredeyse “yapılacak iş kalmadı” şeklinde düşünür olmuştur. Ancak yirminci yüzyılın başlarında insanoğlu doğayı anlayabilmek için daha yolun başında olduğunu anlamış, o güne kadar bilinen fizik klasik fizik olarak adlandırılmış, modern fiziğin temelleri atılmış ve yüz yılın öncü isimleri tarafından atom ve atom altı parçacıkların davranışlarını açıklamak için kuantum mekaniği geliştirilmiştir. Dalga mekaniğinin geliştirilmesi ile parçacıkların dinamiğini belirleyecek denklem elde edilmiş ve bu denklemle küçükler dünyası deneysel sonuçlar ile uyusacak şekilde açıklanabilir olmuştur. Ancak, doğayı anlama çalışmaları bu gelişmelerle sonlanmamış, aksine daha fazla deney ve bu deneylerin sonuçlarını açıklayacak daha fazla teori geliştirilerek günümüzde de devam etmektedir.

Bu çalışma benim doğayı anlamaya olan büyük arzusunun bir neticesidir.

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmamın hazırlanmasında görüş ve yardımlarını esirgemeyen, bilime olan bakış açımı genişleten hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Coşkun AYDIN’a, her zaman bilgisinden ve ilgisinden faydalandığım, bana emeğini ve desteğini hiç esirgemeyen, bölümümüzde misafir öğretim üyesi olarak çalışmış olan Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyesi Doç. Dr. Azer AHMADOV’a, yapıcı eleştirileri ile tezin son halini almasında katkıda bulunan Doç. Dr. Selçuk Han Aydın’a, çalışmalarım boyunca her türlü imkânı sağlayan K.T.Ü Fizik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Ekrem YANMAZ 'a ve Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür Yardımcısı Doç. Dr. Gökhan Apaydın’a, hiç tereddüt etmeden tek tercih yaparak girdiğim fizik bölümünü, eğitim sistemindeki bozukluklar ve gençliğimden kaynaklanan hatalar sonucunda başarısız bir öğrenci olarak bitirmek üzereyken 2002 yılında fizik bölümüne niçin geldiğimi hatırlatan ve lisansüstü eğitime devam etmem konusunda destekleyen hocam Prof. Dr. Hamza Polat’a, yaşadığım tüm sıkıntıları paylaşan, maddi ve manevi destekleriyle bu günlere gelmemi sağlayan, ilk öğretmenim anneme, babama ve bütün aileme, saatlerce fizik tartışmaları yapabildiğim, bana çalışmalarım süresince büyük sabır ve destek gösteren nişanım Kübra Karaoğlu’na içten teşekkürlerimi sunarım.

Oğuzhan UZUN

Trabzon 2012

## TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Merkezcil Olmayan Manning-Rosen Potansiyeli İçin Schrödinger ve Klein-Fock-Gordon Denklemlerinin Analitik Çözümleri başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Coşkun Aydın’ın sorumluluğunda tamamladığımı verileri kendim topladığımı, analizleri ve çözümleri kendim yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 11/12/2012

Oğuzhan UZUN

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa No:

ÖNSÖZ.....	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER .....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	X
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Schrödinger'in Dalga Mekaniği .....	1
1.1.1 Schrödinger Denklemi.....	4
1.1.2. Klein-Fock-Gordon Denklemi.....	7
1.2. Nikiforov-Uvarov (NU) Yöntemi .....	9
1.3. Bağlı Haller.....	15
1.4. Potansiyeller .....	17
1.4.1. Manning-Rosen Potansiyeli.....	18
1.5. Hipergeometrik Tür Diferansiyel Denklemler ve Dikey Polinom Aileleri .....	19
1.6. Literatür Özeti.....	22
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	24
2.1. Merkezci Olmayan Manning-Rosen Potansiyeli İçin Schrödinger Denkleminin Bağlı Durum Çözümleri .....	24
2.1.1. Denklemin Değişkenlerine Ayrılması.....	24
2.1.2. Işımsal Schrödinger Denkleminin Çözümleri.....	25
2.1.3 $\theta$ Açısına Bağlı Denklemin Çözümleri.....	32
2.1.4. Enerji Özdeğerleri.....	36
2.2. Merkezci Olmayan Manning-Rosen Potansiyeli İçin KFG Denkleminin Bağlı Durum Çözümleri .....	39
2.2.1. Işımsal KFG Denkleminin Çözümleri.....	39
2.2.2. $\theta$ Açısına Bağlı Denklemin Çözümleri.....	42
2.2.3. Enerji Özdeğerleri.....	45

3.	BULGULAR VE TARTIŞMA.....	45
3.1.	Merkezkaç Terimi İçin Kullanılan Yaklaşıklığın İncelenmesi.....	45
3.2.	Schrödinger Denklemi İçin Bağlı Durumların Enerjileri.....	47
3.2.1.	Merkezcil Potansiyel Durumu.....	50
3.2.2.	Merkezcil Olmayan Potansiyel Durumu.....	50
3.3.	Schrödinger Denlemi İçin Kuantum Sayılarının Alabileceği Değerler Üzerindeki Kısıtlamalar.....	51
3.4.	KFG Denklemi İçin Bağlı Durumların Enerjileri.....	53
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	54
5.	KAYNAKLAR.....	55
6.	EKLER.....	60
ÖZGEÇMİŞ		

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

MERKEZCİL OLMAYAN MANNING-ROSEN POTANSİYELİ İÇİN SCHRÖDİNGER  
VE KLEİN-FOCK-GORDON DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Oğuzhan UZUN

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Fizik Anabilim Dalı  
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Coşkun AYDIN  
2012, 59 Sayfa, 11 Ek Sayfa

Bu çalışmada, kuantum fiziği ve kuantum kimyasında sıkça kullanılan merkezci Manning-Rosen potansiyeline halka tipli bir potansiyel eklenerek elde edilen merkezci olmayan potansiyel, görelî olmayan durumlar için Schrödinger, görelî durumlar için Klein-Fock-Gordon denklemleri Nikiforov-Uvarov yöntemi kullanılarak çözümlenip bağılı durum enerjileri ve bu enerjilere karşılık gelen dalga fonksiyonları elde edildi. Potansiyel parametreleri değiştirilerek merkezci ve merkezci olmayan Hulthen potansiyeli için de enerji değerleri elde edildi. Bu değerlerin önceki çalışmalarda elde edilen değerler ile karşılaştırılması sonucu Nikiforov-Uvarov yönteminin merkezci potansiyellerde olduğu kadar, merkezci olmayan potansiyellerinde analitik çözümünde iyi sonuçlar verdiği görüldü.

**Anahtar Kelimeler:** Manning-Rosen, Klein-Fock-Gordon Denklemi, Schrödinger Denklemi, Halka Tipli Potansiyel, Nikiforov-Uvarov Metodu



Master Thesis

SUMMARY

SOLUTIONS OF SCHRODINGER AND KLEIN-FOCK-GORDON EQUATIONS  
FOR NON-CENTRAL MANNING-ROSEN POTENTIAL

Oğuzhan UZUN

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Physics Graduate Program  
Supervisor: Assist. Prof. Coşkun AYDIN  
2012, 59 Pages, 11 Pages Appendix

In this work, a non-central potential which is obtained by adding a ring-shaped potential to frequently used in quantum physics and quantum chemistry central Manning-Rosen potential is solved by Nikiforov-Uvarov method from Schrödinger equation for non-relativistic and for Klein-Fock-Gordon for relativistic cases. Additionally related bound states energies and corresponding wave functions are also calculated. By changing potentials parameters, central and non-central energy values are obtained for Hulthen potential. Comparison of the obtained solutions by Nikiforov-Uvarov method with the previous values shows the accuracy of the proposed method not only for the central potentials but also for the non-central potentials.

**Key Words:** Manning-Rosen potential, Klein-Fock-Gordon equation, Schrödinger equation, Ring-shaped like potential, Nikiforov-Uvarov method

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 1.1.	Kuantum kuramına katkı veren bilim insanlarının birbirlerini etkileme süreci ..1	
Şekil 1.2.	$L$ genişliğinde $U$ derinliğinde bir potansiyel kuyusu .....	16
Şekil 3.1.	$b = 0.65$ değeri için $r$ ye karşılık $1 - r^2$ terimi için kullanılan yaklaşıklık .....	46
Şekil 3.2.	$b = 1.15$ değeri için $r$ ye karşılık $1 - r^2$ terimi için kullanılan yaklaşıklık .....	46
Şekil 3.3.	$b = 1.15$ değeri için $r$ ye karşılık $1 - r^2$ terimi için kullanılan yaklaşıklık .....	47
Şekil 3.4.	$\alpha = 1, 1 / b = 0.025$ ve $A = 2b$ için $n_r$ ve $l$ kuantum sayılarının alabileceği değerler bölgesi.....	53

## TABLULAR DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 1.1. Hamilton analojisi.....	2
Tablo 1.3. Dikey polinom aileleri .....	22
Tablo 1.4. Literatür özeti.....	23
Tablo 3.1. $\alpha = 0.75$ için görelî olmayan enerji değerleri .....	48
Tablo 3.2. $\alpha = 1$ için görelî olmayan enerji değerleri.....	48



Her ne kadar Kirchhoff kuantum teorisini görece kadar uzun yaşamamış olsa da bu teorinin geliştirilmesinde büyük rol oynamıştır. Kirchhoff siyah cisim ışınması konusundaki çalışmaları ile Wien'i, Bunsen ile birlikte spektral analiz çalışmalarıyla da Balmer'i etkilemiştir. Balmer'in çalışmaları Bohr'a atomun kararlılığını ve Balmer serilerini açıklamada yol göstermiştir. Planck ışık kaynaklarının kesikli (kuantumlu) enerji değişimi yaptıklarını varsaymış, Einstein ise bir adım ileri giderek, ışığın kendisinin foton denen parçacıklardan oluştuğunu öngörmüştür. Schrödinger dalga mekaniğini geliştirirken Hamilton analojisinden ilham almış, Einstein'ın fotoelektrik olayı açıklayabilmek için geliştirdiği varsayım ve de Broglie'nin, parçacıklara  $\lambda = h/p$  dalga boyu dalgaların eşlik ettiği düşüncesinden etkilenmiştir.

Tablo 1.1'de gösterildiği gibi Hamilton analojisi Fermat'ın "en kısa süre" ve Maupertius'un "en küçük eylem" ilkeleri arasındaki benzerliğe dayanır.

Tablo 1.1 Hamilton analojisi

<b>Optik</b>	<b>Mekanik</b>
$T = \int_A^B \frac{ds}{u(x, y, z)}$	$S = \int_A^B \sqrt{2m(E - V)} ds$
Fermat İlkesi $\delta T = 0$	Maupertius İlkesi $\delta S = 0$

Doğanın bu iki minimal yasaasının matematiksel ifadelerinin biçimsel benzerliğine dayanılarak iki ifadedeki integral içlerindeki niceliklerin koordinatlara bağlı olmayan bir çarpan farkıyla birbirlerine eşit olabilecekleri düşünülebilir. Bu düşünceye göre

$$u = \frac{C}{\sqrt{2m(E - V)}} \quad (1.1)$$

olmalıdır. Boyut analizi ile bu çarpanın enerji boyutunda olması gerektiği görülür. Hamilton'un analojisinden elde ettiğimiz  $u$ , geometrik optikte ışık ışının hızı olduğu gibi, homojen olmayan, dağıtık bir ortamdaki ışık dalgasının da faz hızıdır ve bu türlü ortamlarda yayılma hızı

$$v_g = \frac{dw}{dk} = \frac{df}{d(1/\lambda)} = \frac{df}{d(f/u)} \quad (1.2)$$

grup hızı ile karakterize edilir.  $E = hf$  Einstein-Planck formülü ve (1.2) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d}{df} \left( \frac{f}{u} \right) = \frac{d}{dE} \left( \frac{E}{u} \right) = \frac{d}{dE} \left( \frac{E\sqrt{2m(E-V)}}{C} \right) \quad (1.3)$$

elde edilir.

de Broglie'ye göre hareket halindeki her parçacığa grup hızı parçacığın hızına eşit olan bir dalga paketi eşlik eder. Bu düşünceyle ışık ışımın grup hızı ile parçacığın

$$v = \frac{1}{m} \sqrt{2m(E-V)} \quad (1.4)$$

hızı eşitlenerek

$$\frac{m}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{d}{dE} (\sqrt{2m(E-V)}) = \frac{d}{dE} \left( \frac{E\sqrt{2m(E-V)}}{C} \right) \quad (1.5)$$

ve buradan

$$\frac{d}{dE} \left[ \left( \frac{E}{C} - 1 \right) \sqrt{2m(E-V)} \right] = 0 \quad (1.6)$$

yazılır ise

$$\left( \frac{E}{C} - 1 \right) \sqrt{2m(E-V)} \quad (1.7)$$

ifadesinin  $E$ 'ye göre bir sabit ( $E$ 'ye bağlı olmayan bir büyüklük) olduğu görülür. O halde (1.6) in sağlanabilmesi

$$\left(\frac{E}{C} - 1\right) = 0 \quad (1.8)$$

olması ile mümkün olabileceğinden

$$C = E \quad (1.9)$$

olmalıdır. Böylece (1.1) eşitliği

$$u(E, x, y, z) = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}} \quad (1.10)$$

olur.

### 1.1.1. Schrödinger Denklemi

Fizik optikte,  $\Psi(x, y, z, t)$  dalga fonksiyonu için klasik dalga denklemi

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

ile verilir.  $f$  frekanslı tek renkli dalga için bu denklemin çözümü

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-2\pi i f t} \quad (1.12)$$

dir. Bu çözüm dalga denkleminde yazılacak olursa

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 f^2}{u^2} \psi = 0 \quad (1.13)$$

elde edilir. Buradaki dalganın faz hızı  $u$  için (1.10) denklemindeki, parçacığa eşlik eden dalganın faz hızının kullanılmasıyla,  $E^2 = h^2 f^2$  için

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - V)\psi = 0 \quad (1.14)$$

elde edilir. (1.14) denklemini  $e^{-2\pi ift} = e^{-2\pi iEt/h}$  ile çarpılırsa

$$\nabla^2\psi(e^{-2\pi iEt/h}) + \frac{8\pi^2m}{h^2}\psi(e^{-2\pi iEt/h})E - \frac{8\pi^2m}{h^2}\psi(e^{-2\pi iEt/h})V = 0 \quad (1.15)$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemin sol tarafındaki ikinci terim

$$\frac{4im\pi}{h}\psi(x, y, z)\frac{\partial}{\partial t}(e^{-2\pi iEt/h}) = \frac{4im\pi}{h}\frac{\partial}{\partial t}(e^{-2\pi iEt/h})\psi(x, y, z) \quad (1.16)$$

olarak yazılabilir. Son olarak  $\psi(x, y, z)e^{-2\pi ift} = \Psi(x, y, z, t)$  olduğundan

$$\nabla^2\Psi + \frac{4im\pi}{h}\frac{\partial}{\partial t}\Psi - \frac{8\pi^2m}{h^2}\Psi V = 0 \quad (1.17)$$

denklemini elde edilir.  $\frac{h}{2\pi}$  yerine  $\hbar$  simgesinin kullanılmasıyla (1.17) denklemini

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.18)$$

olarak yazılabilir. Bu denklem Schrödinger denklemini olarak adlandırılır.

$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar\nabla, \quad (1.19)$$

$$\hat{H} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.20)$$

kuantum işlemcileri ile (1.18) denklemini

$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) = \hat{H}\Psi(\vec{r}, t) \quad (1.21)$$



formunu alır.

Klasik mekanikteki Newton denklemi gibi, Schrödinger denklemi de kuantum mekaniğinin temel denklemi olup parçacık yaratılma, yok olma ve ışımalı geçiş mekanizmaları dışında, geniş bir uygulama alanına sahiptir. Atomlar, moleküller, maddenin katı, sıvı ve gaz halleri, kimi durumlarda atom çekirdekleri ve hatta bazı temel parçacıklar ve bunların bağlı halleri bu çerçevede incelenebilir. Ancak, Schrödinger denkleminin göreceli olmayan hareketler için geçerli olduğu unutulmamalıdır [3].

$V(\vec{r}, t)$  potansiyelinin açık olarak zamana bağlı olmadığı durumlarda (1.21) denklemi zaman ve uzay bileşenlerine ayrılabilir. Bunun için  $\Psi(\vec{r}, t) = f(t)\psi(\vec{r})$  şeklinde  $t$  ve  $\vec{r}$  ye bağlı bir çözüm aranır. Buna göre

$$\frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \psi(\vec{r}) \frac{df(t)}{dt} \quad (1.22)$$

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) = f(t) \nabla^2 \psi(\vec{r}) \quad (1.23)$$

ifadeleri (1.21) denkleminde yerine konup, eşitliğin her iki tarafının  $f(t)\psi(\vec{r})$  ye bölünmesiyle elde edilen

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = E \quad (1.24)$$

$$\frac{1}{\psi(\vec{r})} \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) \right] = E \quad (1.25)$$

bu iki diferensiyel denklemden zamana bağlı olanın çözümü

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar} \quad (1.26)$$

olarak kolaylıkla bulunur. Uzay koordinatlarına bağlı denklem ise

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) \right] = E\psi(\vec{r}) \quad (1.27)$$

olur ki bunun çözümünün elde edilebilmesi için  $V(\vec{r})$  potansiyelinin bilinmesi gereklidir.

Bu çözümler zamana bağlı olmadığı için kararlı durumları verirler. Bu eşitlik bir

ikinci mertebeden diferensiyel denklemdir. Matematiksel olarak  $E$  ne olursa olsun bu denklemin bir çözümü vardır. Fakat bütün çözümler fiziksel olarak kabul edilemezler. Fiziksel olarak kabul edilebilecek çözümler için  $\psi(\vec{r})$  fonksiyonu şu koşulları sağlamalıdır:  $\psi(\vec{r})$  fonksiyonu ve birinci mertebeden kısmi türevleri bütün uzayda sürekli, tek değerli ve sınırlı olmalıdır [4].

(1.21) denklemindeki kompleks  $\Psi$  fonksiyonuna “dalga fonksiyonu” denir. Schrödinger formalizminde, dinamik sistemin durumu, bir dalga fonksiyonu ile temsil edilir.  $\Psi$  ile gösterilen bu fonksiyon, sistemin durumunu betimlemek için seçilen dinamik değişkenlere bağlıdır. 1927 yılında yapılan 5. Solvay kongresinde  $\Psi$ 'nin fizik evrende hangi nesneyi temsil ettiği ve “fiziksel realite”de  $\Psi$ 'ye karşılık olan bir ögenin bulunup bulunmadığı soruları irdelenir.

Bu tartışmalar sonunda üç ana görüş belirginlik kazanır.

- i) Born ve Heisenberg'e göre  $\Psi$  nin karşılığı olduğu fiziksel herhangi bir nesne yoktur.  $\Psi$  realitenin herhangi bir ögesini temsil etmez. Sadece bir “olasılık dalgası”nı gösterir.
- ii) Schrödinger, kendi formalizasyonunu “realist” bir görüşle yorumlar.  $\Psi$ 'nin gerçekten var olan dalgaları temsil ettiğini ileri sürer.
- iii) De Broglie ise, taneciğe, uzaydaki yörüngesinde yol gösteren “kılavuz dalgalar”ın var olduğu görüşünü savunur.

Bu tartışmalar kuantum mekaniğinin “Paris ekolü” ve “Kopenhag ekolü” olarak adlandırılan iki yorumlanmasına kaynaklık etmiştir [5].

### 1.1.2. Klein-Fock-Gordon Denklemi

Schrödinger denklemi Lorentz dönüşümlerine göre değişmez özellikte değildir. Bu nedenle yüksek hızlara ( $v \sim c$ ) sahip parçacıklar söz konusu olduğunda görelilik kuramı ile kuantum mekaniğinin gereklerine uyan bir denklem kullanılmalıdır. İç serbestlik derecesine sahip olmayan, spin 0 (veya spinsiz), görelilik etkilerinin ihmal edilemeyeceği parçacıklar için, zamana ve uzaya göre ikinci basamaktan türevler içeren KFG denklemi kullanılır. Plazma fiziği [6], astrofizik [7], biyofizik [8] gibi birçok alanda önemli uygulamaları olan bu denklem ilk olarak Schrödinger'in 1925 yılına ait notlarında görülür. Schrödinger tarafından yanlış olduğu düşünülen bu denklem 1926 yılında altı fizikçi tarafından bağımsız olarak bulunmuştur. Pauli'nin bu denklem için “çok babalı denklem”

[9] demesine neden olan fizikçiler ve çalışmaları şunlardır:

O. Klein, Z. Phys., 37, (1926), 895

V. Fock, Z. Phys., 38, (1926),242

W. Gordon, Z. Phys., 40, (1926), 117

J. Kudar, Ann. Der. Phys., 81, (1926),632

de Donder, H. von Dunge., Comptes Rendus, (1926).

Serbest parçacığın görelî enerjisi

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.28)$$

ifadesiyle verilir. Kuantum mekaniğinde her bir gözlenebilire karşılık bir işlemci karşılık getirilir. (1.28) denkleminin karesi alınır ve elde edilen ifadedeki gözlenebilirler için denklem (1.19) ve denklem (1.20) deki işlemciler kullanılırsa

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + m^2 c^4 \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.29)$$

ifadesi bulunur.

KFG denklemi vektörel momentum ve skaler kütle niceliklerini barındırdığından

$$m_0^2 c^4 \rightarrow m_0^2 c^4 + S^2 \quad (1.30)$$

“skaler çiftlenim” ile bir skaler potansiyel ( $S$ ),

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \quad (1.31)$$

“minimal çiftlenim” ile de bir vektörel potansiyel ( $V$ ) bu denkleme girebilir [10]. Birçok problemde  $\vec{A} = 0$  seçilerek ve  $eA_0 = V$  yazılarak KFG denklemi sade bir hale getirilir.

Böylece vektör ve skaler potansiyel ile doğal birim sisteminde ( $\hbar = c = 1$ ) KFG denklemi

$$\left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - V(\vec{r}) \right)^2 + \nabla^2 - (S(\vec{r}) + m_0)^2 \right] \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.32)$$

şeklini alır. Skaler ve vektörel potansiyellerin eşit alınması ve zamandan bağımsız potansiyeller için dalga fonksiyonun  $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-iEt}$  şeklinde yazılması ile

$$[\nabla^2 + (V(\vec{r}) - E)^2 - (S(\vec{r}) + m_0)^2] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (1.33)$$

elde edilir.

## 1.2. Nikiforov-Uvarov (NU) Yöntemi

NU yöntemi [11] geliştirilmiş hipergeometrik-tür bir diferensiyel denklemin çözümlerinin dikey polinomlar cinsinden elde edilmesini sağlar. Birçok durumda verilen bir potansiyel için Schrödinger ve Schrödinger benzeri denklemler analitik olarak çözülebilir potansiyeller için,  $\sigma(z)$ ,  $\tilde{\sigma}(z)$  dereceleri ikiden büyük olmayan,  $\tilde{\tau}(z)$  ise derecesi birden büyük olmayan polinomlar olmak üzere

$$u''(z) + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} u'(z) + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} u(z) = 0 \quad (1.34)$$

geliştirilmiş hipergeometrik-tür denkleme dönüştürülebilir.

(1.34) denklemi bağımlı değişken için uygun bir dönüşümle,  $\tau(z)$  en çok birinci dereceden bir polinom,  $\bar{\lambda}$  ise bir sabit olmak üzere

$$\sigma(z)y''(z) + \tau(z)y'(z) + \bar{\lambda}y(z) = 0, \quad (1.35)$$

hipergeometrik-tür denkleme dönüştürülebilir. Bu türlü denklemlerin en sık karşılaşılan çözümleri, Gauss, Kummars, Whittaker, Weber, Airy, Bessel ve Hermit fonksiyonları ile klasik dikey polinom aileleridir.

Hipregeometrik tür bir denklem elde etmek için (1.34) denkleminde

$$u(z) = \phi(z)y(z) \quad (1.36)$$

şeklinde bir dönüşüm yapılırsa

$$y''(z) + \left(2 \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right) y'(z) + y \left( \frac{\phi''}{\phi} + \frac{\phi' \tilde{\tau}(z)}{\phi \sigma(z)} + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma(z)^2} \right) y(z) = 0 \quad (1.37)$$

denklemine ulaşılır. (1.35) türünde bir denklem elde edebilmek için ilk olarak  $y'(z)$  nin katsayısının,  $\frac{\tau(z)}{\sigma(z)}$  ya eşit olması şartı konularak

$$2 \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)} = \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}, \quad (1.38)$$

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{\tau(z) - \tilde{\tau}(z)}{2\sigma(z)} = \frac{\pi(z)}{\sigma(z)} \quad (1.39)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada  $\pi(z)$  derecesi birden büyük olmayan bir polinomdur.

$$\left( \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right)' = \frac{\phi(z)\phi''(z) - (\phi'(z))^2}{\phi^2(z)} = \frac{\phi''(z)}{\phi(z)} - \left( \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right)^2 \quad (1.40)$$

olduğundan (1.37) denklemi

$$y''(z) + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)} y'(z) + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)} y(z) = 0 \quad (1.41)$$

şekline dönüşür. Burada  $\bar{\sigma}(z)$

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z) \quad (1.42)$$

derecesi ikiden büyük olmayan bir polinomdur. (1.41) denkleminde,  $\bar{\lambda}$  bir sabit olmak üzere

$$\frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma(z)} = \bar{\lambda} \quad (1.43)$$

olması durumunda bu denklem (1.35) denklemi gibi hipergeometrik-tür bir denkleme dönüşmüş olur. Böylece bu denklemin (1.34) denkleminin bir özel hali olduğu görülür. (1.34) denklemine hipergeometrik-tür denklem denildiği için (1.35) denklemine de genelleştirilmiş hipergeometrik-tür denklem denilir.

Uygun  $\bar{\lambda}$  sabiti ve  $\pi(z)$  polinomunu elde etmek için (1.42) ve (1.43) yardımıyla

$$\pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \tilde{\sigma}(z) - (\bar{\lambda} - \pi'(z))\sigma(z) = 0 \quad (1.44)$$

ifadesine ulaşılır. Burada

$$k = \bar{\lambda} - \pi'(z) \quad (1.45)$$

sabiti tanımlanırsa (1.44) denklemi

$$\pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \tilde{\sigma}(z) - k\sigma(z) = 0 \quad (1.46)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözümleri

$$\pi(z) = \frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(z) - \tilde{\tau}(z)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(z) + k\sigma(z)} \quad (1.47)$$

dir.  $\pi(z)$  derecesi birden büyük olmayan bir polinom olduğundan (1.47) ifadesindeki karekök içindeki ifade en çok birinci dereceden bir polinomun karesi şeklinde olmalıdır. Bu koşul kullanılarak  $k$  nın olası değerleri tespit edilir.  $k$  bulunduktan sonra (1.47) eşitliği yardımıyla  $\pi(z)$ , ardından (1.45) denklemiyle  $\bar{\lambda}$  ve (1.40) eşitliğinin yardımıyla da  $\phi(z)$  elde edilir.

$y(z)$  fonksiyonunu elde etmek için ise

$$\sigma(z)y''(z) + \tau(z)y'(z) + \bar{\lambda}y(z) = 0 \quad (1.48)$$

hipergeometrik-tür denklemin çözümü yapılmalıdır. Hipergeometrik-tür denklemlerin çözümleri hipergeometrik-tür fonksiyonlardır. Herhangi bir hipergeometrik-tür fonksiyon

yine bir hipergeometrik-tür fonksiyonun türevidir. Bunun tersi de geçerlidir. Yani, herhangi bir hipergeometrik-tür fonksiyonun türevi yine bir hipergeometrik-tür fonksiyondur.

Bunu ispat etmek için (1.48) eşitliğinin türevi alınırsa;

$$\sigma(z)y'''' + \sigma'(z)y''' + \tau(z)y'' + \tau'(z)y' + \bar{\lambda}y' = 0, \quad (1.49)$$

$$\sigma(z)y'''' + (\sigma'(z) + \tau(z))y''' + (\tau'(z) + \bar{\lambda})y' = 0 \quad (1.50)$$

görülür ki,  $\zeta_1(z) = y'(z)$  fonksiyonu

$$\sigma(z)\zeta_1'' + (\sigma'(z) + \tau(z))\zeta_1' + (\tau'(z) + \bar{\lambda})\zeta_1 = 0 \quad (1.51)$$

denklemini sağlar ve

$$\sigma\zeta_1'' + \tau_1\zeta_1' + \mu_1\zeta_1 = 0 \quad (1.52)$$

yazılabilir. Burada

$$\tau_1(z) = \tau(z) + \sigma'(z), \quad (1.53)$$

$$\mu_1 = \bar{\lambda} + \tau'(z) \quad (1.54)$$

şeklindedir.

$\tau_1(z)$  derecesi birden büyük olmayan polinom olduğu ve  $\mu_1$  fonksiyonu  $z$  ye bağlı olmadığı için (1.52) denklemi, hipergeometrik-tür bir denklemdir. Tersinden gitmekte mümkündür. Bu durumda,  $\bar{\lambda} \neq 0$  için (1.52) denkleminin bir çözümü (1.48) denkleminin bir çözümünün türevidir.

(1.48) denkleminde (1.52) denklemini elde ederken yapılan işlemlerin (1.52) denkleminde başlanarak art arda bir kaç defa tekrarlanması ile

$$\sigma(z)\zeta_1'' + \tau_1\zeta_1' + \mu_1\zeta_1 = 0$$

$$\sigma(z)\zeta_1'''' + \sigma'(z)\zeta_1''' + \tau_1(z)\zeta_1'' + \tau_1'(z)\zeta_1' + \mu_1\zeta_1 = 0$$

$$\sigma(z)\zeta_1'''' + (\sigma'(z) + \tau_1(z))\zeta_1''' + (\tau_1'(z) + \mu_1)\zeta_1' = 0$$

$$\zeta_2(z) = \zeta_1'(z)$$

$$\begin{aligned}
\tau_2(z) &= \tau_1(z) + \sigma'(z) = \tau(z) + \sigma'(z) + \sigma'(z) = \tau(z) + 2\sigma'(z) \\
\mu_2 &= \mu_1 + \tau_1'(z) = \bar{\lambda} + \tau'(z) + \tau'(z) + \sigma''(z) = \bar{\lambda} + 2\tau'(z) + \sigma''(z) \\
\sigma(z)\zeta_2'' + \tau_2\zeta_2' + \mu_2\zeta_2 &= 0 \\
\sigma(z)\zeta_2''' + \sigma'(z)\zeta_2'' + \tau_2(z)\zeta_2'' + \tau_2'(z)\zeta_2' + \mu_2\zeta_2' &= 0 \\
\sigma(z)\zeta_2''' + (\sigma'(z) + \tau_2(z))\zeta_2'' + (\tau_2'(z) + \mu_2)\zeta_2' &= 0 \\
\zeta_3(z) &= \zeta_2'(z) \\
\tau_3(z) &= \tau_2(z) + \sigma'(z) = \tau(z) + 2\sigma'(z) + \sigma'(z) = \tau(z) + 3\sigma'(z) \\
\mu_3 &= \mu_2 + \tau_2'(z) = \bar{\lambda} + 2\tau'(z) + \sigma''(z) + \tau'(z) + 2\sigma''(z) = \bar{\lambda} + 3\tau'(z) + 3\sigma''(z) \\
\sigma(z)\zeta_3'' + \tau_3\zeta_3' + \mu_3\zeta_3 &= 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\zeta_n(z) &= \zeta_{(n-1)}'(z) = y^{(n)} & (1.55) \\
\tau_n(z) &= \tau(z) + n\sigma'(z) & (1.56) \\
\mu_n &= \bar{\lambda} + n\tau'(z) + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z) & (1.57) \\
\sigma(z)\zeta_n'' + \tau_n\zeta_n' + \mu_n\zeta_n &= 0 & (1.58)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilebilir. (1.48) denkleminin çözümünün  $n$ . dereceden bir polinom olması  $\zeta_n(z) = y^{(n)}(z) = \text{sabit}$  ve  $\mu_n = 0$  olmasını gerektirir, böylece (1.57) denkleminde

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_n = -n\tau'(z) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(z) \quad (1.59)$$

olması durumunda (1.48) denkleminin çözümünün hipergeometrik-tür polinomlar olacağı görülür. Başka bir deyişle (1.48) denkleminin çözümünü hipergeometrik-tür polinomlar olarak elde etmek için (1.59) eşitliğinin sağlanması gereklidir.

$y_n(z)$  ifadesini elde etmek için (1.48) ve (1.58) denklemleri  $\rho(z)$  ve  $\rho_n(z)$  ağırlık fonksiyonlarıyla çarpılarak kendine eşlenik formda yazılırsa

$$(\sigma\rho y')' + \bar{\lambda}\rho y = 0, \quad (1.60)$$

$$(\sigma\rho_n\zeta_n')' + \mu_n\rho_n\zeta_n = 0, \quad (1.61)$$



elde edilir. Kendine eşlenik formda yazmaya imkân veren  $\rho(z)$  ve  $\rho_n(z)$  fonksiyonları Pearson diferensiyel denklemini sağlarlar,

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho \quad (1.62)$$

$$(\sigma\rho_n)' = \tau_n\rho_n. \quad (1.63)$$

Denklem (1.56) deki  $\tau_n(z)$  ifadesinden faydalanılarak  $\rho_n(z)$  ve  $\rho_0(z) \equiv \rho(z)$  fonksiyonlarının arasındaki ilişki elde edilebilir,

$$\frac{(\sigma\rho_n)'}{\rho_n} = \tau + n\sigma' = \frac{(\sigma\rho)'}{\rho} + n\sigma' \quad (1.64)$$

buradan

$$\frac{\rho_n'}{\rho_n} = \frac{\rho'}{\rho} + n\frac{\sigma'}{\sigma} \quad (1.65)$$

ve uygun olarak

$$\rho_n(z) = \sigma^n(z)\rho(z), (n = 0,1,2,\dots) \quad (1.66)$$

elde edilir.  $\zeta_n(z) = y^{(n)}(z)$  ve  $\sigma(z)\rho_n(z) = \rho_{n+1}(z)$  olduğundan (1.63) eşitliği

$$\rho_n\zeta_n = \frac{-1}{\mu_n}(\rho_{n+1}\zeta_{n+1})' \quad (1.67)$$

olarak yazılabilir. Buradan  $m < n$  için

$$\begin{aligned} \rho_m\zeta_m &= \frac{-1}{\mu_m}(\rho_{m+1}\zeta_{m+1})' = \left(\frac{-1}{\mu_m}\right)\left(\frac{-1}{\mu_{m+1}}\right)(\rho_{m+2}\zeta_{m+2})^{(2)} = \dots \\ &= \frac{A_m}{A_n}(\rho_n\zeta_n)^{(n-m)} \end{aligned} \quad (1.68)$$

elde edilir. Burada

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, A_0 = 1 \quad (1.69)$$

dir.

Eğer  $y(z)$  fonksiyonu  $n$  dereceli bir polinom ise,  $\zeta_n(z) = y^{(n)}(z) = \text{sabit}$  olacaktır ve bu durumda  $y_n^{(m)}(z)$  için aşağıdaki ifade elde edilir

$$y_n^{(m)}(z) = \frac{A_m B_n}{\rho_m(z)} [\rho_n(z)]^{(n-m)}. \quad (1.70)$$

Burada  $B_n = \frac{1}{A_n} y_n^{(n)}(z)$  dir.  $m = 0$  olması halinde  $y_n(z)$  hipergeometrik polinomları

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} [\sigma^n(z) \rho(z)]^{(n)} (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.71)$$

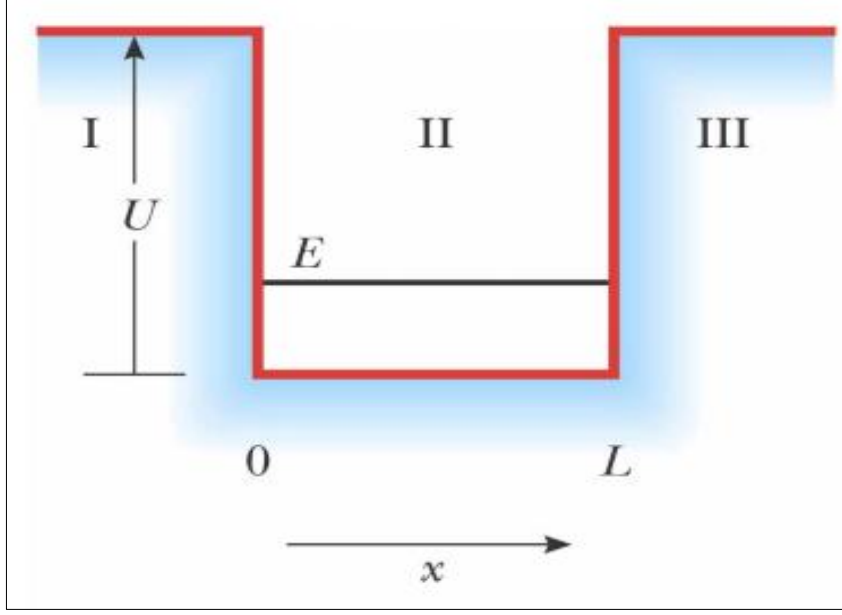
olarak bulunur. Bu çözümler  $\mu_n = 0$  durumuna, yani

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2} \sigma'' (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.72)$$

uygun gelirler. (1.71) ifadesi Rodrigues formülü olarak bilinir.

### 1.3. Bağlı Haller

Bir potansiyel alanındaki parçacığın hareketi kuantum mekaniksel olarak incelendiğinde klasik mekanikten farklı sonuçlar elde edilir. Bir potansiyel kuyusu Şekil 1.1 de gösterilmiştir.



Şekil 1.2  $L$  genişliğinde  $U$  derinliğinde bir potansiyel kuyusu

$II$  bölgesindeki  $E$  enerjili bir parçacığın klasik olarak bu bölgeden ayrılma olasılığı sıfırdır. Bunun nedeni kolayca anlaşılabilir. Parçacığın toplam enerjisi  $E$ , kinetik ( $T$ ) ve potansiyel ( $V$ ) enerjilerinin toplamına eşittir ve klasik mekanikte bu nicelikler ayrı ayrı iyi tanımlıdır ve aynı anda tam olarak belirlenebilirler.  $0 - L$  aralığının dışında parçacığın potansiyel enerjisi  $V > E$  olacağından  $E - V < 0$  ve böylece  $T < 0$  olması gerektiği görülür. Kinetik enerjinin negatif değerli olması için ise  $T = \frac{1}{2}m^2$  olduğundan hız sanal olmalıdır. Bu ise fiziksel bir sonuç kabul edilemez. Bu nedenle klasik mekaniksel olarak ele alındığında parçacık ebediyen  $II$  bölgesinde serbest olarak hareket edecektir.

Kuantum mekaniğinde toplam enerji  $E$  iyi tanımlı olduğu halde belirsizlik ilkesi gereğince potansiyel ve kinetik enerjiler ayrı ayrı iyi tanımlı değildirler. Bu nedenle kuantum mekaniğinde kinetik enerjinin negatif olduğu bölgeler olabilir. Özetle tüm uzay üzerinden kinetik enerjinin ortalama değerinin pozitif olması gerekirken belli bölgelerde değeri negatif olabilir [12].

Kuantum mekaniksel olarak  $E < V$  için parçacığın  $0 - L$  bölgesinin dışında bulunma olasılığı vardır ancak oldukça küçüktür ve daha da uzaklaşıldıkça bu olasılık sıfıra yaklaşır. Bu bölgede dalga fonksiyonu sönüme uğrar. Bu da demek olur ki parçacık  $0 - L$  bölgesini tamamen terk edemez. Klasik olarak bu bölgede olması zorunluysa kuantum teorisinde

parçacık dışarı çıkabilir fakat geçici olarak. Bu nedenle parçacık bu bölgeye bağlıdır veya bağlı durumdadır denir. Bağlı durumların enerji spektrumu kesiklidir. Klasik mekanikte parçacığın enerjisi zamanla sürekli olarak değişirken, kuantum mekaniğinde kesiklilik söz konusudur.

Klasik mekanik ile kuantum mekaniği arasındakine benzer duruma bir örnekte geometrik optik ile dalga optiği arasında verilebilir. Kırılma indisleri aynı, optikçe yoğun iki ortamın arasında ince bir plaka şeklinde optikçe az yoğun bir ortam olduğunu düşünelim. Bu durumda kritik açıdan daha büyük açıyla gelen dalgaların bir bölümü geometrik optiğin açıklayamayacağı şekilde az yoğun ortama sızar. Geometrik optiğin yasalarına göre kritik açının üstündeki değerler için bu bölge yasaklıdır ve geçiş olamaz, gelen dalga tamamen yansımalıdır. Bu olay klasik elektromanyetik teori çerçevesinde tümü ile açıklanabilir.

#### 1.4. Potansiyeller

Başlangıçtan beri fiziksel anlam taşıyan potansiyeller için görelî ve görelî olmayan dalga denklemlerinin analitik çözümlerinin elde edilmesi kuantum mekaniğin temel konuları arasında yer almıştır. Yıllar içerisinde birçok potansiyel denenmiş ve bu potansiyeller için tam ya da yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Bu potansiyellerin bir kısmı, doğada gözlenen problemler için deneyle uyuşan potansiyeller olup bu tür potansiyellerin başında Coulomb potansiyeli gelir. Coulomb potansiyeli hareketsiz iki yüklü parçacık arasındaki etkileşmeyi iyi açıklanabilmesine rağmen moleküllerin açıklanmasında yetersiz kalır. Bu yetersizlik, molekülün bir bütün olarak dönmesinden atomların birbirine göre titreşmesinden ve elektronik yapıdaki değişikliklerden kaynaklanır [13]. Moleküllerin titreşimi en temel olarak harmonik salınıcı şeklinde ele alınır, ancak gerçek bir molekülün tam bir harmonik salınıcı gibi davranmadığı enerji spektrumunun incelenmesi ile gözlenmiştir. Bu nedenle bir molekülün titreşim enerji seviyelerini açıklayabilmek için zaman içerisinde Morse [14], Kratzer [15], Hulthen [16], Rosen-Morse [17], Manning-Rosen [18], Tietz [19] gibi değişik türde birçok potansiyel önerilmiştir (Ek 3).

Bilindiği gibi potansiyellerin fizikteki kullanım alanı sadece moleküller ile sınırlı değildir. Örneğin nükleon-nükleon etkileşmelerini açıklamak için de potansiyellerden yararlanır. Bir proton ve bir nötrona sahip döteryumun analizinde sonlu kuyu potansiyeli ve deneysel sonuçlarla daha iyi şekilde uyuşan Yukawa potansiyeli [20] kullanılırken Wood-Saxon [21] potansiyeli, nükleon-çekirdek saçılmalarının incelenmesinde kullanılır.

Temel tanecik fiziğinde de potansiyellerin büyük önemi vardır, örneğin Cornell potansiyeli [22] kuark-antikuark bağlı durumlarının araştırılmasında kullanılan potansiyellerden birisidir. Bu potansiyel, Coulomb tipli ( $\sim 1/r$ ) bir potansiyele lineer hapsedme ( $\sim r$ ) potansiyelinin eklenmesi ile elde edilir. Kuark-antikuark bağlı durumlarının araştırılmasında kullanılan bir diğer potansiyel de  $O(4)$  simetrisine sahip olması ve tam çözülebiliyor olmasından dolayı Cornell potansiyeline göre daha cazip olan trigonometrik Rosen-Morse [23] potansiyelidir.

Katıhal fiziğinde katıların bant yapısı açıklanırken matematiksel zorluklardan kaçınmak için Dirac delta fonksiyonu şeklinde bir periyodik potansiyeller kullanılır [24].

Merkezcil potansiyeller için tam çözüm elde etmek daha kolay olmasına rağmen, moleküler yapılar ve etkileşmelerin dinamik özelliklerini daha iyi betimledikleri için merkezcil olmayan potansiyellerin kullanımları artmıştır. Makarov ve arkadaşlarının 1967 yılında önerdikleri potansiyel [25] merkezcil olmayan potansiyellere bir örnektir. Bu genel potansiyel sınıfının parametreleri değiştirilerek elde edilebilecek potansiyellerden birisi de Hartman tarafından, 1972 yılında kuantum kimyasındaki, halka biçimli moleküller gibi aksenal simetrikli sistemlere açıklık getirmek için önerilen Hartman potansiyelidir [26]. Nükleer fizikte deforme olmuş çekirdek çiftleri arasındaki etkileşmelerin araştırılmasında da merkezcil olmayan potansiyeller kullanılırlar.

#### 1.4.1. Manning-Rosen Potansiyeli

Merkezcil Manning-Rosen potansiyeli,  $A, \alpha$  boyutsuz,  $b$  ise potansiyelin erimiyle ilgili uzunluk boyutunda bir parametre olmak üzere

$$V(r) = \frac{1}{kb^2} \left[ \frac{\alpha(\alpha - 1)e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})} \right], k = \frac{2\mu}{\hbar^2} \quad (1.73)$$

ile verilir.  $\alpha = 0$  veya  $\alpha = 1$  olması durumunda potansiyel Hulthen potansiyeli biçimini alır.

Merkezcil olmayan Manning-Rosen potansiyeli ise

$$V(r, \theta) = \frac{1}{k} \left[ \frac{\beta'}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\beta \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (1.74)$$

biçiminde bir halka tipli potansiyelin Manning-Rosen potansiyeline eklenmesi ile edilir. Burada  $\beta'$  ve  $\beta$  eksi değerler almayan gerçel sabitlerdir.

### 1.5. Hipergeometrik Tür Diferensiyel Denklemler ve Dikey (Orthogonal) Polinom Aileleri

Bir  $f_n(x)$  polinom ailesi  $a \leq x \leq b$  aralığında bir  $w(x)$  ağırlık fonksiyonu için

$$\int_a^b w(x) f_n(x) f_m(x) dx = 0, (n \neq m; n, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.75)$$

eşitliğini sağlıyorsa dikeydir denir. Bütün klasik dikey polinom aileleri

$$\begin{aligned} \sigma(x)y_n''(x) + \tau(x)y_n'(x) + \lambda_n y_n(x) &= 0 \\ \sigma(x) &= ax^2 + bx + c, \tau(x) = xd + e, \lambda_n = n(1-n)a - nd \end{aligned} \quad (1.76)$$

hipergeometrik-tür denklemin çözümleridir.

Hipergeometrik-tür denklem ve onun polinom çözümleri için birçok çalışma yapılmıştır. 2006 da Koepf ve Jamei [27] bu denklemin monik polinom çözümleri için

$$\begin{aligned} \bar{P}_n \left( \begin{matrix} d & e \\ a & b & c \end{matrix} , x \right) &= \sum_{k=0}^n G_k^{(n)}(a, b, c, d, e) x^k, \\ G_k^{(n)} &= \left( \frac{2a}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right)^{k-n} \end{aligned} \quad (1.77)$$

şeklinde genel bir ifade elde etmişlerdir. Bu çalışmada ayrıca özel durumlar da detaylı şekilde incelenmiştir. Bu sonuçlara dayanarak;

- Jacobi polinomları;  $a = -1, b = 0, c = 1, d = -\alpha - \beta - 2, e = -\alpha + \beta,$
- Laguerre polinomları;  $a = 0, b = 1, c = 0, d = -1, e = -\alpha + 1,$
- Hermite polinomları;  $a = b = 0, c = 1, d = -2, e = 0,$
- Romanovski polinomları,  $a = 1, b = 0, c = 1, d = 2(1 - p), e = q, p > 0,$

- Bessel polinomları,  $a = 1, b = 0, c = 0, d = \alpha + 2, e = \beta$  elde edilebilir.

1929 yılındaki çalışmasında Bochner [28] hipergeometrik-tür denklemin çözümlerini  $\sigma(x)$  in formuna göre sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırma ile bu beş polinom ailesi hipergeometrik-tür denklemin çözümü olarak elde edilebilir.

1.  $\sigma(x)$  bir sabit ise,

Bu durumda hipergeometrik-tür denklemin kanonik hali

$$H''(x) - 2\alpha x H'(x) + \lambda H(x) = 0 \quad (1.78)$$

olur ve çözümleri genelleştirilmiş Hermit polinomlarıdır  $\{H_n^\alpha(x)\}$ .  $\alpha = 1$  durumunda, Hermit polinomları  $\{H_n(x)\}$  elde edilir.

2.  $\sigma(x)$  birinci dereceden bir polinom ise,

Bu durum için kanonik ifade

$$xL''(x) - y_1(x)L'(x) + \lambda L(x) = 0, y_1(x) = -\alpha x + \beta + 1 \quad (1.79)$$

şeklindedir.  $\alpha = 1$  ve  $\beta \in \mathbb{R}$  için çözüm eklenmiş Laguerre polinomları  $\{L_n^\beta(x)\}$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\beta = 0$  için ise çözüm Laguerre polinomlarıdır  $\{L_n(x)\}$ .

3.  $\sigma(x)$  ikinci dereceden bir polinom ve farklı iki gerçel köke sahipse,

Bu durum için kanonik ifade

$$\begin{aligned} (1 - x^2)P''(x) + y_1(x)P'(x) + \lambda P(x) &= 0, y_1(x) \\ &= \alpha - \beta - (\alpha + \beta + 2)x \end{aligned} \quad (1.80)$$

şeklindedir.  $\alpha$  ve  $\beta$  nın gerçel değerler alması durumunda çözüm Jacobi polinomlarıdır  $\{P_n^{\alpha, \beta}(x)\}$ .

Bazı özel durumlar kendi isimleriyle adlandırılırlar. Bunlar,

- $\beta = \alpha$  için Gegenbauer,
  - $\beta = \alpha = \pm 1/2$  için Chebyshev I ve II,
  - $\beta = \alpha = 0$  için Legendre.
4.  $\sigma(x)$  ikinci dereceden bir polinom ve eşit iki reel kökü varsa,

Bu durum için kanonik ifade

$$xL''(x) - y_1(x)L'(x) + \lambda L(x) = 0, y_1(x) = \alpha x + \beta \quad (1.81)$$

şeklindedir.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için çözüm genelleştirilmiş Bessel polinomları  $\{y_n^{\alpha, \beta}(x)\}$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = \beta = 2$  için ise çözüm Bessel polinomlarıdır  $y_n(x)$ .

Bessel polinomları ilk olarak Bochner tarafından dikkate alınmış ve Bessel fonksiyonları ile ilişkileri gösterilmiştir. Krall ve Frink [29] çalışmalarında Bessel polinomlarının birçok özelliğini yayınlamışlardır. Bessel polinomları bir dikey set oluştururlar ancak bu polinomlar alışılmış manada dikey değildir. Bessel polinomlarının dikeyliği ağırlık fonksiyonu  $e^{-x/2}$  için kompleks düzlemde birim çember üzerinden integrale edilerek gösterilebilir. Bessel polinomları

$$\int_U y_m(x)y_n(x)e^{-2/x} dx = 0, m \neq n \quad (1.82)$$

dikeylik şartını sağlarlar.

5.  $\sigma(x)$  ikinci dereceden bir polinom ve iki kompleks kökü varsa,

Bu durum için kanonik ifade

$$xL''(x) - y_1(x)L'(x) + \lambda L(x) = 0, y_1(x) = (2\beta + 1)x + \alpha \quad (1.83)$$

şeklindedir.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için çözüm Romanovski polinomlarıdır  $\{R_n^{\alpha, \beta}(x)\}$ .

Sonlu sayıda Romanovski polinomu  $x \in [-\infty, +\infty]$  sonsuz aralığında dikeylik özelliğine sahiptir. Ağırlık fonksiyonları  $w^{(p, q)}(x) = (x^2 + 1)^{-p} e^{q \tan^{-1} x}$  için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{(p, q)}(x) R_m^{(p, q)}(x) R_{m'}^{(p, q)}(x) dx \quad (1.84)$$

integrali yalnız  $m + m' < 2p - 1$  olması durumunda yakınsak olduğu için sonlu sayıda Romanovski polinomu dikeylik özelliği gösterir [30].

Hipergeometrik-tür diferansiyel denkleminin çözümü olan dikey polinomlar ve



ağırlık fonksiyonları Tablo 1.2’de verilmiştir.

Tablo 1.2. Dikey polinom aileleri

Polinom	$f_n(x)$	$w(x)$ Ağırlık fonksiyonu	$\sigma(x)$	Aralık	
G. Hermite	$H_n^\alpha(x)$	$e^{-\alpha x^2}$	1	$(-\infty, \infty)$	
G. Laguerre	$L_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	$x^\beta e^{-\alpha x}$	$x$	$[0, \infty)$	
Jacobi	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$(1-x^2)$	$[-1, 1]$	$(\alpha, \beta > -1)$
Legendre	$P_n(x)$	1	$(1-x^2)$	$[-1, 1]$	
Gegenbauer	$C_n^\alpha(x)$	$(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$	$(1-x^2)$	$[-1, 1]$	$\alpha > -1/2$
Chebyshev I	$T_n(x)$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$(1-x^2)$	$[-1, 1]$	
Chebyshev II	$U_n(x)$	$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	$(1-x^2)$	$[-1, 1]$	
G. Bessel	$y_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	$x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}}$	$x^2$	kompleks	
Romanovski	$R_n^{(\beta, \alpha)}(x)$	$(1+x^2)^{\beta-\frac{1}{2}}e^{-\alpha \tan^{-1}(x)}$	$(1+x^2)$	$(-\infty, \infty)$	$-\beta > n$

### 1.7. Litaratür Özeti

Kuantum mekaniğinde çeşitli potansiyeller görelî ve görelî olmayan durumlar için değişik matematiksel yöntemler kullanılarak incelenir. Bu yöntemlerin bazıları analitik çözüm yapmaya olanak sağlarken (NU yöntemi, faktörizasyon yöntemi gibi), bazıları da sayısal yöntemlerdir (asimtotik iterasyon yöntemi, sonlu farklar yöntemi gibi). Günümüze gelene kadar sayısız çalışmalar yapılmış ve günümüzde de bu çalışmaların sayısı artarak devam etmektedir. Tablo 1.3’de belli başlı bazı çalışmalar gösterilmektedir, bu çalışmalardan referans numarasının üstünde “\*” işareti olanlar NU yöntemi ile çözülmüştür.

Tablo 1.3. Literatür özeti

<b>Potansiyel</b>	<b>Scrödinger Denklemi</b>	<b>KFG Denklemi</b>
Manning-Rosen	[31]* [32]	[33]
Morse	[34]*[35]	[36]
Poschen-Teller	[37]*	[38]
Wood-Saxon	[39]*	[40]*
Makarov	[41]*	[42]
Rosen-Morse	[43]	[44][45]*
Kratzer	[46]*	[47]
Merkezcil olmayan Kratzer	[48]* [49]	[50]*
Hulthen	[51]*[52]	[53]*
Hulthen + Manning-Rosen	[54]*	
Merkezcil olmayan Hulthen	[55]	
Modifiye edilmiş Hulthen + Scarf	[56]*	
Hulthen+Eckart	[57]	
Eckart	[58]*	[59]
Deng-Fan(genelleştirilmiş Morse)	[60]	[61]*[62]
Yukawa	[63]*	[64]
Merkezcil olmayan harmonik salınıcı		[65]

## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1. Merkezil Olmayan Manning-Rosen Potansiyeli İçin Schrödinger Denkleminin Bağlı Durum Çözümleri

Bu bölümde merkezil olmayan Manning-Rosen potansiyeli için bağlı durum enerjileri ve bu enerjilere karşılık gelen dalga fonksiyonları

$$\begin{aligned} & \frac{-\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r, \theta, \phi) \\ & + \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{b^2} \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{1}{b^2} \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + \frac{\beta'}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\beta \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \psi(r, \theta, \phi) \quad (2.1) \\ & = E\psi(r, \theta, \phi), k = \frac{2\mu}{\hbar^2} \end{aligned}$$

zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin NU yöntemiyle çözülmesiyle elde edilmiştir.

#### 2.1.1. Denklemin Değişkenlerine Ayrılması

Merkezil olmayan Manning-Rosen potansiyeli için Schrödinger denkleminde küresel koordinatlarda, değişkenlere ayırma yöntemiyle  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\theta(\theta)\Phi(\phi)$  kullanılarak

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{1}{b^2} \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} - \frac{1}{b^2} \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{\lambda}{r^2} \right] R(r) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 \theta(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\theta(\theta)}{d\theta} + \left[ \left( \frac{\beta' + \beta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) + \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \theta(\theta) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (2.4)$$

$m^2$  ve  $\lambda$  ayırma sabitleri olmak üzere üç tane ikinci basamaktan değişken katsayılı adi diferensiyel denklem elde edilmiştir.

Son denklemdeki  $\Phi(\phi)$  fonksiyonu, periyodik  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$  sınır şartını sağlaması gerekliliğinden,

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5)$$

olarak bulunur.

### 2.1.2. Işınsal Schrödinger Denkleminin Çözümleri

Bu bölümde NU yöntemi kullanılarak Manning-Rosen potansiyeli için ışınsal Schrödinger denklemi olarak adlandırılan (2.2) denkleminin çözümleri elde edilmiştir.

(2.2) denkleminin analitik çözümünü  $\lambda$  nın sıfırdan farklı olacağı durumlar için de elde edilebilmesi için  $1/r^2$  terimi yerine,  $C_0 = 1/12$  olmak üzere

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{b^2} \left[ C_0 + \frac{e^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \right] \quad (2.6)$$

şeklinde bir yaklaşıklık kullanılmıştır.

$\chi(r) = rR(r)$  cinsinden ışınsal Schrödinger denklemi

$$\chi''(r) + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{1}{b^2} \frac{Ae^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})} - \frac{1}{b^2} \frac{\alpha(\alpha - 1)e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} - \frac{\lambda}{b^2} \left[ C_0 + \frac{e^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \right] \right] \chi(r) = 0 \quad (2.7)$$

şeklinde daha basit bir ifadeye dönüşür.

Bu denklem, Ek 1 yardımıyla  $r$  değişkeninden  $s = e^{-r/b}$  değişkenine geçilmesi ile

$$\chi''(s) + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma} \chi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2} \chi(s) = 0 \quad (2.8)$$

Biçiminde genelleştirilmiş hipergeometrik-tür bir diferansiyel denklem elde edilir. Buna göre  $g(s) = \ln s^{-b}$  ve türevleri,

$$g'(s) = \frac{-b}{s}, g''(s) = \frac{b}{s^2} \quad (2.9)$$

(2.7) de yazılarak

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s} \quad (2.10)$$

ve

$$\tilde{Q}(s) = \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} E + \frac{1}{b^2} \frac{As}{(1-s)} - \frac{1}{b^2} \frac{\alpha(\alpha-1)s^2}{(1-s)^2} - \frac{\lambda}{b^2} \left[ C_0 + \frac{s}{(1-s)^2} \right] \right] \frac{b^2}{s^2} \quad (2.11)$$

olarak elde edilmiştir. Böylece (2.7) denklemi

$$\begin{aligned} \chi''(s) + \frac{1}{s} \chi'(s) \\ + \left[ \frac{1}{s(1-s)} \right]^2 \left[ -\epsilon^2(1-s)^2 + As(1-s) - \alpha(\alpha-1)s^2 \right. \\ \left. - (1-s)^2 \lambda \left[ C_0 + \frac{s}{(1-s)^2} \right] \right] \chi(s) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

denklemine dönüşür. Bağlı durumlar göz önüne alındığından (2.12) denklemindeki boyutsuz  $-\epsilon^2$  parametresi

$$-\epsilon^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E b^2, E < 0 \quad (2.13)$$

olarak tanımlanmıştır.

Son olarak  $\chi'(s)$  in katsayısı  $\frac{(1-s)}{(1-s)}$  ile çarpılarak (2.12) denklemi

$$\begin{aligned} \chi''(s) + \frac{1-s}{s(1-s)}\chi'(s) \\ + \left[ \frac{1}{s(1-s)} \right]^2 \left[ -\epsilon^2(1-s)^2 + As(1-s) - \alpha(\alpha-1)s^2 \right. \\ \left. - (1-s)^2\lambda \left[ C_0 + \frac{s}{(1-s)^2} \right] \right] \chi(s) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

istenilen forma getirilmiştir.

Denklem (2.14) ile denklem (2.8) deki, genelleştirilmiş hipergeometrik-tür denklem karşılaştırılarak aşağıdaki fonksiyonlar tanımlanmıştır;

$$\tilde{\tau} = 1 - s, \quad (2.15)$$

$$\sigma(s) = s(1-s), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(s) = s^2[-\epsilon^2 - A - \alpha(\alpha-1) - \lambda C_0] + s[2\epsilon^2 + A + 2\lambda C_0 - \lambda] \\ + [-\epsilon^2 - \lambda C_0]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\chi(s)$  fonksiyonu

$$\chi(s) = \phi(s)y(s) \quad (2.18)$$

olarak ayrıştırılarak uygun  $\phi(s)$  fonksiyonu için (2.14) denklemi iyi bilinen

$$\sigma(s)y''(s) + \tau y'(s) + \bar{\lambda}y(s) = 0 \quad (2.19)$$

hipergeometrik-tür bir diferansiyel denkleme dönüştürebilir.

NU yöntemine göre, en çok birinci dereceden polinom olan (1.47) denklemdeki  $\pi(s)$ fonksiyonu,

$$a = \frac{1}{4} + \epsilon^2 + A + \alpha(\alpha-1) + \lambda C_0, \quad (2.20)$$

$$b = 2\epsilon^2 + A + 2\lambda C_0 - \lambda, \quad (2.21)$$

$$c = \epsilon^2 + \lambda C_0 \quad (2.22)$$

olmak üzere

$$\pi(s) = \frac{-s}{2} \pm \sqrt{s^2(a-k) - s(b-k) + c} \quad (2.23)$$

olarak elde edilmiştir. Buradaki  $k$  sabitini bulmak için  $\pi(s)$  fonksiyonunun en çok birinci dereceden bir polinom olması gerekliliğinden yararlanılmıştır. Bu şartın sağlanması için (2.23) denkleminde karekök altındaki ifadenin diskriminantı sıfıra eşit olmalıdır,

$$\Delta = [-s(b-k)]^2 - 4(a-k)c = 0. \quad (2.24)$$

Bu eşitlik  $k$  için çözümlenmesiyle

$$k_{1,2} = (b-2c) \pm 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \quad (2.25)$$

elde edilmiştir. Her bir  $k$  değerinin (2.23) denkleminde yerine yazılması ile  $\pi(s)$  fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \frac{-s}{2} \pm \left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{c} - \sqrt{c+a-b})s - \sqrt{c}, k = (b-2c) + 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \\ (\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b})s - \sqrt{c}, k = (b-2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

dört olası sonuca ulaşılmıştır. NU yöntemine göre, bu olası dört polinomdan, (1.39) denklemindeki

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad (2.27)$$

fonksiyonunun birinci türevinin negatif değerler alacağı,  $\pi(s)$  polinomu seçilmelidir. Diğer üç polinom fiziksel sonuç vermezler [66]. Böylece uygun  $k$  sabiti

$$k = (b-2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a-b)} \quad (2.28)$$

için  $\pi(s)$  fonksiyonu

$$\pi(s) = \sqrt{c} - s \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{c} + \sqrt{c + a - b} \right] \quad (2.29)$$

olarak seçilmiş ve (2.27) denklemi ile  $\tau(s)$  fonksiyonu

$$\tau(s) = 1 + 2\sqrt{c} - 2s[1 + \sqrt{c + a - b}] \quad (2.30)$$

olarak elde edilmiştir.

Son olarak  $\pi(s)$  ve  $\tau(s)$  polinomlarının NU yönteminde kullanılması ile  $\chi(s)$  özfonksiyonları bulunmuştur. Bunun için önce  $\pi(s)$  ve  $\sigma(s)$  fonksiyonları denklem (1.39) de yerine yazılarak birinci basamaktan

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\sqrt{c} - s[1/2 + \sqrt{c} + \sqrt{c + a - b}]}{s(1 - s)} \quad (2.31)$$

diferensiyel denklemi elde edilmiştir. Bu eşitliğin sağ tarafının

$K = \Lambda + 1/2$ ,  $\Lambda = \sqrt{c + a - b} = \sqrt{1/4 + \alpha(\alpha - 1) + \lambda}$  kısaltmaları ile

$$\frac{\sqrt{c} - s[1/2 + \sqrt{c} + \Lambda]}{s(1 - s)} = \frac{\sqrt{c}}{s} + \frac{\sqrt{c}}{1 - s} - \frac{1/2 + \sqrt{c} + \Lambda}{1 - s} = \frac{\sqrt{c}}{s} - \frac{K}{1 - s}, \quad (2.32)$$

daha sade şekilde yazılması ile (2.31) denklemi

$$d(\ln\phi) = ds \left( \frac{\sqrt{c}}{s} - \frac{K}{1 - s} \right) \quad (2.33)$$

şekline getirilmiştir. Eşitliğin her yanının integrali alınarak

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\sqrt{c} - s[1/2 + \sqrt{c} + \Lambda]}{s(1 - s)} \quad (2.34)$$



ve buradan da

$$\phi(s) = s^{\sqrt{c}}(1-s)^K \quad (2.35)$$

bulunmuştur.

Dalga fonksiyonunun diğer kısmı olan  $y(s)$ , hipergeometrik-tür denklemin polinom çözümü, yöntemde Rodrigues bağıntısı ile verilir. Bu çözümü elde etmek için ilk olarak Pearson diferensiyel denkleminin çözümünden elde edilebilen, hipergeometrik-tür denklemin ağırlık fonksiyonu  $\rho(s)$

$$\begin{aligned} (\sigma\rho)' &= \tau\rho, \\ s(1-s)\rho' + (1-2s)\rho &= \tau\rho, \\ s(1-s)\rho' &= \rho(1+2\sqrt{c}-2s-2s\sqrt{c+a-b}-1+2s), \\ \frac{\rho'}{\rho} = d(\ln\rho) &= \frac{(1+2\sqrt{c}-2s-2s\sqrt{c+a-b}-1+2s)}{s(1-s)} = \frac{2\sqrt{c}}{s} + \frac{2(\sqrt{c}-1)}{1-s} \\ &= \frac{2\sqrt{c}}{s} + \frac{2K-1}{1-s} \end{aligned} \quad (2.36)$$

işlemlerinin ardından (2.36) eşitliğinin iki yanının integrali alınarak

$$\rho(s) = s^{2\sqrt{c}}(1-s)^{2K-1} \quad (2.37)$$

olarak bulunmuştur.

Ağırlık fonksiyonu ve  $\sigma(s)$  nin (1.71) denklemindeki Rodrigues bağıntısında yazılması ile hipergeometrik-tür denklemin polinom çözümünün

$$y_{n_r}(s) = B(1-s)^{1-2K} s^{-2\sqrt{c}} \frac{d^{n_r}}{ds^{n_r}} [s^{2\sqrt{c}+n_r}(1-s)^{2K-1+n_r}] \quad (2.38)$$

olacağı görülmüştür. Bu çözümün, iyi bilinen  $P_n^{(a,b)}(s)$  Jacobi polinomları cinsinden yazılması mümkündür. Jacobi polinomlarının Ek 19 daki tanımı kullanılarak

$P_n^{(a,b)}(1-2s)$  polinomları,

$$P_n^{(a,b)}(1-2s) = \frac{C_n}{s^a(1-s)^b} \frac{d^n}{ds^n} [s^{a+n}(1-s)^{b+n}] \quad (2.39)$$

şekline getirilir ve

$$\frac{d^n}{ds^n} [(1-s)^{a+n}(1+s)^{b+n}] = C'_n s^a (1-s)^b P_n^{(a,b)}(1-2s) \quad (2.40)$$

eşitliği elde edilir.

(2.40) ifadesinden yararlanılarak (2.38) eşitliği Jacobi polinomları cinsinden

$$y_{n_r}(s) = C_{n_r} P_{n_r}^{(2\sqrt{c}, 2K-1)}(1-2s) \quad (2.41)$$

elde edilmiştir.

$\phi(s)$  ve  $y_{n_r}(s)$  fonksiyonlarının hesaplanmasından sonra (2.18) denklemindeki  $\chi_{n_r}(s)$  fonksiyonu oluşturulmuştur

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K P_{n_r}^{(2\sqrt{c}, 2K-1)}(1-2s). \quad (2.42)$$

(2.42) denklemindeki  $C_{n_r}$  normalizasyon sabitleri hesaplanırken D.Agboola'nın çalışmasında [11] uygulanan adımlar izlenerek önce Jacobi polinomlarının Gauss hipergeometrik fonksiyonları cinsinden Ek 18 bağıntısındaki tanımı kullanılarak  $\chi_{n_r}(s)$  fonksiyonu

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}} (1-s)^K \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} {}_2F_1(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s) \quad (2.43)$$

şekline getirilmiştir.

Dalga fonksiyonunun olasılık yorumuna göre

$$\int_0^{\infty} |R(r)|^2 r^2 dr = \int_0^{\infty} |\chi(r)|^2 dr = b \int_0^1 \frac{1}{s} |\chi(s)|^2 ds = 1 \quad (2.44)$$

eşitliğinin sağlanması gerekliliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & |C_{n_r}|^2 \left( \frac{\Gamma(n + 2\sqrt{c} + 1)}{n! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} \right)^2 b \\ & \times \int_0^1 s^{2\sqrt{c}-1} (1-s)^{2K} |{}_2F_1(-n, 2\sqrt{c}, 2K + n, 1 + 2\sqrt{c}; s)|^2 ds \end{aligned} \quad (2.45)$$

eşitliğine ulaşılmıştır. Son olarak buradaki integrali hesaplamak için

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-z)^{2(\delta+1)} z^{2\lambda-1} [{}_2F_1(-n, 2(\delta + \lambda + 1) + n, 2\lambda + 1; z)]^2 dz \\ & = \frac{(n + \delta + 1)n! \Gamma(n + 2\delta + 2) \Gamma(2\lambda) \Gamma(2\lambda + 1)}{(n + \delta + \lambda + 1) \Gamma(n + 2\lambda + 1) \Gamma(2(\delta + \lambda + 1) + n)}, \\ & \delta > \frac{-3}{2}, \lambda > 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

integral formülü kullanılarak  $C_{n_r}$  normalizasyon sabiti

$$C_{n_r} = \sqrt{\frac{n_r! (2\sqrt{c})(n_r + K + \sqrt{c}) \Gamma(2(K + \sqrt{c}) + n_r)}{b(n_r + K) \Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1) \Gamma(n_r + 2K)}} \quad (2.47)$$

olarak hesaplanmıştır.

### 2.1.3. $\theta$ Açısına Bağlı Denklemin Çözümleri

Bu bölümde  $\theta$  açısına bağlı kısım için çözüm NU yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

(2.3) denkleminin çözümünü elde edebilmek için ilk önce  $\theta$  değişkeninden  $x = \cos\theta$

değişkenine geçilmesi durumunda denklemin alacağı şekil araştırılmıştır. Bu amaçla  $\theta = g(x) = \cos^{-1}x$  in  $x$  değişkenine göre birinci ve ikinci türevle  $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $g''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$  elde edilmiş ve dönüşüm sonrası denklem için  $\tilde{P}(x)$  ve  $\tilde{Q}(x)$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x) &= \frac{\cos(\cos^{-1}x)}{\sin(\cos^{-1}x)} \left[ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right] - \left[ \frac{-x}{1-x^2} \right] = \frac{-x}{1-x^2} - \left[ \frac{-x}{1-x^2} \right] \\ &= \frac{2x}{1-x^2}\end{aligned}\quad (2.48)$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x) &= \left[ - \left( \frac{\beta' + \beta x}{\sin^2(\cos^{-1}x)} \right) + \lambda - \frac{m^2}{\sin^2(\cos^{-1}x)} \right] \left[ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right]^2 \\ &= \left[ - \left( \frac{\beta' + \beta x}{1-x^2} \right) + \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \left[ \frac{1}{1-x^2} \right] \\ &= \frac{1}{(1-x^2)^2} [\lambda(1-x^2) - m^2 - (\beta' + \beta x)]\end{aligned}\quad (2.49)$$

olarak hesaplanmıştır. Böylece dönüşüm sonrası (2.3) denklemini

$$\theta''(x) - \frac{2x}{1-x^2} \theta'(x) + \frac{1}{(1-x^2)^2} [\lambda(1-x^2) - m^2 - (\beta' + \beta x)] \theta(x) = 0 \quad (2.50)$$

denklemine getirilmiştir.

Denklem (2.50) ile genelleştirilmiş hipergeometrik-tür denklemin karşılaştırılması ile  $\tilde{\tau}(x)$ ,  $\sigma(x)$  ve  $\tilde{\sigma}(x)$  polinomları

$$\tilde{\tau}(x) = -2x, \quad (2.51)$$

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \quad (2.52)$$

$$\tilde{\sigma}(x) = -\lambda x^2 - \beta' x + (\lambda - m^2 - \beta) \quad (2.53)$$

olarak elde edilmiş ve bu polinomlar kullanılarak NU yöntemindeki  $\pi(x)$  polinomu

$$\pi(s) = \pm \sqrt{x^2(\lambda - k) - x\beta - (\lambda - \beta' - m^2 - k)} \quad (2.54)$$

olarak bulunmuştur.  $k$  sabiti önceki bölümde olduğu gibi, elde edilen  $\pi(x)$  polinomundaki karekök içindeki ifadenin diskriminantının sıfır olması gerekliliğinden bulunmuştur,

$$\Delta = 4k^2 + k[4m^2 + 4\beta' - 8\lambda] + [\beta^2 + 4\lambda^2 - 4\lambda\beta^2 - 4\lambda m^2] = 0. \quad (2.55)$$

(2.55) eşitliği  $k$  için çözümlenerek kökler

$$u = \sqrt{(m^2 + \beta')^2 - \beta^2} \quad (2.56)$$

olmak üzere

$$k_{1,2} = \frac{2\lambda - m^2 - \beta'}{2} \pm \frac{u}{2}, \quad (2.57)$$

olarak bulunmuştur.

Böylece  $\pi(x)$  fonksiyonu için olası dört polinomun

$$\pi(s) = \pm \left\{ \begin{array}{l} x \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} + \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}} k = \frac{2\lambda - m^2 - \beta'}{2} - \frac{u}{2} \\ x \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}} + \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} k = \frac{2\lambda - m^2 - \beta'}{2} + \frac{u}{2} \end{array} \right\} \quad (2.58)$$

olacağı görülmüştür. Olası bu dört polinomdan (2.27) denklemindeki  $\tau(x)$  fonksiyonunun birinci türevinin negatif değerler alacağı uygun  $\pi(x)$  polinomu ve karşılık gelen  $k$  sabiti sırasıyla

$$\pi(x) = - \left[ x \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} + \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}} \right] \quad (2.59)$$

$$k = \frac{2\lambda - m^2 - \beta'}{2} - \frac{u}{2} \quad (2.60)$$

olarak seçilmiştir. Denklem (2.27) kullanılarak  $\tau(x)$  polinomu da

$$\tau(x) = -2x \left[ 1 + \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} \right] - 2 \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}} \quad (2.61)$$

olarak bulunmuştur.

Son olarak dalga fonksiyonunun elde edilmesi için ışınsal kısmın dalga fonksiyonunu elde ederken uygulanan işlemler tekrarlanmıştır.

Önce  $\phi(x)$  ile  $\rho(x)$  fonksiyonları  $B = \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}}$  ve  $C = \sqrt{\frac{m^2 + \beta' - u}{2}}$  için

$$\phi(x) = (1 - x)^{(B+C)/2} \quad (2.62)$$

$$\rho(x) = (1 - x)^{B+C} (1 + x)^{B-C} \quad (2.63)$$

olarak hesaplanmıştır.

Ardından ağırlık fonksiyonunun (1.71) denklemindeki Rodrigues bağıntısına yerleştirilmesi ile  $y_N(x)$  fonksiyonu

$$y_N(x) = B_N (1 - x)^{-(B+C)} (1 + x)^{(C-B)} \frac{d^N}{dx^N} [(1 - x)^{B+C+N} (1 + x)^{B-C+N}],$$

$$N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.64)$$

elde edilmiştir. Jacobi polinomlarının denklem Ek 19 daki tanımını kullanılarak elde edilen

$$\frac{d^N}{dx^N} [(1 - x)^{B+C+N} (1 + x)^{B-C+N}]$$

$$= (-1)^N 2^N (1 - x)^{B+C} (1 + x)^{B-C} P_N^{(B+C, B-C)}(x) \quad (2.65)$$

ifadesinin (2.64) denkleminde konulması ile normalize edilmemiş  $\theta_N(x)$  dalga fonksiyonları

$$\theta_N(x) = C_N (1 - x)^{(B+C)/2} (1 + x)^{(B-C)/2} P_N^{(B+C, B-C)}(x) \quad (2.66)$$

olarak bulunmuştur. Son olarak  $C_N$  normalizasyon sabiti

$$\int_0^{\pi} [T(\theta)]^2 \sin(\theta) d\theta = \int_{-1}^1 [T(x)]^2 dx = 1 \quad (2.67)$$

eşitliğinden Jacobi polinomlarının Ek 14 denklemindeki dikeylik bağıntısı kullanılarak

$$C_N = \sqrt{\frac{(2N + 2B + 1)\Gamma(n + 1)\Gamma(N + 2B + 1)}{2^{2B+1}\Gamma(N + B + C + 1)\Gamma(N + B - C + 1)}} \quad (2.68)$$

olarak elde edilmiştir.

#### 2.1.4. Enerji Özdeğerleri

Bu bölümde merkezci olmayan Manning-Rosen potansiyeli için enerji değerlerinin analitik ifadesi elde edilmiştir. Bu amaçla önce ışımsal kısımdaki  $\epsilon^2$  ifadesine ulaşılmış ve buradan enerji özdeğerleri için bir analitik ifade elde edilmiş, ardından da  $\theta$  açısına bağlı kısımdan elde edilen  $\lambda$  sabiti bu analitik ifadede yerine yazılmıştır.

Denklem (1.45) kullanılarak  $\bar{\lambda}$  sabiti ışımsal kısım için

$$\bar{\lambda} = (b - 2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a + b)} - \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{c} + \sqrt{c + a - b} \right] \quad (2.69)$$

olarak elde edilmiştir.

Hipergeometrik-tür bir diferansiyel denklemin, negatif olmayan  $n$  tamsayı değerleri için polinom çözümler vermesi ancak ve ancak

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \lambda_n \neq \lambda_m, \\ m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.70)$$

eşitliğinin sağlanması ile mümkün olabileceğinden [67]

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{n_r} &= (b - 2c) - 2\sqrt{c}\sqrt{c + a + b} - \frac{1}{2} - [\sqrt{c} + \sqrt{c + a - b}] \\ &= 2n_r[1 + (\sqrt{c} + \sqrt{c + a - b})] + n_r(n_r - 1), n_r = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.71)$$

eşitliği elde edilmiştir. Buradan

$$(b - 2c) - 2\sqrt{c}\Lambda - \frac{1}{2} - \sqrt{c} - \Lambda = 2n_r[\sqrt{c} + \Lambda] + n(n + 1) \quad (2.72)$$

Yazılıp  $\sqrt{c}$  için çözülmesi ile bulunan

$$\sqrt{c} = \frac{\lambda + 1/2 + \Lambda(1 + 2n_r) + n_r(n_r + 1) - A}{-(2\Lambda + 1 + 2n_r)} \quad (2.73)$$

eşitliğinin denklem (2.22) deki  $c = \epsilon^2 + \lambda C_0$  ifadesinin de kullanılması ile elde ettiğimiz

$$\epsilon^2 = \left[ \frac{\lambda + 1/2 + \Lambda(1 + 2n_r) + n_r(n_r + 1) - A}{2\Lambda + 1 + 2n_r} \right]^2 - \lambda C_0 \quad (2.74)$$

ifadesinin (2.18) denkleminde kullanılması ile enerji spektrumu

$$E_{n_r, l} = \frac{-\hbar^2}{2\mu b^2} \left[ \left[ n_r + \frac{1}{2} + \frac{\lambda - n_r(n_r + 1) - A}{2\Lambda + 1 + 2n_r} \right]^2 - \lambda C_0 \right] \quad (2.75)$$

olarak elde edilmiştir.

Benzer işlemlerin  $\theta$  açısına bağlı kısım için tekrarlanması ile (2.74) denklemindeki  $\lambda$  bilinmiyeni bulunmuştur.

Önce, (2.60) deki  $k$  sabiti ve (2.59) deki  $\pi(x)$  polinomu (1.45) denkleminde kullanılarak

$$\bar{\lambda} = k + \pi'(x) = \frac{2\lambda - \beta^2 - m^2}{2} - \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{m^2 + \beta + u}{2}} \quad (2.76)$$



ifadesine ulaşılmış ve bu ifadenin, polinom sonuçlar elde etmek için gerekli koşul olan (2.70) ifadesinden elde edilen

$$\bar{\lambda} = 2N \left[ 1 + \sqrt{\frac{m^2 + \beta + u}{2}} + N(N - 1) \right] \quad (2.77)$$

eşitliğiyle karşılaştırılması ile

$$\frac{2\lambda - \beta^2 - m^2}{2} - \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{m^2 + \beta + u}{2}} = 2N \left[ 1 + \sqrt{\frac{m^2 + \beta + u}{2}} + N(N - 1) \right] \quad (2.78)$$

bulunmuştur.

Enerji spektrumundaki bilinmeyen  $\lambda = l(l + 1)$  değerlerini elde etmek için (2.78) denklemini  $\lambda$  için çözülmüştür. İlk olarak bu eşitlik

$$\xi = \sqrt{\frac{m^2 + \beta' + u}{2}} \quad (2.79)$$

ile

$$\lambda - \xi^2 - \xi = 2N(1 + \xi) + N(N - 1) \quad (2.80)$$

daha sade biçime getirilmiş, daha sonra  $\lambda$  yalnız bırakılarak eşitliğin diğer yanı düzenlenmiş ve  $\lambda$  ve  $l$  için sırası ile

$$\lambda = (N + \xi)(N + \xi + 1) \quad (2.81)$$

ve

$$l = N + \xi \quad (2.82)$$

ifadeleri elde edilmiştir.  $\lambda$  için bulduğumuz ifadesinin (2.75) denkleminde yerine yazılması ile enerji özdeğerlerinin analitik ifadesi tamamlanmıştır.

## 2.2. Merkezci Olmayan Manning-Rosen Potansiyeli İçin KFG Denkleminin Bağlı Durum Çözümleri

Bu bölümde, (1.33) şeklinde elde edilen KFG denkleminin çözümleri

$$V(\vec{r}) = S(\vec{r}) = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{b^2} \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{1}{b^2} \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + \frac{\beta'}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\beta \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \quad (2.83)$$

skaler ve vektörel potansiyelleri için elde edilmiştir.

Dalga fonksiyonu  $\psi(r, \theta, \phi)$  için

$$\psi(r, \theta, \phi) = \chi \frac{(r)}{r} \theta(\theta) e^{im\phi}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2.84)$$

şeklinde bir çözüm önerilerek,  $\lambda$  ayırma sabiti olmak üzere

$$\chi''(r) + \left[ (E^2 - M^2) - \frac{M+E}{Mb^2} \left( \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} \right) - \frac{\lambda}{r^2} \right] \chi(r) = 0 \quad (2.85)$$

$$\theta''(\theta) + \cot \theta \theta'(\theta) + \left[ -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{M+E}{M} (\beta' + \beta \cos \theta) + m^2 \right) + \lambda \right] \theta(\theta) = 0 \quad (2.86)$$

diferensiyel denklemleri elde edilir.

### 2.2.1. Işınsal KFG Denkleminin Çözümleri

Işınsal KFG denklemi olarak adlandırılan (2.84) denkleminin çözümlerinin  $\lambda$  nın sıfırdan farklı durumları için de elde edilebilmesi için, Schrödinger denkleminde olduğu gibi,  $C_0 = 1/12$  olmak üzere  $1/r^2$  terimi yerine (2.6) şeklinde bir yaklaşıklık kullanılması ve  $s = e^{-r/b}$  değişkenine geçilmesi ile (2.85) denklemi genelleştirilmiş hipergeometrik-tür

diferansiyel denklem şekline gelir

$$\begin{aligned} \chi''(s) + \chi'(s) \frac{1-s}{s(1-s)} + \left[ \frac{1}{s(1-s)} \right]^2 [-\epsilon^2(1-s)^2 + \eta A s(1-s)] \chi(s) \\ + \left[ \frac{1}{s(1-s)} \right]^2 \left[ -\eta \alpha (\alpha - 1) s^2 - (1-s)^2 \lambda \left( C_0 + \frac{s}{(1-s)^2} \right) \right] \chi(s) \\ = 0. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Bağlı durumlar ( $|E| < M$ ) göz önüne alınarak (2.87) denklemindeki boyutsuz  $\epsilon$  ve  $\eta$  parametreleri

$$\epsilon = b \sqrt{M^2 - E^2} \quad (2.88)$$

$$\eta = \frac{M + E}{M} \quad (2.89)$$

olarak tanımlanmışlardır.

Elde edilen denklemin (2.14) deki denklem ile benzerliği görülmektedir. (2.15) ile (2.30) denklemleri arasındaki adımlar tekrarlanarak,  $a$ ,  $b$ ,  $c$

$$a = \frac{1}{4} + \epsilon^2 + A\eta + \eta\alpha(\alpha - 1) + \lambda C_0 \quad (2.90)$$

$$b = 2\epsilon^2 + \eta A + 2\lambda C_0 - \lambda \quad (2.91)$$

$$c = \epsilon^2 + \lambda C_0 \quad (2.92)$$

olmak üzere, şu sonuçlara ulaşılmıştır;

$$\tilde{\tau} = 1 - s, \quad (2.93)$$

$$\sigma = s(1 - s), \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = s^2 [-\epsilon^2 - \eta A - \eta\alpha(\alpha - 1) - \lambda C_0] + s [2\epsilon^2 + \eta A + 2\lambda C_0 - \lambda] \\ + [-\epsilon^2 - \lambda C_0], \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$k = (b - 2c) - 2\sqrt{c^2 + c(a - b)}, \quad (2.96)$$

$$\pi(s) = \sqrt{c} - s \left[ \frac{1}{2} + \sqrt{c} + \sqrt{c + a - b} \right], \quad (2.97)$$

$$\tau(s) = 1 + 2\sqrt{c} - 2s [1 + \sqrt{c + a - b}]. \quad (2.98)$$

$K = \Lambda + 1/2$ ,  $\Lambda = \sqrt{c + a - b} = \sqrt{1/4 + \eta\alpha(\alpha - 1) + \lambda}$  kısaltmaları ile dalga fonksiyonu  $\chi(s) = \phi(s)y(s)$  için  $\phi(s)$

$$\phi(s) = s^{\sqrt{c}}(1 - s)^K \quad (2.99)$$

olarak bulunmuştur.

$y(s)$  fonksiyonunun sağladığı hipergeometrik-tür diferansiyel denklemin ağırlık fonksiyonu

$$\rho(s) = s^{2\sqrt{c}}(1 - s)^{2K-1} \quad (2.100)$$

olmak üzere, Rodrigues bağıntısından yararlanılarak Jacobi polinomları cinsinden  $y_{n_r}(s)$

$$y_{n_r}(s) = C_{n_r} P_{n_r}^{(2\sqrt{c}, 2K-1)}(1 - 2s) \quad (2.101)$$

olarak bulunmuştur.

Sonuç olarak  $\chi_{n_r}(s)$  ışınsal dalga fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$C_{n_r} = \sqrt{\frac{n_r! (2\sqrt{c})(n_r + K + \sqrt{c})\Gamma(2(K + \sqrt{c}) + n_r)}{b(n_r + K)\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)\Gamma(n_r + 2K)}} \quad (2.102)$$

normalizasyon sabiti olmak üzere

$$\chi_{n_r}(s) = C_{n_r} s^{\sqrt{c}}(1 - s)^K \frac{\Gamma(n_r + 2\sqrt{c} + 1)}{n_r! \Gamma(2\sqrt{c} + 1)} {}_2F_1(-n_r, 2\sqrt{c} + 2K + n_r, 1 + 2\sqrt{c}; s) \quad (2.103)$$

olarak elde edilmiştir.

### 2.2.2. $\theta$ Açısına Bağlı Denklemin Çözümleri

Görelî olmayan durumda olduğu gibi (2.86) denkleminin çözümünü elde edebilmek için  $x = \cos \theta$  dönüşümü yapıldığında

$$\theta''(x) - \frac{2x}{1-x^2}\theta'(x) + \frac{1}{(1-x^2)^2}[\lambda(1-x^2) - m^2 - (\beta' + \beta x)]\theta(x) = 0 \quad (2.104)$$

elde edilir. Bu denklem genelleştirilmiş hipergeometrik-tür diferensiyel denklem ile karşılaştırılarak

$$\tilde{\tau}(x) = -2x, \quad (2.105)$$

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \quad (2.106)$$

$$\tilde{\sigma}(x) = -\lambda x^2 - \eta\beta'x + (\lambda - m^2 - \eta\beta) \quad (2.107)$$

olduğu görülmüştür. Önceki bölümlerde yapılan işlemler tekrarlanarak

$$u = \sqrt{(m^2 + \eta\beta')^2 - \eta^2\beta^2} \quad (2.108)$$

için  $k$  sabiti ile  $\pi(x)$ ,  $\tau(x)$  fonksiyonları sırasıyla

$$k = \frac{2\lambda - m^2 - \eta\beta'}{2} - \frac{u}{2}, \quad (2.109)$$

$$\pi(x) = - \left[ x \frac{\sqrt{m^2 + \eta\beta' + u}}{2} + \frac{\sqrt{m^2 + \eta\beta' - u}}{2} \right], \quad (2.110)$$

$$\tau(x) = -2x \left[ 1 + \sqrt{\frac{m^2 + \eta\beta' + u}{2}} \right] - 2 \sqrt{\frac{m^2 + \eta\beta' - u}{2}} \quad (2.111)$$

olarak bulunmuştur.

Dalga fonksiyonu için  $B = \sqrt{\frac{m^2 + \eta\beta' + u}{2}}$  ve  $C = \sqrt{\frac{m^2 + \eta\beta' - u}{2}}$  olmak üzere

$$\phi(x) = (1-x)^{(B+C)/2}, \quad (2.112)$$

$$\rho(x) = (1-x)^{B+C}(1+x)^{B-C}, \quad (2.113)$$

$$\Theta_N(x) = C_N(1-x)^{(B+C)/2}(1+x)^{(B-C)/2}P_N^{(B+C, B-C)}(x), \quad (2.114)$$

$$C_N = \sqrt{\frac{(2N+2B+1)\Gamma(n+1)\Gamma(N+2B+1)}{2^{2B+1}\Gamma(N+B+C+1)\Gamma(N+B-C+1)}} \quad (2.115)$$

sonuçları elde edilmiştir.

### 2.2.3. Enerji Özdeğerleri

Denklem (1.45) ve (2.70) kullanılarak sırasıyla, ışımsal ve  $\theta$  açısına bağlı kısımlar için

$$\begin{aligned} (b-2c) - 2\sqrt{c}\sqrt{c+a+b} - \frac{1}{2} - [\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b}] \\ = 2n_r[1 + (\sqrt{c} + \sqrt{c+a-b})] + n_r(n_r - 1), n_r = 0,1,2,3, \dots \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda - \eta\beta' - m^2}{2} - \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{m^2 + \eta\beta' + u}{2}} = 2N \left[ 1 + \sqrt{\frac{m^2 + \eta\beta' + u}{2}} + N(N-1) \right], \\ N = 0,1,2,3 \dots \end{aligned} \quad (2.117)$$

eşitlikleri elde edilmiştir. (2.116) denklemi  $\sqrt{c}$  için çözümlenip denklem (2.92) deki  $c = \epsilon^2 + \lambda C_0$  ifadesinin kullanılmasıyla

$$\epsilon^2 = \left[ \frac{\lambda + 1/2 + A(1 + 2n_r) + n_r(n_r + 1) - A\eta}{2A + 1 + 2n_r} \right]^2 - \lambda C_0 \quad (2.118)$$

elde edilmiştir. Bulunan  $\epsilon^2$  ifadesinin (2.88) denklemine yerine yazılması ile enerji ile ilgili ifade

$$M^2 - E_{n_r, l}^2 = \frac{1}{b^2} \left[ \left[ n_r + \frac{1}{2} + \frac{\lambda - n_r(n_r + 1) - \eta A}{2A + 1 + 2n_r} \right]^2 - \lambda C_0 \right] \quad (2.119)$$

olarak bulunmuştur.

(2.117) denklemi enerji ifadesindeki  $\lambda = l(l + 1)$  değerlerinin elde etmek için kullanılmış ve  $\xi = \sqrt{\frac{m^2 + \eta\beta' + u}{2}}$  için

$$\lambda = (N + \xi)(N + \xi + 1) \quad (2.121)$$

ve

$$l = N + \xi \quad (2.122)$$

bulunmuştur.  $\lambda$  için bulduğumuz ifadesinin (2.119) denkleminde yerine yazılması ile enerji özdeğerleri için transadant türlü bir denkleme ulaşılmıştır.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

#### 3.1. Merkezkaç Terimi İçin Kullanılan Yaklaşıklığın İncelenmesi

Bu bölümde Schrödinger ve KFG denklemlerinin analitik çözümlerini elde edebilmek için  $1/r^2$  terimine getirilen yaklaşıklık irdelenmiş ve benzer çalışmalarda farklı araştırmacıların geliştirdikleri yaklaşıklıklar ile karşılaştırılmıştır.

$1/r^2$  terimi için, bu çalışmada

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{b^2} \left[ \frac{1}{12} + \frac{e^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \right], \quad (3.1)$$

Greene ve Aldrich'in çalışmalarında [68]

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{b^2} \left[ \frac{e^{-r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \right], \quad (3.2)$$

ve Dong ile arkadaşlarının çalışmasında [33] ise

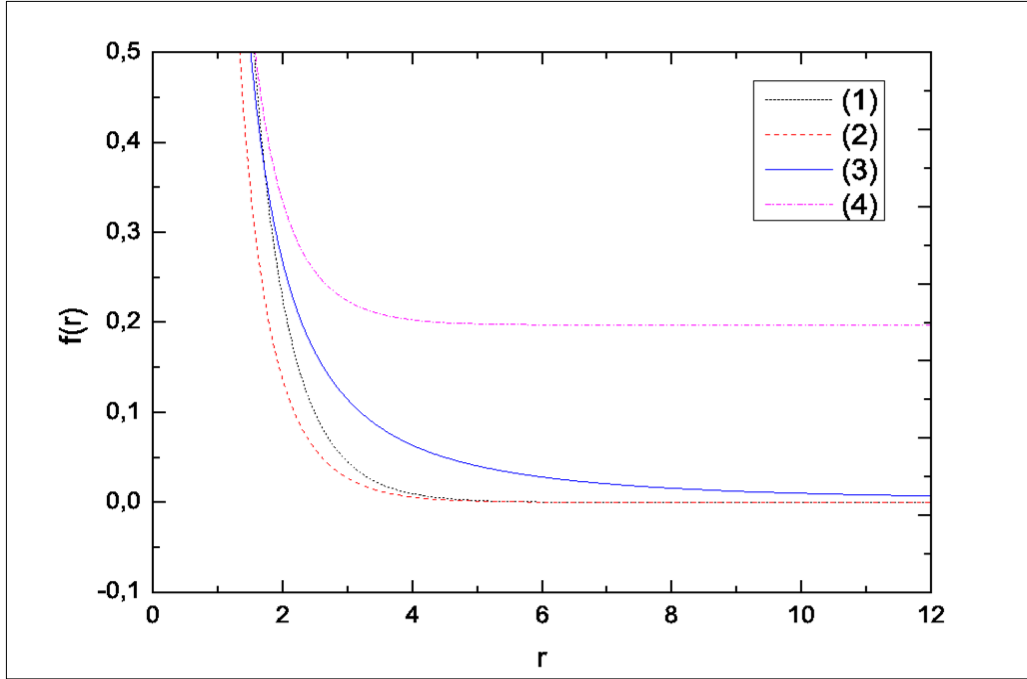
$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{b^2} \left[ \frac{we^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} + \frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \right] \quad (3.3)$$

yaklaşıklıkları kullanılmıştır. Sonuncu yaklaşıklıkta  $w$  ayarlanabilir bir parametredir ve  $w = 1$  olması durumunda Greene ve Aldrich'in kullandığı yaklaşıklık elde edilir.

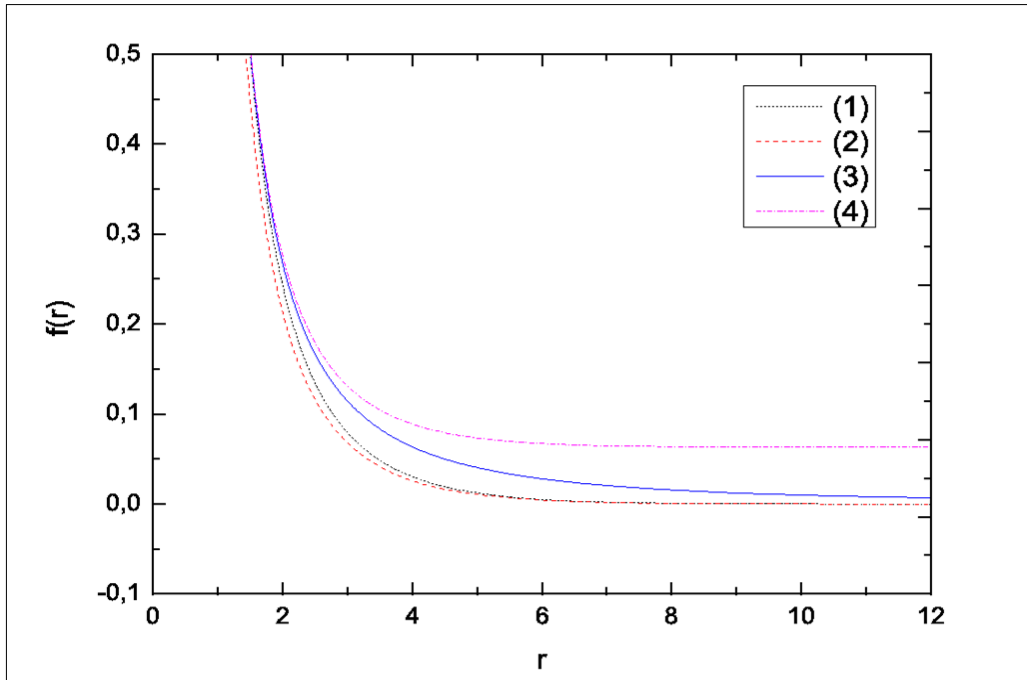
$1/r^2$  için tam değer, bu çalışmada kullanılan yaklaşıklık, Greene ve Aldrich'in yaklaşıklıkları ve Dong ve arkadaşlarının kullandıkları yaklaşıklıklar sayısal ve grafiksel olarak karşılaştırılmış ve  $r/b \ll 1$  bölgesi için bu çalışmada kullanılan yaklaşıklığın diğer yaklaşıklara göre daha iyi sonuçlar verirken küçük  $b$  ve büyük  $r$  değerleri için diğer yaklaşıklıklar kadar başarılı olmadığı gözlenmiştir. Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 te sırasıyla  $b = 0.65$ ,  $b = 1.15$  ve  $b = 5.15$  değerleri için üç yaklaşıklık ve tam değer  $0 < r < 12$  aralığında çizilmiştir. Bu şekillerde (1) dong ve arkadaşlarının kullandığı yaklaşıklık, (2) Green ve aldrich'in kullandıkları yaklaşıklık, (3) tam değer ve (4) bu



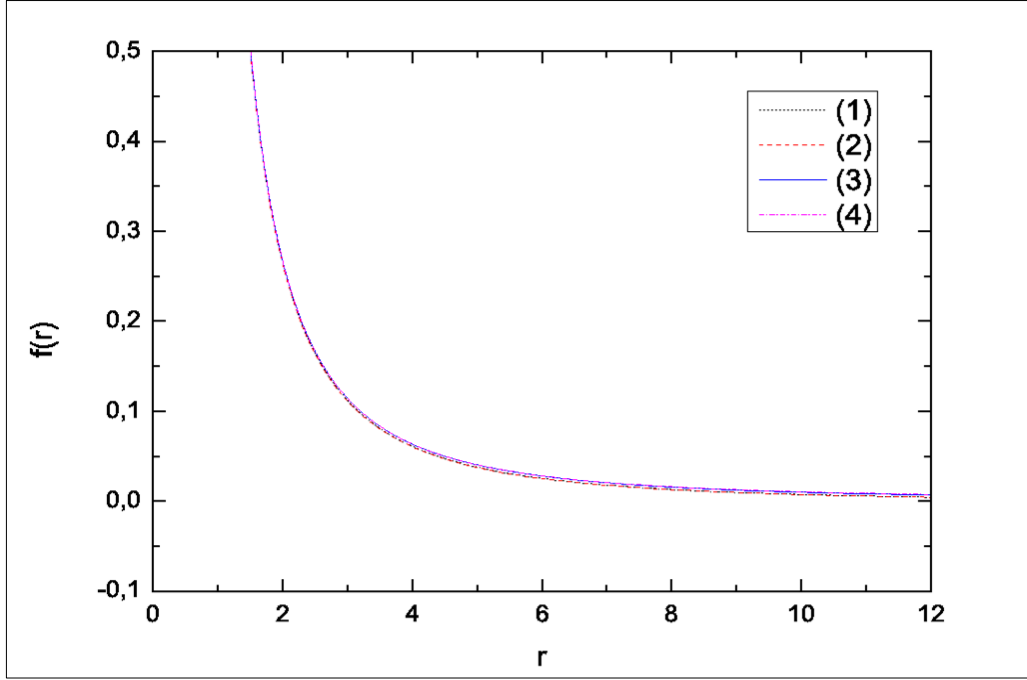
çalışmada kullanılan yaklaşıklıktır.



Şekil 3.1.  $b = 0.65$  değeri için  $r$  ye karşılık  $1/r^2$  terimi için kullanılan yaklaşıklık



Şekil 3.2.  $b = 1.15$  değeri için  $r$  ye karşılık  $1/r^2$  terimi için kullanılan yaklaşıklık



Şekil 3.3.  $b = 0.65$  değeri için  $r$  ye karşılık  $1/r^2$  terimi için kullanılan yaklaşıklık

### 3.2. Schrödinger Denklemi İçin Bağlı Durumların Enerjileri

Bu kesimde (2.75) denkleminle belirlenen enerji özdeğerleri merkezci ve merkezci olmayan potansiyel durumları için irdelenmiştir. Genel olarak görülmüştür ki  $C_0$  değerinin sıfır olarak kabul edilmemesi enerji özdeğerlerine

$$\frac{\hbar^2}{2\mu b^2} \lambda C_0 \quad (3.4)$$

şeklinde bir katkı getirmiştir.

Bazı durumlar için enerji değerleri doğal birim sisteminde ( $\hbar = \mu = 1$ ) tablo halinde verilmiştir.  $\alpha$  değeri Tablo 3.1 de  $\alpha = 0.75$ , Tablo 3.2 de ise  $\alpha = 1$  olarak alınmıştır. Tablolarda  $n$  temel kuantum sayısı olup  $l + n_r + 1$  değerine eşittir.

Tablo 3.1.  $\alpha = 0.75$  için görelî olmayan enerji değerleri

$\beta$	$\beta'$	$l$	$n$	$E$
0	0	0	1	-0.872300
1	1	0.707107	1.707107	-0.175760
1	0	0.707107	1.707107	-0.175760
0	0	0	2	-0.150269
0	0	1	2	-0.120527
0	1	1	2	-0.120527
1	1	1.366025	2.366025	-0.080720
0	1	1.414214	2.414214	-0.076883
1	1	0.707107	2.707107	-0.06016
1	0	0.707107	2.707107	-0.06016
1	1	1.707107	2.707107	-0.05808
1	0	1.707107	2.707107	-0.05808
0	0	0	3	-0.053926
0	0	1	3	-0.045878
0	1	1	3	-0.045878
1	0	1.984059	1.984059	-0.045393
0	0	2	3	-0.044774
0	1	2	3	-0.044774
1	1	2.224745	3.224745	-0.03704
0	1	2.236068	3.236068	-0.036693
1	1	1.366025	3.366025	-0.03359
1	1	2.366025	3.366025	-0.03299
0	1	1.414214	3.414214	-0.032286
0	1	2.414214	3.414214	-0.031721
1	0	0.707107	3.707107	-0.02636
1	0	0.707107	3.707107	-0.02636
1	0	1.707107	3.707107	-0.025523
1	1	1.707107	3.707107	-0.025523
1	1	2.707107	3.707107	-0.02512
1	0	2.707107	3.707107	-0.02512
0	0	0	4	-0.024017
0	0	1	4	-0.020809
0	1	1	4	-0.020809
1	0	1.984059	3.984059	-0.020522
0	0	2	4	-0.020299
0	1	2	4	-0.020299

Tablo 3.2.  $\alpha = 1$  için görelî olmayan enerji değerleri

$\beta$	$\beta'$	$l$	$n$	$E$
0	0	0	1	-0.487578
1	1	0.707107	1.707107	-0.159269
1	0	0.707107	1.707107	-0.159269
0	0	0	2	-0.112812
0	0	1	2	-0.11276
0	1	1	2	-0.11276
1	1	1.414214	2.414214	-0.073653
1	1	0.707107	2.707107	-0.056269
1	0	0.707107	2.707107	-0.056269
1	1	1.707107	2.707107	-0.05618
1	0	1.707107	2.707107	-0.05618
1	0	1.984059	2.984059	-0.044192
0	0	0	3	-0.043759
0	0	1	3	-0.043707
0	1	1	3	-0.043707
0	0	2	3	-0.043602
0	1	2	3	-0.043602
1	1	2.224745	3.224745	-0.036207
0	1	2.236068	3.236068	-0.035875
1	1	1.366025	3.366025	-0.032431
1	1	2.366025	3.366025	-0.032308
0	1	1.414214	3.414214	-0.031215
0	1	2.414214	3.414214	-0.031089
1	0	0.707107	3.707107	-0.024925
1	1	0.707107	3.707107	-0.024925
1	0	1.707107	3.707107	-0.024836
1	1	1.707107	3.707107	-0.024836
1	1	2.707107	3.707107	-0.024695
1	0	2.707107	3.707107	-0.024695
1	0	1.984059	3.984059	-0.020086
0	0	0	4	-0.02
0	0	1	4	-0.019948
0	1	1	4	-0.019948
1	0	2.984059	3.984059	-0.019931
0	0	2	4	-0.019844
0	1	2	4	-0.019844

### 3.2.1. Merkezci Potansiyel Durumu

Bu durum  $\beta = \beta' = 0$  olması ile mümkündür. Denklemindeki  $u$  ifadesi merkezci potansiyel durumunda

$$u = \sqrt{m^4} = m^2 \quad (3.5)$$

şeklinde sadeleşmesi ile denklem (2.79) teki  $\xi$  ifadesi de,

$$\xi = \sqrt{\frac{m^2 + m^2}{2}} = |m| \quad (3.6)$$

olacaktır. (2.82) denkleminde  $l = N + \xi$  ( $N = 0,1,2,\dots$ ) olduğu bilindiğinden  $l$  kuantum sayısı için, beklenen  $l \geq |m|$  ( $l, m = 0,1,2,\dots$ ) ifadesi, elde edilmiştir. Merkezci Manning-Rosen potansiyeli için enerji değerleri daha önce Zhao-You Chen ve arkadaşları tarafından [69] hesaplanmışlardır. Bu çalışmada elde edilen enerji değerlerinin Zhao-You Chen ve arkadaşlarının elde ettikleri enerji değerleri ile uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

Manning-Rosen potansiyelinde  $\alpha = 0$  veya  $\alpha = 1$  değerlerinin kullanılması durumunda potansiyelin Hulthen potansiyeli şeklini aldığı bilindiğinden  $\delta = 1/b$ ,  $A = 2b$  kullanılarak elde edilecek sonuçlar Varshni'nin çalışmasında [52] elde ettiği sonuçlar ile karşılaştırılarak uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

### 3.2.2. Merkezci Olmayan Potansiyel Durumu

Bu durumda  $\beta$  veya  $\beta'$  parametrelerinden en az biri sıfırdan farklı değerdedir. Farklı  $\beta$  ve  $\beta'$  parametreleri kullanılarak değişik türde merkezci olmayan potansiyeller üretmek mümkündür. Değişik  $\beta$  ve  $\beta'$  parametreleri  $\alpha = 0.75$  ve  $\alpha = 1$  için irdelenmiş ve görülmüştür ki merkezci olan potansiyel durumları merkezci olmayan potansiyel durumlarına göre daha düşük enerjidedirler yani daha dayanıklıdır.

### 3.3. Schrödinger Denklemi İçin Kuantum Sayılarının Alabileceği Değerler Üzerindeki Kısıtlamalar

Dalga fonksiyonları için polinom çözümler elde edebilmek için tanımladığımız kuantum sayılarının alabileceği değerler irdelenmiş ve bağlı durum enerjilerinin elde edilebilmesi için üç koşulun sağlanması gerektiği tespit edilmiştir.

Birinci koşul (2.56) denklemindeki  $u$  ifadesi incelendiğinde görülmüştür. Burada

$$(m^2 + \beta')^2 < \beta^2 \quad (3.7)$$

olması durumunda  $u$  ifadesi gerçel olmayan değerler alacaktır. Bu durumda enerji özdeğerleri de gerçel olmayan değerler alacağından bu sonuçlar fiziksel olmayacaktır.  $\beta$  ve  $\beta'$  pozitif gerçel değerler aldığından enerji sonuçlarının fiziksel olabilmesi için

$$m^2 \geq \beta - \beta' \quad (3.8)$$

koşulunun sağlanması gerektiği görülmüştür.  $\beta \leq \beta'$  olması halinde bu koşul kendiliğinden sağlanır ve  $m$  tüm tam sayı değerlerini alabilir ancak diğer durumlar için  $m$  sonlu sayıda tam sayı değeri alabilir.

İkinci koşul enerji ifadesinden elde edilmiştir. (2.75) deki enerji ifadesine bakıldığında

$$l(l+1)C_0 \geq \left[ n_r + \frac{1}{2} + \frac{(l - n_r)(l + n_r + 1) - A}{2\Lambda + 1 + 2n_r} \right]^2 \quad (3.9)$$

olması durumunda eksi olmayan enerji durumları ortaya çıktığı saptanmıştır. Bağlı durumlar ancak  $E < 0$  için söz konusu olabildiğinden eksi olmayan enerji değerleri bağlı durumların olmadığı anlamına gelir. Böylece bağlı durumlar için kuantum sayıları üzerinde

$$l(l+1)C_0 < \left[ n_r + \frac{1}{2} + \frac{(l - n_r)(l + n_r + 1) - A}{2\Lambda + 1 + 2n_r} \right]^2 \quad (3.10)$$

şeklinde bir sınırlama olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Merkezkaç terimi için bu

çalışmada yapılan yaklaşıklıkta  $C_0$  teriminin sıfır olarak alınmaması durumunda böyle bir sınırlama ortadan kalkmaktadır.

Üçüncü koşul (2.73) denklemindeki  $\sqrt{c}$  ifadesinden elde edilmiştir. Bağlı durumlar için  $\sqrt{c} > 0$  koşulu olası enerji durumları için bir sınırlama getirmiştir:

$$0 < \frac{\lambda + 1/2 + \Lambda(1 + 2n_r) + n_r(n_r + 1) - A}{-(2\Lambda + 1 + 2n_r)} \quad (3.11)$$

eşitsizliğinin sol tarafında paydada bulunan ifade sıfırdan büyük değerlere sahip olacağından,

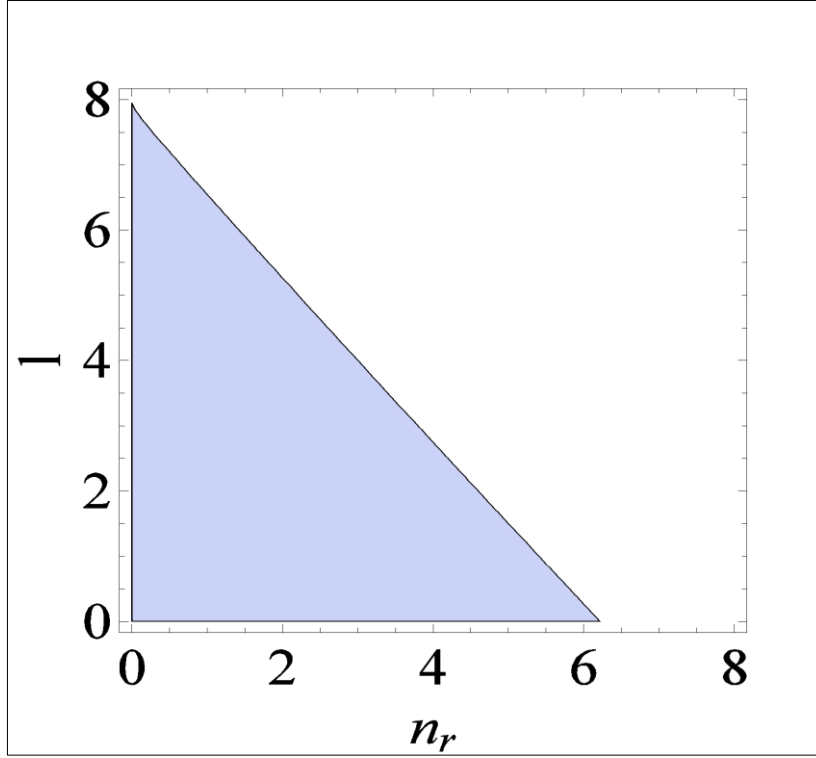
$$A - \frac{1}{2} - l(l + 1) - \Lambda > n_r(n_r + 2\Lambda + 1) \quad (3.12)$$

ve

$$A > \frac{1}{2} + l(l + 1) + \Lambda \quad (3.13)$$

elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bağlı durumlar ancak ve ancak bu üç koşulun birden sağlanması durumunda elde edilebileceği saptanmıştır. Şekil 3.4 te ikinci ve üçüncü koşulların sağlanması ile bağlı durumlar için  $n_r$  ve  $l$  kuantum sayılarının alabileceği olası değerler gösterilmiştir.



Şekil 3.4.  $\alpha = 1, 1/b = 0.025$  ve  $A = 2b$  için  $n_r$  ve  $l$  kuantum sayılarının alabileceği değerler bölgesi

### 3.4. KFG Denklemi İçin Bağlı Durumların Enerjileri

KFG denklemi için bağlı durum enerjilerini veren analitik bir ifade elde edilemeyeceği görülmüştür. Enerji değerleri için elde edilen (2.118) denklemi transandant türlü bir denklemdir ve analitik çözümü yoktur. Ayrıca KFG denkleminin formundan ötürü beklendiği gibi her durum için iki farklı enerji değeri elde edilir.



#### 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada

- Schrödinger denkleminin nasıl elde edildiği,
- Nikiforov-Uvarov yönteminin nasıl kullanılacağı,
- Bochner ve Koepf-Masjed-Jamei çalışmaları çerçevesinde dikey polinom aileleri için iki farklı sınıflandırılmanın nasıl yapılabileceği ve kullanılabilceği,
- Potansiyellerin teorik fizikte ya da teorik kimyada hangi alanlarda kullanıldığı özetlenerek;
- Merkezci olmayan Manning-Rosen potansiyeli için görelî olmayan durumlarda bağı durum enerjilerinin analitik ifadesi ve bu enerjilere karşılık gelen normalize edilmiş dalga fonksiyonları,
- Görelî olmayan durumda kuantum sayılarının alabileceği durumlar üzerindeki sınırlamalar,
- Merkezci olmayan Manning-Rosen potansiyeli için görelî durumlarda bağı durum enerjileri için transandant türde bir ifade ve bu enerjilere karşılık gelen normalize edilmiş dalga fonksiyonları elde edildi ve daha önce yapılan çalışmalar ile karşılaştırıldı ve uyumlu olduğu görüldü.
- Farklı analitik ve sayısal yöntemler denenerek çözümlerin aranması
- Başka fiziksel özelliklere sahip halka tipli bir potansiyelin Manning-Rosen potansiyeline eklenmesi ile elde edilebilecek merkezci olmayan potansiyelin çözümlerinin aranması
- Görelî durumlar için Dirac ve Duffin-Kummer-Petiau denklemlerinin çözümlerinin aranması
- Jacobi polinomlarının tekrarlama bağıntıları kullanılarak basamak işlemcilerinin elde edilmesi
- D-ölçülü uzay için çözümlerin aranması araştırma problemi olarak önerilir.

## 5. KAYNAKLAR

1. Gamow, G., *Thirty Years That Shook Physics*, Dover Publications Inc., New York, 1965.
2. Pais, A., Einstein and the quantum theory, Rev. Mod. Phys., 51 (1979) 863-914.
3. Dereli, T., Verçin, A., *Kuantum Mekaniköi*, 2. baskı, TÜBA, Ankara, 2009.
4. Erbil, H., *Kuantum Fiziöi*, 2. cilt, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1990.
5. Koç, Y., *Doöa'nın Kuvantum Mekaniksel Betimlemesi Ve Ölçme Sorunu*, İstanbul Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1983.
6. Ozawa, T., Tsutaya, K. and Tsutsumi, Y., Well-posedness in energy space for the Cauchy problem of the Klein-Gordon-Zakharov equations with different propagation speeds in three space dimension, Math. Ann., 313 (1999) 127-140.
7. Dariescu, C. and Dariescu, M. A., Transition and regeneration rates in charged boson stars via perturbative calculations, Int. Journal of Modern Phys. A., 20 (2005) 2326-2330.
8. Khusnutdinova, K.R. and Pelinovsky, D.E., On the exchange of energy in coupled Klein-Gordon equations, Wave motion, 38 (2003) 1-10.
9. Ohlsson, T., *Relativistic Quantum Physics: from advanced quantum mechanics to introductory field theory*, Cambridge University Press, New York, 2011.
10. Greiner, W., *Relativistic quantum Mechanics: wave equations*, third edition, Springer, New York, 2000.
11. Nikiforov, A. F. and Uvarov, V. B., *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhauser, Basel, 1988.
12. Kompaneyets, A. S., *Basic Concepts in Quantum Mechanics*, Landovitz, L.F., Reinhold Publishing Corporation, New York, 1966.
13. Beiser, A., *Modern Fiziöin Kavramları*, Önünöet, G., 6. baskıdan çeviri, Akademi Yayıncılık, Ankara, 2008.
14. Morse, P. M., Diatomic molecules according to wave mechanics II. Vibration levels, Phys. Rev., 34 (1929) 57-64.
15. Setare, M. R. and Karimi, E., Algebraic approach to the Kratzer potential, Phys. Scr., 75 (2007) 90-93.
16. Flügge, S., *Practical Quantum Mechanics*, 1, Springer, New York, 1971
17. Rosen, N., Morse, P. M., On the vibrations of polyatomic molecules, Phys. Rev., 42 (1932) 210-217.

- 18 . Manning, M. F. and Rosen, N., A potential function for the vibrations of diatomic molecules, Phys. Rev., 44 (1933) 953.
- 19 . Tietz, T., Potential energy function for diatomic molecules, Journal of chemical Physics, 38 (1963) 3036-3037.
- 20 . Shajaei, M. R., Rajabi, A. A. and Karimi, T., Study of deuteron with modified screen (Yukawa) potential, Applied Physics Research, 3 (2011) 122-127.
- 21 . Woods, R. D. and Saxon, D. S., Diffusive surface optical model for nucleon-nuclei scattering, Phys. Rev., 95 (1954) 577-578.
- 22 . Fulcher, L. P., Chen, Z. and Yeong, K. C., Energies of quark-antiquark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation, Phys. Rev. D, 47 (1993) 4122–4132.
- 23 . Compean, C. B. and Kirchbach, M., Angular momentum dependent quark potential of QCD traits and dynamical O(4) symmetry, Bled Workshops in physics, 7, 7 (2006).
- 24 . Griffiths, D. J., Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- 25 . Bayrak, O., Karakoc, M., Boztosun, I. and Sever, R., Analytical Solution of the Schrödinger Equation for Makarov Potential with any  $\ell$  Angular Momentum, Int. J. of Theor. Phys., 47 (2008) 3005-3014.
26. Hartmann, H., Schuch, D., Spin–orbit coupling for the motion of a particle in a ring-shaped potential, Int. J. Quantum Chem., 18 (1980) 125–141.
27. Koepf, W. and Masjed-Jamei, M., A generic polynomial solution for the differential equation of hypergeometric type and six sequences of orthogonal polynomials related to it, Integral Transforms and Special Functions, 17 (2006) 559-576.
28. Castillo, D. E. A., Exactly Solvable Potentials and Romanovski Polynomials in Quantum Mechanics, Master Thesis, Universidad Autonoma de San Luis Potosi, 2007.
29. Krall, H. L. and Frink, O., A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 65 (1949) 100-115.
30. Routh, E. J., On some Properties of certain Solutions of a Differential Equation of the Second Order, Proc. London Math. Soc., 16 (1884) 245-262.
31. Ikhdair, S. M. and Sever, R., Approximate  $\ell$ -state solutions of the D-dimensional Schrödinger equation for Manning-Rosen potential, Ann. Phys., 17 (2008) 897-910.
32. Qiang, W. C. and Dong, S. H., Analytical approximations to the solutions of the Manning-Rosen potential with centrifugal term, Phys. Lett. A, 368 (2007) 13-17.
33. Wei, G. F., Zhen, Z. Z. and Dong, S. H., The relativistic bound and scattering states of the Manning-Rosen potential with an improved new approximation scheme to centrifugal term, Cent. Eur. J. Phys., 7 (2009) 175-183.
34. Berkdemir, C. and Han, J., Any  $\ell$ -state solutions of the Morse potential through the Pekeris approximation and Nikiforov-Uvarov method, Chem. Phys. Lett., 409 (2005) 203-207 .

35. Amirfakhrian, M. and Hamzavi, M., A new Morse ring-shaped potential for diatomic molecules, Molecular Physics, 110 (2012) 2173-2179.
36. Bayrak, O., Soylu, A. and Boztosun, I., The relativistic treatment of spin 0 particles under the rotating Morse oscillator, J. of Math. Phys., 51 (2010) 112301.
37. Hamzavi, M. and Ikhdair, S. M., Approximate  $\ell$ -state solutions of the trigonometric Pöschl-Teller potential, Molecular Physics, 110 (2012) 3031-3039.
38. Koçak, G. and Taşkın, F., Arbitrary  $\ell$ -state solutions of the Klein-Gordon equation with the Pöschl-Teller potential, Ann. Phys., 522 (2010) 802-806.
39. Badalov, V. H., Ahmadov, H. I. and Ahmadov, A. I., Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Wood-Saxon potential for arbitrary  $\ell$ -state, Int. J. Mod. Phys. E., 18 (2009) 631-641.
40. Badalov, V. H., Ahmadov, H. I. and Badalov, S. V., Any  $\ell$ -state analytical solutions of the Klein-Gordon equation for the Wood-Saxon potential, Int. J. Mod. Phys. E., 19 (2010) 1463-1476.
41. Yaşuk, F., Berkdemir, C. and Berkdemir, A., Exact solutions of the Schrödinger equation with non-central potential by the Nikiforov-Uvarov method, J. Phys. A: Math. Gen., 38 (2005) 6579-6586.
42. Yaşuk, F., Durmuş, A. and Boztosun, I., Exact solution to the relativistic Klein-Gordon equation with non-central equilar scalar and vector potentials, J. Math. Phys., 47 (2006) 082302.
43. Taşkın F., Approximate solutions of the Schrödinger equation for the Rosen-Morse potential including centrifugal term, Int. J. Theor. Phys., 48 (2009) 2692-2697.
44. Yi, L. Z., Diao, Y. F., Liu, J. Y. and Jia, C. S., Bound states of the Klein-Gordon equation with vector and scalar Rosen-Morse-type potentials, Phys. Lett. A, 333 (2004) 212-217.
45. Akbarieh, A. R. and Motavali, H., Exact solutions of the Klein-Gordon equation for the Rosen-Morse type potential via Nikiforov-Uvarov method, Mod. Phys. Lett. A, 23 (2008) 3005-3014.
46. Berkdemir, C., Berkdemir, A. and Han, J., Bound state solutions of the Schrödinger equation for modified Kratzer's molecular potential, Chem. Phys. Lett. A, 417 (2006) 326-329.
47. Koçak, M., Bound state solution of Klein-Gordon equation with the kratzer potential, Chin. Phys. Lett., 24 (2007) 315-317.
48. Cheng, Y. F. and Dai, T. Q., Exact solution of the Schrödinger equation for the modified Kratzer potential plus a ring-shaped potential by the Nikiforov-Uvarov method, Physica Scripta, 75 (2007) 274-277 .
49. Sadeghi, J. and Pourhassan, B., Exact solution of the non-central modified Kratzer potential plus a ring-shaped like potential by the factorization method, EJTP, 5 (2008) 197-206.
50. Cheng, Y. F. and Dai, T. Q., Exact solution of the Klein-Gordon equation with a ring-shaped modified Kratzer potential, Chin. J. Phys., 45 (2007) 480-487.

51. Ikhdair, S. M., An improved approximation scheme for the centrifugal term and the Hulthen potential, Eur. Phys. J. A, 39 (2009) 307-314.
52. Jia, C. S., Liu, J. Y. and Wang, P. Q., A new approximation scheme for the centrifugal term and the Hulthen potential, Phys. Lett. A, 372 (2008) 4779-4782.
53. Eđrifes, H. and Sever, R., Bound-state solutions of the Klein-Gordon equation for the generalized P-T symmetric Hulthen potential, Int. J. Theor. Phys., 46 (2007) 935-950.
54. Meyur, S. and Debnath, S., Solution of the Schrödinger equation with Hulthen plus Manning-Rosen potential, Lat. Am. J. Phys. Educ., 3 (2009) 300-306.
55. Agboola, D., The Schrödinger equation with Hulthen potential plus ring-shaped potential, Commun. Theor. Phys., 55 (2011) 972-976.
56. Meyur, S. and Debnath, S., Schrödinger equation with modified Hulthen plus Scarf potential, Bulg. J. Phys., 35 (2008) 290-302.
57. Cari and Suparmi, Approximate solution of the Schrödinger equation for Hulthen potential plus Eckart potential with centrifugal term in terms of Romanovski polynomials, International Journal of Applied Physics and Mathematics, 2 (2012) 159-161.
58. Zhang, A. P., Qiang, W. C. and Ling, Y. W., Approximate solutions of the Schrödinger equation for the Eckart potential and its parity-time-symmetric version including centrifugal term, Chin. Phys. Lett., 26 (2009) 100302-4.
59. Zhang, Y., Approximate analytical solutions of the Klein-Gordon equation with scalar and vector Eckart potentials, Physica Scripta, 78 (2008) 015006.
60. Skala, L., Cizek, J., Dvorak, J. and Spirko, V., Method for calculating analytical solutions of the Schrödinger equation: Anharmonic oscillators and generalized Morse oscillators, Physical Review A, 53 (1996) 2009-2020.
61. Oluwadare, O. J., Oyewumi, K. J. and Babalola, O. A., Exact s-wave solution of the Klein-Gordon equation with the Deng-Fan molecular potential using the Nikiforov-Uvarov (NU) method, The African Review of Physics, 7 (2012) 165-170.
62. Arda, A. and Sever, R., Effective-mass Klein-Gordon equation for non-PT/non-Hermitian generalized Morse potential, Physica Scripta, 82 (2010) 065007.
63. Hamzavi, M., Movahedi, M., Thylwe, K. E. and Rajabi, A. A., Approximate Analytical Solution of the Yukawa Potential with Arbitrary Angular Momenta, Chinese Phys. Lett., 29, (2012), 080302.
64. Arda, A. and Sever, R., Effective-mass Klein-Gordon-Yukawa problem for bound and scattering states, Journal of Mathematical Physics, 52 (2011) 092101.
65. Qiang, W. C., Bound states of Klein-Gordon equation for ring-shaped harmonic oscillator scalar and vector potentials, Chin. Phys. Soc., 12 (2003) 136-139.
66. Berkdemir, C., Theoretical Concepts of Quantum Mechanics, Pahlavani, M. R., 225-252, InTech, Rijeka, Croatia, 2012.

67. Area, I., Godoy, E., Ronveaux, A. and Zarzo, A., Hypergeometric-type differential equations: second kind solutions and related integrals, Journal of Computational and Applied Mathematics, 157 (2003) 93-106.
68. Greene, R. L. and Aldrich, C., Variational wave functions for a screened Coulomb potential, Physical Review A, 14 (1976) 2363-2366.
69. Chen, Z. Y., Li, M. and Jia, C.S., Approximate analytical solutions of the Schrödinger equation with the Manning-Rosen potential model, Modern Physics Letters A, 23 (2009) 1963-1874.

## 6. EKLER

### Ek 1. Değişken Dönüşümü

$$\Psi'' x + P x \Psi' x + Q x \Psi x = 0 \quad (Ek 1)$$

şeklindeki bir diferansiyel denkleme,  $g(t)$  istenilen aralıkta analitik ve birinci türevi sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere,  $x = g(t)$  dönüşümü yapılması sonucunda  $w(t) = \Psi(g(t))$  nin sağlayacağı denklem bulunabilir.

$w(t) = \Psi(g(t))$  nin birinci ve ikinci türevlerinin

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dw}{dt} = \frac{1}{g'} \frac{dw}{dt} \quad (Ek 2)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \frac{dw}{dt} = \frac{1}{g'} - \frac{g''}{(g')^2} w(t)' + \frac{1}{g'} w(t)'' \quad (Ek 3)$$

(Ek 1) denkleminde yerlerine yazılması ile

$$w \frac{(t)''}{(g')^2} + - \frac{g''}{(g')^3} + \frac{P(g(t))}{g'} w(t)' + Q g t w t = 0, \quad (Ek 4)$$

$$w(t)'' + P(g(t))g(t)' - \frac{g(t)''}{g(t)'} w(t)' + Q(g(t))(g')^2 w(t) = 0 \quad (Ek 5)$$

elde edilir. Bu denklem  $P = P(g(t))g' - \frac{g''}{g'}$  ve  $Q = Q(g(t))(g')^2$  olmak üzere

$$w'' + P(t)w' + Q(t)w = 0 \quad (Ek 6)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu sonuç (Ek 1) denkleminde  $x = 1/t$  dönüşümü yapmak için kullanılacak olursa  $P$  ve  $Q$

$$P = \frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2} \quad (Ek 7)$$

**Ek 1'in Devamı**

ve

$$Q = \frac{Q(1-t)}{t^4} \quad (Ek\ 8)$$

olarak bulunur.

(Ek 1) denklemi için  $\Psi(x) = f(x)w(x)$  şeklinde bir çözüm arandığında  $w(x)$  in sağlayacağı denklem de benzer şekilde bulunabilir. Bunun için  $\Psi(x)$  ve türevleri

$$\Psi'(x) = f'(x)w(x) + f(x)w'(x) \quad (Ek\ 9)$$

$$\Psi''(x) = f''(x)w(x) + 2f'(x)w'(x) + f(x)w''(x) \quad (Ek\ 10)$$

(Ek 1) denklemde yerlerine yazılır,  $w(x)$  ve türevleri için düzenlenir

$$w''(x) + 2\frac{f'}{f} + P(x) w'(x) + \frac{f''}{f} + \frac{Pf'}{f} + Q(x) w(x) \quad (Ek\ 11)$$

ve  $a(x) = f'/f$  için

$$w''(x) + 2a + P(x) w'(x) + Q(x) + a' + a^2 + a'w(x) = 0 \quad (Ek\ 12)$$

elde edilir.



## Ek 2. Jacobi Polinomları

Jacobi polinomlarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1 Jacobi polinomları

$$(1-x)^2 y'' + (\beta - \alpha - \alpha + \beta + 2x) y' + n(n + \alpha + \beta + 1) y = 0 \quad (Ek 13)$$

ikinci basamaktan lineer homojen diferansiyel denklemini sağlarlar.

2 Jacobi polinomları

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)n!} \delta_{m,n} \quad (Ek 14)$$

dikeylik bağıntısını sağlarlar.

3 Jacobi polinomları

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\alpha,\beta}(x) \quad (Ek 15)$$

simetri özelliğine sahiptirler.

4 Jacobi polinomlarının  $k$ . dereceden türevleri

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1 + k)}{2^k \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x) \quad (Ek 16)$$

eşitliği ile elde edilirler.

5 Jacobi polinomları üç terimli

$$\begin{aligned} & 2n(n + \alpha + \beta - 2n + \alpha + \beta - 2) P_n^{\alpha,\beta}(x) \\ &= (2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2 P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ & \quad - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta) P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (Ek 17)$$

**Ek 2'nin devamı**

tekrarlama bağıntısına sahiptirler.

6 Jacobi polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} {}_2F_1\left(-n, 1 + \alpha + \beta + n, \alpha + 1; \frac{1 - x}{2}\right) \quad (Ek 18)$$

şeklinde tanımlanabilirler.

7 Jacobi polinomları

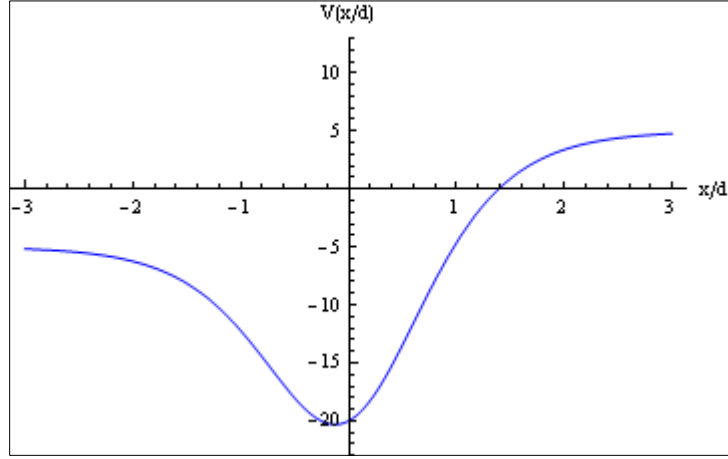
$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - z)^{-\alpha} (1 + z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} (1 - z)^\alpha (1 + z)^\beta (1 - z^2)^n \quad (Ek 19)$$

Rodrigues bağıntısından elde edilebilirler.

### Ek 3. Potansiyeller

1) Rosen-Morse potansiyeli;

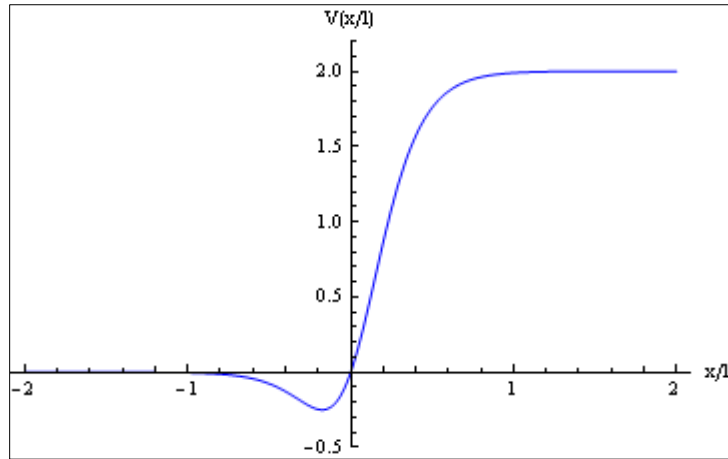
$$V(x) = B \tanh \frac{x}{d} - C \operatorname{sech}^2 \frac{x}{d} . \quad (\text{Ek 20})$$



Şekil Ek 1.  $C = 20$  ve  $B = 10$  için Rosen-Morse potansiyeli

2) Eckart potansiyeli;

$$V(x) = -A \frac{\xi}{1-\xi} - B \frac{\xi}{1-\xi^2}, \quad \xi = -e^{-2\pi x/l} . \quad (\text{Ek 21})$$

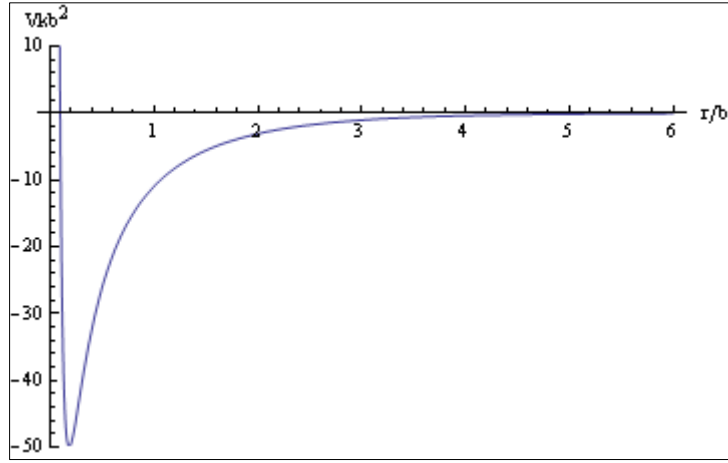


Şekil Ek 2.  $A = 2$  ve  $B = -4$  için Eckart potansiyeli

## Ek 3'ün devamı

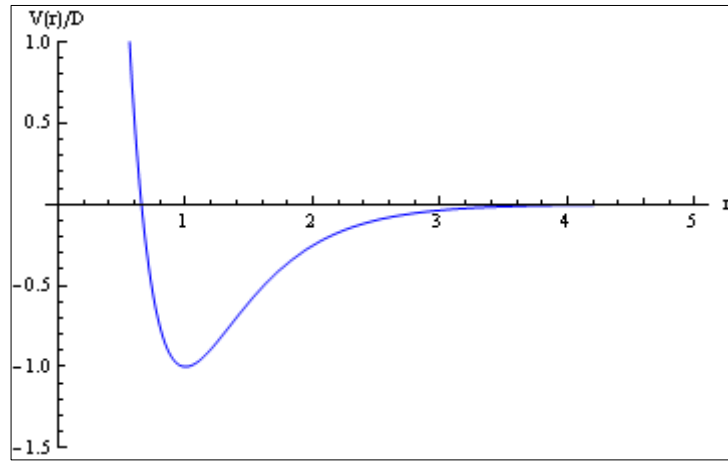
3) Manning-Rosen potansiyeli;

$$V(r) = \frac{1}{kb^2} \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{1-e^{-r/b}} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} \quad (\text{Ek 22})$$

Şekil Ek 3.  $A = 20$  ve  $\alpha = 4$  için Manning-Rosen potansiyeli

4) Morse potansiyeli;

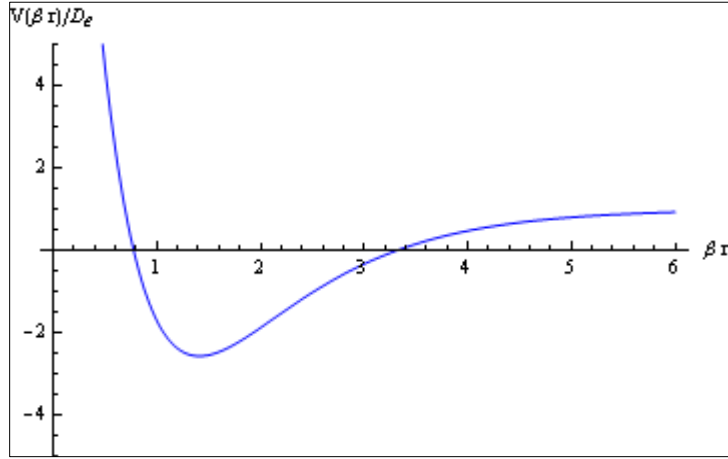
$$V(r) = De^{-2\alpha(r-r_0)} - 2De^{-\alpha(r-r_0)} \quad (\text{Ek 23})$$

Şekil Ek 4.  $\alpha = 2$  ve  $r_0 = 1$  için Morse potansiyeli

## Ek 3'ün devamı

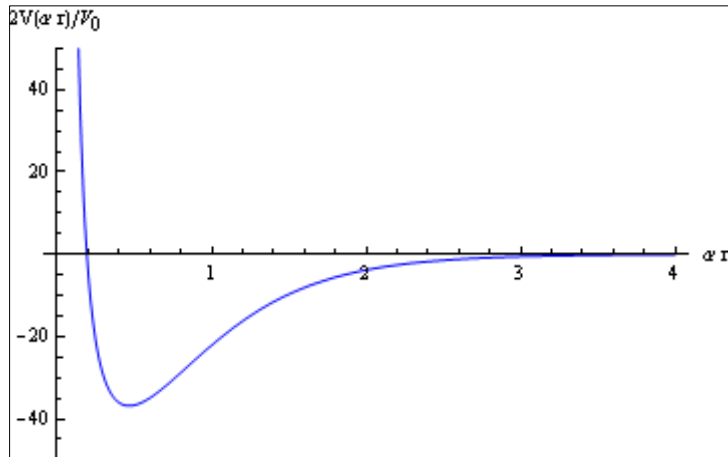
5) Tietz potansiyeli;

$$V(r) = D_e + D_e \frac{a + b e^{-2\beta r} - b e^{-\beta r}}{1 + c e^{-\beta r}} \quad (Ek 24)$$

Şekil Ek 5.  $a = 30$ ,  $b = 30$  ve  $c = 0.1$  için Tietz potansiyeli

6) Poschl-Teller II potansiyeli;

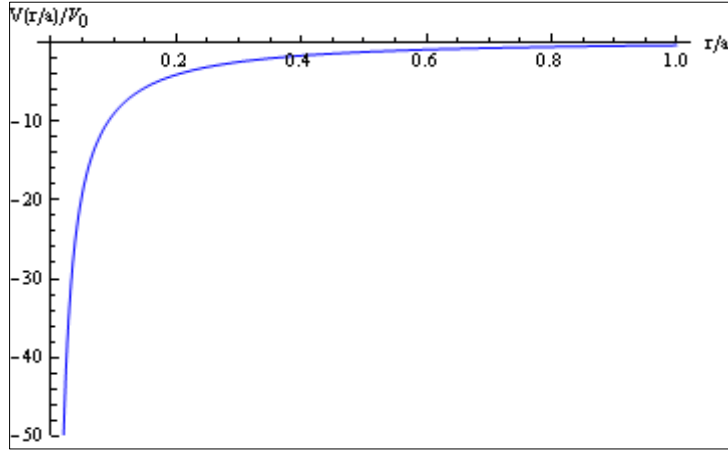
$$V(r) = V_0 \frac{\chi(\chi-1)}{\sinh^2 \alpha r} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\cosh^2 \alpha r} \quad (Ek 25)$$

Şekil Ek 6.  $\chi = 2$  ve  $\lambda = 7$  için Poschl-Teller II potansiyeli

## Ek 3'ün devamı

7) Perdelenmiş Coulomb (Yukawa) potansiyeli;

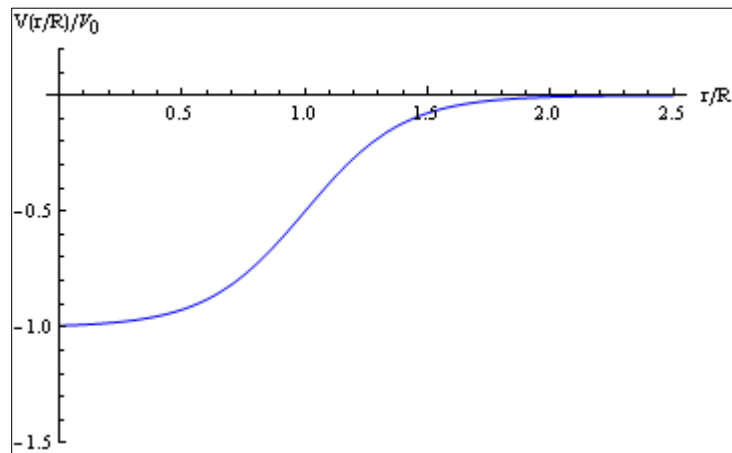
$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-r/a}}{r/a} \quad (\text{Ek 26})$$



Şekil Ek 7. Perdelenmiş Coulomb (Yukawa) potansiyeli

8) Wood-Saxon potansiyeli;

$$V(r) = -V_0 \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (\text{Ek 27})$$

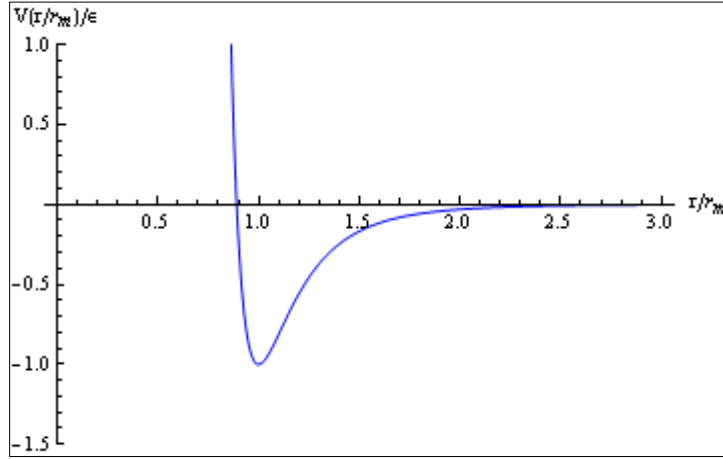


Şekil Ek 8.  $a = R = 0.2$  için Wood-Saxon potansiyeli

## Ek 3'ün devamı

9) Lennard-Jones potansiyeli;

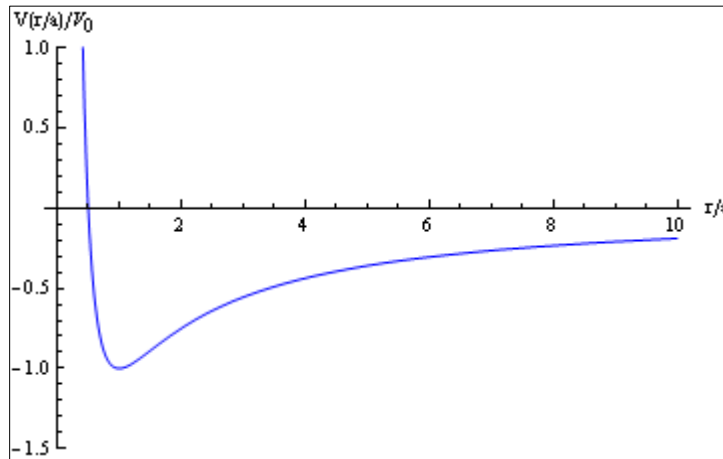
$$V(r) = \epsilon \left[ \frac{r_m}{r}^{12} - 2 \frac{r_m}{r}^6 \right]. \quad (\text{Ek 28})$$



Şekil Ek 9. Lennard-Jones potansiyeli

10) Kratzer potansiyeli;

$$V(r) = -2D \left[ \frac{a}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} \right]. \quad (\text{Ek 29})$$

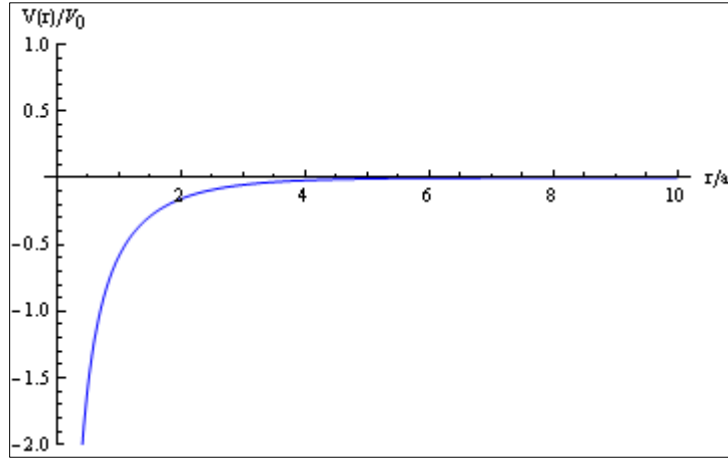


Şekil Ek 10. Kratzer potansiyeli

## Ek 3'ün devamı

11) Hulthen potansiyeli;

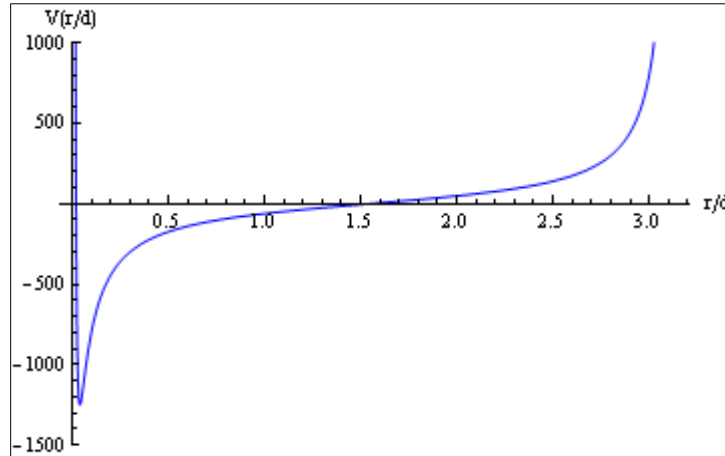
$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-r/a}}{1 - e^{-r/a}}. \quad (\text{Ek 30})$$



Şekil Ek 11. Hulthen potansiyeli

12) Trigonometric Rosen-Morse potansiyeli;

$$V(z) = -2b \cot z + \frac{l(l+1)}{\sin^2 z}, \quad z = \frac{r}{d}. \quad (\text{Ek 31})$$

Şekil Ek 12.  $b = 50, l = 1$  için trigonometrik Rosen-Morse potansiyeli

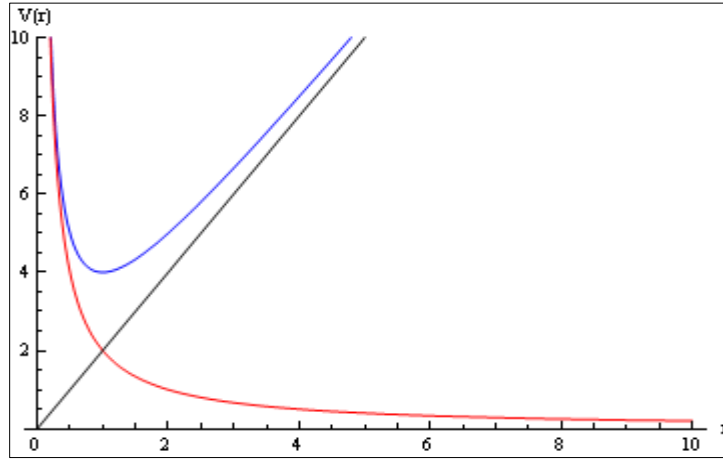


**Ek 3'ün devamı**

13) Cornell potansiyeli;

$$V(r) = \frac{a}{r} + br.$$

(Ek 32)



Şekil Ek 13.  $a = b = 2$  için Cornell potansiyeli (mavi),  $a/r$  (kırmızı),  $br$  (siyah)

## ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Ankara 'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimlerini Ankara 'da tamamladıktan sonra üniversite eğitimi için 2002 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünü kazandı. 2009 yılında mezun olduktan sonra, aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılı şubat ayından beri KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında 50/d kadrosunda araştırma görevlisi olarak çalışmakta, iyi derecede İngilizce bilmekte ve biri Phys. Rev. D'de diğeri arXiv'de yayınlanmış olan iki yurt dışı çalışması vardır.