

756726

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

AÇISAL MOMENTUM ÇİFTLENİM KATSAYILARININ BİLGİSAYAR
PROGRAMI İLE HESAPLANMASI

Fizikçi Salih Mustafa KARABIDAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Yüksek Lisans (Fizik)”

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.05.2004

Tezin Savunma Tarihi : 25.06.2004

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. A. Hakan YILMAZ

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Nazmi Turan OKUMUŞOĞLU

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Rıza ABBASOĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ

Trabzon 2004

ÖNSÖZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında yapılan ve yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışma, nükleer fizik ve atom fiziği uygulamalarında sıkça kullanılan vektör çiftlenim katsayıları ile ilgili bilgiler sunulmaya ve bu bağlamda bir bilgisayar programı düzenlenmesine yönelik hazırlanmıştır.

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışmanın planlanmasında ve yürütülmesinde görüş ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. A. Hakan YILMAZ'a en içten saygı ve teşekkürleri sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca her türlü imkanı sağlayan K.T.Ü. Fizik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Ali İhsan KOBYA'ya teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde maddi ve manevi desteklerini hiçbir şekilde esirgemeyen aileme minnettarım.

Salih Mustafa KARABIDAK

Trabzon, Mayıs 2004

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ.....	IX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Açısal Momentum Teorisi.....	1
1.1.1. Giriş.....	1
1.1.2. Dinamik Değişkenler.....	2
1.1.3. Klasik Mekaniğin Yetersizliği.....	2
1.1.4. Kuantum Mekaniğinin Temelleri.....	3
1.1.4.1. Siyah Cisim Işıması.....	3
1.1.4.2. Fotoelektrik Olay.....	3
1.1.4.3. Compton Olayı.....	4
1.1.5. Açısal Momentum.....	5
1.1.6. Yörünge Açısal Momentum Sıra Değişim Bağlıları.....	14
1.1.7. Yaratma ve Yok Etme İşlemcileri.....	17
1.1.8. Yörünge Açısal Momentum İçin Matris Temsili.....	19
1.1.9. Spin Açısal Momentum.....	20
1.1.10. Toplam Açısal Momentum.....	23
1.1.11. Sonsuz Küçük Dönmeler ve Açısal Momentum.....	25
1.2. Açısal Momentum Çiftlenimi.....	48
1.2.1 3j Sembolü.....	48
1.2.2. İki Nükleonlu Etkileşmelerin Matris Elemanları: 6j Sembolleri.....	63
1.2.3. İki Nükleonlu Dalga Fonksiyonları: 9j Sembolleri.....	99
1.2.4. 12j Sembolü.....	122

1.2.5. Wigner - Eckart Teoremi.....	123
1.3. Açısal Momentumda Grafik Yöntemler.....	138
1.3.1. Grafik Gösterimin Temel Bileşenleri.....	138
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	145
2.1. Program.....	145
2.1.1. Altprogramlar.....	145
2.1.2. Akış Diyagramı.....	147
2.1.3. Programın Kullanılışı.....	148
3. BULGULAR, TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	149
3.1. Clebsch-Gordan Katsayılarının Hesaplanması.....	149
3.2. Wigner 3j Sembol Katsayılarının Hesaplanması.....	153
3.3. Wigner 6j Sembol Katsayılarının Hesaplanması.....	157
3.4. Wigner 9j Sembol Katsayılarının Hesaplanması.....	160
4. ÖNERİLER.....	165
5. KAYNAKLAR.....	166
6. EKLER.....	168
ÖZGEÇMİŞ.....	169

ÖZET

Bu çalışmada, düzenlenen bir bilgisayar programı COEFF ile açısai momentum çiftlenim katsayıları olan Clebsch-Gordan katsayıları, $3j$ sembolleri, Racah katsayıları, Wigner $6j$ ve $9j$ sembolleri hesaplanmıştır.

COEFF, açısai momentum çiftlenim katsayılarını hesaplayan ve iki tamsayının birbirine bölümünün karekökü şeklinde sonucu veren bir bilgisayar programıdır. COEFF bilgisayar programı hem çiftlenim katsayılarını hesaplayan altprogramlara ve hem de bir asal sayıyı çarpanlarına ayıran ve tersi işlemi de yapabilen altprograma sahiptir. Bu çalışmada COEFF programı yeniden düzenlenip PC ortamında çalışır hale getirildi ve test edildi.

Bu çalışmada elde edilen değerler başka programların sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Hesaplanan değerlerin diğer programlarla elde edilen sonuçlarla çok iyi uyum içinde olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Açısai Momentum Teorisi, Sonsuz Küçük Dönmeler, Clebsch-Gordon Katsayıları, $3j$ Sembolleri, Racah Katsayıları, Wigner $6j$ ve $9j$ Sembolleri, $12j$ Sembolleri, Wigner-Eckart Teoremi, Grafik Yöntemler

SUMMARY

Calculations of Angular Momentum Coupling Coefficients on A Computer Code

In this study, Clebsch-Gordan coefficients, $3j$ symbols, Racah coefficients, Wigner's $6j$ and $9j$ symbols were calculated a prepared computer code of COEFF.

The computer program COEFF is described which calculates angular momentum coupling coefficients and expresses them as quotient of two integers multiplied by the square root of the quotient of two integers. The program includes subroutines to encode an integer into its prime factors, to decode a product of prime factors back into an integer, to perform basic arithmetic operations on prime-coded numbers, as well as subroutines which calculate the coupling coefficients themselves.

The computer code COEFF had been prepared to run on a VAX. In this study we rearranged the code to run on PC and tested it successfully.

The obtained values in this study, were compared with the values of other computer programs. A pretty good agreement is obtained between our prepared computer code and other computer programs.

Key Words: Angular Momentum Theory, Infinitesimal Rotations, Clebsch-Gordan Coefficients, $3j$ Symbols, Racah Coefficients, Wigner $6j$ and $9j$ Symbols, $12j$ Symbols, Wigner-Eckart Theory, Graphical Methods

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Küresel koordinatların kartezyen koordinatlar üzerinde gösterilmesi.....	6
Şekil 2. A=19 çekirdeklerinde T=1 izospinine karşılık gelen enerji seviyeleri.....	103
Şekil 3. COEFF programının yapısı.....	147



TABLolar DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. jj -çiftlenimi ve LS -çiftlenimi düzenleri arasındaki dönüşüm katsayıları	115
Tablo 2. Clebsch-Gordon katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar.....	150
Tablo 3. $3j$ sembol katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar.....	153
Tablo 4. $6j$ sembol katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar.....	157
Tablo 5. $9j$ sembol katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar.....	161



SEMBOLLER DİZİNİ

A	Atom numarası
B(EL)	L mertebeli çok kutuplu elektrik geçiş oranı
B(ML)	L mertebeli çok kutuplu magnetik geçiş oranı
c	Işık hızı
Ca	Kalsiyum
Cl	Klor
$C_a^{\alpha'}$	İndirgenmiş matris elemanı
$D_{\kappa\kappa'}^{(k)}(R)$	Wigner'in dönüşüm matrisi
E	Enerji
e	Elektron yükü
g_l	Yörünge açısal momentum g çarpanı
g_s	Spin açısal momentum g çarpanı
h	Planck sabiti
J	Toplam açısal momentum
K	Potasyum
L	Yörünge açısal momentumu
L_{\pm}	Yörünge açısal momentum yaratma ve yok etme işlemcileri
I^{\pm}	Yörünge açısal momentum yaratma ve yok etme işlemcileri
m	Kütle
Q	Kuadrupol işlemci
P	Momentum ve momentum işlemcisi
$P_k(\cos w)$	Legendre polinomları
R	Dönme işlemcisi
S	Spin açısal momentumu
$T_{\kappa}^{(k)}$	k mertebeli indirgenemez tensör işlemci
t^{\pm}	Nötronu protona dönüştürme işlemcisi
U	Dönüşüm matrisi
U(2)	2 boyutlu uzayda üniter dönüşüm grubu
V(r)	Küresel potansiyel fonksiyonu

w	Açısal hız
YLV	Yutsis, Levinson ve Vanagas
$Y(\theta, \phi)$	Küresel harmonikler
Z	Atom numarası, Proton sayısı
\hbar	Planck sabitinin 2π ye bölünmüş hali
$\langle $	Bra vektör gösterimi
$ \rangle$	Ket vektör gösterimi
$\langle \rangle$	Braket vektör gösterimi
Ψ	Dalga fonksiyonu
ν	Radyasyon frekansı
λ	Foton dalga boyu
θ	Kutup açısı
ϕ	Azimutal açı
$\langle \rangle$	Beklenen değer gösterimi
$\langle \rangle^*$	Beklenen değer kompleks eşleniği gösterimi
$ \uparrow\rangle$	Spin yukarı ket vektör gösterimi
$ \downarrow\rangle$	Spin aşağı ket vektör gösterimi
σ_x	Pauli spin matrisi x bileşeni
$\delta\phi$	Sonsuz küçük dönme
$\langle \rangle$	İndirgenmiş matris elemanı gösterimi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Açısal Momentum Teorisi

1.1.1. Giriş

19. yüzyılın sonlarına doğru bilinen klasik fizik teorilerinin tüm fiziksel olayları açıklamada yeterli olduğuna inanılıyordu. Bu bağlamda mekanik olaylar Newton yasalarıyla, elektrik ve optik olaylar da elektromagnetik teorinin temelini oluşturan Maxwell denklemleriyle açıklanıyordu. Yine bu yüzyılda istatistik mekanik teorisi de termodinamik olayları açıklamakta oldukça başarılıydı.

20. yüzyılın başlarında elde edilen bir dizi deneysel sonuç klasik fizik kavramları ile açıklanamadı. Bunun bir sonucu olarak kusursuz işleyen ve tüm evren ile birlikte oluşan olayları açıklayabileceği varsayılan mekanik evren inancının önemi azaldı. Atomların ve çekirdeklerin iç yapısı ile birlikte galaksiler arası uzayda meydana gelen ve klasik fizik yani teorik mekanik sınırları içinde açıklanamayan yeni olaylar, 1900-1917 yılları arasında iki büyük ve yeni teorinin doğmasına yol açtı. Bu teorilerden ilki madde ve enerjinin temel birimlerini ele alan "kuantum teorisi", diğeri ise uzay, zaman ve tüm evrenin yapısını inceleyen "izafiyet teorisi" dir. Bu iki teori çağdaş fiziğin temel direkleri olarak kabul edilmektedir. Bu teorilerin her ikisi de kendi alanlarındaki olayları uyumlu matematiksel bağıntılar ile ifade ederler.

Burada klasik fizikle açıklanamayan "ışığın tanecik özelliği", "maddenin dalga özelliği" ve "fiziksel niceliklerin kuantumlanması" gibi yeni kavramların tanımlanmasına yol açan temel olayları ve "parçacık-dalga ikilemi" nin ışığı altında kuantum mekaniğindeki açısal momentum ve vektör çiftlenim katsayılarını irdeledik.

Kuantum mekaniği, mikroskobik sistemleri (atom, çekirdek, vb.) matematiksel nesnelere (dalga fonksiyonları) cinsinden tanımlayan ve matematiksel nesnelere fiziksel içeriğe dönüştürmek üzere bir dizi kurallar veren bilimsel bir yöntemdir. Kuantum mekaniği, klasik mekaniğe benzer olarak dinamik değişkenler (konum, momentum, vb.) cinsinden inşa edilir. Fakat burada dikkat edilmesi gerekli bir husus vardır, o da, klasik mekanikte gerçek sayılar aracılığı ile ifade edilen dinamik değişkenlerin, kuantum mekaniğinde lineer işlemciler aracılığı ile ifade edilmesidir. Ayrıca reel sayılar arasındaki

çarpma işleminin sıra değişimli olduğuna dair genel bir aksiyom, lineer işlemciler için geçerli değildir. Bundan dolayı kuantum mekaniğindeki dinamik değişkenler klasik mekanik dinamik değişkenlerinden farklı bir cebire uyarlar. Buna rağmen kuantum mekaniğindeki dinamik değişkenler, klasik mekanikteki karşılıkları ile ortak bir çok özelliğe sahiptir. Böylece bu dinamik değişkenler aracılığı ile klasik teoriye yakından benzer bir teori oluşturmak ve klasik teorinin güzel bir genelleştirmesini oluşturmak mümkündür.

1.1.2. Dinamik Değişkenler

Kuantum mekaniğinde sıkça karşılaşılan ve bir noktasal parçacığa ait başlıca dinamik değişkenler şunlardır: Koordinat, zaman, hız, momentum, enerji, yörünge açısal momentum, spin açısal momentum, toplam açısal momentum ve dönme açısıdır. Klasik mekaniğin yasaları vasıtasıyla bu dinamik değişkenlerin bazılarının arasında var olan matematiksel bağıntılar kuantum mekaniğinde de geçerlidir. Yalnız burada dikkat edilmesi gerekli bir husus vardır o da şudur: Klasik mekanikteki dinamik değişkenlerin gerçek sayılar aracılığı ile ifade edilebilirliği ve bu değişkenlerin deneysel olarak ölçülen değerleri ile doğrudan doğruya karşılaştırılabilirliği mümkün iken, kuantum mekaniğinde bu değişkenlerin gerçek sayılar aracılığı ile ifade edilememesi ve deneysel değerleri ile yapılacak olan bu karşılaştırımın Heisenberg belirsizlik ilkesi ile verilen kıstasa göre belirlenebilmesidir.

1.1.3. Klasik Mekaniğinin Yetersizliği

Klasik mekanik ya da daha genel olarak klasik teorik fizik, gerek yeryüzünde günlük hayatta karşılaşılan fiziksel olayların gerekse dünya dışındaki evrende alışılmış makroskobik alanda var olan fiziksel olayların büyük bir çoğunluğunu açıklayabilir. Fakat atom fiziğinin ve özellikle temel parçacıkların söz konusu olduğu mikroskobik alandaki fiziksel olayları hemen hemen hiç açıklayamaz.

Klasik mekaniğin ve klasik optiğin yetersiz kaldığı ve kuantum mekaniğinin büyük bir başarı ile uygulanabildiği mikroskobik alandaki geniş fiziksel olay topluluğu, iki temel kavram bakımından klasik fiziğe uymaz:

(1) Klasik fizikte dalga özelliğine sahip olduğu bilinen ışık, fotoelektrik ve Compton saçılması deneyleri ile kolayca gösterilebilen parçacık özelliğine de sahiptir.

(2) Klasik fizikte parçacık özelliğine sahip olduğu bilinen temel parçacıklar dalga özelliğine de sahiptir.

1.1.4. Kuantum Mekaniğinin Temelleri

1.1.4.1. Siyah Cisim Işıması

Siyah cisim, hangi frekansta olursa olsun üzerine düşen bütün elektromagnetik ışınımı yutan cisim olarak tanımlanır. Buna rağmen siyah cismin aynı sıcaklıktaki bir başka cisimden her frekansta daha iyi bir yayınlayıcı olduğu Max Planck tarafından termodinamik yasalar kullanılarak gösterildi.

Bu kavram, 1900 yılında Max Planck'ın siyah cisim radyasyonu spektrumunu açıklamak üzere yaptığı varsayıma dayanır. Planck, bu varsayımında elektromagnetik radyasyonun kesikli (yani süreksiz) enerji kuantumları şeklinde ya yutulacağı ya da yayılacağını kabul etti. Frekansı ν olan bir radyasyonun atomlara verdiği enerji dağıtımını $h\nu$ ve katları şeklinde olacağını ileri sürdü. Böylece aktarılan enerji için

$$E = nh\nu$$

ifadesi yazılır. Burada n 1,2,3,... gibi tamsayı değerleridir. Bu varsayımda modern fiziğin temel bir kavramı olan enerji kuantumlanması fikri ilk kez kullanılmış ve fiziğin evrensel sabitlerinden biri olan Planck sabiti (h) tanımlanmıştır.

1.1.4.2. Fotoelektrik Olay

Temiz bir metal yüzeye düşen ışık ışınlarının, metal yüzeyden elektron kopararak elektronu serbest hale geçirmesi olayı 1890 yılında Hertz tarafından gözlemlendi. Fakat, Hertz buna bir açıklama getiremedi. Çünkü bu olay, klasik fizikle açıklanması mümkün olmayan özellikler içermekteydi. Bu özellikler şöylece verilebilir,

(1) Yüzeyden elektron kopması ancak düşen ışığın frekansı belirli bir eşik değerden büyük olduğu zaman başlar,

(2) Salınan elektronların kinetik enerjisi, ışığın şiddetinden bağımsızdır fakat frekansa çizgisel olarak bağlıdır.

Elektronların enerjilerinin frekansa bağlı olmaları klasik olarak açıklanamaz. Bu durumları çok iyi gören ve yorumlayan Einstein, 1905 yılında, Planck'ın yaptığı çalışmalardan da faydalanarak fotoelektrik olayı açıkladı. Böylece ışığın foton denilen bir enerjiye sahip parçacıklar gibi davrandığı anlaşıldı.

1.1.4.3. Compton Olayı

Işığın foton denilen biçimde tanecik yapıda olduğunu gösteren önemli bir deney 1923 yılında Compton tarafından yapıldı. Bir ışın, tek bir atom veya elektron üzerine gönderildiğinde ışınlardan bir bölümü değişik yönlerde saçılmaya uğrar. Klasik teoriye göre gelen elektromagnetik dalganın etkisiyle titreşmeye başlayan elektrik yükü, değişik yönlerde yeni elektromagnetik dalgalar halinde yayınlanır ve tüm bu dalgaların dalga boyu başlangıçta gelen ışının dalga boyuna eşit olur. Fakat bu olgu böylesi bir durumda geçerli değildir. Compton bu sonucu açıklayabilmek için Einstein'in foton teorisine başvurdu. Böylece fotonların enerji taşıyabildiği gibi momentumda taşıyabileceği öngörüldü. Bununla birlikte bilinen enerji ve momentum korunum yasaları, fotonun elektronla yaptığı çarpışma ile açıklanabilirdi.

Enerjisi E olan bir elektromagnetik dalga $P = \frac{E}{c}$ kadarlık bir momentum taşır.

Buna Einstein foton enerjisi taşındığında foton momentumunu,

$$P = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

olarak elde edilir. Burada c ışık hızı, λ ise dalga boyudur.

1.1.5. Açısal Momentum

3 boyutlu kartezyen koordinatlarda bir $V(\mathbf{r}) = V(x, y, z)$ potansiyeli içinde hareket eden parçacığın toplam enerjisi

$$E = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + V(x, y, z)$$

ile verilir. Burada m parçacığın kütesidir. Buna karşılık gelen Schrödinger denklemi,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

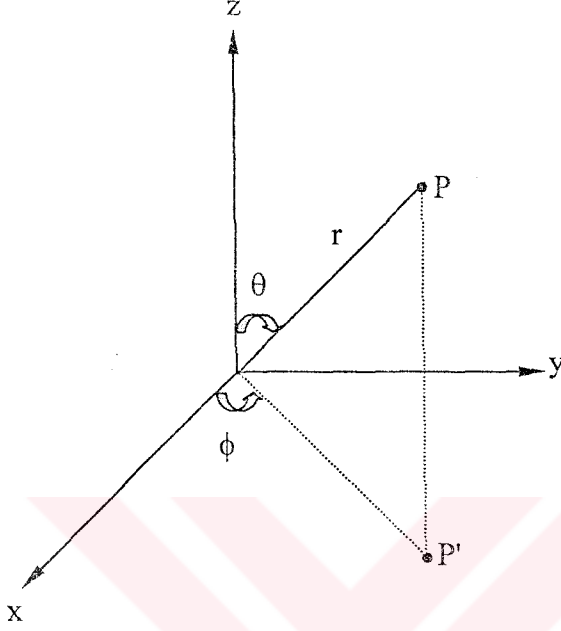
ile ifade edilir. Verilen bir potansiyel fonksiyon için bu, üç değişkenli kısmi bir diferansiyel denklemdir. Bunun çözümü bir boyutlu problemlere göre oldukça zordur. Çözümü basitleştirmek için potansiyel küresel simetrik bir fonksiyon olarak

$$V(\mathbf{r}) = V(r) \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ifadesi düşünüldüğünde problem sadece r nin bir fonksiyonu olacağından çözüm biraz kolaylaştırılmış olur. Örneğin; bir atomda $+Ze$ yüklü çekirdek etrafında hareket eden bir elektron için $V(r) = Ze^2/r$ ile tanımlanan Coulomb potansiyeli küresel simetriye sahiptir. Benzer olarak bir çekirdekteki nükleonlar için bazen kullanılan $V(r) = mw^2r^2/2$ harmonik salıncı potansiyeli veya küresel kuyu potansiyelinin de küresel simetriye sahip olduğu söylenir. Kısaca magnetik etkileşme dışında bilinen çoğu potansiyeller küresel simetriktir.

Klasik mekanikten bilindiği üzere küresel simetrik potansiyelin uyguladığı kuvvet merkezciidir. Merkezci bir kuvvetin en önemli özelliği de açısal momentumun korunumlu olmasını vermesidir. Tekrar problemin çözümüne dönecek olursak, küresel simetrik bir ifadeyi en iyi şekilde ifade edeceğimiz koordinat sistemi kutupsal koordinatlarıdır. Bunun için r radyal uzaklık, θ kutup açısı ve ϕ de azimutal açısı olmak üzere (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarının, (x, y, z) kartezyen koordinatları ile olan ilişkisini şekil.1'deki düzenlemeye göre şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \phi \\
 y &= r \sin \theta \sin \phi \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{2}$$



Şekil 1. Küresel koordinatların kartezyen koordinatlar üzerinde gösterilmesi

Burada $P(r, \theta, \phi)$ her hangi bir nokta ve P' ise P noktasının xy -düzlemindeki izdüşümüdür. Denk.(1) ile verilen kartezyen koordinatlardaki Schrödinger denkleminin küresel koordinatlardaki karşılığını elde etmek için kısmi türevleri (r, θ, ϕ) ile ifade etmemiz gerekir. Bunun için Denk.(2) ile verilen ifadeleri kullanırız. Kartezyen koordinatlardaki x ifadesi r, θ, ϕ nin bir fonksiyonu olduğundan bu ifadeyi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}
 \tag{3}$$

şeklinde yazılır. Benzer yazım y ve z içinde yapılır. Böylece her bir kartezyen koordinat bileşenlerinin,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \tan \phi = \frac{y}{x}
 \tag{4}$$

olduğu dikkate alındığında Denk.(3) ifadesi ile verilen kısmi diferansiyeller alınabilir. Bu işlemler yapıldığında $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ için

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (5)$$

sonucu bulunur.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (6)$$

bağıntısıyla Denk.(5) nin tekrar x e göre diferansiyeli alınır. Benzer işlemlerle

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

sonuçları da bulunur. Bulunan bu sonuçlar, Denk.(1) ile verilen kartezyen koordinatlardaki Schrödinger denkleminde yerine yazıldığında kutupsal koordinatlardaki Schrödinger denklemi

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi + V(r)\psi = E\psi \quad (7)$$

olarak elde edilir. Bundan böyle artık ψ dalga fonksiyonu r , θ ve ϕ nin bir fonksiyonudur. Buradaki potansiyelin yalnızca r ye bağlı olmasından dolayı değişken ayırma yöntemi uygulanabilir ve bunun sonucu olarak da toplam dalga fonksiyonunu

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (8)$$

şeklinde radyal ve açısal kısımların çarpımı olarak yazılır. Böylece r , θ ve ϕ ye göre çözümler öngörülebilir. Denk.(7) ifadesinden anlaşıldığı üzere θ ve ϕ ler birbirlerine bağlıdır. Bu yüzden buradaki açısal kısım küresel harmonikler olarak adlandırılır ve

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (9)$$

şeklinde ifade edilir. Denk.(7) bağıntısında gerekli olan açılım işlemleri yapılır, Denk.(8) ifadesinde r , θ ve ϕ ye göre türevler alınır ve bu işlemlerin sonucunda elde edilecek sonuç Denk.(8) ifadesiyle bölünürse

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] = -\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] \quad (10)$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Bu eşitliğin sağlanabilmesinin tek yolu her iki tarafın λ gibi bir sabite eşit olması ile mümkündür. Bu eşitleme yapıldıktan sonra Denk.(10) denklemi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)]R - \lambda R &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

şeklinde iki ayrı denklem halinde yazılabilir. Bu denklemlerden ilki sadece r koordinatına bağlı olduğundan radyal Schrödinger denklemidir ve ayrıntılı çözümünü bulmak için $V(r)$ potansiyeli bilinmelidir. İkincisi ise $V(r)$ potansiyeli belirli olmadığından tüm küresel simetrik potansiyeller için dalga fonksiyonunun açısız bağımlılığı aynı $Y(\theta, \phi)$ küresel harmonik fonksiyonu ile ifade edilir. Bizi burada asıl ilgilendiren kısım Denk.(11) bağıntılarındaki bu son denklemdir. Şimdi bu denklemin çözümünü irdeleyelim. Bunun için $Y(\theta, \phi)$ fonksiyonunun sağladığı denklem yukarıda verilen basitleştirmeden dolayı,

$$-\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y = \lambda Y \quad (12)$$

şeklinde verilecektir. Bu yüzden bu ifade köşeli parantez içindeki işlemcinin özdeğer denklemi görünümüne sahip olacaktır. Gerçekten de bu işlemci

$$L^2 = (r \times P)^2$$

şeklindedir, yani açısal momentum işlemcisinin karesinin kutupsal koordinatlarda yazılmış halidir. Bunun böyle olduğunu görelim. Bunun için öncelikli olarak

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

işlemcisini

$$L_x = yP_z - zP_y, \quad L_y = zP_x - xP_z, \quad L_z = xP_y - yP_x \quad (13)$$

bileşenler halinde yazalım. Burada P_k , $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}$ tanımını yapalım. Bu tanımın dikkate alınması ile birlikte kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad k = x, y, z \quad (14)$$

ifadesi yazılır. Böylece, $x_{k=x} = x$ için bu ifadenin bileşenleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} r = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{x}{r} = \sin \theta \sin \phi \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \theta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\arccos \left(\frac{z}{r} \right) \right) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{z \sin \theta \cos \phi}{r^2} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right) = \frac{-\tan \phi}{(1 + \tan^2 \phi) r \sin \theta \cos \phi} = \frac{-\sin \phi}{r \sin \theta} \end{aligned} \quad (15)$$

olarak elde edilirler. Denk.(14) sonucunu elde etmek için bu değerleri yerine yazarsak,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (16)$$

ifadesini buluruz. Benzer işlemler $x_{k=y} = y$ ve $x_{k=z} = z$ için de yapıldığında

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (18)$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu sonuçlar yörünge açısıl momentumunun x,y,z bileşenleri olan

$$L_x = yP_z - zP_y = -i\hbar \left[y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$L_y = zP_x - xP_z = -i\hbar \left[z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$$L_z = xP_y - yP_x = -i\hbar \left[x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right]$$

ifadelerinde yerlerine yazıldığında kutupsal koordinatlardaki yörünge açısıl momentum işlemcileri için sırasıyla

$$\begin{aligned} L_x &= i\hbar \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ L_y &= i\hbar \left[-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (19)$$

bağıntıları elde edilir [1]. Burada Denk.(19) ifadelerinin kareleri alınır, gerekli düzenlemeler yapılır ve

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (20)$$

ifadesinde yerlerine yazılırsa yörünge açısıl momentumunun karesinin

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (21)$$

olduğu görülür. Bulunan bu L^2 yi Denk.(12) ifadesinde yerine yazdığımızda

$$L^2 Y(\theta, \phi) = \lambda \hbar^2 Y(\theta, \phi) \quad (22)$$

ile verilen L^2 işlemcisinin özdeğer denklemi elde edilir. Bundan dolayı da $Y(\theta, \phi)$ fonksiyonlarının, açısal momentum işlemcisinin özfonksiyonları olduğu söylenir. İşlemlerimizi daha da basitleştirmek için Denk.(9) bağıntısına geri dönelim. Bu ifadenin gerekli kısmi türevleri alınır ve Denk.(11) ifadelerinin ikincisi $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ çarpanına bölünür ve aynı terimli ifadeler taraf tarafa yazılırsa

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \quad (23)$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitliğin sağlanması ancak her iki tarafın yine bir sabite eşit olması ile mümkündür. Bu sabit reel ve pozitif olmak zorunda olduğundan m^2 ile ifade ederiz. Denk.(23) bağıntısını

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

şeklinde verilen iki farklı denkleme ayırabiliriz. Bu ifadelerden ilkinin çözümünün

$$\Phi(\phi) = A e^{im\phi}$$

olacağı bilinen bir sonuçtur ve ϕ açısı $[0, 2\pi]$ aralığında bulunduğundan dalga fonksiyonu tek değerli olmalıdır, yani

$$\begin{aligned} \Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) &\Rightarrow A e^{im(\phi+2\pi)} = A e^{im\phi} \\ \frac{A e^{im(\phi+2\pi)}}{A e^{im\phi}} &= 1 \Rightarrow e^{2im\pi} = 1 \end{aligned}$$

şartı sağlanmalıdır. Bu şartın sağlanması ancak m nin 0 ve tamsayı değerlerini alması ile mümkündür. Böylece dalga fonksiyonunun ϕ koordinatına bağlı kısmının çözümünün bir m kuantum sayısı olması gerektiği söylenir. Bulunan bu çözüme kutupsal koordinatlarda verilen L_z işlemcisi etki ettirilirse,

$$L_z \Phi_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \Phi_m = -i\hbar A \frac{\partial}{\partial \phi} e^{im\phi} = m\hbar A e^{im\phi}$$

$$L_z \Phi_m = m\hbar \Phi_m \quad (25)$$

ile verilen bir $m\hbar$ ye karşılık gelen bir özdeğerin olması gerektiği ortaya çıkar. Böylece fiziksel anlamda, açısal momentumun z bileşeni ölçüldüğünde ölçümün \hbar nin tam katları şeklinde olması gerektiği gibi bir sonuç karşımıza çıkar.

Şimdi de Denk.(24) ifadelerinden ikincisinin sonucunun ne olacağına bakalım. Bu denklem için $\mu = \cos\theta$ tanımlaması yapıldığında dikkate alınarak bu denklemi, μ tamsayı olmak üzere,

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 \Theta}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\Theta}{d\mu} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right) \Theta = 0 \quad (26)$$

biçiminde tekrar yazabiliriz. θ açısı $[0, \pi]$ arasında değiştiğinden μ değişkeni $[-1, 1]$ aralığında değerler alacaktır. $m=0$ olan özel hali $P(\mu)$ ile gösterirsek Denk.(26) ifadesini

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP}{d\mu} + \lambda P = 0 \quad (27)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Denk.(27) ifadesi Legendre diferansiyel denklemi olarak bilinir ve kuvvet serisi yöntemi ile çözülebilir. Bu çözümü elde etmek için

$$P(\mu) = c_0 + c_1 \mu + c_2 \mu^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mu^n \quad (28)$$

serisini kullanabiliriz. Denk.(27) için gerekli olan terimleri, bu seri üzerinde işlem yaparak buluruz ve bulunan bu ifadeleri diferansiyel denklemde yerlerine yazdığımızda

$$\sum_n [(n+1)(n+2)c_{n+2} - (n-1)nc_n - 2nc_n + \lambda c_n] \mu^n = 0 \quad (29)$$

bağıntısına ulaşırız. Bu eşitliğin sağlanması ancak köşeli parantez içinin sıfıra eşit olması ile mümkündür. Bu nedenle tekrarlama bağlantısı

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n \quad (30)$$

olarak yazılır. c_1 ve c_2 gibi iki başlangıç katsayısı verilirse tüm c_n katsayıları bulunur ve böylece seri çözüm yapılır. Ancak, sonsuz olan bu serinin limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+2}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} = 1$$

olarak bulunduğundan bu seri iraksaktır ve fiziksel bir çözüm içermez. Bu sorunu gidermenin tek yolu, serinin sonlu bir terimde kalması yani bir polinom olmasıdır. Bu da ancak n indis artımının belirli bir l değerine geldiğinde payın sıfır olması ile mümkündür. Böylece, c_{l+2} ve daha yukarı indisli katsayılar sıfır olur. Bunun bir sonucu olarak yazımdaki uygunluğu sağlamak amacı ile $n = l$ alınmasıyla λ nın

$$\begin{aligned} n = l \Rightarrow n(n+1) - \lambda &= l(l+1) - \lambda = 0 \\ \lambda &= l(l+1) \end{aligned} \quad (31)$$

ile verilmesi gerektiği ortaya çıkar. Bundan dolayı Denk.(22) ifadesini

$$L^2 Y(\theta, \phi) = l(l+1) \hbar^2 Y(\theta, \phi) \quad (32)$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Buradan yörünge açısal momentum kare işlemcisinin özdeğerinin $l(l+1)\hbar^2$ ile verildiği ve böylece de bunun kuantumlu olduğu görülür.

1.1.6. Yörünge Açısal Momentum Sıra Değişim Bağlıları

Kuantum mekaniğindeki yörünge açısal momentum vektör işlemcisi, klasik mekanikteki benzer bir şekilde, yalnızca kuantum mekaniği momentum işlemcisi olan

$$\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$$

ifadesinden kaynaklanan farklılıkla

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \quad (33)$$

ile verilir. Bu nedenle bunun bileşenleri kartezyen koordinatlarda

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = -i\hbar \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \quad (34)$$

ifadesinin açılmış şekli olarak ayrı ayrı

$$L_x = yP_z - zP_y, \quad L_y = zP_x - xP_z, \quad L_z = xP_y - yP_x \quad (35)$$

biçimlerinde yazılırlar. Bu işlemciler ile ilgili sıra değişim bağıntılarını bunlardan ikisinin arasında var olan sıra değişim bağıntısı örneğini vererek genelleştirelim. Bunun için

$$[L_y, L_z] = L_y L_z - L_z L_y \quad (36)$$

ifadesini ele alalım. Bu örnek için Denk.(35) bağıntısındaki uygun işlemcilerin seçilip yerlerine yazılması sonrası gerekli ara işlemler yapıp düzenlendiğinde

$$[L_y, L_z] = (xP_x - P_x x)(yP_z - zP_y) = (xP_x - P_x x)L_x \quad (37)$$

sonucu elde edilir. Buradaki $(xP_x - P_x x)$ ifadesi $[x, P_x]$ sıra değişiminin ta kendisidir. Öncelikli olarak bu sıra değişim ifadesinin bulunması gerekir. Bunun için

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

olduğu hatırlanır ve bir ψ -fonksiyonu ile birlikte uygulanırsa

$$[x, P_x] = i\hbar \quad (38)$$

sonucu bulunur. Diğer momentum-konum sıra değişim bağıntıları için uygun değişkenlerle benzer işlemler yaptığımızda, Denk.(38) ifadesinin sıra değişim bağıntılarını aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz:

$$[x_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad ; \quad i=x,y,z, j=x,y,z \quad (39)$$

Denk.(38) sonucu Denk.(37) de yerine yazıldığında

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

ifadesi elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad , \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

sonuçlarını da elde etmek mümkündür. Buradan bu üç sıra değişim için,

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L} \quad (40)$$

bağıntısı çıkarılabilir.

$[L^2, L_x]$ sıra değişimi için, $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ ifadesi dikkate alındığında

$$[L^2, L_x] = L^2 L_x - L_x L^2 = (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)L_x - L_x(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2) \quad (41)$$

ifadesi oluşturulabilir. Bu ifade de $L_x^2 L_x - L_x L_x^2 = 0$ olacağından Denk.(41) bağıntısı

$$\begin{aligned} [L^2, L_x] &= (L_y^2 + L_z^2)L_x - L_x(L_y^2 + L_z^2) \\ &= (L_y^2 L_x - L_x L_y^2) + (L_z^2 L_x - L_x L_z^2) \end{aligned} \quad (42)$$

sonuç ifadesine indirgenir. Burada $L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z$ olduğu hatırlanarak bu ifadenin her iki yanını sağdan ve soldan L_y ile çarparsak

$$L_x L_y^2 - L_y L_x L_y = i\hbar L_z L_y$$

$$L_y L_x L_y - L_y^2 L_x = i\hbar L_y L_z$$

sonuçları bulunur. Bu sonuçlar taraf tarafa toplandığında

$$L_x L_y^2 - L_y^2 L_x = i\hbar [L_z L_y + L_y L_z]$$

ifadesine ulaşılır. Aynı işlemler bu sefer $L_z L_x - L_x L_z = i\hbar L_y$ için yapılırsa

$$L_z^2 L_x - L_x L_z^2 = i\hbar [L_z L_y + L_y L_z]$$

sonucu bulunur ve bulunan bu iki sonuç Denk.(42) bağıntısında yerlerine yazıldığında

$$[L^2, L_x] = -i\hbar (L_z L_y + L_y L_z) + i\hbar (L_z L_y + L_y L_z) = 0$$

olduğu görülür. Benzer işlemler yapılarak

$$[L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$$

sonuçlarını da görmek mümkündür.

Yukarıda yapılan işlemlere benzer işlemler yörünge açısal momentum-konum işlemcileri ve yörünge açısal momentum-çizgisel açısal momentum bileşen işlemcileri

arasında da yapıldığında bunlara karşılık gelen sıradışı değişim bağıntıları konum işlemcileri ve momentum işlemcileri için sırasıyla

$$\begin{aligned}
 [L_x, x] &= 0 & , & & [L_y, y] &= 0 & , & & [L_z, z] &= 0 \\
 [L_x, y] &= i\hbar z & , & & [L_y, x] &= -i\hbar z & , & & [L_z, x] &= i\hbar y \\
 [L_x, z] &= -i\hbar y & , & & [L_y, z] &= i\hbar x & , & & [L_z, y] &= -i\hbar x
 \end{aligned} \tag{43}$$

ve

$$\begin{aligned}
 [L_x, P_x] &= 0 & , & & [L_y, P_y] &= 0 & , & & [L_z, P_z] &= 0 \\
 [L_x, P_y] &= i\hbar P_z & , & & [L_y, P_x] &= -i\hbar P_z & , & & [L_z, P_x] &= i\hbar P_y \\
 [L_x, P_z] &= -i\hbar P_y & , & & [L_y, P_z] &= i\hbar P_x & , & & [L_z, P_y] &= -i\hbar P_x
 \end{aligned} \tag{44}$$

olarak elde edilirler [2].

1.1.7. Yaratma ve Yok Etme İşlemcileri

L nin bileşenleri yardımı ile iki basamak (yaratma-yok etme) işlemcisi tanımlanabilir. Bunlar L^2 ifadesinin açılımında oluşan köşegenlikten kayma sorununu gidermek için tanımlanan işlemcilerdir ve

$$L_+ = L_x + iL_y \quad , \quad L_- = L_x - iL_y \tag{45}$$

şeklinde tanımlanırlar. Buradaki her iki işlemcinin bir birinin hermityen eşleniği olduğuna dikkat edilmelidir ve bu nedenle bunların beklenen değerleri de reeldir. A herhangi bir işlemci ise A nın beklenen değeri $\langle A \rangle = \langle A \rangle^*$ olmak üzere

$$\int \Psi^* A \Psi d\tau = \int (\Psi A)^* \Psi d\tau \tag{46}$$

özelliğini sağlamalıdır. Burada ψ herhangi bir dalga fonksiyonudur. Bu durumda L^2 ifadesi Denk.(45) ile verilen işlemciler cinsinden

$$L^2 = L_-L_+ + L_z^2 + \hbar L_z = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z \quad (47)$$

olarak yazılır. Burada verilen bu sonuç bize bu yaratma ve yok etme işlemcilerinin özdeğerlerini bulmada yardımcı olacaktır. Özdeğerlerini bulmak için L_+ işlemcisini $|lm\rangle$ üzerine etki ettirelim. Bunun sonucu olarak

$$L_+|lm\rangle = c_+|lm+1\rangle \quad (48)$$

ifadesi yazılabilir [3]. Buradaki c_+ katsayısının ne olacağını tespit etmek için $(L_+)^* = L_-$ ifadesini dikkate alarak Denk.(48) bağıntısının eşleniğini alalım. Bu yapıldığında

$$\langle lm|L_- = \langle lm+1|c_+^* \quad (49)$$

elde edilecektir. Denk.(48) ve Denk.(49) bağıntıları birlikte yazıldığında

$$\langle lm|L_-L_+|lm\rangle = |c_+|^2 \langle lm+1|lm+1\rangle = |c_+|^2 \quad (50)$$

ifadesine ulaşırız. Burada $L_-L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$ olduğu hatırlanarak bunu Denk.(50) de yerine yazar ve hemen ardından Denk.(25) ve Denk.(32) ifadeleri de kullanırsak

$$\langle lm|L^2 - L_z^2 - \hbar L_z|lm\rangle = [l(l+1) - m^2 - m]\hbar^2 \quad (51)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, Denk.(50) ifadesi ile karşılaştırıldığında, c_+ ifadesinin mutlak karesine karşılık olduğu görülür. Diğer bir deyişle, c_+ nın kendisi tam olarak belirlenemez. Bu açıdan fizikte en çok kabul edilen standarta göre pozitif karekök L_+ nin etkisi olarak ele alınır. Böylece L_+ nın özdeğerinin

$$L_+ |lm\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \hbar |lm+1\rangle \quad (52)$$

ile verilmesi gerektiği sonucunu söyleyebiliriz. Benzer işlemler L_- için $|lm\rangle$ üzerinden yapıldığında

$$L_- |lm\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \hbar |lm-1\rangle \quad (53)$$

ifadesi elde edilir.

1.1.8. Yörünge Açısal Momentum İçin Matris Temsilleri

L^2 ve L_z için köşegen matrisleri aşağıda verilen sonuca göre yazılırlar:

$$\begin{aligned} \langle lm' | L^2 | lm \rangle &= l(l+1) \hbar^2 \delta_{mm'} \\ \langle lm' | L_z | lm \rangle &= m \hbar^2 \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (54)$$

L_x , L_y ifadelerinin matris elemanlarını ise yaratma ve yok etme işlemcilerinden elde etmemiz mümkündür. Bu durumda L_x ve L_y işlemcileri yaratma ve yok etme işlemcileri cinsinden

$$L_x = \frac{1}{2}(L_- + L_+) \quad , \quad L_y = \frac{i}{2}(L_- - L_+) \quad (55)$$

şeklinde verildiğinden bunların matris temsilleri

$$\begin{aligned} \langle lm' | L_x | lm \rangle &= \frac{1}{2} [\langle lm' | L_- | lm \rangle + \langle lm' | L_+ | lm \rangle] \\ &= \frac{\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}}{2} \hbar \delta_{m',m-1} + \frac{\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}}{2} \hbar \delta_{m',m+1} \\ \langle lm' | L_y | lm \rangle &= \frac{i\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}}{2} \hbar \delta_{m',m-1} - \frac{i\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}}{2} \hbar \delta_{m',m+1} \end{aligned} \quad (56)$$

ile verilecektir.

1.1.9. Spin Açısıl Momentum

Buraya kadar yapılan işlemlerde parçacıkları noktasal bir kütle olarak ele alarak bir iç yapılarının olmadığını varsaydık. Yani, parçacığın durumunu veren dalga fonksiyonunu yalnızca r konumunun bir fonksiyonu olarak düşündük. Fakat Schrödinger dalga denklemi, atomlardan çıkan ışığa ait spektroskopik çizgilerin deneylerle genellikle çok iyi uyuşan bir açıklamasını vermekle birlikte bu verilerle uyuşmayan küçük farkların varlığına da işaret etmekteydi. Bu sorunun giderilmesi veya nedeninin ne olduğunun anlaşılması için 1922 yılında Stern-Gerlach, düzgün olmayan bir B magnetik alan içine bir kaynaktan çıkan eşit enerjili gümüş atomları demeti gönderdi. Deney düzeneğinde bulunan ekran ile magnetik alanda sapmaya uğrayan ışık demetleri tespit edildi [4]. Böylece parçacıkların bir iç yapısının olduğu varsayımı ağırlık kazanmaya başladı. Daha sonra yapılan deneylerin de aynı sonucu vermesi üzerine parçacıklarda var olan bu iç yapının bir çeşit açısıl momentum olması gerektiği önerildi. Ancak klasik bir açıklama (yani, bir parçacığın topaç gibi dönmesi veya gezegenlerin kendi eksenleri etrafında dönüşü gibi tasvirler) görelilik teorisine göre imkansızdı.

1925'de Uhlenbeck ve Goundsmıt adlı fizikçiler tarafından bu durum uygun bir şekilde açıklandı. Deneylerle yapılan gözlemler ve bu gözlemlerin klasik teoriye göre açıklamasıyla magnetik momentin ancak yüklü parçacıkların hareketinden oluştuğu anlaşıldı. Buna örnek olarak, elektronun çekirdek etrafındaki hareketinin bir L yörünge açısıl momentumu verilebilir ve bunun matematiksel ifadesi de,

$$\mu = \frac{q}{2m_e c} \mathbf{L} \quad (57)$$

şeklindedir. Elektron için $q = -e$ olduğundan μ ve L zıt yönlüdür. Yörüngede dolanan elektronlara bağlı olarak, ekranda iki iz görülmesi ve magnetik momentin en küçük değerinin $\mu=2\mu_B$ olması durumu açıklanamaz. Ayrıca kendi etrafında dönen bir elektronun bu kadar yüksek bir açısıl momentum verebilmesi, elektronun ışık hızından yüksek hızlarda bir dönme yapmasını gerektirir ki bu da kabul edilemezdir. Bunların sonucunda spin kavramı kuantum mekaniğinde bir postülat olarak ele alınır:

(1) Her temel parçacığın yörünge hareketinden bağımsız olarak bir iç açısal momentumu (spini) vardır. S ile gösterilen bu dinamik değişken işlemci, uzay değişkenleri olan r ve p cinsinden tanımlanabilme ve bu bileşenlerle sıra değiştirebilme özelliğine sahiptir, yani $[L,S] = 0$ dır.

(2) Bir parçacığın toplam açısal momentumu $J=L+S$ ile belirlenir.

(3) Parçacığın yörünge açısal momentumu ($l=0,1,2,\dots$ gibi) keyfi bir $l\hbar$ değerlerini alabildiği halde spin açısal momentumu sabit bir değere sahiptir. Örneğin elektron, proton, nötron, nötrino, μ -mezon gibi parçacıklar için $S = \hbar/2$ dir. Buna karşın π , K-mezonu gibi parçacıkların spini sıfırdır ($S=0$).

Spin açısal momentumun z-bileşeni S_z nin özdeğeri m_s ile gösterilir ve bu m_s değeri $-S, \dots, +S$ arasında değişen değerler alır. Böylece $S=1/2$ için $m_s = \pm 1/2$ değerlerini alabildiğinden her bir S değeri için $2S+1$ tane m_s değeri olur. S_z bileşeninin $+1/2$ olduğu öz durum α , $-1/2$ olduğu öz durum β ile gösterildiğinde bunlar,

$$|\uparrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \alpha \quad , \quad |\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \beta \quad (58)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durum yörünge açısal momentumda olduğu gibi

$$\text{spin yukarı için; } |\uparrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \alpha \Rightarrow S^2 \alpha = s(s+1)\hbar^2 \alpha = \frac{3}{4}\hbar^2 \alpha; \quad s = \frac{1}{2}$$

$$m_s = +\frac{1}{2} \Rightarrow S_z \alpha = m_s \hbar \alpha = \frac{\hbar}{2} \alpha \quad (59)$$

$$\text{spin aşağı için; } |\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \beta \Rightarrow S^2 \beta = s(s+1)\hbar^2 \beta = \frac{3}{4}\hbar^2 \beta; \quad s = \frac{1}{2}$$

$$m_s = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_z \beta = m_s \hbar \beta = -\frac{\hbar}{2} \beta \quad (60)$$

ifadeleri ile verilir. Spin açısal momentumunun yaratma ve yok etme işlemcileri de l yerine s alınmak koşulu ile Denk.(52) ve Denk.(53) bağıntıları ile verilir.

Spin açısal momentum değeri $s=1/2$ ve buna karşılık magnetik spin momentumu değerleri $m_s = \pm 1/2$ olduğundan, S^2 ve S 'nin z bileşeninin matris temsilleri Denk.(59) ve Denk.(60) bağıntıları kullanıldığında sırasıyla

$$S^2\alpha + S^2\beta = \frac{3}{4}\hbar^2\alpha + \frac{3}{4}\hbar^2\beta = \frac{3}{4}\hbar^2(\alpha + \beta) = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_z\alpha + S_z\beta = \frac{\hbar}{2}\alpha - \frac{\hbar}{2}\beta = \frac{\hbar}{2}(\alpha - \beta) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

!

şeklinde elde edilirler. Yine spin açısai momentumun x ve y bileşenleri yaratma ve yok etme işlemcileri cinsiden

$$S_x = \frac{1}{2}(S_- + S_+) \quad , \quad S_y = \frac{i}{2}(S_- - S_+) \quad (61)$$

şeklinde tanımlandıklarından ve S_+ ve S_- lerin matris temsilleri s nin $1/2$ değerini almasıyla $(2s+1)(2s+1)$ çokluğundan dolayı, 2×2 lik bir matris olarak

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{m_s}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_s \rightarrow$

!

şekillerinde verildiğinden, S_x ve S_y matris gösterimleri Denk.(61) ifadesinin kullanılması ile

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{i}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Kuantum mekaniği spin işlemlerinde oldukça sık bir biçimde karşımıza çıkan

!

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matris gösterimleri Pauli spin matrisleri olarak adlandırılır. Burada Pauli spin matrisleri ile spin açısai momentum bileşenleri arasında $\hbar/2$ 'lik bir çarpan farkı olduğu görülmektedir.

Spin açısai momentum sıra değiştirme bağıntıları, yörünge açısai momentumun Denk.(42) ve Denk.(43) ile verilen sıra değiştirme bağıntılarındaki L ve L bileşenleri yerine S ve S bileşenlerinin yazılmasıyla aynen korunur.

1.1.10. Toplam Açısai Momentum

Buraya kadar verilmiş olan bilgiler ışığında bir parçacığın toplam açısai momentumu yörünge açısai momentumu ile spin açısai momentumunun toplamı şeklinde, yani

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (62)$$

ile verilir. Bu durumda toplam açısai momentumun x, y ve z bileşenlerinin her bir açısai momentumun x, y ve z bileşenlerince yazılabileceği Denk.(62) ifadesinden görölmektedir.

Yani

$$J_x = L_x + S_x \quad , \quad J_y = L_y + S_y \quad , \quad J_z = L_z + S_z$$

ifade edilir. J işlemcilerinin sıra değiştirme bağıntılarında Denk.(42) ve Denk.(43) bağıntıları aynen geçerlidir. Bu durumda L ve L bileşenleri yerine J ve J bileşenlerin geleceği unutulmamalıdır.

Toplam açısai momentumun yaratma ve yok etme işlemcileri de Denk.(55) ve Denk.(61) bağıntılılarıyla benzer olarak

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad , \quad J_- = J_x - iJ_y \quad (63)$$

ile verilir [3]. Toplam açısai momentumun yaratma ve yok etme işlemcilerinin kendi aralarında ve J ve J nin bileşenleri ile olan sıra değiştirme bağıntılıları

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= \hbar J_+ \quad , \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_- \quad , \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \\ [J^2, J_+] &= [J^2, J_-] = 0 \end{aligned}$$

ile verilir. Yine J^2 ve J_z özdeğer denklemleri

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar |jm\rangle \quad ; \quad j=l+s$$

$$J_z |jm\rangle = m |jm\rangle \quad ; \quad m=m_l + m_s$$

ile ifade edilecektir. Burada j nin tamsayı ya da yarı tamsayı değerleri alabilmesi s değerine bağlıdır. Toplam açısal momentumun yaratma ve yok etme işlemcilerinin (bunlara aynı zamanda basamak işlemcileri de denir) özdeğer denklemleri

$$J_+ |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\hbar |jm-1\rangle$$

$$J_- |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\hbar |jm-1\rangle \quad (64)$$

ile verildiğinden J_x ve J_y nin matris temsilleri Denk.(63) ve Denk(64) bağıntılarının birlikte kullanılması ile

$$\langle jm' | J_x | jm \rangle = \frac{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}}{2} \hbar \delta_{m',m-1} + \frac{\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}}{2} \hbar \delta_{m',m+1}$$

$$\langle jm' | J_y | jm \rangle = \frac{i\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}}{2} \hbar \delta_{m',m-1} - \frac{i\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}}{2} \hbar \delta_{m',m+1}$$

şeklinde ifade edilir.

1.1.11. Sonsuz Küçük Dönmeler ve Açısal Momentum

Sonsuz küçük dönmeler belirli bir eksenin seçilmesi ve seçilen bu eksen etrafında sonsuz küçük bir $\delta\phi$ açılı bir dönme ile karakterize edilebilir [5]. z eksenini ($z'=z$) etrafındaki dönmeleri dikkate alalım. Bir ϕ açısı ile referans sistemimizin saat yönünün tersi doğrultuda sonlu bir dönme altında x', y' koordinatları x, y koordinatlarına

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \phi + y \sin \phi & x &= x' \cos \phi - y' \sin \phi \\ y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi & y &= x' \sin \phi + y' \cos \phi \end{aligned} \quad (65)$$

ile verilir. Sonsuz küçük bir dönme için Denk.(65) ifadesine $\cos \delta\phi=1$, $\sin \delta\phi=\delta\phi$ yerleştirdiğimizde

$$\begin{aligned} x' &= x + y \delta\phi & x &= x' - y' \delta\phi \\ y' &= y - x \delta\phi & y &= y' + x' \delta\phi \end{aligned} \quad (66)$$

sonuçlarına ulaşırız. Bir referans sistemi katı bir biçimde döndürüldüğünde bir $f(x,y,z)$ skaler alanındaki değişikliği göz önüne alalım. (x',y',z') koordinatlarına sahip bir noktadaki yeni alan $f(x(x'))$ orijinal alanıdır. Bu $f(x(x'))$ değerini bulmamız için Denk.(66) dönüşümünden faydalanırız ve bir Taylor serisine açarız:

$$Y_{lm}(\theta(\theta'), \phi(\phi')) = \sum Y_{lm}(\theta', \phi') D_{m'm}^{(l)}(R)$$

bağıntısında verildiği gibi, Denk.(66) daki zıt dönüşüm için zıt yöndeki dönmeyi kullanmalıyız. $\delta\phi$ 'nin işaretini değiştirdiğimizde

$$\begin{aligned} f(x(x')) &= f(x'+y'\delta\phi, y'-x'\delta\phi, z') \\ &= f(x', y', z') + y'\delta\phi \frac{\partial f}{\partial x'} - x'\delta\phi \frac{\partial f}{\partial y'} + \dots \\ &= f(x', y', z') - \delta\phi \left(x' \frac{\partial}{\partial x'} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \right) f(x', y', z') + \dots \end{aligned} \quad (67)$$

ifadesini elde ederiz. Sonsuz küçük dönmeden dolayı $f(x',y',z')$ alanının birinci mertebe değişimi $f(x',y',z')$ üzerinde bir lineer diferansiyel işlemcinin etkisi olarak Denk.(67) bağıntısında tanımlanır. Bu işlemci yörünge açısıl momentum vektörünün z-bileşeni ile orantılıdır. Bu şekilde x, y ve z koordinatlarına sahip her hangi bir noktada f fonksiyonundaki değişim

$$\delta f(x, y, z) = -\delta\phi \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) f = -i\delta\phi l_z f \quad (68)$$

ile verilir.

Diğer eksenler etrafındaki sonsuz küçük dönmeler de benzer ifadelere yol açar. Bir eksen etrafında n birim vektörünün yönündeki sonsuz küçük bir dönme bu yöndeki l nin bileşenleri ile

$$\delta f = -i\delta\phi (n \cdot l) f \quad (69)$$

şeklinde verilir. Sonsuz küçük dönmeler, x, y ve z eksenleri etrafında arka arkaya sırasıyla $n_x\delta\phi$, $n_y\delta\phi$ ve $n_z\delta\phi$ kadar yapılan sonsuz küçük dönmelere eşittir. Bu durumda birinci mertebe için

$$f + \delta f = (1 - i\delta\phi(n \cdot l)) f = (1 - i\delta\phi n_x l_x)(1 - i\delta\phi n_y l_y)(1 - i\delta\phi n_z l_z) f \quad (70)$$

yazabiliriz. Bu üç eksen etrafındaki sonsuz küçük dönmeler, böylece üç vektörün toplanması gibi, n etrafındaki bir dönme biçimi şeklinde birleştirilebilir. Bu, yörünge açısıl momentum vektörünün bileşenleri tarafından üretilen sonsuz küçük dönmeler ile tutarlıdır. Bunun, sonlu dönmeler için gerçekleşmeyeceğine dikkat edilmelidir. Bu son ifadenin her biri, eksen yönündeki bir ok işaretlemesi ve bu eksen etrafındaki dönmenin açısının büyüklüğüyle orantılı olarak grafiksel biçimde ifade edilebilir. Bununla birlikte, sonlu iki dönmenin bileşeni olan dönme (farklı eksenler etrafında), karşılık gelen okların vektör toplamıyla verilmez. Basit örnekler iki sonlu dönmenin birleşiminin vektörlerin toplamına çok fazla benzemediğini ve sıra değişimli olmadığını göstermektedir.

$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ gibi birkaç değişkenli bir fonksiyon olan bir skaler alanı dikkate alırsak, sonsuz küçük dönmelerden dolayı bu fonksiyondaki değişim Denk.(69) ifadesinin dosdoğru bir genelleştirilmesidir. Böylesi bir fonksiyon, spinsiz bazı parçacıkların dalga fonksiyonu olabilir. Aynı sonsuz küçük dönmelerden kaynaklanan $f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ deki değişimi yani aynı n eksenini etrafında aynı $\delta\phi$ lık dönmeyi dikkate alalım. Bu durumda Denk.(67) de Denk.(69) adımları kullanılırsa aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\delta f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots) = \left\{ 1 - i\delta\phi \left(n \cdot \sum l^{(i)} \right) \right\} f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots) \quad (71)$$

Bu durumdaki değişiklik sistemin toplam yörünge açısal momentumu tarafından üretilmiştir

$$L = \sum l^{(i)} \quad (72)$$

Aşağıda, yörünge açısal momentum için L yi kullanacağız fakat L nin tek ya da bir çok parçacığa ait olup olmadığı belirlemeyeceğiz.

Şimdi küresel harmonikler ve daha da genel olarak m ve l ile verilen uzaysal dalga fonksiyonlarının sonsuz küçük dönmeler altında nasıl dönüştüğünü görebiliriz. Denk.(69) dan dolayı bu tür dönüşümlerin sonuçları, Y_{lm} deki l bileşenlerinin davranışını veren ifadenin bulunduğu

$$l^{\pm} Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l, m \pm 1} \quad l^0 Y_{lm} = m Y_{lm}$$

ifadesinden çıkarılabilir. Böylece

$$L_z \phi_{lm} = m \phi_{lm} \quad , \quad L_{\pm} \phi_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \phi_{l, m \pm 1} \quad (73)$$

ifadesini elde ederiz. Bu Denk.(73) ifadeleri dönmeler altında herhangi ϕ_{lm} setinin indirgenemez olarak dönüştüğünü gösterir.

$$[l_x, l_y] = il_z \quad [l_z, l_x] = il_y \quad [l_y, l_z] = il_x$$

sıra değişim bağintılarından L^2 nin özdeğerlerinin $l(l+1)$ 'e eşit olduğu görülür. Burada l tam veya yarı tamsayıdır. Bu durumda L^2 ile sıra değişimli olan L_x , L_y ve L_z matrisleri L^2 'nin farklı özdeğerlerli durumlarıyla bağlantılı sıfır olan matris elemanlarına sahiptir. Bu L_x , L_y ve L_z ifadelerinin her birinin özdeğerleri, $-l$ den $+l$ ye doğru sıralanan tam ya da yarı tam sayılardır. L_z köşegenel olduğu bir bazda, $L_+ = L_x + iL_y$ ve $L_- = L_x - iL_y$ Denk.(73) ifadesi ile verilen sıfırdan farklı matris elemanlarına sahiptir. L_x, L_y ve L_z 'nin matrisleri daha fazla indirgenemez. Yani bunlar baz durumlarındaki üniter dönüşümler ile, köşegen boyunca iki ya da daha çok alt matrisin olduğu ve farklı alt matrisler arasında sıfır olan matris elemanlarının bulunduğu bir biçime getirilemez. Durumların her bir düzeninde bu matrislerden biri örneğin L_z , her bir alt matrislerin bazlarının bağımsız üniter dönüşümleri ile tamamen köşegenleştirilebilir. l nin tüm tam değerleri için köşegen olan L_z nin bulunduğu durumların seti ϕ_{lm} 'dir. Bu düzende, $L_x + iL_y$ ve $L_x - iL_y$ Denk.(73) ile verildiği gibi köşegen olmayan matris elemanlarına sahiptir. Böylece her bir ϕ_{lm} ve bazı sıfırdan farklı olan diğer ϕ_{lm} ($m=m'$) durumları arasında L_x ve L_y 'nin köşegen olmayan matris elemanları vardır. Bundan dolayı L_x , L_y ve L_z matrislerini daha fazla indirgemek mümkün değildir. Aynı $l(l+1)$ özdeğerli L^2 nin $2l+1$ bağımsız özfonksiyonları, Denk.(73)'e göre L nin bileşenlerinin davranışı altında birbirleri arasında dönüşür. şimdi bu dönüşümleri, sonsuz küçük dönüşümlerin sonuçları olarak yorumlayabiliriz. Bu yüzden ϕ_{lm} nin $2l+1$ tane fonksiyonu, sonsuz küçük dönüşümler altında indirgenemez olarak dönüşür ve bunun bir sonucu olarak da tüm dönmeler altında indirgenemez olarak dönüşüme uğrar.

şimdi iki bileşenli spinör alanlarına geri dönelim. İlk olarak Denk.(66) ile verilen sonsuz küçük dönmeyi dikkate alalım. Bunu etkin yorumu uyarladığımızda her iki bileşende de dönmelerin neden olduğu değişikliği Denk.(68)'e göre belirleriz:

$$\psi + \delta_1 \psi = \begin{pmatrix} (1 - i\delta\phi L_z)\phi_1(x) \\ (1 - i\delta\phi L_z)\phi_2(x) \end{pmatrix} = (1 - i\delta\phi L_z) \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (74)$$

$\delta_1 \psi$ ile verilen $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ 'deki değişim, yalnızca $\psi(x)$ alanı rijid olarak döndüğünde bu alandaki değişim değildir. Rijid bir dönme x e bağlı bileşenlerindeki değişime ek olarak x in bileşenlerini de değiştirir. Bundan dolayı ψ uygun U matrisleri ile dönüşüme uğrar.

ψ bileşenleri, $\delta\phi$ nin işaretinin değişimi ile, Denk.(66) ile verilen aynı rijid dönme altında U matrisi ile dönüşüme uğrar. Denk.(67) deki x_k koordinatları x'_k terimlerincede ifade ediliyorken

$$\sum_i a_{ki} U \sigma_i U^+ = \sigma_k$$

dönüşüm matrisi, x_k koordinatlarınca ifade edilen x'_i dönüşümleridir.

Bu yüzden

$$H(p', x') \phi(x(x')) = E \phi(x(x'))$$

ifadesinden

$$U_z (\sigma_x - \delta\phi \sigma_y) U_z^+ = \sigma_x, \quad U_z (\sigma_y + \delta\phi \sigma_x) U_z^+ = \sigma_y, \quad U_z \sigma_z U_z^+ = \sigma_z \quad (75)$$

bağıntılarını elde ederiz. U_z sonsuz küçük bir dönmeye karşılık geldiği için U_z yi

$$U_z = 1 + i\delta\phi \Omega_z, \quad U_z^+ = 1 - i\delta\phi \Omega_z \quad (76)$$

olarak ifade ederiz. Burada Ω_z , Denk.(75) ifadeleri ile belirlenebilen bir 2×2 'lik hermityen matristir. Bu denklemler, şimdi

$$\begin{aligned} \sigma_x - \delta\phi \sigma_y &= U_z^+ \sigma_x U_z = (1 - i\delta\phi \Omega_z) \sigma_x (1 + i\delta\phi \Omega_z) = \sigma_x + i\delta\phi [\sigma_x, \Omega_z] + \dots \\ \sigma_y + \delta\phi \sigma_x &= U_z^+ \sigma_y U_z = (1 - i\delta\phi \Omega_z) \sigma_y (1 + i\delta\phi \Omega_z) = \sigma_y + i\delta\phi [\sigma_y, \Omega_z] + \dots \\ \sigma_z &= U_z^+ \sigma_z U_z = (1 - i\delta\phi \Omega_z) \sigma_z (1 + i\delta\phi \Omega_z) = \sigma_z + i\delta\phi [\sigma_z, \Omega_x] + \dots \end{aligned} \quad (77)$$

şeklinde yazılabilir. Bu son denklemlerin her iki tarafındaki sonsuz küçük elemanları eşitlediğimizde Ω_z üzerindeki koşulları elde ederiz:

$$[\sigma_y, \Omega_z] = -i\sigma_x, \quad [\Omega_z, \sigma_x] = -i\sigma_y, \quad [\Omega_z, \sigma_z] = 0 \quad (78)$$

σ matrislerinin bilinen sıra değişim bağıntıları

$$\Omega_z = -\frac{1}{2}\sigma_z \quad (79)$$

ile verilen Denk.(78) 'in çözümünü belirler.

Bu yüzden dönmenin neden olduğu bileşenlerin dönüşümünden kaynaklanan ψ 'deki değişim

$$\psi + \delta_2\psi = \left(1 - \frac{i}{2}\delta\phi\sigma_z\right) \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (80)$$

ile verilir. Denk.(66) dönmesinin neden olduğu ψ daki toplam değişiklik, $\delta_1\psi$ koordinatlarının değişiminden kaynaklanan Denk.(74) değişikliğine ek olarak bu değişiklik ile birlikte verilir. Değişimlerin her ikisi de sonsuz küçük olduğundan

$$\begin{aligned} \psi + \delta\psi &= (1 + \delta_2)(1 + \delta_1)\psi \\ &= \left(1 - \frac{i}{2}\delta\phi\sigma_z\right) \left(1 - i\delta\phi L_z\right) \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = \left(1 - i\delta\phi\left(L_z + \frac{1}{2}\sigma_z\right)\right) \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (81)$$

sonucunu elde ederiz.

ψ spinör alanındaki Denk.(81) toplam değişikliği, $L + \sigma/2 = L + s$ vektörünün z bileşenleri tarafından belirlenir. Diğer eksenler etrafındaki dönmeler bu eksenler boyunca $L + s$ 'nin bileşenleri ile benzer bir şekilde verilir. $L + s$ vektörü, toplam açısal momentumdur:

$$J = L + s \quad (82)$$

L ve s 'nin bileşenleri farklı serbestlik derecelerinde etki ederler ve birbirleri ile sıra değişimlidir. Sıra değişim bağıntıları $\sigma_x/2$, $\sigma_y/2$, $\sigma_z/2$ matrislerinin sıra değişimleri ile tam olarak aynıdır. Bu yüzden J nin bileşenleri, açısal momentum bileşenlerinin standart sıra değişim bağıntılarını sağlarlar:

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_z, J_x] = iJ_y, \quad [J_y, J_z] = iJ_x \quad (83)$$

Dönmeler altında indirgenemez olan spinör dalga fonksiyonlarının bir seti artık l ile belirlenemez. Her bir l ($l > 0$) için $l+1/2$ ve $l-1/2$ eşit olan J nin mümkün iki değeri vardır. ψ_{jm} nin $2j+1$ durumları, dönmeler altında indirgenemez olarak dönüşen bir set biçiminde oluşturulmuştur. Bunların dönüşümleri sonsuz küçük dönmeler altında

$$J_z \psi_{jm} = m \psi_{jm}, \quad J_{\pm} \psi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \psi_{j, m \pm 1} \quad (84)$$

bağıntısı ile verilir.

Çok iyi bilindiği üzere Denk.(84) bağıntıları, j nin tam ya da yarı tam sayı değerlerinin herhangi birisi için Denk.(83) sıra değişim bağıntılarının doğrudan bir sonucudur. Bunlar sırasıyla $j(j+1)$ ve m ($-j \leq m \leq j$) özdeğerli J^2 ve J_z öz durumlarının her bir seti için geçerlidir. Denk.(73) bağıntısından dolayı ψ_{jm} durumlarının her bir seti J_x , J_y ve J_z işlemcileri altında indirgenemez bir biçimde dönüşür.

l ve s toplam bir J yi oluşturmak için birleştiklerinden alanın fiziksel doğası açık bir şekilde görülemez. Dönmeler altında dönüşüm özellikleri Denk.(84)'de verildiği gibi aşağıdaki türetmelerin bir çoğunu da belirler. E elektrik alanı gibi çok bileşenli alanlar benzer bir yöntemle ele alınabilir. $2s+1$ satırlı bir sütun olarak yazıldığında bunların bileşenleri $(2s+1) \times (2s+1)$ üniter matrislerin etkisi ile sonsuz küçük dönmeler altında dönüşürler. Bu matrisler, $2s+1$ boyutlu uzayda J_x , J_y ve J_z 'nin gösterimleridirler.

$$s_x = \frac{1}{2} \sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ifadelerindeki $\sigma_x/2$, $\sigma_y/2$, $\sigma_z/2$ matrisleri; $J=1/2$ için, J_x , J_y ve J_z matrisleridir. Alandaki toplam değişiklik, öz spinin ve yörünge açısız momentumun L işlemcisinin bileşenleri, bu matrisler ile verilir. Elektromagnetik özellikler ve geçişleri hesaplamak için üç boyutlu vektör alanlarını dikkate almak gerekir.

Y_{kk} küresel harmonikleri

$$Q_{\kappa}^{(2)} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} er^2 Y_{2\kappa}(\theta, \phi)$$

ifadesindeki indirgenemez tensör işlemcileri rolünü oynayabilmektedir. ψ_{jm} de 3 boyutlu dönmelerden kaynaklanan değişimler, bunların fiziksel doğasından bağımsızdır ve j ve m değerleri ile belirlenir. Bu, sonsuz küçük dönmeler içinde aynen geçerlidir. Fakat şimdiye kadar kullanılan notasyon, özellikle de Denk.(84), yalnızca dalga fonksiyonları için uygundur. Bunu şimdi açıklamamız ve işlemcilere uygulanan sonsuz küçük dönmeleri de uyarlamamız gerekmektedir.

İlk olarak uzay koordinatlarının fonksiyonları olan Y_{kk} gibi işlemcilere bir göz atalım. Sonsuz küçük dönmelerden kaynaklanan Y_{kk} 'deki değişim

$$l^{\pm} Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{lm \pm 1}, \quad l^0 Y_{lm} = m Y_{lm}$$

bağıntısında varolan Y_{kk} ya l_+ , l ve l_0 lineer diferansiyel işlemcilerin uygulanması ile verilir. Bununla birlikte, eğer Y_{kk} bir işlemci ise, bir dalga fonksiyonu ile sağdan çarpılır. Eğer sadece Y_{kk} deki değişiklik dikkate alınırsa diferansiyel işlemci bu dalga fonksiyonuna etki etmez. $(d/dx)Y\psi = (dY/dx)\psi + Y(d/dx)\psi$ olduğundan işlemcideki değişiklik $(d/dx)Y - Yd/dx$ olur; örneğin, lineer diferansiyel işlemcinin sıradeğişimi ve ele alınan işlemci gibi. Böylece bu durumda Y_{kk} deki değişim,

$$l^{\pm} Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{lm \pm 1}, \quad l^0 Y_{lm} = m Y_{lm}$$

yerine

$$[L_{\pm}, Y_{kk}] = \sqrt{k(k+1) - \kappa(\kappa \pm 1)} Y_{k, \kappa \pm 1}, \quad [L_0, Y_{kk}] = \kappa Y_{kk} \quad (85)$$

şeklinde yazılmalıdır. Bu son denklemdeki sıra değişim bağıntıları, yalnızca Y_{kk} nin sağ tarafında herhangi bir fonksiyona etki eden lineer diferansiyel işlemcileri engelleyen bir araç olarak ortaya çıkar. Bununla birlikte, sonsuz küçük dönmeden kaynaklanan tensör

işlemcilerindeki değişimi ifade etmede çok gerekli olan bu sıra değişim bağıntılarının başka durumları da vardır.

s , l ve j açısal momentumları rankı 1 olan tensör işlemcilerine veya vektör işlemcilerine bir örnektir. Dönmeler altında her bir bileşen birbirleri arasında dönüşür. Sonlu dönmelerden kaynaklanan dönüşümler $k=1$ 'li

$$T_{\kappa}^{(k)'}(x') = \sum_{\kappa'} T_{\kappa'}^{(k)}(x) D_{\kappa'\kappa}^{(k)}(R)$$

ifadesi ile verilir. Sonsuz küçük dönmeler altında bunlar $\psi_{k=1,\kappa}$ gibi bir dönüşüm olmalıdır. Bu tür dönüşüm yasası, J nin bileşenleri ve her bir v vektör bileşenleri arasındaki sıra değişim bağıntılarından elde edilir. Bu vektör, örneğin

$$g_l l + g_s s$$

ifadesinin $\mu = g_s s + g_l l$ gibi s ve l nin her bir lineer bileşeni ve kendi aralarında J nin bir bileşeni olabilir. Ayrıca r ve p vektörü veya bunların bileşenlerinden oluşturulan vektörler de olabilir. Bu yüzden sonsuz küçük dönmeler altındaki değişim, açık bir şekilde Denk.(84) ifadesinin sağ tarafı

$$\begin{aligned} [J_0, v_0] &= 0, \quad [J_0, v_{\pm 1}] = \pm v_{\pm}, \quad [J_{\pm}, v_0] = \sqrt{2} v_{\pm 1} \\ [J_+, v_{+1}] &= [J_-, v_{-1}] = 0, \quad [J_+, v_{-1}] = [J_-, v_{+1}] = \sqrt{2} v_0 \end{aligned} \quad (86)$$

ile verilir. Denk.(83) sıra değişim bağıntıları J_+ , J_- ve J_0 larca

$$[J_+, J_-] = 2J_0, \quad [J_0, J_+] = J_+, \quad [J_0, J_-] = -J_- \quad (87)$$

olarak ifade edilebilir. Denk.(87) ile Denk.(86) ifadesi karşılaştırıldığında

$$J_{+1} = -\frac{J_+}{\sqrt{2}} = -\frac{J_x + iJ_y}{\sqrt{2}}, \quad J_{-1} = -\frac{J_-}{\sqrt{2}} = -\frac{J_x - iJ_y}{\sqrt{2}}, \quad J_0 = J_z$$

ile verilen J nin küresel bileşenlerini elde ederiz.

Genel olarak, T_{kk} ψ_{jm} 'ye uygulanan bir O dönmesi dikkate alındığında

$$OT_{kk}\psi_{jm} = OT_{kk}O^{-1}O\psi_{jm}$$

sonucunu elde ederiz. Dönme işlemcisi bu nedenle $OT_{kk}O^{-1}$ olur ve $O=1+i\varepsilon(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})$ ifadesini yerine yazdığımızda

$$OT_{kk}O^{-1} = T_{kk} + i\varepsilon[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}), T_{kk}] + \dots \quad (88)$$

sonucuna ulaşırız. Bundan dolayı

$$[J_0, T_{kk}] = \kappa T_{kk}, \quad [J_{\pm}, T_{kk}] = \sqrt{k(k+1) - \kappa(\kappa \pm 1)} T_{k, \kappa \pm 1} \quad (89)$$

ile Denk.(84)'ün benzeri olarak sonsuz küçük dönmelerden kaynaklanan T_{kk} tensör işlemcisindeki değişimi ifade edebiliriz. $2k+1$ bileşenleri fonksiyonlarının veya işlemcilerinin her bir setinin davranışı Denk.(89) ifadesine göre k mertebedeki indirgenemez bir tensör işlemcisinin tanımı için kullanılabilir.

Denk.(84)'den çıkarılan sonucun

$$J^2\psi_{jm} = j(j+1)\psi_{jm}$$

olarak iyi bilinen bağıntıya işaret ettiğini söylememiz faydalı olabilir. Bu ifade

$$l^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

sonucunun özel bir durumudur. İndirgenemez tensör işlemcilere karşılık gelen bir bağıntı yoktur.

$$J^2 = \frac{1}{2} J_+ J_- + \frac{1}{2} J_- J_+ + (J_0)^2 = J_+ J_- + (J_0)^2 - J_0$$

ifadesinden dolayı Denk.(89) bağıntısından

$$\begin{aligned} [J^2, T_\kappa^{(k)}] = & \sqrt{k(k+1) - \kappa(\kappa-1)} J_+ T_{\kappa-1}^{(k)} + \sqrt{k(k+1) - \kappa(\kappa-1)} T_{\kappa+1}^{(k)} J_- + \\ & + \kappa J_0 T_\kappa^{(k)} + \kappa T_\kappa^{(k)} J_0 - \kappa T_\kappa^{(k)} \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Bu farklı davranışların nedeni, J^2 nin sonsuz küçük bir dönüşüm olmadığıdır. Yörünge açısal momentumu durumunda L^2 , bir lineer diferansiyel işlemci değildir ve bu yüzden $L^2 Y_{\kappa\kappa} \Psi_m$, $(L^2 Y_{\kappa\kappa}) \Psi_m + Y_{\kappa\kappa} L^2 \Psi_m$ 'ye eşit değildir.

Tüm üç boyutlu dönmeler sürekli dönüşümlerin bir grubu veya $O(3)$ ile gösterilen bir *Lie* grubudur. Bu grubun sonsuz küçük elemanları *Lie* cebirini oluşturur ve bunların bağımsız ve tam bir setleri *üreticiler* olarak adlandırılır. Bir cebirinin olağan işlemleri bir sayı eklenmesi ve çarpılmasıdır. *Lie* cebirindeki ek bir şart, her bir iki elemanın sıra değişiminin bu elemanların lineer bir bileşimine eşit olmak zorunda olduğunu vurgular. Lineer bir bileşim olarak elde edilebilen her bir elemanın bulunduğu cebirinin baz elemanlarındaki bu şartı vurgulamak yeterlidir. $O(3)$ *Lie* cebiri için sıra değişim koşulu J_x , J_y ve J_z temel üreticilerinin uyduğu Denk.(83) bağıntısıdır. Yukarıda gördüğümüz gibi \mathbf{n} eksenini boyunca herhangi bir sonsuz küçük dönme, Denk.(69)'a göre bu J_x , J_y ve J_z 'lerin lineer bir birleşimi olarak

$$-i\delta\phi(n_x J_x + n_y J_y + n_z J_z) \quad (90)$$

ifade edilir. Aşağıda, bu işlemcilerden her bir sonlu dönmenin nasıl üretildiğini göreceğiz.

Sıra değişim şartının esası aşağıda verilen argümanlardan görülebilir. İlk mertebeye kadar sonsuz küçük dönmeler veya her bir küçük dönmelerin sıra değişimi

$$(1 + \varepsilon' A)(1 + \varepsilon'' B) = 1 + \varepsilon' A + \varepsilon'' B + \dots = (1 + \varepsilon'' B)(1 + \varepsilon' A) \quad (91)$$

olur. Denk.(91)'deki ε' ve ε'' sonsuz küçük iki dönmedir. Ters sonsuz küçük dönmeler ilk ε' nin işaretinin değiştirilmesi ile elde edilir çünkü birinci mertebe için

$$(1 + \varepsilon' A)(1 - \varepsilon' A) = 1 + \dots \quad (92)$$

sonucunu elde ederiz. Farklı eksenler etrafındaki sonlu dönmeler sıra değişimli olmamasına rağmen sıra değişim şartının nedenini anlamak için sonlu dönmelere geri dönmek zorundayız. Eğer α ve β herhangi iki sonlu dönüşüm ise $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ 'i oluştururuz ve bunu sonsuz küçük dönüşüme karşılık gelen $\gamma=1+ \epsilon C$ şeklinde düşünürüz. Şayet γ ifadesinde Denk.(91) ve (92) bağıntılarındaki ifadelerinden α için α^{-1} 'i, β için β^{-1} 'i alırsak, ϵ' ve ϵ'' deki birinci mertebeye terimlerin yok olduğunu görürüz. α ve β sıra değişimli olmadığı için, γ özdeş dönüşüme eşit değildir. Bu nedenle daha yüksek mertebelere gitmek zorundayız ve böylece ϵ , ϵ' ve ϵ'' den daha yüksek mertebeli olacaktır.

$\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ den $\alpha\beta = \gamma\beta\alpha$ olduğu sonucu çıkarılır. Şimdi α , β ve γ için birinci mertebeye tanımları kullandığımızda

$$(1 + \epsilon' A)(1 + \epsilon'' B) = (1 + \epsilon C)(1 + \epsilon'' B)(1 + \epsilon' A) \quad (93)$$

sonucunu elde ederiz. Ayrıca burada Denk.(93)'ün her iki yanındaki $\epsilon' A + \epsilon'' B$ birinci mertebeye terimleri birbirini götürür ve ϵ veya $\epsilon' \epsilon''$ mertebesine kadar

$$\epsilon C = \epsilon' \epsilon'' (AB - BA) = \epsilon' \epsilon'' [A, B] \quad (94)$$

bağıntısını elde ederiz. Böylece γ 'nin sonsuz küçük C elemanı $[A, B]$ sıra değişimi ile verilir. Bu, Lie cebirinin bir elemanı olduğu için üreticilerin lineer bir birleşimi olarak da ifade edilebilir. Bundan dolayı sıra değişim şartı, bir Lie grubunun sonsuz küçük elemanları için gerekli olan bir şarttır.

Diğer bu tür dönüşümlerin olduğu sonsuz küçük elemanlardan üretilmiş her bir sonlu dönüşümün çarpımını garanti etmenin yeterli olduğu sıra değişim şartını ispatlamak oldukça karmaşıktır. Her bir sonsuz elemandan sonlu bir dönüşümünü üretmek mümkündür. Sonsuz küçük bir eleman, verilen bir eksen etrafındaki dönme açısı gibi bir grubunun sürekli bazı parametreleri ile ilgilidir. 0 'dan θ 'ya kadar değişen böylesi bir parametrenin bulunduğu bir dönüşüm, birçok sonsuz küçük dönmelerin başarılı uygulamalarından oluşturulabilir. Bunların tümü aynı üreticiyi gerektirir ve bundan dolayı da sıra değişimlidirler. θ 'yı N 'ye böler ve $(1 + (\theta/N) A)$ biçiminin N dönüşümleri ile birleştirirsek sonlu dönüşüm için

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta}{N} A \right)^N = e^{\theta A} = 1 + \theta A + \frac{\theta^2}{2} A^2 + \dots \quad (95)$$

sonucuna ulaşırız. θA üreticisinin üstel fonksiyonu iyi bilinen bir seri açılımı ile tanımlanır. Burada düşünülmekte olan dönüşümler $\alpha^+ = \alpha^-$ şeklindeki üniter dönüşümlerdir. Denk.(92) ifadesinden bu sonuç çıkarılır ve durumda $A^+ = -A$ olur. Bu yüzden A , i ile çarpılmış hermityen bir işlemciye eşittir. A 'nın λ_i özdeğerleri farklıdır ve karşılık gelen matrisleri köşegen olabilir. Bundan dolayı $e^{\theta A}$ matrisi bu durumda köşegendir ve bu $e^{\theta A}$ nın özdeğerleri açık bir şekilde $e^{\theta \lambda_i}$ 'dir.

Birim vektör yönünde olan bir eksen etrafındaki sonlu bir θ açılı dönme Denk.(95)'e göre

$$e^{-i\theta(n \cdot J)} \quad (96)$$

ile verilir. Her bir dönme bu yüzden,

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

ifadesindeki a_{ik} matrisinin $+1$ özdeğerine sahip özvektörünün bulunduğu dönmenin sabit eksenini ve bu sabit eksen etrafındaki θ açılı dönme ile tanımlanabilir. Böylece her bir sonlu dönme, J_x , J_y ve J_z üreticilerinden elde edilebilir.

Denk.(96) nın bir örneği için,

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

ile verilen 3 boyutlu dönmeleri dikkate alalım. Bu durumda z eksenini etrafındaki sonsuz bir küçük dönme Denk.(66) bağıntısı ile verilir. Bu bağıntıda $\delta\phi$ 'nin işareti değiştiği zaman Denk.(68)'den dolayı x , y ve z tarafından tanımlanan tabanda bu $J_z = L_z$ nin matrisinin

$$I_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşit olması gerektiği sonucu çıkarılır. I_z 'nin bu matrisinin karesi

$$I_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_z^{2n}$$

şeklindedir. Bundan dolayı Denk.(96) ifadesinin bu durumda

$$\begin{aligned} e^{-i\theta I_z} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-i)^v \theta^v}{v!} I_z^v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} I_z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} I_z^{2n+1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (97)$$

biçiminde olduğu varsayılır. Bu son ifade z eksenini etrafında θ açısı ile bir alanın dönmesini gösterir. Bu Denk.(65) ile tanımlandığı gibi $\phi = -\theta$ açısı ile referans sisteminin dönmesine eşittir.

A ve B sıra değişimli değilse $\exp(\theta'A)$ ve $\exp(\theta''B)$ sonlu dönüşümlerinin çarpımları, $\exp(\theta'A + \theta''B)$ 'ye eşit değildir (Bu yalnızca θ' ve θ'' sonsuz küçük dönmeleri için sağlanır). Çarpım bununla birlikte $\exp(\theta C)$ olarak bu ifadenin sonsuz küçük elemanlarınca ifade edilebilen sonlu bir dönüşümdür. Çarpım Hausdorff teoreminden dolayı

$$e^{\theta'A} \times e^{\theta''B} = e^{\theta'A + \theta''B + K} \quad (98)$$

olarak ifade edilebilir [1,3]. Burada K işlemcisi, $\theta|0\rangle [A,B]$ ve onun A, B vb. li sıra değişimlerini içeren bir çoklu sıra değişim serisine eşittir. Bu yüzden herhangi iki sonsuz küçük elemanın sıradışı değişimi bu elemanların lineer bir bileşimi ise bu durumda sonlu dönüşümlerin tümü, bir Lie grubundan üretilen sonsuz küçük dönüşümlerden üretilir. Özellikle her bir ikili sonlu dönüşümler sonsuz küçük bir elemandan üretilebilir. Sıra değişim şartı, ayrıca tümlenebilme şartı olarak da adlandırılır.

Denk.(96) ile ifade edildiği üzere her bir sonlu dönme bir n eksenini ve bu n eksenini etrafındaki θ dönme açısı ile belirlenebilir. Böylece sonlu bir dönme uzayda bir yön ve θ büyüklüğü ile gösterilebilir. Yukarıda söz edildiği gibi vektörler, bu yöntemle gösterilebilir olmasına rağmen sonlu dönmeler vektörler gibi birleşmez. Yalnızca sonsuz küçük dönmeler vektörler gibi

$$(1+i\varepsilon(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}))(1+i\varepsilon'(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{J}))=1+i(\varepsilon\mathbf{n}+\varepsilon'\mathbf{n}')\cdot\mathbf{J}+\dots$$

ifadesine göre birleştirilir. Sonlu dönmeler var olan K işlemcisinin görünür olarak bulunduğu Denk.(98) ifadesine göre birleştirilir. Buna basit bir örnek bu noktada verilebilir. z eksenini etrafındaki π 'lik bir dönme $\theta = \pi$ için Denk.(97) ile verilir. Bu dönme, y eksenini etrafında π açılı bir dönme olarak anlaşılır ise birleşik dönme aşağıdaki matrislerin çarpımları ile verilir:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Meydana gelen dönme, böylece x eksenini etrafında π açılı bir dönmedir. Bu dönmeler vektör benzeri bileşirlerse, dönmelerin bileşimleri yz düzleminde bir eksen etrafında $\sqrt{2}\pi$ açısı ile verilen bir dönmedir.

ψ_{jm} indirgenemez tensörel bir sette sonlu bir R dönmesinden kaynaklanan dönüşümü meydana getiren matrisler *Wigner*'in $D_{mm}^{(j)}(R)$ matrisleridir [6]. Bu matrisler, ψ_{jm} 'nin $2j+1$ taban durumları uzayında üç boyutlu dönmelerin $O(3)$ grubunun indirgenemez bir gösterimini meydana getirir.

Verilmiş bir Lie cebirini (basit bir orta grubu) sonsuz küçük elemanların bağımsız ve tam bir setinin ve bu sonsuz küçük elemanların tümü ile sıra değişimli olduğu cebirsel fonksiyon biçiminin bulunduğu üreticilerden oluşturmak mümkündür. Böylesi üreticilerin bir fonksiyonu, grubun *Casimir* işlemcisi olarak adlandırılır. Casimir işlemcisi yapısına göre bir Casimir işlemci, farklı indirgenemez gösterimlerin durumları arasında sıfır olan matris elemanlarına sahiptir. *Schur*'un lemma'sına göre, grubunun indirgenemez bir gösterimin taban durumlarından oluşturulan Casimir işlemcisinin alt matrisi köşegendir ve bu alt matrisin köşegen elemanlarının tümü birbirine eşittir. Bu yüzden, indirgenemez gösterimler, Casimir işlemcilerin özdeğerleri ile karakterize edilebilir. Üç boyutlu dönmelerin $O(3)$ grubu durumunda karesel Casimir işlemcisi

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

ile verilir ki bu da basit bir şekilde açısal momentum vektörünün karesidir. ψ_m taban durumlarına sahip indirgenemez bir gösterim içindeki karesel Casimir işlemcisinin öz değerinin tümü $j(j+1)$ 'e eşittir.

Denk.(84) ifadesi, sonsuz küçük dönmeler altında çeşitli tensör alanlarının dönüşümünü tam olarak belirtir. Şimdi Denk.(96) ile verilen bazı sonlu dönmeler altında bu alanların dönüşümünü dikkate alalım. 2π 'ye eşit olan bir açı ile keyfi bir eksen etrafındaki dönmeleri düşünelim. İlk olarak, bir k tamsayısı olan j ranklı indirgenemez tensörlere bakalım. ψ_{kk} setleri, k dizimli küresel harmonikler gibi veya $r^2 Y_{kk}(\theta, \phi)$ polinomları gibi biçim değiştirir. Bu, alanın fiziksel doğasına bakmaksızın doğrudur. k yörünge momentumlu fiziksel bir skaler alan ya da k özspin integralli fiziksel bir alan olabilir. Ayrıca ψ_{kk} , toplam bir k spinini elde etmek için s ile çiftlenen l yörünge açısal momentumlu durumlarda $2s+1$ bileşenli s öz tamsayı spinli bir alanı gösterir. x , y ve z koordinatına sahip herhangi bir nokta 2π 'lik bir dönmeden sonra bunların asıl değeri olan x , y ve z ye geri döner. Bu yüzden $r^2 Y_{kk}(\theta, \phi)$ polinomları bu tür bir dönme altında değişmez kalır. Elbette, fiziksel çözüm 2π dönmesiyle değişmeli fakat ψ_{kk} bileşenlerin fazı değişmemelidir.

Referans çatisının z yönünde olması için Denk.(96) daki n nin yönünü seçebiliriz. $\theta=2\pi$ olarak alındığında, ψ_{kk} nın lineer bir birleşimi olan her bir fonksiyondaki değişiklik için

$$e^{2\pi i J_z} \left(\sum c_k \psi_{kk} \right) = \sum c_k e^{2\pi i k} \psi_{kk} = \sum c_k \psi_{kk} \quad (99)$$

sonucunu elde ederiz. Gerçekte, x, y ve z nin tek değerli bir fonksiyonu olan $r^2 Y_{lm}(\theta, \phi)$ şartından anlaşılan $Y_{lm}(\theta, \phi)$ ifadesindeki m'nin bir tam sayı olması gerektiğini biliyoruz. Bu şarttan $e^{2\pi i m} = +1$ olması gerektiği sonucu çıkarılır.

Durum, yarı tam sayı olan j'nin bulunduğu spinör alanları için farklıdır. Pasif yorumlamada $s=1/2$ alanını dikkate almak yeterlidir. z eksenini etrafında θ açılık bir dönmenin etkisi

$$e^{-i\theta(1/2)\sigma_z} \psi = \exp \left[i\theta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \phi_1 \\ e^{i\theta/2} \phi_2 \end{pmatrix} \quad (100)$$

ile verilir. Denk.(100) ifadesinden $\theta=2\pi$ lik bir dönme altında referans sistemi, uzayda asıl konumuna geri dönmesine rağmen spinör dalga fonksiyonunun $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$ ile çarpıldığı anlaşılır. Fiziksel durum değişmez, fakat spinör alan -1 ile çarpılır. $J_z=L_z+s_z$ olduğu için 2π 'lik dönmeler altında bu davranış, l yörünge açısal momentumunun herhangi bir değerine sahip spinör dalga fonksiyonları için korunur. Üç boyutlu dönmelerin indirgenemez grup gösterimleri j'nin yarı tamsayı $D^{(j)}_{mm'}(R)$ dönmelerinin $O(3)$ gösteriminin çift değerli bir biçimidir. Örneğin, 2π 'lik bir dönme özdeş dönme ile tam olarak aynıdır ve buna rağmen iki $D^{(j)}$ matrisleri 2π 'lik dönmeye karşılık gelir. Bu matrisler; birinde $+1$ değerinde -1 olan eşit köşegen elemanlı köşegen matrislerdir.

İki bileşenli spinörler, diğer Lie gruplarının tek değerli indirgenemez gösteriminin bir tabanıdır. Bu iki boyutlu bir uzayda üniter dönüşümlerin grubu $U(2)$ 'dir. Üniter 2×2 matrisleri, $U(2)$ grubunun en basit indirgenemez biçimi ve grubun basit bir gerçekleştirilmesidir. Üniter U matrisi, $U^+U=UU^+=1$ bağıntısı ile tanımlanır. Bu matris elemanları da belirli kuralları vurgular. Grubun $U=1+i\varepsilon A$ şeklinde verilen sonsuz küçük elemanlarını düşünelim. Yukarıda bahsedildiği gibi aşağıdaki bağıntı sonsuz küçük ε için

$$UU^+ = (1+i\varepsilon A)(1-i\varepsilon A^+) = 1+i\varepsilon (A-A^+) + \dots = 1 \quad (101)$$

olur ve $A^+=A$ 'yı işaret eder. Örneğin A matrisi hermityendir. Denk.(101)'deki eşitlik, ε deki ilk dizin için korunur. Ayrıca sonlu dönüşümlerin hermityen bir A ile üretilmesi sayesinde

$$\exp(i\varepsilon A) \exp(i\varepsilon A)^+ = \exp(i\varepsilon A) \exp(-i\varepsilon A) = 1$$

bağıntısı sağlanır.

Genel hermityen matris

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\delta \\ i\delta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\alpha+\gamma}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha-\gamma}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (102)$$

olarak ifade edilir. Bu yüzden $U(2)$ üreticilerinin bağımsız ve tam bir tabanı $1, \sigma_x, \sigma_y$ ve σ_z olarak seçilebilir. İki bileşenli spinör uzayında üç boyutlu dönmelerin $O(3)$ grubunun standart üreticileri $\sigma_x/2, \sigma_y/2, \sigma_z/2$ dir. Bu matrisler aynı zamanda $U(2)$ alt grubunun üreticileridir. Bu $\det U=1$ ek şartına uyan tüm 2×2 matrisleri $SU(2)$ grubudur. Bu tür matrisler, $\det U_1 U_2 = \det U_1 \det U_2$ olduğundan bir grup biçimidir. Bu, üniter bir matris yalnızca $|\det U|=1$ şartına uymak zorunda olduğu için anlamlı bir alt gruptur.

Bir alt grubun Lie cebiri, grubun Lie cebirinin de bir alt cebiridir. $SU(2)$ 'nin üyesi olan Denk.(102) ifadesindeki sonsuz küçük elemanlar ile üretilmiş sonlu dönüşümleri kontrol etmeliyiz. Bunun için köşegen olan A 'nın uygulanması ile doğrulanabilir olan (ya da aşağıdaki gibi sadece sıfır olanların bulunduğu bir biçim veya yukarıda yapıldığı gibi köşegen olan bir biçimde)

$$\det e^A = e^{\text{tr}A} \quad (103)$$

ifadesini gözlemlemeliyiz. σ_x, σ_y ve σ_z izleri sıfır olur ve bundan dolayı yalnızca birim matris, $\det U \neq 1$ 'li matrisleri üretir. Yani σ_x, σ_y ve $\sigma_z, SU(2)$ 'nin üreticileridir. Denk.(83) standart sıra değişim bağıntılarına uyan üreticileri elde etmek için $SU(2)$ 'nin standart üreticileri olarak,

$$s_x = \frac{1}{2}\sigma_x, \quad s_y = \frac{1}{2}\sigma_y, \quad s_z = \frac{1}{2}\sigma_z$$

matrislerini seçeriz. Bu sonsuz küçük elemanlar tarafından üretilen SU(2)'nin indirgenemez gösterimleri tek değerlidir. $(1+i\varepsilon\sigma_z/2)$ sonsuz küçük elemanı, Denk.(100) ile biçimsel olarak özdeş olan bir $e^{(i\varepsilon/2)\sigma_z}$ sonlu dönmesi üretir. Farklılık ise buradaki ε nun Denk.(65) ifadesi ile tanımlanan bir dönme açısı olmadığı ve keyfi bir parametre olduğudur. Bundan dolayı $\varepsilon=2\pi$ alındığında özdeş dönüşümlere eşit olabilen bir dönüşüm vermez.

Dikkate alınan sonsuz küçük dönüşümlere göre, SU(2)'nin $\sigma_x/2$, $\sigma_y/2$ ve $\sigma_z/2$ üreticileri Denk.(83) ile verilen aynı sıra değişim bağıntılarını sağlamalıdır.

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_z, J_x] = iJ_y, \quad [J_y, J_z] = iJ_x \quad (104)$$

ifadelerini sağlayan bileşenlere sahip olan $J=L+\sigma/2$ sonucunu elde etmek için Denk.(83) ifadesindeki bağıntılar ile özdeş olan bu üreticileri L yörünge açısal momentum bileşenlerine eklemeliyiz. Böylece, Denk.(104) ile verilen SU(2)'nin Lie cebiri, O(3)'ün Lie cebiri ile tam olarak aynıdır. j'nin yarı tamsayıları için ψ_{jm} durumları, bir SU(2) indirgenemez gösteriminin taban biçimidir. SU(2) ve O(3) arasındaki farklılık bundan sonra dikkate alınmayacak olan sonlu dönmelerdir. Aşağıda j'nin tamsayı değerleri için O(3) grup üreticileri olarak J_x, J_y, J_z lerden söz edeceğiz ve aynı zamanda bunlardan SU(2) veya O(3) grup üreticileri olarak da bahsedeceğiz. Nükleer fizikte açısal momentumun oynadığı rolün önemli olmasından dolayı bu grupların Lie cebiri dikkatimizi çeken bir durumdur. Bundan yararlanmak için gerekli olan bilgiler yalnızca Denk.(104) sıra değişim bağıntısında içerilir.

Bununla birlikte, şimdi sonlu bir dönmeyi dikkate alalım. y eksenini etrafında π 'lik bir dönme, x'i -x'e, z'yi -z'ye dönüştürürken y değişmez kalır. İlk olarak j tamsayı spinli ψ_{jm} bileşenlerindeki bu dönmenin etkisine bakalım. Bu etkiler bu tür dönmelerde küresel harmonikler ile verilirler. Üçüncü bölümde Y_{lm} 'ler, x, y, z ya da $-(x+iy) = r \sin\theta e^{i\phi}$, $x-iy = r \sin\theta e^{-i\phi}$ ve $z = r \cos\theta$ 'da homojen olan polinomlarca tanımlandı. Bu yüzden daha ayrıntılı açıklama için $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ ifadesi

$$[-(x+iy)]^{m_1} (x-iy)^{m_2} z^{l-m_1-m_2}$$

terimlerinin lineer bir bileşimidir ve burada $m = m_1 - m_2$ olarak alınmıştır. Göz önünde bulundurulmuş dönme altında buradaki terimlerin her biri

$$(x - iy)^{m_1} [-(x + iy)]^{m_2} z^{l-m_1-m_2} (-1)^{l-m_1-m_2}$$

biçimine

$$(-1)^{l-m_1-m_2} = (-1)^{l-m+2m_2} = (-1)^{l-m} \quad (105)$$

ile çarpılmış $r^l Y_{l,m}(\theta, \phi)$ küresel harmoniğin lineer birleşimindeki bir terim olarak dönüşür.

Şimdi 1/2 spinli parçacık durumlarında bu dönmenin etkisini irdeleyelim.

Denk.(96) ifadesine göre bu dönme neden olan işlemci

$$e^{-in_s y} = e^{-in(1/2)\sigma_y} = \exp \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Üstel fonksiyondaki matrisin karesi alınırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-1 ile çarpılmış olan birim matrise eşit olan sonuç elde edilir. Bu nedenle üstel açılımda

$$\exp \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \frac{\pi}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

ifadesini elde ederiz. Denk.(106) bağıntısının sağ tarafındaki matrise

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_s = +\frac{1}{2} \quad (\text{spin yukarı})$$

$$\chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad m_s = -\frac{1}{2} \quad (\text{spin aşağı})$$

ile verilen sütunlar uygulandığında

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (107)$$

sonuçlarına ulaşırız.

Sonuç olarak

$$\Psi_{nj=l+1/2,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nlm-1/2} \\ \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nlm+1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nlm-1/2} \chi_{1/2} + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nlm+1/2} \chi_{-1/2}$$

ile tanımlanmış $\Psi_{nj=l+1/2,m}$ de dikkate alınan dönmenin etkisini inceleyelim. l ve s nin bileşenleri sıra değişimlidir ve bu yüzden Denk.(105) ve Denk.(107) ifadelerini dikkate aldığımızda

$$\begin{aligned} e^{-i\pi J_y} \phi_{nlm-1/2} \chi_{1/2} &= e^{-i\pi l_y} \phi_{nlm-1/2} e^{-i\pi s_y} \chi_{1/2} \\ &= (-1)^{l-(m-1/2)} \phi_{nl, -(m-1/2)} \chi_{-1/2} \\ &= (-1)^{j-m} \phi_{nl, -(m-1/2)} \chi_{-1/2} \\ e^{-i\pi J_y} \phi_{nlm+1/2} \chi_{-1/2} &= e^{-i\pi l_y} \phi_{nlm+1/2} e^{-i\pi s_y} \chi_{-1/2} \\ &= (-1)^{l-(m+1/2)} \phi_{nl, -(m+1/2)} (-\chi_{1/2}) \\ &= (-1)^{j-m} \phi_{nl, -(m+1/2)} \chi_{1/2} \end{aligned}$$

bağıntılarını elde ederiz. Bundan dolayı da

$$\Psi_{nj=l+1/2,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nlm-1/2} \\ \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nlm+1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nlm-1/2} \chi_{1/2} + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nlm+1/2} \chi_{-1/2}$$

durumu

$$(-1)^{j-m} \left[\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nl,-m-1/2} \chi_{1/2} + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nl,-m+1/2} \chi_{1/2} \right] = (-1)^{j-m} \Psi_{nj=l+1/2,-m} \quad (108)$$

halinde dönüşüme uğrar.

Yukarıda vurgulandığı gibi j ranklı herhangi bir indirgenemez tensörün m bileşenlerinin dönmeler altındaki dönüşüm özellikleri sadece j ve m 'ye bağlıdır. y ekseninde π 'lik bir dönme altında ψ_{jm} fonksiyonunun dönüşümü, j 'nin tamsayı değerleri (Denk.(105)'deki gibi) veya yarı tamsayı değerlerinden (Denk.(108)'deki gibi) herhangi birisi için

$$R_y(\pi) \psi_{jm} = (-1)^{j-m} \psi_{j,-m} \quad (109)$$

bağıntısı ile verilir. Bu yüzden bu son bağıntı j , bir tensör işlemcisinin rankı veya l ve $s=1/2$ çiftlenimi ile elde edilen bir spin değeri ya da daha başka yöntemler ile elde edilen bir değer olsun ya da olmasın bu j 'nin herhangi bir değeri için korunur. Spin, tek parçacığın veya parçacıklar grubunun spini olabilir. Bu da, Denk.(68) ve Denk.(107) ifadelerinin

kullanılması ile özellikle $j = l - \frac{1}{2}$ 'li olan

$$\Psi_{nlj=l-1/2,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nlm-1/2} \\ -\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nlm+1/2} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nlm-1/2} \chi_{1/2} - \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nlm+1/2} \chi_{-1/2}$$

durumu için Denk.(109) bağıntısının sağlandığı ile direkt olarak doğrulanabilir.

1.2. Açısıl Momentum Çiftlenimi

1.2.1. 3j Sembolü

Bir önceki kısımda s spin açısıl momentumu ve l yörünge açısıl momentumunun $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ olmak üzere J^2 öz durumları şekillerinde nasıl birleştiklerini inceledik.

$$\psi_{nl, j=l+1/2, m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} + m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \\ \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} - m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} + m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \chi_{1/2} + \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} - m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \chi_{-1/2} \quad (110)$$

$$\psi_{nl, j=l-1/2, m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} - m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \\ -\sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} + m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} - m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \chi_{1/2} - \sqrt{\frac{l + \frac{1}{2} + m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \chi_{-1/2} \quad (111)$$

ifadelerindeki katsayılar dönüşüm katsayılarının genel bir sınıflandırılmasının özel durumlarıdır. Bu ifadelerin sağ tarafındaki durumlar s^2, s_z, L^2, L_z nin öz durumlarıdır. Bu ifadelerin sol tarafındakiler ise s^2, L^2, J^2, J_z nin öz durumlarıdır. Genel olarak iki farklı sistemin herhangi iki seti olarak $\psi_{j_1 m_1}, \psi_{j_2 m_2}$ ifadelerini alabiliriz. j_1 ve j_2 , iki parçacığın toplam spinleri veya yörünge açısıl momentumları ya da kendine özgü iki spin veya kendine özgü bir spin ile bir yörünge açısıl momentum olabilir. Birinci ve ikinci durumlarda j_1 indirgenemez tensör işlemcisinin rankı ve j_2 ise bir dalga fonksiyonunun açısıl momentumu veya her ikisi birden iki indirgenemez tensör işlemcinin rankları olabilir.

$$J_z \psi_{jm} = m \psi_{jm} \quad (112)$$

$$\psi_{\pm} \psi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \psi_{jm \pm 1} \quad (113)$$

Denk.(112) ve (113)'de sonsuz küçük dönmeler altında $\psi_{i_1 m_1}, \psi_{i_2 m_2}$ setlerinin dönüşümleri için belirli notasyonlar kullanılır. Bu durum diğer tensör setleri için aşağıdaki sonuçlarının uygulanabilmesini engellemez. Aşağıdaki matematiksel türetmeler genel geçerliliğe sahiptir ve $\psi_{i_1 m_1}, \psi_{i_2 m_2}$ 'nin fiziksel doğasından bağımsızdır. Bu matematiksel türetmeler yalnızca dönmeler altında iki setin dönüşüm özelliklerinden kaynaklanmaktadır.

Birleştirilmiş sistemin tam set durumları $\psi_{i_1 m_1} \psi_{i_2 m_2}$ çarpımlarının tümünün alınması ile oluşturulabilir. Bu durumlar üç boyutlu dönmeler altında lineer olarak biçim değiştirirler fakat dönüşümler $j_1 = 0$ ya da $j_2 = 0$ olmadıkça indirgenebilir. İndirgenemez olarak biçim değiştiren setlerdeki çarpım fonksiyonları setlerini ayrıştırmak için $\mathbf{j}^2 = (\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2)^2$ öz durumlarına sahip olan durumları oluşturmalıyız. Bu, j_{1z} ve j_{2z} 'nin köşegen üzerinde olduğu düzen ile \mathbf{j}^2 ve j_z 'nin köşegen üzerinde olduğu düzen arasındaki bir dönüşümdür. Her iki düzende de sırasıyla $j_1(j_1 + 1)$ ve $j_2(j_2 + 1)$ özdeğerlerine sahip \mathbf{j}_1^2 ve \mathbf{j}_2^2 ler köşegen üzerindedir.

Bu iki düzen arasındaki dönüşüm katsayıları Clebsch-Gordan katsayıları ya da vektör çiftlenim katsayıları olarak adlandırılır. Bunlar

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1 m_2} \psi_{i_1 m_1} \psi_{i_2 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle \quad (114)$$

olarak tanımlanır ve aşağıda verilen üçgen şartını [5,7] j_1, j_2 ve j değerleri için sağlamalıdır:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

Katsayılar normalizasyonu, bağımsız sistemlere ait olan ve normalize $\psi_{i_1 m_1}$ ve $\psi_{i_2 m_2}$ lerin sağladığı ψ_{jm} 'nin normalize olması koşulundan sabittir. $\psi_{i_1 m_1}$ ve $\psi_{i_2 m_2}$ iki nükleonlu durumu genel bir durumdur ve böylece Denk.(114) birleştirilmiş sistemin rotasyonel olarak

değişmez Hamiltonyenin bir öz durumudur. (114) ifadesindeki Clebsch-Gordan katsayılarının ayrıntılı fazını aşağıda tartışacağız. Ayrıca (114) ifadesi j_1 ve j_2 li setlerin tensör çarpımı olarak adlandırılır ve $\psi_{jm} = [\psi_{j_1} \times \psi_{j_2}]_m^{(j)}$ ile gösterilir.

Katsayıların gerçek değerini belirlemek için, sonsuz küçük dönmeler altında sistemdeki değişimi tanımlayan Denk.(112) ve (113) kullanılır. Denk.(114)'de, $j_z = j_{1z} + j_{2z}$ ifadesi kullanılırsa

$$m\psi_{jm} = \sum_{m_1 m_2} (m_1 + m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \quad (115)$$

sonucu bulunur. $m = m_1 + m_2$ olmadığı müddetçe katsayılar yok olmaz. Bu durumda Clebsch-Gordan katsayıları için çeşitli notasyonların varlığından ve bu notasyonların kullanılmasındaki faydalara dikkat edilmesi gerekliliğinden söz etmek mümkündür. Bazı durumlarda $j_1 j_2$, sembolün sağ tarafında yazılmaz. Bu makul olmakla beraber bazı durumlarda katsayılar karışıklığa yol açan $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle$ şeklinde yazılır. Denk.(115)'de m kuantum sayısı $m_1 + m_2$ 'ye eşit olduğundan açık bir şekilde gösterilmesine gerek yoktur. Aslında, bazı gösterimlerde m ihmal edilir. Bununla birlikte bu hoş olmayan bir uygulamadır. İleride göreceğimiz gibi Clebsch-Gordan katsayılarının toplanması gereken bazı çarpımlar gibi önemli durumlar vardır. Açısal momentumun z izdüşümleri arasındaki eşitliklerin tümünü almak oldukça kullanışsızdır ve hatalara yol açabilir. Her bir m_1, m_2 ve m değerleri, bunların $m = m_1 + m_2$ olmadıkça sıfır olan değerlerini tanımlamak için, kullanılan Clebsch-Gordan katsayılarını tanımlamada Denk.(114)'deki gibi bir yöntem benimseriz. Bağımsız bir değişebilir olarak m 'yi tutmak aşağıda yapılan türetme işlemini oldukça basitleştirir.

Denk.(114)'deki katsayıları arasındaki diğer bağıntılar (114) ifadesinin $j^\pm = j_1^\pm + j_2^\pm$ 'yi kapsamı ile elde edilir. Denk.(112) ve (113)'e göre

$$\begin{aligned} \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \psi_{jm \pm 1} &= \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle \times \\ &\times (\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \psi_{j_1 m_1 \pm 1} \psi_{j_2 m_2} + \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2 \pm 1}) \end{aligned} \quad (116)$$

elde edilir. İşlemimize $m_1 = j_1$ ve $m_2 = j_2$ 'den başladığımızda j nin maksimum değeri olan $j = j_1 + j_2$ buluruz. Bu yalnızca $\psi_{i_1 m_1} \psi_{i_2 m_2}$ 'li durumlardır ve böylece Clebsch-Gordon katsayılarının

$$\langle i_1 i_1 i_2 i_2 | i_1 i_2, i = i_1 + i_2, m = i_1 + i_2 \rangle = +1 \quad (117)$$

olduğu görülür. (117) ifadesinin fazının +1 olarak tanımlandığına dikkat edilmelidir. Bu seçim, $j = j_1 + j_2$ durumundaki katsayıların daha düşük m değerleri için şimdi göreceğimiz gibi tüm fazlarını kendine özgü olarak belirler.

$j^\pm = i_1^\pm + i_2^\pm$ 'li durumu (117) ifadesinde kullandığımızda, $j = j_1 + j_2$ ve $m = j_1 + j_2 - 1$ sonuçlarına ulaşırız. Burada (116) ifadesini dikkate alırsak

$$\sqrt{2(i_1 + i_2)} \psi_{i_1 + i_2, i_1 + i_2 - 1} = \sqrt{2i_1} \psi_{i_1 i_1 - 1} \psi_{i_2 i_2} + \sqrt{2i_2} \psi_{i_1 i_1} \psi_{i_2 i_2 - 1} \quad (118)$$

sonucu elde edilir ve buradan Clebsch-Gordan katsayıları değerlerini

$$\langle i_1, i_1 - 1, i_2 i_2 | i_1 i_2, i = i_1 + i_2, m = i_1 + i_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{i_1}{i_1 + i_2}}$$

$$\langle i_1 i_1 i_2, i_2 - 1 | i_1, i_2, i = i_1 + i_2, m = i_1 + i_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{i_2}{i_1 + i_2}}$$

olarak elde ederiz. Bu tüm m değerleri için kendine has olarak belirlenmiş $j = j_1 + j_2$ 'li katsayılarla izin verir ve bu durum tekrarlanabilir. $j = j_1 + j_2$ ve $m = j_1 + j_2 - 1$ 'li duruma ek olarak Denk.(118) için orthogonal $\psi_{i_1 i_1 - 1} \psi_{i_2 i_2}$ ve $\psi_{i_1 i_1} \psi_{i_2 i_2 - 1}$ 'lerin lineer bir birleşimi olan $m = j_1 + j_2 - 1$ 'li başka bir durum da vardır. Bu durum

$$\pm \sqrt{\frac{i_2}{i_1 + i_2}} \psi_{i_1, i_1 - 1} \psi_{i_2 i_2} \pm \sqrt{\frac{i_1}{i_1 + i_2}} \psi_{i_1, i_1} \psi_{i_2, i_2 - 1}$$

olarak verildiğinden (116) ifadesine göre $j_+ = j_{1+} + j_{2+}$ ile yok edilir ve bundan dolayı da $j = j_1 + j_2 - 1$ değerine sahip olur. Bu durumun tüm fazı ve ayrıca diğer durumlar aşağıdaki şartla belirlenir:

$$\sum_{m_1, m_2} m_1 \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2, j-1, m \rangle \geq 0 \quad (119)$$

Doğal olarak bu keyfi bir seçimdir ve j_1 ile j_2 'nin çiftlenim fiziğinde her hangi bir asimetriklik vermez. Bununla birlikte bu tutarlı bir kabullenimdir ve Denk.(117) ile birlikte Clebsch-Gordan katsayılarının tümü için fazların kendine has olarak belirlenmesini sağlar.

Denk.(110) ve Denk.(111) fazları Denk.(119) kabullenimine göre seçilmiştir.

$j_1 = \frac{1}{2}$ ve $j_2 = l$ için bu durumdaki çiftlenim sırasını anlamak çok önemlidir ve katsayılar

da $\left\langle \frac{1}{2} m_1 l m_1 \left| \frac{1}{2} l j m \right. \right\rangle$ olur. Sıra Denk.(119)'a göre tersine çevrilirse $(-1)^{(1/2)+l-j}$ 'lik bir faz

ortaya çıkacaktır. Bu nedenle $j_1 = l - \frac{1}{2}$ 'li durumların fazları yer değiştirecektir.

Denk.(111)'deki $j_1 = l - \frac{1}{2}$ 'li durum yukarıda tanımlanan şarta göre oluşturulur. Yine de çiftlenimin diğer sıraları sıklıkla kullanılır. Hesaplamaların sonuçları karşılaştırıldıkları zaman kullanılan şartının bilinmesi gerekir.

Yukarıda tanımlanan yöntem $j = j_1 + j_2 - 2, j_1 + j_2 - 3, \dots, |j_1 - j_2|$ için Clebsch-Gordan katsayılarının kendine has tanımlanmasını da sağlar. Denk.(116) ifadesinin sol tarafındaki $\psi_{j, m-1}$ durumu Clebsch-Gordan katsayılarınca genelleştirildiği zaman

$$\begin{aligned} & \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j, m-1 \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} = \\ & = \sum_{m'_1, m'_2} \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_1 j_2 j m \rangle \left(\sqrt{j_1(j_1+1) - m'_1(m'_1-1)} \psi_{j_1 m'_1-1} \psi_{j_2 m'_2} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{j_1(j_1+1) - m'_1(m'_1-1)} \psi_{j_1 m'_1} \psi_{j_2 m'_2-1} \right) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklem $\psi_{j_1 m_1}^* \psi_{j_2 m_2}^*$ ile çarpılıp integrali alınırsa Clebsch-Gordan katsayıları arasındaki tekrarlı bağıntıları

$$\begin{aligned}
& \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j, m-1 \rangle = \\
& = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \langle j_1, m_1+1, j_2 m_2 | j_1 j_2 j, m \rangle + \\
& \quad + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \langle j_1 m_1 j_2, m_2+1 | j_1 j_2 j, m \rangle \quad (120)
\end{aligned}$$

ile verilir. Denk.(120) bağıntısı Clebsch-Gordan katsayılarının verilen tüm j_1 ve j_2 için belirlenmesinde kullanılabilir. Katsayıların tümünü içeren bu yapıdan çıkan sonuç katsayıların gerçek değerlere sahip olmasıdır. $j_1 m_1 j_2 m_2$ tarafından karakterize edilen şemada $j_1 j_2 j m$ ile karakterize edilen şema arasındaki dönüşüm ortogonallik ve tam bir bazdan başka bir ortogonallığe baza yol açar. Bu her iki haldeki bağımsız durumların sayısı şüphesiz ki

$$\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = \frac{2j+1}{2} (2(j_1-j_2) + 2(j_1+j_2) + 2) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

ifadesine eşit olur. Bu elemanlar $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle$ katsayıları olan matrisin mertebesidir. Bundan dolayı Denk.(114) dönüşümü üniter bir dönüşümdür. Denk.(114) ifadesindeki katsayılar reel olduğundan dönüşümdeki katsayılar da reel ortogonaldir. Bu nedenle Clebsch-Gordan katsayılarının ortogonallik bağıntıları

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j_1 j_2 j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (121)$$

ve ayrıca ters dönüşümler için ortogonallik şartı da

$$\sum_{j m} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j_1 j_2 j m \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \quad (2.13)$$

olur. Denk.(121) ve Denk.(122) bağıntıları yalnızca katsayıların tanımlandığı durumdaki j_1 ve j_2 değerlerinin j olarak çiftlendiği zamanki ortogonallığı kapsar. Katsayıların reel olmasından dolayı Denk.(121) ve Denk.(122)'deki kabullenme için $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle$ ve $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle$ arasındaki farklılığı ayırt etmeye gerek yoktur. Ters dönüşüm kullanıldığında ψ_{jm} şeklinde verilen $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}$ çarpım fonksiyonunu

$$\Psi_{j_1 m_1} \Psi_{j_2 m_2} = \sum_{jm} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle \Psi_{jm} \quad (123)$$

ile genelleştirebiliriz. Denk.(123) bağıntısı Denk.(114) tarafından tanımlanan Ψ_{jm} 'yi kapsar ve bu Denk.(122)'ün kullanılması ile doğrulanabilir.

J'yi oluşturmak için j_1 ve j_2 yerine j_2 ve j_1 çiftlenimini alırsak $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ 'yi sağlayan her j için bir durumu içeren hallerin aynı setini elde ederiz. Bu nedenle $|j_1 j_2 jm \rangle$ ve $|j_2 j_1 jm \rangle$ durumları arasında bir faz faktörü kadar fark vardır. Bu durumda Clebsch-Gordan katsayıları

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle \quad \text{ve} \quad \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | j_2 j_1 jm \rangle$$

ile verilen aynı mutlak değerlere sahiptir ve ancak m_1 ve m_2 'den bağımsız olan bir işaret ile farklı olabilir. Denk.(120) faz şartı

$$\langle j_2 m_2 j_1 m_1 | j_1 j_2 jm \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle \quad (124)$$

bağıntısına izin verir. j_1 ve j_2 'nin farklı değerleri için Denk.(124) faz bağıntısı iki farklı çiftlenim şeması arasındadır ve isteğimize göre bunlardan her hangi birindeki durumların tüm fazlarını seçebiliriz. Denk.(124) seçeneği Denk.(119)'dan kaynaklanır ve $j_1 = j_2$ içinde Denk.(124) faz bağıntısı ile uyumlu olacak şekilde ortaya çıkar.

$j_1 = j_2$ için Denk.(124) faz bağıntısı farklı şemalar arasında değildir. Bu ifade her hangi bir faz şartından bağımsız olan $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle$ katsayıların bağıl işaretini verir. Denk.(124) faz bağıntısı $j_1 = j_2$ için sağlanmalıdır ve Denk.(119) faz şartı ile uyumlu olduğu da kanıtlanabilir. Henüz gerekli bir faz şartı düşüncesini kullanmak gerekmediğinden $j_1 = j_2$ olan belirli bir durumu dikkate alalım:

$\Psi_{jm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 'li durum için $\Psi_{j_1 m_1}(\mathbf{r}_1)$ ve $\Psi_{j_2 m_2}(\mathbf{r}_2)$ durumların çiftlenimi, çiftlenimlerinin sırasına bakmaksızın, sadece bir durum verir. Bundan dolayı Clebsch-Gordan katsayılarındaki m_1 ve m_2 'lerin değiş tokuşu m_1 ve m_2 'den bağımsız olarak sadece işarette bir değişikliğe neden olur. Eğer Denk.(118) ifadesinde $j_1 = j_2$ alınıp yerlerine yazılırsa Denk.(124) ifadesine göre iki katsayının bağıl işaretinin +1 olduğunu görürüz. $j =$

$2j_1$ için diğer Clebsch-Gordan katsayıları Denk.(112)'deki $j^- = j_1^- + j_2^-$ simetrik işlemcileri ile başarılı bir şekilde elde edilir. Bu nedenle m_1 ve m_2 birbiriyle değiştirildiği zaman dahi Clebsch-Gordan katsayılarının tamamı aynı işarete sahip olurlar ve değişmeden kalırlar. $j^- = j_1^- + j_2^-$ nin simetrisinden dolayı m 'nin tüm değerleri için $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_1, j = 2j_1, m \rangle$ katsayıları, m_1 ve m_2 değiştirildiği zaman işaret değiştirir. Bu işaret değişikliği Denk.(124) ile uyum içindedir.

Şimdi $0 \leq j \leq 2j_1$ 'li tüm durumlara gerçekte uygulanabilir olan Denk.(124) tümevarımını göstereyim. r 'nin bir tam sayı olduğu $2j_1, 2j_1-1, \dots, 2j_1-r$ olan j değerlerinin olduğunu varsayalım. $m = 2j_1 - r - 1$ için bu durumların katsayılarını alalım ve bu katsayılarla bir matris düzenleyelim. Bu matrisin satırı j değerleri tarafından sütunları ise m_1 değerleri tarafından karakterize edilsin. Bu nedenle sütunların sayısı katsayıların sayısına eşit olan $r + 2$ 'dir. Ardından $j = m = 2j_1 - r - 1$ 'li durumun katsayılarını içeren ve diğer tüm satırları orthogonal olan başka bir satır ekleriz. Sonuç matrisinin determinanı sıfır olmaz. Matrisin satırları orthogonal ve normalize vektörler olduğundan oluşturulan bu matrisin determinanı -1 veya $+1$ 'e eşit olur. Böylece oluşturulan matristeki m_1 ve m_2 'nin tüm değerlerinin değiştirilmesi, satırların ortasından eşit uzaklıktaki tüm sütun çiftlerinin değiş tokuşuna eşittir. Bu değişimden dolayı matrisin determinanı $p = (r + 2) / 2$ olarak verilen sütun çiftlerinin sayısını içeren $(-1)^p$ ile çarpılmalıdır. Diğer taraftan tüm m_1 ve m_2 değişimleri $(-1)^{2j_1-1} = -1$ ve $j \geq 2j_1 - r$ ile sağlanacağından bütün durumların katsayılarında işaret değişikliğine neden olur. Böylesi durumların sayısı $r/2 = p-1$ 'e eşittir. Bu katsayıların işaret değiştirmesinden dolayı determinant yalnızca $(-1)^{p-1}$ ile çarpılmalıdır. Bu nedenle de $j = 2j_1 - r - 1$ 'li durumun katsayıları m_1 ve m_2 değiştirildiği zaman işaret değiştirmek zorundadır. Ayrıca bu, j 'nin bu değerleri için Denk.(124)'i sağlar. Bir sonraki adımda $m = 2j_1 - r - 1$ için oluşturulan matristen $m = 2j_1 - r - 2$ için oluşturulan başka bir matrise gidildiğinde sütun çiftlerinin p sayısında her hangi bir artış meydana gelmez (çift sayılarda $r + 3$ sütun vardır ve bundan dolayı tüm satırın ortası bir sütundur). Bu nedenle $j = 2j_1 - r - 2$ 'li durum m_1 ve m_2 'nin değiş tokuşu altında işaret değiştirmeyen katsayılarla sahiptir. Bu da j 'nin değeri için Denk.(124)'in geçerliliğini ispatlar. Böylece tümevarım, j 'nin yarı ya da tam sayı değerleri için ispatlanmış olur ve bağıntısı da

$$\langle j_1 m_1' j_1 m_1 | j_1 j_1 j m \rangle = (-1)^{2j_1-1} \langle j_1 m_1 j_1 m_1' | j_1 j_1 j m \rangle \quad (125)$$

ile verilir.

Clebsch-Gordan katsayılarının bağıl fazlarını veren Denk.(125) bağıntısı oldukça önemli sonuçlar içerir. Bu Clebsch-Gordan katsayılarının türetilmesine harcanan özel ilginin nedenidir. Aynı j yörüngesindeki iki parçacık için Denk.(125) ifadesi bu parçacıkların dalga fonksiyonlarının simetri özelliklerinin bir gereğidir. j_1 , toplam spin ve yarı tamsayı ise Denk.(125) denklemi, iki parçacığın değişken değiştirmesi altında j 'nin tek değerliliği için durumların antisimetrik ya da çift değerliliği için ise durumların simetrik olduğunu gösterir. Yalnızca yörünge kısmını dikkate alırsak aynı l yörüngesindeki iki parçacık durumunun l tek olduğunda simetrik, çift olduğunda antisimetrik olduğu ortaya çıkar. Aşağıda bu gibi durumlardan ayrıntılı bir şekilde bahsedeceğiz.

$j_1 = j_2$ durumundaki bazı özel bağıntıları Denk(122) orthogonallik bağıntısından elde etmek için Denk.(125) bağıntısını kullanabiliriz. Bu durumda Denk.(122) bağıntısı,

$$\sum_{jm} \langle j_1 m_1 j_1 m'_1 | j_1 j_1 jm \rangle \langle j_1 m_2 j_2 m'_2 | j_1 j_1 jm \rangle = \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2} \quad (126)$$

olarak yazılır. Benzer bir şekilde,

$$\sum_{jm} \langle j_1 m'_1 j_1 m_1 | j_1 j_1 jm \rangle \langle j_1 m_2 j_1 m'_2 | j_1 j_1 jm \rangle = \delta_{m'_1 m'_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (127)$$

elde edilir. Denk.(127) ifadesinin sol tarafındaki m_1 ve m_2 'nin sırası değiştirildiği zaman Denk.(125)'in dikkate alınması ile

$$\sum_{jm} (-1)^{2j_1 - j} \langle j_1 m_1 j_1 m'_1 | j_1 j_1 jm \rangle \langle j_1 m_2 j_1 m'_2 | j_1 j_1 jm \rangle = \delta_{m'_1 m_2} \delta_{m_1 m'_2} \quad (128)$$

elde edilir. Denk.(126) ve Denk.(128) ifadeleri birleştirilirse

$$\sum_{jm} (1 \pm (-1)^{2j_1 - j}) \langle j_1 m_1 j_1 m'_1 | j_1 j_1 jm \rangle \langle j_1 m_2 j_1 m'_2 | j_1 j_1 jm \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (129)$$

olarak yazılabilen iki orthogonallik bağıntısını elde ederiz. $m_2 = m_1$, $m'_2 = m'_1$ ve $m_1 \neq m'_1$ şeklinde bir değişim yapılırsa

$$\sum_{j \text{ tek}} \langle j_1 m_1 j_1 m'_1 | j_1 j_1 j m \rangle^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j \text{ çift}} \langle j_1 m_1 j_1 m'_1 | j_1 j_1 j m \rangle^2 = \frac{1}{2} \quad (130)$$

sonuçları bulunur. Böylece çift j ve tek j'li Clebsch-Gordan katsayılarının bağımsız olarak normalize oldukları görülür. Katsayıların karelerinin toplamının,

$$\langle j_1 m_1 j_1 m_1 | j_1 j_1 j m \rangle$$

olduğu Denk.(127) bağıntısından doğrudan elde edilebilir. Denk.(125) ifadesine göre bu katsayılar $(-1)^{2j_1-1} = -1$ olması halinde yok olur. Bu nedenle $(-1)^{2j_1-1} = 1$ 'i sağlayan j'ler üzerinden karelerin toplamı, Denk.(127) ifadesine göre 1'e eşittir.

Clebsch-Gordan katsayılarının herhangi bir faz şartından bağımsız olması diğer bir simetri özelliğidir [8]. Katsayılar arasındaki bağıntıyı dikkate aldığımızda,

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \quad \text{ve} \quad \langle j_1, -m_1 j_2, -m_2 | j_1 j_2 j, -m \rangle$$

olur ve bunların her ikisi de aynı çiftlenme şemasına aittir. Bu bağıntıyı elde etmek için y eksenini boyunca π açılı bir dönmeyi Denk.(114) ifadesine uygularız.

$R_y(\pi)\psi_{jm} = (-1)^{j-m}\psi_{j,-m}$ ifadesini dikkate aldığımızda

$$(-1)^{j-m}\psi_{j,-m} = \sum (-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2} \times \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \psi_{j_1, -m_1} \psi_{j_2, -m_2}$$

bağıntısına ulaşılır. Sıfır olmayan terimlerin $m = m_1 + m_2$ için

$$\psi_{j,-m} = \sum (-1)^{j_1+j_2-i} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \psi_{j_1, -m_1} \psi_{j_2, -m_2}$$

sonucu bulunur. Ayrıca bu sonucu

$$\psi_{j,m} = \sum (-1)^{j_1+j_2-i} \langle j_1, -m_1 j_2, -m_2 | j_1 j_2 j, -m \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}$$

olarak da ifade edebiliriz. Bu son ifadeyi Denk.(114) ile karşılaştırdığımızda simetri özelliklerini elde ederiz:

$$\langle j_1, -m_1, j_2, -m_2 | j_1 j_2 j, -m \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \quad (131)$$

Bir çok simetrik yöntemde j_1 , j_2 ve j 'yi dikkate almak zorunda olduğumuzdan Clebsch-Gordan katsayılarının diğer simetri özellikleri de vardır [5,9].

Toplam spini sıfır olacak şekilde çiftlenen iki açısal momentum durumunu dikkate alalım. Bu hal için Clebsch-Gordan katsayılarının değerleri Denk.(120) ifadesinden doğrudan elde edilebilir. Burada $j_1 = j_2 = j$, $j = 0$ ve $m = 0$ olarak alınır ve $m_1 + m_2 + 1 = 0$ için Denk.(120) ifadesinin sol tarafı sıfır olur ve böylece

$$\langle j_1, m_1 + 1, j_1, -m_1 - 1 | j_1 j_1 0 0 \rangle + \langle j_1, m_1, j_1, -m_1 | j_1 j_1 0 0 \rangle = 0$$

olduğu görülür. Bundan dolayı bu katsayılar aynı tam değerlere ve farklı işaretlere sahiptir. Denk.(119) faz bağıntısı ve normalizasyon şartından

$$\langle j m j m' | j j 0 0 \rangle = \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \delta_{m', -m} \quad (132)$$

sonucunu elde ederiz. \mathbf{u} ve \mathbf{v} gibi iki vektör için $j = 1$ 'li indirgenemez tensörün setleri toplam 0 spin için Denk.(114) tensör çarpımı, Denk.(132)'deki katsayıların kullanılması ile

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(-\frac{u_x + iu_y}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{v_x - iv_y}{\sqrt{2}} \right) - u_z v_z + \left(\frac{u_x - iu_y}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{v_x + iv_y}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{-1}{\sqrt{3}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

sonucuna eşit olarak elde edilir.

Herhangi iki indirgenemez tensör çiftlenim setleri Denk.(114) ile verilir. İki tensör işlemcisinin bileşimi için kullanılan bağıntı

$$\left[\mathbf{T}^{(k_1)}(1) \times \mathbf{T}^{(k_2)}(2) \right]_{\kappa_1 \kappa_2}^{(k)} = \sum_{\kappa_1 \kappa_2} \langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k_1 k_2 k \kappa \rangle T_{\kappa_1}^{(k_1)} T_{\kappa_2}^{(k_2)}(2)$$

ile verilir [6,8]. Denk.(132) katsayıları ile birlikteki tensör çarpımı iki vektörün alışılmış skaler çarpımı ile orantılıdır. Bu durumla uyum içinde olarak k ranklı integral ile herhangi iki tensörel setin skaler bir çarpımını

$$\left(\mathbf{T}_1^{(k)} \cdot \mathbf{T}_2^{(k)}\right) = \sum (-1)^m T_{i,-m}^{(k)} T_{2,-m}^{(k)} = (-1)^k \sqrt{2k+1} \left[\mathbf{T}_1^{(k)} \times \mathbf{T}_2^{(k)}\right]_0^{(0)} \quad (133)$$

olarak tanımlarız. Üç açılal momentumun bir çok simetrik çiftlenimi; \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 ve toplam spin 0 olan \mathbf{j} 'nin çiftlenimi ile başarılabilir. İlk önce \mathbf{j}_1 ve \mathbf{j}_2 'nin sonra \mathbf{j}_3 'ün çiftlenimi (notasyondaki değişiklik istenilen simetriye uygundur)

$$\sum_{m_1 m_2 m_3 m'_3} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3 m'_3 \rangle \langle j_3 m'_3 j_3 m_3 | j_3 j_3 00 \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \psi_{j_3 m_3} \quad (134)$$

tarafından verilen $J = 0$ durumunu elde ederiz. $J = 0$ 'ı çiftlenimler için Clebsch-Gordan katsayıları Denk.(132) ifadesi ile verilir. Denk.(134) ifadesi $J = 0$, $M = 0$ durumunda katsayıların bu değeri ile

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} (-1)^{j_3+m_3} \frac{\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3, -m_3 \rangle}{\sqrt{2j_3+1}} \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \psi_{j_3 m_3} \quad (135)$$

şeklinde verilir. Sıfır için \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 ve \mathbf{j}_3 'ün çiftlenimi ile elde edilen yalnızca bir tane $J = 0$ durumu vardır. Çiftlenimin her hangi bir sırası Denk.(135) ifadesinin tüm fazlarında en fazla bir değişiklik verebilir. $\psi_{j_1 m_1}$, $\psi_{j_2 m_2}$ ve $\psi_{j_3 m_3}$ bileşenlerinin bir çok simetrik biçimi Denk.(135) ifadesinden görülmektedir. Bu simetri, Denk.(135)'deki katsayıların m_1 , m_2 ve m_3 'den bağımsız bir faz faktörü ile çarpılırsa da değişmez. Böyle kullanışlı bir faktör $(-1)^{j_1-j_2+j_3}$ şeklinde oluşturulur. Denk.(135) ifadesi bu tür bir faz faktörü ile çarpılırsa ve $(-1)^{2j_3+2m_3} = 1$ olarak alınırsa

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3, -m_3 \rangle \quad (136)$$

ile verilen $J = 0$ durumunun açılımındaki katsayıları buluruz.

Denk.(136)'daki katsayı Wigner'in $3j$ sembolü olarak adlandırılır [5]. Bu sembol Clebsch-Gordan katsayılarındaki gibi simetri özelliklerine sahiptir ve ayrıca j_3 , j_1 ve j_2 ile yer değiştirebilir. Denk.(136) tanımı kullanıldığında, $3j$ sembolünün aşağıdaki simetrisi anlaşılır. $3j$ sembolünün değeri sütunlarının her bir döner sıralı permütasyonu ve sütunların her bir sırasını değiştirmede değişmez, j_1 , j_2 ve j_3 'de simetriklik ve aynı faz elde edilir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (137)$$

Bundan dolayı, $(-1)^{j_1+j_2+j_3} = -1$ olursa iki eşit sütunlu bir $3j$ sembolü yok olur.

Clebsch-Gordan katsayıları durumundaki gibi, $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ olmadıkça $3j$ sembolü sıfır olur şartı ile birlikte bağımsız değişkenler olarak m_1 , m_2 ve m_3 alırsak. $3j$ değeri, $J = 0$ için çiftlenebilirlik şartlarını sağlamak zorundadır. 1, 2, 3 indisli her bir sıra için $j_i + j_k \geq j_r \geq |j_i - j_k|$ ile verilen bir üçgen şartı vardır. Sadece j_1 , j_2 ve j_3 için $3j$ sembolü yazılabilir.

Denk.(121) ve Denk.(122) ifadelerindeki Clebsch-Gordan katsayılarının ortogonalite bağıntıları $3j$ sembolünün aşağıdaki bağıntıları tarafından da sağlanır [9]:

$$\sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3 + 1} \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3} \quad (138)$$

$$\sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (139)$$

Denk.(138)'in sol tarafı m_3 'den bağımsız olduğu için bu ifadenin sağ tarafı $2j_3 + 1$ ile çarpılıp gerekli işlemler yapılırsa toplamın tümü

$$\sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = 1 \quad (140)$$

sonucunu verir.

3j sembolünün diğer bir simetrisi Denk.(131) bağıntısından anlaşılır. Denk.(136)'daki m_1, m_2, m_3 'lerin işaretleri değiştirildiği ve Denk.(131) kullanıldığı zaman,

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (141)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca burada Denk.(137)'deki gibi j_1, j_2, j_3 spin üçlüsündeki faz simetriktir.

3j sembolleri Clebsch-Gordan katsayılarından faydalanılarak hesaplanabilir [5]. Yukarıda gösterilen yöntem burası içinde geçerlidir. 3j sembollerinin sayısal değerleri çeşitli kitaplarda tablolar halinde verilmiştir [10]. Bütünlük açısından katsayılar için açık bir ifade aşağıda verilmiştir. Bu formül Racah [11]'e göre yukarıda tanımlanan tekrarlı bağıntılarının bir çözümüdür:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{j_1-j_2-m_3} \delta(m_1+m_2+m_3, 0) \times \\ &\times \left[\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times [(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j_3+m_3)!(j_3-m_3)!]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \sum_z (-1)^z [z!(j_1+j_2-j_3+z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)! \\ &\times (j_3-j_2+m_1+z)!(j_3-j_1-m_2+z)!]^{-1} \end{aligned} \quad (142)$$

Oldukça geniş simetri özelliklerine göre 3j sembollerinin tanıtımı açılal momentum cebirinin önemli oranda basitleştirilmesinin sonuçlarıdır. Şimdi önemli bir uygulama için 3j sembollerinden yararlanalım:

$\psi_{j_1 m_1}$ ve $\psi_{j_2 m_2}$ gibi iki bağımsız sistemin normalize dalga fonksiyonlarının birleşimi olan Denk.(114) ifadesindeki $\psi_{j m}$ dalga fonksiyonunun normalize olduğunu vurgulamıştık. Denk.(121) bağıntısındaki matematiksel ifade bu gerçeği doğrulamaktadır. $\psi_{j_1 m_1}$ ve $\psi_{j_2 m_2}$ gibi iki tensörel set indirgenemez değilse Denk.(114) ile verilen $\psi_{j m}$

dönemler altında indirgenemez olarak biçim değiştirir. ψ_{jm} sonuç dalga fonksiyonu ise ψ_{jm} 'nin normalizasyonu Denk.(114)'de verilen Clebsch-Gordan katsayıları tarafından garanti edilemez. ψ_{jm} 'nin normalize olması için bazı faktörlerin uygulanabilir olma zorunluluğu vardır.

$Y_{l'm'}(\mathbf{r})$ ve $Y_{l''m''}(\mathbf{r})$ gibi iki harmonik durumu dikkate alalım. Denk.(114) ifadesine göre bunların çiftlenimi toplam yörünge açısal momentumu l , izdüşümü m ve $l(l+1)$ özdeğerine sahip l^2 'nin öz durumu olan bir seti verir. Bundan dolayı sonuç aynı değişkenlerin $Y_{lm}(\mathbf{r})$ küresel harmonikleri ile orantılıdır.

$$C_{l'l''}^l Y_{lm}(\mathbf{r}) = \sum_{m'm''} \langle l'm'l''m'' | l'l''lm \rangle Y_{l'm'}(\mathbf{r}) Y_{l''m''}(\mathbf{r}) \quad (143)$$

ile yazılabilir. Denk.(143)'deki normalizasyon katsayısı

$$C_{l'l''}^l = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (144)$$

ile verilir. Denk.(136) ifadesindeki $3j$ sembollerinin simetri özelliğinden de anlaşıldığı üzere Denk.(144) ile verilen normalizasyon katsayısı $(-1)^{l+l'+l''} = +1$ olmadığı müddetçe sıfır olur. Bu sonuç $Y_{lm}(\mathbf{r})$ 'nin paritesinin $(-1)^l$ olması gerçeğine dayanır. Denk.(143) ifadesinin sol tarafının paritesi $(-1)^l$ 'dir ve $(-1)^l$ paritesi $(-1)^{l+l'+l''}$ paritesine eşit olmak zorundadır. Verilen l değerleri parite şartına uymadığı için Denk.(143) ifadesinin sağ tarafı sıfır olur.

Denk.(143) ifadesinin özel bir durumu dikkate değerdir. Burada $l'' = l'$ ve $l = 0$ olarak alınırsa Denk.(136) ve Denk.(144)'de de Denk.(132)'nin özel değeri kullanılırsa l 'nin her hangi bir değeri için aşağıda verilen sonuç elde edilir:

$$\sum_m (-1)^{l-m} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l,-m}(\theta, \phi) = \frac{2l+1}{4\pi} \quad (145)$$

1.2.2. İki Nükleonlu Etkileşmelerin Matris Elemanları: 6j Sembolleri

Tabaka modelinin dalga fonksiyonları ile birlikte kullanılabilen iki nükleonlu etkileşmeler etkin etkileşmelerdir. Bunlar serbest nükleonlar arasındaki etkileşmelerle çok az benzerlik taşır. Etkin etkileşim, serbest nükleonlar arasındaki etkileşmenin zorlayıcı renormalizasyonunun sonucu olan nükleer çok parçacıklı teoride elde edilebilir. Tabaka modelin bir ya da birkaç alt uzayında verilen ve bir ya da birkaç konfigürasyon içeren bu uzaydaki etkili etkileşmenin matris elemanlarını vermelidir. Bununla birlikte, bu güne kadar nükleer çok parçacık teori yöntemleri kullanılarak böylesi matris elemanlarını elde etmenin güvenilir bir yol olmadığı görülmektedir. Nükleer enerji hesaplamaları için tabaka modelinin kullanılmasının tek pratik yolu deneylerden matris elemanlarını belirlemektir [12]. Bu kendi içinde uyumlu olarak uygulandığında dikkate alınan konfigürasyonların durumları arasındaki matris elemanlarının bir setini elde ederiz. Bununla birlikte, bu kesimde oluşturulmuş durumlar arasındaki basit etkileşmelerin matris elemanlarının nasıl hesaplanabildiğini göreceğiz.

İki nükleon arasındaki en basit etkileşme sadece bunların arasındaki uzaklığa bağlı olan bir potansiyel etkileşmesidir. Coulomb potansiyeli bu tür etkileşmenin basit bir örneğidir. Bu etkileşmenin matris elemanları tek nükleon dalga fonksiyonlarının çarpımları veya bu çarpımların toplamları olan durumlar arasından hesaplanabilir. Bu nedenle bu iki nükleonun koordinatları cinsinden böylesi bir etkileşmeyi ifade etmek uygun olur. Böylece etkileşmeyi

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = V\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \omega_{12}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r_1, r_2) P_k(\cos \omega_{12}) \quad (146)$$

ile ifade ederiz. Bu, \mathbf{r}_1 ve \mathbf{r}_2 vektörleri arasındaki açının kosinüsünün $\cos \omega_{12} = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) / r_1 r_2$ ile verildiği Legendre polinomlarının bir açılımıdır. $v_k(r_1, r_2)$ fonksiyonları \mathbf{r}_1 ve \mathbf{r}_2 de simetriktir. $1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ şeklindeki Coulomb potansiyeli durumunda bu fonksiyonlar

$$v_k(r_1, r_2) = \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} \quad V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (147)$$

olur. Denk.(147)'deki $r_<$ ifadesi \mathbf{r}_2 nin \mathbf{r}_1 den daha küçük, $r_>$ ifadesi ise \mathbf{r}_2 nin \mathbf{r}_1 den daha büyük olduğunu gösterir. $e^{-\lambda|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|/|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$ Yukawa potansiyeline karşılık gelen fonksiyonlar literatürde verilmiştir. Legendre polinomlarının orthogonallik bağlantılarından dolayı $v_k(r_1, r_2)$ fonksiyonları $V/|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$ ifadesinin

$$v_k(r_1, r_2) = \frac{2k+1}{k} \int_{-1}^{+1} V(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|) P_k(\cos w_{12}) d \cos w_{12} \quad (148)$$

ile integral edilmesiyle elde edilebilir. Denk.(146) bağıntısındaki Legendre polinomları küresel harmoniklerin eklenme teoremiyle ifade edilebilir:

$$P_k(\cos w_{12}) = \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} Y_{k\kappa}(\theta_1, \phi_1) Y_{k, -\kappa}(\theta_2, \phi_2) \quad (149)$$

Bu açılım $Y_k(1)$ ve $Y_k(2)$ indirgenemez tensörleri arasındaki Denk.(133) skaler çarpımının bir örneğini verir. Denk.(149) daki küresel harmonikler dalga fonksiyonlarından daha ziyade işlemcilerin rolünü oynar. Denk.(149)'u $4\pi/(2k+1)$ katsayısı dışında skaler bir çarpıma eşitlemek için bazen $C_{kK} = [4\pi/(2k+1)] Y_{kK}$ tanımı önerilir. Bununla birlikte başka bir sembolü önerme gereksinimimiz vardır.

$P_k(\cos w_{12})$ 'in yerine geçici olarak kullanılan Denk.(149) ifadesindeki Denk.(146) etkileşiminin matris elemanları,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{jm}(1) \psi_{j'm'}(2) - \psi_{jm}(1) \psi_{j'm'}(2)] \eta_{T=1, M_T} \quad M_T=1, 0, -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{jm}(1) \psi_{j'm'}(2) + \psi_{jm}(1) \psi_{j'm'}(2)] \eta_{T=0, M_T=0}$$

ile verilen iki nükleonlu durumlar arasından alınabilir. Bu etkileşim izospin işlemcilerini içermediği için aynı T değerli izospinli durumları arasında aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\frac{1}{2} \left[\int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) V \psi_{jm}(1) \psi_{j'm'}(2) \mu \int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) V \psi_{jm}(2) \psi_{j'm'}(1) \mu \right]$$

$$\begin{aligned}
& \mu \int \psi_{jm}^*(2) \psi_{j'm'}(1) V \psi_{jm_1}(1) \psi_{j'm'_1}(2) + \int \psi_{jm}^*(2) \psi_{j'm'}(1) V \psi_{jm_1}(2) \psi_{j'm'_1}(1) = \\
& = \int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) V \psi_{jm_1}(1) \psi_{j'm'_1}(2) \mu \int \psi_{jm}(1) \psi_{j'm'}(2) V \psi_{jm_1}(2) \psi_{j'm'_1}(1) \\
& = \sum_k \frac{4\pi}{2k+1} \left[\int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) v_k(\mathbf{Y}_k(1) \cdot \mathbf{Y}_k(2)) \psi_{jm_1}(1) \psi_{j'm'_1}(2) \mu \right. \\
& \quad \left. \mu \int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) v_k(\mathbf{Y}_k(1) \cdot \mathbf{Y}_k(2)) \psi_{jm_1}(2) \psi_{j'm'_1}(1) \right] \quad (150)
\end{aligned}$$

Denk.(150) deki eşitlik, $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ nin simetrisinden kaynaklanan ve nükleonların 1 ve 2 indislerinin değiş-tokuş edilmesi ile elde edilir. Yine bu denklemde üsteki (-) işareti $T = 1$ antisimetrik durumlar, alttaki (+) işareti ise $T = 0$ simetrik durumları içindir.

$$\int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) V \psi_{jm_1}(1) \psi_{j'm'_1}(2)$$

terimleri "doğrudan terimler" olarak adlandırılırken

$$\int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) V \psi_{jm_1}(2) \psi_{j'm'_1}(1)$$

terimleri ise "değiştirme terimleri" olarak adlandırılır.

Simetrik ve antisimetrik durumlar arasında alınan Denk.(146) etkileşimin matris elemanları, etkileşim iki nükleonlu koordinatlarda simetrilik olduğundan daima sıfır olur. Böylesi bir matris elemanı Denk.(150) ye eşittir. Bu denklemde sol taraftaki son iki terim işaretlerini değiştirmiştir. Bu durumda ilk terim, son terimle iptal edilir ve ortadaki iki terim ise birbirlerini götürür. Ayrıca bu sonuç biçimsel olarak $T = 0$ ve $T = 1$ durumlarının orthogonalliginden ve her hangi yükten bağımsız etkileşmenin izospin bakımından bir skaler olması gerçeğinden elde edilebilir.

İşlemlerimize devam etmeden önce,

$$\sum_{m m'} \langle jmj' m' | ij' JM \rangle \psi_{jm}(1_\pi) \psi_{j'm'}(2_\nu)$$

durumları arasındaki Denk.(146) etkileşiminin matris elemanlarını göz önüne alalım. Bu durumlar, nötron j yörüngesi tamamen dolduğunda j yörüngesinde bir protonu ve j' yörüngesinde bir nötronu tanımlar. Böylece Denk.(150) yerine

$$\sum_k \frac{4\pi}{2k+1} \left[\int \psi_{jm}^*(1) \psi_{j'm'}^*(2) v_k(Y_k(1) \cdot Y_k(2)) \psi_{jm_1}(1) \psi_{j'm'_1}(2) \right] \quad (151)$$

sonucunu elde ederiz. Denk.(151)'de yalnızca doğrudan terimler görünür. Denk.(151) in matris elemanı Denk.(150) ile verilen matris elemanları ile basitçe ilişkili olabilir. Bu

$$\begin{aligned} \langle j_\pi m_1 j'_\nu m_2 | V | j_\pi m_1 j'_\nu m_2 \rangle = \\ = \frac{1}{2} \left[\langle j m_1 j' m_2 T = 1 | V | j m_1 j' m_2 T = 1 \rangle + \langle j m_1 j' m_2 T = 0 | V | j m_1 j' m_2 T = 0 \rangle \right] \quad (152) \end{aligned}$$

ifadesine eşittir. Böylece bu, T=1 ve T=0'lı durumlara karşılık gelen durumlardaki (yükten bağımsız) etkileşimler arasındaki ortalamadır.

Şimdi J'nin belirli bir değerli durumu için çiftlenen j ve j' nün bulunduğu

$$\begin{aligned} \psi_{ij^T M_T J M}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{mm'} \langle j m j' m' | ij^T J M \rangle \times \\ \times [\psi_{jm}(1) \psi_{j'm'}(2) + (-1)^T \psi_{jm}(2) \psi_{j'm'}(1)] \eta_{T, M_T} \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle^2 = \frac{1}{4} \sum_{\kappa m_\kappa} \left| \langle T = \frac{1}{2}, M_{T_s} = \frac{1}{2} j_s m_s | \tau^+ \sigma_\kappa | T = \frac{1}{2}, M_{T_i} = -\frac{1}{2}, j_i m_i \rangle \right|^2 \\ = \sum_{\kappa m_\kappa} \left| \langle j_s m_s | \sigma_\kappa | j_i m_i \rangle \right|^2 = \frac{1}{2j_i + 1} \left| \langle j_s \| \sigma \| j_i \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

fonksiyonlar şemasında Denk.(146) nın matris elemanlarını hesaplamaya başlayabiliriz. Denk.(150)'deki dört dalga fonksiyonu ile çarpılan $v_k(r_1, r_2)$ üzerinden alınan integraller

m, m', m_1 ve m'_1 den bağımsızdır. Değişik açılar üzerinden integrasyon alınabilmelidir. İlk olarak hesaplanan matris elemanları bu doğrudan terimin matris elemanları olup

$$\langle jj' JM | \mathbf{Y}_k(1) \cdot \mathbf{Y}_k(2) | jj' JM \rangle$$

ile verilir. Bu matris elemanları şimdi tanımlayacak olduğumuz daha genel bir ifadenin özel bir durumudur.

Şimdi iki indirgenemez tensör işlemcisinin skaler çarpımının matris elemanını dikkate alalım:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 JM | T^{(k)}(1) \cdot T^{(k)}(2) | \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 JM \rangle = \\ & = (-1)^k \sqrt{2k+1} \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 JM | [T^{(k)}(1) \times T^{(k)}(2)]_0^{(0)} | \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 JM \rangle \\ & = (-1)^k \sqrt{2k+1} (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M & 0 & M \end{pmatrix} \times \\ & \quad \times \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J | [T^{(k)}(1) \times T^{(k)}(2)]_0^{(0)} | \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J \rangle \\ & = (-1)^k \sqrt{2k+1} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J | [T^{(k)}(1) \times T^{(k)}(2)]_0^{(0)} | \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J \rangle \quad (153) \end{aligned}$$

En son eşitlik Denk.(132) Clebsch-Gordan katsayısı ile ilişkili 3j sembolünün değerinin kullanılmasıyla elde edilmiştir. Denk.(153)'deki indirgenmiş matris elemanı, burada $k_1=k_2$, $J=J'$ ve $k=0$ alındığında elde edilen

$$\begin{aligned} \psi(j_1 j_2 (J_{12}) j_3 j_4 (J_{34}) JM) &= \sum \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 J_{12} M_{12} \rangle \times \\ & \quad \times \langle j_3 m_3 j_4 m_4 | j_3 j_4 J_{34} M_{34} \rangle \langle J_{12} M_{12} J_{34} M_{34} | J_{12} J_{34} JM \rangle \times \\ & \quad \times \psi_{j_1 m_1}(1) \psi_{j_2 m_2}(2) \psi_{j_3 m_3}(3) \psi_{j_4 m_4}(4) \quad (4) \end{aligned}$$

genel sonucunun özel bir durumudur. Bu ise bu denklemdeki 9j sembolündeki bağımsız J değerlerinin sayısını yalnızca 6'ya indirger. Bu durum 9j sembollerinin çok özel bir durumudur ve özel bir gösterime karşılık gelir. 6j sembolü [5,6] veya Racah katsayısı [5,11].

$$\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_2 & J'_1 & k \end{Bmatrix} = (-1)^{J_2+J+J'_1+k} [(2J+1)(2k+1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_1 & J'_2 & J \\ k & k & 0 \end{Bmatrix} \quad (154)$$

ile tanımlanır. Bir çok uygulamada $6j$ sembolü görülür ve bunlardan ilki Denk.(153)'deki skaler çarpımların matris elemanlarının hesaplanması olmuştur [11].

$6j$ sembolünün simetri özellikleri, bu sembolün Denk.(154)'deki tanımından direkt olarak görülür. 6 argümanın sağlamak zorunda olduğu dört tane üçgen şartı vardır. Bunlar üst satırdaki j değerlerini ve diğer üç şartı içerir. Bunlardan ikincisi, alt satırdaki iki J değerini ve yukarıda yazılmamış olan üst satırdaki bir J değerini sağlamak zorundadır. Her hangi iki sütun yer değiştirdiğinde Denk.(154)'deki $9j$ sembolünün işareti değişmeyebilir fakat bu değişiklik sembol önündeki faz çarpanındaki değişiklik ile telafi edilir. Böylece $6j$ sembolünün sütunlarının her bir permütasyonunda sembol değeri değişmez kalır. $9j$ sembolünde üsteki iki satırın yeri değiş tokuş edildiğinde J_1J_2 'nin $J'_2J'_1$ ile yer değiştirdiği bulunduğu bir $6j$ sembolünü verir. Bu $9j$ sembolünde satırların ve sütunların yerleri değiştirildiğinde sembolün değerinde ve faz çarpanında bir değişiklik yapmaz. Bu $6j$ sembolündeki J_2J' 'nin yerini J'_1k ile değiştirmeye karşılık gelir. Bu nedenle, sembolün üst satırındaki elemanlardan ikisi aşağıdaki iki elemanla yer değiştirirse $6j$ sembolünün değerinde bir değişiklik olmaz. Bu işlemler $6j$ sembolündeki elemanların izinli simetri dönüşümlerinin listesini tamamlar. Bu değişikliklerden hiçbiri sembolün işaretini değiştirmez.

$9j$ sembolleri gibi $6j$ sembolleri de farklı çiftlenim şemaları arasındaki ortogonalite dönüşümlerinin katsayılarında görünür. Eğer

$$\Phi_{W'SLJM} = \sum_{M_S M_L} \langle SM_S LM_L | SLJM \rangle x_{SM_S} \Phi_{W'LM_L}$$

ifadesinde $J=0$, $J_{12}=J_{34}$ ve $J_{13}=J_{24}$ alınırsa ve gösterimde küçük bir değişiklik yapılırsa;

$$\begin{aligned} \langle J_1 J_3(J') J_2 J_4(J') 0 | J_1 J_2(J') J_3 J_4(J') 0 \rangle = \\ = (-1)^{J_2+J_3+J+J'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_4 & J_3 & J' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (155)$$

sonucunu buluruz. $J=0$ için J_1, J_2, J_3, J_4 çiftlenimi yerine, dördüncü açılal momentumu elde etmek için bunlardan üçünü çiftleyebiliriz. Bu tür çiftlenimlerin iki yolu arasındaki dönüşüm,

$$\begin{aligned} \langle J_1 J_3 (J_{13}) J_2 J | J_1 J_2 (J_{12}) J_3 J \rangle = \\ = (-1)^{J_2+J_3+J_{12}+J_{13}} \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{13}+1)} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J & J_3 & J_{13} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (156)$$

ile verilir. Bu dönüşümün katsayıları Denk.(155)'dekilerle aynıdır. Diğer mümkün çiftlenim çiftlenmelerin sırasının korunması ile elde edilir. Bunlardan biri

$$\begin{aligned} \langle J_1 J_2 (J_{12}) J_3 J | J_1, J_2 J_3 (J_{23}) J \rangle = \\ = (-1)^{J_1+J_2+J_3+J} \sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J & J_{23} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (157)$$

ile verilir. Tüm bu dönüşümlerde $6j$ sembolündeki çeşitli J değerlerinin yerleri çiftlenmelerle sabitlemiştir. Sayısal katsayılar ara düzey açılal momentumunu içerir. Yalnızca dikkat edilmesi gereken çarpan faz çarpanıdır. $6j$ sembolündeki bu zorluğu gidermek için bu sembolün elemanlarındaki izinli her bir işlemde sembolün işaretini değişmez.

Denk.(155) dönüşümünün orthogonalliğinden, $6j$ sembolleri arasında var olan aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$\sum_J (2J+1) \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_1 & J'_2 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_1 & J'_2 & J'' \end{Bmatrix} = \frac{\delta_{J,J''}}{2J+1} \quad (158)$$

Denk.(155) dönüşümünün başarılı uygulamaları gerçeğinden çıkan diğer bir faydalı bağıntı, üçüncü bir çiftlenme şeması için bir dönüşüm sağlamaktadır. Bu durumda

$$\sum_J \langle J_1 J_2 (J') J_3 J_4 (J') 0 | J_1 J_3 (J) J_2 J_4 (J) 0 \rangle \times$$

$$\begin{aligned} & \times \langle J_1 J_3(J) J_2 J_4(J) 0 | J_1 J_4(J'') J_2 J_3(J'') 0 \rangle = \\ & = \langle J_1 J_2(J') J_3 J_4(J') 0 | J_1 J_4(J'') J_2 J_3(J'') 0 \rangle \end{aligned}$$

yazılır. Denk.(155) ifadesinin kullanılması için gerekli olan çiftlenim sırasının değişikliğine baktığımızda Denk.(124) ifadesinden dolayı aşağıda verilmiş olan toplama kuralını elde ederiz:

$$\sum_J (-1)^{J+J'+J''} (2J+1) \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J' \\ J_4 & J_3 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J'' \\ J_2 & J_3 & J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J' \\ J_3 & J_4 & J'' \end{Bmatrix} \quad (159)$$

6j sembollerinin diğer bir faydalı bağıntısı Biedenharn-Elliott toplama kuralıdır [5]. Bu toplama kuralı, belirli bir toplama şemasından diğer bir toplama şemasına yol açan başarılı dönüşümlerin iki farklı setinin dikkate alınması ile elde edilir. Bir şemada J_1 ve J_2 , J_{12} için, ve J_3 ve J_4 , J_{34} için ve de J_{12} ve J_{34} toplam bir J için çiftlenir. Diğer bir şemada ise J_1 ve J_3 , J_{13} için, bu J_{13} ile J_2 belirli bir J_{132} 'yi vermek için ve de J_4 bu J_{132} ile toplam bir J 'yi vermek için çiftlenirler. Bu dönüşüm izlenen sıralamadaki gibi bu iki dönüşümün çarpımı olarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned} & \langle J_1 J_3(J_{13}) J_2(J_{132}) J_4 J | J_1 J_2(J_{12}) J_3 J_4(J_{34}) J \rangle = \\ & = \langle J_1 J_3(J_{13}) J_2(J_{132}) J_4 J | J_1 J_2(J_{12}) J_3(J_{132}) J_4 J \rangle \times \\ & \quad \times \langle J_1 J_2(J_{12}) J_3(J_{132}) J_4 J | J_1 J_2(J_{12}) J_3 J_4(J_{34}) J \rangle \quad (160) \end{aligned}$$

Buna alternatif olarak aynı dönüşüm, üç dönüşümün çarpımı ve bir J_{134} ara düzey açılmal momentum üzerinden toplamı olarak aşağıda verildiği gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} & \sum_{J_{134}} \langle J_1 J_3(J_{13}) J_2(J_{132}) J_4 J | J_1 J_3(J_{13}) J_4(J_{134}) J_2 J \rangle \times \\ & \quad \times \langle J_1 J_3(J_{13}) J_4(J_{134}) J_2 J | J_3 J_4(J_{34}) J_1(J_{134}) J_2 J \rangle \times \\ & \quad \times \langle J_3 J_4(J_{34}) J_1(J_{134}) J_2 J | J_1 J_2(J_{12}) J_3 J_4(J_{34}) J_2 J \rangle \quad (161) \end{aligned}$$

Denk.(161)'deki ve Denk.(160) ifadesinin sağ tarafındaki dönüşümlerin her biri Denk.(156) veya Denk.(157)'den her hangi biri ile verilen üç açısız momentum çiftleniminin bir değişimidir. Denk.(160) Denk.(161)'e eşitlendiğinde ve reel dönüşüm katsayılarını geçici olarak kullandığımızda üç 6j sembolünün çarpımlarının toplamına eşit olan iki 6j sembolünün bir çarpımını elde ederiz. Daha basit bir gösterimde bu bağıntı,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J'_1 & J'_2 & J'_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J''_1 & J''_2 & J''_3 \end{matrix} \right\} &= \sum_J (-1)^{J_1+J_2+J_3+J'_1+J'_2+J'_3+J''_1+J''_2+J''_3} (2J+1) \times \\ &\times \left\{ \begin{matrix} J_1 & J'_2 & J'_3 \\ J & J_3 & J''_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J'_1 & J_2 & J'_3 \\ J''_3 & J & J''_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J'_1 & J'_2 & J_3 \\ J''_2 & J''_2 & J \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (162)$$

şeklindedir. Eğer

$$\Phi_{ll'LM_L}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \langle l m_l l' m'_l | ll' LM_L \rangle [\phi_{l m_l}(r_1) \phi_{l' m'_l}(r_2) \pm \phi_{l m_l}(r_2) \phi_{l' m'_l}(r_1)]$$

ifadesinde $J_{33}=0$, $J_{13}=J_{23}$ ve $J_{31}=J_{32}$ olarak alınırsa 6j sembolünü, 3j sembollerinin çarpımlarının bir toplamı olarak elde ederiz. J_{33} 'ü içeren iki 3j sembolü Denk.(132)'deki sembollere eşittir. Böylece bir 6j sembolü dört tane 3j sembolünün çarpımlarının toplamına eşittir. Bu reel ifade

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J'_1 & J'_2 & J'_3 \end{matrix} \right\} &= \sum_{\text{Tüm } M_i, M'_i} (-1)^{J'_1+J'_2+J'_3+M'_1+M'_2+M'_3} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & J'_2 & J'_3 \\ M_1 & M'_2 & -M'_3 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} J'_1 & J_2 & J'_3 \\ -M'_1 & M_2 & M'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_1 & J'_2 & J_3 \\ M'_1 & -M'_2 & M_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (163)$$

şeklindedir. 6j sembolünün elemanlarından biri sıfır olduğunda bu sembolün özel bir sayısal değerini elde etmek için Denk.(163)'ü kullanabiliriz. Denk.(2.63)'de $J'_3 = 0$ olarak alınırsa iki 3j sembolü Denk.(132) ile açık bir şekilde verilir. Diğer iki 3j sembolünün çarpımlarını toplayabiliriz ve toplam Denk.(138) ile verilir. Bu yüzden

$$\left\{ \begin{matrix} J_1 & J_1 & 0 \\ J_2 & J_2 & J_3 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{J_1+J_2+J_3}}{\sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)}} \quad (164)$$

sonucu bulunur. Bu sonuçtan iki özel toplam kuralına ulaşılır. Denk.(158) ifadesinde $J''=0$ olarak dikkate alındığında

$$\sum_J (-1)^{J_1+J_2+J} (2J+1) \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_1 & J'' \\ J_2 & J_2 & J \end{matrix} \right\} = \sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)} \delta_{J'',0} \quad (165)$$

ifadesini elde ederiz. Denk.(159) toplam kuralında $J'' = 0$ olarak işleme konduğunda Denk.(164) ifadesinden dolayı

$$\sum_J (2J+1) \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J'' \\ J_1 & J_2 & J \end{matrix} \right\} = (-1)^{2(J_1+J_2)} \quad (166)$$

özel durumunu elde etmiş oluruz. $J_1=J_2$ 'li özel durumda Denk.(165) ve denk.(166) toplamları ve farkları

$$(2J+1) \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_1 & J \\ J_1 & J_1 & J \end{matrix} \right\}$$

ifadesinin J 'nin tek ve çift değerleri üzerinden toplamlarını ayırmak için basit sonuçları sağlar.

6j sembolleri ve 3j sembolleri arasındaki kullanışlı bağıntıları türetmek için

$$\begin{aligned} \psi(i_1 i_3(J_{13}) i_2 i_4(J_{24}) JM) &= \sum_{J_{12} J_{34}} \langle i_1 i_2(J_{12}) i_2 i_4(J_{24}) J | i_1 i_2(J_{12}) i_3 i_4(J_{34}) J \rangle \times \\ &\quad \times \psi(i_1 i_2(J_{12}) i_3 i_4(J_{34}) JM) \\ \psi(i_1 i_2(J_{12}) i_3 i_4(J_{34}) JM) &= \sum \langle i_1 m_1 i_2 m_2 | i_1 i_2 J_{12} M_{12} \rangle \times \\ &\quad \times \langle i_3 m_3 i_4 m_4 | i_3 i_4 J_{34} M_{34} \rangle \langle J_{12} M_{12} J_{34} M_{34} | J_{12} J_{34} JM \rangle \times \\ &\quad \times \psi_{i_1 m_1}(1) \psi_{i_2 m_2}(2) \psi_{i_3 m_3}(3) \psi_{i_4 m_4}(4) \end{aligned}$$

ifadelerinde J' 'yi 0 olarak alabiliriz. Bu bağıntıları hemen elde etmek için işlemlerimize

$$\begin{aligned} \psi(J_1 J_3 (J') J_2 J_4 (J') 0) &= \sum (-1)^{J_2+J_3+J+J'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_4 & J_3 & J' \end{Bmatrix} \times \\ &\times \psi(J_1 J_2 (J) J_3 J_4 (J) 0) \end{aligned} \quad (167)$$

ifadesinden başlarız. Clebsch-Gordan katsayılarınınca açılım yaptığımızda ve Denk.(167) ifadesinin her iki yanındaki $\psi_{J_1 M_1} \psi_{J_2 M_2} \psi_{J_3 M_3} \psi_{J_4 M_4}$ 'nın katsayılarını eşitlediğimizde

$$\begin{aligned} \sum_{M'} \frac{(-1)^{J'-M'}}{\sqrt{2J'+1}} \langle J_1 M_1 J_3 M_3 | J_1 J_3 J' M' \rangle \langle J_2 M_2 J_4 M_4 | J_2 J_4 J' -M' \rangle &= \\ = \sum_M \frac{(-1)^{J_2+J_3+J+J'}}{\sqrt{(2J+1)(2J'+1)}} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_4 & J_3 & J' \end{Bmatrix} \times \\ \times \frac{(-1)^{J-M}}{\sqrt{2J+1}} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J_1 J_2 J M \rangle \langle J_3 M_3 J_4 M_4 | J_3 J_4 J -M \rangle \end{aligned}$$

sonucunu buluruz. Her iki taraf $\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J_1 J_2 J M_0 \rangle$ ile çarpılıp ve M_1, M_2 üzerinden toplam alındığında ve ayrıca Denk.(121) vektör çiftlenim katsayılarının orthogonallik bağıntıları göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned} (-1)^{J_2+J_3+J+J'} \sqrt{2J'+1} (-1)^{J-M_0} \langle J_3 M_3 J_4 M_4 | J_3 J_4 J -M_0 \rangle \begin{Bmatrix} J_3 & J_4 & J \\ J_2 & J_1 & J' \end{Bmatrix} &= \\ = \sum_{M_1 M_2 M'} \frac{(-1)^{J'-M'}}{\sqrt{2J'+1}} \langle J_1 M_1 J_3 M_3 | J_1 J_3 J' M' \rangle \langle J_2 M_2 J_4 M_4 | J_2 J_4 J' -M' \rangle \times \\ \times \langle J_3 M_3 J_4 M_4 | J_3 J_4 J M_0 \rangle \end{aligned}$$

ile verilen sonucu bulmuş oluruz. Clebsch-Gordan katsayılarını 3j sembollerince ifade ettiğimizde kullanışlı bir bağıntı olan

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J'_1 & J'_2 & J'_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{M'_1 M'_2 M'_3} (-1)^{J'_1 + J'_2 + J'_3 + M'_1 + M'_2 + M'_3} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & -M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_1 & J_2 & J'_3 \\ -M'_1 & M_2 & M'_3 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} J'_1 & J'_2 & J_3 \\ M'_1 & -M'_2 & M_3 \end{pmatrix} \quad (168)$$

sonucunu elde ederiz.

Denk.(140) bağıntısına dayanarak Denk.(168) ifadesinin her iki tarafını

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix}$$

ile çarpar ve $M_1 M_2 M_3$ üzerinden toplamını alırsak Denk.(163) ifadesini yeniden elde ederiz. Bununla birlikte yine aynı ifadenin her iki yanını

$$(-1)^{J_3 - M_3} (2J_3 + 1) \begin{pmatrix} J'_1 & J'_2 & J_3 \\ M'_1 & M'_2 & -M_3 \end{pmatrix}$$

ifadesi ile çarpar J_3 ve M_3 üzerinden toplamı aldığımızda Denk.(139) sonucundan dolayı

$$\sum_{M_3} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_1 & J'_2 & J_3 \\ M'_1 & M'_2 & -M_3 \end{pmatrix} = \\ = \sum_{J'_3 M'_3} (-1)^{J_3 + J'_3 + M_1 + M'_1} (2J'_3 + 1) \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J'_1 & J'_2 & J'_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} J'_1 & J_2 & J'_3 \\ M'_1 & M_2 & M'_3 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_1 & J'_2 & J'_3 \\ M_1 & M'_2 & -M'_3 \end{pmatrix} \quad (169)$$

olarak yazılabilen başka bir faydalı bağıntıyı elde etmiş oluruz. Denk.(163) ifadesine ek olarak Denk.(168) ve Denk.(169) ifadelerin kaynağı bağımsız değişkenler olarak tüm m değerlerinin alınmasının avantajını ortaya koyar. Çeşitli toplamalarda diğer değerlere eşit olan m değerlerinin bileşimlerini takip etmek oldukça zordur. 6j sembolleri ve 9j sembolleri arasında birkaç ilginç bağıntı da vardır. Semboller bir çok hesaplamada karşımıza çıkar. Bu semboller verilen problemin fiziksel karakteristiğinden bağımsız olan

geometrikse bağıntıların bir ifadesidir. Bunların tablolar halinde verilmiş değerleri bir çok uygulamada kullanılır. Denk.(153) benzeri iki yapılı etkileşmelerin matris elemanları hesaplamak için bu semboller Racah tarafından önerilmiştir [11]. Wigner tarafından önerilen sembollerden bağımsız olarak Racah'ın önerdiği asıl tanım 6j sembolleri ile ilişkilidir. Wigner, 6j sembolünü

$$W(j_1 j_2 j_3 j_4; j_5 j_6) = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \quad (170)$$

olarak önermiştir. W katsayılarının, sahibi olduğu elemanlarında 6j sembollerinden daha az simetriye sahip olduğu açıktır. Bu gerçek uygulamalarda bu katsayıların kullanımını çok daha az kullanışlı yapar. Daha sonra Racah kendisinin asıl tanımından vazgeçti ve $W(j_1 j_2 j_3 / j_4 j_5 j_6)$ 'daki 6j sembollerini kullandı [13].

Denk.(163)'deki dört 3j sembolleri üzerinden toplam uygulanabilir [5,11] ve 3j sembolleri elemanlarınca 6j sembolü için açık bir formülü sağlar. Bu formül

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} &= \Delta(J_1 J_2 J_3) \Delta(j_1 j_2 j_3) \Delta(j_1 J_2 j_3) \Delta(j_1 j_2 J_3) \Delta(j_1 j_2 j_3) \times \\ &\times \sum_t (-1)^t (t+1)! [(t-J_1-J_2-J_3)! (t-J_1-j_2-j_3)! (t-j_1-J_2-j_3)! \times \\ &\times (t-j_1-j_2-J_3)! (j_1+j_2+J_1+J_2-t)! (j_2+j_3+J_2+J_3-t)! \times \\ &\times (j_1+j_3+J_1+J_3-t)!]^{-1} \quad (171) \end{aligned}$$

şekindedir. Buradaki toplam negatif olmayan faktöriyel fonksiyonların argümanlarının bulunduğu tüm t tamsayı değerleri üzerindedir. $\Delta(j_1 j_2 j_3)$ fonksiyonları,

$$\Delta(j_1 j_2 j_3) = \left[\frac{(j_1+j_2-j_3)! (j_1-j_2+j_3)! (-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!} \right]^{1/2}$$

ile tanımlanır.

Şimdi Racah'ın [11] önerdiği 6j sembollerinin bulunduğu fiziksel probleme geri dönelim. Denk.(154)'de verilen özel durum için Denk.(153) ve

$$\langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \parallel [T^{(k_1)}(1) \times T^{(k_2)}(2)]^{(k)} \parallel \alpha_1' J_1' \alpha_2' J_2' J' \rangle = [(2J+1)(2k+1)(2J'+1)]^{1/2} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_1' & J_2' & J' \\ k_1 & k_2 & k \end{Bmatrix} \langle \alpha_1 J_1 \parallel T^{(k_1)} \parallel \alpha_1' J_1' \rangle \langle \alpha_2 J_2 \parallel T^{(k_2)} \parallel \alpha_2' J_2' \rangle$$

bağıntısını kullandığımızda

$$\langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 JM \mid \mathbf{T}^{(k)}(1) \cdot \mathbf{U}^{(k)}(2) \mid \alpha_1' J_1' \alpha_2' J_2' JM \rangle = (-1)^{J_2+J+J_1'} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J_2' & J_1' & k \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \langle \alpha_1 J_1 \parallel \mathbf{T}^{(k)} \parallel \alpha_1' J_1' \rangle \langle \alpha_2 J_2 \parallel \mathbf{U}^{(k)} \parallel \alpha_2' J_2' \rangle \quad (172)$$

genel sonucunu buluruz. Denk.(172) formülünde fizik, formülün sağ tarafındaki indirgenmiş matris elemanında vardır. Açısal momentum çiftlenimlerinin geometrik çarpanı 6j sembolleri ile verilir. Bu geometrik çarpan çeşitli fiziksel problemlerde kullanılabilen ilk toplamın genel bir fonksiyonudur.

İşlemlerimize devam etmeden önce işlemcilerin tensör çarpımının indirgenmiş bir matris elemanını hesaplamak için 6j sembollerinin diğer bir uygulamasını irdeleyelim. İrdelenecek bu uygulama

$$T_{\kappa}^{(k)}(1,2) = [T^{(k_1)}(1) \times T^{(k_2)}(2)]_{\kappa}^{(k)} = \sum_{\kappa_1 \kappa_2} \langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 \mid k_1 k_2 k \kappa \rangle T_{\kappa_1}^{(k_1)}(1) T_{\kappa_2}^{(k_2)}(2)$$

ifadesinde dikkate alınan durumdan farklıdır. Aynı sistemde ve düşünülen matris elemanındaki işlemlerin her ikisinde

$$\langle \alpha JM \mid [\mathbf{T}^{(k_1)} \times \mathbf{T}^{(k_2)}] \mid \alpha' J' M' \rangle$$

şeklinde olan $T^{(k_1)}$ ve $T^{(k_2)}$ işlemcilerini dikkate alalım. Bu hesaplamada gerekli olan dört 3j sembolü vardır: Bunlardan birincisi k için k_1 ve k_2 çiftlenimi, ikincisi Wigner-Eckart teoreminden kaynaklanan k için J ve J' çiftlenimi ve diğerleridir. $\alpha'' J'' M''$ li durumların tam bir seti $T_{\kappa_1}^{(k_1)}$ ve $T_{\kappa_2}^{(k_2)}$ arasında önerildiğinde Wigner-Eckart teoreminden ileri gelen k_1 için J

ve J'' çiftlenimi, k_2 için J'' ve J' çiftlenimi olmak üzere iki 3j sembolü vardır. Bunun bir sonucu olarak tensör çarpımının indirgenmiş matris elemanı

$$\begin{aligned} \langle \alpha J \| [\mathbf{T}^{(k_1)} \times \mathbf{T}^{(k_2)}]^{(k)} \| \alpha' J' \rangle &= (-1)^{J+J'+k} \sqrt{2k+1} \sum_{\alpha'' J''} \langle \alpha J \| \mathbf{T}^{(k_1)} \| \alpha'' J'' \rangle \times \\ &\times \langle \alpha'' J'' \| \mathbf{T}^{(k_2)} \| \alpha' J' \rangle \begin{Bmatrix} k_1 & k_2 & k \\ J' & J & J'' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (173)$$

ile verilir. $T^{(k)}$ ve $U^{(k)}$ nin skaler çarpımının özel bir durumunda Denk.(173) sonucu

$$\begin{aligned} \langle \alpha J \| [T^{(k)} \times U^{(k)}]^{(0)} \| \alpha' J \rangle &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{(2k+1)(2J+1)}} \times \\ &\times \sum_{\alpha'' J''} (-1)^{J''-J} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha'' J'' \rangle \langle \alpha' J \| U^{(k)} \| \alpha'' J'' \rangle \end{aligned} \quad (174)$$

şeklinde indirgenir.

$$\langle \alpha JM | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle$$

ve Denk.(133)'ün birlikte kullanılmasıyla Denk.(174) ifadesinden skaler çarpımın matris elemanlarının

$$\begin{aligned} \langle \alpha JM | (T^{(k)} \cdot U^{(k)}) | \alpha' JM \rangle &= \frac{1}{2J+1} \sum_{\alpha'' J''} (-1)^{J''-J} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha'' J'' \rangle \times \\ &\times \langle \alpha'' J'' \| U^{(k)} \| \alpha' J \rangle \end{aligned} \quad (175)$$

ile verildiği anlaşılır. $T^{(k)}$ ve $U^{(k)}$ hermityen işlemciler ise matris elemanı

$$\langle \alpha JM | T^{(k)} \cdot U^{(k)} | \alpha' JM \rangle = \frac{1}{2J+1} \sum_{\alpha'' J''} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha'' J'' \rangle \langle \alpha' J \| U^{(k)} \| \alpha'' J'' \rangle^* \quad (176)$$

ile verilir.

Denk.(150) ifadesinin doğrudan teriminde görülen matris elemanına Denk.(172) ifadesini uygulayabiliriz ve

$$\langle ij' JM | Y_k(1) \cdot Y_k(2) | ij' JM \rangle = (-1)^{i+j'+j} \begin{Bmatrix} j & j' & J \\ j' & j & k \end{Bmatrix} \langle j \| Y_k \| j \rangle \langle j' \| Y_k \| j' \rangle \quad (177)$$

sonucunu buluruz. Denk.(177)'de Denk.(150) veya Denk.(151)'deki k üzerinden alınan toplamın nispeten sınırlandırıldığı açıkça görülür. Matris elemanları için var olmayan bir katkının bulunabildiği k'nın en yüksek değeri minimum olan (2j,2j') den daha yüksek değildir. Denk.(150)'deki açık terim radyal integraller ile çarpılmış Denk.(177) matris elemanlarının bir toplamıdır.

$$\sum_k F^k (-1)^{j+j'+j} \begin{Bmatrix} j & j' & J \\ j' & j & k \end{Bmatrix} = \sum_k F_k \langle ij' JM | \mathbf{u}^{(k)}(1) \cdot \mathbf{u}^{(k)}(2) | ij' JM \rangle \quad (178)$$

ifadesiyle direkt terimi elde etmek için

$$\langle \alpha J \| U^{(k)} \| \alpha' J' \rangle = 1$$

ile tanımlanan birim tensör işlemcisini kullanabiliriz. Burada F^k katsayıları

$$F^k = \frac{4\pi}{2k+1} \langle j \| Y_k \| j \rangle \langle j' \| Y_k \| j' \rangle \int R_{nj}^2(r_1) R_{n'j'}^2(r_2) v_k(r_1, r_2) dr_1 dr_2 \quad (179)$$

ile tanımlanır. F^k nin başka tanımlarının olduğuna da dikkat edilmelidir. de-Shalit ve Talmi'nin benimsediği genel bir seçim hemen hemen $\int R_{nj}^2(r_1) R_{n'j'}^2(r_2) v_k(r_1, r_2) dr_1 dr_2$ radyal integralinin F^k ile gösterilebilir olmasıdır [6].

Denk.(172) ifadesinin yardımı ile değiş-tokuş terimini hesaplamak için ilk olarak çiftlenme sırasını değiştirmek zorundayız. Matris elemanı tanımlama durumlarının her ikisi için 1. nükleonun spini ve 2. nükleonun spini ile çiftleşmelidir. Bu Denk.(124) ile verilen bir fazı ortaya koyar ve değiş-tokuş terimindeki matris elemanı

$$\begin{aligned}
(1)^{j+j'-j} \langle ij' JM | Y_k(1) \cdot Y_k(2) | j' j JM \rangle &= (-1)^{j-j'} \begin{Bmatrix} j & j' & J \\ j & j' & k \end{Bmatrix} \langle j \| Y_k \| j' \rangle \langle j' \| Y_k \| j \rangle \\
&= \begin{Bmatrix} j & j' & J \\ j & j' & k \end{Bmatrix} \langle j \| Y_k \| j' \rangle^2
\end{aligned} \tag{180}$$

biçimine sahip olmalıdır. Denk.(180)'deki son eşitlik reel indirgenmiş matris elemanları durumuna uygulanan hermityen işlemcilerin indirgenmiş matris elemanlarının

$$\langle \alpha' J \| T^{(k)} \| \alpha J \rangle = (-1)^{J-J'} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle$$

bağıntısından ileri gelir.

Böylece Denk.(150)'deki değiş-tokuş terimi

$$\sum_k G^k \begin{Bmatrix} j & j' & J \\ j & j' & k \end{Bmatrix} \tag{181}$$

olarak ifade edilebilir ve burada Denk.(181) açılımındaki katsayılar

$$G^k = \frac{4\pi}{2k+1} \langle j \| Y_k \| j' \rangle^2 \int R_{nj}(r_1) R_{n'j'}(r_1) R_{nj}(r_2) R_{n'j'}(r_2) dr_1 dr_2 \tag{182}$$

ile verilir. Denk.(182)'deki $6j$ sembolü, $|j-j'| \leq k \leq j+j'$ olan toplam için var olan katkıların bulunduğu k dizinini açık bir şekilde gösterir.

Değiş-tokuş teriminin Denk.(181) açılımı Denk.(178) açılımı ile benzer değildir. Direkt terim burada birim vektörlerin skaler çarpımlarının lineer bir bileşiminden elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} j & j' & J \\ j & j' & k \end{Bmatrix} &= \sum_r (-1)^{r+k+J} (2r+1) \begin{Bmatrix} j & j' & J \\ j' & j & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j & j' & k \\ j' & j & r \end{Bmatrix} \\
&= \sum_r (-1)^{j+j'+r+k} (2r+1) \begin{Bmatrix} j & j' & k \\ j' & j & r \end{Bmatrix} \langle ij' JM | \mathbf{u}^{(r)}(1) \cdot \mathbf{u}^{(r)}(2) | ij' JM \rangle \tag{183}
\end{aligned}$$

sonucunu elde etmek için Denk.(159) toplam kuralını kullanırız. Değiş-tokuş terimi, böylece diğer iki yapıli etkileşimin doğrudan terimleri olarak ifade edilebilir

$$\sum F^{jk} \langle jj' JM | \mathbf{u}^{(k)}(1) \cdot \mathbf{u}^{(k)}(2) | jj' JM \rangle \quad (184)$$

şeklinde ifade edilebilir ve buradaki F^{jk} katsayıları

$$F^{jk} = \sum_t (-1)^{j+j'+k+t} (2k+1) \begin{Bmatrix} j & j' & t \\ j' & j & k \end{Bmatrix} G^t \quad (185)$$

ile verilir. Denk.(184) etkileşiminin genelde $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ nin bir fonksiyonu olarak ifade edilemeyeceğine dikkati çekmemiz gerekir.

Denk.(178)'deki F^k ve Denk.(185)'deki F^{jk} katsayılarında Y_k 'nin indirgenmiş matris elemanları, verilen j, j' li tek nükleon hallerin durumları arasındadır.

$$\langle l \| Y_k \| l' \rangle = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(2k+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

denklemini ise l, l' li durumlar arasındaki indirgenmiş matris elemanlarının açılımını verir. İndirgenmiş matris elemanlarının bu iki seti arasında basit bir bağıntı olmalıdır. Bu bağıntıyı elde etmek için tekrar

$$\begin{aligned} & \sum_{JM} (2J+1) \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \\ & = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ m_3 & m_4 & M_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ m_1 & m_3 & M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ m_2 & m_4 & M_{24} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ifadesine bakalım ve $J=j, J'=j'$ biçimi için $J_1 = J'_1 = \frac{1}{2}, J_2 = l$ ve $J'_2 = l'$ çiftlenimi

durumunu bu denkleme uygulayalım ve $T^{(k_1)}$ ifadesi $k_1=0$ için 1 olsun.

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \parallel [T^{(k_1)}(1) \times T^{(k_2)}(2)]^{(k)} \parallel \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle &= [(2J+1)(2k+1)(2J'+1)]^{1/2} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_1 & J'_2 & J' \\ k_1 & k_2 & k \end{Bmatrix} \langle \alpha_1 J_1 \parallel T^{(k_1)} \parallel \alpha'_1 J'_1 \rangle \langle \alpha_2 J_2 \parallel T^{(k_2)} \parallel \alpha'_2 J'_2 \rangle \end{aligned}$$

ifadesinin sağ tarafındaki 9j sembolündeki elemanlardan biri sıfırdır ($k_1=0$) ve bundan dolayı bu ifade Denk.(154)'e göre bir 6j sembolüne indirgemedir. Bu tür durumlardaki genel sonuç her bir bağımsız 1 ve 2 sistemleri için aşağıdaki şekilde formüle edilir:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \parallel \mathbf{T}^{(k)}(2) \parallel \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle &= (-1)^{J_1+J_2+J'+k} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \times \\ &\times \langle \alpha_2 J_2 \parallel \mathbf{T}^{(k)} \parallel \alpha'_2 J'_2 \rangle \begin{Bmatrix} J_2 & J & J_1 \\ J' & J'_2 & k \end{Bmatrix} \delta_{\alpha_1 \alpha'_1} \delta_{J_1 J'_1} \quad (186) \end{aligned}$$

Benzer bir bağıntı, yalnızca 1 sistemindeki bir tensör işlemcisi için birleştirilmiş bir sistemdeki indirgenmiş matris elemanları için elde edilir. Faz çarpanı farklıdır ve formülü

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \parallel \mathbf{T}^{(k)}(1) \parallel \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle &= (-1)^{J_1+J_2+J'+k} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \times \\ &\times \langle \alpha_1 J_1 \parallel \mathbf{T}^{(k)} \parallel \alpha'_1 J'_1 \rangle \begin{Bmatrix} J_1 & J & J_2 \\ J' & J'_1 & k \end{Bmatrix} \delta_{\alpha_2 \alpha'_2} \delta_{J_2 J'_2} \quad (187) \end{aligned}$$

ile verilir.

Y_k 'nın indirgenmiş matris elemanına Denk.(186) yı uyguladığımızda, $J_1 = J'_1 = \frac{1}{2}$,

$J_2 = l$, $J'_2 = l'$, $J=j$, $J'=j'$ değerlerini alırsak

$$\left\langle \frac{1}{2} l j \parallel Y^{(k)} \parallel \frac{1}{2} l' j' \right\rangle = (-1)^{(1/2)+l'+j+k} \sqrt{(2j+1)(2j'+1)} \langle l \parallel Y_k \parallel l' \rangle \begin{Bmatrix} l & j & \frac{1}{2} \\ j' & l' & k \end{Bmatrix} \quad (188)$$

ifadesini elde ederiz.

$$\langle l \| Y_k \| l' \rangle = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(2k+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ifadesi hatırlandığında indirgenmiş matris elemanını

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} l j \| Y^{(k)} \| \frac{1}{2} l' j' \right\rangle &= (-1)^{(l/2)+l'+j+k} \sqrt{\frac{(2j+1)(2j'+1)(2l+1)(2k+1)(2l'+1)}{4\pi}} \times \\ &\times \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l & j & \frac{1}{2} \\ j' & l' & k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (189)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Denk.(189) ifadesinden Denk.(178) ve Denk.(184)'deki toplamlarda görünen k değerlerinde daha fazla bir sınırlanmanın olduğu anlaşılır. Denk.(189) indirgenmiş matris elemanı $(-1)^{l+k+l'} = 1$ olması halinde sıfır olur. Bu nedenle Denk.(178) direkt teriminde, yalnızca sıfır olmayan k terimleri değerleri, $(-1)^{2l+l} = 1$ ve $(-1)^{2l+k} = 1$ 'nin bulunduğu bu değerlerdir. k'nın bu değerleri çifttir. Diğer bir deyişle Denk.(184) değiş-tokuş teriminde yalnızca k ile ilgili değerler, $(-1)^{l+k+l} = +1$, vardır.

Denk.(189) ifadesi çok basit bir biçime çevrilebilir. Bu ifadedeki 6j sembolü ve 3j sembolünün çarpımı için Denk.(168) bağıntısı Denk.(189) için de uygulanabilir. Bazı özel 3j sembol değerleri kullanıldığında

$$\begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} l & l' & k \\ j' & j & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} [1 + (-1)^{l+l+k}] [(2l+1)(2l'+1)]^{-1/2} \begin{pmatrix} j & j' & k \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (190)$$

ifadesine ulaşırız. Bu son ifadeyi Denk.(189)'da kullandığımızda, j ve j' li durumlar arasındaki Y_k 'nin indirgenmiş matris elemanı için başka bir bağıntı elde ederiz:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} l j \| Y^{(k)} \| \frac{1}{2} l' j' \right\rangle &= (-1)^{j-1/2} \sqrt{\frac{(2j+1)(2k+1)(2j'+1)}{4\pi}} \times \\ &\times \frac{1}{6} [1 + (-1)^{l+l+k}] \begin{pmatrix} j & j' & k \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (191)$$

Denk.(191) sonucu, esasında l ve l' den bağımsızdır. İlgilendiğimiz $(-1)^{l+l+k} = 1$ durumlarında Y_k indirgenmiş matris elemanı j ve j' nin bir fonksiyonu olup ve l ve l' den bağımsızdır. $m=j$ durumundaki $\kappa=0$ 'lı

$$Q_{\kappa}^{(2)} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} er^2 Y_{2\kappa}(\theta, \phi)$$

işlemcisinin beklenen değeriyle tanımlanan tek bir nükleon kuadrupol momentlerini hesaplamak için Denk.(191) ifadesine başvurabiliriz. Wigner-Eckart teoremi ve

$$\begin{pmatrix} j & j & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -j & 0 & j \end{pmatrix}$$

3j sembollerini kullandığımızda

$$\left\langle \frac{1}{2} l j m = j \left| Q_0^{(2)} \right| \frac{1}{2} l j m = j \right\rangle = -\frac{2j-1}{2(j+1)} e \langle r^2 \rangle \quad (192)$$

sonucunu elde ederiz. Denk.(192)'de $R_{nl}^2(r)$ ile çarpılmış r^2 'nin integrali $\langle r^2 \rangle$ ile gösterilmiştir.

Kuadrupol işlemcisinin farklı iki durumu arasındaki matris elemanı bu durumlar arasındaki elektrik kuadrupol geçişlerin oranlarını belirler. Statik, dinamik ya da yük dağılımının çok kutuplu momentleri gibi tanımlanan diğer işlemciler, diğer elektrik kuadrupol geçişlerinin oranlarını belirler. Şimdi geçiş oranlarını saptamada kullanılan çeşitli işlemcilerin matris elemanlarının nasıl hesaplanabileceğini görelim.

J_i spinli bir durum ile J_s spinli başka bir durum arasındaki L mertebeli çok kutuplu bir elektrik geçişin oranı

$$B(EL) = \frac{1}{2J_i + 1} \left\langle J_s \left\| \sum_i \frac{e_i}{e} r_i^L Y_L(\theta_i, \phi_i) \right\| J_i \right\rangle^2 \quad (193)$$

ile verilir. Buradaki e_i nükleonların etkin yükü ve e ise protonun elektrik yüküdür. Pratikte tüm gözlenen geçişlerde yayınlanan fotonun dalga boyu nükleer boyutlarla kıyaslandığında çok büyüktür yani

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} = \frac{\eta c}{\Delta E} \gg R \quad (194)$$

dir. Bu ifadedeki ΔE , ilk ve son nükleer durumlar arasındaki enerji farkıdır (çekirdek geri tepme enerjisi göz ardı edelim) ve R , nükleer yarı çaptır. Uzun dalga yaklaşımında Denk.(194) korunduğunda birim zaman başına geçiş olasılığı

$$T(L) = 8\pi \frac{e^2}{\eta c} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} k^{2L+1} B(L) \quad (195)$$

olur ve buradaki k dalga sayısı Denk.(194) ile belirlenir.

Denk.(195)'deki $B(L)$ indirgenmiş geçiş oranı elektrik geçişler için Denk.(193) ifadesine eşittir. Diğer elektromagnetik geçişler çekirdeğin statik ve dinamik magnetik momentlerinden ileri gelir. Bu tür magnetik geçişlerin indirgenmiş geçiş oranları

$$B(ML) = \frac{1}{2J_i + 1} \left(\frac{\eta}{mc} \right)^2 L(L+1) \times \left\langle \left\langle J_s \right\| \sum_i r_i^{L-1} \left[Y_{L-1}(\theta_i \phi_i) \times \left(\frac{g_{l_i}}{L+1} \mathbf{1}_i + \frac{1}{2} g_{s_i} \mathbf{s}_i \right) \right] \right\| \left\| J_i \right\rangle \right\rangle^2 \quad (196)$$

ile verilir ve buradaki m , nükleonun kütlesi, g_{l_i} ise i . nükleonun yörünge g çarpanı ve g_{s_i} , i . nükleonun spin g çarpanıdır.

Denk.(193), Denk.(196) ve Wigner-Eckart teoreminden elektromagnetik geçişlerdeki genel seçim kurallarının varlığı anlaşılır. L mertebe çoklu elektrik veya magnetik geçiş aşağıdaki eşitsizlik sağlandığında meydana gelir:

$$|J_i - J_s| \leq L \leq J_i + J_s \quad (197)$$

Diğer seçim kuralları ilk ve son durum arasındaki parite değişikliği ile ilgilidir. Elektrik geçişlerde parite değişikliği Denk.(193) ifadesindeki küresel harmoniklerin paritesi olan $(-1)^L$ 'ye eşit olmalıdır. Her hangi bir durumda l_i veya s_i 'li davranış durumunun paritesini değiştirmedeği için magnetik bir geçişin parite değişikliğinin $(-1)^{L-1}$ olduğu Denk.(196) ifadesinden çıkarılabilir.

$L=1$ olan M1 geçişleri durumunda Denk.(196)'daki işlemci $\sum_i (g_{l_i} \mathbf{l}_i + g_{s_i} \mathbf{s}_i)$ ile orantılıdır. j yörüngesindeki n tane özdeş nükleonun jj -çiftlenim durumlarında M1 işlemcisinin matris elemanı Wigner-Eckart teoremine göre $\sum_i g_j \mathbf{j}_i = g_j \sum_i \mathbf{j}_i = g_j \mathbf{J}$ ile orantılıdır ve buradaki g_j , $j = l + \frac{1}{2}$ için veya $j = l - \frac{1}{2}$ için sırasıyla

$$g_j = g_l l + \frac{1}{2} g_s$$

$$g_j = \frac{j}{j+1} \left(g_l (l+1) - \frac{1}{2} g_s \right)$$

ile verilir. Bundan dolayı uzun dalga yaklaşımında özdeş nükleonların j^n düzenlenişinin her iki durumu arasında hiçbir M1 geçişi olmaz. Böylesi düzenlenişlerin tüm durumlarının g çarpanları tek bir j nükleonunun g çarpanlarına eşit olduğunu geçerken vurgulamamız gerekir.

Burada tek nükleon durumları arasındaki işlemcilerin matris elemanlarını değerlendirdik. Tek nükleonlu elektrik geçişlerin indirgenmiş oranlarını elde etmek için Denk.(191)'i kullanırız ve

$$B_{tek p}(EL) = \frac{1}{4\pi} (2L+1)(2j_s+1) \begin{pmatrix} j_i & j_s & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 \langle r^L \rangle^2 \quad (198)$$

sonucunu buluruz. Bu denklemdeki radyal integral

$$\langle r^L \rangle = \int_0^\infty R_{n_l l_i}(r) R_{n_s l_s}(r) r^L dr \quad (199)$$

ile tanımlanır. $J_i=j_i$, $J_s=j_s$ 'ye ek olarak aşağıdaki şartlar korunmadıkça Denk.(198) oranının yok olacağını unutmamalıyız. Elektrik geçişler için

$$|l_i - l_s| \leq L \leq l_i + l_s, \quad (-1)^{l_i + l_s + L} = 1 \quad (200)$$

olur.

Tek nükleonlu magnetik geçişlerin indirgenmiş oranlarını elde etmek için ilk olarak Denk.(196)'daki tensör çarpımını

$$\left[\mathbf{Y}_{L-1} \times \left(\frac{g_l}{L+1} \mathbf{1} + \frac{1}{2} g_s \mathbf{s} \right) \right]^{(L)} = \frac{g_l}{L+1} [\mathbf{Y}_{L-1} \times \mathbf{j}]^{(L)} + \left(\frac{1}{2} g_s - \frac{g_l}{L+1} \right) [\mathbf{Y}_{L-1} \times \mathbf{s}]^{(L)} \quad (201)$$

yeniden yazalım. Bu ifadenin sağ tarafındaki ilk terimin indirgenmiş matris elemanı Denk.(173) ifadesinin kullanılmasıyla elde edilebilir. Bu ifadedeki toplamda yalnızca $J''=J_i=j_i$ li ilk terimin sınırlandırıldığına dikkat edelim ve bu durumda Denk.(191) ve

$$\langle \alpha J \| \mathbf{J} \| \alpha' J' \rangle = \sqrt{J(j+1)(2J+1)} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{JJ'}$$

ifadesini kullanırız. Denk.(201)'in sağındaki ikinci terimde çiftlenim mertebesini değiştiririz ve s ile değiştirilen $T^{(k_1)}$ ve \mathbf{Y}_{L-1} ile değiştirilen $T^{(k_2)}$ nin olduğu

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \| [T^{(k_1)}(1) \times T^{(k_2)}(2)]^{(k)} \| \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle &= [(2J+1)(2k+1)(2J'+1)]^{1/2} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_1 & J'_2 & J' \\ k_1 & k_2 & k \end{Bmatrix} \langle \alpha_1 J_1 \| T^{(k_1)} \| \alpha'_1 J'_1 \rangle \langle \alpha_2 J_2 \| T^{(k_2)} \| \alpha'_2 J'_2 \rangle \end{aligned}$$

ifadesini kullanırız. Bu işlemcilerin indirgenmiş matris elemanları Denk.(191) ile verilir. Her iki indirgenmiş matris elemanının birleştirilmesi ile tek nükleon indirgenmiş geçiş oranını

$$\begin{aligned}
B_{tek\ par.}(ML) &= \left(\frac{\eta}{mc}\right)^2 \frac{L(2L+1)}{2j_i+1} \left[\frac{g_l}{L+1} (-1)^{i_i+i_s+l} \sqrt{2L+1} \langle j_s \| Y_{L-1} \| j_i \rangle \times \right. \\
&\times \sqrt{j_i(j_i+1)(2j_i+1)} \begin{Bmatrix} L-1 & 1 & L \\ j_i & j_s & j_i \end{Bmatrix} + \left(\frac{1}{2} g_s - \frac{g_l}{L+1} \right) \sqrt{(2j_i+1)(2L+1)(2j_i+1)} \times \\
&\times \langle l_s \| Y_{L-1} \| l_i \rangle \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l_s & j_s \\ \frac{1}{2} & l_i & j_i \\ 1 & L-1 & L \end{Bmatrix} \left. \sqrt{\frac{3}{2}} \right]^2 \langle r^{L-1} \rangle^2 \quad (202)
\end{aligned}$$

olarak buluruz. Denk.(196) indirgenmiş oranı $J_j=j_i$, $J_s=j_s$ 'ye ek olarak aşağıdaki bağıntıları sağlamadıkça yok olur. Magnetik geçişler için

$$|l_i - l_s| \leq L-1 \leq l_i + l_s, \quad (-1)^{l_i+l_s+L-1} = 1 \quad (203)$$

yazılır.

Köşeli parantezdeki ilk terimde Denk.(191)'i ve $6j$ sembolün açık ifadesini kullanınız. İkinci terimdeki indirgenmiş matris elemanı için

$$\langle l \| Y_k \| l' \rangle = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(2k+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_4 & J_{14} \\ J_2 & J_3 & J_{23} \\ J_{12} & J_{34} & J \end{Bmatrix} &= \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, m_4 \\ M_{13}, M_{24}}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ m_3 & m_4 & M_{34} \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ m_1 & m_3 & M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ m_2 & m_4 & M_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ifadelerini kullanınız ve

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} l_s & l_i & L-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l_s & j_s \\ \frac{1}{2} & l_i & j_i \\ 1 & L-1 & L \end{Bmatrix} &= \begin{pmatrix} l_s & l_i & L-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_s & \frac{1}{2} & l_s \\ j_i & \frac{1}{2} & l_i \\ 1 & 1 & L-1 \end{Bmatrix} = \\
&= \sum \begin{pmatrix} j_s & \frac{1}{2} & l_s \\ m_1 & m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_i & \frac{1}{2} & l_i \\ m_3 & m_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_s & j_i & L \\ m_1 & m_3 & M \end{pmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 1 & L-1 \\ M & M' & 0 \end{pmatrix} \quad (204)
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Bu denklemdeki sıfır olmayan 3j sembolleri, $m_2 = \pm \frac{1}{2}$, $m_4 = \pm \frac{1}{2}$, $m_1 = -m_2$, $m_3 = -m_4$ ve $M = -M'$ değerlerine sahip olmak zorundadır. Bu nedenle, sıfır olmayan katkılarla birlikte Denk.(204) ifadesinin sağ tarafındaki terimler yalnızca $m_1 = m_3 = \frac{1}{2}$, $m_2 = m_4 = -\frac{1}{2}$ ($M = -1, M' = 1$); $m_1 = m_3 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = m_4 = \frac{1}{2}$ ($M = 1, M' = -1$); $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_3 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{1}{2}$, $m_4 = \frac{1}{2}$ ($M = M' = 0$) ve $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_3 = \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $m_4 = -\frac{1}{2}$ ($M = M' = 0$) değerlerine sahiptir.

Şimdi 3j sembolleri arasındaki bir bağıntıyı kullanalım. Denk.(120) tekrarlama bağıntısında $m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}$ olarak dikkate alır ve sonucu 3j sembollerince ifade ederiz. Elemanların küçük bir yeniden düzenlenişinden sonra şu bağıntıyı elde ederiz:

$$\begin{pmatrix} j & j' & J \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{J(J+1)}} \{(2j+1)(-1)^{j+j'+J} + (2j'+1)\} \begin{pmatrix} j & j' & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (205)$$

Şimdi bu bağıntıyı, 3j sembollerinin simetri özellikleri ve bunların bazı gerçek değerlerini kullanabiliriz. Denk.(203) seçim kurallarını göz önüne alarak Denk.(202) ifadesi için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
B_{tek\ par.}(ML) &= \left(\frac{\eta}{mc}\right)^2 \frac{L(2L+1)}{2j_i+1} \frac{1}{4} \frac{(2j_i+1)(2j_s+1)}{4\pi L} \left[\frac{g_l}{L+1} \begin{pmatrix} j_i & j_s & L-1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right] \times \\
&\quad \times ((j_i + j_s + L + 1)(j_i + L - j_s)(j_s + L - j_i)(j_i + j_s - L + 1))^{1/2} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}g_s - \frac{g_l}{L+1}\right) \begin{pmatrix} j_i & j_s & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} (L + \frac{1}{2} \{(-1)^{(1/2)+l_i-j_i} (2j_i+1) + (-1)^{(1/2)+l_s-j_s} \times \\
&\quad \times (2j_{s+1})\})^2 < r^{L-1} >^2 \quad (206)
\end{aligned}$$

Bir tek nükleonlu magnetik geçiş için ilginç bir durum $L = |j_i - j_s|$ olduğundaki durumdur. Bu en seri orana sahip olan geçiştir. Eğer j_i ve j_s 'nin daha büyüğünü $j_>$ ile daha küçüğünü $j_<$ ile gösterirsek $L = j_> - j_<$ ifadesini yazabiliriz. $j_> = l_> \pm \frac{1}{2}$ ve $j_< = l_< \pm \frac{1}{2}$ 'nin tüm olası bileşimlerinden $L-1 = l_> - l_<$ durumunun bulunduğu $j_> = l_> + \frac{1}{2}$, $j_< = l_< - \frac{1}{2}$ ifadelerinden yalnızca biri Denk.(203) seçim kuralları ile tutarlıdır. Bu durumda Denk.(206)'daki ilk terim, bu terimdeki $(L-1 < |j_i - j_s|)$ sıfır olan 3j sembolünden dolayı yok olur. Bunun sonucunda indirgenmiş matris elemanı

$$\begin{aligned}
B_{t.p.}(ML) &= \left(\frac{\eta}{2mc}\right)^2 \left(\frac{1}{2}g_s - \frac{g_l}{L+1}\right) \frac{4L^2(2L+1)}{4\pi} \times \\
&\quad \times (2j_s+1) \begin{pmatrix} j_i & j_s & L \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 < r^{L-1} >^2 \quad (207)
\end{aligned}$$

ile verilir. Tek proton geçişleri için bu denklem kullanır ve B(ML) önceki ifadelerinde protona has $\frac{1}{2}g_s = 2.79$, $g_l = 1$ sayılarını yerlerine yazarken, tek nötron geçişleri için de bu sayıları $\frac{1}{2}g_s = -1.91$, $g_l = 0$ olarak alırız. Nükleer magnetonun karesindeki e^2 çarpanı Denk.(195)'de ve $(\eta/2mc)^2$ çarpanı da Denk.(207)'de açıkça ortaya çıkmaktadır. Bunlar B(LM)'nin diğer ifadelerinde de vardır.

Şimdi iki nükleonlu dalga fonksiyonlarına ve matris elemanlarına geri dönelim. Aynı yörüngeli iki nükleonun durumu $n'=n$, $l'=l$ ve $j'=j$ 'li özel bir durumdur. Böylesi özel bir durumda $T=1$ 'li

$$\begin{aligned} \Psi_{jj'TM_TJM}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{mm'} \langle jm \ j'm' | jj' JM \rangle \times \\ \times [\Psi_{jm}(1) \Psi_{j'm'}(2) + (-1)^T \Psi_{jm}(2) \Psi_{j'm'}(1)] \eta_{T,M_T} \end{aligned}$$

dalga fonksiyonu, Clebsch-Gordan katsayılarının Denk.(125) simetri özelliklerinden dolayı tek J değerleri için sıfır olur. J 'nin çift değerli durumlarında dalga fonksiyonu yok olmaz fakat uygun bir şekilde normalize olduğundan yukarıdaki dalga fonksiyonundaki köşeli parantezlerinin sadece ilk terimleri alınmalı ve $\sqrt{2}$ çarpanı ihmal edilmelidir. $T=0$ durumları için yalnızca J 'nin tek değerlerine sahip olan bu dalga fonksiyonları sıfır olmaz. Ayrıca bu durumdaki normalize dalga fonksiyonları bu dalga fonksiyonundaki köşeli parantezdeki ilk terimlerinin korunması ve $\sqrt{2}$ çarpanının ihmal edilmesi ile elde edilebilir. Her iki durumda da bu tür durumlar arasındaki iki yapılı bir etkileşimin matris elemanı yalnızca Denk.(178) direkt terimine eşittir. Değiş-tokuş terimi, bu durumda direkt terime eşittir fakat değiş-tokuş teriminin katkısı yukarıdaki dalga fonksiyonunun farklı normalizasyonundan dolayı içerilmemelidir [14].

Denk.(146) basit etkileşimi yalnızca iki nükleon arasındaki uzaklığa eşittir. Daha karmaşık etkileşimler nükleonların öz spin vektörlerinin fonksiyonlarıdır. Bu tür etkileşimler nükleonlar arasındaki Coulomb itmesinin bulunduğu asıl etkileşimin olduğu atom spektroskopisinde meydana gelir. Bunlar elektronlar arasındaki magnetik spin-spin etkileşiminden ileri gelmez. Etkileşimdeki böyle terimler dalga fonksiyonlarının antisimetrliliğinden kaynaklanmaktadır. Nükleer fizikte Denk.(146)'ya benzer bilinen etkileşimler ile beraber değiş-tokuş kuvvetleri kullanılır. Bunlardan biri olan spin değiş-tokuş etkileşimleri iki nükleonun S spin değerine açık bir biçimde bağlıdır. $S=1$ durumlarında potansiyel $V_1(|r_1 - r_2|)$ olmasına karşın $S=0$ durumunda $V_0(|r_1 - r_2|)$ 'dır. Bu tür bir etkileşme simetrik durumlarda ($S=1$ 'li durumlar) $+1$ özdeğerine sahip olurken antisimetrik durumlarda ($S=0$ 'lı durumlar) -1 özdeğerine sahip olan P_{12}^σ spin değiş-tokuş işlemcisi ile ifade edilir. Bu ifade

$$\begin{aligned}
V(1,2) &= \frac{1}{2}(1 + P_{12}^{\sigma})V_1(|r_1 - r_2|) + \frac{1}{2}(1 - P_{12}^{\sigma})V_0(|r_1 - r_2|) \\
&= \frac{1}{2}[V_1(|r_1 - r_2|) + V_0(|r_1 - r_2|)] + P_{12}^{\sigma} \frac{1}{2}[V_1(|r_1 - r_2|) - V_0(|r_1 - r_2|)]
\end{aligned} \quad (208)$$

şeklinde olur.

Spin değiş-tokuş işlemcisi iki nükleonun s_1 ve s_2 spin vektörlerinden açık bir biçimde

$$P_{12}^{\sigma} = \frac{1}{2}(1 + 4(s_1 \cdot s_2)) \quad (209)$$

şeklinde oluşturulabilir. Spin değiş-tokuş işlemcisinin özelliğine sahip Denk.(209) işlemcisini doğrulamak için işlemci özdeşliğinden yararlanınız:

$$2(s_1 \cdot s_2) = (s_1 + s_2)^2 - s_1^2 - s_2^2 = S(S + 1) - \frac{3}{2} \quad (210)$$

Bu son denklemden $2(s_1 \cdot s_2)$ ifadesinin $S^2 = (s_1 + s_2)^2$ köşegen olması halinde köşegen olduğunu görürüz ve $S=1$ için $2(s_1 \cdot s_2)$ ifadesinin özdeğeri $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ ve $S=0$ için ise $-\frac{3}{2}$ 'dir. Bu nedenle Denk.(209) ifadesinin özdeğerleri sırasıyla +1 ve -1 dir.

Denk.(208) ifadesindeki P_{12}^{σ} 'nin Denk.(209) ifadesini kullandığımızda bilinen $(3V_1 + V_0)/4$ etkileşimine ek olarak $(s_1 \cdot s_2) V(|r_1 - r_2|)$ biçimine sahip başka bir etkileşimi de elde ederiz. Böylesi etkileşimler çeşitli teorilerden meydana getirilebilir. Denk.(146)'daki gibi uzaysal kısmı açarsak $Y_k(1) \cdot Y_k(2)$ skaler çarpımlarındaki açılımını bu etkileşime için elde ederiz. Bu ifadeyi spinlerin skaler çarpımları ile çarparsak k. terimdeki çarpımı

$$(s_1 \cdot s_2) (Y_k(1) \cdot Y_k(2)) \quad (211)$$

şeklinde buluruz. LS-çiftleniminde Denk.(211) çarpımının matris elemanları kolayca hesaplanabilir. jj-çiftleniminde ilk olarak, bu ifadeye Denk.(172)'yi uygulayabilmek için bir biçime dönüştürmek zorundayız. Bu dönüşüm birinci durumda j_1 ile ilgili olan indirgenemez bir $T^{(r)}(1)$ tensör biçimi için s_1 spin vektörü $Y_k(1)$ ile çiftlenmesi ile ikincisi $T^{(r)}(2)$ biçimi için s_2 spin vektörü $Y_k(2)$ ile çiftlenmesi ile yapılır. Bu çiftlenim değişikliği dönüşümü sayısal çarpanların dışında Denk.(155) ifadesi ile verilir. Bu nedenle

$$(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) (\mathbf{Y}_k(1) \cdot \mathbf{Y}_k(2)) = \sum_r ([s_1 \times Y_k(1)]^{(r)} \cdot [s_2 \cdot Y_k(2)]^{(r)}) (-1)^{k+r+1} \quad (212)$$

sonucunu elde ederiz. Bu denklemdeki toplamda r nin mümkün değerleri $r = k-1, k, k+1$ 'dir. Denk.(212)'deki skaler çarpımların matris elemanlarının değerlerini bulmak için Denk.(172) genel formülünü kullanırız. Hesaplanan indirgenmiş matris elemanları

$$\left\langle \frac{1}{2} l j \left\| [s \times Y_k]^{(r)} \right\| \frac{1}{2} l' j' \right\rangle = \sqrt{(2j+1)(2r+1)(2j'+1)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & l & j \\ \frac{1}{2} & l' & j' \\ 1 & k & r \end{Bmatrix} \left\langle \frac{1}{2} \left\| s \right\| \frac{1}{2} \right\rangle \langle l \left\| Y_k \right\| l' \rangle \quad (213)$$

olarak verilir. s nin indirgenmiş matris elemanı

$$\langle \alpha J \left\| J \right\| \alpha' J' \rangle = \sqrt{J(j+1)(2J+1)} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{JJ'}$$

bağıntısıyla $\sqrt{3/2}$ olarak ve Y_k 'nin indirgenmiş matris elemanı

$$\langle l \left\| Y_k \right\| l' \rangle = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(2k+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ifadesiyle verilir.

Nükleonların spin etkileşimine bağlı daha karmaşık etkileşimler merkezi olmayan etkileşmelerde görünür. Denk.(146) ve Denk.(208) etkileşimlerin her ikisi spin değişkenlerinde ve uzay koordinatlarında skalerdir ve merkezi etkileşimler olarak

adlandırılır. Tüm kabul edilebilir iki yapılı etkileşimler toplam açısal momentuma göre skaler olmak zorundadır. Bu tür skalerler spin vektörlerinden oluşturulan bir tensörün ve bilinen uzayda aynı mertebeli bir tensörün skaler çarpımları olarak oluşturulabilir. s_1 ve s_2 spin vektörleri rankı $k=0,1,2$ olan indirgenemez tensörler oluşturacak şekilde birleştirilebilir. $k=0$ durumu yukarıda irdelenen merkezi etkileşmelere karşılık gelir. $k=1$ 'li merkezi olmayan etkileşimin bir örneği karşılıklı spin-yörünge ile verilir.

$$((s_1 \cdot s_2) \cdot L_{12}) V_{Spin-Yör.}(|r_1 - r_2|) \quad (214)$$

Buradaki L_{12} , r_1-r_2 bağıl koordinatları ile ilgili açısal momentumdur, yani

$$L_{12} = \frac{1}{2}(r_1 - r_2) \times (p_1 - p_2) \quad (215)$$

ile verilir. Bu durumda işe $V_{Spin-Yör.}(|r_1 - r_2|)$ ifadesinin açılımı ile başlayabiliriz ve j_1 ve j_2 ile ilişkili olan indirgenemez tensör işlemcilerinin skaler çarpımlarının lineer bir birleşimi olarak Denk.(214)'ü elde etmek için çiftlenim değiştirme dönüşümlerini kullanabiliriz. LS-çiftlenimindeki durum aşağıda görüldüğü gibi çok daha basittir. Bu şemadaki Denk.(214) ifadesinin matris elemanları hesaplamak ve bu durumda jj-çiftlenimine dönüşüm yararlıdır.

Bununla birlikte, etkileşimlerin spinlere bağlı karmaşıklığı $k=2$ 'nin bulunduğu tensör kuvvetleri ile ortaya koyulur. Böylesi etkileşimler iki magnetik dipol (iki kutuplu) arasındaki etkileşimi ifade eden elektrodinamikte olur. Atomik elektronlar arasındaki bu magnetik etkileşimler önemsizdir fakat çekirdekte, nükleer etkileşmelerden meydana gelen tensör kuvvetleri çok önemli bir rol üstlenir. Bu tensör kuvvetlerinin etkisi ilk olarak detöronda gözlemlendi ve o zamandan bu yana inceleme konusu olmuştur. Tensör kuvvetlerinin alışılmış biçimi

$$\left[\frac{(s_1 \cdot (r_1 - r_2)) \cdot (s_2 \cdot (r_1 - r_2))}{|r_1 - r_2|^2} - \frac{1}{3}(s_1 \cdot s_2) \right] V_T(|r_1 - r_2|) \quad (216)$$

ile verilir. Spinlerdeki bir $k=2$ tensörü ile uzay koordinatlarında bir $k=2$ tensörünün skaler çarpımının reel olduğunu doğrulamak için bu son denklemdeki vektörleri yeniden çiftlendirelim. Denk.(212) ifadesini kullandığımızda

$$(s_1 \cdot (r_1 - r_2))(s_2 \cdot (r_1 - r_2)) = ([s_1 \times s_2]^{(2)} \cdot [(r_1 - r_2) \times (r_1 - r_2)]^{(2)}) - \\ - ([s_1 \times s_2]^{(1)} \cdot [(r_1 - r_2) \times (r_1 - r_2)]^{(1)}) + ([s_1 \times s_2]^{(0)} \cdot [(r_1 - r_2) \times (r_1 - r_2)]^{(0)}) \quad (217)$$

sonucuna ulaşırız. Bu son ifadenin sağ tarafındaki ikinci terim, vektör bileşenlerinin sıra değişimli olması halinde bir vektörün kendisi ile vektör çarpımı sıfır olduğu için yok olur. En son terimin $|r_1 - r_2|^2$ ile bölünmesiyle Denk.(216) ifadesinin skaler olan ikinci terimi kolayca iptal edilir. Böylece Denk.(216) bağıntısı yukarıda ifade edilen dönüşüm özelliklerini gerçekler. Ayrıca, bu durumda Denk.(146) ifadesindeki $V(|r_1 - r_2|)$ için yukarıda uygulanan $Y_k(1)$ ve $Y_k(2)$ 'nin skaler çarpımlarının lineer bir bileşiminde $V_T(|r_1 - r_2|)$ açılımını yapabilmek de mümkündür. Bu durumda $[Y_k(1) \times Y_k(2)]^{(2)}$ biçimindeki çarpımların lineer bir bileşimi olarak $[(r_1 - r_2) \times (r_1 - r_2)]^{(2)} (Y_k(1) \cdot Y_k(2))$ ifadesini açmak olasıdır. Bu yapıldığında $([s_1 \times Y_k(1)]^{(r)} \cdot [s_2 \times Y_k(2)]^{(r)})$ biçimindeki skaler çarpımların bir bileşimindeki $([s_1 \times s_2]^{(2)} \cdot [Y_k(1) \times Y_k(2)]^{(2)})$ skaler çarpımlarının çiftlenimleri değiştirmede Denk.(155)'i kullanmak mümkündür. Ayrıca bu durumda LS çiftlenimindeki matris elemanların hesaplanması çok daha kolaylaşır. Şimdi bu çiftlenme düzenindeki iki yapıyı etkileşimlerin matris elemanlarını irdeleyelim.

Yukarıda dikkate alınan Denk.(146), Denk.(214) ve Denk.(216) etkileşimleri nükleonların öz spinlerindeki k ranklı ($k=0,1,2$) bir $T^{(k)}$ tensörünün ve uzay koordinatlarında aynı ranka sahip bir $W^{(k)}$ tensörünün skaler çarpımıdır. LS-çiftlenimi için Denk.(172) ifadesini uyguladığımızda

$$\langle SLJM | (T^{(k)} \cdot W^{(k)}) | S' L' J M \rangle = (-1)^{L+S'+J} \begin{Bmatrix} S & L & J \\ L' & S' & k \end{Bmatrix} \langle S || T^{(k)} || S' \rangle \langle L || W^{(k)} || L' \rangle \quad (218)$$

sonucunu buluruz. Spin işlemcisinin indirgenmiş matris elemanı $k=0$ için Denk.(172) ve $k=2$ için

$$\langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \| [T^{(k_1)}(1) \times T^{(k_2)}(2)]^{(k)} \| \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle = [(2J+1)(2k+1)(2J'+1)]^{1/2} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_1 & J'_2 & J' \\ k_1 & k_2 & k \end{Bmatrix} \langle \alpha_1 J_1 \| T^{(k_1)} \| \alpha'_1 J'_1 \rangle \langle \alpha_2 J_2 \| T^{(k_2)} \| \alpha'_2 J'_2 \rangle$$

ile verilir. $k=1$ durumunda Denk.(214)'deki spin işlemcisinin indirgenmiş matris elemanı direkt olarak

$$\langle \alpha J \| J \| \alpha' J' \rangle = \sqrt{J(j+1)(2J+1)} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{JJ'}$$

denklemleri ile verilir. Gerçekte $k=0$ 'lı merkezi bir etkileşme durumu bile daha basittir. Denk.(208) ifadesindeki F_{12}^σ ifadesini $(-1)^{S+1}$ ile değiştirebiliriz. $W^{(k)}$ tensörünün matris elemanları da benzer şekilde hesaplanabilir.

Potansiyelden bağımsız alışılmış bir spin durumu düşünelim. Bu durum spin işlemcileri içermediğinden uzaysal dönmeler altında skaler olmalıdır. Böylece L'nin bileşenleri ile sıra değişimlidir. Bundan dolayı ve $k=0$ için Wigner-Eckart teoremiyle uyum için, aynı L değerli durumlar arasında var olan matris elemanlarına sahip olabilir. Denk.(208) veya Denk.(212) ifadeleri gibi çok genel merkezi bir etkileşim alışılmış uzayda bir skaler ve spin ile ilgilide bir skalerdir. Bu nedenle spin durumlarını da içeren etkileşimin LS-çiftlenimi dalga fonksiyonları arasında var olan matris elemanları L ve S nin her ikisinde de köşegendir. Bu tür bir etkileşimin matris elemanları, Denk.(218) ifadesinde $k=0$, $S'=S$ ve $L'=L$ alınmasıyla

$$\frac{1}{\sqrt{(2S+1)(2L+1)}} \langle S \| T^{(0)} \| S \rangle \langle L \| W^{(0)} \| L \rangle \quad (219)$$

şeklinde elde edilen bir bağıntı ile bulunur ve bu bağıntı J den bağımsızdır. Ek olarak küçük merkezi olmayan etkileşimlerin varlığında aynı S ve L'li tüm durumlar ve $|S-L| \geq J \geq S+L$ şartını sağlayan J'li durumlar hemen hemen dejeneredir. Böylesi durumlar bir çokluktur. Ayrıca LS-çiftleniminde simetrik ve antisimetrik durumlar arasındaki matris elemanları uzay koordinatlarında bilinen bir potansiyel etkileşimin

simetrisinden dolayı yok olur. Denk.(219) ifadesinden LS-çiftlenme düzenindeki her bir merkezi etkileşmenin köşegen olduğu görülür. Denk.(218)'de $k=1$ ve $k=2$ 'li merkezi olmayan etkileşim durumunda bile köşegen ve köşegen olmayan matris elemanlarının basit bir biçimini varsaydık. jj -çiftlenme düzeninde tek nükleon spin-yörünge etkileşimleri köşegendir. Nükleon-nükleon etkileşimleri jj -çiftlenme düzeninde köşegen olmayan matris elemanlarına sahiptir. Eğer nükleonların karşılıklı etkin etkileşimi spin-yörünge şiddetleri ile büyük ölçüde karşılaştırılırsa jj -çiftlenme düzeni yarımla eğilimindedir ve LS-çiftlenimi limitine daha yakın hareketli dalga fonksiyonları oluşturur. Deneysel verilerden jj çiftleniminin çekirdekdeki yaygın çiftlenme düzeni olduğu görülür. Bununla birlikte, belirli durumlarda karşılıklı etkileşmeler jj -çiftlenimi saflığından önemli ayrılmalara neden olur. Deneysel veriler jj -çiftlenimi saflığından ayrılmalara neden olan durumların jj -çiftlenimi limiti olan daha yakın durum ve daha yüksek izospini gibi etkenlerden bazılarını aşağıda tanımladık.

$$T^-T^+ = T^2 - (T^0)^2 - T^0 = T(T+1) - M_T^{(i)}(M_T^{(i)} + 1) = T(T+1) - M_T^{(i)}M_T^{(s)}$$

Durumları arasındaki bu etkileşmenin matris elemanları jj -çiftlenimi için yukarıdaki uyarlamaya benzer bir yöntemle elde edilebilir. Bu etkileşimin matris elemanları aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$\int \Phi_{l'l''LM_L}^* V(r_1 - r_2) \Phi_{l'l''LM_L} = \langle l_1 l_2' LM_L | V | l_1 l_2' LM_L \rangle \pm \langle l_1 l_2' LM_L | V | l_2 l_1' LM_L \rangle \quad (220)$$

l ve l' nün 1 ve 2 indisleri bu açısal momentuma sahip 1 veya 2 inci nükleonun durumlarına işaret eder. Böylece bu matris elemanları doğrudan ve değiştirme terimlerinin lineer birleşimleridir. Toplam dalga fonksiyonu tamamen antisimetrik olmalıdır. Bu nedenle, dalga fonksiyonunun spin-izospin kısmı antisimetrik ise bir + işareti Denk.(220) ifadesinde görünür. Bu ifade simetrik spin fonksiyonu ($S=1$) ve antisimetrik izospin ($T=0$) veya bunun tersi olan yani $S=0$ ve $T=1$ durumları için meydana gelir. Denk.(220)'de görülen - işareti spin-izospin kısmının simetrik olduğunu ifade eder ve böylesi bir durum da $S=1$, $T=1$ veya $S=0$, $T=0$ için oluşur. Bu şekilde çeşitli spin-izospin durumlarındaki Denk.(220) matris elemanlarını

$$\begin{aligned} \langle l_1 l_2' LM_L | V | l_1 l_2' LM_L \rangle - (-1)^{S+T} \langle l_1 l_2' LM_L | V | l_2 l_1' LM_L \rangle = \\ = \langle l l' LM_L | V | l l' LM_L \rangle - (-1)^{S+T+l+l'} \langle l l' LM_L | V | l l' LM_L \rangle \end{aligned} \quad (221)$$

olarak ifade edebiliriz. Son eşitlikteki değiştirme teriminin sağ tarafındaki çiftlenme dizini Denk.(124) ifadesine göre değiştir. Bu Denk.(172) ifadesindeki terimleri burada kullanmamızı mümkün kılar.

Denk.(146) ve Denk.(2.49)'a göre $V(|r_1 - r_2|)$ ifadesini açtığımızda direkt terimler için

$$\begin{aligned} \langle l l' LM_L | V | l l' LM_L \rangle = \sum_k \frac{4\pi}{2k+1} \langle l \| Y_k \| l \rangle \langle l' \| Y_k \| l' \rangle (-1)^{l+l'+L} \begin{pmatrix} l & l' & L \\ l' & l & k \end{pmatrix} \times \\ \times \int R_{nl}^2(r_1) R_{n'l'}^2(r_2) v_k(r_1, r_2) dr_1 dr_2 = \sum_k F^k (-1)^{l+l'+L} \begin{pmatrix} l & l' & L \\ l' & l & k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (222)$$

sonucunu elde ederiz. Benzer olarak değiştirme terimi

$$\begin{aligned} (-1)^{l+l'+L} \langle l l' LM_L | V | l l' LM_L \rangle = \sum_k \frac{4\pi}{2k+1} \langle l \| Y_k \| l' \rangle^2 \begin{pmatrix} l & l' & L \\ l & l' & k \end{pmatrix} \times \\ \times \int R_{nl}(r_1) R_{n'l'}(r_1) R_{nl}(r_2) R_{n'l'}(r_2) v_k(r_1, r_2) dr_1 dr_2 = \sum_k G^k \begin{pmatrix} l & l' & L \\ l & l' & k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (223)$$

biçimine getirilebilir.

Aynı $n'=n$, $l'=l$ yörüngesinde iki durumlu özel bir durumdur. Clebsch-Gordan katsayılarının Denk.(125) simetri özelliklerinden dolayı L'nin çift değerli durumları simetriktir ve $S=0$, $T=1$ veya $S=1$, $T=0$ spin-izospin durumlarına sahipken L'nin tek değerli durumları antisimetriktir ve $S=0$, $T=0$ ya da $S=1$, $T=1$ spin-izospin durumları ile çarpılmalıdır. Her iki durumda da

$$T^- T^+ = T^2 - (T^0)^2 - T^0 = T(T+1) - M_T^{(i)} (M_T^{(i)} + 1) = T(T+1) - M_T^{(i)} M_T^{(s)}$$

ifadesinin köşeli parantezlerindeki yalnızca ilk terim korunmalıdır ve $\sqrt{2}$ faz çarpanı ihmal edilmelidir. Bundan dolayı her iki durumun matris elemanı direkt terime eşit olur.

Denk.(222) ve Denk.(223)'deki F^k ve G^k gösterimleri açılımın katsayıları için kullanılır. Denk.(179) ve Denk.(182) ile karşılaştırıldığında buradaki katsayıların kullanılan aynı gösterimin bulunduğu jj -çiftlenimindeki katsayılara eşit olmadığı görülür. Daha az bir dikkatle bu tür bir düzensizliğin oluşmadığı ve böylesi bir dikkatle daha fazla sembolün önerilmesine gerek kalmadan uyumun daha fazla karşılandığı görülür.



1.2.3. İki Nükleonlu Dalga Fonksiyonları: 9j Sembolleri

Bir merkezi potansiyel kuyusunda bağımsız olarak hareket eden nükleonların durumları genel olarak büyük dejenereliklere sahiptir. Kapalı kabuklar durumunda toplam açısal momentumu $J=0$ olan bir tekli durum vardır. Ayrıca kapalı kabukların dışındaki tek nükleonlu durumlar bu tek nükleonun durumlarına eşit iyi belirlenmiş spinlere sahiptir. Kapalı kabuklardaki eksik bir nükleonun bulunduğu durumlar için de bu aynen geçerlidir. Kapalı kabukların dışında birkaç nükleon olduğunda Pauli prensibi tarafından izinli olan bir kaç durum vardır. Hamiltonyen, merkezi kuyuda yalnızca nükleonların kinetik enerjisini ve potansiyel enerjilerini içerirse bu durumların tümü dejeneredir. Her hangi bir nükleer seviye şemasına bir bakış dejenerelikten uzak enerji seviyelerini açıkça gösterir. Merkezi potansiyel, nükleonların karşılıklı etkileşmelerinin yerine tamamen geçemeyeceğinden bu şaşırtıcı olmamalıdır.

Nükleonlar arasındaki artık etkileşmelerin varlığı bu dejenereliği kolayca ortadan kaldırır. Bu artık etkileşmelerin şekli kullanılan modele sıkıca bağlıdır. Basit bir yaklaşımda bunlar, uzay koordinatlarının basit fonksiyonları ve nükleonların spin değişiklikleri olarak betimlenirler. Daha kapsamlı teorilerde artık etkileşmeler, hesaplanabilir olarak verilen bir düzenlenişte yalnızca matris elemanlarının bulunduğu oldukça yüksek yerel olmayan işlemcilerdir (g-matris). Bu matris elemanlarını belirlemenin en güvenilir yolu doğrudan deneylerdir. Bu kesimde, genel bir iki yapıli etkileşme tarafından belirlenen kapalı kabuklar dışındaki iki nükleonlu dalga fonksiyonlarını göreceğiz.

Merkezi bir potansiyel kuyusundaki iki bağımsız parçacıklı durumlar $\psi_{jm}(1)\psi_{j'm'}(2)$ dalga fonksiyonlarının çarpımı olarak oluşturulabilir. 1 ve 2 indisleri uzay koordinatları ve iki nükleonun spin değişikliklerini simgeler. $\psi_{jm}(2)\psi_{j'm'}(1)$ durumu merkezi alanda aynı enerjiye sahiptir. İyi bilindiği üzere, nükleonlar özdeş olsa da bu bağımsız bir durum değildir. Pauli prensibi nükleonların spin değişiklikleri ve uzay koordinatlarının değiş-tokuşu altında antisimetrik durumda olan dalga fonksiyonlarını ifade etmektedir. Bu durumların normalizasyonu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{jm}(1)\psi_{j'm'}(2) - \psi_{jm}(2)\psi_{j'm'}(1)) \quad (224)$$

ile verilir.

Nükleonlardan biri proton diğeri nötron ise bu bağıntıyı oluşturmada bir önceliğe gerek yoktur. Bununla birlikte bu, belirli simetrik durumları oluşturmada çok faydalı olacaktır. Bu, proton ve nötronun kütlelerinin hemen hemen eşit olması ve nükleer etkileşmelerin yükten bağımsız olmasından kaynaklanır. Protonlar arasındaki Coulomb itmesinden başka aynı durumdaki iki proton, iki nötron ve bir proton ve bir nötron arasındaki nükleer etkileşim aynıdır. Bu nükleer fizikteki en güçlü simetrilere biridir. Aynı kapalı kabukların dışındaki bir nötron ve bir protonu düşünelim. Coulomb enerjisinden başka (ve küçük proton-nötron kütle farkı) iki durum

$$\psi_{jm}(1_\pi)\psi_{j'm'}(2_\nu), \quad \psi_{jm}(2_\nu)\psi_{j'm'}(1_\pi) \quad (225)$$

merkezi potansiyel kuyusunda aynı enerjiye sahiptir. π ve ν alt indisleri sırasıyla nükleonların proton ya da nötron olduğunu gösterir. Şimdi yükten bağımsız artık etkileşmeler dikkate alınır bu durum düzenlenebilir. İki durumda da etkileşmenin köşegen elemanları birbirine eşit olacaktır. Bu iki durum arasında etkileşimin sıfır olmayan bir matris elemanı olur. 2×2 'lik etkileşme matrisinin köşegenleştirilmesi Denk.(225) durumlarının lineer bir birleşimi olan öz durumları verir. İki özdeş nükleon durumunda aynı durumda olan proton ve nötronun aynı durumda bulunduğu bir lineer birleşim vardır. Bu antisimetrik bir durumdur:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{jm}(1_\pi)\psi_{j'm'}(2_\nu) - \psi_{jm}(2_\nu)\psi_{j'm'}(1_\pi)) \quad (226)$$

Denk.(226) durumları arasındaki yükten bağımsız etkileşmelerin matris elemanları Denk.(224) durumları arasındaki matris elemanları ile aynıdır.

Denk.(226) bağıntısı için orthogonallik durumu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{jm}(1_\pi)\psi_{j'm'}(2_\nu) + \psi_{jm}(2_\nu)\psi_{j'm'}(1_\pi)) \quad (227)$$

simetrik. Özdeş iki nükleon bu denklemden gibi bir durumda olmayabilir. Bu nedenle Denk.(227) ifadesindeki durumlar arasında sıfırdan farklı olan matris elemanları

Denk.(224) ya da Denk.(226) durumları arasındaki matris elemanlarına eşit olmak zorunda değildir. Her hangi bir yükten bağımsız etkileşim Denk.(226) ve Denk.(227) durumları arasında sıfır olan matris elemanlarına sahiptir.

Güçlü nükleer etkileşmelerin yükten bağımsız olması ve küçük proton-nötron kütle farkından dolayı aynı parçacıklı(nükleonlu) iki durum olarak proton ve nötronu düşünmek uygundur. Nükleonun iki durumu protonun +e elektrik yükü ve nötronun 0 elektrik yükü olmasından dolayı farklıdır. Magnetik momentler gibi diğer farklılıklar, güçlü nükleer etkileşmeler tarafından nükleonların öz durumlarını etkilemez. Bu Pauli spin matrisi özelliklerine dayanan durumu tanımlamada kullanılan şık bir yoldur. Sütunlar tarafından tanımlanan proton ve nötron durumlarının bulunduğu iki boyutlu yük uzayının bir özetini

$$\eta_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; (\text{bir proton için}) , \quad \eta_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; (\text{bir nötron için}) \quad (228)$$

şeklinde veririz. Bu durumlar iki bileşenli spinörler olarak düşünülür ve alışılmış spin benzeşiminde üç matris

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (229)$$

olarak verilir. 2 ile bölünen bu matrisler açısal momentumun sıra değişim bağıntıları ile uyumludur. Bunlar izospin matrisleri olarak adlandırılır (izotopik spin ya da izobarik spinin kısaltılmış hali). 1, 2 ve 3 indisleri alışılmış uzayda bir vektör olmayan $\mathbf{t} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}$ izospin vektörü gerçeğini vurgular. Proton durumu τ_3 'nin +1 özdeğerine ve nötron durumu da τ_3 'nin -1 özdeğerine aittir. Nükleonun yükü $\frac{1}{2}(1 + \tau_3)$ ifadesine göre verilir. İşaretlerin bu seçimi temel parçacık teorisinde kullanılır [6,15]

Yükten bağımsız bir Hamiltonyen nükleonların toplam \mathbf{T} izospininde bir skaleridir. Böylesi Hamiltonyenler \mathbf{T} ($\mathbf{T}+1$) özdeğerine sahip olan \mathbf{T}^2 ile karakterize edilir. Protonlar ve nötronlar yalnızca bağıl sayılarla farklı olduklarından verilmiş \mathbf{T} değerli öz durumlar ve \mathbf{M}_T 'nin farklı değerleri, özdeğerlere eşit olmak zorundadır ($M_T = \frac{1}{2}(Z - N)$).

$\mathbf{t}^{(1)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ ve $\mathbf{t}^{(2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}^{(2)}$ ile verilen iki nükleonlu izospinler toplam bir \mathbf{T}

izospini verecek şekilde çiftlenirler. Bu durumda T^2 'nin özdeğerleri, $T=0$ ya da $T=1$ 'li $T(T+1)$ 'dir. $T=1$ 'li izospin durumları Denk.(125)'e göre yüklerin değiş-tokuşu altında simetriktir oysa $T=0$ 'lı durumlar antisimetriktir. Gerçekten iki protonun izospin durumu, $T=1$ durumunun $M_T = 1$ bileşeninin olduğu $\eta_{1/2}(1)\eta_{1/2}(2)$ durumdur. $T = 1$ ve $M_T = -1$ 'li durum, iki nötronun izospin durumudur. $T=1$ ve $M_T = 0$ durumu bir proton ve nötronun yük değişikliklerindeki simetrik bir durumdur. Bu durum, Denk.(224) için aynı uzay ve spin durumu olan Denk.(226) antisimetrik durumuna karşılık gelmek zorundadır. Denk.(225) simetrik durumu $M_T = 0$ 'li izospin durumuna karşılıktır fakat $T=0$ 'a sahiptir. Bundan daha sonraki durum iki proton ya da nötron durumuna karşılık gelmez.

Böylece izospin değişkenlerinin kullanılması genelleştirilmiş bir Pauli prensibini tanımlar. İki nükleonlu durumlar uzay koordinatlarında, spin değişikliklerinde ve izospin (ya da yük) değişkenlerinde tamamen antisimetrik olmak zorundadır. Denk.(224) ve Denk.(226) durumları, şimdi

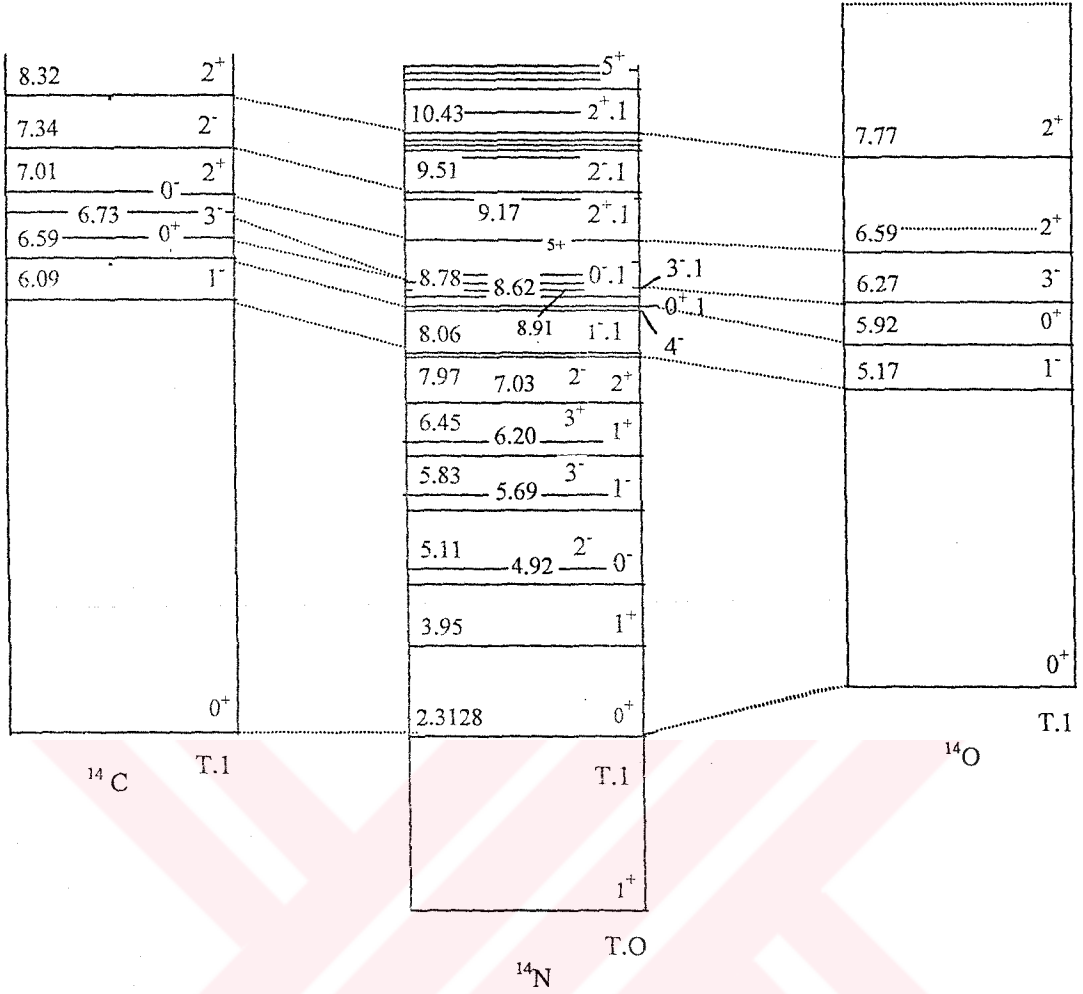
$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{jm}(1)\psi_{j'm'}(2) - \psi_{jm}(2)\psi_{j'm'}(1)]\eta_{T=1, M_T} \quad M_T=1,0,-1 \quad (230)$$

olarak ifade edilmelidir ve Denk.(227) ifadesi ise

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{jm}(1)\psi_{j'm'}(2) + \psi_{jm}(2)\psi_{j'm'}(1)]\eta_{T=0, M_T=0} \quad (231)$$

olarak yazılmalıdır. Bu son iki denklem ile verilen izospin durumlarına uygun Clebsch-Gordan katsayılarını da

$$\begin{aligned} \eta_{T=1, M_T=1} &= \eta_{1/2}(1)\eta_{1/2}(2) & \eta_{T=1, M_T=-1} &= \eta_{-1/2}(1)\eta_{-1/2}(2) \\ \eta_{T=1, M_T=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{1/2}(1)\eta_{-1/2}(2) + \eta_{1/2}(2)\eta_{-1/2}(1)) \end{aligned} \quad (232)$$



Şekil 2. $A=19$ çekirdeklerinde $T=1$ izospinine karşılık gelen enerji seviyeleri (MeV cinsinden) [5].

ve

$$\eta_{T=0, M_T=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_{1/2}(1)\eta_{-1/2}(2) - \eta_{1/2}(2)\eta_{-1/2}(1)) \quad (233)$$

olarak yazarız. Nükleer Hamiltonyenin yükten bağımsızlığının basit bir kanıtı ve izospinin yararı şekil 2'de gösterilmiştir. $T=1$ ve $M_T = -1, 0, 1$ 'li ^{16}O 'nın kapalı kabuklarındaki iki boşluğa karşılık gelen durumlar $^{14}_8\text{O}_6$, $^{14}_7\text{N}_7$ ve $^{14}_6\text{C}_8$ çekirdeklerinin spektrumunda gösterilmiştir. Protonların bazı ortalama Coulomb enerjileri, bu durumların enerjilerinden çıkarıldı. Bu üç çekirdekteki $T=1$ seviyeleri arasındaki yaklaşık eşit mesafeler gösterilmiştir. Coulomb enerjisi protonlar tarafından işgal edilmiş yörüngelere bağlıdır ve

bundan dolayı da bazı seviyeler elektrostatik itme nedeniyle diğer seviyelerden daha çok yer değiştirir.

Hem dalga fonksiyonlarının çarpımı hem de onların Denk.(231) ve Denk.(230) simetrik ya da antisimetrik versiyonları yalnızca merkezi potansiyel kuyusunu içeren Hamiltonyenin öz durumlarıdır. Bunlar artık etkileşmelerin öz durumları değildir. Bu etkileşim dönmeler altında değişmez kalır ve bu yüzden kinetik enerjileri ve merkezi potansiyel kuyusunu da içeren Hamiltonyen de değişmezdir. Biz yalnızca kinetik enerjili ve merkezi potansiyel kuyulu Hamiltonyen olan H_0 'a ek bir pertürbe terim olarak artık etkileşmeleri dikkate alırız. Belli her herhangi bir konfigürasyonda yörüngelere yerleşen proton ve nötron sayıları verilir. Nükleer Hamiltonyenin böylesi bir alt uzayında köşegen olan pertürbasyon katkısının bulunduğu durumlarının bir düzenini seçmeliyiz. Pertürbasyondan kaynaklanan birinci mertebe düzeltmeleri bu durumda bu düzendeki beklenen değerleridir. Artık etkileşmelerin köşegen olduğu bir dönme değişmezliğinin bulunduğu düzen J^2 'nin belirli özdeğerlerine sahip durumların bir setidir. T izospini ile birlikte toplam açısal momentumun $J(J+1)$ özdeğerleri iki nükleonlu durumları benzersiz olarak karakterize eder. Birkaç valans nükleonu için durum daha karmaşıktır.

İki nükleonlu jj' düzenlenişinde iyi açısal momentumlu durumlar Denk.(114) ifadesindeki gibi Denk.(230) ve Denk.(231) durumlarından oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} \psi_{ij^T M_T J M} (1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m m'} \langle j m j' m' | j j' J M \rangle \times \\ \times [\psi_{j m}(1) \psi_{j' m'}(2) + (-1)^T \psi_{j m}(2) \psi_{j' m'}(1)] \eta_{T, M_T} \end{aligned} \quad (234)$$

Bu son denklemdeki $2^{-1/2}$ normalizasyon çarpanı Clebsch-Gordan katsayılarının normalizasyon çarpanından ve $j \neq j'$ için orthogonal olan iki $\psi_{j m}(1) \psi_{j' m'}(2)$ ve $\psi_{j m}(2) \psi_{j' m'}(1)$ dalga fonksiyonundan kaynaklanır. Bu ayrıca $j=j'$ olsa da doğrudur fakat $l \neq l'$ ya da yalnızca $n \neq n'$ olsa bile doğru değildir. Aynı yörüngelerdeki nükleonların özel durumu aşağıda tartışılacak. Denk.(234) durumların seti jj' konfigürasyonu tarafından tanımlanan nükleer Hamiltonyenin altuzayındaki artık etkileşmeyi köşegenleştirir. Biri $T=1$ 'li diğeri $T=0$ 'lı olan bu konfigürasyonda verilen $J (|j-j'| \geq J \geq j+j')$ ve M 'li iki durum vardır. Ayrıca bunlar vektör çiftlenim katsayılarının kullanılması ile Denk.(225) dalga fonksiyonları çarpımından elde edilebilir. Bu durumda artık etkileşmenin 2×2 'lik altmatrisi,

verilen J ve M için köşegen olmalıdır. Yükten bağımsız artık etkileşmenin izospin simetrisinin kullanılması ile iki öz durumun sonucu Denk.(234)'deki gibi T izospin kuantum sayısınınca her biri köşegen olmaksızın doğrudan elde edilebilir.

Bir durum aynı j yörüngesindeki iki nükleon durumunu almalıdır. $j=j'$ ise vektör ekleme katsayıları Denk.(125) simetri özelliklerine sahiptir. $l \neq l'$ ya da $l=l'$ ve $n \neq n'$ oldukça Denk.(234) ifadesi J 'nin her bir değeri için geçerlidir. Bu durumda simetrik ve antisimetrik bileşimler bunların $(1/\sqrt{2})[R_{nl}(r_1)R_{n'l'}(r_2) \pm R_{nl}(r_2)R_{n'l'}(r_1)]$ olan radyal fonksiyonlarıdır. Bununla birlikte eğer $n'=n$, $l'=l$, $j'=j$ ise J 'nin tek değerleri için yalnızca antisimetrik bileşim ($T=1$ 'li) yok olmaz. J 'nin çift değerleri için ise simetrik bileşim ($T=0$ 'lı) yok olmaz. Her iki durumda da durum normalizasyonu Denk.(234) ifadesindeki köşeli parantezlerin yalnızca ilk terimlerinin alınması ve paydadaki $\sqrt{2}$ 'nin ihmal edilmesi ile başılır.

jj' düzenlenişindeki izospinin faydası, j yörüngesindeki proton j' yörüngesindeki nötron ya da ikinci sıranın bulunduğu durumlar ve proton-nötron etkileşiminin iyi olmayan öz durumları gerçeğinden kaynaklanır. Daha sonra izospin biçimselliğindeki Denk.(226) ve Denk.(227) ya da Denk.(234) durumlarını elde etmek için Denk.(225) durumları karıştırılır. Bununla birlikte burada, jj' çiftleniminin olduğu durumlar j yörüngesinde olan proton ve j' yörüngesindeki nötronun bulunduğu durum anlamlıdır. Bu, daha genel olarak daha ağır kararlı çekirdek nötronlarının j yörüngesini tamamen doldurduğu durumdur. Bu tür bir durumda, izospin simetrisi çok kullanışlı değildir ve j proton ve j' nötron düzenlenişi için

$$\sum_{m m'} \langle j m j' m' | j j' J M \rangle \psi_{j m}(1_\pi) \psi_{j' m'}(2_\nu) \quad (235)$$

durumunu kullanmalıyız. Denk.(235) durumları tamamen J (ve M) tarafından karakterize edilir. Bu durumlar j protonuna ek olarak düşünülmekte olan j yörüngesindeki tüm $2j+1$ nötronlarının bulunduğu iyi izospinli çok nükleonlu durumlara karşılık gelir. Bu yüzden daha basitleştirilmiş Denk.(235) reçetesinin kullanmak oldukça yaygındır.

İzospin yükten bağımsızlığın bir sonucu olarak nükleer Hamiltonyenin bir simetri gösterimi olarak ifade edilir. İzospin kullanımı çok faydalı olmakla beraber kullanımı zorunlu değildir. Yukarıda açıklandığı gibi iki nükleonlu simetrik ve antisimetrik durumlar yükten bağımsız Hamiltonyenin matrisinin köşegenleştirilmesi ile elde edilebilir. Ayrıca bu çoklu nükleon düzenlenişindeki bir durumdur. Bununla birlikte izospin kullanımı alışılmış

bir şey değildir fakat çekirdek süreçlerinde kullanılması gereklidir. Bu ise bir nötronun bir protona dönüşmesi (bir elektron ve antinötrino salarak) ya da bir protonun bir nötrona dönüşmesi (bir pozitron ve nötrino salarak) olayları olan β -bozunumu gibi zayıf etkileşimlerde olur. Bu tür geçişler Denk.(228) izospin durumlarında bir nötron durumunun bir proton durumuna dönüşmesi eyleminin olduğu $t^+ = t_1 + it_2$ işlemcisini kullanılması ile tanımlanabilir. Bir proton durumunun bir nötron durumuna dönüşmesi $t^- = t_1 - it_2$ işlemcisi ile ifade edilir.

β -bozunumu teorisi [15,16,17] ile ilgili tartışmamızı görelî olmayan davranışlı nükleonlar ve küçük leptonların yayımlandığı enerjili durumlarla sınırlayalım. Geçişler için matris elemanı çekirdeklerin ilk ve son durumları arasındaki basit bir işlemcinin bir matris elemanının ve bozunumda salınan enerjinin belirli bir fonksiyonunun çarpımına eşittir. En basit nükleer işlemciler nükleon koordinatlarından bağımsız geçişlere izin verilmesine neden olur. En basit işlemci bir nötronun bir protona geçişi durumunda

$$\sum_i t^+(i) = \frac{1}{2} \sum_i \tau^+(i) = T^+ \quad (236)$$

şeklinindedir. Denk.(236) işlemcisi Fermi geçişlerinin bir nedenidir. Bu T izospin vektörünün bir bileşenidir ve bu nedenle çekirdeğin durumunda bir değişiklik olmaz. Böylesi geçişler için seçim kuralları $\Delta J=0$ ve $\Delta T=0$ olur ve yalnızca $M_T = \frac{1}{2}(Z - N)$ 'nin değeri geçişler ile artar. Geçiş olasılıkları Denk.(236) matris elemanının karesi ile orantılı olup

$$T^-T^+ = T^2 - (T^0)^2 - T^0 = T(T+1) - M_T^{(i)}(M_T^{(i)} + 1) = T(T+1) - M_T^{(i)}M_T^{(s)} \quad (237)$$

soncuna eşittir. i ve s imgeleri ilk ve son durumları göstermektedir. Denk.(237) ifadesi durumların ayrıntılı yapısından bağımsızdır ve T izospini değeri tarafından belirlenir ve bunun izdüşümü $T_3 = T^0$ 'dir.

Diğer izinli geçişlerde çekirdeklerin uzaysal kısımları değişmez fakat bunların özspinleri katılabilir. Gamow-Teller geçişleri için işlemci

$$2 \sum_i t^+(i) s(i) = \frac{1}{2} \sum_i \tau^+(i) \sigma(i) \quad (238)$$

ile tanımlanır. Denk.(238) işlemcisi alışılmış uzaydaki bir vektördür ve $\Delta J = \pm 1, 0$ olacak şekilde bir birimlik bir değerde çekirdeklerin açılal momentumlarını değiştirebilir. Wigner-Eckart teoreminden dolayı bu ifade, $J_i = J_s = 0$ 'lı iki durum arasında matris elemanlarına sahip olamaz. Denk.(238) işlemcisi bundan böyle toplam T izospininin bir bileşeni ile orantılı değildir ve bu nedenle izospin $\Delta T = \pm 1, 0$ olarak değişebilir. Gamow-Teller geçiş oranları basit genel bir formülle ifade edilmeyebilir. Kapalı kabukların dışındaki tek bir proton ya da nötron durumlarında oran

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\kappa m_s} \left| \left\langle T = \frac{1}{2}, M_{T_s} = \frac{1}{2} j_s m_s \left| \tau^+ \sigma_\kappa \right| T = \frac{1}{2}, M_{T_i} = -\frac{1}{2}, j_i m_i \right\rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\kappa m_s} \left| \left\langle j_s m_s \left| \sigma_\kappa \right| j_i m_i \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{2j_i + 1} \left| \left\langle j_s \left\| \sigma \right\| j_i \right\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (239)$$

ile orantılıdır. Bu son eşitlik

$$\left\langle \alpha_s J_s \left\| T^{(k)} \right\| \alpha_i J_i \right\rangle^2 \sum_{\kappa M_s} \begin{pmatrix} J_s & k & J_i \\ -M_s & \kappa & M_i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \left\langle \alpha_s J_s \left\| T^{(k)} \right\| \alpha_i J_i \right\rangle^2$$

ifadesine göre Wigner-Eckart teoreminden kaynaklanır. İlk ve son durum j_i ve j_s spinlerinin her ikisi de aynı l yörüngesine ait olmak zorundadır ve bu durumda j değerleri $l \pm \frac{1}{2}$ 'ye eşittir.

Çok nükleonlu durumlarda Gamow-Teller geçişleri için basit bir toplama kuralı vardır [18]. Bu tür geçişler Denk.(238)'in ve ilk nükleer durum ve olası tüm son nükleer durumlar arasındaki geçişlerin hermityen düzeniminin matris elemanlarını gerektirir. Bu geçişlerin bir çoğu enerji düşüncelerinden kaynaklanan β -bozunumları ile olmayabilir fakat karşılık gelen son durumlara bazen diğer süreçler tarafından da ulaşılabilir. Biz

$$\frac{1}{4} \sum_s \left\langle \left| s \left| \sum_k \tau^+(k) \sigma(k) \right| i \right\rangle \right|^2 - \frac{1}{4} \sum_s \left\langle \left| s \left| \sum_k \tau^-(k) \sigma(k) \right| i \right\rangle \right|^2 \quad (240)$$

ile verilen farklılığı dikkate alırız. Denk.(240) ifadesi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_s \left\langle i \left| \sum_k \tau^-(k) \sigma(k) \right| s \right\rangle \cdot \left\langle s \left| \sum_i \tau^+(j) \sigma(j) \right| i \right\rangle - \\ & \quad - \frac{1}{4} \sum_s \left\langle i \left| \sum_k \tau^+(k) \sigma(k) \right| s \right\rangle \cdot \left\langle s \left| \sum_i \tau^-(j) \sigma(j) \right| i \right\rangle = \\ & = \frac{1}{4} \left\langle i \left| \sum_{j,k} \tau^-(k) \tau^+(j) \sigma(k) \cdot \sigma(j) \right| i \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle i \left| \sum_{j,k} \tau^+(k) \tau^-(j) \sigma(k) \cdot \sigma(j) \right| i \right\rangle \end{aligned}$$

olarak da yazılabilir. Farklı nükleonlar için $\tau^+(j)$ ve $\tau^-(k)$ işlemcileri değiştirilir ve bu nedenle $j \neq k$ terimleri farklılığında iptal edilir. Kalan terimler

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\langle i \left| \sum_k (\tau^-(k) \tau^+(k) - \tau^+(k) \tau^-(k)) \sigma(k) \cdot \sigma(k) \right| i \right\rangle = -3 \left\langle i \left| \sum_k \tau_3(k) \right| i \right\rangle \\ & \quad = -3 \langle i | T_3 | i \rangle = 3(N - Z) \quad (241) \end{aligned}$$

sonucuna eşit olur. Burada $\sigma \cdot \sigma = \sum_i \sigma_i^2 = 3$ eşitliğini kullandık.

Şimdi tekrar iki nükleonlu dalga denkleminde dönelim. Denk.(234) veya Denk.(235) düzeninde buradaki nükleonların j ve j' toplam spinleri belirli değerlere sahiptir ve jj' çiftlenimi olarak adlandırılan bir J spin sonucu için çiftlenirler. ψ_{jm} ve $\psi_{j'm'}$ dalga fonksiyonları, kendine özgü s ve s' spinlerinin sırasıyla l ve l' yörünge açılal momentumlarıyla çiftlenmeleri ile

$$\begin{aligned}
\Psi_{nl, j=l+1/2, m} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \\ \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \chi_{1/2} + \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \chi_{-1/2} \\
\Psi_{nl, j=l-1/2, m} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \\ -\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} \phi_{nl, m-1/2} \chi_{1/2} - \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} \phi_{nl, m+1/2} \chi_{-1/2}
\end{aligned}$$

ifadelerine göre oluşturuldu. Bu düzende spin-yörünge etkileşimi köşegendir. Bazen doğru hesaplamalar için, diğer çiftlenme düzenindeki Denk.(234) ve Denk.(235) durumlarını ifade etmek çok yaygındır. Bu düzende, s ve s' spinleri belirli $S^2=(s+s')^2$ 'li bir durum biçimi için ve l ve l' yörünge açısal momentumları da belirli $L^2=(l+l')^2$ 'li bir durum biçimi için ilk olarak çiftlenirler. Daha sonra belirli S 'li spin durumu belirli L 'li koordinatların uzaysal durumu ile belirli toplam J 'li bir durum biçimi için çiftlenir. Bu düzen Russel-Saunders şeması ya da LS çiftlenimi olarak adlandırılır. Güçlü bir spin-yörünge etkileşimi yokluğunda ya da belirli güçlü karşılıklı etkileşimler varlığında yörüngeler, yörünge l değerleri ile karakterize edilirler ve bu LS çiftlenimi hesaplamaları için çok alışılmış bir başlama noktasıdır. Bu, daha çok atomik spektrum durumudur. jj çiftlenimine giden LS çiftlenme düzeninin ayrıldığı "LS çiftlenimi" olarak bazen gösterilen güçlü spin-yörünge etkileşimi oldukça karmaşıktır.

İki nükleonlu spin durumları Clebsch-Gordan katsayılarının kullanılması ile

$$x_{SM_S} = \sum_{m_s, m'_s} \left\langle \frac{1}{2} m_s \frac{1}{2} m'_s \middle| \frac{1}{2} \frac{1}{2} SM_S \right\rangle x_{m_s}(1) x_{m'_s}(2) \quad (242)$$

olur ve Denk.(125)'e göre bu durumlar $S=1$ için simetrik ve $S=0$ için ise antisimetriktir. L için l ve l' çiftlenimi

$$\Phi_{l'l M_L}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \langle l m_l l' m_l' | l'l M_L \rangle [\phi_{l m_l}(\mathbf{r}_1) \phi_{l' m_l'}(\mathbf{r}_2) \pm \phi_{l m_l}(\mathbf{r}_2) \phi_{l' m_l'}(\mathbf{r}_1)] \quad (243)$$

ifadesinden elde edilir. Toplam dalga fonksiyonu antisimetrik olsun diye spin ve izospin değişkenlerinin çarpılabilir olması için simetrik ve antisimetrik bileşimlerin her ikisi Denk.(243) bağıntısında verilir. Aynı l yörüngesinde iki nükleonun bulunduğu durum özel bir durumdur. Denk.(125) ifadesinden dolayı L 'nin tek değerlikli durumları simetrik ve çift değerlikli durumları antisimetriktir. Bu nedenle her iki durumda da yalnızca Denk.(243)'de sadece bir bileşim yok olmaz ve bunun normalizasyonu, paydadaki $\sqrt{2}$ çarpımını ihmal edildiği köşeli parantezin yalnızca ilk terimin alınması ile başarılıdır. Sonuç olarak J (ve M)'nin belirli değerli durumları S ve L çiftlenmesi

$$\Phi_{l'l S L J M} = \sum_{M_S M_L} \langle S M_S L M_L | S L J M \rangle \chi_{S M_S} \Phi_{l'l M_L} \quad (244)$$

ifadesi ile elde edilir.

Yukarıda gördüğümüz gibi, $S=1$ 'li Denk.(244) durumları ve Denk.(243)'deki artı işareti tam antisimetritliği sağlamak için $T=0$ antisimetrik izospin durumları ile çarpılmalıdır. $S=1$ 'li Denk.(244) durumları ve Denk.(243)'deki negatif işaret $T=1$ durumları ile çarpılmalıdır. $S=0$ 'lı durumlar ve pozitif işaret $T=1$ durumları ile çarpılırken $S=0$ 'lı durumlar ve negatif işaret, $T=0$ izospin durumları ile çarpılmalıdır. Bu kuralları hatırlatırken, notasyonu basitleştirmek için izospin durumlarını kullanmayacağız. s, s', l, l' ; toplam J 'li durumları üretmek için farklı düzenlerde çiftlenebilir. T izospini, üç boyutlu uzayda bir açısal momentum değildir ve bu nedenle her hangi diğer vektörlerle çiftlenmez.

Denk.(244) durumlarının seti, uzay koordinatlarında simetrik ve antisimetrik durumların bir orthogonal ve tam seti olup ve l_j ve l'_j yörüngelerindeki iki nükleonun spin değişkenleridir. Bununla beraber Denk.(234)'deki jj' çiftleniminin seti ile aynıdır, yani

$$\Psi_{j j' J M}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m m'} \langle j m j' m' | j j' J M \rangle [\psi_{j m}(1) \psi_{j' m'}(2) \pm \psi_{j m}(2) \psi_{j' m'}(1)] \quad (245)$$

setlerin her ikisi normalizedir ve bundan dolayı da bunlar bir setten diğer bir sete taşınan üniter bir dönüşümdür. Bir düzendeki simetrik durumları diğer bir düzendeki simetrik durumlara taşıyan dönüşüm antisimetrik durumlar arasındaki dönüşüm ile aynıdır ve

$$\Psi_{l'l'JM} = \sum_{S,L} \left\langle \frac{1}{2} l(j) \frac{1}{2} l'(j') J \mid \frac{1}{2} \frac{1}{2} (S) l(l) J \right\rangle \Psi_{l'SLJM} \quad (246)$$

ile verilir. Bu dönüşümün katsayıları dönüşümler altında aynı yöntemle bu son denklemin her iki yanındaki durumlar için M'den bağımsızdır. Denk.(240)'ın her iki yanına J^+ ya da J^- işlemcilerini uyguladığımızda bu nokta açıkça görülür. LS-çiftlenimi ve jj-çiftlenimi arasındaki Denk.(246) dönüşümü Clebsch-Gordan katsayıları ile verilen $x_{m_s}(1)x_{m_s'}(2)\phi_{l m_l}(1)\phi_{l' m_l'}(2)$ dalga fonksiyonları çarpımının lineer bileşiminin bulunduğu iki düzen arasındadır. Bunlar reel olduğundan Denk.(246) dönüşümündeki katsayıları da reeldir. Aşağıda bu katsayıları ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

$^{2S+1}L_J$ ($2S+1$ çokluğu olarak adlandırılır) ile LS-çiftlenme dalga fonksiyonlarını göstermek yaygındır. S, 1 ya da 0'a eşit olabildiği için L, J, J-1 veya J+1'e eşit olabilir. Denk.(245) durumu antisimetrik ise Denk.(246)'nın sağ tarafında, S=0, L=J'li durum simetrik olan bir Denk.(243) uzaysal fonksiyona sahiptir ve S=1, L=J-1, J, J+1'li durumlardaki uzaysal fonksiyon antisimetriktir. Diğer taraftan, Denk.(245) simetrik ise Denk.(246)'daki S=0, L=J durumu antisimetrik uzaysal fonksiyona sahiptir, oysa L=J-1, J, J+1'li S=1 durumları simetrik uzaysal fonksiyonlara sahiptir. Aynı l yörüngesinde olan nükleonların bulunduğu durumlar özeldir. l=l' li Denk.(243) durumları ve aynı radyal fonksiyonları Denk.(125)'e göre L'nin tek değerleri için simetrik ve L'nin çift değerleri için antisimetrik olacaktır. Bu durumda çift J'li Denk.(245) antisimetrik durumları için Denk.(246)'nın sağ tarafındaki S=0'lı durumlar L=J gibi çift L değerlerine sahip olmak zorundadır. Diğer bir deyişle, S=1'li durumlar L'nin yalnızca tek değerlerine sahip olabilirler, yani L=J-1, J+1 gibi. Tek J'li simetrik Denk.(245) durumları için S=1 durumları, L=J-1, J+1 olabilen çift L değerlerine sahip olmak zorundadır. Diğer bir deyişle S=0 durumları, L'nin tek değerlerine sahip olmak zorundadır ve yalnızca L=J mümkündür.

Denk.(246)'daki dönüşüm katsayıları tablo 1'de listelenmiştir. Aynı yörüngedeki nükleonların özel durumlarında n'=n, l'=l katsayılarının normalizasyonu farklıdır ve çiftlenme zorunluluğu ile ilgilidir. Eğer $j' = j = l \pm \frac{1}{2}$ ise Denk(246)'nın her iki yanı aynı

çarpın ile normalize edilir. Bununla birlikte, $j = l \pm \frac{1}{2}$ ve $j' = l \pm \frac{1}{2}$ ise dönüşüm katsayıları $\sqrt{2}$ ile çarpılmalıdır. Bu durumda J'nin tek değerleri için 3J durumu tamamen simetriktir halbuki ${}^3(J+1)$, ${}^3(J-1)$ ve 1J antisimetriktir. $j = l + \frac{1}{2}$, $j' = l - \frac{1}{2}$ 'li durumların herhangi birisindeki durum, bunların simetrilğine göre Tablo 1'in ilk 3 sütun ya da dördüncü sütunun birisindeki katsayılar ile verilir.

LS-çiftleniminden jj-çiftlenimine dönüşümün kullanılması örneklemek için birkaç basit örneği göz önüne alalım. $p_{3/2}$ yörüngesinde bir nükleon ve $d_{5/2}$ yörüngesinde de başka bir nükleon olsun. $J=2$ 'li bir durum için çiftlenen iki nükleonun bulunduğu durumun açılımını bulmak için Tablo 1'in en üst satırına bakarız. Bu durumda $\Sigma=1+2+1=4$, $\Delta=1-2=-1$ ve açılımda görülen LS-çiftlenim durumları, $S=0$, $L=2$ ve $S=1$, $L=3,2,1$ değerlerine sahiptir. $L=0,1,2,3,4,\dots$ 'lü durumları S,P,D,F,G,... ile göstermek bir gelenektir. Bu notasyon kullanıldığında dönüşüm;

$$|p_{3/2}d_{5/2}J=2\rangle = -\frac{2\sqrt{2}}{15} {}^3F_2 + \sqrt{\frac{7}{15}} {}^1D_2 + \frac{\sqrt{42}}{10} {}^3P_2 + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{14}{5}} {}^3D_2$$

ile verilir. $J=2$ durumu $T=1$ izospinine sahipse, uzayda ve spin koordinatlarında antisimetriktir. Bu nedenle 3F , 3P ve 3D durumlarının uzaysal kısımlarının antisimetriktir halbuki 1D durumu uzaysal simetriktir. Bununla birlikte, eğer $J=2$ durumu $T=0$ izospinine sahip ise 3F , 3P ve 3D uzaysal olarak simetrik dalga fonksiyonlarına sahiptir ve 1D durum antisimetrik uzaydır.

Her iki nükleon bir $p_{3/2}$ yörüngesinde ve $J=1$ 'li bir durum için çiftlenirse, tablo 1'in en üst satırına $\Sigma=3$, $\Delta=0$ konulmasıyla LS-çiftlenimi için dalga fonksiyonlarında aşağıdaki açılımı elde ederiz:

$$|p_{3/2}^2J=1\rangle = -\frac{1}{13} \sqrt{\frac{2}{3}} {}^3D_1 + \frac{\sqrt{5}}{3} {}^1P_1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} {}^3S_1$$

Bu durumda 3P yok olur çünkü bu durumda antisimetrik uzay ve spin dalga fonksiyonuna sahiptir oysa $p_{3/2}^2$, $J=1$ durumu $T=0$ izospinine sahip olduğundan simetriktir. Şimdi ise bir

$p_{3/2}$ yörüngesinde bir nükleon ve aynı baş kuantum sayılı $p_{1/2}$ yörüngesindeki başka bir nükleon varlığını düşünelim. LS-çiftlenimindeki açılım $\sqrt{2}$ ile çarpılmış olan katsayıların olduğu ikinci satırda bulunur. Verilmiş J değerli durumlar ya $T=0$ 'lı simetrik ya da $T=1$ 'li antisimetrik durumlardır. $J=1$ 'li $T=0$ simetrik durumu aşağıdaki 3D_1 , 1P_1 ve 3S_1 simetrik durumların lineer birleşimine eşittir:

$$\left| p_{3/2} p_{1/2} T = 0 J = 1 \right\rangle = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{3}} {}^3D_1 - \frac{\sqrt{2}}{3} {}^1P_1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} {}^3S_1$$

$T=1$ antisimetrik durum, yalnızca p^2 düzenlenişinde $J=1$ 'li antisimetrik LS-çiftlenme durumuna eşittir:

$$\left| p_{3/2} p_{1/2} T = 1 J = 1 \right\rangle = {}^3P_1$$

Denk.(246) dönüşümü bir yük çiftlenimi dönüşümünün özel bir durumudur. Bağımsız sistemin $i_1 i_2 i_3 i_4$ gibi dört açısız momentumu ile işlemlere başladığımızda birkaç yöntemle toplam bir J değeri için bu momentumları çiftleyebiliriz. İlk adım olarak i_{12} için j_1 ve j_2 'yi ve i_{34} içinde j_3 ve j_4 'ü çiftleştirebiliriz. Daha sonra bu i_{12} ve i_{34} 'yi J için çiftleriz. Aynı düzeyde orthogonal ve tam olan diğer bir eşdeğer düzenleme i_{13} için j_1 ve j_3 'nin çiftlenmesi, i_{24} için j_2 ve j_4 'ün çiftlenmesi ve daha sonra toplam J için i_{13} ve i_{24} 'nin çiftlenmesi ile elde edilir. Bu iki düzen arasında üniter bir dönüşüm vardır, yani

$$\begin{aligned} \psi(i_1 i_3(J_{13}) i_2 i_4(J_{24}) JM) &= \sum_{J_{12} J_{34}} \langle i_1 i_2(J_{12}) i_3 i_4(J_{34}) J | i_1 i_2(J_{12}) i_3 i_4(J_{34}) J \rangle \times \\ &\times \psi(i_1 i_2(J_{12}) i_3 i_4(J_{34}) JM) \end{aligned} \quad (247)$$

olur.

Dönüşüm katsayılarının bir ifadesini elde etmek için vektör ekleme katsayılarının kullanılması ile Denk.(247)'nin her iki yanındaki fonksiyonları açılıma tabi tutabiliriz. Sağ taraftaki fonksiyonlar

$$\begin{aligned} \psi(j_1 i_2 (J_{12}) i_3 i_4 (J_{34}) JM) &= \sum \langle j_1 m_1 i_2 m_2 | i_1 i_2 J_{12} M_{12} \rangle \times \\ &\times \langle j_3 m_3 i_4 m_4 | i_3 i_4 J_{34} M_{34} \rangle \langle J_{12} M_{12} J_{34} M_{34} | J_{12} J_{34} JM \rangle \times \\ &\times \psi_{j_1 m_1} (1) \psi_{i_2 m_2} (2) \psi_{i_3 m_3} (3) \psi_{i_4 m_4} (4) \end{aligned} \quad (248)$$

olarak ifade edilir ve benzer bir açılım Denk.(248)'in sol yanındaki fonksiyon için de kullanılır. $\psi_{j_1 m_1} (1) \psi_{i_2 m_2} (2) \psi_{i_3 m_3} (3) \psi_{i_4 m_4} (4)$ 'ün katsayıları Denk.(247)'nin her iki tarafında eşitlendiğinde, denklemin sol tarafında M_{13} ve M_{24} üzerinden toplanan üç 3j sembollerinin çarpımları ve sağ tarafında ise dönüşüm katsayılarının çarpımlarının bulunduğu bir bağıntıyı elde ederiz ve üç 3j sembolleri M_{12} ve M_{34} üzerinden toplanır. Şimdi bu üç 3j sembolleri ile bu denklemin her iki yanını çarpalım

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J'_{12} \\ m_1 & m_2 & -M'_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_3 & i_4 & J'_{34} \\ m_3 & m_4 & -M'_{34} \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J' \\ M_{12} & M_{34} & -M' \end{pmatrix}$$

ve Denk.(138)'den kaynaklanan $J'_{12} = J_{12}, M'_{12} = M_{12}, J'_{34} = J_{34}, M'_{34} = M_{34}$ 'leri elde etmek için m_1, m_2, m_3, m_4 'ler üzerinden toplam alınır. Daha sonra $J' = J, M' = M$ 'leri elde etmek için $M_{12} M_{34}$ 'ler üzerinden toplamı kullanırız. Böylece Denk.(138) ortogonallik bağıntısı kullanıldığında 6 adet 3j sembolünün çarpımlarının toplamı olan katsayılarla ulaşıyoruz. Bu tür toplamlar her hangi bir çiftlenim dönüşümlerinin değişiminde meydana gelir ve bunlar 9j sembolleri olarak isimlendirilir. Hakikaten Denk.(240) ifadesi $j_1 i_2 j_3 i_4 J_{12} J_{34} J_{13} J_{24}$ ve J olmak üzere 9 spin içerir. 9j sembolünün tanımı

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{matrix} \right\} &= \sum_{\text{Tüm } M_{ij}} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ M_{11} & M_{12} & M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} J_{31} & J_{32} & J_{33} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ M_{11} & M_{21} & M_{31} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ M_{12} & M_{32} & M_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{23} & J_{33} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (249)$$

Tablo 1. ij -çiftlenimi ve LS -çiftlenimi düzenleri arasındaki dönüşüm katsayıları. $\Sigma = l + l' + 1$, $\Delta = l - l'$. $l = l'$ ve $n = n'$ için ikinci satır $\sqrt{2}$ ile çarpılmalıdır ve üçüncü satır için bu dikkate alınmamalıdır [5].

LS -çiftlenimi	${}^3(J+1)$ $S = 1, L = J + 1$	1J $S = 0, L = J$	${}^3(J-1)$ $S = 1, L = J - 1$	3J $S = 1, L = J$
ij -çiftlenimi				
$i = l + \frac{1}{2}, i' = l' + \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{((J+1)^2 - \Delta^2)(\Sigma - J)(\Sigma - J - 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)(J+1)(2J+1)}}$	$\sqrt{\frac{(\Sigma - J)(\Sigma + J + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)}}$	$\sqrt{\frac{(J^2 - \Delta^2)(\Sigma + J)(\Sigma + J + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(2J+1)}}$	$-\Delta\sqrt{\frac{(\Sigma - J)(\Sigma + J + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(J+1)}}$
$i = l + \frac{1}{2}, i' = l' - \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{(\Sigma^2 - (J+1)^2)(J - \Delta)(J - \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)(J+1)(2J+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(J - \Delta)(J + \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)}}$	$\sqrt{\frac{(\Sigma^2 - J^2)(J + \Delta)(J + \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(2J+1)}}$	$\Sigma\sqrt{\frac{(J - \Delta)(J + \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(J+1)}}$
$i = l - \frac{1}{2}, i' = l' + \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{(\Sigma^2 - (J+1)^2)(J + \Delta)(J + \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)(J+1)(2J+1)}}$	$\sqrt{\frac{(J + \Delta)(J - \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)}}$	$-\sqrt{\frac{(\Sigma^2 - J^2)(J - \Delta)(J - \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(2J+1)}}$	$\Sigma\sqrt{\frac{(J + \Delta)(J - \Delta + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(J+1)}}$
$i = l - \frac{1}{2}, i' = l' - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{((J+1)^2 - \Delta^2)(\Sigma + J)(\Sigma + J + 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)(J+1)(2J+1)}}$	$\sqrt{\frac{(\Sigma + J)(\Sigma - J - 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)}}$	$-\sqrt{\frac{(J^2 - \Delta^2)(\Sigma - J)(\Sigma - J - 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(2J+1)}}$	$\Delta\sqrt{\frac{(\Sigma + J)(\Sigma - J - 1)}{2(\Sigma^2 - \Delta^2)J(J+1)}}$

şeklindedir. 9j sembollerince Denk.(247)'deki dönüşüm katsayıları

$$\begin{aligned} \langle J_1 J_3 (J_{13}) J_2 J_4 (J_{24}) J | J_1 J_2 (J_{12}) J_3 J_4 (J_{34}) J \rangle = \\ = [(2J_{13} + 1)(2J_{24} + 1)(2J_{12} + 1)(2J_{34} + 1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (250)$$

ile verilir. jj ve LS-çiftlenimlerinin dalga fonksiyonları arasındaki Denk.(246) dönüşüm katsayıları Denk.(250) ifadesinde $J_1 = J_3 = \frac{1}{2}$, $J_2 = l$, $J_4 = l'$, $J_{13} = S$, $J_{24} = L$, $J_{12} = i$ ve $J_{34} = j'$ değerlerinin kullanılması ile elde edilir. 9j sembolü 1940 yılında Wigner ve bağımsız olarak 1952 yılında Schwinger ve 1954'de Arima tarafından ortaya koyuldu [5].

9j sembolünün özellikleri, Denk.(249) bağıntısından anlaşılır. Her bir satırda ve sütunda spinlerin üçgen şartına uyma zorunluluğu olduğuna dikkat etmeliyiz (spinler, toplam spin sıfır olacak şekilde çiftlenebilir). Satır ve sütunların yerleri değiştirildiğinde Denk.(249) ifadesinin sağ tarafında her hangi bir değişiklik olmaz ve 9j sembolünün değeri değişmez. İki satır ve sütunun yerleri değiştirildiği zaman s, 9 spinin tümünün toplamı olmak üzere 9j sembolü $(-1)^s$ ile çarpılır. Bu nedenle, iki eşit satır ve sütunu olan 9j sembolü sıfır olur. 9j sembolleri tarafından sağlanan belirli bağıntılar, 9j sembollerinin orthogonal dönüşüm katsayılarında görülmesi gerçeğinden anlaşılır (9j sembollerinin tümü Denk.(249) bağıntısından görüldüğü gibi reeldir). Öteki bağıntılar, diğer bu tür dönüşümleri veren böyle iki Denk.(246) çiftlenim dönüşüm değişimi çarpımından ortaya çıkar.

Denk.(250) dönüşümünün orthogonalliği

$$\begin{aligned} \sum_{J_{13}, J_{24}} (2J_{13} + 1)(2J_{24} + 1) \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J'_{12} \\ J_3 & J_4 & J'_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \\ = \frac{\delta(J_{12} J'_{12}) \delta(J_{34} J'_{34})}{(2J_{12} + 1)(2J_{34} + 1)} \end{aligned} \quad (251)$$

bağıntısı ile verilir. $|J_1 J_2 (J_{12}) J_3 J_4 (J_{34}) J\rangle$ 'den $|J_1 J_4 (J_{14}) J_2 J_3 (J_{23}) J\rangle$ 'e dönüşüm,

$$\langle J_1 J_2 (J_{12}) J_3 J_4 (J_{34}) J | J_1 J_3 (J_{13}) J_2 J_4 (J_{24}) J \rangle$$

dönüşümü ile $\langle J_1 J_3 (J_{13}) J_2 J_4 (J_{24}) J | J_1 J_4 (J_{14}) J_2 J_3 (J_{23}) J \rangle$ dönüşümünün çarpımı olarak elde edilir. J_{13}, J_{24} gibi ortadaki açısız momentumlar üzerinden toplam yapıldığında ve çiftlenimlerin sırasına dikkat edildiğinde 9j sembolleri arasındaki aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\sum_{J_{13}, J_{24}} (-1)^{J_2+J_4+J_{24}+J_2+J_3+J_{23}} (2J_{13}+1)(2J_{24}+1) \begin{Bmatrix} J_1 & J_3 & J_{13} \\ J_2 & J_4 & J_{24} \\ J_{12} & J_{34} & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_4 & J_{14} \\ J_3 & J_2 & J_{32} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} =$$

$$= (-1)^{J_3+J_4+J_{34}} \begin{Bmatrix} J_1 & J_4 & J_{14} \\ J_2 & J_3 & J_{23} \\ J_{12} & J_{43} & J \end{Bmatrix} \quad (252)$$

3j sembolleri ile 9j sembolleri arasındaki kullanışlı bir bağıntı Denk.(247) ifadesinden doğrudan elde edilebilir. 3j sembolleri cinsinden açılım yapıldıktan sonra ve $\psi_{i_1 m_1} (1) \psi_{i_2 m_2} (2) \psi_{i_3 m_3} (3)$ ve $\psi_{i_4 m_4} (4)$ katsayılarının eşitlenmesinden sonra ifadenin her iki yanını

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & J'_{12} \\ m_1 & m_2 & -M'_{12} \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} i_3 & i_4 & J'_{34} \\ m_3 & m_4 & -M'_{34} \end{pmatrix}$$

gibi iki 3j sembolü ile çarpabiliriz. Bu kullanıldığında ve m_1, m_2, m_3 ve m_4 'ler üzerinden toplam alındığında

$$\begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_4 & J_{14} \\ J_2 & J_3 & J_{23} \\ J_{12} & J_{43} & J \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, m_4 \\ M_{13}, M_{24}}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 & i_4 & J_{34} \\ m_3 & m_4 & M_{34} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} i_1 & i_3 & J_{13} \\ m_1 & m_3 & M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 & i_4 & J_{24} \\ m_2 & m_4 & M_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix} \quad (253)$$

bağıntısına ulaşılır. Bu son bağıntı

$$(2J+1) \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M'_{13} & M'_{24} & M \end{pmatrix}$$

ile çarpıldığında ve J ve M 'ler üzerinden toplam alındığında, bu denklemin sağ tarafında Denk.(139)'un kullanılması ile $M_{13} = M'_{13}, M_{24} = M'_{24}$ eşitlikleri elde edilir. Böylece, 3j sembolleri ile 9j sembolleri arasında

$$\begin{aligned} & \sum_{JM} (2J+1) \begin{pmatrix} J_{12} & J_{34} & J \\ M_{12} & M_{34} & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{13} & J_{24} & J \\ M_{13} & M_{24} & M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_{12} \\ J_3 & J_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{Bmatrix} = \\ & = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ m_1 & m_2 & M_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & J_{34} \\ m_3 & m_4 & M_{34} \end{pmatrix} \times \\ & \quad \times \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & J_{13} \\ m_1 & m_3 & M_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & J_{24} \\ m_2 & m_4 & M_{24} \end{pmatrix} \quad (254) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

9j sembolleri bir çok problemde ortaya çıkar. Bu semboller, problemin fiziksel karakteristiklerinden ziyade bağımsız açılal momentumun geometriksel yönlerini tanımlar. Semboller, sembol argümanlarının genel fonksiyonlarıdır ve sembollerin değerleri bazı makalelerde [19,20] tablolar halinde verilmiştir.

İki bağımsız indirgenemez tensörün tensörel çarpımları ile elde edilen bir indirgenemez tensör işlemcisinin matris elemanlarını hesaplamak için 9j sembollerini kullanırız. $T^{(k_1)}(1)$ ve $T^{(k_2)}(2)$ gibi iki indirgenemez tensör işlemcisi ve bu tensör işlemcilerinin bileşenlerinin $T_{\kappa_1}^{(k_1)} T_{\kappa_2}^{(k_2)}$ şeklindeki çarpımlarını dikkate alalım. Clebsch-Gordan katsayılarının kullanılması ile bu çarpımlardan k ranklı indirgenemez bir tensör oluşturabiliriz. Bu durum Denk.(114) bağıntısına göre

$$T_{\kappa}^{(k)}(1,2) = [T_{\kappa_1}^{(k_1)}(1) \times T_{\kappa_2}^{(k_2)}(2)]_{\kappa}^{(k)} = \sum_{\kappa_1 \kappa_2} \langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k_1 k_2 k \kappa \rangle T_{\kappa_1}^{(k_1)}(1) T_{\kappa_2}^{(k_2)}(2) \quad (255)$$

sonucunu buluruz. Bu ifadedeki 1 ve 2 bağımsız sistemleri, örneğin, iki nükleon değişkenlerinden ya da bir nükleonun spini ile birlikte yörünge açısal momentumundan tensörler olabilir. İki tensör işlemcisinin bileşenleri sıradışı değilse, Denk.(255) ifadesinin sağ tarafında görülen tensör işlemcileri için sırayı korumak önemlidir.

Wigner-Eckart teoreminden dolayı, $T^{(k_1)}(1)$ ve $T^{(k_2)}(2)$ tensörlerinin fiziksel özellikleri bunların indirgenmiş matris elemanlarını içerir. Bu, $T_k^{(k)}$ birleştirilmiş sistem durumlarında da aynen geçerlidir. Bu nedenle, burada verilen sistemlerin $\langle \alpha_1 J_1 \| T^{(k_1)} \| \alpha'_1 J'_1 \rangle$ ve $\langle \alpha_2 J_2 \| T^{(k_2)} \| \alpha'_2 J'_2 \rangle$ ile verilen indirgenmiş matris elemanları ve bileşik sistemin $\langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \| T^{(k)} \| \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle$ indirgenmiş matris elemanları arasında geometriksel bir bağıntı olmalıdır. $\alpha_1 J_1$ 'li 1. sistemin ve $\alpha_2 J_2$ 'li 2. sistemin durumlarından Denk.(114) ifadesinin kullanılması ile elde edilen toplam J 'si bilinen yalnızca bir durum vardır ve bu durumun eşsizliğini açıklamak için başka kuantum sayılarına ihtiyaç yoktur.

Bu düzende, Denk.(255) ile tanımlanan $T_k^{(k)}$ 'nin matris elemanlarını hesaplayalım.

Bunlar,

$$\langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J M | [T^{(k_1)}(1) \times T^{(k_2)}(2)]_k^{(k)} | \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' M' \rangle \quad (256)$$

ile tanımlanır. Wigner-Eckart teoremine göre sıfıra çiftlenen üç açısal momentum toplamı, bir matris elemanı ile verilir. Bu nedenle bu son bağıntıda, aşağıda verilen spinler sıfıra çiftlenir. İlk olarak, çiftlenme düzeninden dolayı J_1 ve J_2 , J için J'_1 ve J'_2 , J' için çiftlenir. Daha sonra, Wigner-Eckart teoreminden dolayı J , k ve J' sıfır sonucu için çiftlenir. Denk.(256) ifadesini $T^{(k_1)}$ ve $T^{(k_2)}$ 'nin matris elemanlarıncada ifade etmek isteriz. Bu, sıfır için J_1, k_1, J'_1 ve J_2, k_2, J'_2 çiftlenimlerini ve bu düzende Denk.(255)'den ileri gelen k_1, k_2, k çiftleniminin olması gerektiğini ileri sürer. Böylece problem, Denk.(247) çiftlenim dönüşüm değişimine eşit olur.

Denk.(256) durumları açar ve Wigner-Eckart teoremini kullanırsak

$$\sum \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | J_1 J_2 J M \rangle \langle J'_1 M'_1 J'_2 M'_2 | J'_1 J'_2 J' M' \rangle \times (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix} \langle J \| T^{(k)} \| J' \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum \langle k_1 \kappa_1 k_2 \kappa_2 | k_1 k_2 k \kappa \rangle (-1)^{J_1 - M_1} \begin{pmatrix} J_1 & k_1 & J'_1 \\ -M_1 & \kappa_1 & M'_1 \end{pmatrix} (-1)^{J_2 - M_2} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} J_2 & k_2 & J'_2 \\ -M_2 & \kappa_2 & M'_2 \end{pmatrix} \langle \alpha_1 J_1 \| T^{(k_1)} \| \alpha'_1 J'_1 \rangle \langle \alpha_2 J_2 \| T^{(k_2)} \| \alpha'_2 J'_2 \rangle \quad (257)
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadenin sağ tarafını üç 3j sembolü ile çarpar ve uygun m değerleri üzerinden toplarsak

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \| [T^{(k_1)}(1) \times T^{(k_2)}(2)]^{(k)} \| \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle &= [(2J+1)(2k+1)(2J'+1)]^{1/2} \times \\
&\times \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J \\ J'_1 & J'_2 & J' \\ k_1 & k_2 & k \end{Bmatrix} \langle \alpha_1 J_1 \| T^{(k_1)} \| \alpha'_1 J'_1 \rangle \langle \alpha_2 J_2 \| T^{(k_2)} \| \alpha'_2 J'_2 \rangle \quad (258)
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Wigner-Eckart teoremine göre Denk.(255) birleştirilmiş tensör işlemcisinin fiziksel içerikleri tamamen birleştirilmiş tensör işlemcisinin indirgenmiş matris elemanları tarafından belirlenir. Hem J ve J' için spinlerinin kendine has çiftlenimleri hem de

$$\langle \alpha J M | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle$$

bağıntısından kaynaklanan çiftlenimin tümünü 9j sembollerinin geometrik görünümünü ifade eder. Bu sonucusu tensör işlemcilerinin fiziksel doğasından tamamen bağımsız olan argümanlarının genel bir fonksiyonudur.

$$(T_{\kappa}^{(k)})^+ = (-1)^{\kappa} T_{-\kappa}^{(k)}$$

ifadesine göre $T^{(k_1)}$ ve $T^{(k_2)}$ 'nin her ikisi de hermityen tensör işlemciler olsa bile bunların tensör çarpımlarının her zaman hermityen olmadığını vurgulamak önemlidir.

$$\langle \alpha' J' \| T^{(k)} \| \alpha J \rangle = (-1)^{J-J'} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle$$

bağıntısı ve $9j$ sembolünün simetri özellikleri kullanıldığında Denk.(258) ifadesindeki tensör çarpımı, $(-1)^{k_1+k_2+k} = 1$ olması halinde hermityendir. Bununla birlikte, $(-1)^{k_1+k_2+k} = -1$ ise antihermityendir. Hakikaten bu, Denk.(255) tanımından ve

$$\langle \alpha' J' \| T^{(k)} \| \alpha J \rangle = (-1)^{J-J'} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle$$

bağıntısından doğrudan görülebilir.

\mathbf{L} yörünge açıl momentumunun vektör çarpımı olarak tanımlandığında

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \eta \mathbf{L}$$

yazılır. \mathbf{r} ve \mathbf{p} nin her ikisi de rankı 1 olan hermityen tensör işlemcileri ise \mathbf{L} de rankı 1 olan hermityen bir işlemcidir. Yukarıda anlatımı yapılan durum ile bu gerçekleri nasıl uzlaştırırız? \mathbf{r} ve \mathbf{p} nin küresel birleşenlerini kullandığımızda bunların $k=1$ dereceli tensör çarpımlarını hesaplayabiliriz. Burada Clebsch-Gordan katsayılarının gerçek değerleri kullanıldığında

$$[\mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{p}^{(1)}]_k^{(1)} = i \frac{\eta}{\sqrt{2}} \mathbf{L}_k^{(1)} \quad (259)$$

ifadesi bulunur. Bu nedenle, Denk.(259) hermityen olan \mathbf{r} , \mathbf{p} ve \mathbf{L} işlemcileri için olarak tutarlıdır.

1.2.4. 12j Sembolü

12j sembolü beş açısall momentumun toplanması işleminde karşımıza çıkar. Bu beş açısall momentum a, b, c, d, r ile verilsin. Bu durumda, s toplamını verecek olan bunların toplanabileceği iki mümkün düzen vardır. Bunlardan ilki

$$a+b=e, \quad r+e=p, \quad c+d=f, \quad p+f=s \quad (260)$$

ile verilirken diğeri

$$a+c=g, \quad r+g=q, \quad b+d=h, \quad h+q=s \quad (261)$$

olur. Buradaki e, p, f, g, q, h toplam açısall momentumlarına ara açısall momentum durumları denir. Bu ifadelerden faydalanarak aşağıda verilmiş bulunan bağıntı yazılır:

$$\langle (r(ab)e)p(cd)fs | (r(ac)g)q(bd)hs \rangle = \sqrt{(2l+1)(2f+1)(2g+1)(2h+1)(2p+1)} \times \\ \times \sqrt{(2q+1)} \begin{Bmatrix} a & b & e & p \\ c & d & f & q \\ g & h & r & s \end{Bmatrix} \quad (262)$$

Her bir çiftlenme düzeninden dörder tane olmak üzere toplam sekiz Clebsch-Gordan katsayısı karşımıza çıkar. Denk.(262) ile verilen ifadenin sol tarafındaki matris ifadesi 12j sembolü olarak adlandırılır. Bu 12j sembolünü 6j sembolü ile yazmak olasıdır. Bu bağıntı

$$\begin{Bmatrix} a & b & e & p \\ c & d & f & q \\ g & h & r & s \end{Bmatrix} = (-1)^{e+f+g+h} \sum_x (-1)^x (2x+1) \begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r & e & p \\ f & s & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r & g & q \\ h & s & x \end{Bmatrix} \\ = (-1)^t \sum_x (-1)^{-x} (2x+1) \begin{Bmatrix} b & c & x \\ g & e & a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} g & e & x \\ p & q & r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p & q & x \\ h & f & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h & f & x \\ c & b & d \end{Bmatrix} \quad (263)$$

ile verilir. Birinci eşitlikte görülen 9j sembolü ikinci eşitlikte 6j sembolü ile ifade edilmiştir. Ayrıca ikinci eşitlikte görülmekte olan t ifadesi 12j sembolümdeki tüm açısall

momentum değerlerinin toplamıdır. $12j$ sembolü [20,21] kesirsel kalıtım katsayıları olarak da adlandırılmaktadır.

1.2.5. Wigner-Eckart Teoremi

J ve M 'nin belirli değerlerine sahip öz durumların bulunduğu sistemlerde indirgenebilir tensör işlemcilerin kullanılması oldukça uygundur. İşlemci ve dalga fonksiyonlarının dönüşüm özellikleri ve her ikisindeki indirgenemez tensör bileşenlerinin türleri geometriksel özelliklerin etkili bir şekilde kullanılmasına izin verir.

Bir parçacığın x ya da ∇ gibi vektörleri veya parçacık sistemleri için bunların toplamları rankı 1 olan indirgenemez tensörler olarak adlandırılır. Bunların iki bileşenin yüzeysel çarpımı Denk.(114) ifadesine göre rankları 0,1,2... olan indirgenemez tensörlerin lineer bir bileşimi olarak açılıma tabi tutulabilir. Buna ek olarak, bunlar başka bir vektörün bileşenleri ile çarpıldığında sonuç 0,1,2... ranklı tensörlerce ifade edilebilir. k vektörlerinin bileşenlerinin çarpımları dikkate alınrsa yalnızca k mertebeli indirgenemez bir tensörün lineer bir bileşimi elde edilir. Tensörün $\kappa=k$ bileşeni, tüm k vektörlerinin $\kappa=1$ bileşenlerinin çarpımıdır. Aşağıda hesaplanacak olan matris elemanlarına sahip indirgenemez tensör işlemcileri bu yolla oluşturulur. Parçacıkların spin vektörleri dönüşüme uğramış vektörler gibi dikkate alınabilir. Böyle vektörler burada dikkate alınan indirgenemez tensör işlemcilerinin oluşturulmasında kullanılabilir.

Genelde düşünülen sistemin durumlarını eşsiz olarak belirlemeye gereksinim duyabildiğimiz, toplam J , M ve α, α', \dots gibi diğer kuantum sayıları tarafından karakterize edilen durumların orthonormal bir setini dikkate alalım. Tek parçacıklı durumlar için bunlar baş kuantum sayısı n ve yörünge açısız momentumu l olabilir. Birkaç parçacıklı sistemler için daha fazla kuantum sayıları gerekli olabilir. $T_{\kappa}^{(k)}$ işlemcisini göz önüne alalım:

$$\langle \alpha JM | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = \int \psi_{\alpha JM}^* T_{\kappa}^{(k)} \psi_{\alpha' J' M'} \quad (264)$$

$T_{\kappa}^{(k)}$ ve $\psi_{\alpha' J' M'}$ ifadelerinin dönüşüm özellikleri ve Clebsch-Gordan katsayılarının kullanılması ile aşağıdaki açılım elde edilir

$$T_{\kappa}^{(k)} \psi_{\alpha' J' M'} = \sum_{J'' M''} \langle k \kappa J' M' | k J' J'' M'' \rangle \psi_{J'' M''}$$

$T_{\kappa}^{(k)}$ tensörü $\psi_{\alpha' J' M'}$ üzerinde işlem yaptığı için Denk.(243)'ün türetilmesindeki gibi $\psi_{J'' M''}$ 'nin normalizasyonu Denk.(114) tarafından garanti edilemez. Normalize ve orthogonal tam setin lineer bir birleşimi olarak $\psi_{J'' M''}$ yü açarsak

$$T_{\kappa}^{(k)} \psi_{\alpha' J' M'} = \sum_{\alpha'' J'' M''} C_{\alpha''}^{\alpha'} \langle k \kappa J' M' | k J' J'' M'' \rangle \psi_{\alpha'' J'' M''} \quad (265)$$

sonucuna ulaşırız. $C_{\alpha''}^{\alpha'}$ katsayıları J'' ve M'' nin aynı değerli birkaç normalize ve orthogonal durumları olabilmesinin bir sonucudur. Bunların tümü aynı dönüşüm özelliklerine sahiptir ve Denk.(265) ifadesinin sağ tarafı aynı vektör çiftlenim katsayısı ile çarpılır.

Denk.(264) ifadesindeki integralde Denk.(265) ifadesi kullanılırsa yalnızca $\alpha''=\alpha$, $J''=J$ ve $M''=M$ ye sahip olan katkıların terimlerini görürüz. İntegral alma işlemi ile

$$\langle \alpha J M | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = C_{\alpha}^{\alpha'} \langle k \kappa J' M' | k J' J M \rangle \quad (266)$$

ifadesini ele ederiz. Verilen αJ ve $\alpha' J'$ kuantum sayılı durumlar arasındaki bir tensör işlemcisinin tüm matris elemanları Clebsch-Gordan katsayıları ile orantılıdır. $C_{\alpha}^{\alpha'}$ nın olduğu bu durum fiziksel bir niceliktir. κ, M ve M' deki bağımlılık tamamen geometrik Clebsch-Gordan katsayıları ile belirlenebilir. Böylece verilen k ranklı tüm indirgenemez tensör işlemcilerinin $\alpha J, \alpha' J'$ durumları arasında sıfır olmayan matris elemanları orantılıdır. Denk(266) sonucu meşhur Wigner-Eckart teoremidir [5,22]. Bu ifadede vektör ekleme katsayıları yerine $3j$ sembollerinin kullanılmasıyla birçok simetrik biçim yazılabilir. Ayrıca J, J' de $C_{\alpha}^{\alpha'}$ ve $T_{\kappa}^{(k)}$ 'nin doğası çok daha açık biçimde yapılmalıdır. Böylece Denk.(266) ifadesini

$$\langle \alpha J M | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix} \langle \alpha J || T^{(k)} || \alpha' J' \rangle \quad (267)$$

olarak tekrar yazarız. İndirgenmiş matris elemanı olarak adlandırılan $\langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle$ ifadesinde tam bir fizik vardır. J, k ve J' üçgen şartlarını sağlamadıkça Denk.(267) matris elemanları sıfır olur. $\kappa+M'=M$ deki bu gibi matris elemanları sayısı $(J+k+J')(J+k+J'+3)+1-2(J(J+1)+k(k+1)+J'(J'+1))$ ile verilir. Denk.(267) Wigner-Eckart teoremi indirgenemez tensörler olan işlemcilerin kullanılmasının faydasını açıkça göstermektedir.

Denk.(267) ifadesindeki geometrik katsayılar toplam spini sıfır olan J, J' ve k gibi üç açısız momentumun çiftlenmesine işaret eder. Denk.(264) ifadesinin sağ tarafının integrali bir skaler (rankı sıfır olan tensör) olmadıkça sıfır olur. Bunu görmek için tüm uzay üzerinden uzay koordinatlarının bir fonksiyonu olan $T_{\kappa}^{(k)}$ 'nin integralini araştıralım. Herhangi bir dönme yaptığımızda integral değişmez.

$$Y_{lm}(\theta(\theta'), \phi(\phi')) = \sum Y_{lm}(\theta', \phi') D_{m'm}^{(l)}(R)$$

dönüşüm yasalarının kullanılması ile

$$F_{\kappa}^{(k)} = \int T_{\kappa}^{(k)}(\mathbf{r}^{(i)}) = \sum_{\kappa'} \int T_{\kappa'}^{(k)}(\mathbf{r}^{(i)}) D_{\kappa'\kappa}^{(k)}(R) = \sum_{\kappa'} F_{\kappa'}^{(k)} D_{\kappa'\kappa}^{(k)} \quad (268)$$

sonucu elde edilir. Bu sonucu $k \neq 0$ için tüm D matrislerini değişmez bırakan $(2k+1)$ boyutlu uzayda bir $F^{(k)}$ vektörünün varlığına işaret eder. $2k+1$ boyutlu uzayda bir boyutlu değişmez uzayın varlığı D matrislerinin indirgenemezliği ile çelişir. Bundan dolayı yalnızca $k=\kappa=0$ 'lı bir skaler sıfır olmayan bir integral değerine sahip olabilir. Eğer $\psi_{\alpha JM}$ s spinli bir spinör alanının dalga fonksiyonu ise Denk.(264)'deki $T_{\kappa}^{(k)}$ işlemcisi uzay koordinatlarında işlem yapan $(2s+1)(2s+1)$ elemanlı bir matristir. Bu nedenle $\psi_{\alpha JM}^* T_{\kappa}^{(k)} \psi_{\alpha' J' M'}$ sistemdeki parçacıkların uzay koordinatlarının bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon $T_M^{(L)}(\mathbf{r}^{(i)})$ indirgenemez tensörlerince açılıma tabi tutulabilir ve $L=0$ katsayılı terimden kaynaklanan tüm uzay üzerinden bu fonksiyonun sıfır olmayan integral katkısı

$$\begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix}$$

ile orantılıdır. Denk.(267) ifadesindeki 3j sembolünü daha yakından incelediğimizde $T_{\kappa}^{(k)}$ ve $\psi_{\alpha'JM'}$ nün indirgenemez tensör bileşenlerinden sırasıyla κ ve M' olduğu gerçeğini görürüz. Bu yukarıda - işaretli görünen M nin olduğu $\psi_{\alpha JM}^*$ li durum değildir. Ayrıca bu Denk.(267)'deki faz faktörünün açıklanabilmesini sağlamaktadır. Yukarıda gösterildiği gibi skaler bir fonksiyon yalnızca sıfır olmayan bir integrasyonun sonucundan elde edilebilir. $\psi_{JM}^* \psi_{JM}$ üzerinden alınan integral, uyumu sağlamak için normalize edildiğinden

$$Y_{lm}(\theta(\theta', \phi'), \phi(\theta', \phi')) = \sum Y_{lm'}(\theta', \phi') D_{m'm}^{(l)}(R)$$

deki $T_{\kappa}^{(k)}$ ve $\psi_{\alpha'JM'}$ de olduğu gibi aynı yöntemdeki dönmeler altında biçim değiştiren bir $\tilde{\psi}_{J,-M}$ indirgenemez tensörünün $-M$ li bileşeni ile orantılı olması gerektiğini belirtir. Gerçekte küresel harmoniklerin özelliklerinden dolayı uzaysal fonksiyon için

$$\phi_{nlm}^* = (-1)^{m_l} \phi_{nl,-m_l} \quad (269)$$

ifadesini elde ederiz. Bu tür fonksiyonlarda spinsiz parçacıkların Denk.(267)'deki tam dalga fonksiyonlarındaki faz, bir $(-1)^l$ olarak doğal bir şekilde meydana gelir.

İki bileşenli spinörler için durum oldukça karmaşıktır. $x_{1/2}$ ve $x_{-1/2}$ öz durumları, $x_{m_s}^*$ transpoze edilmiş sütun ve iki satırlı bir x_{m_s} sütununun alınmasıyla uyumlu olarak $x_{m_s}^* x_{m_s'} = \delta_{m_s m_s'}$ orthoganallik bağıntılarını sağlar. $x_{1/2}$ ve $x_{-1/2}$ sütunları, dönme eksenini yönündeki birim vektör \mathbf{n} 'yi içeren $(1 - \delta\theta(i/2)(\mathbf{n} \cdot \sigma))x_{m_s}$ ifadesinden dolayı

$$\begin{aligned} \psi + \delta\psi &= (1 + \delta_2)(1 + \delta_1)\psi \\ &= \left(1 - \frac{i}{2}\delta\phi\sigma_z\right)(1 - i\delta\phi L_z) \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} = (1 - i\delta\phi(L_z + \frac{1}{2}\sigma_z)) \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ya göre sonsuz küçük dönmeler altında biçim değiştirir. Diğer bir değişle $x_{m_s}^*$ 'yi gösteren satırlar $x_{m_s}^* (1 - \delta\theta(i/2)(\mathbf{n} \cdot \sigma))$ 'ya göre biçim değiştirir. Böylece $x_{m_s}^*$ 'deki değişiklik,

$$x_{m_s}^* \left(-\frac{1}{2}\sigma_z\right) = -m_s x_{m_s}^*$$

$$x_{1/2}^* \frac{1}{2}(-\sigma_x - i\sigma_y) = -x_{-1/2}^*$$

$$x_{-1/2}^* \frac{1}{2}(-\sigma_x + i\sigma_y) = -x_{1/2}^*$$

ile verilir.

$$J_z \psi_{jm} = m \psi_{jm} \quad , \quad J_{\pm} \psi_{jm} = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \psi_{j, m \pm 1} \quad (270)$$

ifadesindeki standart değişiklik ile bu değişiklik karşılaştırıldığında $x_{m_s}^*$ 'nin bu bağıntısı ile verilen standart değişimine göre biçim değiştiren \tilde{x}_{m_s} bileşenlerinin bulunduğu $(-1)^{(1/2)-m_s} \tilde{x}_{m_s}$ ye eşit olduğu görülür.

Şimdi dönmeler altında, ψ_{nljm}^* 'nin dönüşümünü inceleyebiliriz. Vektör ekleme katsayıları kullanıldığında bunun

$$\begin{aligned} \psi_{nljm}^* &= \left[\sum_{m_s, m_l} \left\langle \frac{1}{2} m_s, l m_l \left| \frac{1}{2} l j m \right\rangle \phi_{nlm} x_{m_s} \right] \\ &= \sum_{m_s, m_l} (-1)^{-m_l + (1/2) - m_s} \left\langle \frac{1}{2} m_s, l m_l \left| \frac{1}{2} l j m \right\rangle \phi_{nl, -m_l} \tilde{x}_{-m_s} \right. \\ &= \sum_{m_s, m_l} (-1)^{j-l-(1/2)-m_s+(1/2)-m_s} \left\langle \frac{1}{2}, -m_s, l, -m_l \left| \frac{1}{2} l j, -m \right\rangle \phi_{nl, -m_l} \tilde{x}_{-m_s} \right. \\ &= (-1)^{j-l-m} \tilde{\psi}_{j, -m} \end{aligned} \quad (271)$$

ifadesine eşit olduğu görülür. Bu son ifadedeki sonuç vektör ekleme katsayılarının Denk.(131)'deki simetrisinin kullanılması ile elde edilir. Denk.(271) ifadesindeki $\tilde{\psi}_{jm}$ Denk.(270)'e göre biçim değiştirir. $(-1)^l$ fazından farklı olarak Denk.(271)'in sağ tarafındaki faz Denk.(267)'deki ile aynıdır. Sistem vektör ekleme katsayıları olarak çiftlenen birkaç tane açısal momentum içerdiği zaman toplam M, m' lerin tek tek toplamıdır. Bu nedenle Denk.(267) bağıntısındaki faz doğal bir yöntemle elde edilir. M değerlerinin tümü için ortak olan kapsamlı işaretin seçimi zamanın tersinirliği düşüncesinden kaynaklanır.

İki ψ_{JM} ve ψ_{JM} indirgenemez tensör bir skaler içinde Denk.(114) ifadesine göre çiftlendiğinde katsayılar Denk.(132) bağıntısı ile verilir. Böylece skaler sonuç

$$\frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_M (-1)^{J-M} \psi'_{JM} \psi_{J-M}$$

ile verilir. ψ_{JM} dalga fonksiyonunun normalize integrali hesaplandığında toplamı $\sum_M \psi_{JM}^* \psi_{JM}$ olarak yazabiliriz. Biliyoruz ki bu, $\sum_M (-1)^{J-M} \tilde{\psi}_{J,-M} \psi_{JM}$ dönüşüm özelliklerine sahip olduğu için, aslında bir skalerdir.

Denk.(267)'deki indirgenmiş matris elemanı tanımı diğerlerinden daha geneldir. Bazı kitaplar Denk.(266) ifadesindeki $C_\alpha^{\alpha'}$ 'ya indirgenmiş matris elemanı demektedir. Bu tanım için Denk.(266)'daki Clebsch-Gordan katsayılarının kullanılması indirgenmiş matris elemanındaki J ve J' arasında uygun olmayan bir asimetriklik verir. Farklı bir nicelik için oluşturulan bir terimin kullanılması hesaplamaları daha zor ve eklemeleri de daha karmaşık yapar.

İndirgenmiş tensörlerin küresel bileşenler tanımı küresel harmoniklerin standart şekliinden ortaya çıkar. Her ne kadar küresel harmonikler x, y ve z hermityen işlemcileri tarafından oluşturulsa bile, kompleks katsayılara sahiptirler ve Denk.(269)'a göre kompleks eşlenik altında davranırlar. Bu durum hermityen kartezyen vektörlerin bileşenlerinden oluşan her bir indirgenemez tensör bileşenlerinin davranışdır. Bundan dolayı bir indirgenemez tensör işlemcisinin bileşenleri

$$(T_\kappa^{(k)})^+ = (-1)^\kappa T_{-\kappa}^{(k)} \quad (272)$$

bağıntılarını sağlarsa hermityen olarak adlandırılır. Denk.(272) ifadesinden matris elemanlarının kompleks eşleniğinin

$$\langle \alpha' J' M' | T_\kappa^{(k)} | \alpha J M \rangle^* = (-1)^\kappa \langle \alpha J M | T_\kappa^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle$$

olduğu anlaşılır ve Wigner-Eckart teoremi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
(-1)^{J'-M'} \langle \alpha' J' \| T^{(k)} \| \alpha J \rangle^* \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & \kappa & M \end{pmatrix} = \\
= (-1)^{\kappa+J-M} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & -\kappa & M' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Denk.(141) 3j sembollerinin simetri özellikleri kullanılırsa

$$\langle \alpha' J' \| T^{(k)} \| \alpha J \rangle = (-1)^{J-J'} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha' J' \rangle \quad (273)$$

sonucunu elde ederiz. Bu son ifadeden verilen gerçek αJ 'li özdeş iki durum arasında bir hermityen tensörün indirgenmiş matris elemanı olduğu anlaşılır. Ayrıca bu durum bir hermityen işlemci olan böyle bir tensörün $\kappa = 0$ bileşeni olan $T_0^{(k)}$ gerçeğinden de görülebilir. Bu nedenle bunun köşegen elemanları,

$$\langle \alpha JM | T_0^{(k)} | \alpha JM \rangle = (-1)^{J-M} \langle \alpha J \| T^{(k)} \| \alpha J \rangle \begin{pmatrix} J & k & J \\ -M & 0 & M \end{pmatrix} \quad (274)$$

ile verilir. Denk.(267)'deki Wigner-Eckart teoremindeki geometrik çarpanların basit bir sonucu olarak $T_{\kappa}^{(k)}$ 'nin sadece sıfır olmayan matris elemanları $M=\kappa+M'$ ifadesini sağlayan durumları arasında olup J, J' ve k sıfıra birleşebilir (3j sembolündeki üçgen kuralı). Özellikle her hangi bir skaler işlemci ($k=0$), J ve M de köşegendir. Denk.(132) ifadesinden elde edilen 3j sembollerinin değerlerinden dolayı skaler bir işlemcinin köşegenel matris elemanlarının değeri M den bağımsızdır. Skaler bir işlemci, $J'=J$ ve $M'=M$ leri sağlayan α ve α' farklı ek kuantum sayılı durumlar arasında var olan matris elemanlarına sahip olabilir.

3j sembollerinin ortogonalite bağıntıları tüm bilinen matris elemanları cinsinden indirgenmiş matris elemanını tanımlamak için kullanılabilir.

$$(-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix}$$

bağıntısı ile Denk.(267) çarpıldığı ve M ve M' üzerinden toplandıkları zaman Denk.(137) ve Denk.(138) ifadelerinin ışığı altında

$$\sum_{M M'} (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix} \langle \alpha JM | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = \frac{1}{2k+1} \langle \alpha J || T^{(k)} || \alpha' J' \rangle \quad (275)$$

sonucunu elde ederiz.

Temel işlemcilerin indirgenmiş matris elemanları bu işlemcilerin tanımlarından doğrudan elde edilebilir. 1 gibi bir etkisiz işlemci yalnızca $\alpha'=\alpha$, $J'=J$, $M'=M$ değerlerini sağlayan durumlar arasında 1'e eşit olan sıfırdan farklı matris elemanlı bir skalerdir. Denk.(267) bağıntısında $T_{\kappa}^{(k)}$ için 1 kullanıldığında Denk.(132)'nin yardımıyla

$$\langle \alpha J || 1 || \alpha' J' \rangle = \sqrt{2J+1} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{JJ'} \quad (276)$$

sonucuna ulaşırız. 1'in indirgenmiş matris elemanının 1 olmadığına dikkat edilmelidir.

J işlemcisi yalnızca $\alpha'=\alpha$, $J'=J$ li durumlar için sıfırdan farklı matris elemanlarına sahip özel nitelikli $k=1$ olan bir vektördür. Denk.(274)'ün sol tarafındaki M 'yi veren J_0 bileşenleri için Denk.(274) ifadesini kullanabiliriz.

$$\begin{pmatrix} J & 1 & J \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}$$

matris değerinin kullanılmasıyla

$$\langle \alpha J || J || \alpha' J' \rangle = \sqrt{J(j+1)(2J+1)} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{JJ'} \quad (277)$$

bağıntısına ulaşırız.

Küresel harmoniklerin indirgenmiş matris elemanları Denk.(144)'deki $C_{l m}^l$ 'nin değerinin kullanılması ile ifade edilebilir. Denk.(143) bağıntısını $Y_{lm}^*(\mathbf{r})$ ile çarpıp integralini aldığımızda

$$\begin{aligned}
C_{l'l''}^l &= \sum_{m'm''} \langle l' m' l'' m'' | l' l'' l m \rangle \langle l m | Y_{l'm'} | l'' m'' \rangle \\
&= \sum_{m'm''} (-1)^{l'-l''-m} \sqrt{2l+1} \begin{pmatrix} l' & l'' & l \\ m' & m'' & -m \end{pmatrix} \langle l m | Y_{l'm'} | l'' m'' \rangle \\
&= \sqrt{2l+1} \sum_{m'm''} (-1)^{l'-l''-m} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ -m & m' & m'' \end{pmatrix} \langle l m | Y_{l'm'} | l'' m'' \rangle
\end{aligned} \tag{278}$$

sonucunu elde ederiz. Bu son denklemden Denk.(267) Wigner-Eckart teoremi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\sqrt{2l+1} \sum_{m'm''} (-1)^{l'-l''-l} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ -m & m' & m'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ -m & m' & m'' \end{pmatrix} \langle l \| Y_{l'} \| l'' \rangle = \\
= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} (-1)^{l'+l''+l} \langle l \| Y_{l'} \| l'' \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik 3j sembollerinin Denk.(142) ortogonallik bağıntılarından kaynaklanmaktadır. Denk.(144)'den $C_{l'l''}^l$ 'nin değerlerini aldığımızda genel sonuç olarak

$$\langle l \| Y_k \| l' \rangle = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)(2k+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{279}$$

olur. 3j sembollerinin Denk.(142) simetri özelliğinden dolayı Denk.(279) bağıntısından l ve l' lü durumları arasında $Y_{k\kappa}$ 'nin matris elemanlarının $(-1)^{l+k+l'} = -1$ için sıfır olduğu anlaşılır. Ayrıca bu durum parite kavramından da doğrudan görülür. Üç küresel harmoniğin çarpımının paritesi $(-1)^{l+k+l'}$ olarak verilir. Çarpım tüm açılar üzerinden integre edilirse integral sıfır olur ve eğer r yerine $-r$ yazılırsa integral işaret değişir.

Wigner-Eckart teoremi indirgenemez tensör işlemcileri cinsinden açılıma tabi tutulabilen her hangi bir işlemcinin ispatlanmasında kullanılabilir. αJM ve $\alpha' J'M'$ durumları arasındaki her bir işlemcinin matris elemanları, indirgenemez tensör işlemcilerinin lineer birleşimlerinin matris elemanları tarafından yeniden oluşturulabilir. $|J-J'|$ ve $J+J'$ arasında k lü tüm $U_{\kappa}^{(k)}$ indirgenemez tensör işlemcilerinin matrislerinin seti $(2J+1) \times (2J+1)$ matrislerine karşılık gelen uzayda tam bir set oluşturur.

Şimdi dikkate alınan uzayda birim tensör işlemcilerini tanımlayalım. Bu durumda $U^{(k)}$

$$\langle \alpha JM | U^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = 1 \quad (280)$$

ile verilen indirgenmiş matris elemanlarına sahiptir. Bu işlemcilerinin matris elemanları Denk.(267) bağıntısına göre

$$\langle \alpha JM | U_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix}$$

ile verilir. Eğer bu denklemi

$$(-1)^{J-M_0} (2k+1) \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M_0 & \kappa & M'_0 \end{pmatrix}$$

ile çarpar, k ve κ üzerinden toplar ve Denk.(139) ifadesini de dikkate alırsak

$$\sum_{k\kappa} (-1)^{J-M_0} (2k+1) \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M_0 & \kappa & M'_0 \end{pmatrix} \langle \alpha JM | U_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = \delta_{MM_0} \delta_{M'M'_0} \quad (281)$$

sonucuna ulaşırız. Denk.(281) ifadesinden her bir Q işlemcisinin matris elemanlarının

$$\langle \alpha JM_0 | Q | \alpha' J' M'_0 \rangle = \sum_{k\kappa M M'} \langle \alpha JM | Q | \alpha' J' M' \rangle (-1)^{J-M} (2k+1) \times \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix} \langle \alpha JM_0 | U_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M'_0 \rangle \quad (282)$$

ile ifade edilebildiği anlaşılır. Denk.(282) bağıntısındaki açılım katsayıları κ, M_0 ve M'_0 dan bağımsızdır. Doğal olarak keyfi bir işlemci dönmeler altında basit bir şekilde biçim değiştirmez. Q işlemcisinin kendisi bir $T_{\kappa}^{(k)}$ indirgenemez tensörüdür ve Denk.(282)'deki toplamın

$$\langle \alpha JM | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle = \langle \alpha J || T^{(k)} || \alpha' J' \rangle \langle \alpha JM | U_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle \quad (283)$$

şeklinde indirgendiği Denk.(138) ortogonallik bağıntısı kullanılarak doğrulanabilir. Denk.(283) bağıntısı Denk.(267) ifadesinin tam olarak kendisidir. Belirli açılal momentumlu sistemlerindeki işlemlerin fiziksel önemi onların indirgenemez olmalarıdır.

Denk.(280) ile tanımlanan birim tensör işlemcisinin hermityen olmasının zorunlu olmadığına dikkat edelim. $3j$ sembollerinin simetri özelliklerinin kullanılmasıyla Denk.(283) bağıntısındaki matris elemanları arasında aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\begin{aligned} \langle \alpha JM | U_{\kappa}^{(k)} | \alpha' J' M' \rangle &= (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & k & J' \\ -M & \kappa & M' \end{pmatrix} = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & -\kappa & M \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & -\kappa & M \end{pmatrix} (-1)^{J-J'+\kappa} \\ &= (-1)^{J-J'+\kappa} \langle \alpha' J' M' | U_{-\kappa}^{(k)} | \alpha JM \rangle \end{aligned}$$

Bu nedenle $U_{\kappa}^{(k)}$; $(-1)^{J-J'} = 1$ olduğunda hermityen, $(-1)^{J-J'} = -1$ 'de ise anti-hermityendir. $T^{(k)}$ 'nin hermityen olması halinde Denk.(273)'den dolayı $\langle \alpha J || T^{(k)} || \alpha' J' \rangle U_{\kappa}^{(k)}$ ifadesi de hermityendir.

Yukarıda irdelendiği gibi aynı k ve κ ranklı her hangi indirgenemez tensör işlemcilerinin bileşenlerinin sıfırdan farklı olan matris elemanları, αJM ve $\alpha' J' M'$ li durumlarla orantılıdır. Özellikle bu, J nin matris elemanları (j veya α nın farklı değerli durumları arasında J nin matris elemanları sıfırdır) ile orantılı olan αJM ve $\alpha' J' M'$ durumları arasında matris elemanlarına sahip vektör işlemcileri için geçerlidir. $J^2 = (J_1 + J_2)^2$ nin belirli bir duruma çiftlenmiş J_1 ve J_2 spinli iki bağımsız kısımdan oluşan bir sistemin magnetik momentini hesaplamada kullanalım. Magnetik moment işlemcisi

$$\mu = g_1 J_1 + g_2 J_2 \quad (284)$$

ile verilen bir vektördür ve buradaki g_1 ve g_2 bu iki sistemin g çarpanlarıdır. $g_1 l + g_2 s$ ifadesinde dikkate alınan özel bir durum, $J_1=1$ ve $J_2=s$ li Denk.(284) bağıntısının özel bir halidir.

Sırasıyla $j_1(j_1+1)$ ve $j_2(j_2+1)$ şeklinde tanımlanan özdeğerlere sahip J_1^2 ve J_2^2 'li durumları dikkate alalım. Wigner-Eckart teoreminden dolayı aynı α ve j li durumlar arasındaki μ nin matris elemanları J nin matris elemanları ile orantılıdır. Orantıyı g çarpanları ile gösterdiğimizde,

$$\begin{aligned} \langle \alpha JM | \mu | \alpha JM' \rangle &= g \langle \alpha JM | J | \alpha JM' \rangle \\ &= g_1 \langle \alpha JM | J_1 | \alpha JM' \rangle + g_2 \langle \alpha JM | J_2 | \alpha JM' \rangle \end{aligned} \quad (285)$$

denklemini elde edilir. Vektörlü Denk.(285) ifadesinin skaler çarpımını

$$\langle \alpha JM' | J | \alpha JM'' \rangle$$

şeklinde yazabilir ve M' üzerinden toplayabiliriz. J , başka bir sıfırdan farklı matris elemanına sahip olmadığı için J nin kendi bileşenleri ve J_1 ve J_2 nin bileşenleri arasındaki matris çarpımını bu yolla elde ederiz. Bu nedenle,

$$g \langle \alpha JM | J^2 | \alpha JM'' \rangle = g_1 \langle \alpha JM | J_1 \cdot J | \alpha JM'' \rangle + g_2 \langle \alpha JM | J_2 \cdot J | \alpha JM'' \rangle$$

yazılabilir. $j(j+1)$ özdeğerlerine sahip J^2 işlemcisi M de köşegendir ve ayrıca $J_1 \cdot J$ ve $J_2 \cdot J$ işlemcileri skalerdir. Bu durumda bunlar da köşegendir ve özdeğerleri M den bağımsızdır. Bu nedenle J nin belirli değerli durumlarını elde ederiz:

$$gJ^2 = g_1 J_1 \cdot J + g_2 J_2 \cdot J \quad (286)$$

Denk.(286) bağıntısının sağ tarafındaki skaler çarpım, $J=J_1+J_2$ ifadesiyle ve işlemci özdeşliklerinin kullanılmasıyla doğrudan hesaplanabilir:

$$J_1^2 = (J - J_2)^2 = J^1 + J_2^2 - 2J_2 \cdot J \quad , \quad J_2^2 = (J - J_1)^2 = J^1 + J_1^2 - 2J_1 \cdot J$$

Böylece skaier çarpımlar, J_1^2, J_2^2 ve J^2 nin köşegen olduğu düzende köşegendirler.

Denk.(286) ifadesini

$$gJ^2 = \frac{1}{2} \left[g_1 \{J^2 + J_1^2 - J_2^2\} + g_2 \{J^2 + J_2^2 - J_1^2\} \right] \quad (287)$$

olarak yeniden düzenleyebiliriz. J^2, J_1^2 ve J_2^2 özdeğerlerini Denk.(287) bağıntısında yerlerine yazarsak

$$gJ = \frac{1}{2(J+1)} \left[g_1 \{J(J+1) + J_1(J_1+1) - J_2(J_2+1)\} + g_2 \{J(J+1) + J_2(J_2+1) - J_1(J_1+1)\} \right] \quad (288)$$

sonucunu elde ederiz. μ magnetik momenti, $M=J$ li durumdaki Denk.(284) ifadesinin sıfır bileşenin beklenen değeri olarak tanımlanır. Denk.(285)'den $\mu=gJ$ olduğu anlaşılır.

$$\mu = g_l l + \frac{1}{2} g_s \quad ; \quad j = l + \frac{1}{2} \quad \text{için}$$

$$\mu = \frac{j}{j+1} \left(g_1(l+1) - \frac{1}{2} g_s \right) \quad ; \quad j = l - \frac{1}{2} \quad \text{için}$$

bağıntılarındaki bir tek nükleonun magnetik momenti için yukarıda elde edilen sonuçlar Denk.(288) ifadesinin özel durumlarıdır. Tek nükleonda bu sonuçlar J_1 için l ve g_l için g_1 , J_2 için s ve g_s için g_2 'nin kullanılmasıyla elde edilirler.

Bazı özel durumlarda, Denk.(288) tarafından ifade edilen g çarpanları basit bir biçime sahiptir. $J_1=J_2$ ise

$$g = \frac{g_1 + g_2}{2} \quad ; \quad J_1 = J_2 \quad \text{için} \quad (289)$$

olur. Açıkça $g_1=g_2$ olduğu zaman $g_1J_1 + g_1J_2 = g_1J$ ve $g=g_1$ olur. $J=J_1+J_2$ durumunda ise Denk.(288) bağıntısının sonucu basit bir şekilde

$$\mu = gJ = g_1J_1 + g_2J_2 = \mu_1 + \mu_2 \quad (290)$$

olarak bulunur.

^{40}K 'nin $J = 4$ taban durumu için Denk.(288) Lande formülünü kullanalım. Bu çekirdeğin düşük enerji seviyeleri ^{40}K 'nin $1d_{3/2}^3$ proton konfigürasyonunu bir tek $1f_{7/2}$

nötronu için uyarlayarak ^{38}Cl 'in konfigürasyonundan hesaplanabilir. Deneysel ve teorik olarak hesaplanan enerjiler arasındaki uyum oldukça iyi olduğundan benzer kabullenmelerin magnetik momentler için de elde edilebilirliğinin olup olmadığına bakmak ilginçtir.

$J = 4, J_1 = \frac{3}{2}$ ve $J_2 = \frac{7}{2}$ değerlerini Denk.(288) ifadesinde yerlerine yazarsak

böyle bir durum için,

$$\mu = g4 = \frac{1}{10}(8g_1 + 32g_2) \quad (291)$$

elde edilir. Üç $1d_{3/2}^3$ protonları durumunun g çarpanları bir tek $1d_{3/2}^3$ protonunki ile aynıdır. Magnetik momenti böylece

$$\mu_{d_{3/2}} = g_1 \frac{3}{2} = \frac{3/2}{5/2} (3g_l^\pi - \frac{1}{2}g_s^\pi) = \frac{3}{5}(3 - 2.79) = .106 \text{ n.m.}$$

olarak elde edilir. $1f_{7/2}$ nötronunun magnetik momenti ise

$$\mu_{f_{7/2}} = g_2 \frac{7}{2} = (3g_l^\nu + \frac{1}{2}g_s^\nu) = -1.91 \text{ n.m.}$$

olarak hesap edilir. Denk.(291)'de bu magnetik momentlerin g_1 ve g_2 değerlerin yerlerine yazdığımızda $J=4$ durumu için $\mu = -1.69$ n.m. sonucunu elde ederiz. Bu değer $\mu = -1.298$ n.m. deneysel değeri ile kabaca uyumludur.

Bununla birlikte daha doğru bir sonucu magnetik momentlerin Schmidt değerlerinin yerine bazı ölçülmüş değerleri kullandığımızda elde edebiliriz. Bir $1d_{3/2}^3$ protonunun magnetik momenti için ^{39}K 'un 0.392 n.m.'lik deneysel moment değerini alabiliriz. Benzer olarak, ^{41}Ca 'in deneysel magnetik momenti olan -1.595 n.m. tek bir $1f_{7/2}$ nötronu için uyarlanabilir. Bu ölçülmüş momentlerden belirlenen g_1 ve g_2 'nin değerleri Denk.(291) ifadesinde kullanıldığında ^{40}K 'in taban durumunun hesaplanan magnetik momenti -1.249 n.m.'dir. Hesaplanan bu değer deneysel moment ile daha iyi bir uyum içindedir. Gerçekte, bazı K izotoplarının ölçülmüş magnetik momentlerini, ölçme işlemini yapmadan önce, oldukça doğru olarak tahmin etmek için ^{41}Ca 'nın magnetik momentleri kullanılmıştır [5].

Belirli tek nükleon işlemcilerinin matris elemanları elektromagnetik (ve diğer) geçiş olasılıklarının oranını belirler. Böylesi geçişler, verilen J_i spinli (ve diğer α_i kuantum sayıları) bir durumda hareketler ve J_s 'li duruma neden olan bir $T^{(k)}$ işlemcisinden kaynaklanır. İlk durum M_i izdüşümüne sahipse verilen M_s li duruma geçiş oranı ;

$$\sum_{\kappa} \left| \langle \alpha_s J_s M_s | T_{\kappa}^{(k)} | \alpha_i J_i M_i \rangle \right|^2 \quad (292)$$

ile orantılıdır. κ üzerinden toplam yukarıda verilen bağıntıya işaret etmesine rağmen Wigner-Eckart teoreminden dolayı Denk.(292) ifadesinde var olan terim yalnızca $\kappa = M_s - M_i$ den ileri gelir. Tüm M_s 'li durumların geçiş oranlarının elde etmek için Denk.(292)'yi M_s ler üzerinden toplarız. Wigner-Eckart teoremi kullanıldığında birleştireilmiş oranlar için aşağıda verilen sonucu bulmuş oluruz:

$$\langle \alpha_s J_s || T^{(k)} || \alpha_i J_i \rangle^2 \sum_{\kappa M_s} \begin{pmatrix} J_s & k & J_i \\ -M_s & \kappa & M_i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \langle \alpha_s J_s || T^{(k)} || \alpha_i J_i \rangle^2 \quad (293)$$

Bu oran M_i den bağımsızdır ve indirgenmiş matris elemanının karesi ile orantılıdır.

1.3. Açısal Momentumda Grafik Yöntemler

Herhangi bir açısal momentum çiftlenim probleminde, Clebsch-Gordan katsayılarının veya Wigner 3j katsayılarının çarpımlarının toplamlarını içeren ifadeleri hesaplamak gereklidir. Bu tür hesaplamalar çoğu kez Levinson'un grafik yöntemlerinin kullanılmasıyla basitleştirilebilir. Yutsis, Levinson ve Vanagas (YLV yöntemi) ve Yutsis ve Bandzaitis grafik yöntemi üzerinde çalışmışlardır [23]. Bu bölümde, basit açısal momentum çiftlenimi problemlerinde kullanılan grafik yöntemin temel kurallarını vereceğiz.

Burada verilen kurallar YLV tarafından verilenlerle özdeş değildir fakat basit ve iyi belirlenmiş bir şekilde YLV kuralları ile ilişkilidir. Buradaki kurallar YLV nin önerilenlerden biraz daha esnektir. YLV nin kuralları yalnızca 3j sembollerince ifade edilmiş formüller için kullanırken burada incelenen kurallar hem 3j sembolleri hem de Clebsch-Gordan katsayılarını içeren cebirsel ifadeleri hesaplamada kullanılabilir. YLV nin grafik metotları Edmonds [9] ve Judd [23] tarafından önerilen grafik metodlar ile benzerdir fakat YLV nin grafik metotları hem doğru işaretleri hem de ifadelerin büyüklüğünü verirken Edmonds ve Judd'un metodu yalnızca ifadelerin büyüklüğünü verir.

1.3.1. Grafik Gösterimin Temel Bileşenleri

Bir grafiksel gösterim şemalar ile cebirsel formüller arasındaki benzerliğe karşılık gelir. Cebirsel bir formüldeki her bir terim uygun bir grafiğin bir bileşeni tarafından temsil edilir. Tutarlı bir grafik gösteriminde, kendine has bir yöntemle verilen bir şekle karşılık gelen bir cebirsel formül yazmak mümkündür.

Grafik gösteriminin temel bileşenleri aşağıdaki gibidir:

(1) Wigner 3j sembolü birleştirilmiş 3 çizgili bir düğüm ya da köşeler ile gösterilir.

Bu çizgiler 3j sembolü ile çiftlendirilmiş açısal momentumu simgeler:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \frac{a\alpha}{+} \begin{array}{l} \nearrow c\gamma \\ \searrow b\beta \end{array} = \frac{a\alpha}{-} \begin{array}{l} \nearrow b\beta \\ \searrow c\gamma \end{array} \quad (294)$$

Bir işaretli düğümün yönelimini belirtmek mümkündür. Saat ibresinin yönünün tersi (+) ve saat ibresinin yönü ise (-) işaretiyle ifade edilerek düğümün dönüşü gösterilebilir. Bir şekil döndürüldüğünde çizgilerin dönemsel sırasında bir değişiklik olmaz. 3j katsayıları basit simetri özelliklerine sahiptir ve bu sembolün sütunlarının düzenli bir dönemsel sıralanışında değeri değişmez kalır. Bu yüzden dönmüş bir diyagram asıl şekildeki gibi aynı 3j sembolünü gösterir. Çizgiler arasındaki açılar ve bu çizgilerin uzunluğu önemli değildir. Sonuç olarak düğümün dönüşünü koruyan şeklin her hangi bir geometriksel deformasyonu, şekil ile gösterilmekte olan 3j sembolünü değiştirmez. Dönemsel sırayı değiştiren bir deformasyon düğümün dönüşümünü değiştirir ve eğer bozulmuş şekil aynı 3j sembolünü gösterirse bu durumda düğümün işaretini değiştirmek zorunda kalırız.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} a & c & b \\ \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

şeklinde verilen simetri bağıntısı

$$\begin{array}{c} a\alpha \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ b\beta \end{array} \begin{array}{c} c\gamma \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} + \\ \bullet \end{array} = (-1)^{a+b+c} \times \begin{array}{c} a\alpha \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ b\beta \end{array} \begin{array}{c} c\gamma \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{c} - \\ \bullet \end{array} \quad (295)$$

şekline işaret eder.

(2) Antisimetrik sembol ya da 'metrik tensör' cebirsel olarak,

$$\begin{pmatrix} a \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = \delta(\alpha, -\beta)(-)^{a+\alpha}$$

şeklinde, birçok açılal momentumun toplamlarında bir faz gösterimini tanımladığından bu ifadeyi üzerinde bir ok taşıyan bir çizgi ile gösteririz:

$$\begin{array}{c} a\alpha \\ \longleftarrow \\ b\beta \end{array} = \delta(ab) \begin{pmatrix} a \\ \alpha\beta \end{pmatrix} \quad (296)$$

Özellikle

$$\frac{a\alpha}{\leftarrow a, -\alpha} = (-)^{a+\alpha} \qquad \frac{a\alpha}{\rightarrow a, -\alpha} = (-)^{a-\alpha}$$

3j katsayısı, açısal momentumlardan biri sıfır olduğunda antisimetrik sembole indirgenir, yani

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} = (2a+1)^{1/2} \delta(ab) \begin{pmatrix} a \\ \beta\alpha \end{pmatrix} \quad (297)$$

şeklinde olduğundan bu ifadenin grafik gösterimi,

$$\frac{a\alpha}{\leftarrow} \begin{matrix} / 0 \\ + \\ \backslash b\beta \end{matrix} = \frac{a\alpha}{\leftarrow} \begin{matrix} / b\beta \\ - \\ \backslash 0 \end{matrix} = \frac{a\alpha}{\rightarrow} b\beta \times (2a+1)^{-1/2} \quad (298)$$

ile verilir.

(3)Yönlendirilmemiş bir çizgi (üzerinde ok bulunmayan bir çizgi) $\delta(ab)\delta(\alpha\beta)$ ifadesini gösterir ve şematik yapısı,

$$\frac{a\alpha}{\quad} \frac{b\beta}{\quad} = \delta(ab)\delta(\alpha\beta) \quad (299)$$

ile verilir.

(4) Daha karmaşık şemalar, bu üç temel bileşenin birbirleriyle birleştirilmesi ile oluşturulabilir. Aynı toplam açısal momentumu gösteren iki çizgi birleştirilebilir. Birleştirilmiş iki çizgi iki açısal momentumun z bileşenlerinin eşitliğini ve bu bileşenler üzerinden toplama yapılabildiğini gösterir. Şemalardaki bu z bileşenlerini açık olarak yazmaya gerek yoktur ve bu açıdan bu bileşenleri ihmal ederiz. Çoğu kez bir çizginin serbest ucuna karşılık gelen z bileşenini bile açık olarak yazmayız ve a,b,c,...gibi Romen rakamları ile gösterilen toplam açısal momentumun sahip olduğu z bileşenlerini de $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ gibi Grek harfleri ile gösteririz.

Düğümelerin birleştirildiği çizgileri iç çizgiler olarak adlandırırız. Dış çizgilerin bir ucu bir düğüme bağlıdır ve diğer ucu ise serbesttir. Kapalı şemalarda dış çizgiler yoktur. Bu tanımlamalar basit birkaç şema oluşturulduğunda daha kolay bir şekilde anlaşılabilir:

(a) 3j sembolleri için ilk olarak

$$\sum_{\alpha, \beta} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c' \\ \alpha & \beta & \gamma' \end{pmatrix} = \frac{1}{2c+1} \delta(cc') \delta(\gamma\gamma') \quad (300)$$

ile verilen orthogonallik bağıntısının grafik denklemini ile

$$\begin{array}{c} c \quad b \quad c' \\ | \quad | \quad | \\ + \quad \circ \quad - \\ | \quad | \quad | \\ a \end{array} = \frac{1}{2c+1} \times \begin{array}{c} c \quad c' \\ | \quad | \end{array} \quad (301)$$

şekildeki gibi gösterebiliriz. (a b c) açısal momentumlarının dönemsel sırası, Denk.(299) ifadesindeki her iki 3j katsayılarında da aynıdır. Bu sıra, ilk düğüm saat yönünün tersi bir yönelimine karşılık gelirken ikincisi saat yönünde yönelime karşılık gelir. Bundan dolayı ilk düğüm pozitif bir işarete sahip olurken ikincisinin işareti ise negatiftir.

Eğer Denk.(299) ifadesinde $\gamma = \gamma'$ olarak alır ve γ üzerinden toplam alırsak,

$$\begin{array}{c} b \\ | \\ - \quad \circ \quad + \\ | \\ c \\ | \\ a \end{array} = 1 \quad (302)$$

sonucuna ulaşırız. Düğümlerin işaretleri, bu ifadelerin yönelimleri tersine çevrilmiş olduğundan değişir. $(2c+1)^{-1}$ çarpanı, γ üzerinden toplam $(2c+1)$ e eşit sayıda terimler içerdiğinden iptal edilir.

3j sembolleri için ikinci bir orthogonallik bağıntısı

$$\sum_c (2c+1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma \end{pmatrix} = \delta(\alpha\alpha') \delta(\beta\beta') \quad (303)$$

ile verildiğinden buna karşılık gelen grafik denklemini

$$\sum_c (2c+1) \begin{array}{c} \alpha\alpha \\ + \\ b\beta \end{array} \begin{array}{c} c \\ - \\ \end{array} \begin{array}{c} \alpha\alpha' \\ b\beta \end{array} = \frac{\alpha\alpha}{b\beta} \frac{\alpha\alpha'}{b\beta'} \quad (304)$$

şeklinde olmalıdır.

(b) Bir antisimetrik sembolü 3j katsayısının kısıtlaması üzerinde ok bulunan düğümlü bir çizgi ile gösterilir.

$$(-)^{c+\gamma} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} = \sum_{\gamma'} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \gamma\gamma' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \alpha\alpha \\ + \\ b\beta \end{array} \begin{array}{c} c\gamma \end{array} \quad (305)$$

Bu şekil Clebsch-Gordan katsayısının bir yönelimini verdiği için oldukça kullanışlıdır. Bu kullanışlılık asıl YLV şemasının biraz değiştirilmesindeki ana sebeptir. Bir Clebsch-Gordan katsayısı

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \sqrt{2c+1} = (-1)^{a-b-\gamma} \langle ab\alpha\beta | c-\gamma \rangle$$

denklemleriyle verildiği gibi 3j sembolü ile ilişkilidir:

$$\langle ab\alpha\beta | c\gamma \rangle = (-1)^{a-b+\gamma} (2c+1)^{1/2} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix} \quad (306)$$

Denk.(305) ile Denk.(304) ile karşılaştırıldığında Clebsch-Gordan katsayısının iki grafik gösterimini elde ederiz:

$$\langle ab\alpha\beta | c\gamma \rangle = (-1)^{a-b-c} (2c+1)^{1/2} \times \begin{array}{c} a \\ + \\ b \end{array} \begin{array}{c} c \end{array} \quad (307)$$

$$= (-)^{2a} (2c+1)^{1/2} \times \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ b \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ c \end{array} \quad (308)$$

Son denklemde düğüm işareti değişmiştir. Bu, 3j sembolündeki açısal momentumların dönemsel sırasındaki değişikliğe karşılık gelir ve Denk.(295) simetri bağıntısından dolayı $(-)^{a+b+c}$ çarpanını da vermektedir.

(c) Son bir örnek olarak Racah W fonksiyonunun ve Wigner 6j sembolünün grafik gösterimini verelim:

$$W(abcd;ef) = \sum (-)^{b-\beta+c-\gamma} \begin{pmatrix} a & b & e \\ \alpha & \beta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d & f \\ -\beta & \delta' & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c & e \\ \delta & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & a & f \\ -\gamma & \alpha & \phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} + \\ \begin{array}{ccc} d & & b \\ \diagdown & & \diagup \\ \bullet & & \bullet \\ \diagup & & \diagdown \\ c & & a \end{array} \\ + \end{array} \quad (309)$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} = \sum (-)^{a+e+c-\alpha-\varepsilon-\gamma} \begin{pmatrix} a & f & c \\ \alpha & \phi & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d & e \\ \gamma & \delta & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & b & a \\ \varepsilon & \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d & f \\ \beta & \delta & \phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & e & \\ & \diagdown & \diagup \\ \bullet & & \bullet \\ & \diagup & \diagdown \\ c & & a \end{array} \\ + \end{array} \quad (310)$$

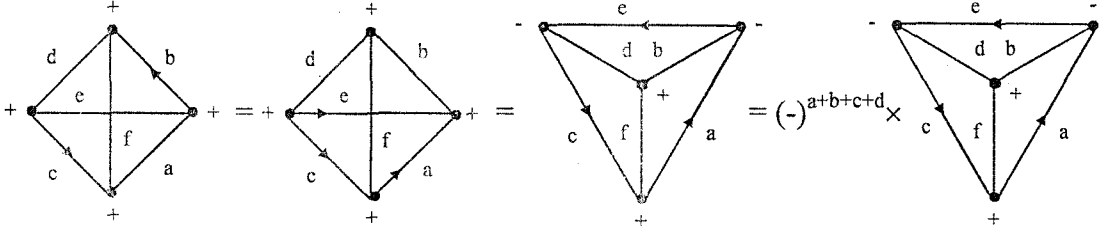
Denk.(309) ve Denk.(310) ifadelerindeki toplamlar magnetik kuantum sayılarının tümü üzerinden alınmalıdır.

(d)

$$W(abcd;ef) = (-)^{a+b+c+d} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$$

ile verilen bağıntının grafik yöntemi ile gösterimini yapalım. Buradaki W-fonksiyonu ve $6j$ sembolü Denk.(309) ve Denk.(310) ifadeleri ile tanımlanmıştır.

Sonucu aşağıda verilmiş olan grafik dönüşümlerinin ardışıklığını ile gösterebiliriz:



$(-)^{a+b+c+d}$ fazı (abe) ve (cde) düğümlerinin işaretlerinin tersine çevrilmesiyle oluşur ve $(-)^{2e}$ çarpanı da e çizgisi üzerinde bulunan okun yönünün değiştirilmesinden ileri gelir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Program

COEFF, açısal momentum çiftlenim katsayılarını hesaplayan ve iki tamsayının birbirine bölümünün karekökü şeklinde sonucu veren bir bilgisayar programıdır. Bu program hesapları Condon-Shortley faz tanımıyla hesaplamaktadır. Programın Clebsch-Gordon, Wigner 3j, Racah, Wigner 6j ve 9j seçenekleri vardır. Bütün sonuçlar $f1/f2*\sqrt{f3/f4}$ olarak verilmektedir. Burada $f1, f2, f3$ ve $f4$ tamsayılarıdır. Örneğin $\langle 2111|22 \rangle$ Clebsch-Gordan katsayısı için hesaplanan sonuç, -0.57735 yerine, $-1/3 (3)^{1/2}$ olarak verilir. Katsayıların tümü Brink ve Satchler'in formülleriyle uyumludur [23]. Kullanılan temel teknik bu sayıların faktörizasyonu cinsinden tüm sayıları ele almaktır. COEFF bilgisayar programı hem çiftlenim katsayılarını hesaplayan altprogramlara ve hem de bir asal sayıyı asal çarpanlarına ayıran ve tersi işlemi de yapabilen altprogramlara sahiptir. Ayrıca sonuçları en uygun bir şekilde yalın olarak ekrana getiren bir altprograma da sahiptir. Bu program ile ilgili katsayı türü için seçenekler sunmakta ve uygun olan yol göstermektedir. Argümanlar genellikle giriş türünden bağımsızdır ve virgülle birbirinden ayrılmalıdır.

COEFF bilgisayar programı orjinal olarak D.F.Fang ve J.F.Shriner Jr. [24] tarafından Fortran 77 programlama dilinde VAX ortamı için hazırlanmıştır. Program VAX ortamında test edilmiş ve ilk sonuçlar elde edilmiştir [24]. Bu çalışmada COEFF programı yeniden düzenlenip PC ortamında çalışır hale getirildi ve test edildi. COEFF ilk haline göre, şimdi daha kullanışlı *iyi bir dost programı* halinde kullanıma açıktır.

2.1.1. Altprogramlar

Pinit(init):Bu altprogram prime(init +1)'den prime(60)'a kadar elementleri başlatmaktadır.

Output(a1,a2,a3,a4):Bu alt program uygun bir biçimde cevapların ekranda görünmesini sağlar.

Cg(j1,j2,m1,m2,j,m):Bu altprogram Clebsch-Gordan katsayılarını hesaplar.

Tj(a,b,c,d,e,f,w1,w2):Bu altprogram Wigner 3j sembollerini hesaplamakta kullanılır.

W(a,b,c,d,e,f,w1,w2):Racah katsayıları bu altprogram ile hesaplanmaktadır.

Sj(a,b,c,d,e,f,w1,w2):Wigner 6j sembolleri bu altprogram tarafından hesaplanmaktadır.

Nj(a,b,c,d,e,f,g,h,i,w1,w2):Bu altprogram Wigner 9j katsayılarını hesaplamaktadır.

Delta2(a,b,c,w1):Bu altprogram $(a + b + c)! * (a + c - b)! * (b + c - a)! / (a + b + c + 1)!$ niceliğini hesaplamakta kullanılır.

Simp(a,b,d,e,c,g,p,w1,w2):Bu altprogram 9j sembolündeki parametrelerden biri sıfır olduğunda kullanılmaktadır. p değişkeni sütun değiştokuşundan ileri gelen işareti göstermektedir.

Pfac(n,w):Bu altprogram $(n - 1)!$ değerini hesaplar ve w dizisindeki asal sayı arpanları kodlanmasını gerçekleştirir.

Padd(a,b,c):Bu altprogram iki asal sayıya kodlanmış tamsayıları toplar. $c = a + b$ olup, burada a, b ve c kodlanmış asal sayılardır.

Psub(a,b,c):Bu altprogram iki asal sayıya kodlanmış tamsayıları çıkarır. $c = a - b$ olup, burada a, b ve c kodlanmış asal sayılardır.

Pmul(a,b,c):Bu altprogram iki asal sayıya kodlanmış tamsayıları çarpar. $c = a * b$ olup, burada a, b ve c kodlanmış asal sayılardır.

Pdiv(a,b,c):Bu altprogram iki asal sayıya kodlanmış tamsayıları böler. $c = a / b$ olup, burada a, b ve c kodlanmış asal sayılardır.

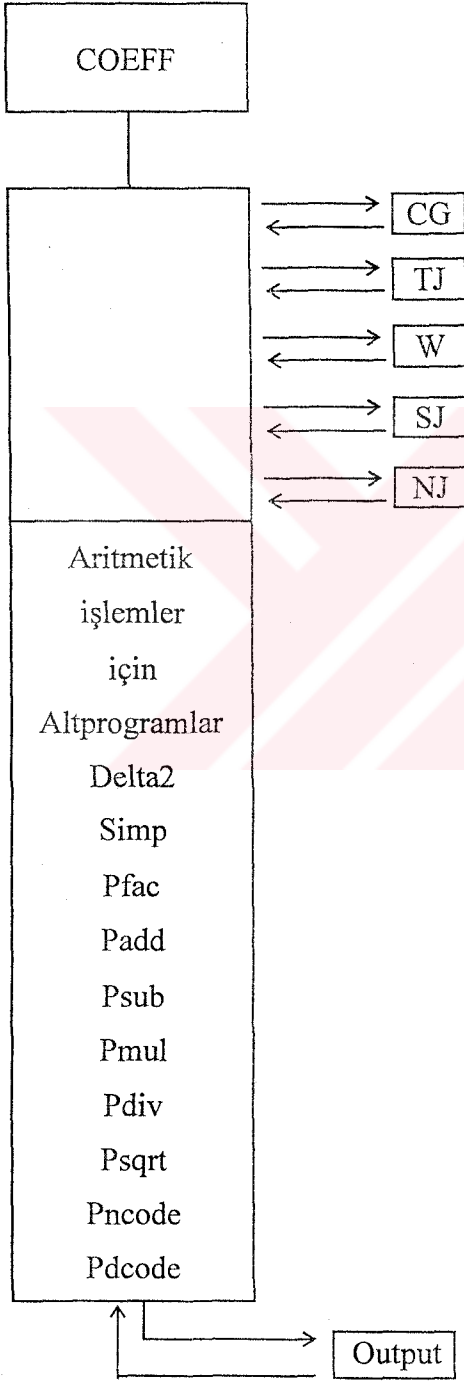
Psqrt(c,a,b):Asal sayıya kodlanmış tamsayının karekökünü alan bir altprogramdır. Bu altprogram c sayısını alır ve onu a ve b cinsinden $\text{sqrt}(c) = a * \text{sqrt}(b)$ olarak verir. Buradaki c sayısı pozitif olmak zorundadır.

Pncode(c,a):Bir tamsayıyı asal sayıya kodlanmış diziye dönüştüren bir altprogramdır. Bu altprogram c tamsayısını a gibi asal sayıya kodlanmış bir diziye dönüştürmektedir. "Asal" dizinin boyutu 60 tır ve bu dizinin bileşenlerinin ilk değeri (*init*) otomatik olarak bu altprogram tarafından ilk "init" asal sayısına karşılık getirilmiştir. "Asal" dizinin geri kalan kısmı hesaplamalarda ortaya çıkabilecek diğer asal sayıları saklamak için geçici olarak kullanılmaktadır.

Pdcode(a,f1,f2):Asal sayıya kodlanmış diziyi tamsayıların bölümü haline dönüştürmekte kullanılan bir altprogramdır. Bu altprogram asal çarpanlarında kodlanmış a

gibi bir sayıyı alır ve onu $f1/f2$ biçimine dönüştürür. Burada $f2$ bire eşit olabilir. İşaretler $f1$ ile ilgilidir.

2.1.2. Akış Diyagramı



Şekil 3. COEFF programının yapısı

2.1.3. Programın Kullanılışı

C:\>coeff

> CG katsayıları ---> CG (ya da cg)

> 3-j sembolü ---> 3J (ya da 3j)

> Racah katsayıları ---> W (ya da w)

> Wigner 6-j katsayıları ---> 6J (ya da 6j)

> 9-j sembolü ---> 9J (ya da 9j)

> Çıkış ---> X (ya da x)

> cg

> cg(j1,j2,m1,m2,j,m);2,1,-2,-1,3,-3

1

> 3j

> 3-j(j1,j2,j3,m1,m2,m3);3,2,3,0,0,0

$2 (1 / 105)^{1/2}$

> x

C:\>

3. BULGULAR, TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada vektör çiftlenim katsayıları olan Clebsch-Gordan katsayıları, Wigner $3j$ sembol katsayıları, Racah katsayıları, Wigner $6j$ ve $9j$ sembol katsayıları tez çalışması için yeniden düzenlenen COEFF programı ile hesaplandı. COEFF programına girilen verilerin sonuçlarını test etmek için internet üzerinden hazırlanmış bazı vektör çiftlenme katsayılarını hesaplayan programlar ile yapılan hesaplamalar, Mathematica 5 programı ile yapılan hesaplamalar ve elimizde var olan bazı tablolardan alınan değerler kullanıldı. COEFF program sonuçları ile yukarıda verilen programlar ile yapılan hesaplamalar ve çeşitli tablolardan alınan değerlerin çok iyi uyum sağladığı görüldü.

COEFF programı doğrudan PC üzerinden çalıştırılarak istenilen vektör çiftlenim katsayı hesaplaması seçilerek, verilen yönergeye uygun girişin yapılması ile, program uygun bir biçimde sonuçları ekranda vermektedir.

3.1. Clebsch-Gordan Katsayılarının Hesaplanması

COEFF programı doğrudan PC üzerinden çalıştırılarak beliren ekranda Clebsch-Gordan katsayıları için cg veya CG yazılarak Clebsch-Gordan katsayılarını hesaplayan altprogram çağrıldı. Çağrılan altprogramın beliren yönergesine uyan, yani $cg(j_1, j_2, m_1, m_2, j, m)$ şeklinde uygun üçgen şartlarını sağlayan açısız momentum değerleri girilerek sonuç ekranda uygun bir biçimde $(\text{sonuç})^{1/2}$ şeklinde elde edildi. Elde edilen sonuçlarla aşağıda verilen Tablo 2 hazırlandı.

Tablo 2. Clebsch-Gordan katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar

Gösterim	1*	2*	3*	4*	5*
$\left\langle \begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\rangle$	1	1	1.0	1	1
$\left\langle \begin{array}{cc c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	$-(1/2)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$ -0.7071	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$
$\left\langle \begin{array}{ccc c} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\rangle$	$(1/2)(3)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0.8660	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$
$\left\langle \begin{array}{cc c} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	$-(1/2)(3)^{1/2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ -0.8660	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$
$\left\langle \begin{array}{ccc c} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	0	0	0.0	0	0
$\left\langle \begin{array}{ccc c} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right\rangle$	$-(2/5)^{1/2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ -0.6324	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
$\left\langle \begin{array}{cc c} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	$-(1/2)(1/5)^{1/2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$ -0.2236	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{20}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{20}}$
$\left\langle \begin{array}{cc c} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	-1/2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ -0.5	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$
$\left\langle \begin{array}{cc c} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	$(1/2)(6/5)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ 0.5477	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$
$\left\langle \begin{array}{cc c} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	1	1	1.0	1	1
$\left\langle \begin{array}{cc c} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	$-2(2/15)^{1/2}$	$-2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$	$-2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$ -0.7302	$-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$	$-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}}$
$\left\langle \begin{array}{cc c} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	$(1/2)(2)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 0.7071	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$
$\left\langle \begin{array}{cc c} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	1	1	1.0	1	1
$\left\langle \begin{array}{cc c} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle$	$(2/5)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 0.6324	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Tablo 2'nin devamı

$\langle 2\frac{1}{2}-2\frac{1}{2} \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\rangle$	$-2(1/5)^{1/2}$	$-\frac{2}{\sqrt{5}}$	$-2\sqrt{\frac{1}{5}}$ -0.8944	$-\sqrt{\frac{4}{5}}$	$-\sqrt{\frac{4}{5}}$
$\langle 1\frac{1}{2}0\frac{1}{2} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$	$-(1/3)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$ -0.5773	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\langle 1\frac{1}{2}0\frac{1}{2} \frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$	$(2/3)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 0.8164	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$\langle 2\frac{3}{2}1\frac{3}{2} \frac{5}{2}\frac{5}{2}\rangle$	$-(3/7)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$ -0.6546	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$	$-\sqrt{\frac{3}{7}}$
$\langle 2\frac{3}{2}0\frac{3}{2} \frac{5}{2}\frac{3}{2}\rangle$	$-3(2/35)^{1/2}$	$-3\sqrt{\frac{2}{35}}$	$-3\sqrt{\frac{2}{35}}$ -0.7171	$-\sqrt{\frac{18}{35}}$	$-\sqrt{\frac{18}{35}}$
$\langle 2\frac{3}{2}1-\frac{1}{2} \frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$	0	0	0.0	0	0
$\langle 2\frac{3}{2}0-\frac{1}{2} \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\rangle$	$(3/35)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{3}{35}}$	$\sqrt{\frac{3}{35}}$ 0.2927	$\sqrt{\frac{3}{35}}$	$\sqrt{\frac{3}{35}}$
$\langle 2\frac{3}{2}-1\frac{1}{2} \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\rangle$	0	0	0.0	0	0
$\langle 22-2-2 4-4\rangle$	1	1	1.0	1	1
$\langle 2211 32\rangle$	0	0	0.0	0	0
$\langle 222-2 40\rangle$	$(1/2)(2/35)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{70}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{35}}$ 0.1195	$\sqrt{\frac{1}{70}}$	$\sqrt{\frac{1}{70}}$
$\langle 22-1-1 3-2\rangle$	0	0	0.0	0	0
$\langle 2200 20\rangle$	$-(2/7)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{2}{7}}$	$-\sqrt{\frac{2}{7}}$ -0.5345	$-\sqrt{\frac{2}{7}}$	$-\sqrt{\frac{2}{7}}$
$\langle 2100 20\rangle$	0	0	0.0	0	0
$\langle 1100 10\rangle$	0	0	0.0	0	0
$\langle 1100 00\rangle$	$-(1/3)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$ -0.5773	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

Buradaki girdilerin $(j_1 j_2 m_1 m_2 jm) = \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle$ şeklinde olduğuna dikkat edilmelidir.

1*:Tez çalışması için düzenlenen program ile yapılan hesaplamaların sonuçlarını göstermektedir.

2*:Mathematica 5 programı ile hesaplanmış sonuçları göstermektedir.

3*:<http://www.gostick.co.uk/cleb/cgjava.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

4*:<http://www.sct.gu.edu.au/research/laserP/java/ClebschGordon/> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

5*:Elimizde var olan tablodaki değerleri göstermektedir.

Tablo 2 den görüldüğü üzere sonuçlar çok iyi bir uyum sağlamaktadır. Yalnızca sonuçların gösterim farkı vardır ki bu da önemli değildir. Ancak hesaplamada girilecek değer yönergesine uygun girişin yapılması gerektiği tekrar vurgulanmalıdır.



3.2. Wigner 3j Sembol Katsayılarının Hesaplanması

COEFF programı doğrudan PC üzerinden çalıştırılarak beliren ekranda 3j sembol katsayıları için 3j veya 3J yazılarak Wigner 3j sembol katsayılarını hesaplayan altprogram çağrıldı. Çağrılan altprogramın beliren yönergesine uyan, yani $3-j(j_1, j_2, j_3, m_1, m_2, m_3)$ şeklinde uygun üçgen şartlarını sağlayan açısız momentum değerleri girilerek sonuç ekranda uygun bir biçimde (sonuç)^{1/2} şeklinde elde edildi. Elde edilen sonuçlarla aşağıda verilen Tablo 3 hazırlandı.

Tablo 3. 3j sembol katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar

Gösterim	1*	2*	3*	4*	5*	6*
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(1/3)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$ -0.5773	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(1/5)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$ 0.4972	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(1/7)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{7}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}}$ -0.3779	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{7}}$
$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$1/3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0.3333	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$
$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(1/11)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{11}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{11}}$ -0.3015	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{11}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{11}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{11}}$
$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(1/13)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{13}}$ 0.2773	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{13}}$

Tablo 3'ün devamı

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(2/35)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{2}{35}}$	$\sqrt{\frac{2}{35}}$ 0.2390	$\sqrt{\frac{2}{35}}$	$\sqrt{\frac{2}{35}}$	$\sqrt{\frac{2}{35}}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$2(1/105)^{1/2}$	$\frac{2}{\sqrt{105}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{35}}$ 0.1951	$2\sqrt{\frac{1}{105}}$	$\sqrt{\frac{4}{105}}$	$\sqrt{\frac{4}{105}}$
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(10/231)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{10}{231}}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{30}{77}}$ -0.2080	$-\sqrt{\frac{10}{231}}$	$-\sqrt{\frac{10}{231}}$	$-\sqrt{\frac{10}{231}}$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(2/3)(5/77)^{1/2}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{77}}$	$-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{385}}$ -0.1698	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{77}}$	$-\sqrt{\frac{20}{693}}$	$-\sqrt{\frac{20}{693}}$
$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(2/3)(5/143)^{1/2}$	$-\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{143}}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{143}}$ -0.1246	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{143}}$	$-\sqrt{\frac{20}{1287}}$	$-\sqrt{\frac{20}{1287}}$
$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(2/143)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{2}{143}}$	$-\sqrt{\frac{2}{143}}$ -0.1182	$-\sqrt{\frac{2}{143}}$	$-\sqrt{\frac{2}{143}}$	$-\sqrt{\frac{2}{143}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(2/15)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$ 0.3651	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$	$\sqrt{\frac{2}{15}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(3/35)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{3}{35}}$	$-\sqrt{\frac{3}{35}}$ -0.2927	$-\sqrt{\frac{3}{35}}$	$-\sqrt{\frac{3}{35}}$	$-\sqrt{\frac{3}{35}}$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(5/143)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{5}{143}}$	$\sqrt{\frac{5}{143}}$ 0.1869	$\sqrt{\frac{5}{143}}$	$\sqrt{\frac{5}{143}}$	$\sqrt{\frac{5}{143}}$
$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(10/429)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{10}{429}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{30}{143}}$ 0.1526	$\sqrt{\frac{10}{429}}$	$\sqrt{\frac{10}{429}}$	$\sqrt{\frac{10}{429}}$

Tablo 3'ün devamı

$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(14/715)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{14}{715}}$	$-\frac{7}{5}\sqrt{\frac{10}{1001}}$ -0.1399	$-\sqrt{\frac{14}{715}}$	$-\sqrt{\frac{14}{715}}$	$-\sqrt{\frac{14}{715}}$
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(2/77)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{2}{77}}$	$-\sqrt{\frac{2}{77}}$ -0.1611	$-\sqrt{\frac{2}{77}}$	$-\sqrt{\frac{2}{77}}$	$-\sqrt{\frac{2}{77}}$
$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$2(7/2431)^{1/2}$	$2\sqrt{\frac{7}{2431}}$	$14\sqrt{\frac{1}{17017}}$ 0.1073	$2\sqrt{\frac{7}{2431}}$	$\sqrt{\frac{28}{2431}}$	$\sqrt{\frac{28}{2431}}$
$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$4(5/7293)^{1/2}$	$4\sqrt{\frac{5}{7293}}$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{15}{2431}}$ 0.10473	$4\sqrt{\frac{5}{7293}}$	$\sqrt{\frac{80}{7293}}$	$\sqrt{\frac{80}{7293}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(1/3)(5/11)^{1/2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{11}}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{11}}$ -0.2247	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{11}}$	$-\sqrt{\frac{5}{99}}$	$-\sqrt{\frac{5}{99}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(2/3)(1/7)^{1/2}$	$\frac{2}{3\sqrt{7}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}$ 0.2519	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\sqrt{\frac{4}{63}}$	$\sqrt{\frac{4}{63}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(6/143)^{1/2}$	$\sqrt{\frac{6}{143}}$	$\sqrt{\frac{6}{143}}$ 0.2048	$\sqrt{\frac{6}{143}}$	$\sqrt{\frac{6}{143}}$	$\sqrt{\frac{6}{143}}$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(2/35)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{2}{35}}$	$-\sqrt{\frac{2}{35}}$ -0.2390	$-\sqrt{\frac{2}{35}}$	$-\sqrt{\frac{2}{35}}$	$-\sqrt{\frac{2}{35}}$
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$10(1/3003)^{1/2}$	$\frac{10}{\sqrt{3003}}$	$\frac{10}{3}\sqrt{\frac{3}{1001}}$ 0.1824	$10\sqrt{\frac{1}{3003}}$	$\sqrt{\frac{100}{3003}}$	$\sqrt{\frac{100}{3003}}$
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$2(5/1001)^{1/2}$	$2\sqrt{\frac{5}{1001}}$	$2\sqrt{\frac{5}{1001}}$ 0.1413	$2\sqrt{\frac{5}{1001}}$	$\sqrt{\frac{20}{1001}}$	$\sqrt{\frac{20}{1001}}$

Tablo 3'ün devamı

$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-(7/429)^{1/2}$	$-\sqrt{\frac{7}{429}}$	$-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{3}{1001}}$ -0.1277	$-\sqrt{\frac{7}{429}}$	$-\sqrt{\frac{7}{429}}$	$-\sqrt{\frac{7}{429}}$
$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$3(2/1001)^{1/2}$	$3\sqrt{\frac{2}{1001}}$	$3\sqrt{\frac{2}{1001}}$ 0.1340	$3\sqrt{\frac{2}{1001}}$	$\sqrt{\frac{18}{1001}}$	$\sqrt{\frac{18}{1001}}$
$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$-20(1/46189)^{1/2}$	$-\frac{20}{\sqrt{46189}}$	$-20\sqrt{\frac{1}{46189}}$ -0.0930	$-20\sqrt{\frac{1}{46189}}$	$-\sqrt{\frac{400}{46189}}$	$-\sqrt{\frac{400}{46189}}$

Buradaki girdilerin $(i_1 i_2 i_3 m_1 m_2 m_3) = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ şeklinde olduğuna dikkat edilmelidir.

1*: Tez çalışması için düzenlenen program ile yapılan hesaplamaların sonuçlarını göstermektedir.

2*: Mathematica 5 programı ile hesaplanmış sonuçları göstermektedir.

3*: <http://www.gostick.co.uk/cleb/tjjava.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

4*: <http://www-stone.ch.cam.ac.uk/wigner.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

5*: <http://www.sct.gu.edu.au/research/laserP/java/ClebschGordon/> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

6*: Brink, D.M., Satchler, G.R., Angular Momentum kitabından alınmıştır.

Tablo 3 den görüldüğü üzere sonuçlar çok iyi bir uyum sağlamaktadır. Yalnızca sonuçların gösterim farkı vardır ki bu da önemli değildir. Ancak hesaplamada girilecek değer yönergesine uygun girişin yapılması gerektiği tekrar vurgulanmalıdır.

3.3. Wigner 6j Sembol Katsayılarının Hesaplanması

COEFF programı doğrudan PC üzerinden çalıştırılarak beliren ekranda 6j sembol katsayıları için 6j veya 6J yazılarak Wigner 6j sembol katsayılarını hesaplayan altprogram çağrıldı. Çağrılan altprogramın beliren yönergesine uyan, yani 6-j(a,b,c,d,e,f) (ki burada her bir harf sırasıyla j1,j2,j3,j4,j5 ve j6 ifadelerini göstermektedir) şeklinde uygun üçgen şartlarını sağlayan açısız momentum değerleri girilerek sonuç ekranda uygun bir biçimde (sonuç)^{1/2} şeklinde elde edildi. Elde edilen sonuçlarla aşağıda verilen Tablo 4 hazırlandı.

Tablo 4. 6j sembol katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar

Gösterim	1*	2*	3*	4*	5*	6*
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$	$(1/15)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	$\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}$ 0.2581	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$ 0.2581
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{Bmatrix}$	-1/5	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$ -0.2	$-\sqrt{\frac{1}{25}}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$ -0.2
$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$	$-(1/35)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{35}}$	$-\frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{5}}$ -0.1690	$-\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\frac{1}{\sqrt{35}}$ -0.1690
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	1/3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0.3333	$\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ 0.3333
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$	-1/3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ -0.3333	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ -0.3333
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$	-1/10	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$ -0.1	$-\sqrt{\frac{1}{100}}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$ -0.1
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$	$-(4/3)(1/70)^{1/2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{35}}$	$-\frac{2}{21}\sqrt{\frac{14}{5}}$ -0.1593	$-\sqrt{\frac{8}{315}}$	$-\sqrt{\frac{8}{315}}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{35}}$ -0.1593
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/15)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}$ 0.2581	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$\frac{1}{\sqrt{15}}$ 0.2581

Tablo 4'ün devamı

$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$	$-(1/15)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{15}}$ -0.2581	$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\frac{1}{\sqrt{15}}$ -0.2581
$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{Bmatrix}$	$1/5$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$ 0.2	$\sqrt{\frac{1}{25}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$ 0.2
$\begin{Bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{Bmatrix}$	$-(1/35)^{1/2}$	$-\frac{1}{\sqrt{35}}$	$-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{35}}$ -0.1690	$-\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\frac{1}{\sqrt{35}}$ -0.1690
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{Bmatrix}$	$1/105$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{105}$ 0.0095	$\sqrt{\frac{1}{11025}}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{105}$ 0.0095
$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	$(7/10)(1/21)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{7}}{10}$	$\frac{7}{10}\sqrt{\frac{1}{21}}$ 0.1577	$\sqrt{\frac{7}{300}}$	$\sqrt{\frac{7}{300}}$	$\frac{1}{10}\sqrt{\frac{7}{3}}$ 0.1527
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	$-(1/2)(1/5)^{1/2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$ -0.2236	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$ -0.2236
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$	$-1/10$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$ -0.1	$-\sqrt{\frac{1}{100}}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$ -0.1
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$	$(7/10)(1/21)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{7}}{10}$	$\frac{1}{30}\sqrt{21}$ 0.1527	$\sqrt{\frac{7}{300}}$	$\sqrt{\frac{7}{300}}$	$\frac{1}{10}\sqrt{\frac{7}{3}}$ 0.1527
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	$-1/3$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ -0.3333	$-\sqrt{\frac{1}{9}}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ -0.3333
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$	$1/5$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$ 0.2	$\sqrt{\frac{1}{25}}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$ 0.2
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{Bmatrix}$	$1/15$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$ 0.0666	$\sqrt{\frac{1}{225}}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$ 0.0666
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$	$1/105$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{105}$ 0.0095	$\sqrt{\frac{1}{11025}}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{105}$ 0.0095
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$	$-(1/2)(1/5)^{1/2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{10}\sqrt{5}$ -0.2236	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$ -0.2236

Tablo 4'ün devamı

$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix}$	$(1/2)(1/3)^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 0.2886	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 0.2886
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix}$	$-(1/2)(1/5)^{1/2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$ -0.2236	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$ 0.0236
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 3/2 \end{Bmatrix}$	$(1/2)(1/30)^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{15}}$ 0.0912	$\sqrt{\frac{1}{120}}$	$\sqrt{\frac{1}{120}}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$ 0.0912
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 5/2 \end{Bmatrix}$	$-(1/10)(1/3)^{1/2}$	$-\frac{1}{10\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{3}}$ -0.0577	$-\sqrt{\frac{1}{300}}$	$-\sqrt{\frac{1}{300}}$	$-\frac{1}{10\sqrt{3}}$ -0.0577
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix}$	-1/6	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$ -0.1666	$-\sqrt{\frac{1}{36}}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$ -0.1666
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3/2 & 1/2 & 3/2 \end{Bmatrix}$	$(5/6)(1/10)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{10}}$ 0.2635	$\sqrt{\frac{5}{72}}$	$\sqrt{\frac{5}{72}}$	$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}$ 0.2635
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{Bmatrix}$	$(1/2)(1/3)^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 0.2886	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\sqrt{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 0.2886
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{Bmatrix}$	$-(1/2)(1/5)^{1/2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$	$-\frac{1}{10}\sqrt{5}$ -0.2236	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\sqrt{\frac{1}{20}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{5}}$ -0.2236
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 5/2 & 3/2 \end{Bmatrix}$	$(1/30)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{30}}$	$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{6}{5}}$ 0.1825	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\sqrt{\frac{1}{30}}$	$\frac{1}{\sqrt{30}}$ 0.1825

Buradaki girdilerin $(abcdef) = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{Bmatrix}$ şeklinde olduğuna dikkat edilmelidir.

1*:Tez çalışması için hazırlanan program ile yapılan hesaplamaların sonuçlarını göstermektedir.

2*:Mathematica 5 programı ile hesaplanmış sonuçları göstermektedir.

3*:<http://www.gostick.co.uk/cleb/sjjava.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

4*:<http://www.sct.gu.edu.au/research/laserP/java/ClebschGordon/> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

5*: Edmonds, A.R., Angular Momentum In Quantum Mechanics kitabındaki ifadelerinden faydalanılarak yapılan hesaplamaları gösterir.

6*: <http://www.svengato.com/sixj.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

Tablo 4 den görüldüğü üzere sonuçlar çok iyi bir uyum sağlamaktadır. Yalnızca sonuçların gösterim farkı vardır ki bu da önemli değildir. Ancak hesaplamada girilecek değer yönergesine uygun girişin yapılması gerektiği tekrar vurgulanmalıdır.

3.4. Wigner 9j Sembol Katsayılarının Hesaplanması

COEFF programı doğrudan PC üzerinden çalıştırılarak beliren ekranda 9j katsayıları için 9j veya 9J yazılarak Wigner 9j sembolü katsayılarını hesaplayan altprogram çağrıldı. Çağrılan altprogramın beliren yönergesine uyan, yani 9-j(a,b,c,d,e,f,g,h,i) (ki burada her bir harf sırasıyla j1, j2, j3, j4, j5, j6, j7, j8 ve j9 ifadelerini göstermektedir) şeklinde uygun üçgen şartlarını sağlayan açısal momentum değerleri girilerek sonuç ekranda uygun bir biçimde (sonuç)^{1/2} şeklinde elde edildi. Elde edilen sonuçlarla aşağıda verilen Tablo 5 hazırlandı.

Tablo 5. 9j sembol katsayıları için karşılaştırmalı sonuçlar

Gösterim	1*	2*	3*	4*	5*	6*
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	1/18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$ 0.0555	0.0555	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	1/9	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$ 0.1111	0.1111	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	1/18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$ 0.0555	0.0555	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	1/15	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$ 0.0666	0.0666	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	-1/25	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$ -0.04	-0.04	$-\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{25}$
$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	-1/35	$-\frac{1}{35}$	$-\frac{1}{35}$ -0.0285	-0.0285	$-\frac{1}{35}$	$-\frac{1}{35}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/3)(1/5)^{1/2}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$ 0.1490	0.1490	$\sqrt{\frac{1}{45}}$	$\frac{1}{3\sqrt{5}}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	1/9	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$ 0.1111	0.1111	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	-1/50	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$ -0.02	-0.02	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$-(4/105)(1/2)^{1/2}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{105}$	$-\frac{4}{105}\sqrt{\frac{1}{2}}$ -0.0269	-0.0269	$-\frac{4}{105}\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{105}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/105)^{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{105}}$	$\sqrt{\frac{1}{105}}$ 0.0975	0.0975	$\sqrt{\frac{1}{105}}$	$\frac{1}{\sqrt{105}}$

Tablo 5'in devamı

$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$1/15$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$ 0.0666	0.0666	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$1/25$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$ 0.04	0.04	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
$\begin{Bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{Bmatrix}$	$1/35$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$ 0.0285	0.0285	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{35}$
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{Bmatrix}$	$1/735$	$\frac{1}{735}$	$\frac{1}{735}$ 0.0013	0.0013	$\frac{1}{735}$	$\frac{1}{735}$
$\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$(7/30)(1/35)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{7}}{30}$	$\frac{7}{30}\sqrt{\frac{1}{35}}$ 0.0394	0.0394	$\sqrt{\frac{7}{4500}}$	$\frac{\sqrt{7}}{30}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/10)(1/3)^{1/2}$	$\frac{1}{10\sqrt{3}}$	$\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 0.0577	0.0577	$\sqrt{\frac{1}{300}}$	$\frac{1}{10\sqrt{3}}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$-1/50$	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$ -0.02	-0.02	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{1}{50}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$(7/30)(1/35)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{7}}{30}$	$\frac{7}{30}\sqrt{\frac{1}{35}}$ 0.0394	0.0394	$\sqrt{\frac{7}{4500}}$	$\frac{\sqrt{7}}{30}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$-1/9$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$ -0.1111	-0.1111	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{Bmatrix}$	$1/735$	$\frac{1}{735}$	$\frac{1}{735}$ 0.0013	0.0013	$\frac{1}{735}$	$\frac{1}{735}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$-(1/15)(1/35)^{1/2}$	$-\frac{1}{15\sqrt{35}}$	$-\frac{1}{15}\sqrt{\frac{1}{35}}$ -0.0112	-0.0112	$-\frac{1}{15}\sqrt{\frac{1}{35}}$	$-\frac{1}{15\sqrt{35}}$

Tablo 5'in devamı

$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$-(1/10)(1/3)^{1/2}$	$-\frac{1}{10\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{3}}$ -0.0577	-0.0577	$-\sqrt{\frac{1}{300}}$	$-\frac{1}{10\sqrt{3}}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/2)(1/30)^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{30}}$ 0.0912	0.0912	$\sqrt{\frac{1}{120}}$	$\frac{1}{2\sqrt{30}}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/10)(1/2)^{1/2}$	$\frac{1}{10\sqrt{2}}$	$\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{2}}$ 0.0707	0.0707	$\sqrt{\frac{1}{200}}$	$\frac{1}{10\sqrt{2}}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{Bmatrix}$	$-(1/20)(1/6)^{1/2}$	$-\frac{1}{20\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{6}}$ -0.0204	-0.0204	$-\sqrt{\frac{1}{2400}}$	$-\frac{1}{20\sqrt{6}}$
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 2 \\ 5/2 & 5/2 & 0 \end{Bmatrix}$	$-(1/30)(1/10)^{1/2}$	$-\frac{1}{30\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{30}\sqrt{\frac{1}{10}}$ -0.0105	-0.0105	$-\sqrt{\frac{1}{9000}}$	$-\frac{1}{30\sqrt{10}}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{Bmatrix}$	$(5/12)(1/30)^{1/2}$	$\frac{\sqrt{5}}{12}$	$\frac{5}{12}\sqrt{\frac{1}{30}}$ 0.0760	0.0760	$\sqrt{\frac{5}{864}}$	$\frac{\sqrt{5}}{12}$
$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/6)(1/6)^{1/2}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}}$	$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{6}}$ 0.0680	0.0680	$\sqrt{\frac{1}{216}}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}}$
$\begin{Bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{Bmatrix}$	$(1/10)(1/2)^{1/2}$	$\frac{1}{10\sqrt{2}}$	$\frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{2}}$ 0.0707	0.0707	$\sqrt{\frac{1}{200}}$	$\frac{1}{10\sqrt{2}}$

Buradaki girdilerin $(abcdefghi) = \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{Bmatrix}$ şeklinde olduğuna dikkat edilmelidir.

1*:Tez çalışması için hazırlanan program ile yapılan hesaplamaların sonuçlarını göstermektedir.

2*:Mathematica 5 programı ile hesaplanmış sonuçları göstermektedir.

3*:<http://www.gostick.co.uk/cleb/njjava.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

4*:<http://www.plasma-gate.weizmann.ac.il/369j.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

$$5^* : \begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & e \\ f & f & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{b+c+e+f}}{\sqrt{(2e+1)(2f+1)}} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} \text{ bağıntısı kullanılarak el ile hesaplanmıştır.}$$

6*:<http://www-stone.ch.cam.ac.uk/wigner.html> sitesinden yapılan hesaplamaları göstermektedir.

Tablo 5 den görüldüğü üzere sonuçlar çok iyi bir uyum sağlamaktadır. Yalnızca sonuçların gösterim farkı vardır ki bu da önemli değildir. Ancak hesaplamada girilecek değer yönergesine uygun girişin yapılması gerektiği tekrar vurgulanmalıdır. Vektör çiftlenim katsayıları değişik dillerle yazılmış programlarla hesaplanabilmektedir. Bu programlama dillerinden biri de olan Fortran 77'dir. Bu çalışmada bu programlama dili ile yazılmış COEFF programı yeniden düzenlenip PC ortamında çalışır hale getirildi ve test edildi. Düzenlenen bu program ile Clebsch-Gordon katsayıları, Wigner 3-j sembol katsayıları, Racah, Wigner 6-j sembol ve 9-j sembol katsayıları hesaplandı. Bu programa hesaplaması için girilen değerler diğer programlara da girildi. Çalışmada kullanılan program ile elde edilen sonuçların hem işaret hem de veri olarak diğer program sonuçlarıyla uyum içinde oldukları görüldü.

Program sonuçları uygun bir biçimde ekranda (sonuç)^{1/2} şeklinde verdiğiinden diğer programlardan yalnızca böylesi bir gösterim farkı vardır. Sonuç olarak uygun açılal momentum değerleri, yani üçgen şartını sağlayan değerler girildiğinde, hesaplanan değer verilmekte aksi durumda sonuç sıfır olmaktadır. Ayrıca düzenlemeden önceki COEFF programı sadece VAX ortamında çalıştırılabildiği için kullanımı ve ulaşılması zordu. Düzenlemeden sonra oldukça rahat bir şekilde bilgisayarın bulunduğu tüm ortamda kullanılabilir bir yapıya kavuşturuldu. Ticari programlar (Mathematica vb.) pahalı olduğundan ve internet hatları da her zaman açık olmadığı için, bu tez için yeniden düzenlenen COEFF programı her zaman kullanılabilceği ve üzerinde hiçbir ticari sınırlama olmadığı için ve de kullanışı kolay olduğundan, diğerlerine göre çok avantajlıdır.

4. ÖNERİLER

Bu çalışmanın devamı olarak COEFF programı görsellik kazandırma amaçlı Visual Basic programlama ile tekrar düzenlenebilir ve internet üzerinden kullanıma açılabilir. Böylece konu ile ilgili araştırma yapan araştırmacılar ve öğrenciler kolayca hesaplama yapabilirler.



5. KAYNAKLAR

1. Liboff R. L., Introductory Quantum Mechanics, Third Ed., Addison - Wesley, 1998
2. Griffiths D. J., Introduction to Quantum Mechanics, PrenticeHall, New Jersey, 1995
3. Merzbacher E., Quantum Mechanics, John - Wiley and Sons, New York, 1998
4. Robinett R. W., Quantum Mechanics, Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples., Oxford University Press, New York, 1997
5. Talmi I., Simple Models of Complex Nuclei, Harwood Academic Publishers, 1993
6. De Shalit A. ve Talmi I, Nuclear Shell Theory, Academic Press, New York and London, 1963
7. Heyde K. L. G., The Nuclear Shell Model, Second Edition, Springer - Verlag, 1994
8. Sakurai J. J., Modern Quantum Mechanics, Addison - Wesley Publishing Company, 1985
9. Edmons A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Third Printing, Princeton University Press, Princeton, 1974
10. Rotenberg M., Bivins R., Metropolis N. ve Wooten J. K. Jr., The 3j and 6j symbols, Technology Press, MIT, Cambridge, MA, 1959
11. Gialio R., Theory Complex Spectra II, Phys. Rev., 62 (1942) 438 - 462
12. Nilsson S. G., Ragnarsson, Shapes and Shells in Nuclear Structure., Cambridge University Press, Cambridge, 1995
13. Fano U. ve Gialio R, Irreducible Tensorial Sets, Academic Press, New York, 1959
14. Rose M. E., Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley and Sons Inc., New York, 1957
15. De Shalit A. ve Feshbach H., Theoretical Nuclear Physics, John Wiley and Sons Inc., New York, 1974
16. Wong S. M. S., Introductory Nuclear Physics, Second Ed., John Wiley and Sons Inc., New York, 1998
17. Heyde K., Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics, Second Edition, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1999

18. Gaarde C., Larsen J. S., Harakeh M. N., Vander Werf S. Y., Igarashi M. ve Müller Auke A., The $^{48}\text{Ca} (^3\text{He}, t) ^{48}\text{Sc}$ reaction at 66 and 70 MeV: Reaction mechanism and Gamow - Teller strength, Nucl. Phys. A334, (1980), 248-268
19. Wei L., New formula for 9-j symbols and their direct calculation, Computers in Physics, 12, (1998), 632-634
20. Jahn H. A. ve Hope J., Symmetry Properties of the Wigner 9j symbol, Physical Review, 93 (1954), 318-321
21. Ord-Smith R. J., The Symmetry Relation of 12-j symbol, Physical Review, 94, (1954), 1227-1228
22. Eckart C., The Application of Grup Theory to the Quantum Dynamics of Monatomic Systems, Rev. Mod. Phys., 2, (1930), 305-380
23. Brink D. M. ve Satchler G. R., Angular Momentum, Third Edition, Oxford Science Publications, Oxford, 1999
24. Fang D. F. ve Shriner Jr. J. F., A Computer program for the calculation of angular momentum coupling coefficients, Comp. Phys. Comm., 70, (1992), 147-153

6. EKLER

Tez çalışması olarak düzenlenen COEFF programı arka kapaktaki bölmede tez ile birlikte sunulmuştur. Kullanıcılar kaynak belirtmek suretiyle istedikleri gibi kullanabilirler.



ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Çorum ili İskilip ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini 1982-1990 yılları arasında Oğuzlar İlköğretim Okulunda tamamladı.1990 da girmiş olduğu devlet parasız yatılı sınavı sonucu Taşköprü Endüstri Meslek Lisesi'ni kazandı. Burada iken girmiş olduğu teknik lise geçiş sınavını kazanarak Kastamonu Teknik Lisesine kayıt hakkı kazandı ve ortaöğrenimine burada devam etti. Buradan 1994 yılında mezun oldu. 1995 yılında girmiş olduğu öğrenci seçme ve yerleştirme sınavı sonucu Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik bölümünü kazandı. 2000 yılında buradan Fizikçi unvanı ile mezun oldu. 2000 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalına yüksek lisans öğrencisi olarak kayıt yaptırmaya hak kazandı. 2001 yılında K.T.Ü. Yabancı Dil Hazırlık Programını bitirerek yüksek lisans ders aşamasına geçti. 2003 yılında yine aynı üniversitenin Tezsiz Yüksek Lisans programına kayıt hakkı kazandı. Aynı yıl içinde Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar A.B.D. Fizik Öğretmenliği Programı derslerini almaya başladı. İngilizce bilen Salih Mustafa KARABIDAK halen burada öğrenimine devam etmektedir.