

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

RİJİT BİR PANÇ İLE BASTIRILMIŞ VE TABANDA TAM OLARAK BAĞLI
AĞIRLIKSIZ ÇİFT ŞERİT PROBLEMİ

İnş.Müh. İsa ÇÖMEZ

139096

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde

“İnşaat Yüksek Mühendisi”

Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

139096

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07.07.2003

Tezin Savunma Tarihi : 05.08.2003

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Sami KARADENİZ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ

Trabzon 2003

TC YÖRÜKÜKÜLE KURULU
DOKÜMAN TAYYON MERKEZİ

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Tez konusunu belirleyen, çalışmalarına yön veren, tecrübeleriyle beni aydınlatan ve tezim dışında da bana büyük düşünen, ahlaklı bilim adamı portresi çizen, örnek almaya çabaladığım danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL' e şükran ve saygılarımı sunuyorum.

Lisans öğrenimim sırasında, tükenmişken, elimden tutan, bana yeni ufuklar açan ve bu gün bu çalışmayı yapmayı büyük ölçüde kendisine borçlu olduğum Sayın Prof. Dr. Azer KASIMZADE' ye minnettarım.

Çalışmalarım sırasında birçok konuda yardım aldığım Sayın Arş.Gör. Dr. Ahmet BİRİNCİ ve Sayın Arş.Gör.Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN 'e teşekkür ederim.

Çok fazla zamanını aldığım, yoğun işleri arasında bana yardımını esirgemeyen Sayın Arş.Gör. Volkan KAHYA'ya, tez çalışma ortamını sağlayan Sayın Doç.Dr. Fazıl Çelik'e, tezime yardımcı olmasalar bile bana verdikleri destek ile çalışmalarımı sürdürmemi sağlayan; kendilerinden feragat eden aileme, diğer büyüklerime ve arkadaşlarıma ayrıca teşekkür ederim.

Emek sarf edip yıllarımızı verdiğimiz çalışmalarımızın, değer bulması, anlamsız kalıp sadece ünvan kazandırmaması dileğiyle...

İsa ÇÖMEZ
Trabzon 2003

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ.....	XII
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.1.1. Değme Problemlerinin Tarihsel Gelişimi.....	1
1.1.2. Çalışmanın Kapsamı.....	4
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	5
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	14
2.1. Problemin Tanımı.....	14
2.2. Kullanılacak Denklemler.....	14
2.3. Problemin Sınır Şartları.....	16
2.4. Katsayıların Belirlenmesi.....	17
2.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	20
2.5.1. Birinci İntegral Denklem.....	20
2.5.2. İkinci İntegral Denklem.....	26
2.5.3. İntegral Denklem Sisteminin Çözümü.....	29
2.6. Panç Profilleri.....	31
2.6.1. Dairesel Panç Durumu.....	32
2.6.2. Parabolik Panç Durumu.....	32
2.7. Gerilmelerin Bulunması	33
3. BULGULAR VE İRDELEME.....	38
3.1. Giriş.....	38
3.2. Değme Yüzeyleri ve Değme Gerilmeleri.....	38

3.3.	Gerilmelerin İncelenmesi.....	51
3.3.1.	σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	51
3.3.2.	σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi.....	58
3.3.3.	τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi.....	64
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	70
5.	KAYNAKLAR.....	73
	ÖZGEÇMİŞ.....	76



ÖZET

Bu çalışmada, alt tarafından rijit olarak mesnetlenmiş, iki elastik tabakanın ve rijit pançın sürtünmesiz değme problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Yapışık olmayan tabakalara rijit bir panç aracılığıyla tekil yük etki ettirilmiştir. Tabakaların kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir.

Birinci bölümde değme problemleri ile ilgili günümüze kadar yapılmış olan çalışmalardan bazıları özetlenmiş, elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem hal için genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri elde edilmiştir. İkinci bölümde incelenen problem ve sınır şartları belirtilmiş, gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri sınır şartlarına uygulanarak sekiz tane bilinmeyen sabit katsayı ve sekiz tane cebrik denklem ortaya çıkmıştır. Sabit katsayılar, denklem sisteminin çözülmesiyle, pançın altında ve tabakaların arasında oluşan, bilinmeyen değme gerilmesi fonksiyonlarına bağlı olarak bulunmuştur. Bulunan sabit katsayılar, kullanılmamış olan diğer iki sınır şartında yerlerine konulduğunda, iki tane integral denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiştir. İntegral denklemler, uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak sayısal çözüme hazır hale getirilmiş ve denklem sistemi çözülerek değme gerilmeleri ve bunlara bağlı olan normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri bulunmuştur. Üçüncü bölümde çeşitli tabaka yükseklikleri, tabakaların malzeme özellikleri, yük durumu ve panç profilleri için değme uzunlukları ile değme gerilmesi yayılışı bulunmuş ve bunların yardımıyla da normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Elde edilen verilerle değme uzunlukları ile gerilme yayılışlarının grafikleri çizilmiş ve bu grafikler üzerinde irdeleme yapılmıştır. Dördüncü bölümde çalışmada ortaya çıkan sonuçlar belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Değme problemi, Elastik Tabaka, Rijit Panç, Sürtünmesiz Değme, İntegral Dönüşüm Teknikleri, Elastisite Teorisi, Değme Gerilmesi.

SUMMARY

Double Strip Problem, Entirely Supported on Bottom and Compressed with a Rigid Punch

In this study, a frictionless double contact problem for two elastic layers which the lower one is entirely bonded to a rigid support is considered according to the theory of elasticity. Unbonded elastic layers are subjected to a concentrated force by means of a rigid punch. The effect of gravity forces are neglected.

In the first chapter, some studies on the contact problem investigated until now are summarized and general equations of stresses and displacements are obtained by using theory of elasticity and integral transform techniques. In the second chapter, the problem and its boundary conditions are determined. Eight constant coefficients and eight linear algebraic equations are obtained by applying the expressions of stresses and displacements to the boundary conditions. Solving the equation system, coefficients are expressed by depending on the unknown contact pressures occurred under the punch and between the elastic layers. Substituting the constant coefficient into unused boundary conditions, an integral equation system which consist of two integral equations is obtained. Using the suitable Gauss-Chebyshev integration formula equations are analyzed numerically and integral equation system is solved. Contact pressures, the extent of contact and σ_x , σ_y , τ_{xy} stress components are determined. In the third chapter, numerical results for various dimensionless quantities are analyzed and presented in graphical forms. These results are discussed. The conclusions obtained from the study are mentioned in the fourth chapter.

Key Words: Contact Problem, Elastic Layer, Rigid Punch, Frictionless Contact, Integral Transform Technique, Theory of Elasticity, Contact Pressure, Receding Contact.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

- Şekil 1. Rijit panç ile bastırılmış ve tabana tam olarak bağlı elastik tabakalar..... 14
- Şekil 2. Değişik yarıçaplara göre, dairesel pançın şekil fonksiyonunun pozitif x_2 değerleri için grafiği..... 32
- Şekil 3. Değişik C değerlerine göre, parabolik pançın şekil fonksiyonunun pozitif x_2 değerleri için grafiği 33
- Şekil 4. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, panç değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)..... 41
- Şekil 5. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, tabakaların değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2$)..... 41
- Şekil 6. κ_1 ve κ_2 değerlerine bağlı olarak, panç değme yüzeyinin tabakaların kayma modülü oranları ile değişimi ($h_1/h_2 = 2, R/h_2 = 1000, \frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 42
- Şekil 7. κ_1 ve κ_2 değerlerine bağlı olarak, tabakaların değme yüzeylerinin kayma modülleri oranlarına göre değişimi ($h_1/h_2 = 2, R/h_2 = 1000, \frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 42
- Şekil 8. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, \frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 43
- Şekil 9. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, \frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 43
- Şekil 10. Çeşitli yük değerleri için, $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2, \frac{G_2}{G_1} = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, R/h_2 = 500$)..... 44
- Şekil 11. Çeşitli yük değerleri için, $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2, \frac{G_2}{G_1} = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, R/h_2 = 500$)..... 44
- Şekil 12. Tabakaların kayma modülü oranlarına göre, $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, R/h_2 = 500, \frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 45
- Şekil 13. Tabakaların kayma modülü oranlarına göre, $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, R/h_2 = 500, \frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 45

- Şekil 14. Tabakaların yükseklikleri oranlarına göre, $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı
($G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R / h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 46
- Şekil 15. Tabakaların yükseklikleri oranlarına göre, $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı
($G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R / h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 46
- Şekil 16. Tabakaların κ malzeme sabiti oranlarına göre, $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı ($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $R / h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 47
- Şekil 17. Tabakaların κ malzeme sabiti oranlarına göre, $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı ($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $R / h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 47
- Şekil 18. Parabolik pançın eğrilğine bağlı olarak, panç değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)..... 49
- Şekil 19. Parabolik pançın eğrilğine bağlı olarak, panç değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)..... 49
- Şekil 20. Parabolik pançın eğrilğine bağlı olarak, $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı
($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 50
- Şekil 21: Parabolik pançın eğrilğine bağlı olarak, $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı
($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 50
- Şekil 22. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimi ($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 52
- Şekil 23. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin yük ile değişimi
($h_1 / h_2 = 2$, $G_2 / G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R / h_2 = 500$)..... 53
- Şekil 24. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi
($h_1 / h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R / h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 53

- Şekil 25. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin $\kappa_{1,2}$ ile değişimi
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 54
- Şekil 26. Panç yarıçapları için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 56
- Şekil 27. Yük değerleri için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$)..... 56
- Şekil 28. Kayma modülleri oranı ile, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
 ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 57
- Şekil 29. κ değerleri için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 57
- Şekil 30. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 59
- Şekil 31. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin yük ile değişimi
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$)..... 59
- Şekil 32. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi
 ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 60

Şekil 33. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin $\kappa_{1,2}$ ile değişimi
($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 60

Şekil 34. Panç yarıçapları için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen
 $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 62

Şekil 35. Yük değerleri için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana
gelen $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$)..... 62

Şekil 36. Kayma modülleri oranı ile, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana
gelen $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 63

Şekil 37. κ değerleri için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen
 $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı
($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 63

Şekil 38. Dairesel panç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0,y)}{P/h_2}$ kayma gerilmesinin panç yarıçapı ile
değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 65

Şekil 39. Dairesel panç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0,y)}{P/h_2}$ kayma gerilmesinin yük ile değişimi
($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$)..... 65

Şekil 40. Dairesel panç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0,y)}{P/h_2}$ kayma gerilmesinin tabakaların kayma
modülleri oranı ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)....66

- Şekil 41. Dairesel panç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0,y)}{P/h_2}$ kayma gerilmesinin $\kappa_{1,2}$ ile değişimi
($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 66
- Şekil 42. Panç yarıçapları için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$
kayma gerilmesi yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 67
- Şekil 43. Yük değerleri için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$ normal
gerilme yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$)..... 68
- Şekil 44. Kayma modülleri oranı ile, x eksenini boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$
kayma gerilmesi yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 68
- Şekil 45. κ değerleri için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$ kayma
gerilmesi yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 69

TABLULAR DİZİNİ

Sayfa No

- Tablo 1. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, çeşitli yük değerleri için bulunan değme yüzeyleri ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)..... 40
- Tablo 2. κ_1 ve κ_2 değerlerine bağlı olarak, tabakaların kayma modülü oranlarının çeşitli değerleri için değme yüzeyleri ($h_1/h_2 = 2$, $R/h_2 = 1000$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)..... 40
- Tablo 3. Parabolik pançın eğriliğine bağlı olarak, çeşitli yük değerleri için bulunan değme yüzeyleri ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)..... 48



SEMBOLLER DİZİNİ

a	Pançın değme uzunluğunun yarısı
b	Tabakaların birbirlerine değme uzunluklarının yarısı
C	Parabolik pançın eğriliğini belirleyen katsayı
E	Elastisite modülü
e	Hacim değiştirme oranı
F(x)	Panç profilini tanımlayan fonksiyon
G	Kayma modülü
h	İki tabakanın toplam yüksekliği
h ₁	Alttaki tabakanın yüksekliği
h ₂	Üstteki tabakanın yüksekliği
m	Üst tabakanın kayma modülünün alt tabakanın kayma modülüne oranı
P	Tekil yük
p ₁ (x)	Tabakaların birbirlerine değdikleri yüzeydeki değme gerilmesi
p ₂ (x)	Panç altındaki değme gerilmesi
R	Dairesel pançın yarıçapı
r	Tabaka numarasını gösteren indis
X, Y, Z	x, y, z eksenleri doğrultusundaki kütle kuvvetleri bileşenleri
x, y, z	Kartezyen koordinatlar
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y, z eksenlerine paralele doğrultudaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri
u, v, w	Kartezyen koordinatlarda yerdeğiştirme bileşenleri
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	x, y, z doğrultusundaki birim uzamalar
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Kayma şekildeğiştirme bileşenleri
κ	Malzeme sabiti
ν	Poisson oranı
λ	Lamé sabiti

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde kullanıldıkları yerlerde tanımlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Değme problemleri, çeşitli mühendislik uygulamalarında ortaya çıkmaktadır. Raylar üzerinde hareket eden araçlarda, ray ile tekerlek arasında bir değme alanı oluşmakta bu alanın genişliği ve alandaki gerilme yayılışını bilmek gerekmektedir. Yol ve havaalanı üst yapılarında da değme problemi önemlidir. Bunların yanında akaryakıt tankları, silindirik bilyeler ve miller değme mekaniğinin uygulama alanına giren diğer bazı konulardır.

Literatürde, tabakalı ortamlarda ayrılma problemleri iki tipte ele alınmaktadır. Birinci tipte, ağırlık etkileri dikkate alınmakta ve ayrılma sonlu bir bölgede meydana gelmektedir. İkinci tipte ise ağırlık etkileri dikkate alınmamakta ve dolayısıyla ayrılma bölgesi sonsuz uzunlukta olmaktadır. Cisimlerin değme yüzeyleri tüm uzunlukları yanında çok küçük kalmaktadır. Bu ikinci tip problem literatürde “receding contact” olarak adlandırılmaktadır ve yapılan çalışma bu gruba girmektedir.

1.1.1. Değme Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Değme problemleri ile ilgili ilk çalışmalar Hertz tarafından yapılmıştır [1]. Bu nedenle değme problemleri ‘Hertz Değme Problemleri’ olarak ta anılmaktadır [2]. Hertz değme gerilmesi yayılışının yarım elipsoit, değme bölgesinin ise elips olduğunu göstermiştir [3].

Teknolojik önemine rağmen, geçen yüzyılın başlarına kadar değme problemleri teknik literatürde görülmemiştir. Sneddon’un integral dönüşüm teknikleri üzerine yaptığı çalışmaların, Muskhelishvili tarafından 1930’lu yıllarda elastisite teorisinde uygulanmasıyla değme problemi üzerine yapılan çalışmalarda artış görülmüştür [4]. Değme problemleri üzerine yapılan araştırmaların 1950’li yıllara kadar olan literatürü ve çözüm metodları Galin’in eserinden bulunabilir [5]. İntegral dönüşümlerinin bu probleme uygulanma metodları ise Ufliand’ın eserinde verilmiştir [6].

1970’lerde bilgisayardaki ve sayısal çözüm yöntemlerindeki gelişmelerle birlikte değme problemleri üzerine çalışan bilim adamı ve çalışma sayısında artış meydana gelmiştir. Değme problemleri üzerine yapılan bazı çalışmalar aşağıda özetlenmiştir.

Civelek ve Erdoğan [7], elastik yarım düzlem üzerine oturan tabakanın sürtünmesiz çift değme problemini incelemişlerdir. Elastik tabakanın, düz veya dairesel ve elastik veya rijit olabilecek bloklar aracılığıyla yük ile bastırılması sonucu değme yüzeylerinde değme gerilme yayılışını elde etmişlerdir.

Keer, Dundurs ve Tsai [8], yarım düzleme oturan ve yayılı yük ile bastırılan elastik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Simetrik olmayan düzlem değme problemleri çözülerek değme yüzeyleri ve değme gerilmeleri bulunmuştur.

Geçit ve Gökpınar [9] tarafından, rijit, eğri yüzeyli bir mesnete üst tarafından üniform yayılı yük ile bastırılmış olan ve ağırlığı ihmal edilen elastik tabakada, sürtünmesiz değme problemi incelenmiştir. Değişik yükleme durumları ve blok profilleri için değme gerilmesi ve aksenal normal gerilme dağılımları bulunmuştur.

Boduroğlu ve Delale [10], homojen, izotrop ve elastik yarım düzlem ve bunun üzerine oturan tabakanın sürtünmeli değme problemini incelemişlerdir. Yarım düzlem ve tabaka arasında sürtünme olmaması halindeki sonuçlar ile karşılaştırma yapmışlardır.

Erdoğan ve Ratwani [11], iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik bir tabakada sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir.

Kahya, Birinci ve Erdöl [12] tarafından, üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş elastik bir tabakaya rijit blok aracılığıyla simetrik tekil yük etkimesi sonucu oluşan değme problemi, değişik blok profilleri için incelenmiştir.

Adams ve Boggy [13], yük ile yarım düzleme bastırılmış olan yarı sonsuz şeritin değme problemini incelemişlerdir. Değişik elastik özelliklere sahip yarım düzlem ve yarım şeritin, değme bölgelerinin sürtünmeli ve sürtünmesiz olması halinde problemi incelemişlerdir.

Adams ve Boggy [14], farklı elastik özelliklere ve genişliklere sahip şeritlerin, düz ve sınırlı değme problemini incelemişlerdir. Farklı malzeme kombinasyonları ve genişlik oranları için sayısal sonuçlar elde edilmiş ve şeritlerin genişlik oranlarının özel durumları için bulunan sonuçlar, daha önce yapılan çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Birinci ve Erdöl [15], elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakadan oluşan ve iki noktadan basit mesnetlenmiş bileşik tabakaya ait sürekli temas problemini elastisite teorisine göre incelemişlerdir.

Birinci, Kahya ve Erdöl [16], elastik mesnete oturan, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı sonsuz uzunlukta iki tabaka arasındaki sürekli değme problemi incelemişlerdir.

Özşahin ve Çakıroğlu [17], rijit iki yarım daire mesnet üzerine oturan, değişik elastik

sabitlere ve yüksekliklere sahip, ağırlıkları ihmal edilmiş iki elastik tabakadan oluşan bileşik tabakanın değme problemini incelemişlerdir.

Birinci ve Erdöl [18], elastik mesnete oturan, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı malzemelerden yapılmış tabakaların yapıştırılmasıyla elde edilen, tekil yük veya üniform yayılı yük ile bastırılmış bileşik tabakanın değme problemini incelemişlerdir.

Aksoğan, Akavcı ve Becker [19], [11]'de incelenen problemi ayrıca sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemiyle çözmüşler ve elde edilen sonuçları karşılaştırmışlardır.

Birinci ve Erdöl [20,21], alttan iki basit mesnete oturan ve üstten rijit bir blok aracılığıyla tekil yük uygulanan, farklı yükseklik ve elastik sabitlere sahip iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın, sürtünmesiz, sürekli ve süreksiz değme problemini çözmüşlerdir. Daha sonra bu çalışmayı, tabakaların kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi halinde, değişik blok profilleri için çözmüşlerdir.

Birinci, Çakıroğlu ve Erdöl [22], üzerindeki sonlu genişlikteki yayılı yük ile elastik zemine bastırılmış, farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip, kütle kuvvetleri ihmal edilen iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın değme problemini incelemişlerdir.

Geçit [23,24], elastik yarım düzlem üzerine oturan, üniform yayılı yük ile bastırılıp, simetrik tekil yük ile kaldırılan elastik tabakanın, sürtünmesiz, sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Ayrıca, tabakanın üniform yayılı yük ile bastırılıp asimetrik tekil yük ile kaldırılması durumunda, değme problemini çözmüştür.

Civelek ve Erdoğan [25], rijit bir düzlem üzerine oturan elastik tabakanın tekil yük ile kaldırılmasını sürtünmesiz değme problemi olarak ele almışlardır.

Dempsey, Zhao, Minnetyan ve Li [26], Winkler temeline oturan, elastik, homojen ve izotrop tabakanın çözümlerini yapmışlardır. Tabakaya iletilen yükün tekil yük veya üniform yayılı yük olması ve iletilme şekline göre problem incelenmiştir.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu [27], üzerinde değişik fonksiyonlara sahip simetrik yayılı yük etkileyen bir elastik şerit ile elastik yarım sonsuz düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz değme problemini incelemişlerdir.

Bakırtaş [28], rijit bir blok ile, homojenliği derinliği ile değişen yarım sonsuz düzlem arasındaki değme problemini ele almıştır. Karışık sınır değer problemini Fourier dönüşüm tekniği yardımıyla tekil integral denkleme indirgemiş ve sayısal çözümlerini yapmıştır.

Hung ve Saxce [29], sürtünmesiz değme problemini, sonlu elemanlar yöntemi ve matematik programlama tekniği ile çözmüşlerdir. İki elastik yapının değmesi ve elastik yapının rijit temele değmesi durumları için formülasyon yapmışlardır.

Aksoğan, Akavcı ve Becker [30], iki elastik çeyrek düzlem ile üzerlerine oturan bir elastik tabakanın simetrik olmayan değme problemini integral dönüşüm tekniği, sonlu elemanlar yöntemi ve sınır elemanlar yöntemi olmak üzere üç ayrı yöntemle çözmüşlerdir.

Geçit ve Erdoğan [31], rijit yarı sonsuz düzlem üzerine oturan ve tekil yük etki ettirilen elastik tabakada sürtünmesiz değme problemini incelemiştir.

Geçit [32], yük ile yarım düzleme bastırılmış olan yarı sonsuz silindirin sürtünmesiz değme problemini incelemiştir.

Gladwell (1976), ağırlığı ihmal edilmiş, tekil yük etkisindeki tabakayı eğilme etkisindeki basit bir kiriş olarak incelemiştir. Üstteki, serbestçe kalkabilen tabakanın, alt tabakaya değme uzunluğunun yükün şiddeti ile değişmediğini göstermiştir [33].

Kahya [34], üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş, sabit yükseklikli, elastik sonsuz bir tabaka ile rijit bir blok arasındaki sürtünmesiz değme problemini çözmüştür.

1.1.2. Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, rijit bir panç ile bastırılmış ve tabanda tam olarak bağlı ağırlıksız çift şerit problemi incelenmiştir. Tabakalar arasında ve panç ile üst tabaka arasında sürtünme olmadığı kabul edilmiş ve tabakaların ağırlığı ihmal edilmiştir. Rijit eğrisel panç vasıtasıyla tabakalara üstten simetrik tekil yük etki ettirilmiştir.

Birinci bölümde, değme problemi üzerine yapılmış olan çalışmalardan bahsedildikten sonra, elastisite teorisinin temel denklemlerine Fourier integral dönüşümü uygulanıp, düzlem haldeki genel gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri, katsayılara bağlı olarak elde edilmiştir.

İkinci bölümde, problem sınır şartlarıyla birlikte verilmiş, gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri sınır şartlarına uygulanmıştır. Bunun sonucunda sekiz cebrik denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin çözümüyle de sabit katsayılar, pançın altında ve tabakaların değme bölgesinde oluşan değme gerilmelerine bağlı olarak bulunmuştur. Bulunan sabit katsayılar, kullanılmayan diğer iki sınır şartında yazılarak iki tane integral denklemden oluşan bir integral denklem sistem elde edilmiştir. Her bir integral denklem uygun Gauss-Chebyshev integral formülü kullanılarak sayısal çözüme hazır hale getirilmiştir. İntegral denklem sisteminin çözümü yapılmış ve değme yüzeylerindeki değme gerilmesi yayılışları bulunmuştur. Her iki tabakada oluşan ve

katsayılara dolayısıyla değme gerilmelerine bağlı olan normal gerilmeler, kayma gerilmeleri ve yerdeğıştirmeler bulunmuştur.

Üçüncü bölümde, değışik malzeme sabitleri, yük ve pañç profilleri için değme gerilmelerinin, normal gerilmelerin ve kayma gerilmesinin sayısal değeri bulunmuş ve grafikler yardımıyla tabakalardaki dağılımları verilerek irdeleme yapılmıştır.

Dördüncü bölümde çalışmadan varılan sonuçlar sıralanmış ve son bölümde yararlanılan kaynaklar belirtilmiştir.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Alt tarafından tam bağılı olarak mesnetlenmiş, üst tarafından rijit pañç vasıtasıyla simetrik tekil yük etkileyen elastik tabakaların değme problemi elastisite teorisine göre çözümlenerek, yerdeğıştirme ve gerilme ifadeleri bulunacaktır.

X, Y ve Z kütle kuvvetlerini, σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} gerilme bileşenlerini göstermek üzere dengede olan bir cisim için, gerilmelerin herhangi bir noktadaki değerlerine ait denge denklemleri en genel halde aşağıda gösterilmiştir [2].

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Bünye denklemleri ile şekildeğıştirmeler gerilmeler cinsinden yazılabilir [2]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (6)$$

Şekildeğiştirme-yerdeğiştirme bağıntıları ise

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (12)$$

şeklinde yazılabilir [2].

(4)-(6) nolu bünye denklemleri ve (7)-(12) nolu yerdeğiştirme-şekildeğiştirme bağıntıları yardımıyla gerilmeleri yerdeğiştirmeler cinsinden yazmak mümkündür:

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (14)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \quad (15)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (16)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (17)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (18)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen ε_x , ε_y ve ε_z sırasıyla x, y, z doğrultularındaki şekildeğiştirme bileşenlerini; u, v ve w ise sırasıyla x, y, z doğrultularındaki yerdeğiştirme bileşenlerini ifade etmektedir. e hacim değiştirme oranını, λ Lamé sabitini G ise kayma modülünü göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlıdırlar :

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (19)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (20)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (21)$$

Denklemlerde geçen kayma gerilmeleri arasında $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ eşitlikleri olduğu bilinmektedir. (13)-(18) denklemlerinde gerekli türevler alınıp denge denklemlerinde yerlerine yazılırsa Navier denklemleri olarak adlandırılan aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u + X = 0 \quad (22)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v + Y = 0 \quad (23)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + Z = 0 \quad (24)$$

Bu denklemlerde geçen ∇^2 Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (25)$$

İki boyutlu problemlerde z boyutu ihmal edileceğinden Navier denklemleri:

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0 \quad (26)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0 \quad (27)$$

haline indirgenir ve hacim değiştirme oranı e ve Laplace operatörü ∇^2 ;

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (28)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (29)$$

olur. İncelenecek problemde kütle kuvvetleri ihmal edileceğinden Navier denklemleri;

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u = 0 \quad (30)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v = 0 \quad (31)$$

Burada, iki tane bilinmeyen olan ve bulunmak istenen $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ için, iki denklemi olan bir kısmi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Problem bu kısmi türevli diferansiyel denklem takımının çözümünün yani $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ ' nin bulunmasından ibarettir. $u(x,y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirme bileşenleri bulunduktan sonra gerilmeler bunlar cinsinden elde edilecektir.

Problemin yük, malzeme ve geometri olarak y eksenine göre simetrik olması halinde, u ve v yerdeğiştirmeleri aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad (32)$$

$$v(x, y) = v(-x, y) \quad (33)$$

Navier denklemlerinin, kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması problemin çözümlerini zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini, adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümleri kolaylaştırmak için, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirmeleri (32) ve (33) bağıntıları gözönüne alınarak bilinmeyen fonksiyonlar $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (34)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (35)$$

(34) ve (35) nolu ifadelerin ters dönüşümleri alındığında;

$$\phi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} u(x, y) \sin(\alpha x) dx \quad (36)$$

$$\psi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} v(x, y) \cos(\alpha x) dx \quad (37)$$

eşitlikleri elde edilir. Bilinmeyen $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (30) nolu denklem $\sin(\alpha x) dx$, (31) nolu denklem ise $\cos(\alpha x) dx$ ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığında integre edilirse (30) ve (31) nolu eşitlikler;

$$\int_0^{\infty} \left[(\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \sin(\alpha x) dx = 0 \quad (38)$$

$$\int_0^{\infty} \left[(\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \cos(\alpha x) dx = 0 \quad (39)$$

şekline gelirler. (34) ve (35) nolu denklemlerde geçen u ve v' nin ilgili türevleri alınırsa :

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 \phi \quad (40)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{d^2 \phi}{dy^2} \quad (41)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \sin(\alpha x) dx = -\alpha \frac{d\psi}{dy} \quad (42)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \psi \quad (43)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{d^2 \psi}{dy^2} \quad (44)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos(\alpha x) dx = \alpha \frac{d\phi}{dy} \quad (45)$$

ifadeleri elde edilir. Kısmi integrasyon uygulanarak elde edilen bu ifadelerde aşağıdaki sınır şartlarının varlığı kabul edilmiştir.

$$u(0)=u(\infty)=v(\infty)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\infty}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\infty}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \quad (46)$$

(40)-(45) nolu denklemlerde bulunan değerler, (38) ve (39) nolu denklemlerde yazılırlarsa;

$$-(\lambda + 2G)\alpha^2\phi + G\frac{d^2\phi}{dy^2} - (\lambda + G)\alpha\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad (47)$$

$$(\lambda + 2G)\frac{d^2\psi}{dy^2} - \alpha^2G\psi + (\lambda + G)\alpha\frac{d\phi}{dy} = 0 \quad (48)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. $\phi(\alpha,y)$ ' i bulmak için aşağıdaki işlem sırası izlenir:

(48) ifadesinin y' e göre bir defa türevi alınır.

$$-(\lambda + 2G)\frac{d^3\psi}{dy^3} + (\lambda + G)\alpha\frac{d^2\phi}{dy^2} - G\alpha^2\frac{d\psi}{dy} = 0 \quad (49)$$

(47) ifadesinden $\frac{d\psi}{dy}$ çekilir ve y' ye göre türevleri alınır.

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{G}{\alpha(\lambda + G)}\frac{d^2\phi}{dy^2} - \frac{\alpha(\lambda + 2G)}{(\lambda + G)}\phi \quad (50)$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \frac{G}{\alpha(\lambda + G)}\frac{d^3\phi}{dy^3} - \frac{\alpha(\lambda + 2G)}{(\lambda + G)}\frac{d\psi}{dy} \quad (51)$$

$$\frac{d^3\psi}{dy^3} = \frac{G}{\alpha(\lambda + G)}\frac{d^4\phi}{dy^4} - \frac{\alpha(\lambda + 2G)}{(\lambda + G)}\frac{d^2\psi}{dy^2} \quad (52)$$

(50)-(52) nolu denklemler, (49) nolu denklemden yerlerine yazılmak sureti ile

$$\frac{d^4\phi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\phi}{dy^2} + \alpha^4 = 0 \quad (53)$$

elde edilir. İşlem aşamalarının sonucunda, ϕ 'ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer homojen diferansiyel denklem, (53), elde edilmiş olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü $\phi = e^{sy}$ olarak kabul edilir ve bu çözümün gerekli türevleri alınıp (53) nolu denklemde yazılırsa karakteristik denklem

$$s^4 - 2\alpha^2 s^2 + \alpha^4 = 0 \quad (54)$$

olarak oluşur. Bu denklemin kökleri arandığında $s_1=s_2=\alpha$ ve $s_3=s_4=-\alpha$ olarak bulunur. Sonuç olarak; (54) nolu adi diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\phi(\alpha, y) = Ae^{-\alpha y} + Bye^{-\alpha y} + Ce^{\alpha y} + Dye^{\alpha y} \quad (55)$$

Bu aşamadan sonra, $\psi(\alpha, y)$ bilinmeyeni (55) denkleminin de yardımıyla bulunabilir. Bunun için, öncelikle (48) nolu denklemin y' ye göre bir defa türevi alınır. Buradan $d^2\psi/dy^2$ ifadesi çekilip, (49) nolu denklemde yazılır. Ayrıca (55) nolu denklemde bulunan $\phi(\alpha, y)$ ' nin, y' ye göre birinci ve üçüncü türevleri de bulunup, (49) denklemde yerine yazıldığında $\psi(\alpha, y)$ aşağıdaki formda elde edilir:

$$\psi(\alpha, y) = Ae^{-\alpha y} + B\left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)e^{-\alpha y} - Ce^{\alpha y} + D\left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)e^{\alpha y} \quad (56)$$

(55) ve (56) ifadelerinde geçen κ bir malzeme sabiti olup, düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa=(3-4\nu)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ olarak bilinmektedir [39, 40]. $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonları sırasıyla, (34) ve (35) nolu denklemlerde yazılırlarsa $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yerdeğiştirme ifadeleri aşağıdaki şekli alırlar :

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A + By \right] e^{-\alpha y} + \left[C + Dy \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (57)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + y\right)B \right] e^{-\alpha y} + \left[-C + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - y\right)D \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (58)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen A, B, C, D bilinmeyen sabit katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından elde edileceklerdir.

Bulunan $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ ifadelerinin gerekli türevleri alınıp (13), (14), (16) nolu denklemlerdeki gerilme ifadelerinde yazılırsa düzlem hal için gerilmeler :

$$\frac{1}{2G} \sigma_x(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A + By) - \left(\frac{3-\kappa}{2}\right)B \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C + Dy) + \left(\frac{3-\kappa}{2}\right)D \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (59)$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A + By) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)B \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha(C + Dy) + \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)D \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (60)$$

$$\frac{1}{2G} \tau_{xy}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A + By) + \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)B \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C + Dy) - \left(\frac{\kappa-1}{2}\right)D \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (61)$$

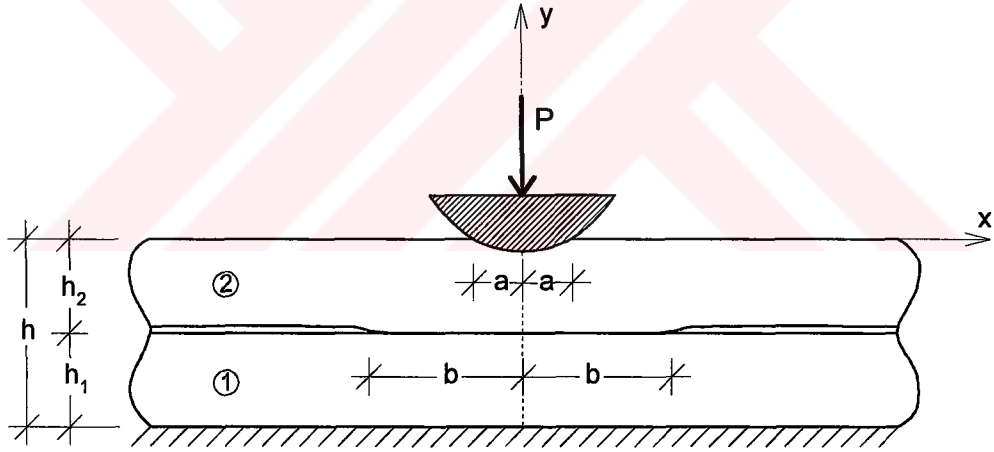
şeklinde bulunmuş olur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Birbirine yapışık olmayan, h_1 ve h_2 yüksekliklerinde, aynı veya farklı olabilecek herhangi elastik sabitlere sahip üst üste iki tabakaya, üstteki tabakanın üst yüzeyinden dairesel panç vasıtasıyla simetrik tekil yük etki ettirilmiştir. Altta tabaka alt tarafından rijit olarak mesnetlidir. Tabakalar arasında ve panç ile değdiği tabaka arasında sürtünme meydana gelmediği kabulü yapılmış ve tabakaların kütle kuvvetleri dikkate alınmamıştır.

Tabakalar x eksenini boyunca $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır. Problemden yüklemde ve geometride y -eksenine göre simetri olduğundan hesaplar x -ekseni doğrultusunda $[0, \infty)$ aralığında yapılacaktır. Problem düzlem hal için inceleneceğinden z eksenini doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınacaktır.



Şekil1. Rijit panç ile bastırılmış ve tabana tam olarak bağlı elastik tabakalar

2.2. Kullanılacak Denklemler

Yüksekliği h_2 , malzeme sabitleri G_1 ve κ_1 olan alttaki tabaka 1 nolu tabaka olarak adlandırılmıştır. Yüksekliği h_2 , malzeme sabitleri G_2 ve κ_2 olan üstteki tabaka ise 2 nolu tabakadır. İki tabakanın toplam yüksekliği ise h ile gösterilmiştir ($h_1 + h_2 = h$).

Problemin çözümünde kullanılacak denklemler, (56)-(61) den yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_r(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_r + B_r y \right] e^{-\alpha y} + \left[C_r + D_r y \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (62)$$

$$v_r(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_r + \left(\frac{\kappa_r}{\alpha} + y \right) B_r \right] e^{-\alpha y} + \left[-C_r + \left(\frac{\kappa_r}{\alpha} - y \right) D_r \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (63)$$

$$\frac{1}{2G_r} \sigma_{x_r}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha(A_r + B_r y) - \left(\frac{3 - \kappa_r}{2} \right) B_r \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C_r + D_r y) + \left(\frac{3 - \kappa_r}{2} \right) D_r \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (64)$$

$$\frac{1}{2G_r} \sigma_{y_r}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_r + B_r y) + \left(\frac{\kappa_r + 1}{2} \right) B_r \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha(C_r + D_r y) + \left(\frac{\kappa_r + 1}{2} \right) D_r \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (65)$$

$$\frac{1}{2G_r} \tau_{xy_r}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_r + B_r y) + \left(\frac{\kappa_r - 1}{2} \right) B_r \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C_r + D_r y) - \left(\frac{\kappa_r - 1}{2} \right) D_r \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (66)$$

Bu gerilme ve yerdeğiştirme ifadelerindeki $r = 1, 2$ indisi tabaka numarasını göstermekte olup üst tabakaya ait ifadelerde 2, alt tabakaya ait ifadelerde ise 1 olacaktır.

2.3. Problemin Sınır Şartları

$u_r(x, y)$ ve $v_r(x, y)$ yerdeğiştirmeleri, σ_{x_r} , σ_{y_r} ve τ_{xy_r} ise gerilmeleri göstermek üzere probleme ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = \begin{cases} -p_2(x) & 0 \leq x < a \\ 0 & a \leq x < \infty \end{cases} \quad (67)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (68)$$

$$\sigma_{y_2}(x, -h_2) = \begin{cases} -p_1(x) & 0 \leq x < b \\ 0 & b \leq x < \infty \end{cases} \quad (69)$$

$$\tau_{xy_1}(x, -h_2) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (70)$$

$$\tau_{xy_2}(x, -h_2) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (71)$$

$$\sigma_{y_1}(x, -h_2) = \sigma_{y_2}(x, -h_2) \quad 0 \leq x < \infty \quad (72)$$

$$v_1(x, -h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (73)$$

$$u_1(x, -h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, -h_2) - v_2(x, -h_2)] = 0 \quad 0 \leq x < b \quad (75)$$

$$\frac{\partial v_2(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \quad 0 \leq x < a \quad (76)$$

Probleme ait denge şartları ise aşağıda belirtilmiştir.

$$\int_{-b}^b p_1(x) dx = P \quad (77)$$

$$\int_{-a}^a p_2(x) dx = P \quad (78)$$

Yukarıdaki şartlarda geçen $p_2(x)$; rijit punch ile üst tabaka arasındaki, $p_1(x)$; iki tabaka arasındaki değme gerilmelerini ifade eden bilinmeyenlerdir. $F(x)$ rijit pançın profilini tanımlamaktadır. P tabakalara etki ettirilen tekil yüküdür. a ve b ise sırasıyla; pançın üst tabakaya değme uzunluğunun yarısı ve iki tabakanın ayrıldığı noktanın y eksenine uzaklığıdır.

Bu şartlardan ilk sekizi (67)-(74), katsayıların $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ değme gerilmelerine bağlı olarak bulunmasında kullanılır. (75) ve (76) nolu sınır şartlarında, değme gerilmelerine bağlı olarak bulunan bu katsayılar yerlerine konularak, integral denklemler elde edilir ve denklem sisteminin -(77),(78) nolu denge şartları da gözönüne alınarak- çözümünden bilinmeyen $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ değme gerilmeleri elde edilir.

2.4.Katsayıların Belirlenmesi

Gerilme ve yerdeğiştirme ifadeleri ile aynı zamanda sınır şartlarının da Fourier integral dönüşümü alınmasıyla aşağıdaki denklemler oluşur:

$$-\alpha A_2 - \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2}\right) B_2 - \alpha C_2 + \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2}\right) D_2 = p_2(\alpha) \quad (79)$$

$$-\alpha A_2 - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2}\right) B_2 + \alpha C_2 - \left(\frac{\kappa_2 - 1}{2}\right) D_2 = 0 \quad (80)$$

$$-\alpha e^{\alpha h_2} A_2 + \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_2 + 1}{2}\right) e^{\alpha h_2} B_2 - \alpha e^{-\alpha h_2} C_2 + \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_2 + 1}{2}\right) e^{-\alpha h_2} D_2 = p_1(\alpha) \quad (81)$$

$$-\alpha e^{\alpha h_2} A_2 + \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_2 - 1}{2}\right) e^{\alpha h_2} B_2 + \alpha e^{-\alpha h_2} C_2 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_2 - 1}{2}\right) e^{-\alpha h_2} D_2 = 0 \quad (82)$$

$$-\alpha e^{\alpha h_2} A_1 + \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_1 - 1}{2}\right) e^{\alpha h_2} B_1 + \alpha e^{-\alpha h_2} C_1 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_1 - 1}{2}\right) e^{-\alpha h_2} D_1 = 0 \quad (83)$$

$$-\alpha e^{\alpha h_2} A_1 + \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_1 - 1}{2}\right) e^{\alpha h_2} B_1 + \alpha e^{-\alpha h_2} C_1 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_1 - 1}{2}\right) e^{-\alpha h_2} D_1 = m \left[-\alpha e^{\alpha h_2} A_2 + \right. \\ \left. \left(\alpha h_2 - \frac{\kappa_2 - 1}{2}\right) e^{\alpha h_2} B_2 + \alpha e^{-\alpha h_2} C_2 - \left(\alpha h_2 + \frac{\kappa_2 - 1}{2}\right) e^{-\alpha h_2} D_2 \right] \quad (84)$$

$$e^{\alpha h} A_1 - h e^{\alpha h} B_1 + e^{-\alpha h} C_1 - h e^{-\alpha h} D_1 = 0 \quad (85)$$

$$e^{\alpha h} A_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} - h\right) e^{\alpha h} B_1 - e^{-\alpha h} C_1 + \left(\frac{\kappa_1}{\alpha} + h\right) e^{-\alpha h} D_1 = 0 \quad (86)$$

Denklemlerde geçen $p_2(\alpha)$, $p_1(\alpha)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$p_2(\alpha) = -\frac{1}{2G_2} \int_0^a p_2(t_2) \cos(\alpha t_2) dt_2 \quad (87)$$

$$p_1(\alpha) = -\frac{1}{2G_2} \int_0^b p_1(t_1) \cos(\alpha t_1) dt_1 \quad (88)$$

Elde edilen bu sekiz denklem ile, yine sekiz tane olan, A_r, B_r, C_r, D_r ($r=1,2$) katsayılarını, pañç ile değdiği tabaka (2. tabaka) arasındaki değme gerilmesi $p_2(t_2)$ ve iki tabaka arasındaki değme gerilmesi $p_1(t_1)$ cinsinden yazmak kabildir. $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$ henüz bilinmeyen değerler olup, yazılacak uygun iki denklem yardımıyla bir sonraki aşamada bulunacaktır.

A_r, B_r, C_r, D_r ($r=1,2$) katsayıları:

$$A_1 = \frac{m}{2\Delta_1\alpha} p_1(\alpha) e^{\alpha h_2} A_{11} \quad (89)$$

$$A_{11} = \left[(1 + 2\alpha h_1)(\kappa_1 - 2\alpha h) - \kappa_1^2 \right] e^{-2\alpha h} - \kappa_1(1 + 2\alpha h_2 - \kappa_1) e^{-2\alpha(2h-h_2)} \quad (90)$$

$$B_1 = -\frac{m}{\Delta_1} p_1(\alpha) e^{\alpha h_2} B_{11} \quad (91)$$

$$B_{11} = (1 + 2\alpha h_1) e^{-2\alpha h} + e^{-2\alpha h_1} \quad (92)$$

$$C_1 = \frac{m}{2\Delta_1\alpha} p_1(\alpha) e^{\alpha h_2} C_{11} \quad (93)$$

$$C_{11} = \kappa_1(2\alpha h_2 + \kappa_1 - 1) + \left[(1 - 2\alpha h_1)(2\alpha h + \kappa_1) - \kappa_1^2 \right] e^{-2\alpha h_1} \quad (94)$$

$$D_1 = \frac{m}{\Delta_1} p_1(\alpha) e^{\alpha h_2} D_{11} \quad (95)$$

$$D_{11} = (1 - 2\alpha h_1) e^{-2\alpha h_1} + \kappa_1 \quad (96)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\Delta_2\alpha} e^{-\alpha h_2} \left[p_1(\alpha) A_{21} + p_2(\alpha) A_{21} \right] \quad (97)$$

$$A_{21} = (1 + 2\alpha h_2 \kappa_2 - \kappa_2) e^{-2\alpha h_2} - 1 + \kappa_2 - 2\alpha h_2 \quad (98)$$

$$A_{22} = \left[1 + (1 + 2\alpha h_2)(2\alpha h_2 - \kappa_2) \right] e^{-\alpha h_2} + (\kappa_2 - 1) e^{-3\alpha h_2} \quad (99)$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta_2} e^{-\alpha h_2} \left[p_1(\alpha) B_{21} + p_2(\alpha) B_{22} \right] \quad (100)$$

$$B_{21} = 1 + (-1 + 2\alpha h_2) e^{-2\alpha h_2} \quad (101)$$

$$B_{22} = -(1 + 2\alpha h_2) e^{-\alpha h_2} + e^{-3\alpha h_2} \quad (102)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\Delta_2\alpha} e^{\alpha h_2} \left[p_1(\alpha) C_{21} + p_2(\alpha) C_{22} \right] \quad (103)$$

$$C_{21} = \left[(1 - 2\alpha h_2 \kappa_2 - \kappa_2) e^{-2\alpha h_2} + (-1 + \kappa_2 + 2\alpha h_2) e^{-4\alpha h_2} \right] \quad (104)$$

$$C_{22} = \left[(\kappa_2 - 1)(-1 + 2\alpha h_2) + 4\alpha^2 h_2^2 \right] e^{-3\alpha h_2} + (\kappa_2 - 1) e^{-\alpha h_2} \quad (105)$$

$$D_2 = \frac{1}{\Delta_2} e^{\alpha h_2} [p_1(\alpha) D_{21} + p_2(\alpha) D_{22}] \quad (106)$$

$$D_{21} = e^{-4\alpha h_2} - (1 + 2\alpha h_2) e^{-2\alpha h_2} \quad (107)$$

$$D_{22} = e^{-\alpha h_2} + (-1 + 2\alpha h_2) e^{-3\alpha h_2} \quad (108)$$

olarak, $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$ cinsinden bulunur. İfadelerde geçen Δ_1, Δ_2 ;

$$\Delta_1 = [(1 + 4\alpha^2 h_1^2 + \kappa_1^2) e^{-2\alpha h_1} + \kappa_1 (1 + e^{-4\alpha h_1})] \quad (109)$$

$$\Delta_2 = [e^{-4\alpha h_2} - 2(1 + 2\alpha^2 h_2^2) e^{-2\alpha h_2} + 1] \quad (110)$$

olarak tanımlıdır.

2.5. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

Değme gerilmeleri $p_2(t_2)$ ve $p_1(t_1)$ bulunduğunda, A_r, B_r, C_r, D_r ($r = 1, 2$) katsayılarını, dolayısıyla bu katsayılara bağlı olan gerilme değerlerini elde etmek mümkün olacaktır. Sözü edilen değme gerilmelerini bulmak için (75) ve (76) nolu sınır şartları kullanılır. Bu sınır şartlarından ortaya iki tane integral denklem çıkmaktadır.

2.5.1. Birinci İntegral Denklem

Birinci integral denklem (75) nolu sınır şartından çıkarılacaktır. Bu sınır şartının sol tarafı (63) nolu denkleme göre düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y) - v_2(x, y)] = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[[\alpha A_1 + (\kappa_1 + \alpha y) B_1] e^{-\alpha y} + [-\alpha C_1 + (\kappa_1 - \alpha y) D_1] e^{\alpha y} \right] \right. \\ \left. - \left[[\alpha A_2 + (\kappa_2 + \alpha y) B_2] e^{-\alpha y} + [-\alpha C_2 + (\kappa_2 - \alpha y) D_2] e^{\alpha y} \right] \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (111)$$

şeklini alır. A_r, B_r, C_r, D_r ($r=1,2$) katsayılarında geçen $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$, (111) nolu denklemde $p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ cinsinden yazılıp düzenlendiğinde denklem

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y) - v_2(x, y)] = \frac{1}{\pi G_2} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 [M_1 + N_1] + \frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_2(t_2) dt_2 [N_2] \quad (112)$$

haline gelir. Bu ifadede:

$$M_1(x, t_1) = \int_0^m \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{11} - (\kappa_1 + \alpha y) B_{11} \right] e^{-\alpha(y-h_2)} + \left[-\frac{1}{2} C_{11} + (\kappa_1 - \alpha y) D_{11} \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (113)$$

$$N_1(x, t_1) = - \int_0^m \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{21} - (\kappa_2 + \alpha y) B_{21} \right] e^{-\alpha(y+h_2)} + \left[-\frac{1}{2} C_{21} + (\kappa_2 - \alpha y) D_{21} \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (114)$$

$$N_2(x, t_2) = - \int_0^m \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{22} - (\kappa_2 + \alpha y) B_{22} \right] e^{-\alpha(y+h_2)} + \left[-\frac{1}{2} C_{22} + (\kappa_2 - \alpha y) D_{22} \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (115)$$

olarak verilmektedir.

$y \rightarrow -h_2$ limitine geçildiğinde, (112) nolu denklemde yer alan $M_1(x, t_1)$ ve $M_2(x, t_1)$ integrallerinin çekirdeklerinin yakınsaması bozulmaktadır. Diğer bir ifadeyle, α nın büyük değerlerinde integrallerin çekirdeğini oluşturan fonksiyon sıfıra yaklaşmamakta, belirli bir α değerinden sonra sıfırdan farklı sabit bir değerde kalmaktadır. Çekirdeklerin içinde yakınsamayı bozan, değeri hesaplanacak bu terimler (singüler terimler) aşağıda gösterilmiştir.

$M_1(x, t_1)$ ifadesinde:

$$\int_0^m \left[\frac{\kappa_1 + 1}{2} - \alpha(h_2 + y) \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (116)$$

$N_1(x, t_1)$ ifadesinde:

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{\kappa_2 + 1}{2} + \alpha(h_2 + y) \right] e^{-\alpha(y+h_2)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (117)$$

Yakınsamayı bozan bu terimler (singüler terimler) çekirdek içinden çıkarılıp ayrı olarak kapalı integralleri alındıktan sonra limit işlemine geçilir ve değeri (111) denklemine eklenir. Bu şekilde çekirdeklerin yakınsaması sağlanmış olup aynı zamanda yakınsamayı sağlamak için çıkardığımız terimlerin kapalı integralleri alınıp ilave edildiği için de (111) denkleminde değer olarak bir değişiklik söz konusu olmamaktadır. Bu işlemlerden sonra (111) nolu ifade aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y) - v_2(x, y)] &= \frac{1}{\pi G_2} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 [M_1^* + N_1^*] + \frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_2(t_2) dt_2 [N_2] + \\ &\frac{1}{\pi G_2} \lim_{y \rightarrow -h_2} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 \int_0^{\infty} m \left[\frac{\kappa_1 + 1}{2} - \alpha(h_2 + y) \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha + \\ &\frac{1}{\pi G_2} \lim_{y \rightarrow -h_2} \int_0^a p_1(t_1) dt_1 \int_0^{\infty} \left[\frac{\kappa_2 + 1}{2} + \alpha(h_2 + y) \right] e^{-\alpha(y+h_2)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (118)$$

Singüler terimler çıkarıldığında M_1 ile N_1 , M_1^* ve N_1^* olarak değiştiriler:

$$\begin{aligned} M_1^*(x, t_1) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{m}{\Delta_1} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{11} - (\kappa_1 + \alpha y) B_{11} \right] e^{-\alpha(y-h_2)} + \left[-\frac{1}{2} C_{11} + (\kappa_1 - \alpha y) D_{11} \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - m \left[\frac{\kappa_1 + 1}{2} - \alpha(h_2 + y) \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \right) \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \end{aligned} \quad (119)$$

$$N_1^*(x, t_1) = - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\Delta_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} A_{21} - (\kappa_2 + \alpha y) B_{21} \right] e^{-\alpha(y+h_2)} + \left[-\frac{1}{2} C_{21} + (\kappa_2 - \alpha y) D_{21} \right] e^{-\alpha(-y-h_2)} \right\} \right)$$

$$+ \left[\frac{\kappa_2 + 1}{2} + \alpha(h_2 + y) \right] e^{-\alpha(y+h_2)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (120)$$

$\sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) = [\sin \alpha(t_1 + x) - \sin \alpha(t_1 - x)]$ yarımaçı formülünden de yararlanarak (116) ve (117) ifadelerinin kapalı integrallerini integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulmak mümkündür [35].

(116) ifadesinin kapalı integrali :

$$m \left[\frac{\kappa_1 + 1}{2} \right] \left[\frac{t_1 + x}{(-h_2 - y)^2 + (t_1 + x)^2} - \frac{t_1 - x}{(-h_2 - y)^2 + (t_1 - x)^2} \right] \quad (121)$$

(117) ifadesinin kapalı integrali :

$$\left[\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right] \left[\frac{t_1 + x}{(-h_2 - y)^2 + (t_1 + x)^2} - \frac{t_1 - x}{(-h_2 - y)^2 + (t_1 - x)^2} \right] \quad (122)$$

(121) ve (122) de $y \rightarrow -h_2$ limitine geçilip (118) denkleminde yerine konur. x yerine x_1 yazılır. (118) denkleminin yardımıyla (75) nolu sınır şartımız aşağıdaki şekli alır.

$$\int_0^b p_1(t_1) \left[\frac{1}{t_1 - x_1} - \frac{1}{t_1 + x_1} + 2H_1(x_1, t_1) \right] dt_1 + 2 \int_0^a p_2(t_2) [H_2(x_1, t_2)] dt_2 = 0 \quad (123)$$

(123) nolu denklemde yer alan $H_1(x_1, t_1)$ ve $H_2(x_1, t_2)$ çekirdekleri

$$H_1(x_1, t_1) = -\frac{1}{ST_1} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Delta_1} \left[(1 + \kappa_2) \left[-e^{-4\alpha h_2} + 4\alpha h_2 e^{-2\alpha h_2} + 1 \right] - m(1 + \kappa_1) \left[4\alpha h_1 e^{-4\alpha h_1} + \kappa_1 e^{-4\alpha h_1} - \kappa_1 \right] \right] - ST_1 \right] \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_1) dt_1 \quad (124)$$

$$H_2(x_1, t_2) = -\frac{2}{ST_1} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_2} \left[(1 + \kappa_2) \left[(1 - \alpha h_2) e^{-3\alpha h_2} - (1 + \alpha h_2) e^{-\alpha h_2} \right] \right] \sin(\alpha x_1) \cos(\alpha t_2) dt_2 \quad (125)$$

olarak tanımlıdır. (124) ve (125) ifadelerinde geçen ST_1 singüler terimi ifade etmektedir.

$$ST_1 = (1 + \kappa_2) + m(1 + \kappa_1) \quad (126)$$

$p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ değme gerilme fonksiyonlarının;

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1) \quad \text{ve} \quad p_2(t_2) = p_2(-t_2)$$

şeklinde çift fonksiyon oldukları gözönünde tutulursa, (123) deki integral denklemin yeni hali aşağıdaki gibi olur:

$$\int_{-b}^b p_1(t_1) \left[\frac{1}{t_1 - x_1} + H_1(x_1, t_1) \right] dt_1 + \int_{-a}^a p_2(t_2) [H_2(x_1, t_2)] dt_2 = 0 \quad \begin{cases} -b < t_1 < b \\ -a < t_2 < a \end{cases} \quad (127)$$

İntegral denklem sisteminin sayısal olarak çözülebilmesi için integral denklemlerde bazı dönüşümler yapılması ve boyutsuz büyüklükler tanımlanması gerekmektedir. Bu integral denklemin sayısal çözümü için $\alpha = z/h_2$ değişken dönüşümü yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır:

$$x_1 = bw_1, \quad x_2 = aw_2, \quad t_1 = bs_1, \quad t_2 = as_2 \quad (128)$$

$$g(s_1) = \frac{p_1(bs_1)}{P/h_2}, \quad g(s_2) = \frac{p_2(as_2)}{P/h_2} \quad (129)$$

Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (127) nolu integral denklemde ve (77) nolu denge şartında yazılırsa

$$\int_{-1}^1 g(s_1) \left[\frac{1}{s_1 - w_1} + \frac{b}{h_2} H_1^*(w_1, s_1) \right] ds_1 + \frac{a}{h_2} \int_{-1}^1 g(s_2) [H_2^*(w_1, s_2)] ds_2 = 0$$

$$(-1 < s_1 < 1 \quad \text{ve} \quad -1 < s_2 < 1) \quad (130)$$

$$\frac{b}{h_2} \int_{-1}^1 g(s_1) ds_1 = 1 \quad (131)$$

denklemleri elde edilir. $g(s_1)$ ve $g(s_2)$ sırasıyla panç ve temas ettiği tabaka arasındaki ve iki tabaka arasındaki yüzeylerde meydana gelen boyutsuz temas gerilmeleridir.

“ $g(s_{ri} = \pm 1) = 0$ ” olduğundan integral denklemin indisi (-1) olacaktır [36].

İntegral denklemin çözümü;

$$g(s_{ri}) = G(s_{ri})(1 - s_{ri}^2)^{1/2} \quad (132)$$

olarak aranabilir ve (-1) indis için Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa (119) ve (120) nolu denklemler:

$$\sum_{i=1}^n (1 - s_{li}^2) \left[\frac{1}{s_{li} - w_{lj}} + \frac{b}{h_2} H_1^*(w_{lj}, s_{li}) \right] G(s_{li}) + \frac{a}{h_2} \sum_{i=1}^n (1 - s_{2i}^2) H_2(w_{lj}, s_{2i}) G(s_{2i}) = 0 \quad (133)$$

$$\frac{b}{h_2} \sum_{i=1}^n (1 - s_{li}^2) G(s_{li}) = \frac{n+1}{\pi} \quad (134)$$

olarak yazılabilir [36]. Bu ifadelerde;

$$s_{ri} = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \quad i=1, \dots, n \quad (135)$$

$$w_{rj} = \cos\left[\pi\left(\frac{2j-1}{2n+2}\right)\right] \quad j=1, \dots, n+1 \quad (136)$$

olarak tanımlıdır. (133) ifadesinde $(1+n/2)$. denklem otomatik olarak sağlanmaktadır [34].

2.5.2. İkinci İntegral Denklem

İkinci integral denklem (76) nolu sınır şartından çıkarılacaktır.

Bu sınır şartının sol tarafı düzenlenir:

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_2(x, y)] = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [\alpha A_2 + (\kappa_2 + \alpha y) B_2] e^{-\alpha y} + [-\alpha C_2 + (\kappa_2 - \alpha y) D_2] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (137)$$

Birinci integral denklemin çıkarılışındaki aşamalar takip edilecektir.

A_r, B_r, C_r, D_r ($r=1,2$) katsayılarında geçen $p_1(\alpha)$ ve $p_2(\alpha)$, (137) nolu denklemde $p_1(t_1)$ ve $p_2(t_2)$ cinsinden yazılıp düzenlendiğinde denklem aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_2(x, y)] = -\frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 [N_1] - \frac{1}{\pi G_2} \int_0^a p_2(t_2) dt_2 [N_2] \quad (138)$$

$y \rightarrow 0$ limitine geçildiğinde (138) nolu denklemde yer alan $N_1(x, t_1)$ integralinin çekirdeğinde singüler terime rastlanmaktadır. Değeri hesaplanacak bu terim:

$$-\int_0^{\infty} \left[\frac{\kappa_2 + 1}{2} - \alpha y \right] e^{-\alpha(-y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (139)$$

şeklindedir. (139) daki değer N_1 integralinden çıkarılır, diğer taraftan kapalı integrali alınıp N_1 integraline eklenirse (138) nolu ifade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[v_2(x, y)] = & -\frac{1}{\pi G_2} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 [N_1^*] - \frac{1}{\pi G_2} \int_0^a p_2(t_2) dt_2 [N_2] - \\ & \frac{1}{\pi G_2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^a p_2(t_2) dt_2 \int_0^{\infty} \left[\frac{\kappa_2 + 1}{2} - \alpha y \right] e^{-\alpha(-y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \end{aligned} \quad (140)$$

haline gelir. Bu ifadede geçen $N_2^*(x, t_1)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$N_2^*(x, t_1) = - \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_2} \left[\left(\frac{1}{2} A_{22} - (\kappa_2 + \alpha y) B_{22} \right) e^{-\alpha(y+h_2)} + \left(-\frac{1}{2} C_{22} + (\kappa_2 - \alpha y) D_{22} \right) e^{-\alpha(-y-h_2)} \right] - \left(\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right) \left. \right\} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (141)$$

(139) ifadesinin kapalı integrali, integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulunur [35]:

$$- \left[\frac{\kappa_2 + 1}{2} \right] \left[\frac{t_2 + x}{(-y)^2 + (t_2 + x)^2} - \frac{t_2 - x}{(-y)^2 + (t_2 - x)^2} \right] \quad (142)$$

(142) ifadesinde $y \rightarrow 0$ limitine geçilip değeri hesaplanır ve (140) denkleminde yazılır. (140) denklemi yardımıyla (76) nolu sınır şartı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa: (x yerine x_2 yazılacaktır.)

$$2 \int_0^b p_1(t_1) [L_1(x_2, t_1)] dt_1 + \int_0^a p_2(t_2) \left[\frac{1}{t_2 - x_2} - \frac{1}{t_2 + x_2} + 2L_2(x_2, t_2) \right] dt_2 = f(x_2) \quad (143)$$

$$f(x_2) = - \frac{4\pi G_2}{1 + \kappa_2} \frac{dF(x_2)}{dx_2} \quad (144)$$

elde edilir. (143) ifadesinde yer alan $L_1(x_2, t_1)$ ve $L_2(x_2, t_2)$ çekirdekleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$L_1(x_2, t_1) = -2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_2} \left[(1 - \alpha h_2) e^{-3\alpha h_2} - (1 + \alpha h_2) e^{-\alpha h_2} \right] \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_1) dt_1 \quad (145)$$

$$L_2(x_2, t_2) = - \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta_1} \left[e^{-4\alpha h_2} + 4\alpha h_2 e^{-2\alpha h_2} + 1 \right] - 1 \right\} \sin(\alpha x_2) \cos(\alpha t_2) dt_2 \quad (146)$$

$p_1(t_1)$, $p_2(t_2)$ değme gerilmesi fonksiyonlarının;

$$p_1(t_1) = p_1(-t_1) \text{ ve } p_2(t_2) = p_2(-t_2)$$

şeklinde çift fonksiyon oldukları gözönünde tutulursa, (143) deki integral denklemin yeni hali aşağıdaki gibi olur:

$$\int_{-b}^b p_1(t_1) [L_1(x_2, t_1)] dt_1 + \int_{-a}^a p_2(t_2) \left[\frac{1}{t_2 - x_2} + L_2(x_2, t_2) \right] dt_2 = f(x_2) \quad (147)$$

İntegral denklem sisteminin sayısal çözümü için bu integral denklemde de $\alpha = z/h_2$ değişken dönüşümü ve boyutsuzlaştırma yapılmıştır.

(128) ve (129)' da tanımlanan boyutsuz büyüklükler (147) nolu integral denklemde ve (77) nolu denge şartında yerlerine yazılırsa:

$$\frac{b}{h_2} \int_{-1}^1 g(s_1) [L_1^*(w_2, s_1)] ds_1 + \int_{-1}^1 g(s_2) \left[\frac{1}{s_2 - w_2} + \frac{a}{h_2} L_2^*(w_2, s_2) \right] ds_2 = \frac{f(w_2)}{P/h_2} \quad (148)$$

$$\frac{a}{h_2} \int_{-1}^1 g(s_2) ds_2 = 1 \quad (149)$$

denklemleri elde edilir.

“ $g(s_{ri} = \pm 1) = 0$ ” olduğundan integral denklemin indisi (-1) dir.

İntegral denklemin çözümü;

$$g(s_{ri}) = G(s_{ri})(1 - s_{ri}^2)^{1/2} \quad (150)$$

olarak aranabilir. (-1) indis için Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa, (148) ve (149) nolu denklemler:

$$\frac{b}{h_2} \sum_{i=1}^n (1-s_{li}^2) L_1^*(w_{2j}, s_{li}) G(s_{li}) + \sum_{i=1}^n (1-s_{2i}^2) \left[\frac{1}{s_{2i} - w_{2j}} + \frac{a}{h_2} L_2^*(w_{2j}, s_{2i}) \right] G(s_{2i}) = f^*(w_{2j})$$

(j=1, n+1) (151)

$$\frac{a}{h_2} \sum_{i=1}^n (1-s_{2i}^2) G(s_{2i}) = \frac{n+1}{\pi} \quad (152)$$

$$f^*(w_{2j}) = \frac{n+1}{\pi} \frac{f(w_{2j})}{P/h_2} \quad (153)$$

s_{li} ve w_{ij} , (135) ve (136)'daki değerlere eşittir. Yine (153) nolu denklemde $(1+n/2)$. denklem otomatik olarak sağlanmaktadır.

2.5.3. İntegral Denklem Sisteminin Çözümü

Birinci ve ikinci integral denklemler beraber göz önüne alınarak iki tane integral denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n (1-s_{li}^2) \left[\frac{1}{s_{li} - w_{1j}} + \frac{b}{h_2} H_1^*(w_{1j}, s_{li}) \right] G(s_{li}) + \frac{a}{h_2} \sum_{i=1}^n (1-s_{2i}^2) H_2(w_{1j}, s_{2i}) G(s_{2i}) = 0$$

$$\frac{b}{h_2} \sum_{i=1}^n (1-s_{li}^2) L_1^*(w_{2j}, s_{li}) G(s_{li}) + \sum_{i=1}^n (1-s_{2i}^2) \left[\frac{1}{s_{2i} - w_{2j}} + \frac{a}{h_2} L_2^*(w_{2j}, s_{2i}) \right] G(s_{2i}) = f^*(w_{2j})$$

İntegral denklem sistemini matris formunda yazmak mümkündür.

$$\begin{bmatrix} [HS_{1ij}]_{n \times n} & [HS_{2ij}]_{n \times n} \\ [LS_{1ij}]_{n \times n} & [LS_{2ij}]_{n \times n} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \times \begin{bmatrix} [G(s_{1i})]_{n \times 1} \\ [G(s_{2i})]_{n \times 1} \end{bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} [0]_{n \times 1} \\ [f^*(w_{2j})]_{n \times 1} \end{bmatrix}_{2n \times 1} \quad (154)$$

$$HS_{1ij} = (1 - s_{1i}^2) \left[\frac{1}{s_{1i} - w_{1j}} + \frac{b}{h_2} H_1^*(w_{1j}, s_{1i}) \right] \quad (155)$$

$$HS_{2ij} = \frac{a}{h_2} (1 - s_{2i}^2) H_2^*(w_{1j}, s_{2i}) (1 - s_{2i}^2) \quad (156)$$

$$LS_{1ij} = \frac{b}{h_2} (1 - s_{1i}^2) L_1^*(w_{2j}, s_{1i}) \quad (157)$$

$$LS_{2ij} = (1 - s_{2i}^2) \left[\frac{1}{s_{2i} - w_{2j}} + \frac{a}{h_2} L_2^*(w_{2j}, s_{2i}) \right] \quad (158)$$

Burada bilinmeyenler $G(s_{1i})$ ve $G(s_{2i})$ değerleridir. Bu bilinmeyenler var olan denklemler yardımıyla bulunabilirler. Denklemlerde geçen :

$$h_1/h_2, \kappa_1, \kappa_2, G_2/G_1, R/h_2, G_2/(P/h_2) \quad (159)$$

boyutsuz büyüklükler tabaka yükseklikleri, malzeme, panç yarıçapı ve dış tekil yük durumlarına göre değer alırlar. $f^*(w)$ ise pançın geometrik şekline bağlıdır ve (153)'den bulunur.

Yine denklemde geçen

$$a/h_2 \text{ ve } b/h_2 \quad (160)$$

büyüklükleri ise (159) da verilen değerlere göre değişecektir. Bu (162) büyüklüklerine

başlangıçta herhangi tahmini bir değer verilir ve bu değerlerin (134) ve (152) deki denge şartlarını sağlayıp sağlamadıklarına bakılır. Sağlatılana kadar iterasyonlara devam edilir. Sağlayan değerler gerçek gerilme yayılışlarını verecektir.

Sözü edilen işlemler integral hesaplayabilen ve denklem sistemlerini çözebilen herhangi bir bilgisayar programı ile yapılabilir. Burada FORTRAN programı kullanılmıştır.

2.6. Panç Profilleri

Rijit panç profili için dairesel ve parabolik geometrik şekiller alınmıştır. Her iki profil içinde daha önce yapılan çözümler aynıdır. Farklı olan $f^*(w_{2j})$ fonksiyonudur ki bu da panç profiline bağlıdır.

2.6.1. Dairesel Panç Durumu

Dairesel panç durumunda pançın şekil fonksiyonu:

$$F(x_2) = - \left[(R^2 - x_2^2)^{1/2} - R \right] \quad (161)$$

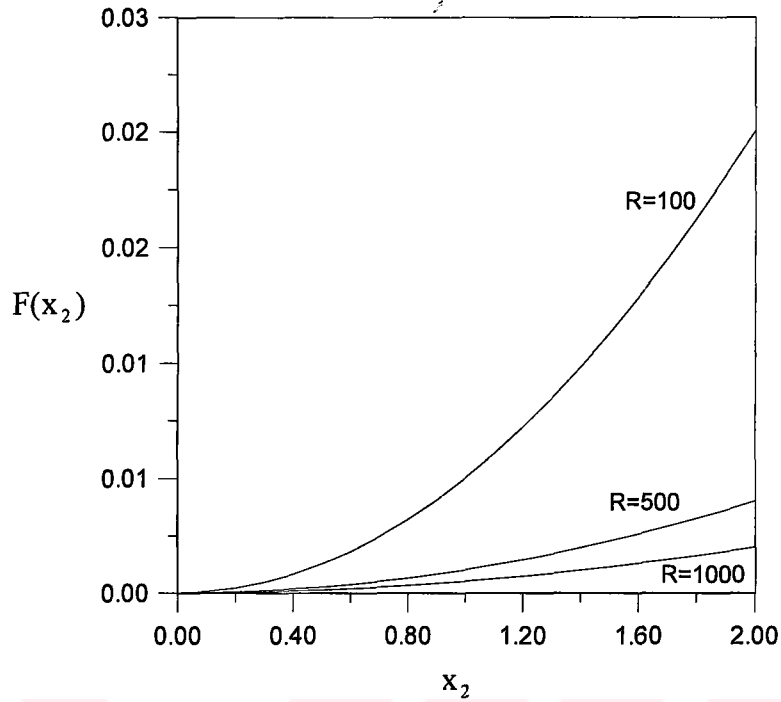
olmaktadır. Burada R dairesel pançın yarıçapıdır. $f^*(x_2)$ fonksiyonuna aşağıdaki gibi ulaşılır. (144) nolu denkleme göre:

$$f(x_2) = - \frac{4\pi G_2}{1 + \kappa_2} \frac{x_2}{(R^2 - x_2^2)^{1/2}} \quad (162)$$

ve (153) nolu denklem yardımıyla;

$$f^*(w_{2j}) = -(n+1) \frac{4}{1 + \kappa_2} \frac{G_2}{P/h_2} \frac{(a/h_2)w_{2j}}{[(R/h_2)^2 - (a/h_2)^2 w_{2j}^2]^{1/2}} \quad (163)$$

olarak bulunur. Dairesel pançın şekil fonksiyonu Şekil 2' de gösterilmiştir.



Şekil 2. Değişik yarıçaplara göre, dairesel pançın şekil fonksiyonunun pozitif x_2 değerleri için grafiği

2.6.2. Parabolik Panç Durumu

Parabolik panç için pançın şekil fonksiyonu:

$$F(x_2) = C x_2^2 \quad (164)$$

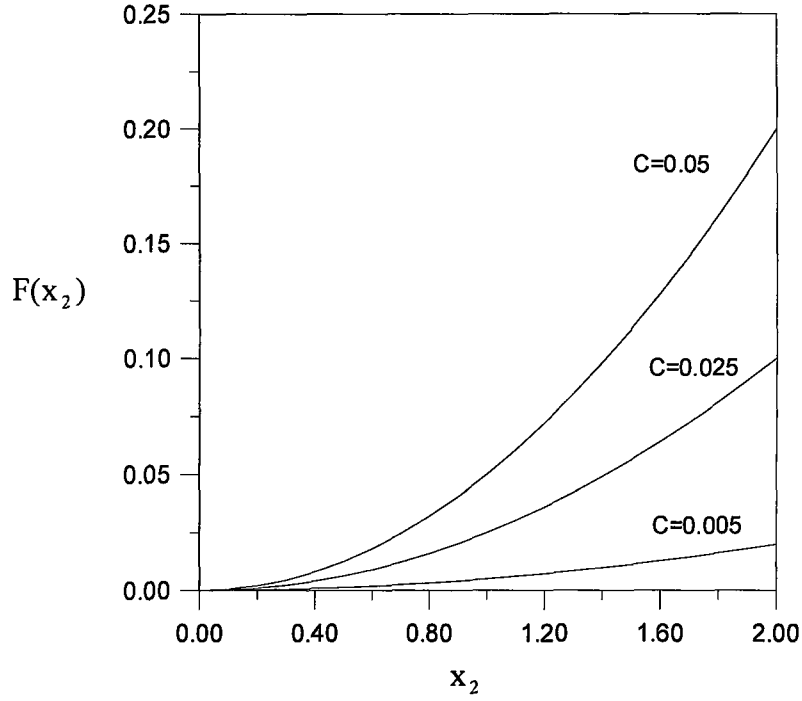
olmaktadır. Burada C sabit bir sayıyı ifade etmektedir. (144) ve (153) nolu denklemler ile:

$$f(x_2) = -\frac{8\pi G_2}{1 + \kappa_2} C x_2 \quad (165)$$

$$f^*(w_{2j}) = -(n+1) \frac{8}{1 + \kappa_2} \frac{G_2}{P/h_2} C h_2 \frac{a}{h_2} w_{2j} \quad (166)$$

olarak elde edilir.

Parabolik pançın şekil fonksiyonu Şekil 3 ile gösterilmiştir.



Şekil 3. Değişik C değerlerine göre, parabolik pançın şekil fonksiyonunun pozitif x_2 değerleri için grafiği

2.7. Gerilmelerin Bulunması

Tabakalarda panç vasıtasıyla iletilen tekil kuvvet etkisinden meydana gelecek olan σ_{x_r} ve σ_{y_r} gerilme bileşenleri gerilmelerin maksimum olacağı y simetri eksenini boyunca ($x=0$), τ_{xy_r} gerilmesi ise yine bu eksenin çok yakınında incelenmiştir. Yine gerilmelerin tabakaların ortasında x eksenini boyunca dağılımını da incelenecektir. (89)-(108) arasındaki ifadelerde bulunan A_r, B_r, C_r, D_r ($r=1,2$) katsayılarının değerleri (64)-(66) da belirtilen gerilme denklemlerinde yerlerine konduğunda, gerilme çekirdeklerinde $y \rightarrow 0$ ve $y \rightarrow -h_2$ için yakınsamayı bozan terimler meydana gelmiştir.

$y \rightarrow -h_2$ durumunda singüler terimler:

$$\sigma_{x_1}(x, y)_{st_0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 + \alpha(h_2 + y)] e^{-\alpha(-y-h_2)} [\cos \alpha(t_1 + x) + \cos \alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (167)$$

$$\sigma_{y_1}(x, y)_{st_0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 - \alpha(h_2 + y)] e^{-\alpha(-y-h_2)} [\cos\alpha(t_1 + x) + \cos\alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (168)$$

$$\tau_{xy_1}(x, y)_{st_0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [\alpha(h_2 + y)] e^{-\alpha(-y-h_2)} [\sin\alpha(t_1 + x) - \sin\alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (169)$$

$$\sigma_{x_2}(x, y)_{st_1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 - \alpha(h_2 + y)] e^{-\alpha(y+h_2)} [\cos\alpha(t_1 + x) + \cos\alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (170)$$

$$\sigma_{y_2}(x, y)_{st_1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [1 + \alpha(h_2 + y)] e^{-\alpha(y+h_2)} [\cos\alpha(t_1 + x) + \cos\alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (171)$$

$$\tau_{xy_2}(x, y)_{st_1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^b p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [\alpha(h_2 + y)] e^{-\alpha(y+h_2)} [\sin\alpha(t_1 + x) - \sin\alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (172)$$

$y \rightarrow 0$ durumunda singüler terimler:

$$\sigma_{x_2}(x, y)_{st_2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^a p_2(t_2) dt_2 \int_0^\infty [1 + \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos\alpha(t_2 + x) + \cos\alpha(t_2 - x)] d\alpha \quad (173)$$

$$\sigma_{y_2}(x, y)_{st_2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^a p_2(t_2) dt_2 \int_0^\infty [1 - \alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\cos\alpha(t_2 + x) + \cos\alpha(t_2 - x)] d\alpha \quad (174)$$

$$\tau_{xy_2}(x, y)_{st_2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^a p_2(t_2) dt_2 \int_0^\infty [\alpha y] e^{-\alpha(-y)} [\sin\alpha(t_2 + x) - \cos\alpha(t_2 - x)] d\alpha \quad (175)$$

Belirlenen singüler terimlerin kapalı integralleri integral dönüşüm tabloları yardımıyla bulunur [35]:

$y \rightarrow -h_2$ için

$$\sigma_{x_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_0} = -2 \left[\frac{(h_2 + y)(t_1 + x)^2}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 + x)^2]^2} + \frac{(h_2 + y)(t_1 - x)^2}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (176)$$

$$\sigma_{y_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_0} = -2 \left[\frac{(h_2 + y)^3}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 + x)^2]^2} + \frac{(h_2 + y)^3}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (177)$$

$$\tau_{xy_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_0} = \left[\frac{(h_2 + y)^2(t_1 + x)}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 + x)^2]^2} - \frac{(h_2 + y)^2(t_1 - x)}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (178)$$

$$\sigma_{x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_1} = 2 \left[\frac{(h_2 + y)(t_1 + x)^2}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 + x)^2]^2} + \frac{(h_2 + y)(t_1 - x)^2}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (179)$$

$$\sigma_{y_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_1} = -2 \left[\frac{(h_2 + y)^3}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 + x)^2]^2} + \frac{(h_2 + y)^3}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (180)$$

$$\tau_{xy_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_1} = -2 \left[\frac{(h_2 + y)^2(t_1 + x)}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 + x)^2]^2} - \frac{(h_2 + y)^2(t_1 - x)}{[(h_2 + y)^2 + (t_1 - x)^2]^2} \right] \quad (181)$$

$y \rightarrow 0$ için

$$\sigma_{x_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_2} = 2y \left[\frac{(t_2 + x)^2}{[y^2 + (t_2 + x)^2]^2} + \frac{(t_2 - x)^2}{[y^2 + (t_2 - x)^2]^2} \right] \quad (182)$$

$$\sigma_{y_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_2} = 2y^3 \left[\frac{1}{[y^2 + (t_2 + x)^2]^2} - \frac{1}{[y^2 + (t_2 - x)^2]^2} \right] \quad (183)$$

$$\tau_{xy_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{kt_2} = 2y^2 \left[\frac{(t_2 + x)^2}{[y^2 + (t_2 + x)^2]^2} - \frac{(t_2 - x)^2}{[y^2 + (t_2 - x)^2]^2} \right] \quad (184)$$

Yakınsamayı bozan, (167)-(175) nolu ifadelerle verilen singüler terimler, gerilmelere ait eşitliklerden çıkartıldığında gerilme çekirdeklerinde yakınsama sağlanmıştır. Diğer taraftan bu terimlerin (176)-(184) nolu ifadelerle verilen kapalı integrallerinin değerleri gerilme ifadelerine eklenmiştir.

İntegral denklemlerde olduğu gibi boyutsuzlaştırma ve değişken değişimi burada da yapılmıştır. Böylece boyutsuz gerilme bileşenleri tabakaların herhangi bir noktasında:

$$\frac{\sigma_{x_r}}{P/h_2} = \frac{\sigma_{x_r}}{P/h_2} - \frac{(\sigma_{x_r})_{st(r-1)}}{P/h_2} - (r-1) \frac{(\sigma_{x_r})_{st_r}}{P/h_2} + \frac{(\sigma_{x_r})_{kt(r-1)}}{P/h_2} + (r-1) \frac{(\sigma_{x_r})_{kt_r}}{P/h_2} \quad (185)$$

$$\frac{\sigma_{y_r}}{P/h_2} = \frac{\sigma_{y_r}}{P/h_2} - \frac{(\sigma_{y_r})_{st(r-1)}}{P/h_2} - (r-1) \frac{(\sigma_{y_r})_{st_r}}{P/h_2} + \frac{(\sigma_{y_r})_{kt(r-1)}}{P/h_2} + (r-1) \frac{(\sigma_{y_r})_{kt_r}}{P/h_2} \quad (186)$$

$$\frac{\tau_{xy_r}}{P/h_2} = \frac{\tau_{xy_r}}{P/h_2} - \frac{(\tau_{xy_r})_{st(r-1)}}{P/h_2} - (r-1) \frac{(\tau_{xy_r})_{st_r}}{P/h_2} + \frac{(\tau_{xy_r})_{kt(r-1)}}{P/h_2} + (r-1) \frac{(\tau_{xy_r})_{kt_r}}{P/h_2} \quad (187)$$

en genel haliyle çıkarılmıştır.

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir konu singüler terimlerin kapalı integrallerinin değerlerinin singülerliğe neden oldukları y değerlerinde "0" 'a eşit olmasıdır. Bu nedenle gerilmelerin problemlili olan bu noktaların çok yakınındaki noktalarda bulunması yoluna gidilebilir. Diğer bir yaklaşım şeklinde ise singüler terimlerdeki y değerleri, kapalı integralleri alınmadan önce konulmuş ve ortaya çıkan yeni ifadelerin değerleri singüler terimlerin buldukları noktadaki değme gerilmelerine eşit olduğu görülmüştür. Örneğin:

$y=0$ için, $\frac{\sigma_{y_1}}{P/h_2}$ ifadesi

$$\frac{\sigma_{y_1}}{P/h_2} = \frac{\sigma_{y_1}}{P/h_2} - \frac{(\sigma_{y_1})_{st_0}}{P/h_2} + \frac{(\sigma_{y_1})_{kt_0}}{P/h_2} \quad (188)$$

şeklinde olacaktır. Son terim belirtilen şekilde yapılırsa:

$$(\sigma_{y_1})_{kt_0} = \int_0^b p_1(t_1) dt_1 \int_0^\infty [\cos \alpha(t_1 + x) + \cos \alpha(t_1 - x)] d\alpha \quad (189)$$

olur ve düzenlendiğinde:

$$(\sigma_{y_1})_{kt_0} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\alpha x) d\alpha \int_0^\infty p_1(x) \cos(\alpha x) dx \quad (190)$$

elde edilir. Bu ise $p_1(x)$ in Fourier kosünüs dönüşümünün, ters dönüşümünün eksi işaretlisi olmuştur. Bir fonksiyonun dönüşümünün ters dönüşümü kendine eşit olmaktadır [37, 38].

Buna göre:

$$(\sigma_{y_1})_{kt_0} = -p_1(x) \quad (191)$$

Boyutsuzlaştırma yapılır ve $x=0$ yazılırsa:

$$\frac{(\sigma_{y_1})_{kt_0}}{P/h_2} = -\frac{p_1(x=0)}{P/h_2} \quad (192)$$

Diğer taraftan, (189) ifadesindeki ilk iki terimin

$$\frac{\sigma_{y_1}}{P/h_2} - \frac{(\sigma_{y_1})_{st_0}}{P/h_2} = 0 \quad (193)$$

olduğu görülmüştür. (192) ve (193), (189) ifadesinde yazıldığında:

$$\frac{\sigma_{y_1}(0,0)}{P/h_2} = -\frac{p_1(x=0)}{P/h_2} = -g(s_1 = 0) \quad (194)$$

Buradan ayrıca (69) da verilen, (72) de dikkate alındığında, sınır şartının da doğru olarak sağlandığı görülmektedir. Benzer işlemler diğer gerilme ifadelerinde de, singülerlik olan noktalarda aynı biçimde yapılabilir.

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Giriş

Bu bölümde, tabakaların malzeme özellikleri (G_2/G_1 , κ_1 , κ_2), panç eğriligi (R/h_2 veya Ch_2), tekil yük değeri ($G_2/(P/h_2)$) ve tabakaların yükseklikleri oranı (h_1/h_2) ile ilgili olan boyutsuz büyüklüklerin değişik değerleri için, değme gerilmeleri, değme yüzeyleri, y simetri ekseninde ortaya çıkan σ_x , σ_y normal gerilmeleri ile bu eksen boyunca τ_{xy} kayma gerilmeleri $x=0.5$ değeri için incelenmiş, aynı zamanda σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmelerinin x eksenini boyunca tabakaların ortasında dağılışı belirlenmiştir.

3.2. Değme Yüzeyleri ve Değme Gerilmeleri

Pançın değme yüzeyi ve bu yüzeyde ortaya çıkan değme gerilmeleri ile iki tabakanın değme yüzeyi ve bu yüzeyde ortaya çıkan değme gerilmeleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Boyutsuz büyüklüklerde yer alan G_2 ve h_2 değerlerinin değişimi birden fazla boyutsuz büyüklüğü etkilediğinden yer aldıkları ifadelerde sabit kaldıkları düşünülmelidir. Örneğin, G_2/G_1 değerinin değişimi G_1 in değişimi, $G_2/(P/h_2)$ değerinin değişimi ise yalnızca P tekil yükünün değişimini ifade eder.

İlk olarak yarıçapın ve yükün değişimine göre değme yüzeyleri belirlenmiştir. Yükün değişimini $G_2/(P/h_2)$ boyutsuz büyüklüğünün değişimi ifade eder. Yük arttığında bu boyutsuz büyüklük azalacak ve yük azaldığında ise artacaktır. Tablo 1, Şekil 4 ve Şekil 5 incelendiğinde yük ve yarıçapın artmasıyla değme yüzeylerinin büyüdüğü görülmektedir. Pançın değme yüzeyi her zaman tabakaların değme yüzeylerinden küçük kalmaktadır. Diğer yandan yük ve yarıçap değerleri arttıkça panç ve tabakaların değme yüzeyleri arasındaki fark kapanmakta çok büyük değerlerde ise birbirine yakın çıkmaktadır. Değme yüzeyleri yarıçapın küçük değerlerinde ($R/h_2=10$ gibi) yükün değişiminden çok az etkilenmekte, özellikle tabakaların birbirine değme yüzeyleri hemen hemen sabit kalmaktadır. Yarıçapın artmasıyla yükün değme yüzeyleri üzerindeki tesiri daha fazla görülmektedir.

Tablo 2 ile Şekil 6 ve Şekil 7 'de malzeme sabitleri κ_1 , κ_2 ve G_2/G_1 in değişimine göre değme yüzeylerinin değişimi görülmektedir. Burada κ_1 ve κ_2 ' nin birbirine eşit olarak değişimleri incelendiğinden ν poisson oranı her iki tabaka için aynı değeri alacak; κ değerleri arttıkça azalacak ve azaldıkça artacaktır. Dolayısıyla G_2/G_1 oranının değişimi yalnızca elastisite modüllerinin değişimleri ile olmakta; bu oranın artması alt tabakanın elastisite modülünün değerinin azalmasına, azalması ise alt tabakanın elastisite modülünün artmasına karşılık gelmektedir. Şekillerden, alt tabakanın elastisite modülünün artmasının tabakaların değme yüzeylerini küçülttüğü görülmektedir. K değerlerinin değişiminin değme yüzeylerine etkisi incelendiğinde bu değer azalması (ν değerinin artması) ile değme yüzeylerinin küçüldüğü görülmektedir. ν değerinin artması tabakanın daha rijit olması anlamına gelir. Rijit tabakalarda değme yüzeyleri küçülmektedir.

Değme gerilmelerinin dağılışı Şekil 8-17'de gösterilmiştir. Değme gerilmeleri şekillerinden değme yüzeyleri ile değme gerilmelerinin ters orantılı olduğu rahatlıkla görülebilir. Değme yüzeyleri arttıkça, yük daha geniş alana yayılacağından, değme gerilmeleri azalmakta, değme yüzeyleri azaldığında ise artmaktadır. Değme gerilmeleri, en büyük değerlerini $x=y=0$ noktasında almakta ve x değeri arttıkça azalarak, belli bir x değerinde sıfır olmaktadır. Sıfır değerlerini aldıkları bu x noktası değme yüzeylerinin değerini vermektedir.

Panç yarıçapının ve yükün değerinin azalması değme gerilmelerini artırmaktadır. Yarıçapın ve yükün çok küçük değerlerinde pançın değme yüzeyi çok küçük çıkacağından tekil yük durumuna yaklaşılmakta ve panç altındaki değme gerilmeleri çok büyük değerler almaktadır. Bu bulgu elastisite teorisinden "tekil yük durumunda gerilmenin sonsuza gideceği" bilgisi ile örtüşmektedir.

Tabakaların kayma modülleri oranı azaldığında yani alt tabakanın elastisite modülü arttığında (κ' lar eşit) değme gerilmeleri artmaktadır.

Şekil 14 ve Şekil 15' de tabakaların yükseklikleri oranının değişimine göre değme gerilmelerinin değişimi görülmektedir. h_1/h_2 oranı arttığında alt tabakanın yüksekliği arttığında değme yüzeyleri artmakta ve değme gerilmeleri azalmaktadır.

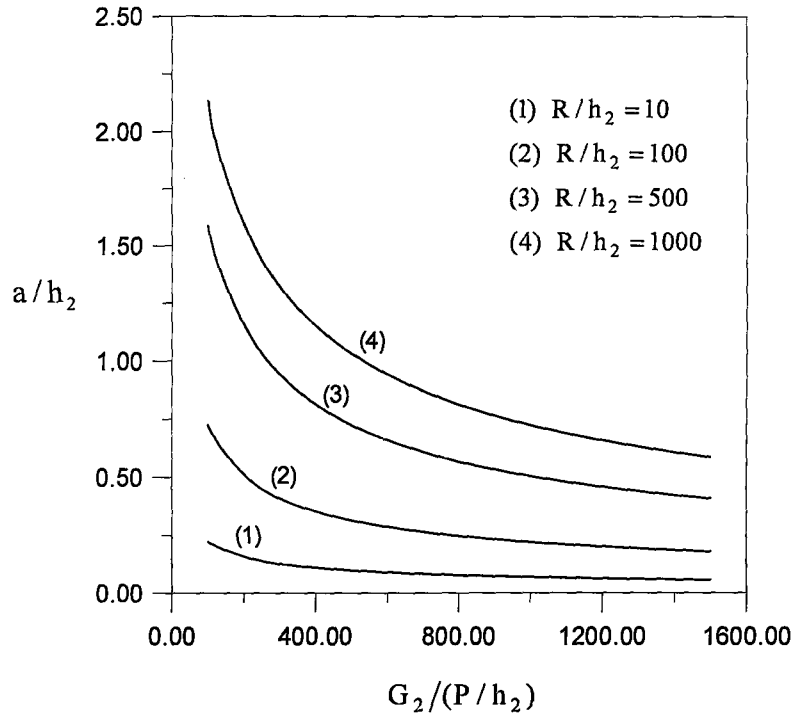
κ_1 , κ_2 değerleri birbirine eşit olarak değiştirildiğinde değme gerilmelerinin yayılışı Şekil 16 ve Şekil 17'de görülmektedir. Kayma modülleri oranı da eşit alındığından iki tabakanın elastisite modülü birbirine eşit ve sabittir. Değişen ν poisson oranıdır. ν poisson oranı arttıkça değme gerilmeleri de artmaktadır.

Tablo 1. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, çeşitli yük değerleri için bulunan değme yüzeyleri ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

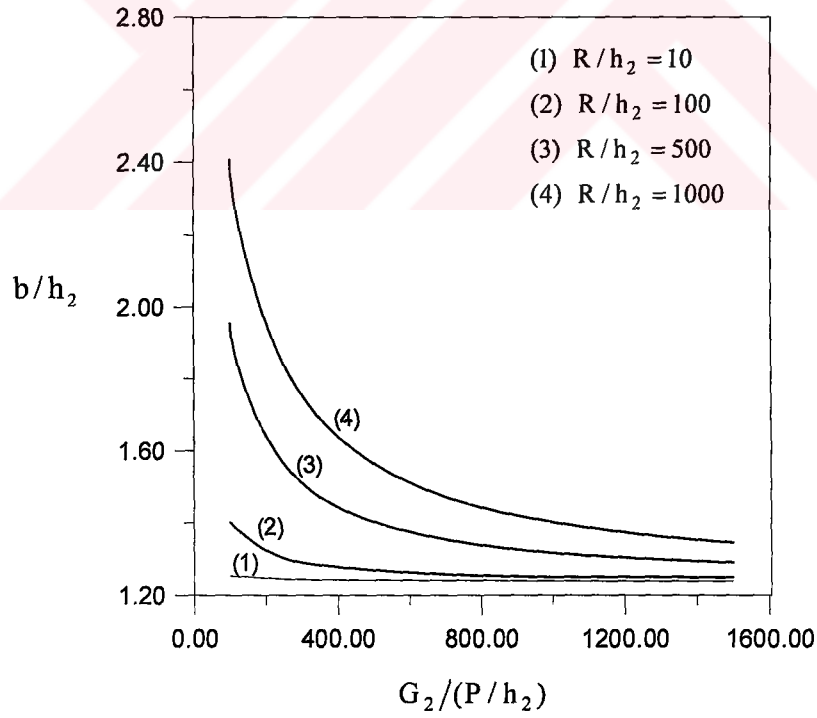
$\frac{G_2}{P/h_2}$	$R/h_2 = 10$		$R/h_2 = 500$		$R/h_2 = 1000$	
	a/h_2	b/h_2	a/h_2	b/h_2	a/h_2	b/h_2
100	1.2534	0.22026	1.9547	1.5873	2.4081	2.1352
250	1.2446	0.13865	1.5626	1.0312	1.8378	1.4354
500	1.2421	0.09788	1.4025	0.7243	1.5641	1.0312
750	1.2407	0.07988	1.3457	0.5862	1.4559	0.8484
1000	1.2395	0.06916	1.3172	0.5044	1.4024	0.7243
1250	1.23946	0.061843	1.3015	0.4491	1.3679	0.64482
1500	1.23935	0.056451	1.2905	0.4084	1.3461	0.5862

Tablo 2. κ_1 ve κ_2 değerlerine bağlı olarak, tabakaların kayma modülü oranlarının çeşitli değerleri için değme yüzeyleri ($h_1/h_2 = 2$, $R/h_2 = 1000$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

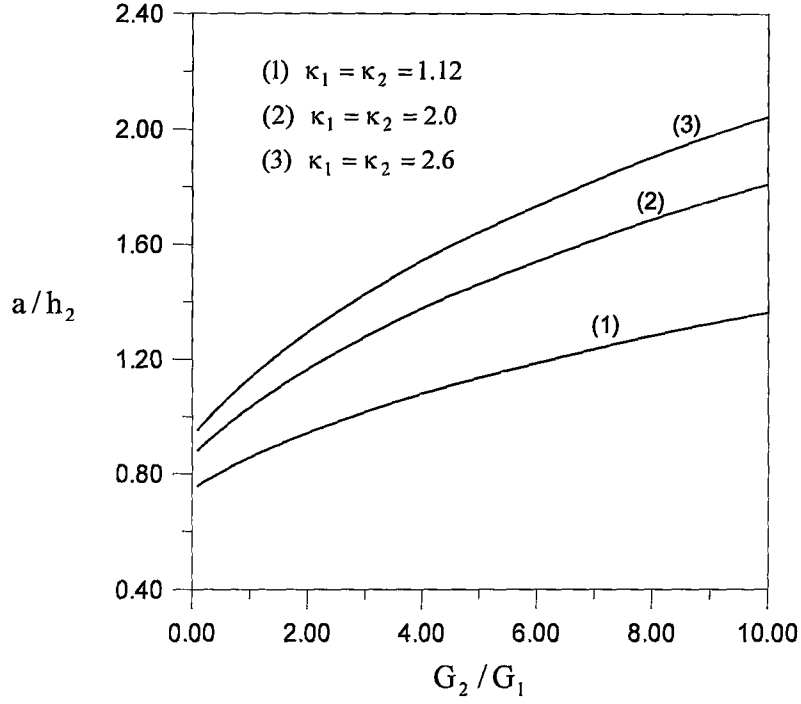
$\frac{G_2}{G_1}$	$\kappa_1 = \kappa_2 = 1.12$		$\kappa_1 = \kappa_2 = 2$		$\kappa_1 = \kappa_2 = 2.6$	
	a/h_2	b/h_2	a/h_2	b/h_2	a/h_2	b/h_2
0.1	1.1478	0.7578	1.2307	0.8823	1.2829	0.9538
0.5	1.2954	0.8049	1.3992	0.9530	1.4520	1.0401
1	1.4351	0.8561	1.5626	1.0312	1.6310	1.1335
2	1.6402	0.9425	1.8104	1.1648	1.9005	1.2931
4	1.9170	0.06916	2.1585	1.3774	2.2830	1.5440
8	2.2852	1.8101	2.6344	1.6877	2.8084	1.9044
10	2.4264	1.2828	2.8197	1.8107	3.0130	2.0460



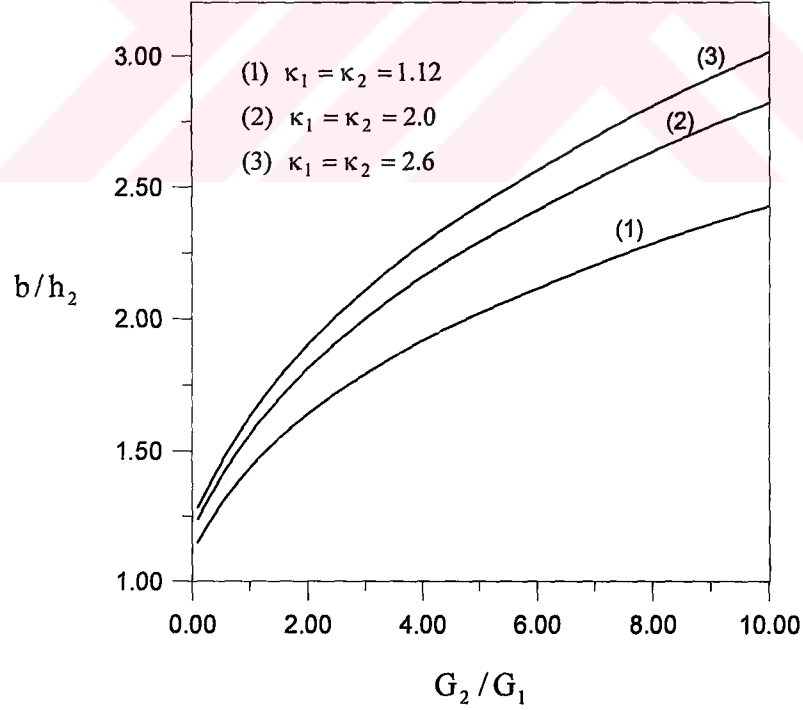
Şekil 4. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, panç değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



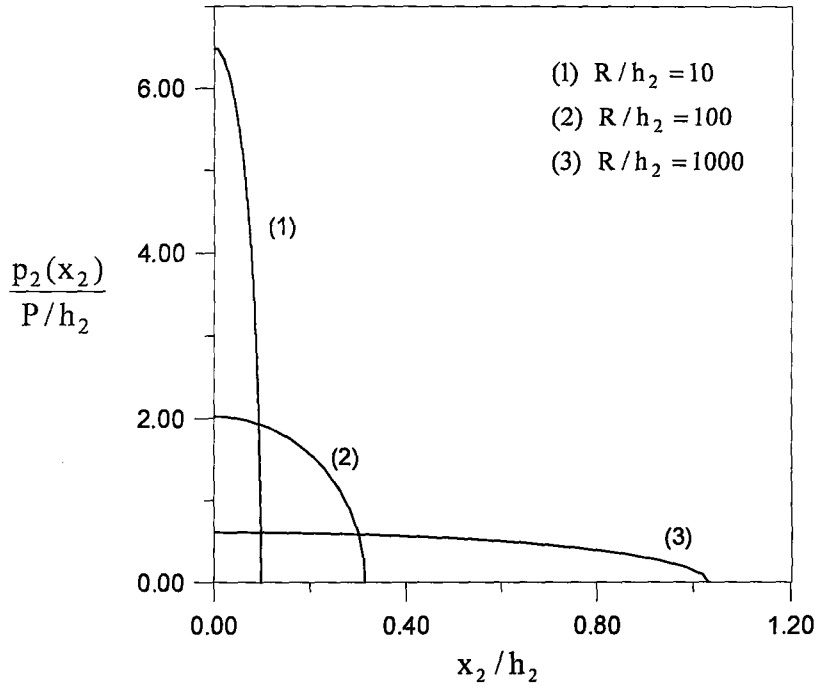
Şekil 5. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, tabakaların değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



Şekil 6. κ_1 ve κ_2 değerlerine bağlı olarak, panç değme yüzeyinin tabakaların kayma modülü oranları ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $R/h_2 = 1000$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

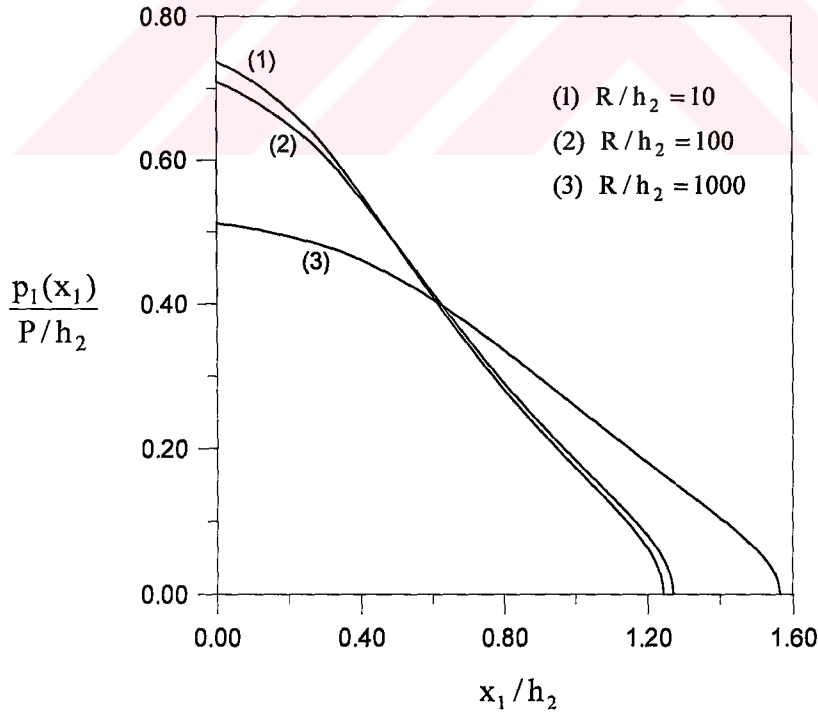


Şekil 7. κ_1 ve κ_2 değerlerine bağlı olarak, tabakaların değme yüzeylerinin kayma modülleri oranlarına göre değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $R/h_2 = 1000$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



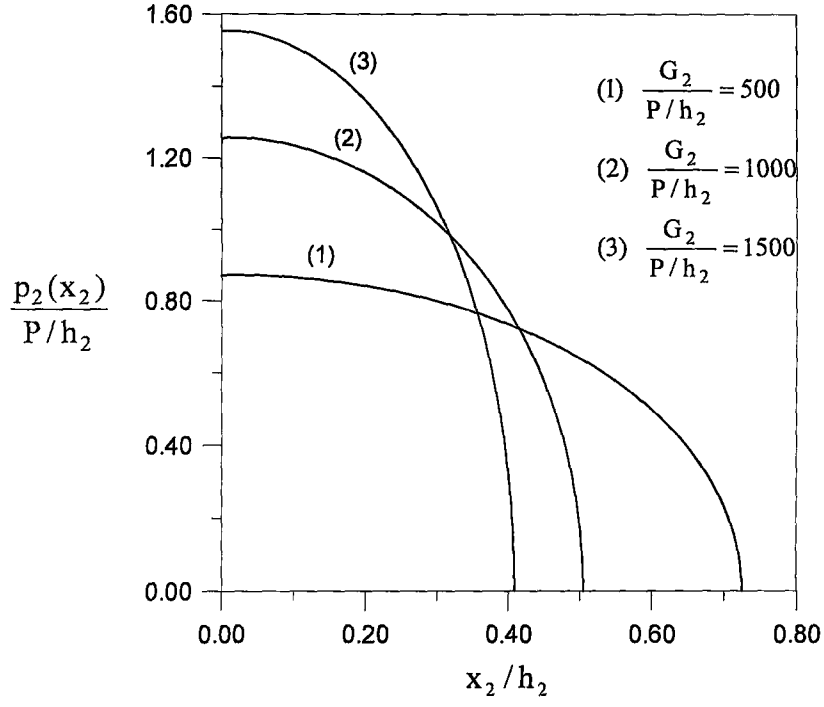
Şekil 8. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, $y=0$ ' da değme gerilmesi yayılışı

$$\left(h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, \frac{G_2}{P/h_2} = 500 \right)$$

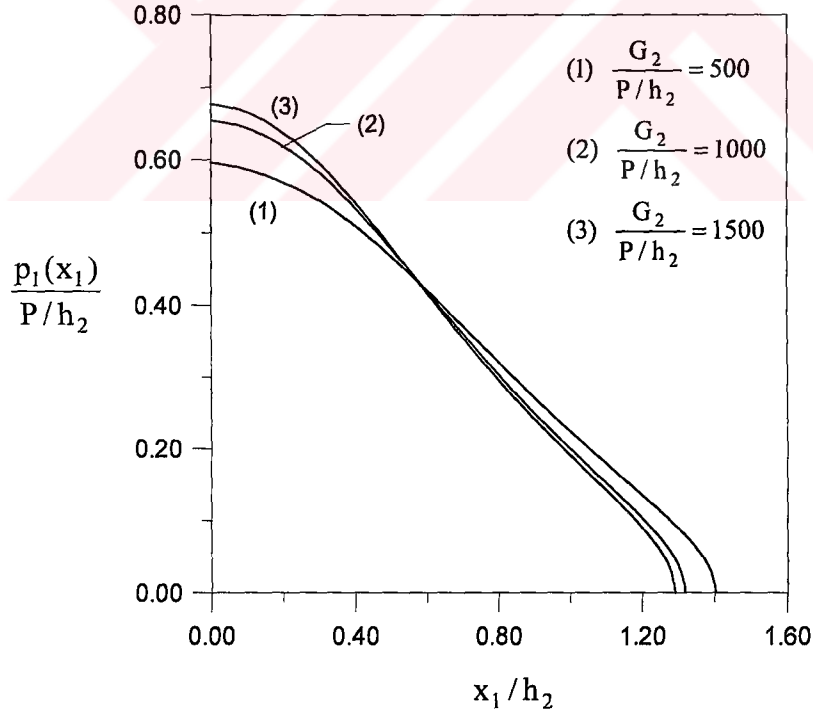


Şekil 9. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, $y=-h_2$ ' de değme gerilmesi

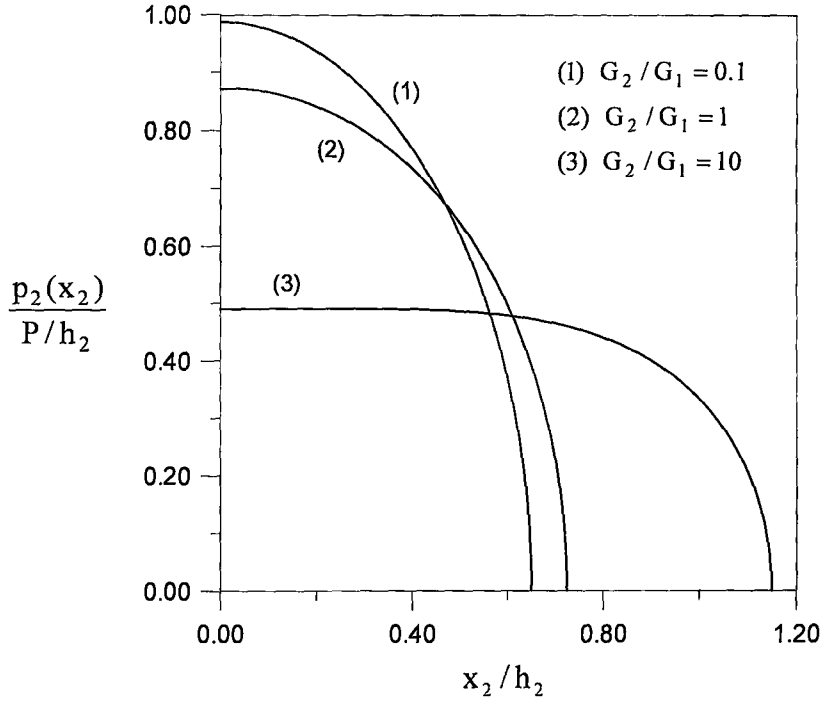
$$\text{yayılışı} \left(h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, \frac{G_2}{P/h_2} = 500 \right)$$



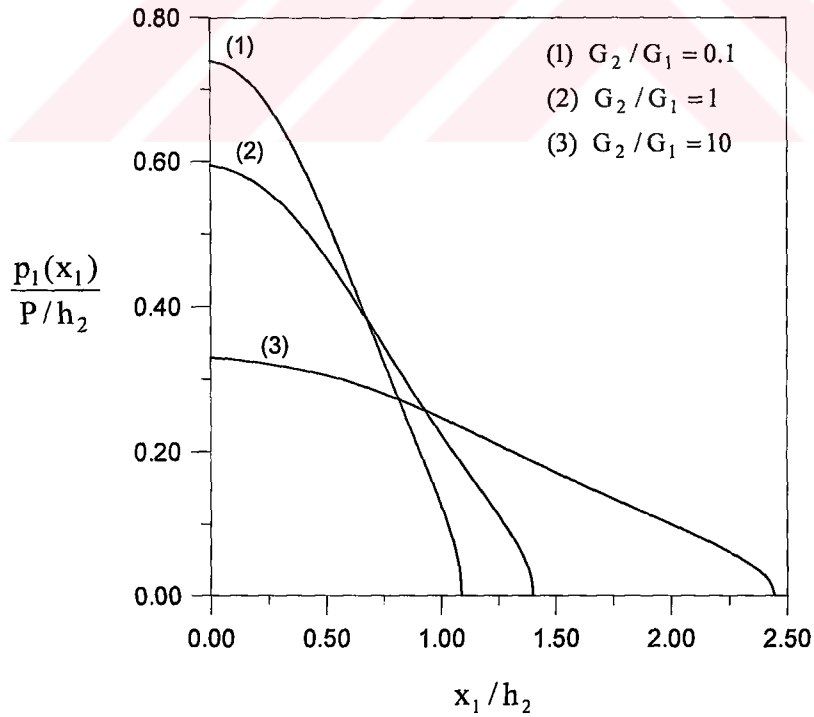
Şekil 10. Çeşitli yük değerleri için $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$)



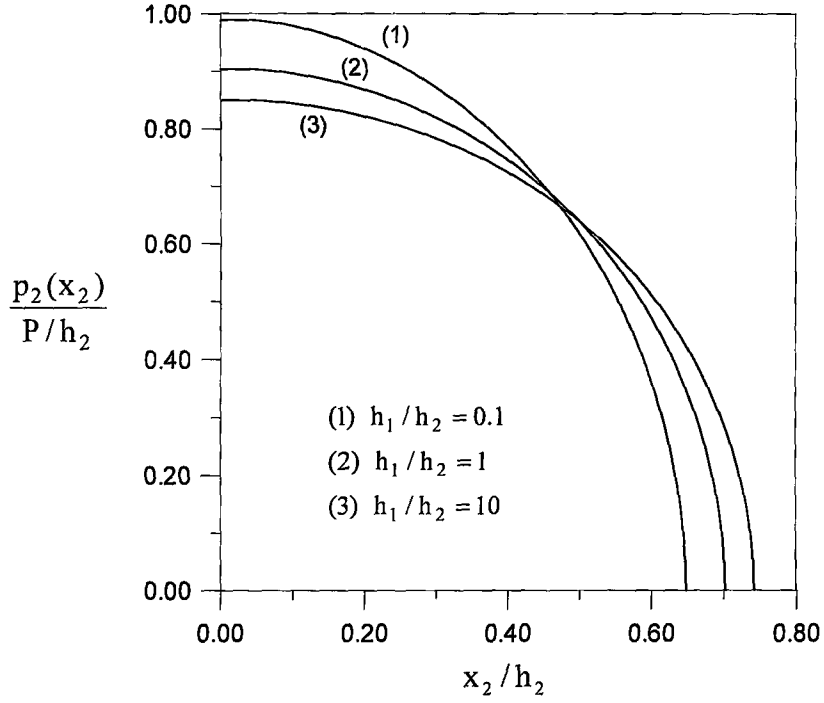
Şekil 11. Çeşitli yük değerleri için $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$)



Şekil 12. Tabakaların kayma modülü oranlarına göre $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

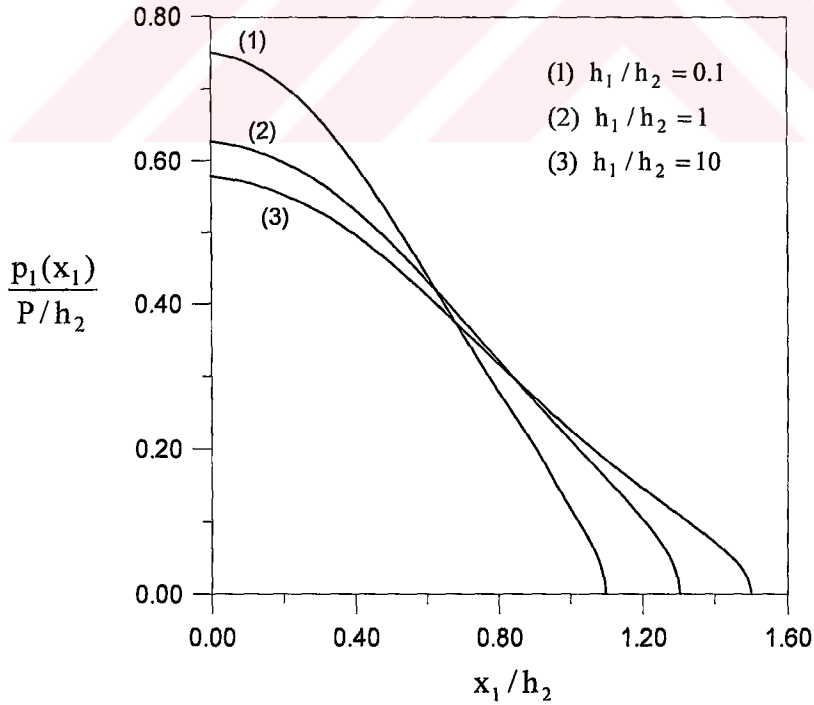


Şekil 13. Tabakaların kayma modülü oranlarına göre $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



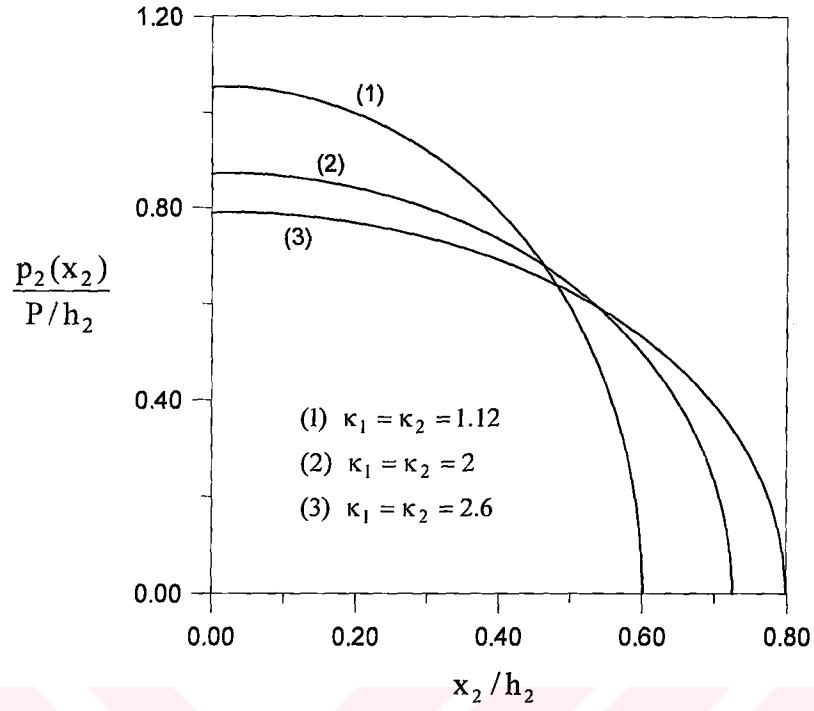
Şekil 14. Tabakaların yükseklikleri oranlarına göre $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı

$$\left(G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, R/h_2 = 500, \frac{G_2}{P/h_2} = 500 \right)$$

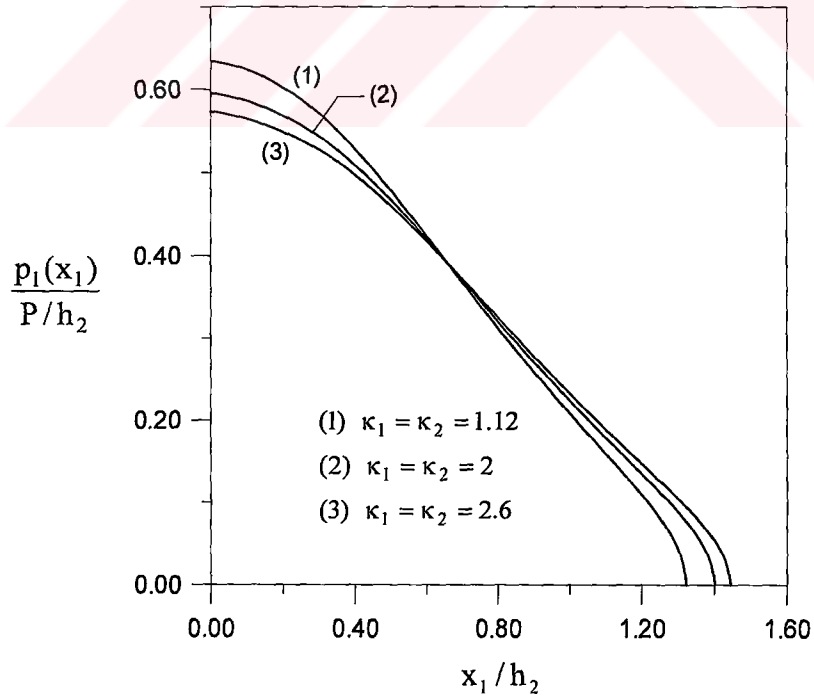


Şekil 15. Tabakaların yükseklikleri oranlarına göre $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı

$$\left(G_2/G_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, R/h_2 = 500, \frac{G_2}{P/h_2} = 500 \right)$$



Şekil 16. Tabakaların κ malzeme sabiti oranlarına göre $y=0$ 'da değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 17. Tabakaların κ malzeme sabiti oranlarına göre $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

Panç profilinin parabolik olması durumunda, parabolün eğrilik yarıçapının ve yükün değişik değerleri için değme yüzeyleri ve değme gerilmeleri incelenmiştir.

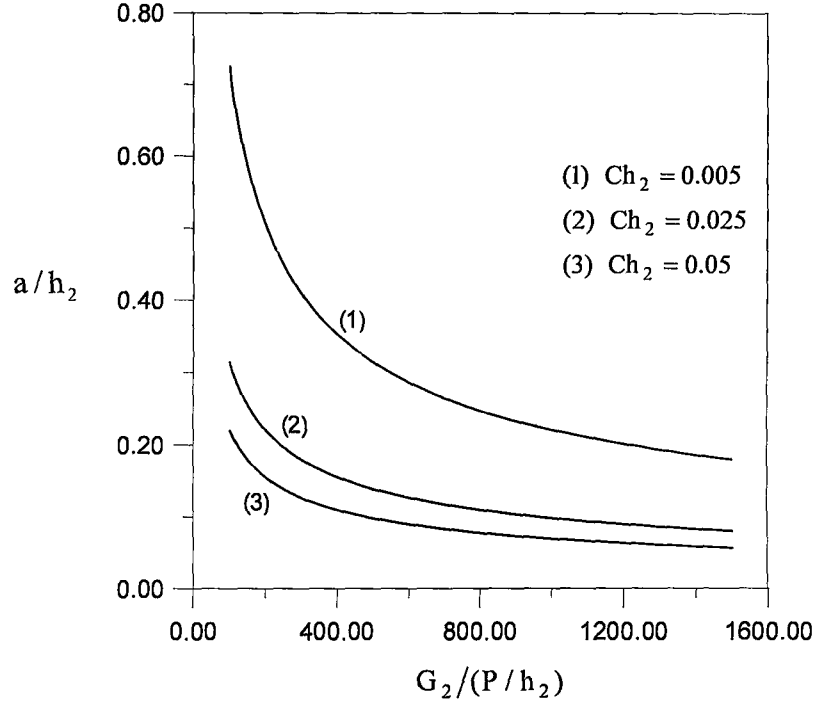
Parabolik pançın eğrilik yarıçapı Ch_2 değeri ile değişmektedir. Bu değer arttıkça eğrilik yarıçapı da artmaktadır.

Parabolik pançın eğriliğine bağlı olarak, değme yüzeyinin yük ile değişimi Tablo 3 ile Şekil 18 ve Şekil 19' da görülmektedir. Ch_2 değeri arttıkça değme yüzeyleri küçülmektedir. Ch_2 değeri küçüldükçe pançın değme yüzeyi ile tabakaların değme yüzeyleri değerleri birbirine yaklaşmaktadır. Yük arttığında değme yüzeylerinin arttığı görülmektedir. Özellikle yükün büyük değerlerine giderken değme yüzeyi çok daha büyük hızla artmaktadır. $Ch_2=0.005$ ve $Ch_2=0.05$ için bulunan değme yüzeylerinin, dairesel panç durumunda sırasıyla $R/h_2 = 100$ ve $R/h_2 = 10$ için bulunan değme yüzeyleri ile hemen hemen aynı değerleri aldıkları görülmektedir.

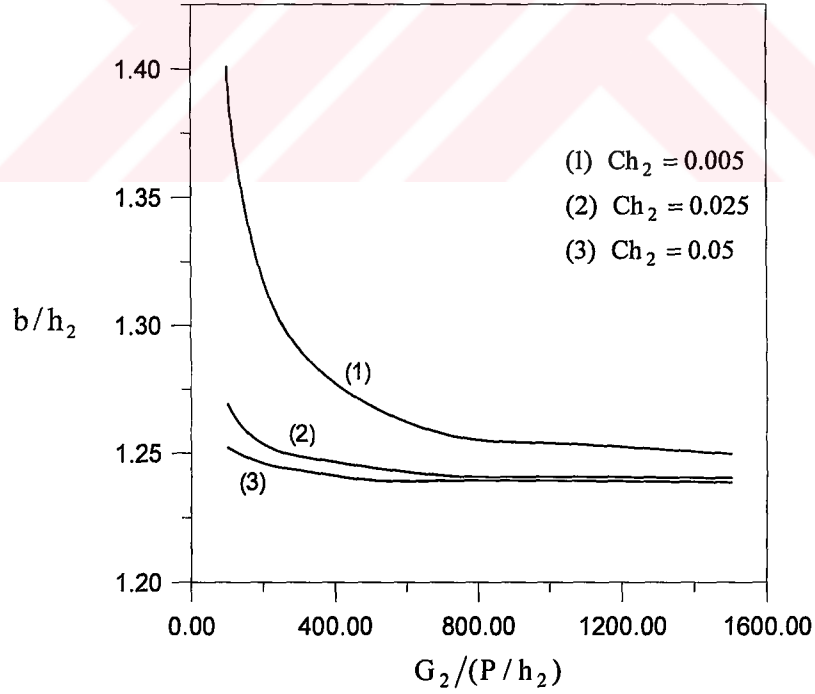
Parabolik pançın eğriliğinin değişimiyle değme gerilmelerinin değişimi Şekil 20 ve Şekil 21'de görülmektedir. Ch_2 değeri arttıkça değme gerilmeleri de artmaktadır. $y=0$ daki değme gerilmelerinin, $y = -h_2$ deki değme gerilmelerine nazaran Ch_2 değerinin değişiminden, çok daha fazla etkilendiği görülmektedir.

Tablo 3. Parabolik pançın eğriliğine bağlı olarak, çeşitli yük değerleri için bulunan değme yüzeyleri ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)

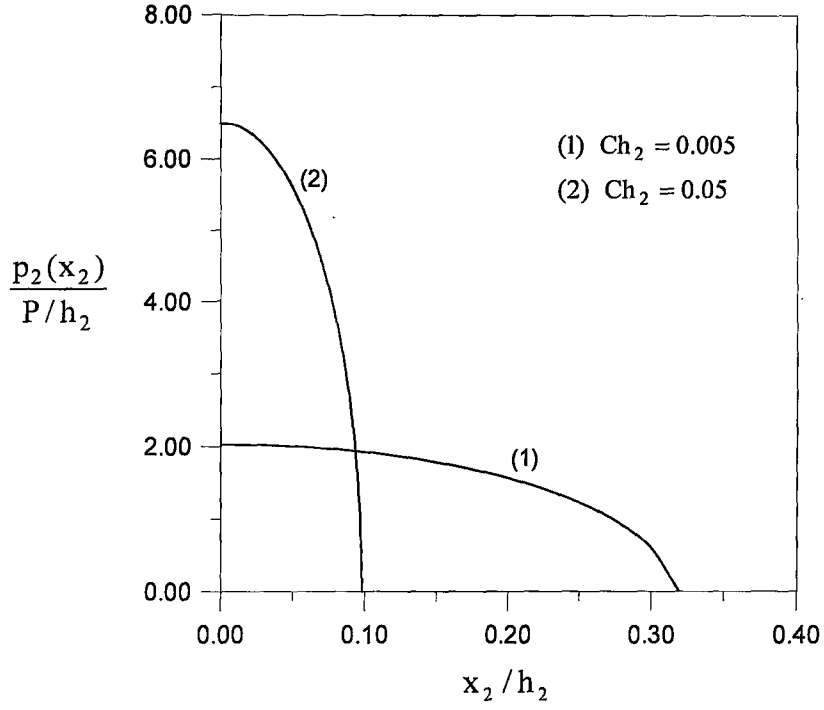
$\frac{G_2}{P/h_2}$	$Ch_2 = 0.005$		$Ch_2 = 0.025$		$Ch_2 = 0.05$	
	a/h_2	b/h_2	a/h_2	b/h_2	a/h_2	b/h_2
100	1.4010	0.7244	1.2693	0.31377	1.2522	0.22028
250	1.3010	0.4490	1.2504	0.19673	1.2444	0.13866
500	1.2684	0.31377	1.2444	0.13866	1.2395	0.09789
750	1.2560	0.2550	1.2409	0.11309	1.2394	0.07988
1000	1.2538	0.2208	1.2407	0.09789	1.2393	0.06916
1500	1.2496	0.1794	1.2403	0.07988	1.2386	0.05645



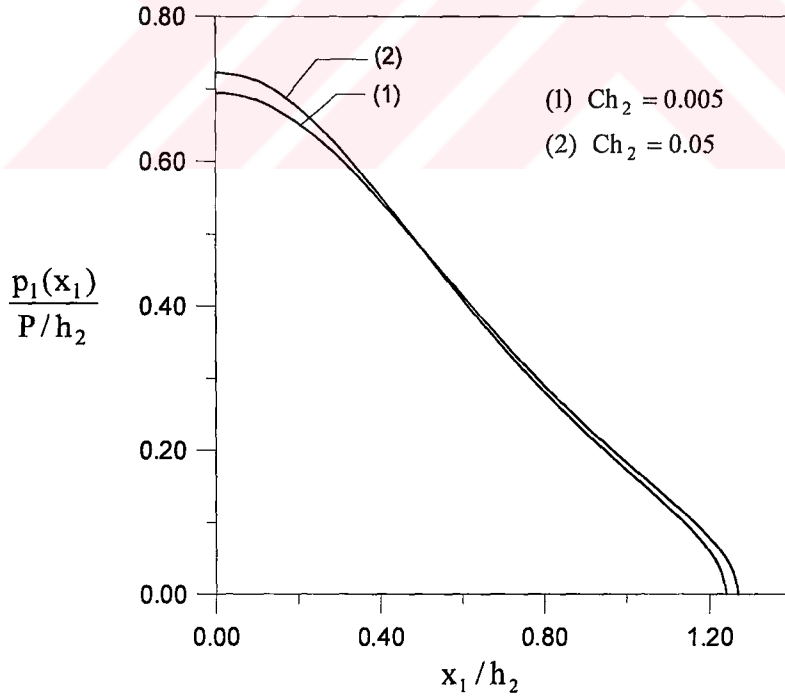
Şekil 18. Parabolik pançın eğriliğine bağlı olarak, panç değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



Şekil 19. Parabolik pançın eğriliğine bağlı olarak, panç değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$)



Şekil 20. Parabolik pançın eğriliğine bağlı olarak, $y=0$ ' da değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 21. Parabolik pançın eğriliğine bağlı olarak, $y=-h_2$ 'de değme gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

3.3. Gerilmelerin İncelenmesi

y eksenini boyunca ($x=0$), σ_x , σ_y normal gerilmeleri ve bu eksen boyunca $x=0.5$ değeri için τ_{xy} kayma gerilmeleri incelenmiştir. Aynı zamanda x eksenini boyunca tabakaların ortasında bu gerilmelerin dağılımını elde edilmiştir.

3.3.1. σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

σ_x normal gerilmesinin panç yarıçapı, yük, tabakaların kayma modülleri oranı ve κ değerleri için y simetri eksenini boyunca ve x eksenini boyunca tabakaların ortasında dağılımını elde edilmiştir.

İlk olarak y eksenini boyunca gerilmenin değişimini ele alınmıştır.

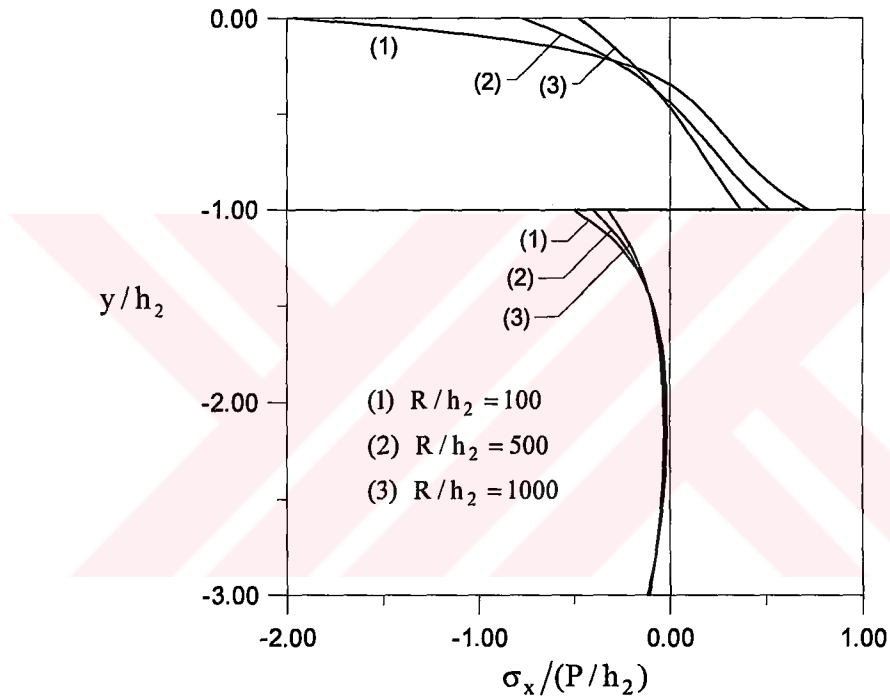
Yarıçap küçüldükçe özellikle $y=0$ ' da gerilme hızla artmaktadır (Şekil 22). Genel olarak pançın değdiği tabakanın (üstteki tabaka) üst kısımlarında basınç gerilmeleri oluşup alt kısımlara doğru değeri azalarak bir y değerinde sıfır olmakta ve işaret değiştirerek alt tabakaya kadar gerilme çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Bu tabakada yarıçap azaldıkça basınç bölgesi azalmakta ve basınç gerilmeleri çekme gerilmelerinden büyük değerde çıkmaktadır. Yarıçapın büyük değerlerinde gerilme yayılışı lineerliğe yaklaşmakta olup; çekme ile basınç bölgelerinin ve çekme ile basınç gerilmelerinin büyüklükleri birbirine yakın değerler almaktadır. Alt tabakada ise daima basınç gerilmesi oluşmaktadır. Bu tabakada da gerilmeler yarıçapın azalmasıyla artmaktadır. Gerilme en büyük değerini aldığı tabakaların değme yüzeyinden alt kısma doğru azalarak tabakanın ortasına yakın yerde minimum bir değer aldıktan sonra biraz artarak mesnette belli bir değerde kalır.

Şekil 23' de yükün değişimine göre gerilme yayılışı görülmektedir. Yükün küçük değerlerinde değme yüzeylerinde gerilmeler hızla artmaktadır. Yükün artmasının gerilmelere etkisi yarıçapın artmasında olduğu gibidir.

Tabakaların kayma modüllerinin oranı G_2 / G_1 ' in değişimi yük ve yarıçapın aksine daha çok $y=-h_2$ deki gerilmelerin değerini etkilemektedir (Şekil 24). Çekme gerilmesinde olan değişim basınç gerilmesindeki değişimden küçük olmaktadır. G_2 / G_1 oranı arttıkça, alt tabakanın elastisite modülü küçüldükçe, üst tabakadaki gerilme artmakta ve gerilme yayılışı lineere yakın bir form almaktadır. Alt tabakanın elastisite modülü küçüldükçe bu tabakanın değme yüzeyindeki gerilmeler üst tabakadan farklı olarak küçülmektedir. Bu

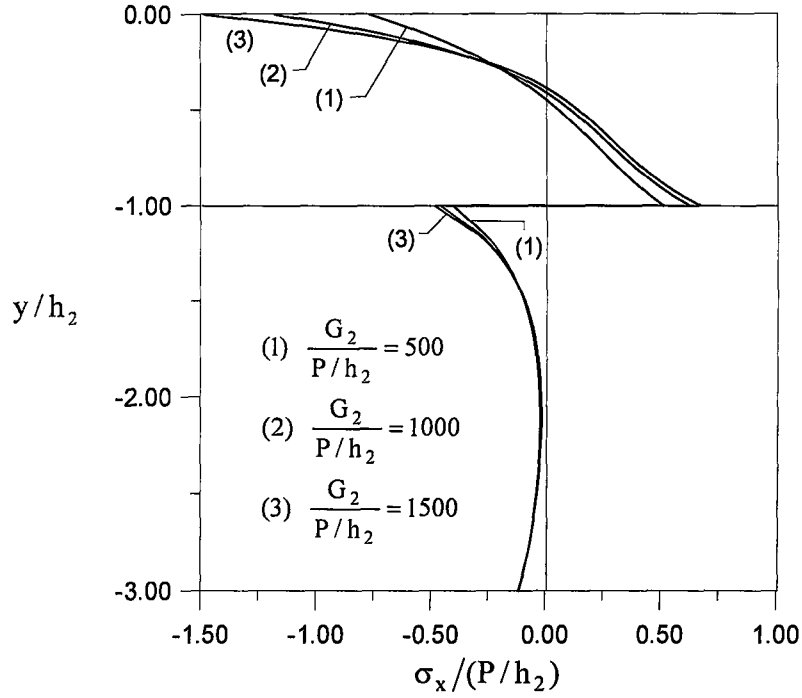
tabakanın ortalarına doğru gerilme sıfır olmakta ve buradan itibaren biraz artarak mesnette bir değerde kalmaktadır.

κ değerleri arttıkça (tabakaların rijitliği azaldıkça) her iki tabakada da gerilme değeri azalmaktadır (Şekil 25). Gerilme üst tabakada κ değerlerinin değişiminden çok fazla etkilenmemektedir. κ 'nın büyük değerinde mesnetteki gerilme değeri incelenen diğer durumlara göre oldukça büyük değer almaktadır. Aynı zamanda κ değerlerinin değişimi en fazla mesnetteki gerilmeyi etkilemektedir. Bir diğer dikkat çeken nokta, κ sabitlerinin büyük değerlerinde alt tabakanın orta kısımlarında çekme gerilmesi oluşmasıdır.

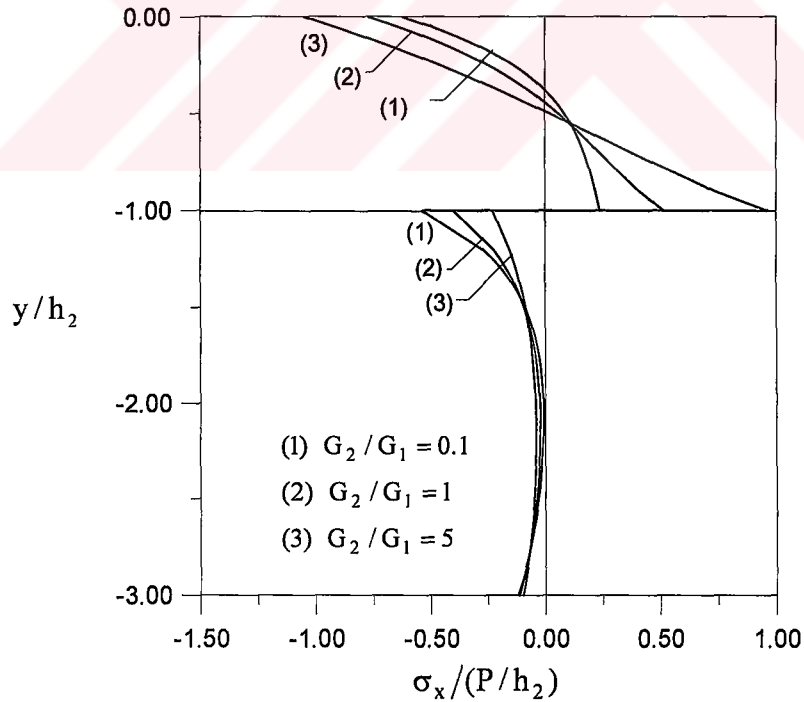


Şekil 22. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ile

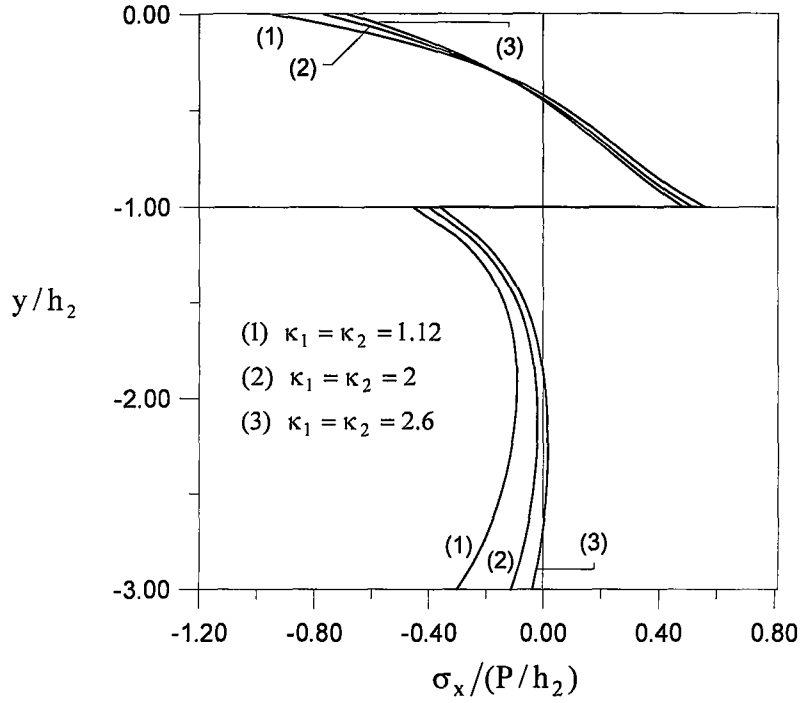
değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 23. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin yük ile değişimi
 ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$)



Şekil 24. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin tabakaların kayma
 modülleri oranı ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 25. Dairesel panç durumunda, $\frac{\sigma_x(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin $\kappa_{1,2}$ ile değişimi

$$\left(h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, R/h_2 = 500, \frac{G_2}{P/h_2} = 500 \right)$$

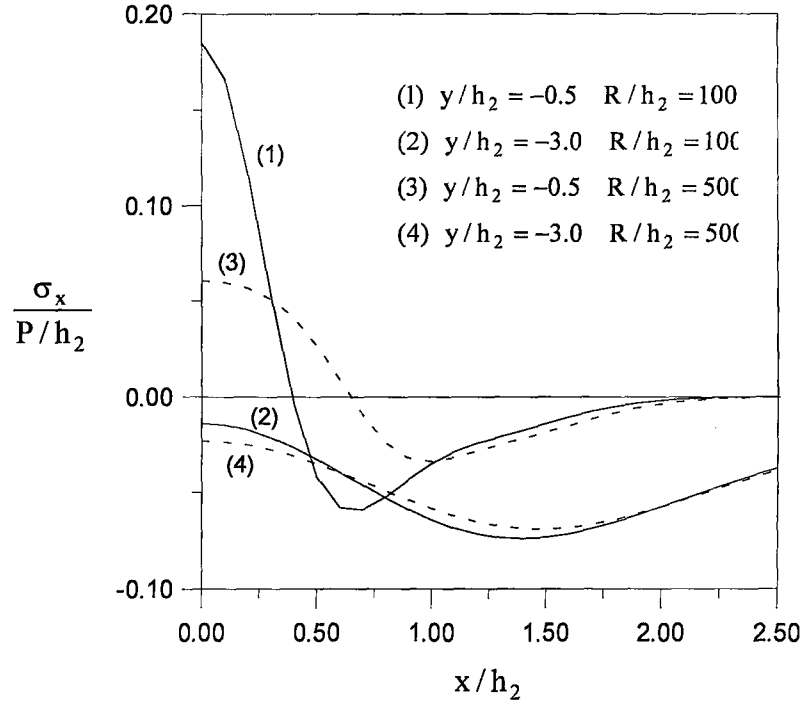
x eksenini boyunca σ_x normal gerilme dağılımı tabakaların orta kısımlarında incelenmiştir (Şekil 26-29).

Yarıçap arttıkça, üst tabakanın orta kısımlarında gerilme değeri azalmaktadır. Başlangıçta çekme olan gerilmeler, x değeri arttıkça azalarak sıfır olmakta, daha sonra basınç gerilmesi olarak artmaktadır. Basınç gerilmeleri de belli bir x değerinde en büyük değerine ulaştıktan sonra azalarak sıfır olmaktadır. Gerilmelerin etkisinin kaybolduğu x değeri yarıçapın değişiminden etkilenmemektedir. Yarıçap arttıkça basınç gerilmelerinin maksimum olduğu nokta y ekseninden uzaklaşmakta, çekme ve basınç gerilmelerinin en büyük değerleri arasındaki fark ise kapanmaktadır. Alt tabakanın orta kısımlarında, gerilme değerleri x eksenini boyunca yarıçapın artışından pek etkilenmemektedir. Bu tabakada daima basınç gerilmesi olmakta en büyük değerini x in belli bir değerinde aldıktan sonra azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Bu tabakadaki basınç gerilmelerinin değeri üst tabakadakinden çok yerde daha büyüktür ve etkisini üst tabakaya göre y ekseninden daha uzak noktada kaybetmektedir (Şekil 26).

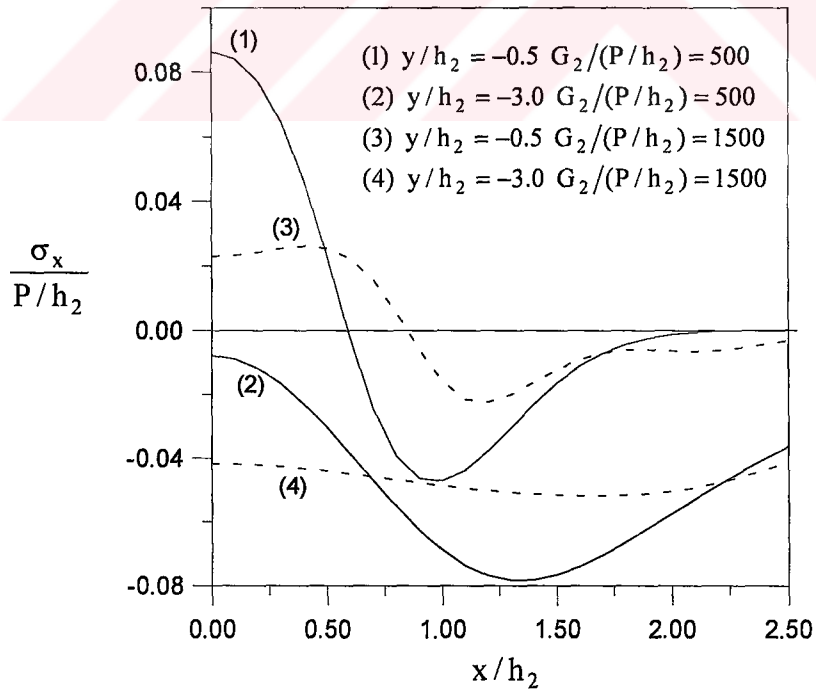
Yük ile üst tabakadaki gerilmelerin değişimi, hemen hemen yarıçapın değişimindeki gibidir. Yük arttıkça, gerilmelerin en büyük değerleri azalmaktadır. Alt tabakanın ortasındaki gerilmeler, yükün değişiminden çok fazla etkilenmemektedir. Bu tabakada basınç gerilmesi hakimdir (Şekil 27).

Kayma modülleri oranının değişimine göre gerilmelerin değişimi Şekil 28’ de görülmektedir. Üst tabakada, G_2 / G_1 oranının artmasıyla, alt tabakanın elastisite modülünün (E_1) değerinin azalmasıyla, gerilmelerin maksimum değerleri azalmaktadır. Burada gerilmelerin etkisini kaybettiği nokta kayma modülü oranlarından etkilenmektedir. Bu oran azaldıkça gerilme etkisini daha çabuk yitirmektedir. Çekme gerilmeleri maksimum değerlerini $x=0$ ’ dan ötede bir noktada almaktadır. Alt tabakada da yarıçap ve yük değişiminden farklı olarak kayma modüllerinin oranının değişimi gerilmeleri oldukça etkilemektedir. Bu tabakada incelenen her iki durum için de basınç gerilmeleri oluşmakta E_1 büyüdükçe gerilmenin maksimum değeri artmaktadır. G_2 / G_1 oranı büyük olduğunda x eksenini boyunca gerilme çok fazla değişmemektedir. x ’ in büyük değerlerinde azalmaya başlayarak sifıra yaklaşmaktadır.

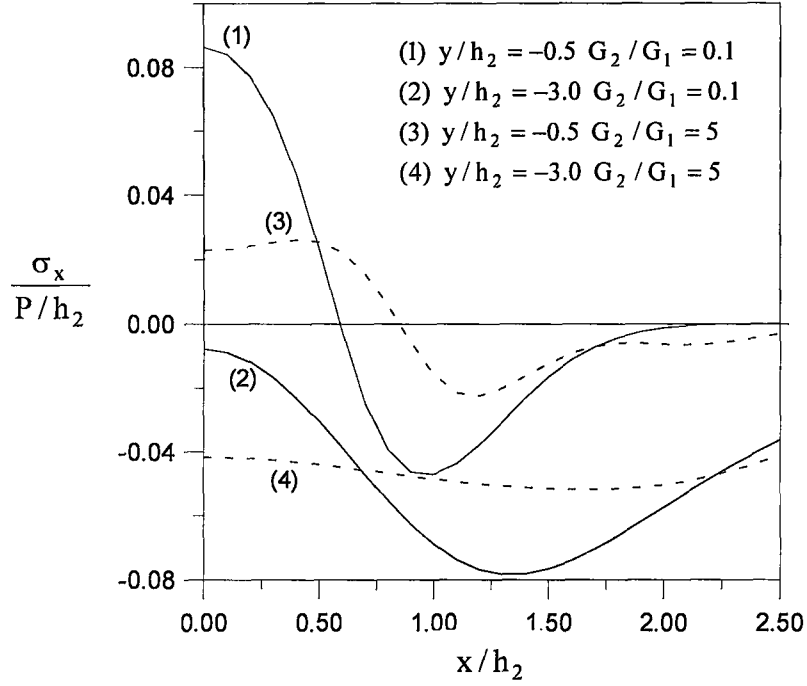
Tabakaların κ değerleri aynı olarak artırıldığında (ν azaldığında) gerilmelerin maksimum değeri azalmaktadır. Tabakalar rijitleştikçe (κ azalıp ν arttıkça) alt ve üst tabakalardaki gerilme farkları oldukça büyümektedir. σ_x gerilmelerinin y eksenini boyunca κ değerleri için incelenmesinde olduğu gibi, burada da alt tabaka gerilmelerinde, tabakanın ortasında çekme gerilmeleri oluştuğu görülmektedir. κ ’ nın büyük değerinde $x=0$ ’ a yakın değerlerde çekme gerilmesi oluşmakta, daha sonra ise işaret değiştirerek basınç gerilmesi olarak maksimum değerine ulaşmış, azalarak etkisini kaybetmektedir (Şekil 29).



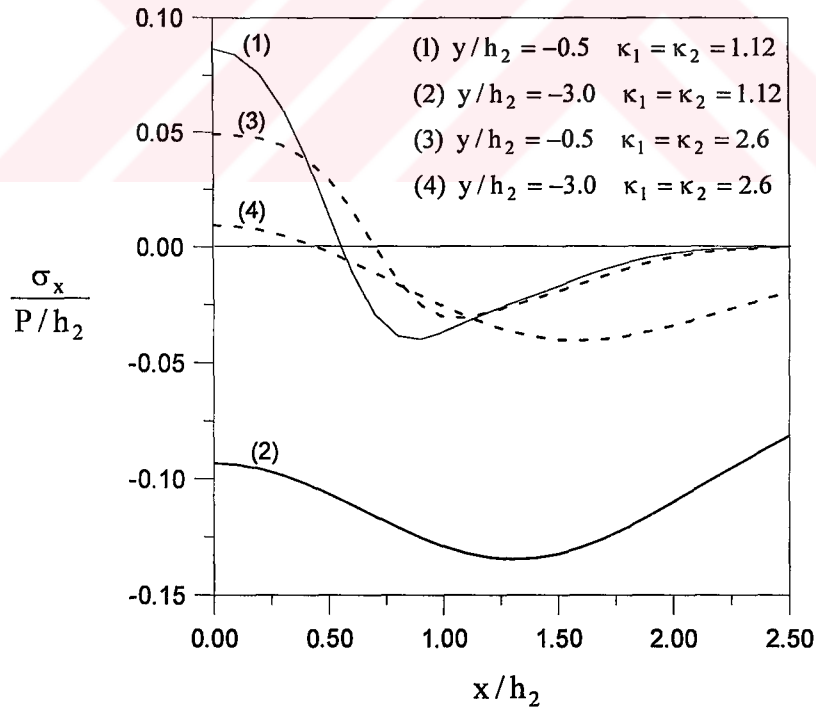
Şekil 26. Panç yarıçapları için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 27. Yük değerleri için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$)



Şekil 28. Kayma modülleri oranı ile, x eksenı boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 29. κ değerleri için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_x}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

3.3.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

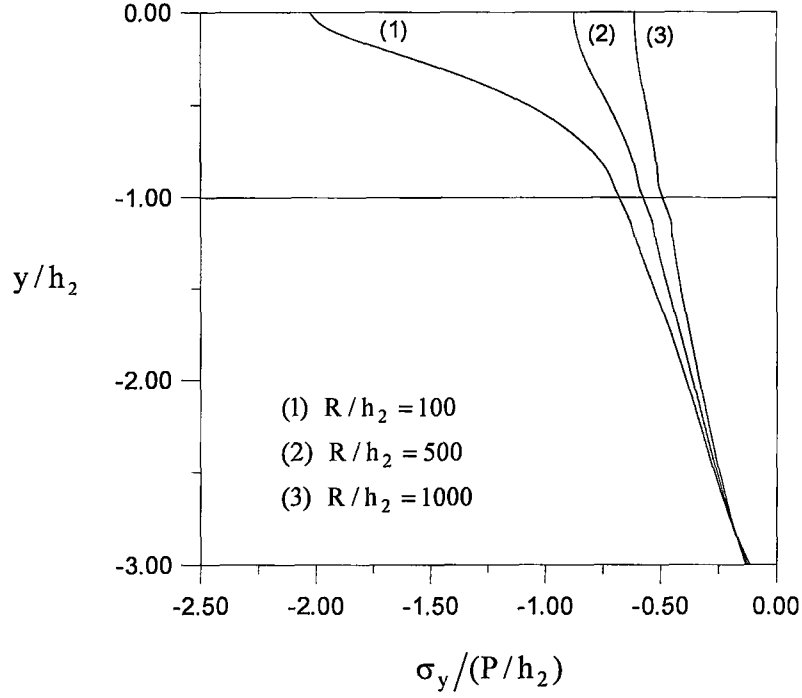
y simetri eksenini boyunca gerilmelerin yayılışı Şekil 30-33'de görülmektedir. σ_y normal gerilmeleri en büyük değerlerini pançın değme yüzeyinde ($y=0$) almakta ve pançtan uzaklaştıkça azalarak mesnette küçük bir değerde kalmaktadır. Gerilme incelenen bir durum haricinde her zaman basınç olarak etkisini göstermektedir. Alt tabakada gerilmeler lineer olarak azalmaktadır. Tabakaların değme yüzeylerinde alt ve üst tabakadaki gerilmeler aynı değeri almış ve sınır şartı sağlanmıştır. Diğer taraftan değme yüzeylerindeki gerilme değerleri değme gerilmelerinde incelenen değerlerle eşit çıkarak (67) ve (68) nolu sınır şartları da sağlanmıştır.

Panç yarıçapı azaldıkça σ_y gerilmeleri artmaktadır. Elastisite teorisinden, tekil yükün altında düşey normal gerilmelerin sonsuza gittiği bilinmektedir. Burada da yarıçapın azalmasıyla pançın değme yüzeyi azalmakta bunun sonucunda tekil yük haline yaklaşılmaktadır. Yarıçap büyüdükçe gerilme yayılışı üniforma yakın olmaktadır. Alt tabakadaki gerilmeler birbirine yakın değerlerdedir. Mesnetteki gerilmeler incelenen bütün yarıçap değerleri için yaklaşık aynı değeri almışlardır (Şekil 30).

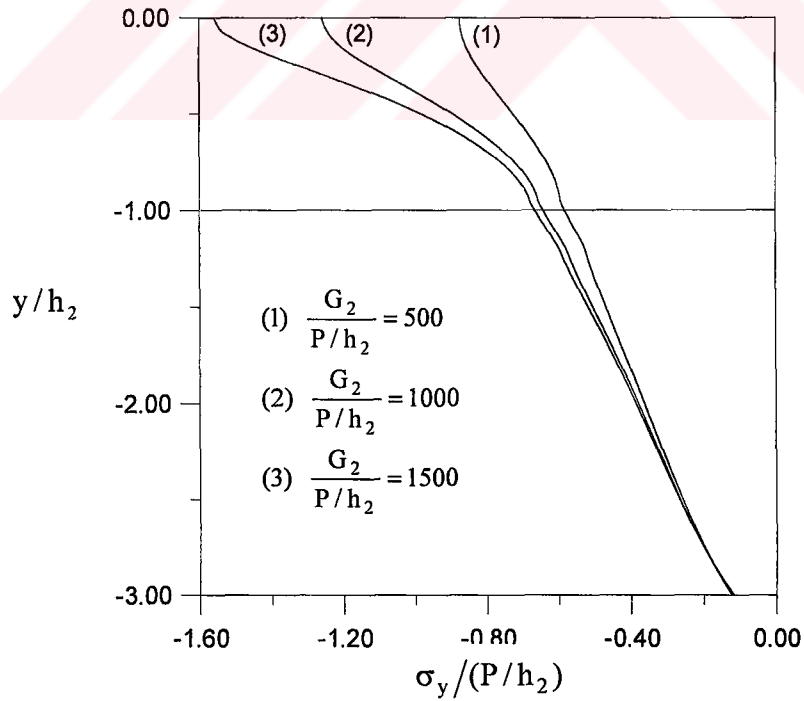
Yükün değişimine göre σ_y gerilmelerinin değişimi Şekil 31'de görülmektedir. Yükün değeri azaldıkça gerilmelerin değeri artmaktadır. Yarıçapın büyük değerlerinde olduğu gibi yükün büyük değerlerinde de gerilme yayılışı üniforma yaklaşmaktadır.

G_2 / G_1 kayma modülleri oranı arttıkça σ_y gerilmeleri azalmaktadır. Alt tabakada oluşan gerilme değerlerinin, yük ve yarıçap değişimlerinden farklı olarak, bu oranın değişiminden oldukça etkilendiği görülmektedir. Mesnette gerilmeler birbirlerinden az da olsa farklı çıkmaktadır (Şekil 32).

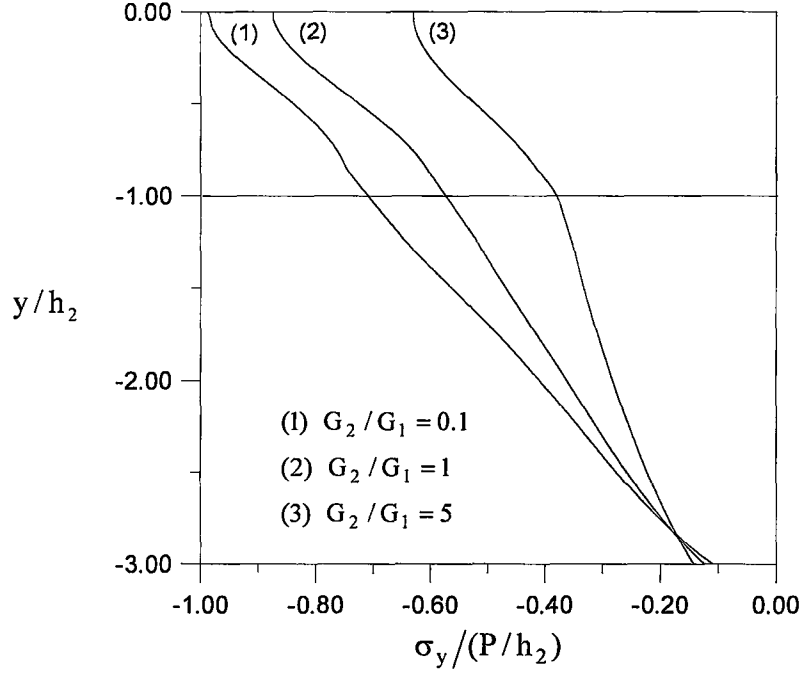
Tabakaların κ değerleri birbirine eşit olarak artırıldığında (rijitlikleri azaldıkça) gerilmelerin değeri azalmaktadır. Gerilmeler alt tabakanın üst kısımlarında birbirine eşit bir değerden geçmektedirler. Burada diğer incelemelerden farklı olarak karşılaşılan durum mesnette gerilmelerin birbirinden biraz daha fazla farklı çıkmasıdır (Şekil 33).



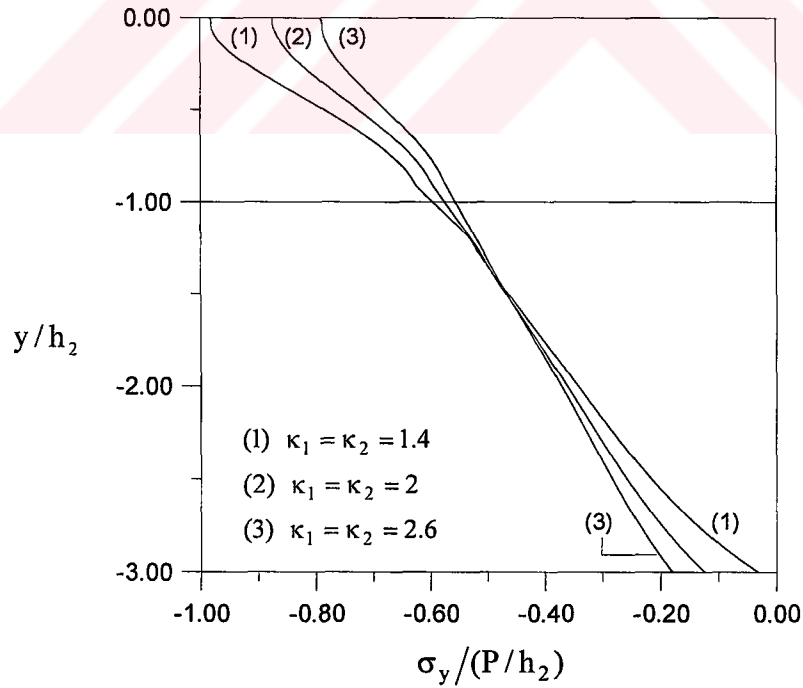
Şekil 30. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin pañç yarıçapı ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 31. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$)



Şekil 32. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 33. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\sigma_y(0,y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin $\kappa_{1,2}$ ile değişimi

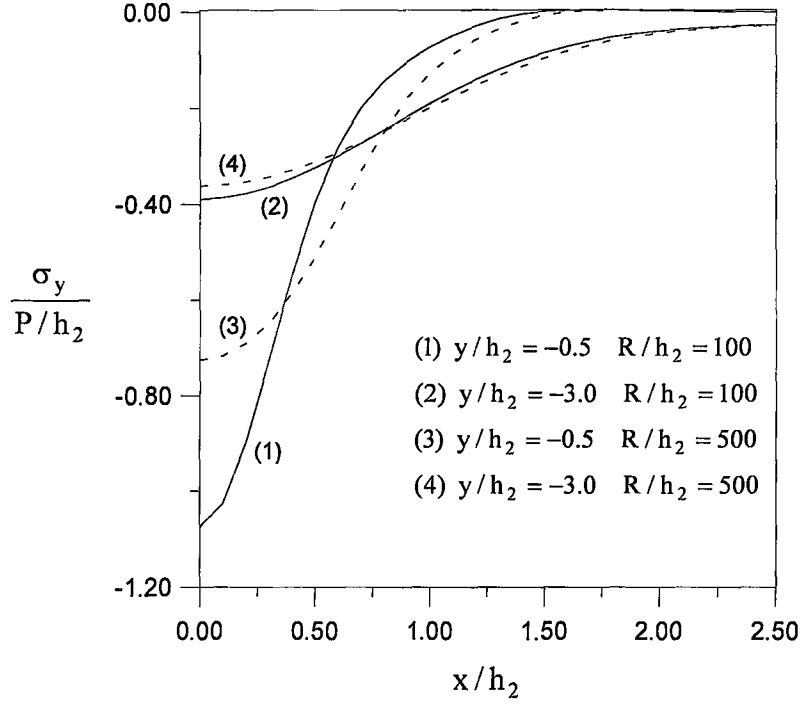
$$\left(h_1/h_2 = 2, G_2/G_1 = 1, R/h_2 = 500, \frac{G_2}{P/h_2} = 500 \right)$$

x simetri eksenini boyunca tabakaların ortasındaki gerilmelerin dağılımını Şekil 34-37’de gösterilmiştir. σ_y gerilmeleri bu eksen boyunca her zaman basınç olarak etki etmektedir. En büyük değerlerini $y=0$ simetri ekseninde almakta ve bu eksenden uzaklaştıkça azalarak sifira yaklaşmaktadırlar. Üst tabakanın ortasındaki en büyük gerilme değerinin, her zaman alt tabakanın ortasındaki gerilme değerinden büyük olduğu görülmektedir. Yine üst tabakadaki gerilmeler alt tabakadaki gerilmelere oranla daha çabuk etkisini kaybetmektedir.

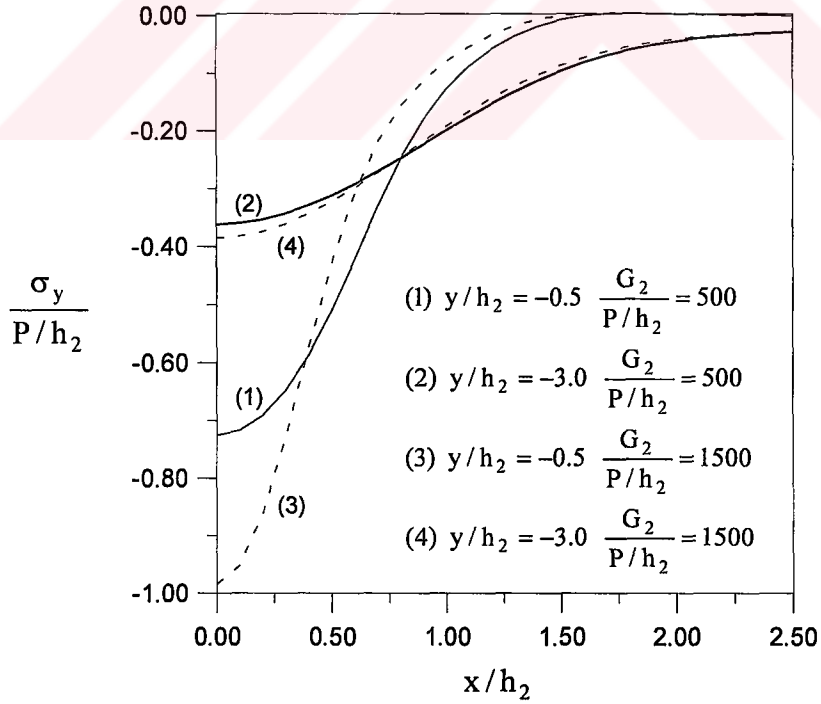
Yarıçap ve yük değişimi ile gerilmelerin x eksenini boyunca dağılımını birbirine yakın özellikler göstermektedir. Yarıçap ve yük değeri arttıkça, özellikle üst tabakanın ortasında gerilmeler azalmaktadır. Alt tabakanın ortasında da gerilmeler azalmakla beraber çok az değişirler (Şekil 34 ve Şekil 35).

G_2 / G_1 kayma modülleri oranı arttığında gerilmelerin her iki tabakanın ortasında da azaldığı görülmektedir. Burada alt tabakadaki gerilmenin de değişimden etkilendiği görülmektedir (Şekil 36).

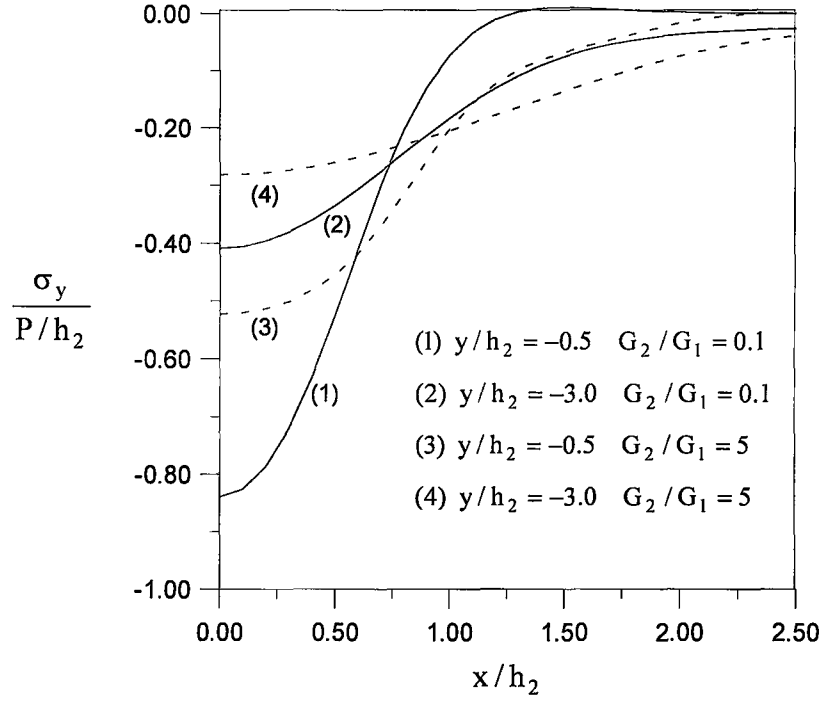
Tabakaların κ değerleri birbirinin aynı olarak azaldığında (tabakalar rijitleştikçe) üst tabakada gerilme artmaktadır. Alt tabakada üst tabakanın aksine tabakalar rijitleştikçe gerilme azalmaktadır (Şekil 37).



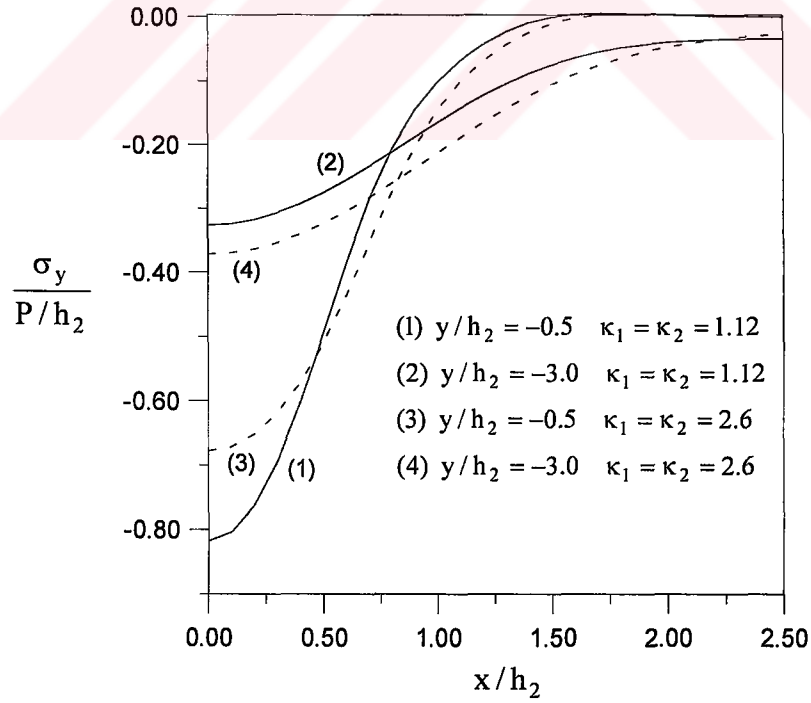
Şekil 34. Panç yarıçapları için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 35. Yük değerleri için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$ normal gerilme yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$)



Şekil 36. Kayma modülleri oranı ile, x eksenini boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$ normal gerilme yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 37. κ değerleri için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\sigma_y}{P/h_2}$

normal gerilme yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

3.3.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

Tabakalarda simetri kesitinde kayma gerilmeleri sıfırdır. x eksenini boyunca kayma gerilmelerinin değışimini incelendiğinde gerilmelerin en büyük değerlerini, yaklaşık olarak x' in 0.5-1 değerleri arasında aldıkları görülmüş ve kayma gerilmelerinin y eksenini boyunca dağılışı $x=0.5$ değeri için incelenmiştir.

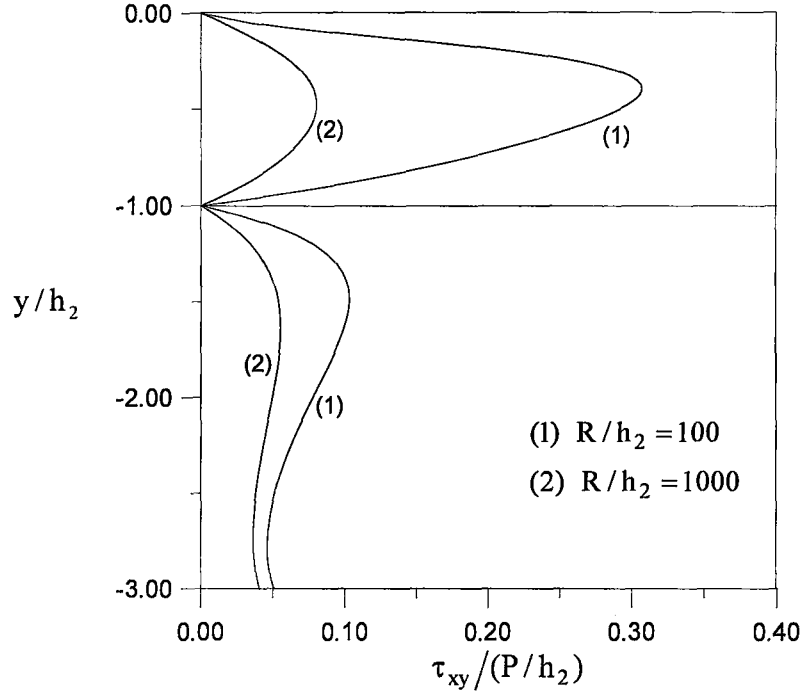
Kayma gerilmeleri $x=y=0$ ve $x=0, y=-h_2$ sınırlarında sıfır olmakta ve başlangıçta kabul edilmiş olan (68), (70), (71) nolu sınır şartlarını sağlamaktadırlar.

Yarıçapın azalmasıyla üst tabakada kayma gerilmesi artmaktadır. Alt tabakadaki gerilme de yarıçap değeri azaldıkça artmaktadır. Bununla birlikte üst tabakadaki gerilme kadar etkilenmemektedir. Yarıçap değeri azaldıkça gerilmenin maksimum değeri aldığı nokta tabakaların değme yüzeyine yaklaşmakta ve bu noktadan sonra azalarak mesnette sıfırdan farklı bir değerde kalmaktadır. Mesnette gerilmeler birbirine çok yakın değerlerdedir (Şekil 38).

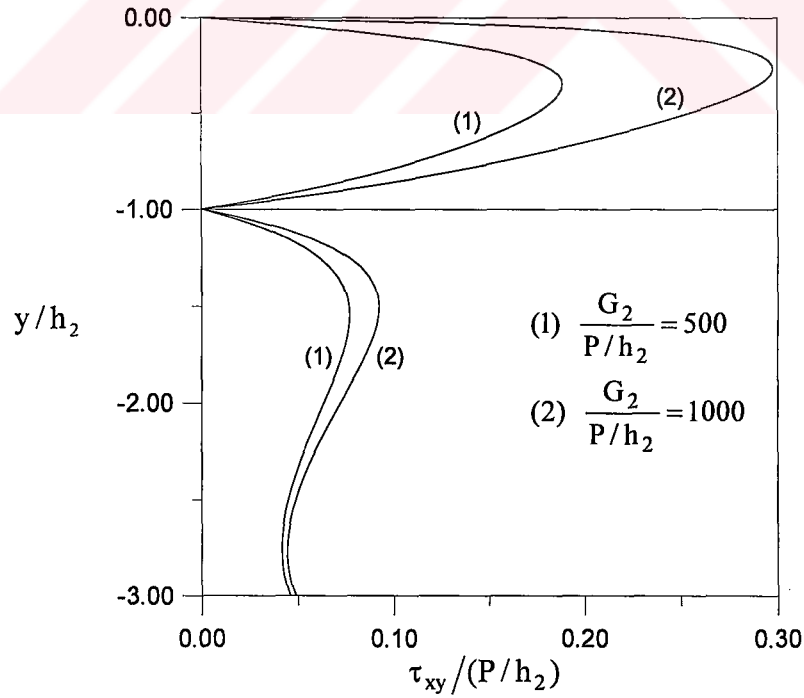
Yükün azalmasıyla üst tabakada daha fazla olmak üzere, kayma gerilmeleri artmaktadır. Yarıçapın değışimindeki kayma gerilmesi yayılış özellikleri burada da aynıdır (Şekil 39).

Tabakaların kayma modülleri oranı G_2 / G_1 arttıkça üst tabakada kayma gerilmesinin değeri artmaktadır. Alt tabakada, bu oranın artmasıyla gerilme değeri; tabakaların değme yüzeyine yakın bölgelerde azalmakta mesnete yakın yerlerde ise artmaktadır (Şekil 40).

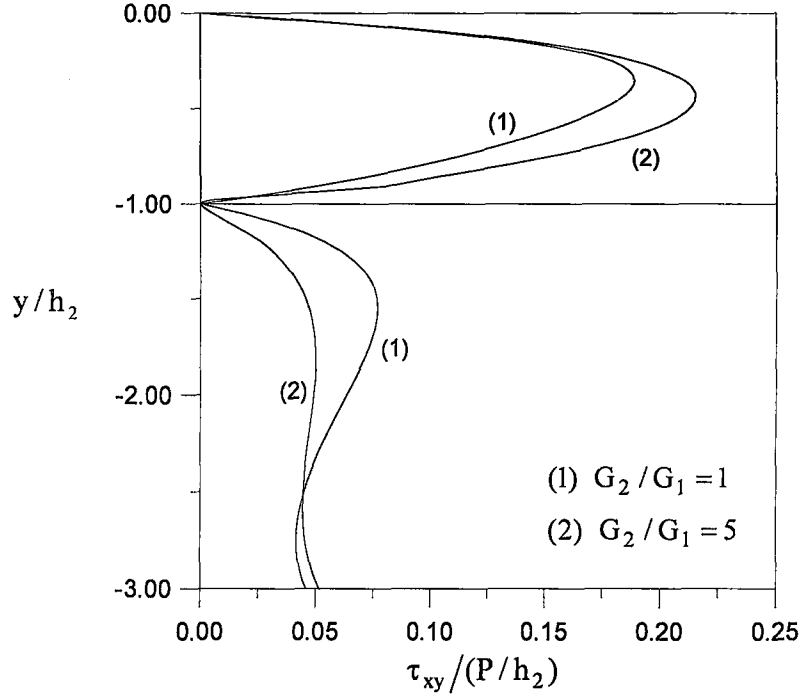
Tabakaların κ değerleri birbirinin aynı olarak arttığında (tabakalar rijitleştikçe) tabakalarda, üst tabakada daha büyük olmak üzere, kayma gerilmesi değeri azalmaktadır. Üst tabakada kayma gerilmesinin maksimum değeri, yaklaşık olarak tabakanın ortasında oluşmaktadır (Şekil 41).



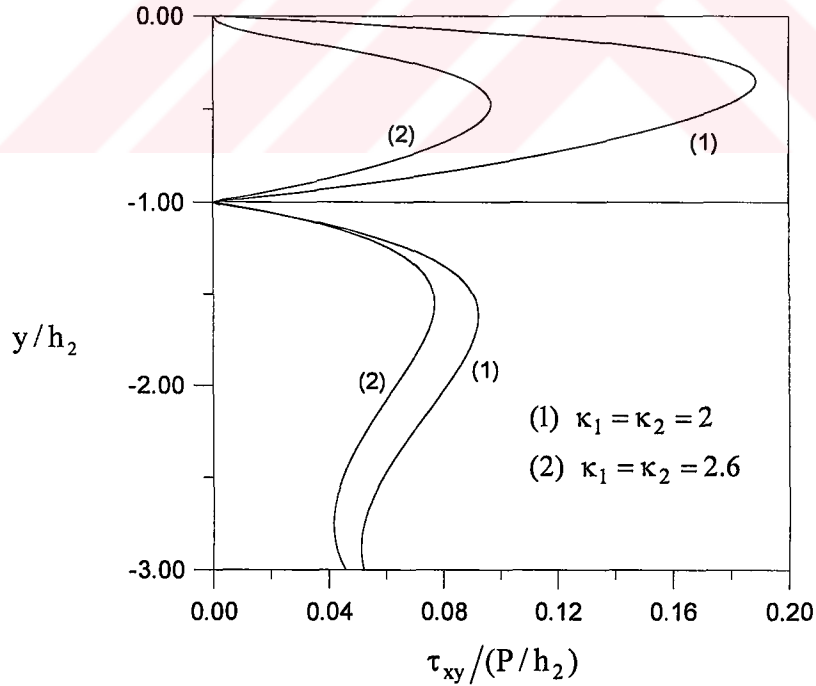
Şekil 38. Dairesel panç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0.5, y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 39. Dairesel panç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0.5, y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$)



Şekil 40. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0.5, y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



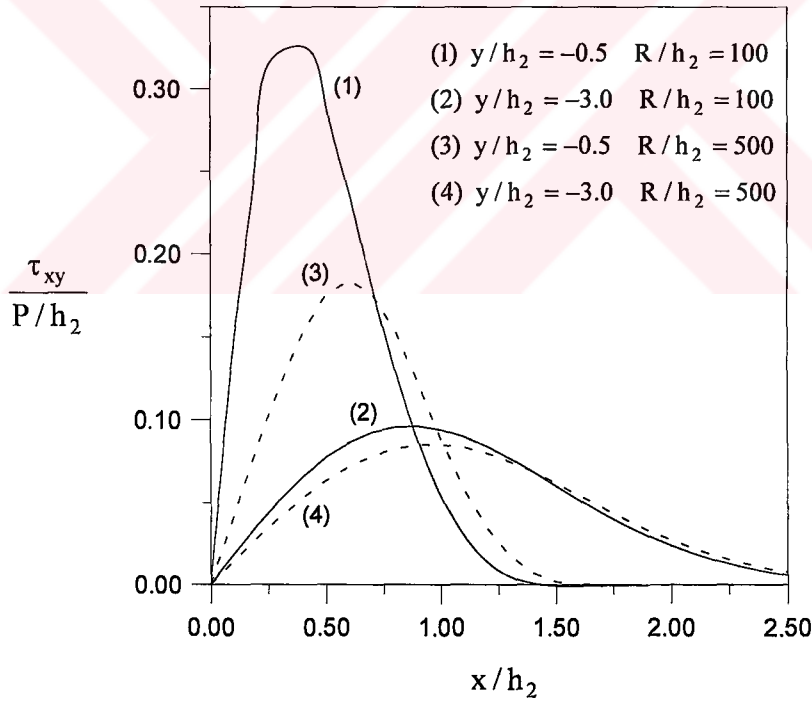
Şekil 41. Dairesel pañç durumunda, $\frac{\tau_{xy}(0.5, y)}{P/h_2}$ normal gerilmesinin $\kappa_{1,2}$ ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

Simetri eksenini $y=0$ boyunca tabakaların ortasında meydana gelen τ_{xy} kayma gerilmesi yayılışı Şekil 42-45' de gösterilmiştir. Kayma gerilmeleri, $x=0$ için sıfırdır. x değeri arttıkça artarak maksimum değerini almakta, daha sonra ise azalarak etkisini kaybetmektedir.

Yarıçapın ve yükün azalmasıyla üst tabakada kayma gerilmesinin maksimum değeri artmakta ve bu değeri aldığı nokta y eksenine yaklaşmaktadır. Alt tabakada kayma gerilmesi yarıçap veya yükün değişmesinden pek fazla etkilenmemekte ve gerilme etkisini üst tabakaya nazaran daha büyük x değerlerinde kaybetmektedir (Şekil 42 ve Şekil 43).

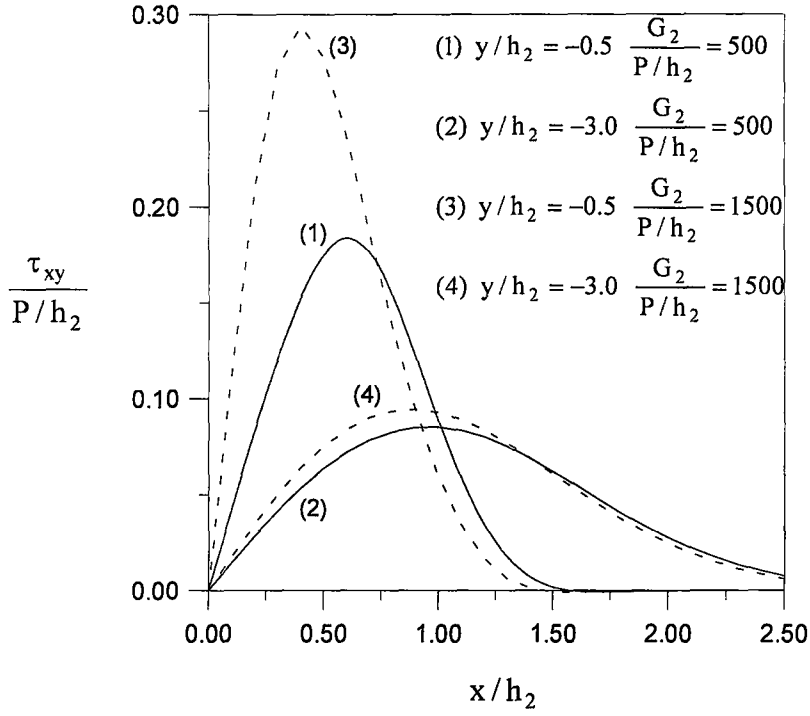
G_2/G_1 oranının artması üst tabakanın ortasındaki kayma gerilmesinin değeri artmakta ve maksimum değeri aldığı nokta y ekseninden uzaklaşmaktadır. Alt tabakanın ortasında ise bu oran arttıkça kayma gerilmelerinin değeri azalmaktadır (Şekil 44).

Tabakaların κ değerleri birbirlerine eşit olarak arttıkça kayma gerilmesi azalmaktadır. Alt tabakada bu azalmanın çok küçük olduğu görülmektedir (Şekil 45).

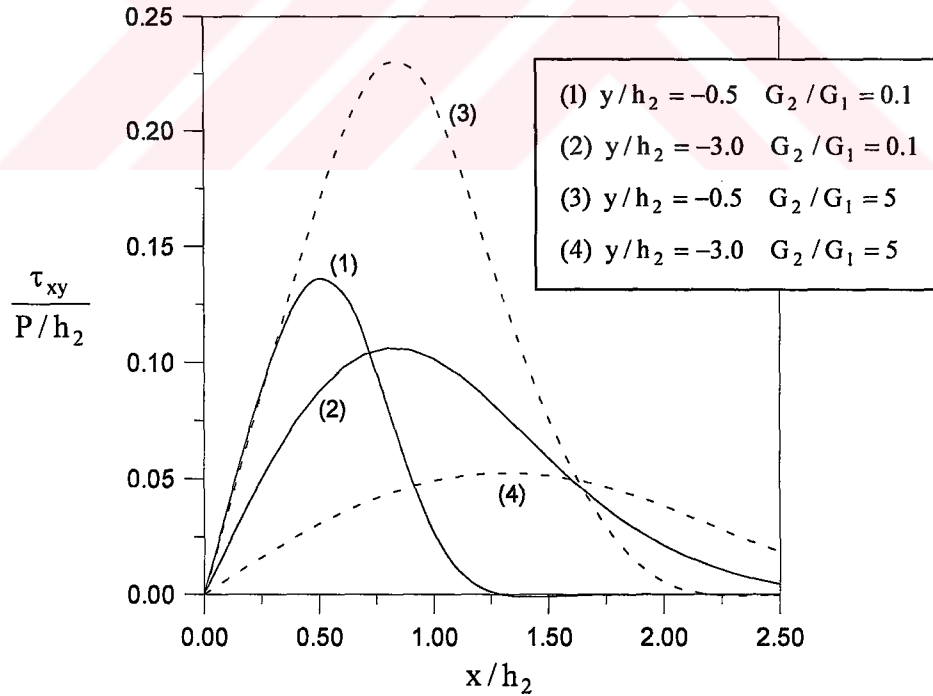


Şekil 42. Panç yarıçapları için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$

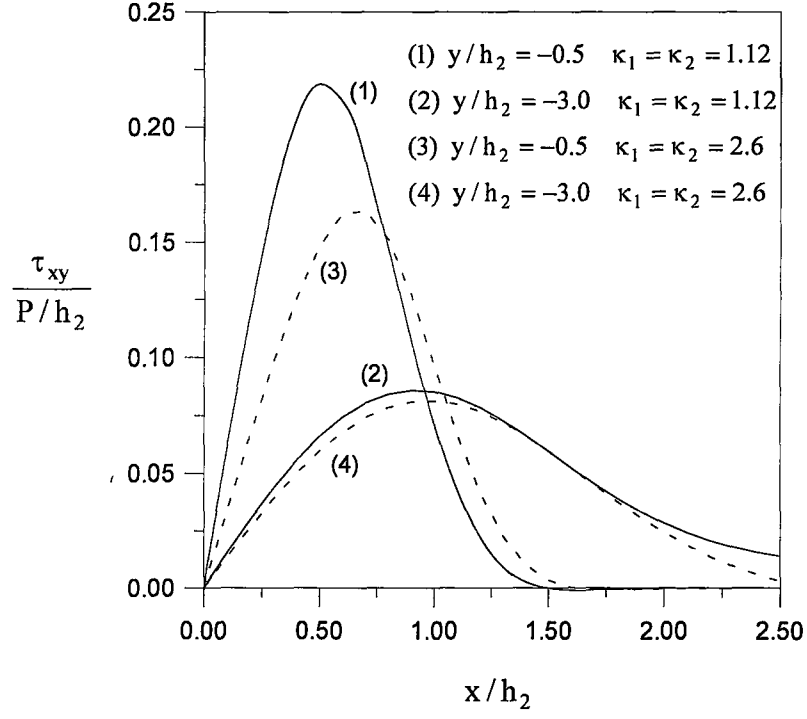
kayma gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 43. Yük değerleri için, x eksenı boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$ kayma gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$)



Şekil 44. Kayma modülleri oranı ile, x eksenı boyunca tabakaların ortasında oluşan $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$ kayma gerilmesi yayılışı ($h_1/h_2 = 2$, $\kappa_{1,2} = 2$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)



Şekil 45. κ değerleri için, x eksenini boyunca tabakaların ortasında meydana gelen $\frac{\tau_{xy}}{P/h_2}$ kayma gerilmesi yayılımı ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 1$, $R/h_2 = 500$, $\frac{G_2}{P/h_2} = 500$)

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Rijit bir panç ile bastırılmış ve tabanda tam olarak bağlı ağırlıksız çift şerit probleminin incelendiği bu çalışmada; pançın dairesel ve parabolik profillerde olması durumlarında oluşan değme gerilmeleri ve değme yüzeyleri ile pançın yalnız dairesel profilde olması durumunda tabakalarda oluşan σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin dağılımı üzerine varılan sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Dairesel panç durumunda, panç yarıçapı ve yük büyüdükçe, alt tabakanın üst tabakaya oranla yüksekliği arttıkça, pançın değme yüzeyi ve tabakaların birbirlerine değme yüzeyleri büyümektedir. Tabakaların rijitliklerinin artması ve alt tabakanın rijitliğinin üst tabakaya oranla azalmasıyla da değme yüzeyleri büyümektedir. Tabakaların değme yüzeyi her zaman pançın değme yüzeyinden büyük olmakta, bununla beraber yarıçap ve yük değeri arttıkça birbirlerine yakın değerler almaktadırlar. Değme yüzeyleri arttıkça gerilme daha büyük alana yayılacağından değme gerilmeleri azalmaktadır. Tersine olarak değme yüzeyleri azaldıkça gerilmeler artmaktadır. Değme gerilmeleri $x=0$ noktasında en büyük değerlerini alıp, değmenin bittiği noktada sıfır olmaktadır.

Parabolik pançın şekil fonksiyonu, dairesel pançın şekil fonksiyonu ile benzerlik göstermekte, $Ch_2=0.005$ için elde edilen değme yüzeyleri $R/h_2=100$ için bulunan değme yüzeylerine ve $Ch_2=0.05$ için bulunan değme yüzeylerinin, $R/h_2=10$ için bulunan değme yüzeyleri ile hemen hemen aynı değerleri aldıkları görülmektedir. Dolayısıyla dairesel panç için çıkarılan sonuçlar geçerlidir. Yalnız burada eğriliği belirleyen C sabiti olmakta ve bu değer arttıkça değme yüzeyleri küçülmekte ve değme gerilmeleri artmaktadır.

σ_x ve σ_y normal gerilmeleri y simetri ekseni boyunca ve tabakaların ortasında x ekseni boyunca incelenmiştir.

y simetri ekseni boyunca gerilmeler incelendiğinde yarıçapın ve yükün azalması, her iki tabakanın birden rijitliğinin artması sonucu σ_x , σ_y normal gerilme değerlerinin arttığı görülmektedir. Alt tabakanın üst tabakaya oranla rijitliğinin azalmasıyla da σ_y gerilme değerleri her iki tabakada artmakta, σ_x gerilme değerleri ise üst tabakada artmakta alt tabakada ise azalmaktadır. Pançın değme yüzeyi azaldığında tekil yük durumuna yaklaşılmakta ve panç altında σ_x ve σ_y gerilme değerlerinde büyük artış olmaktadır.

y simetri eksenini boyunca σ_x gerilmeleri üstteki tabakanın üst kısımlarında basınç alt kısımlarında ise çekme olarak etkisini göstermektedir. Alt tabakada ise genel olarak üst tabakadakinden küçük basınç gerilmeleri oluşmaktadır. Tabakaların rijitliği az olduğunda alt tabakanın orta kısımlarında çekme gerilmesi bölgesi meydana gelmiştir. Yarıçap, yük değeri arttıkça ve alt tabakanın üst tabakaya oranla rijitliği azaldıkça üst tabakada gerilme yayılışı lineere yaklaşmaktadır. x eksenini boyunca üst tabakanın ortasındaki en büyük gerilme değeri $x=0$ noktasında almakta, alt tabakada ise bu noktadan ilerde oluşmaktadır. Gerilmelerin x'in büyük değerlerinde sıfır olacağı görülmektedir. Alt tabakadaki gerilmeler etkilerini üst tabakadakilere oranla daha geç kaybetmektedirler.

y simetri eksenini boyunca σ_y gerilmeleri en büyük değerlerini simetri kesitinde aldıktan sonra giderek azalmakta ve mesnette belli bir değerde kalmaktadır. Tabakalarda y simetri eksenini boyunca daima basınç gerilmesi hakimdir. Tabakaların değme yüzeylerinde alt ve üst tabakada gerilmeler birbirlerine eşit çıkarak sınır şartı sağlanmıştır. Alt tabakada gerilme en fazla tabakaların birbirlerine göre rijitliklerinin değişiminden etkilenmektedir. Mesnetteki gerilme tabakaların rijitliklerinin eşit olarak değişimiyle farklı değerler almakta diğer incelenen durumlarda ise hemen hemen değişmemektedir. x eksenini boyunca tabakaların ortasında σ_y gerilmesi incelendiğinde; gerilmenin en büyük değerini $x=0$ noktasında aldığı daha sonra x eksenini boyunca azalarak etkisini kaybettiği görülmektedir.

Tabakalar arasında ve panç ile üst tabaka arasında sürtünme olmadığı kabul edildiğinden değme yüzeylerinde kayma gerilmeleri sıfırdır. Simetri nedeniyle y simetri eksenini boyunca kayma gerilmeleri oluşmamaktadır. Bu nedenle y eksenini boyunca kayma gerilmesi dağılımını en büyük değer alabilecekleri yaklaşık bir noktada ($x=0.05$) incelenmiştir. Yarıçap, yük değeri azaldıkça ve tabakaların rijitlikleri birbirlerine eşit olarak azaldıkça kayma gerilmesi değeri artmaktadır. Üst tabakanın rijitliği alt tabakaya oranla büyüdüğünde ise üst tabakada kayma gerilmesi artmakta alt tabakada ise azalmaktadır. Üst tabakadaki kayma gerilmesi değerleri alt tabakadakilerden daha büyük olmakta ve maksimum değerini tabakanın ortasına yakın yerlerde almaktadır. Alt tabakadaki gerilmeler en fazla alt tabakanın rijitliğinin üst tabakaya göre değişmesinden etkilenmişlerdir. Mesnetteki gerilmeler ise daha çok tabakaların rijitliklerinin artması veya azalmasıyla değişmektedirler. x simetri eksenini boyunca tabakaların ortasında kayma gerilmesi dağılımını incelendiğinde gerilmenin $x=0$ için sıfır olduğu x değeri arttıkça artarak maksimum değerini aldığı daha sonra ise azalarak etkinin kaybolduğu görülmektedir. Yarıçap, yük azaldıkça ve alt tabakanın üst tabakaya oranla rijitliği arttıkça gerilmenin

maksimum değerini aldığı nokta y simetri eksenine yaklaşmaktadır. Alt tabakada gerilmenin maksimum olduğu nokta ise tabakaların birbirlerine göre rijitliklerinin değişimi hariç fazla değişmemektedir.

İncelenen bu problem tabakaların ağırlık etkileri göz önüne alınarak üzülebilir. Yine bu problem için pratikte uygulanabilecek malzeme, boyut ve yükler seçilerek sayısal değerler için gerilmeler ve değme uzunlukları bulunabilir.



5. KAYNAKLAR

1. Hertz, H., Gesammelte Werke von Heinrich Hertz, Volume 1, Leipzig, 1895.
2. İnan, M., Düzlemde Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Yayınları, İstanbul, 1969.
3. Kasumov, A. A., Elastisite Teorisi ve Uzay Çubuk, Membran, Plak, Kabuk, Solid Sistemlerin Yapı Statiği , Beta Basım Yayım A.Ş., İstanbul, 2000.
4. Gladwell, G. M. L., Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity, Sijthoff and Noordhoff İnternational Puplichers B.V. , Alphen ann den Rijn, 1980.
5. Galin, L. A., Contact Problems in Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, N. C., 1961.
6. Ufliand, I. S., Survey of Articles on the Application of İntegral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, N. C., 1965.
7. Civelek M.B. ve Erdoğan, F., The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer, International Journal of Solids and Structures, 10 (1974), 639-659.
8. Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai, K.C., Problems Involving a Receding Contact between a Layer and a Half Space, Journal of Applied Mechanics, 39, Transactions of ASME 94 (1972),1115-1120.
9. Geçit, M. R. ve Gökpınar S., Frictionless Contact between an Elastic Layer and a Rijid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10, 3 (1985), 245-251.
10. Boduroğlu, H. ve Delale F., Elastik bir Tabakanın Sürtünmeli Değme Problemi, DOĞA: MAG/ ÇAG (1980), 17-26.
11. Erdoğan, F. ve Ratwani, M., The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, Journal of Applied Mechanics, 41, Transactions of ASME, 96 (1974), 673-677.
12. Kahya, V., Birinci, A. ve Erdöl R., Frictionless Contact Problem between an Elastic Layer Bonded to a Rijid Support and a Rijid Stamp, Mathematical & Computational Applications, 6 ,1 (2001), 13-22.
13. Adams, G. G. ve Bogy, D. B., The Plane Solutions for the Elastic Contact Proble of a Semi-Infinite Strip and Half Plane, Journal and Applied Mechanics, Transactions of Asme, 43 (1977), 603-607.

14. Adams, G. G. ve Bogy, D. B., The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME, (1977), 604-610.
15. Birinci, A. ve Erdöl, R., Üzerinde Rijit Dikdörtgen Bir Blok Bulunan ve Basit Mesnetlere Oturan iki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 151-164.
16. Birinci, A., Kahya V. ve Erdöl, R., Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 165-173.
17. Özşahin, T. Ş. ve Çakıroğlu, A. O., Rijit İki Yarım Daire Blok Üzerine Oturan İki Bileşik Tabakada Temas Problemi, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1997, İstanbul, Bildiriler Kitabı, 377-391.
18. Birinci, A. ve Erdöl, R., Elastik Mesnete Oturan Çift Şerit Problemi, III. Balıkesir Mühendislik-Mimarlık Sempozyumu, Nisan 1995, Balıkesir, İnşaat Mühendisliği Bildirileri, 11-19.
19. Aksoğan, O., Akavcı S. ve Becker A.A., A Comparative Study of the Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 1997.
20. Birinci, A. ve Erdöl R., Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structural Engineering and Mechanics An International Journal, 12, 1 (2001), 17-34.
21. Birinci, E. ve Erdöl, R., Frictionless Contact between a rijid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical & Computational Applications, 4,3 (1999), 261-272.
22. Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., Two Strips Resting on an Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7, 3 (2002), 275-286.
23. Geçit, M. R., A Tensionless Contact without Friction between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16 (1980), 387-396.
24. Geçit, M. R., Axisymmetric Contact Problem for an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Engineering Science, 19 (1981), 747-755.
25. Civelek, M. B. ve Erdoğan, F., The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 42, 97 (1975), 136-140.
26. Dempsey, J. P., Zhao, Z. G. ve Minnetyan, L., Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, 57 (1990), 974-980.

27. Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu, F. L., Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1 (1991), 99-111.
28. Bakırtaş, I., The Problem of a Rigid Punch on a Non-Homogeneous Elastic Half Space, International Journal of Engineering Science, 18 (1980), 597-610.
29. Hung, N. D., ve Saxce G. D., Frictionless Contact of Elastic Bodies by Finite Element Method and Mathematical Programming Technique, Computers & Structures, 11 (1980), 55-67.
30. Aksoğan, O., Akavcı, S. ve Becker, A., A., The Solution of the Nonsymmetrical Contact Problem of an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes Using three Different Methods, Çukurova Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi, 1997.
31. Geçit, M. R. ve Erdoğan, F., Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14 (1973), 771-785.
32. Geçit, M. R., Axisymmetric Contact Problem for a Semi-Infinite Cylinder and a Half Space, International Journal of Engineering Science, 24, 8 (1986), 1245-1255.
33. Johnson, K.L., Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
34. Kahya, V., Üst Tarafından Rijit Olarak Mesnetlenmiş Elastik bir Tabaka ile Rijit bir Blok Arasındaki Sürtünmesiz Değme Problemi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1997.
35. Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. ve Tricomi, F.G., Tables of Integral Transforms, vol 1, Mc Graw-Hill, Inc., New York 1954.
36. Erdoğan, F. ve Gupta, G.D., On the Numerical Solution of Singular Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, (1972), 525-534.
37. Sneddon, I.N., The Use of Integral Transforms, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1972.
38. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
39. Çakıroğlu, A.O., Elastik Yarım Düzleme Oturan Plaklarda Temas Problemi, Doçentlik Tezi, K.T.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon, 1979.
40. Özşahin, T. Ş., Rijit iki Düz Blok Üzerine Oturan Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Değme Problemi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

İsa ÇÖMEZ, 1978 yılında Giresun'da doğdu. İlköğrenimini Kemaliye Köyü İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini ise Gümüşhane M.Ç. Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı ve 2000 yılında lisansını tamamladı. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Ekim 2002' de K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü araştırma görevlisi kadrosuna atandı. Halen araştırma görevliliği ile birlikte lisansüstü çalışmalarına devam etmektedir. Yabancı dil olarak İngilizce bilmektedir.

