

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RİJİT DAİRESEL BİR PANÇ ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARI
SONSUZ DÜZLEME OTURAN İKİ ELASTİK TABAKANIN SÜREKLİ TEMAS
PROBLEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erdal ÖNER

**HAZİRAN 2011
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RİJİT DAİRESEL BİR PANÇ ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARI
SONSUZ DÜZLEME OTURAN İKİ ELASTİK TABAKANIN SÜREKLİ TEMAS
PROBLEMİ**

İnş. Müh. Erdal ÖNER

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“İNŞAAT YÜKSEK MÜHENDİSİ”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31.05.2011
Tezin Savunma Tarihi : 20.06.2011**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında

Erdal ÖNER tarafından hazırlanan

**RİJİT DAİRESEL BİR PANÇ ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARI
SONSUZ DÜZLEME OTURAN İKİ ELASTİK TABAKANIN SÜREKLİ TEMAS
PROBLEMİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 31 / 05 / 2011 gün ve 1407 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından 20/ 06 / 2011 tarihinde yapılan sınavda**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Üye : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Üye : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

“Rijit Dairesel Bir Pauç Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi” isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, öğrencisi olmaktan ve kendisi ile çalışmaktan onur duyduğum danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ' ye minnet ve şükranlarımı sunmayı zevkli bir görev sayarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL' e, Sayın Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU' na, Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN' a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. F. Lütfü ÇAKIROĞLU' na teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardım ve değerli fikirlerini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. T. Şükrü ÖZŞAHİN' e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA' ya ve Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa ÇÖMEZ' e ayrıca teşekkür etmek isterim.

Öğrenim hayatım süresince bana her türlü desteği veren ve beni sabırla destekleyen anneme, babama ve kardeşime müteşekkirdiğimi belirtir, çalışmamın ülkemize faydalı olmasını temenni ederim.

Erdal ÖNER
Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Rijit Dairesel Bir Panç Aracılığıyla Yüklenmiş ve Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan İki Elastik Tabakanın Sürekli Temas Problemi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ’nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/06/2011

Erdal ÖNER

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ BEYANNAMESİ	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER LİSTESİ	IX
TABLolar LİSTESİ.....	XIV
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XV
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi	1
1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	9
1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	10
1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	10
1.2.2. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümlerin Elde Edilmesi	18
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	23
2.1. Problemin Tanımı.....	23
2.2. Kullanılacak Denklemler	24
2.3. Problemin Sınır Şartları	26
2.4. Katsayıların Belirlenmesi.....	27
2.5. İntegral Denklemin Elde Edilmesi	32
2.6. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü	36
2.7. Gerilme ve Yer Değiştirmelerin Bulunması	39
2.7.1. Gerilme Çekirdeklerinin Yakınsama Kontrolü	45
2.8. Tabakalar Arasındaki ve Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıkları	47
3. BULGULAR VE İRDELEME	51

3.1.	Giriş	51
3.2.	Değme Uzunlukları ve Değme Gerilmeleri	51
3.3.	Normal Gerilmelerin ve Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi.....	59
3.3.1.	σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi	59
3.3.2.	σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi	67
3.3.3.	τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi	71
3.4.	Tabakalar Arasındaki ve Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yüklerinin ve Uzaklıklarının İncelenmesi	74
4.	SONUÇLAR	87
5.	KAYNAKLAR.....	91

ÖZGEÇMİŞ

ÖZET

RİJİT DAİRESEL BİR PANÇ ARACILIĞIYLA YÜKLENMİŞ VE ELASTİK YARI
SONSUZ DÜZLEME OTURAN İKİ ELASTİK TABAKANIN SÜREKLİ TEMAS
PROBLEMİ

Erdal ÖNER

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2011, 95 Sayfa

Bu çalışmada, rijit dairesel bir panç aracılığı ile yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı iki elastik tabakanın sürekli temas problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş ve temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Bu bölümde ayrıca, elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak gerilme ve yer değiştirmelerin genel ifadeleri elde edilmiştir. İkinci bölümde problemin tanımı yapılmıştır. Probleme ait sınır şartlarına gerilme ve yer değiştirme ifadeleri uygulanmış, problem panç altındaki temas gerilmesinin bilinmeyen olduğu bir tekil integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklem dairesel panç profili için sayısal olarak çözülmüş ve panç altındaki temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Panç altındaki temas gerilmelerine bağlı olarak da normal gerilmeler ve kayma gerilmesi, x eksenine boyunca σ_x normal gerilmesi, tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde verilen problemin çeşitli boyutsuz büyüklükler için sayısal uygulaması yapılmıştır. Farklı yük, malzeme ve geometrik verilere göre değme gerilmeleri, değme uzunlukları, gerilme bileşenleri, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları sayısal olarak elde edilmiştir. Sonuçlar tablo ve grafikler üzerinde gösterilmiş ve irdelemesi yapılmıştır. Dördüncü bölümde çalışmadan çıkarılan sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastisite Teorisi, Temas Gerilmesi, İntegral Denklem, İntegral Dönüşüm Tekniği, İlk Ayrılma Yükü, İlk Ayrılma Uzaklığı.

Master Thesis

SUMMARY

THE CONTINUOUS CONTACT PROBLEM FOR TWO ELASTIC LAYERS LOADED
BY MEANS OF A RIGID CIRCULAR PUNCH AND RESTING ON AN ELASTIC
HALF INFINITE PLANE

Erdal ÖNER

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Ahmet BİRİNCİ
2011, 95 Pages

In this study, the continuous contact problem for two elastic layers, having different heights and elastic constants, loaded by means of a rigid circular punch and resting on an elastic half infinite plane is considered according to the theory of elasticity. In the first chapter, the historical development of contact problems are mentioned and some studies which are done on contact problems are summarized. In addition, general expressions of stresses and displacements are obtained by using the fundamental equations of theory of elasticity and integral transformation technique. In the second chapter, the problem is described. Stress and displacements expressions are substituted into the boundary conditions of problem and the problem is reduced to a singular integral equation, which the contact stress under the rigid punch is the unknown function. The integral equation is numerically solved for circular punch profile and the contact stress distribution under the punch is obtained. Depending on the contact stresses under the punch, the normal stresses and the shear stress, σ_x along the x axis, initial separation loads and initial separation distances of between elastic layers and between lower layer with elastic half infinite plane are determined. In the third chapter, the numerical applications of the problem given in the previous chapter for various dimensionless quantities are done. The contact stresses, the contact lengths, stress components, initial separation loads and initial separation distances are obtained numerically for different parameters of load, material and geometry. Results are shown and discussed in graphics and tables. In the fourth chapter, the conclusions drawn from this study are given.

Key Words : Theory of Elasticity, Contact Stress, Integral Equation, Integral Transform Technique, Initial Separation Load, Initial Separation Distance

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

- Şekil 1. Rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik tabakalar 23
- Şekil 2. Dairesel panç yarıçapına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$) 54
- Şekil 3. Yük oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının dairesel panç yarıçapı değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$) 55
- Şekil 4. Elastik yarı sonsuz düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 500, \mu_1/(P/h) = 100$) 55
- Şekil 5. Tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 500, \mu_1/(P/h) = 100$) 56
- Şekil 6. Çeşitli panç yarıçapı değerleri için panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, \mu_1/(P/h) = 100, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$) 56
- Şekil 7. Çeşitli yük oranı değerleri için panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 500, \mu_2/\mu_1 = 2, \mu_3/\mu_2 = 2$) 57
- Şekil 8. Tabakaların kayma modüllerinin oranlarına bağlı olarak panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, R/h = 500, h_2/h_1 = 1, \mu_1/(P/h) = 100, \mu_3/\mu_2 = 2$) 57
- Şekil 9. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranlarına bağlı olarak panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 500, \mu_1/(P/h) = 100, \mu_2/\mu_1 = 2$) 58
- Şekil 10. Alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranına bağlı olarak panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, \mu_1/(P/h) = 500, R/h = 100, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$) 58
- Şekil 11. $\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$) 61

Şekil 12.	$\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 100, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$)	61
Şekil 13.	$\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\mu_1/(P/h) = 500, R/h = 500, h_2/h_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$)	62
Şekil 14.	$\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 100, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_2/\mu_1 = 1$)	62
Şekil 15.	$\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kütle kuvvetleri ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 100, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$)	63
Şekil 16.	Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($R/h = 100, \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_3/\mu_2 = 1$)	65
Şekil 17.	Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($R/h = 100, \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_3/\mu_2 = 1$)	65
Şekil 18.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($h_2/h_1 = 1, \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, \mu_2/\mu_1 = 1, R/h = 100, \mu_1/(P/h) = 500$)	66
Şekil 19.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($h_2/h_1 = 1, R/h = 100, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_2/\mu_1 = 1$)	66
Şekil 20.	Tabakaların kütle kuvvetlerine bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($R/h = 100, \mu_1/(P/h) = 500, \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$)	67
Şekil 21.	$\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$)	68
Şekil 22.	$\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 100, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$)	69
Şekil 23.	$\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 100, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_3/\mu_2 = 1$)	69

- Şekil 24. $\sigma_y(0, y) / (P / h)$ boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R / h = 100$, $\mu_1 / (P / h) = 500$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$) 70
- Şekil 25. $\sigma_y(0, y) / (P / h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kütle kuvvetleri ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R / h = 100$, $\mu_1 / (P / h) = 500$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$) 70
- Şekil 26. $\sigma_y(0, y) / (P / h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabaka yüksekliklerinin oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $R / h = 100$, $\mu_1 / (P / h) = 500$, $\mu_2 / \mu_1 = 2$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$) 71
- Şekil 27. $\tau_{xy}(0.5, y) / (P / h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının panç yarıçapı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $\mu_1 / (P / h) = 500$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$) 72
- Şekil 28. $\tau_{xy}(0.5, y) / (P / h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R / h = 100$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$) 73
- Şekil 29. $\tau_{xy}(0.5, y) / (P / h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R / h = 100$, $\mu_1 / (P / h) = 500$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$) 73
- Şekil 30. $\tau_{xy}(0.5, y) / (P / h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R / h = 100$, $\mu_1 / (P / h) = 500$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$) 74
- Şekil 31. $\sigma_y(x, h_2) / (P / h)$ boyutsuz gerilme dağılımının panç yarıçapı ile değişimi ($\mu_1 / (P / h) = 500$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$, $\rho_2 / \rho_1 = 1$) 78
- Şekil 32. $\sigma_y(x, 0) / (P / h)$ boyutsuz gerilme dağılımının panç yarıçapı ile değişimi ($\mu_1 / (P / h) = 500$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$, $\rho_2 / \rho_1 = 1$) 78
- Şekil 33. $\sigma_y(x, h_2) / (P / h)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ($R / h = 100$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$, $\rho_2 / \rho_1 = 1$) 79
- Şekil 34. $\sigma_y(x, 0) / (P / h)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ($R / h = 100$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$, $\rho_2 / \rho_1 = 1$) 79
- Şekil 35. Çeşitli λ yük değerleri için tabakalar arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ($R / h = 500$, $\mu_1 / (P / h) = 100$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$, $\rho_2 / \rho_1 = 1$) 80

Şekil 36.	$\sigma_y(x, h_2) / (P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1, \mu_3/\mu_2=1$)	80
Şekil 37.	$\sigma_y(x, 0) / (P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1, \mu_3/\mu_2=1$)	81
Şekil 38.	$\sigma_y(x, h_2) / (P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1, \mu_2/\mu_1=0.5$)	81
Şekil 39.	$\sigma_y(x, 0) / (P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1, \mu_2/\mu_1=0.5$)	82
Şekil 40.	Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1$)	82
Şekil 41.	Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1$)	83
Şekil 42.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1$)	83
Şekil 43.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1$)	84
Şekil 44.	Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükünün alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1$)	84
Şekil 45.	Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1$)	85
Şekil 46.	Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100, h_2/h_1=1, \mu_1/(P/h)=500, \rho_2/\rho_1=1$)	85

Şekil 47. Alt tabaka-elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$) 86

TABLolar LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Dairesel panç yarıçapı ve yük oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının değışimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2 / h_1 = 1, \mu_2 / \mu_1 = 2, \mu_3 / \mu_2 = 2$)	53
Tablo 2. Tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının değışimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2 / h_1 = 1, R / h = 500, \mu_1 / (P / h) = 100$)	53
Tablo 3. Panç yarıçapının çeşitli değerleri için yarı değme uzunluklarının tabaka yükseklikleri ile değışimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2 / h_1 = 1, \mu_2 / \mu_1 = 1, \mu_3 / \mu_2 = 1, \mu_1 / (P / h) = 500$)	54
Tablo 4. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değışimi ($h_2 / h_1 = 1, R / h = 100, \mu_1 / (P / h) = 500, \rho_2 / \rho_1 = 1$)	76
Tablo 5. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak alt tabaka-elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değışimi ($h_2 / h_1 = 1, R / h = 100, \mu_1 / (P / h) = 500, \rho_2 / \rho_1 = 1$)	76
Tablo 6. Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değışimi ($R / h = 100, \mu_1 / (P / h) = 500, \rho_2 / \rho_1 = 1$)	77
Tablo 7. Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değışimi ($R / h = 100, \mu_1 / (P / h) = 500, \rho_2 / \rho_1 = 1$) ...	77

SEMBOLLER DİZİNİ

a	Rijit pañç ile (1) nolu tabaka arasındaki yarı değme uzunluğu
e	Hacim değıştırme oranı
E	Elastisite modülü
$F(x)$	Rijit pañç profilini tanımlayan fonksiyon
$f(x)$	$F(x)$ fonksiyonunun x ' e göre türevi
X, Y, Z	x, y ve z eksenleri doğrultusundaki kütle kuvveti bileşenleri
x, y, z	Kartezyen koordinatlar
h	Tabakaların toplam yüksekliği
h_1	1 nolu tabakanın (üst tabakanın) yüksekliği
h_2	2 nolu tabakanın (alt tabakanın) yüksekliği
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y ve z eksenlerine paralel doğrultulardaki normal gerilme bileşenleri
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Kayma gerilmesi bileşenleri
m_1	Tabakaların kayma modülleri oranı
m_2	Elastik yarı sonsuz düzlem ile 2 nolu tabakanın kayma modülleri oranı
P	Rijit pañça uygulanan tekil kuvvet
$p(x)$	Rijit pañç altındaki temas gerilmesi fonksiyonu
R	Dairesel pañçın yarıçapı
u, v, w	Kartezyen koordinatlardaki yer değıştırme bileşenleri
x_{cr}	Kritik ayrılma uzaklığı (ilk ayrılma uzaklığı)
∂	Türev operatörü
λ	Lamé sabiti
λ	Yük faktörü
λ_{cr}	Kritik yük faktörü (kritik ayrılma yükü)
μ	Kayma modülü
χ	Malzeme sabiti
ν	Poisson oranı
∇^2	Laplace operatörü
ρ_1	1 nolu tabakanın (üst tabakanın) yoğunluğu

ρ_2	2 nolu tabakanın (alt tabakanın) yoğunluğu
ϕ, ψ	Ters Fourier dönüşüm fonksiyonları
Δ	Katsayılar matrisinin determinantı
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	x, y doğrultularındaki uzama şekil değiştirme bileşenleri
γ_{xy}	Kayma şekil değiştirme bileşeni
δ	Pançın altındaki tabakada meydana gelen en büyük yer değiştirme

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile temas halindedir. Bu temasın karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletiş şekilleri, temas halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, temas uzunlukları ve değme bölgesindeki temas gerilmesi dağılımı yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Demiryolları, akaryakıt tankları, temeller, yol ve havaalanı üst yapıları, tahıl siloları, silindirik miller ve bilyeler temasın söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarından bazılarıdır. Taşıt çarpışmalarının simülasyonu, insan eklemlerinin davranışı gibi konular da temas probleminin uygulama sahasına girmektedir (Çömez, 2009).

Mühendislik yapılarında gerilme ve şekil değiştirme problemlerinin çözümünde çoğu zaman elemanter teori yetersiz kalmakta, elastisitenin karışık ve uzun ifadelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Elemanter teoriye göre daha kesin sonuç veren elastisite teorisi yardımıyla problemlerin çözümü, bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine paralel olarak yoğunluk kazanmış ve bu konudaki çalışmaların sayısında önemli ölçüde artış kaydedilmiştir. Son yıllarda integral dönüşüm teknikleri, sonlu elemanlar, sınır elemanları ve sonlu farklar gibi yöntemler kullanılarak temas problemleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda tabakalar (kirişler) genellikle elastik yarım düzlem ya da rijit sürekli temel üzerine oturmuştur. Ancak elastik tabakaların rijit mesnetlere, elastik çeyrek düzlemlere vs. oturduğu çalışmalar da mevcuttur.

1.1.1. Temas Problemlerinin Tarihsel Gelişimi

Değme mekaniği konusunun, Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan "On the contact of elastic solids" adlı makaleyle başladığı söylenebilir (Johnson, 1985). Sürtünmesiz yüzeyler ve tam elastik cisimleri çalışmalarına konu edinen Hertz, iki elastik cismin birbirine değmesi durumunda değme bölgesinin eliptik olduğunu kabul etmiş, şekil değiştirme ve değme gerilmelerini incelemiş, ayrıca bulduğu sonuçları rijit düzleme oturan farklı geometrilere sahip problemlere uygulamıştır. Bu tip problemler Hertz değme problemi olarak adlandırılmıştır.

Değme problemleri üzerine yapılan çalışmalar, kompleks değişkenler yönteminin Muskhelishvili tarafından geliştirilmesi (Muskhelishvili, 1953) ve özellikle Sneddon' un integral dönüşüm tekniklerini elastisite teorisinde kullanmasıyla (Sneddon, 1951) artmaya başlamıştır. Değme problemi ile ilgili çalışmaların 1950'li yıllara kadar olan literatürü ve çözüm yöntemleri Galin' in eserinde belirtilmiştir (Galın, 1961). İntegral Dönüşüm Tekniklerinin bu probleme uygulanma yöntemleri ise Uffliand' ın eserinde verilmiştir (Uffliand, 1965).

Weitsman (1969), elastik yarım düzlem ve plak arasında değme bölgesinin uzunluğu ile ilgili bilgi sağlamak amacıyla elastik plak ve elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki sürekli değmeyi incelemiştir. Yarım düzleme oturan plak ağırlıksız kabul edilip, sınırlama olmaksızın elastik düzleme merkezi bir yük ile bastırılmıştır. Sınırlama olmadığından çekme gerilmeleri plak ve elastik mesnet arasında ara yüzeylerde aktarılmamıştır.

Dhaliwal (1970), rijit bir blok ile bastırılan yarı sonsuz düzlem problemini pançın dairesel profilde olması durumunda incelemiştir. Karışık sınır değer problemi ikinci tip Fredholm integral denkleme indirgenmiş, kuvvet serileriyle ve sayısal yöntemlerle integral denklem çözülmüştür. Rijit pançın silindirik, konik, küresel, parabolik ve eliptik olması durumları için çözüm genişletilmiş, her bir panç profili için pançın elastik tabakada meydana getireceği çökmeyi sağlayabilecek kuvvetin değeri, bu çökmenin miktarı, serbest yüzeydeki yer değiştirmenin değişimi ve değme gerilmesini veren ifadeler elde edilmiştir (Dhaliwal ve Rau, 1970). Elde edilen ifadelerden faydalanarak, sayısal çözümler grafiklerle verilmiştir (Dhaliwal ve Rau, 1972).

Conway (1971), iki sabit silindir ile bastırılan ve silindirler arasından bir kuvvetle yatay olarak çekilen tabakanın sürtünmeli değme problemini incelemiştir. Sürtünmenin normal değme gerilmesine etkisi incelenmiş ve bu etkinin çok az miktarlarda olduğu görülmüştür.

Keer ve Chantaramungkom (1972), elastik düzlem ile elastik tabaka arasında sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Tabakanın belirli bir uzunluğu dışında tüm yüzeyi ünüform yayılı yük ile yüklenmiş olup tabaka ile düzlem arasında yayılı yükün etki etmediği mesafeden daha küçük bir ayrılma bölgesi meydana geleceği kabul edilerek, problem Papkovich-Neuber potansiyelleri kullanılarak çözülmüştür.

Chen ve Engel (1972), elastik yarım düzlemle sınırlandırılmış çok tabakalı düzlemin gerilme analizini, farklı panç profilleri ve tabaka kalınlıklarının farklı değerleri için incelemiştir.

Keer vd. (1972), yayılı yük ile yüklenmiş ve elastik yarım düzlem üzerine oturan, sonsuz uzunluklu elastik tabakanın değme problemini ele almışlardır. Gerilme ve yer değiştirmeler Papkovich-Neuber potansiyelleri cinsinden yazılmış, integral dönüşüm teknikleri kullanılarak, düzlem gerilme problemi ve dönel simetrik problem olarak çözümler bulunmuştur.

Erdoğan ve Ratwani (1974), iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik tabakada sürtünmesiz değme problemini ele almışlardır. Çalışmada, değme bölgesinin dış yükün büyüklüğünden bağımsız, fakat, yük genişliğine bağlı olduğu gösterilmiştir. Problem genelleştirilmiş Cauchy çekirdekli bir tekil integral denkleme indirgenmiş ve çeşitli sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Civelek ve Erdoğan (1975), rijit bir düzleme oturan ve doğrusal yayılı yük etkisi altındaki elastik tabakanın simetri ekseninden bir tekil yükü kaldırılması problemini ele almışlardır. Çözümde tabakanın ağırlığı hesaba katılmıştır. Önce tabakanın rijit düzlemde ayrılmasına sebep olan en küçük yük değeri belirlenmiş ve ardından süreksiz değme problemi tekil integral denkleme indirgenerek, kritik yükten büyük yükler için meydana gelen ayrılma bölgesi ve gerilme dağılışı sayısal olarak elde edilmiştir.

Spence (1975), dikdörtgen veya eğrisel profillerdeki dönel simetrik pançla bastırılan elastik yarım düzlemin sürtünmeli değmesinin, Coulomb'un sürtünme kanununa göre karışık sınır değer problemi olarak formülasyonunu yapmıştır.

Adams ve Bogy (1977), farklı elastik özelliklere sahip yarım düzlem ile yarı sonsuz tabaka arasındaki değme problemini incelemiştir. İntegral denklemleri çıkarılmış sonuçlar çeşitli kalınlık oranları için verilmiştir. Değme gerilmeleri hesaplanarak grafiklerle sunulmuştur.

Geçit ve Erdoğan (1978), elastik bir tabakanın rijit bir düzlem üzerine oturduğu ve aksel simetrik yük etkisinde olduğu sürtünmesiz temas problemini incelemişler, ayrılma bölgesinin büyüklüğü ve temas gerilmesinin dağılımı ile ilgili sonuçları vermişlerdir.

Agarwal (1978), sonlu uçlarıyla birbirlerine birleştirilmiş ve bu uçlardan uzakta etki ettirilen yayılı yük ile çekilmeye çalışan yarı sonsuz silindirlerin dönel simetrik değme problemini ele almışlardır. İntegral dönüşüm teknikleri ile sonsuz uzunluklu silindir ve yarım düzlem çözümlerinin süperpozisyonundan yararlanılarak problem lineer denklem takımına indirgenerek çözülmüştür. Değişik malzeme özellikleri için silindirlerin ara yüzlerindeki normal ve kayma gerilmesi dağılımları elde edilmiştir.

Adams (1978), elastik yarım düzlem üzerine oturan bir elastik tabakanın üzerinde sabit hızla hareket eden tekil yük problemini ele almıştır. Araştırmacı, problemin simetrik ve simetrik olmayan iki problemin toplamı şeklinde düşünülebileceğini göstererek, elde ettiği bu yeni karışık sınır değer problemlerini integral denklemlere indirgemiş ve çözüm yapmıştır.

Çakıroğlu (1979), elastik yarım düzleme oturan elastik tabakanın rijit düz bir blokla bastırılması ile meydana gelen sürekli ve süreksiz değme problemlerini incelemiştir. Çözümde kütle kuvvetleri hesaba katılmıştır. Blok altındaki değme gerilmesi, ilk ayrılma uzaklığı ve ilk ayrılma yükü, bu yükten büyük yükler için meydana gelen ayrılma bölgesinin uzunluğu ve açılma miktarı ile gerek sürekli gerekse süreksiz değme problemleri için tabaka-yarım düzlem ara yüzeyindeki değme gerilmesi yayılışına ait sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Geçit (1980), elastik tabaka ile elastik yarım düzlem arasındaki sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Elastik tabaka üst tarafından düzgün yayılı yük ile yüklenmiş ve bu yüke ilaveten tabakayı kaldırmaya çalışan veya tabakayı bastıran tekil yük etki ettirilmesi durumları için ayrı ayrı çözümler yapılarak ilk ayrılmayı başlatan kritik yük ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki değme gerilmesi yayılışı elde edilmiştir.

Comninou vd. (1980), yarı sonsuz düzlemle aynı malzeme özelliklerine sahip elastik sonsuz tabakanın sürtünmeli değme problemini incelemişlerdir. Düzgün yayılı yük ile düzleme bastırılırken tekil yük de kaldırılan tabakanın, düzlemle yapışık kaldığı ve kaydığı bölgeler bulunarak sürtünmenin normal gerilme ve kayma gerilmelerine etkisi incelenmiştir.

Eğrisel bir pañç ile kenarlarından basit veya ankastre mesnetlere oturan dairesel plağın değme problemi Keer ve Miller (1983) tarafından incelenmiştir. Pañç ile plağın temas uzunluğu bilinen olarak alınmış, elastik sonsuz tabakanın elastisite teorisi çözümü ile mesnet tepkilerini karşılayabilmek için basit eğilme etkisindeki plağın plak teorisine göre çözümünün süperpozisyonu alınarak yaklaşık bir çözüm geliştirilmiştir. Bulunan değme gerilmesi değerleri Hertz Teorisi ve Plak Teorisi ile karşılaştırılmış ve yöntemlerden elde edilen sonuçlar arasında çok yakın değerler elde edilemediği görülmüştür.

Adams ve Zied (1984), elastik yarım düzlem üzerinde sabit hızla hareket eden elastik yarı sonsuz şerit problemini çözmüşlerdir. Araştırmacılar, düzlem elastisite teorisini kullanarak, ara yüzeydeki değme gerilmesi dağılımını değişik malzeme kombinasyonları,

ve sürtünme katsayıları için elde etmişlerdir. Çalışmada, hem gerilme şiddeti faktörünün hem de gerilme tekilliğinin kayma hızı ile ilişkisi ortaya konulmuştur.

Keer vd. (1984), elastik çeyrek düzlem ve bu düzlemin üzerine oturan rijit bloğun sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Problemin sayısal çözümü için tahmini bir değme bölgesi tayin edilmiş ve değme bölgesi dikdörtgensel bölgelere ayrılarak her bir bölgedeki gerilmenin sabit olduğu düşünülmüştür. Bu şekilde integral denklem lineer denklem sistemine dönüştürülerek iterasyonlar sonucunda gerçek değme bölgesi ve değme bölgesindeki gerilme dağılımı elde edilmiştir.

Fabrikant ve Sankar (1984), homojenliği derinliğiyle değişen elastik yarım düzlem probleminin kesin çözümünü dönele simetrik problem olarak araştırmışlardır. Panç problemi verilen çözüm yöntemiyle ele alınmış ve panç altındaki değme gerilmesini veren ifadeler elde edilmiştir.

Geçit ve Gökpınar (1985), rijit dairesel bir mesnete oturan elastik bir tabakanın değme problemini incelemiştir. Tabaka ile mesnet arasında sürtünme olmadığı ve değme yüzeyleri boyunca sadece basınç gerilmelerinin aktarıldığı varsayılmıştır. Tabakaların üst yüzeyine üniform bir basınç uygulanmış, farklı blok şekilleri için değme yüzeyindeki gerilme yayılımı, değme uzunluğu ve normal gerilmeler hesaplanmıştır.

Loboda ve Tauchert (1985), alttan tam bağlı, sonsuz uzunluklu ortotropik tabakaya sonlu ucuyla oturan yarı sonsuz ortotropik tabakanın, yapışık ve yapışık olmayan değme problemini incelemiştir. Değme bölgesinden sonlu bir mesafede yarı sonsuz tabakayı boyuna veya enine çekmeye çalışan simetrik tekil kuvvetler etkisinde ara yüzdeki normal ve kayma gerilmelerinin dağılımı elde edilmiştir.

Geçit (1986), elastik yarı sonsuz dairesel silindir ile bir elastik yarım düzleme oturan tabaka için eksenel simetrik değme problemini çözmüştür. Sürtünme olmadığı ve çekme gerilmelerinin değme yüzeyi boyunca aktarılmadığı kabul edilmiştir. Yer değiştirme ve gerilmeler integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiştir. Sayısal çözümler yapılmış değişik malzeme özellikleri ve kesit boyutları için değme uzunlukları, değme gerilmesi dağılımları bulunmuş, grafiklerle sunulmuştur.

Geçit ve Yapıcı (1986), rijit düz bloklar üzerine oturan elastik tabaka problemini ele almışlardır. Sürekli ve süreksiz değme problemleri ayrı ayrı incelenerek, değme gerilmesi, eksenel gerilme ve ayrılma bölgesi ile ilgili sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Fabrikant ve Sankar (1986), simetri eksenini boyunca herhangi bir noktadan tekil yüke maruz enine izotropik elastik yarım düzlem ile rijit dairesel blok arasındaki etkileşim problemini incelemişlerdir.

King ve O'Sullivan (1987), rijit dairesel pançla bastırılan, tabakalı elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemini ele almışlardır. Tek bir tabaka ve elastik yarım düzlemin değme problemi düzlem şekil değiştirme hali için detaylı olarak incelenmiş ara yüzdeki gerilme dağılımları incelenmiştir. Tabakanın membran yaklaşık çözümü de bulunmuş ve diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Nowell ve Hills (1988), bir hibrid metot kullanarak, ince bir elastik şerit ile simetrik yerleştirilmiş tekerlekler arasında meydana gelen düzlemsel değme problemini ele almışlardır. Araştırmacılar, sürtünmesiz ve sürtünmeli değme problemleri için yüzey gerilmelerini elde etmişler; ayrıca, yapışma ve kayma bölgelerinin detaylı bir analizini yapmışlardır.

Blaibel ve Geçit (1989), serbest kenarları kısa uç boyunca moment etkisindeki sonsuz şeritle sınırlı yarı sonsuz şeritin eğilme problemini ele almışlardır. Sonsuz şerit alt bölgesinden rijit mesnetle sınırlandırılmış olup her iki malzeme de izotropiktir. Problem integral dönüşüm tekniği yardımı ile çözülmüştür.

Sabin ve Kaloni (1989), elastik yarım düzlem üzerinde düşey eksenini etrafında dönen rijit bir cismin değme problemini sürtünmeyi de hesaba katarak ikinci merteye elastisite teorisi ile çözmüşlerdir. Blok altındaki değme gerilmesi, yüzey yer değiştirme şekli, batma derinliği ve bloğu döndürmek için gerekli momentle ilgili genel formülasyon sunulmuştur.

Çakıroğlu ve Erdöl (1989), çalışmalarında elastik zemine oturan malzeme sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın birbiri üstüne oturtulmasından meydana gelen bileşik tabaka problemini çözmüşlerdir. Bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu, elastik zemine ait kütle kuvvetinin olmadığı kabul edilmiştir. Ayrıca tabakalar üstten düzgün yayılı yük ve tekil yük ile kendi ağırlığı etkisi altında bulunmakta olup gerilmeler, yer değiştirmeler, ilk ayrılma uzaklıkları ve bu ilk ayrılmayı meydana getiren dış yüklere ait nümerik sonuçlar elde edilmiştir.

Çakıroğlu (1990), elastik yarı sonsuz düzleme oturan bileşik tabakaların temas problemini incelemiştir.

Dempsey vd. (1990), Winkler temeline oturan sonsuz uzunluktaki elastik tabakanın değişik yüklemeler altındaki değme problemini ele almışlardır. Tabakaya üst kısmından tekil yük veya düzgün yayılı yük etki etmesi, tekil yükün eğrisel bir blok veya dikdörtgen

blok aracılığıyla tabakaya iletilmesi durumları, elastisite teorisi ve kiriş teorisine göre ayrı ayrı çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Tabakanın karakteristik uzunluğunun yüksekliğine oranı (bağıl rijitlik oranı) sekiz veya daha büyük değerlerde olması halinde her iki çözümün birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Çakıroğlu ve Çakıroğlu (1991), yarı sonsuz düzlem ile elastik bir tabaka arasındaki sürekli ve süreksiz değme problemini çözmüşlerdir. Uygulanan yük ilk ayrılmayı sağlamış, değme yüzeyinde gerilme dağılımları uzunluğun genişliğe oranının farklı değerleri ve malzeme özellikleri için grafiklerle ifade edilmiştir. Süreksiz değme durumu için tekil integral deklemler elde edilmiş ve bu denklem Gauss-Chebyshev integrasyon yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür.

Binienda ve Pindera (1994), Metal-matriks ve polimer-matriks kompozit yarım düzlemlere, rijit parabolik bir pançla bastırıldığında gösterdikleri davranışın benzerliklerini ve farklılıklarını araştırmışlardır. Değme bölgesinde normal gerilme dağılımı ve değme uzunluğunun yük ile değişimini incelemişler, ayrıca malzeme özelliklerinin etkilerini izotropik, ortotropik, monoklinik tabakalardan oluşturulan yarım düzlemlerin sürtünmesiz değme problemleri için geliştirilen bir metotla analiz etmişlerdir.

Urquart ve Pindera (1994), Elastik yarım düzleme oturan ve rijit dikdörtgen bir panç aracılığıyla yüklenen anizotropik tabakaların değme problemini incelemişlerdir.

Elastik zemine oturan, malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı birbirine tam bağılı iki tabakadan oluşan bileşik tabakada sürekli değme problemi Birinci vd. tarafından incelenmiştir (Birinci vd., 1997).

Birinci ve Erdöl (1999), basit mesnetler üzerine oturan ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın sürtünmesiz değme problemini incelemişlerdir. Bileşik tabaka dairesel veya dikdörtgen blok aracılığıyla mesnetlere bastırılmış, her iki blok profili için problem çözülmüş değme uzunlukları, değme gerilmeleri elde edilmiştir.

Özşahin (2000), rijit iki düz blok üzerine oturan, sonlu bir bölgede etki ettirilen yayılı yük ile bastırılan iki elastik tabakalı bileşik tabakada sürekli ve süreksiz değme problemini ele almıştır. Sürekli değmede iki elastik tabaka arasında sürtünme bulunması ve bulunmaması hallerinde ilk ayrılmayı meydana getiren kritik yük bulunmuştur. Süreksiz değme probleminde sürtünme dikkate alınmamış, ayrılmanın iki elastik tabaka arasında veya bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında meydana gelmesi durumları için problem çözülmüştür.

Çakıroğlu vd. (2001), iki elastik tabakanın Winkler zemini yerine elastik yarım düzleme oturması durumunda sürekli ve süreksiz değme problemlerini incelemişlerdir.

Kahya vd. (2001), dairesel, parabolik ve dikdörtgen olarak alınan farklı pañç profilleri için rijit bir temele oturan elastik tabakanın değme problemini kütle kuvvetleri ve sürtünmeyi ihmal ederek çözmüşlerdir.

Birinci vd. (2002), elastik temele oturan, farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip iki malzemedен yapılmış tabakalara ait problemi elastisite teorisine göre incelemişlerdir. Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri integral dönüşüm teknikleri kullanılarak elde edilmiş, tabakaların herhangi bir noktasında gerilme ve yer değiştirme değerleri araştırılarak grafikleri çizilmiştir.

Kahya (2003), rijit düz bir temel üzerine yapıştırılmış, üst tarafından sonlu yayılı yükü bastırılan iki ortotrop, elastik ve sonsuz uzunluklu tabakadan meydana gelen bileşik tabakada sürekli ve süreksiz değme problemini incelemiştir. Tabakalar arasında ilk ayrılmayı başlatan kritik yük değeri, ilk ayrılma uzaklığı, kritik yükün aşılması durumunda tabakalar arasında meydana gelen ayrılma bölgesinin büyüklüğü, açılma miktarı ve her iki problem için tabakaların ara yüzeyindeki değme gerilmesi yayılışı elde edilmiştir.

Alt tarafından rijit olarak mesnetlenmiş yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve rijit pañçın sürtünmesiz değme problemi Çömez vd. (2003,2004) tarafından incelenmiştir.

Güler ve Erdoğan (2004; 2007), fonksiyonel derecelendirilmiş özellikteki tabaka ile kaplı olan elastik yarım düzlemin sürtünmeli değme problemini incelemişlerdir. Kayma modülü derinliği boyunca üstel olarak değişen tabakaya, düşey ve yatay kuvvetler dikdörtgen ve eğrisel profillerde olan değişik şekillerdeki pañçların aracılığıyla etki ettirilmiştir. Problem integral dönüşüm tekniği kullanılarak bir tekil integral denkleme dönüştürülerek gerilme dağılımları elde edilmiştir.

Kahya vd. (2007), rijit bir pañçla anizotrop elastik yarım düzleme oturan anizotrop elastik tabakanın değme problemini incelemişlerdir. Problem değme uzunluğunun ve değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiştir.

Özşahin vd. (2007), rijit iki düz blok üzerine oturan değişik elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip tabakalardan oluşan sistemin sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisine göre çözmüşlerdir. Bileşik tabaka üst yüzeyinden sınırlı bir bölgede yayılı basınç yükünün etkisinde bırakılmış, bileşik tabaka ile rijit düz bloklar arasında sürtünmenin bulunmadığı kabul edilirken, tabakalar arasındaki sürtünme dikkate

alınmıştır. Problem değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denkleme indirgenmiş ve bu denklem sayısal olarak çözümlenerek sonuçları grafiklerle sunulmuştur.

Adıbelli vd. (2009), rijit pañç ile bastırılmış ve elastik yarım düzleme oturmuş ağırlıksız çift şeritte sürtünmesiz değme problemini araştırmışlardır.

1.1.2. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmada, rijit dairesel bir pañç aracılığı ile yüklenmiş ve elastik yarım sonsuz düzleme oturan, homojen, izotrop, elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı, yapışık olmayan iki elastik tabakanın sürekli temas problemi elastisite teorisine göre incelenmektedir.

Çalışmanın amacı söz konusu temas probleminde değme uzunluklarını, rijit pañç ile üst tabaka arasında oluşacak değme gerilmesi dağılımlarını, tabakaların ve elastik yarım sonsuz düzlemin herhangi bir noktasında normal gerilme ve kayma gerilmesi değerlerini elde etmek, tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarım sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerini ve ilk ayrılma uzaklıklarını belirlemektir.

Birinci bölümde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş, temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Yine bu bölümde, elastisite teorisine ait temel denklemler ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak düzlem haldeki genel gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde problemin tanımı yapılmıştır. Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri problemin sınır şartlarına uygulanarak on bilinmeyenli on cebrik denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiştir. Pañç altındaki değme gerilmesi yayılışı bilinmeyenidir. Pañç ile (1) nolu tabaka arasındaki düşey yer değiştirme fonksiyonunun türevinin, pañç profilini tanımlayan fonksiyonun türevine eşit olması şartı kullanılarak problem bir singüler integral denkleme indirgenmiştir. Daha sonra bu integral denklem rijit pañç profilinin dairesel olması durumu için sayısal olarak çözülmüş ve pañç altındaki boyutsuz temas gerilmeleri hesaplanmıştır. Bu boyutsuz temas gerilmelerinden faydalanılarak simetri eksenini boyunca normal gerilmelerin ve bu eksen yakınlarındaki kayma gerilmesinin değişimi incelenmiştir. Ayrıca x eksenini boyunca tabakalar arasındaki ve 2 nolu tabaka ile elastik yarım sonsuz düzlem arasındaki σ_x normal gerilmesi dağılımı araştırılmış, tabakalar

arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir.

Üçüncü bölümde, probleme ilişkin sayısal uygulamalar yapılmıştır. Farklı yük, malzeme ve geometrik verilere göre panç altındaki değme gerilmeleri, değme uzunlukları, gerilme bileşenleri, ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları sayısal olarak elde edilmiş, bunların değişimleri tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Yine bu bölümde elde edilen sonuçlar irdelenmiştir.

Dördüncü bölümde çalışmadan çıkarılan sonuçlar sıralanmıştır. Bu son bölümü yararlanan kaynaklar izlemektedir.

1.2. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda, elastisite teorisinden yararlanılarak gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla, önce bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılmak suretiyle denge denklemleri, yer değiştirmeler cinsinden yazılarak Navier denklemleri elde edilecektir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümü sonucunda da yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri bulunacaktır. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri belirlenecektir.

1.2.1. Kütle Kuvvetlerinin Bulunmaması Durumunda Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Üç boyutlu halde X, Y ve Z kütle kuvvetlerini, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ ve τ_{yz} de gerilme bileşenlerini göstermek üzere, denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Bu denklemlerde geçen gerilme bileşenleri, bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (9)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen u , v ve w sırasıyla x , y ve z doğrultularındaki yer değiştirmeleri göstermektedir. Ayrıca e hacim değiştirme oranını, λ ve μ ise Lamé sabitlerini göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (11)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

(11) ve (12) nolu denklemlerdeki E ve ν sırasıyla elastisite modülü ve Poisson oranını göstermektedir. Ayrıca $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ve $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ olduğu bilinmektedir. (4-9) denklemlerinin gerekli türevleri alınıp (1-3) denge denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa Navier denklemleri olarak adlandırılan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0 \quad (13)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0 \quad (14)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z = 0 \quad (15)$$

Bu denklemlerde ∇^2 , Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (16)$$

İki boyutlu problemlerde z ile ilgili terimler düşeceğinden Navier denklemleri,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0 \quad (17)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = 0 \quad (18)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadelerdeki hacim değiştirme oranı e ve Laplace operatörü ∇^2 'nin iki boyutlu halde,

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (19)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (20)$$

şeklini alacağı açıktır. Eğer kütle kuvvetleri ihmal edilecek olursa düzlem halde Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \quad (21)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0 \quad (22)$$

Problemin yük, malzeme ve geometri olarak y eksenine göre simetrik olması durumunda, u ve v yer değiştirmeleri aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar.

$$u(x, y) = -u(-x, y) \quad (23)$$

$$v(x, y) = v(-x, y) \quad (24)$$

Navier denklemlerinin kısmi türevli diferansiyel denklem takımı oluşturması problemin çözümünü zorlaştırmaktadır. Navier denklemlerini adi diferansiyel denklem takımına dönüştürmek ve çözümü kolaylaştırmak için yer değiştirmeler $u(x, y)$ ve $v(x, y)$, bilinmeyen fonksiyonlar $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ ' nin Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümleri olarak tanımlanırlarsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (25)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (26)$$

(25) ve (26) nolu denklemlerin ters dönüşümleri ise,

$$\phi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} u(x, y) \sin(\alpha x) dx \quad (27)$$

$$\psi(\alpha, y) = \int_0^{\infty} v(x, y) \cos(\alpha x) dx \quad (28)$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmeyen $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonlarının belirlenebilmesi için (21) nolu denklem $\sin(\alpha x) dx$, (22) nolu denklemde $\cos(\alpha x) dx$ ifadeleri ile çarpılıp $(0, \infty)$ aralığında integrale edilirse,

$$\int_0^{\infty} \left[\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \sin(\alpha x) dx = 0 \quad (29)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] \cos(\alpha x) dx = 0 \quad (30)$$

ifadeleri elde edilir. (27) ve (28) nolu denklemlerde u ve v ' nin gerekli türevleri alınırsa,

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 \phi \quad (31)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin(\alpha x) dx = \frac{d^2 \phi}{dy^2} \quad (32)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \sin(\alpha x) dx = -\alpha \frac{d\psi}{dy} \quad (33)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \psi \quad (34)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \cos(\alpha x) dx = \frac{d^2 \psi}{dy^2} \quad (35)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos(\alpha x) dx = \alpha \frac{d\phi}{dy} \quad (36)$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitliklerin elde edilmesinde kısmi integrasyon uygulanmış ve aşağıdaki sınır şartları dikkate alınmıştır.

$$u(0) = u(\infty) = v(\infty) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\infty} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (37)$$

(31-36) nolu denklemler olarak elde edilen türev ifadeleri (29) ve (30) nolu denklemlerde yerlerine konular ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-(\tilde{\lambda} + 2\mu)\alpha^2\phi + \mu\phi'' - (\tilde{\lambda} + \mu)\alpha\psi' = 0 \quad (38)$$

$$(\tilde{\lambda} + 2\mu)\psi'' - \alpha^2\mu\psi + (\tilde{\lambda} + \mu)\alpha\phi' = 0 \quad (39)$$

adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur. Bu adi diferansiyel denklem takımında üsler y' ye göre türevleri göstermektedir. (38) nolu denklem y' ye göre iki defa, (39) nolu denklemde y' ye göre bir defa türetilirse,

$$-(\tilde{\lambda} + 2\mu)\alpha^2\phi'' + \mu\phi^{IV} - (\tilde{\lambda} + \mu)\alpha\psi''' = 0 \quad (40)$$

$$(\tilde{\lambda} + 2\mu)\psi''' - \alpha^2\mu\psi' + (\tilde{\lambda} + \mu)\alpha\phi'' = 0 \quad (41)$$

denklemleri elde edilir. (40) nolu denklemden ψ''' çekilip (41) nolu denklemde yerine konulursa,

$$(\tilde{\lambda} + 2\mu) \frac{1}{\alpha(\tilde{\lambda} + \mu)} \left[\mu\phi^{IV} - (\tilde{\lambda} + 2\mu)\alpha^2\phi'' \right] - \alpha^2\mu\psi' + (\tilde{\lambda} + \mu)\alpha\phi'' = 0 \quad (42)$$

yazılabilir. Bu denklemlerden de ψ' çekilip (38) nolu denklemde yerine yazılır ve düzenlenirse ϕ' ye göre dördüncü mertebeden sabit katsayılı, lineer, homojen diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi^{IV} - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi = 0 \quad (43)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü $\phi = e^{sy}$ şeklinde aranır ve bu çözümün gerekli türevleri alınıp (43) nolu denklemde yerine yazılırsa karakteristik denklem,

$$s^4 - 2\alpha^2s^2 + \alpha^4 = 0 \quad (44)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin kökleri ise $s_1 = s_2 = \alpha$ ve $s_3 = s_4 = -\alpha$ olarak belirlenir. Bu durumda (43) nolu adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi(\alpha, y) = (A_1 + A_2y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4y)e^{\alpha y} \quad (45)$$

$\psi(\alpha, y)$ bilinmeyen fonksiyonunun çözümü için (38) nolu denklemin y' ye göre bir defa türevi alınıp, elde edilecek denklemden ψ'' ifadesi çekilerek (39) nolu denklemde yerine yazılırsa, $\psi(\alpha, y)$ bilinmeyen fonksiyonu, $\phi(\alpha, y)$ fonksiyonuna ve türevlerine bağlı olarak bulunur. Buradan gerekli türevler alınır ve yerlerine konulduktan sonra benzer işlemler yapılırsa,

$$\psi(\alpha, y) = \left[A_1 + \left(\frac{\chi}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\chi}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \quad (46)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte geçen χ bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde $\chi = (3-4\nu)$, düzlem gerilme halinde ise $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ olduğu bilinmektedir. $\phi(\alpha, y)$ ve $\psi(\alpha, y)$ fonksiyonları sırasıyla (25) ve (26) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme ifadeleri kütle kuvvetsiz halde aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$u_h(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(A_1 + A_2 y) e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (47)$$

$$v_h(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[A_1 + \left(\frac{\chi}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\chi}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (48)$$

Yukarıdaki eşitliklerde geçen A_1, A_2, A_3 ve A_4 bilinmeyen sabit katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından elde edileceklerdir.

σ_x, σ_y ve τ_{xy} kartezyen gerilme bileşenlerinin bünye denklemleri yardımıyla, u ve v yer değiştirmeleri cinsinden (4), (5) ve (7) nolu denklemlerin daha açık bir ifadesi olarak aşağıdaki gibi yazılabileceği bilinmektedir.

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \quad (49)$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (50)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (51)$$

u ve v yer değiştirme fonksiyonlarının gerekli türevleri alınıp (49), (50) ve (51) nolu denklemler ile verilen gerilme-yer değiştirme bağıntılarında yerlerine yazılırlarsa, kütle kuvvetsiz halde gerilme bileşenleri,

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{x_h}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[\alpha (A_1 + A_2 y) - \left(\frac{3-\chi}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{3-\chi}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (52)$$

$$\frac{1}{2\mu} \sigma_{y_h}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi+1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{\chi+1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (53)$$

$$\frac{1}{2\mu}\tau_{xy_h}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\left[\alpha(A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi-1}{2}\right)A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\chi-1}{2}\right)A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (54)$$

olarak belirlenebilir. h indisi kütle kuvvetsiz durumda homojen çözümden elde edilen gerilme bileşenlerine ait ifadeleri göstermektedir.

1.2.2. Kütle Kuvvetlerinin Bulunması Durumunda Özel Çözümlerin Elde Edilmesi

Kütle kuvvetlerinin hesaba katılması durumunda genel denklemlere ilave edilecek gerilme ve yer değiştirmelere ait özel çözümlerin elde edilmesi aşağıda verilmiştir. Kütle kuvvetlerinin $X=0$ ve $Y=\rho g$ olması durumunda Navier denklemleri,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \quad (55)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - \rho g = 0 \quad (56)$$

olarak yazılabilir. (56) nolu denklemde ρ tabakanın yoğunluğunu, g ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Navier denklemleri daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (57)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \rho g \quad (58)$$

Yer değiştirmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (59)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (60)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (61)$$

olarak bilinmektedir. Bu denklemlerde $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ sırasıyla x ve y eksenleri doğrultularındaki uzama şekil değiştirme bileşenlerini gösterirken, γ_{xy} ' de kayma şekil değiştirme bileşenini göstermektedir. Şekil değiştirmelerle gerilmeler arasındaki ilişkiyi ifade eden Hooke kanunları da düzlem hal için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (62)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (63)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad (64)$$

Yer değiştirme fonksiyonları $u = u(x)$ ve $v = v(y)$ olarak seçilirse ve gerekli türevleri alınıp (57) ve (58) nolu eşitliklerle verilen Navier denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa (57) nolu denklemden ,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (65)$$

$$\frac{du}{dx} = a \quad (66)$$

$$u = ax + b \quad (67)$$

ve (58) nolu denklemden de,

$$(\tilde{\lambda} + 2\mu) \frac{d^2v}{dy^2} = \rho g \quad (68)$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{\rho g}{(\tilde{\lambda} + 2\mu)} \quad (69)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\rho g}{(\tilde{\lambda} + 2\mu)} y + c \quad (70)$$

$$v = \frac{\rho g}{(\tilde{\lambda} + 2\mu)} y^2 + cy + d \quad (71)$$

bulunur. u ve v yer değiştirme ifadelerinde geçen bilinmeyen a , b , c ve d katsayılarının belirlenebilmesi için kütle kuvveti ρg ve kalınlığı h olan tek tabaka için x eksenini tabakanın altından geçmek üzere aşağıdaki gibi yazılan sınır Şartlarından yararlanılacaktır.

$$u(0) = 0 \quad (72)$$

$$v(h) = 0 \quad (73)$$

$$\sigma_y = \rho g(y - h) \quad (74)$$

$$\sigma_x = \int_0^h \sigma_x dy = 0 \quad (75)$$

Sınır Şartlarının (65)-(71) nolu denklemlere uygulanması ile bilinmeyen katsayılar,

$$a = \left(\frac{3 - \chi}{8\mu} \right) \left(\frac{\rho gh}{2} \right) \quad (76)$$

$$b = 0 \quad (77)$$

$$c = -\left(\frac{\rho g h}{2\mu}\right)\left(\frac{\chi-1}{\chi+1} + \frac{\chi+1}{8}\right) \quad (78)$$

$$d = 0 \quad (79)$$

olarak bulunur. Bulunan bu eşitlikler (67) ve (71) nolu denklemlerde yerlerine yazılırlarsa kütle kuvveti olması durumunda yer değiştirmelere ait özel çözümler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_{\bar{o}} = \left(\frac{3-\chi}{8\mu}\right)\left(\frac{\rho g h}{2}\right)x \quad (80)$$

$$v_{\bar{o}} = \frac{\rho g}{2\mu} y \left[\frac{\chi-1}{\chi+1}(y-h) - \frac{\chi+1}{8}h \right] \quad 0 \leq y \leq h \quad (81)$$

Yer değiştirmelere ait bu denklemlerin gerekli türevleri alınıp (49), (50) ve (51) nolu ifadelerde yerlerine yazılırlarsa, kütle kuvveti olması durumunda gerilmelere ait özel çözümler,

$$\sigma_{x_{\bar{o}}} = \frac{3-\chi}{1+\chi} \rho g \left(y - \frac{h}{2} \right) \quad (82)$$

$$\sigma_{y_{\bar{o}}} = \rho g (y-h) \quad (83)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (84)$$

olarak belirlenir. Burada \bar{o} indisi kütle kuvveti olması durumunda elde edilen yer değiştirme ve gerilme bileşenlerine ait özel çözüm ifadelerini göstermektedir.

Genel yer değiştirme ve gerilme ifadeleri homojen çözümden elde edilen ifadelerle özel çözüm sonucu elde edilen ifadelerin toplamı olacaktır. Yani;

$$u(x, y) = u_h(x, y) + u_{\bar{o}}(x, y) \quad (85)$$

$$v(x, y) = v_h(x, y) + v_{\bar{o}}(x, y) \quad (86)$$

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_{x_h}(x, y) + \sigma_{x_{\bar{h}}}(x, y) \quad (87)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sigma_{y_h}(x, y) + \sigma_{y_{\bar{h}}}(x, y) \quad (88)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \tau_{xy_h}(x, y) + \tau_{xy_{\bar{h}}}(x, y) \quad (89)$$

yazılabilir. İfadelerin açık şekli ise aşağıda verilmiştir.

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(A_1 + A_2 y) e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y) e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha + \frac{(3-\chi)\rho g h}{16\mu} x \quad (90)$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[A_1 + \left(\frac{\chi}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\chi}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{\rho g}{2\mu} y \left[\frac{\chi-1}{\chi+1} (y-h) - \frac{\chi+1}{8} h \right] \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_x(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[\alpha (A_1 + A_2 y) - \left(\frac{3-\chi}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ &\quad \left. \left[\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{3-\chi}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \\ &\quad \frac{1}{2\mu} \frac{3-\chi}{1+\chi} \rho g \left(y - \frac{h}{2} \right) \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \sigma_y(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi+1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ &\quad \left. \left[-\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{\chi+1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{2\mu} \rho g (y-h) \end{aligned} \quad (93)$$

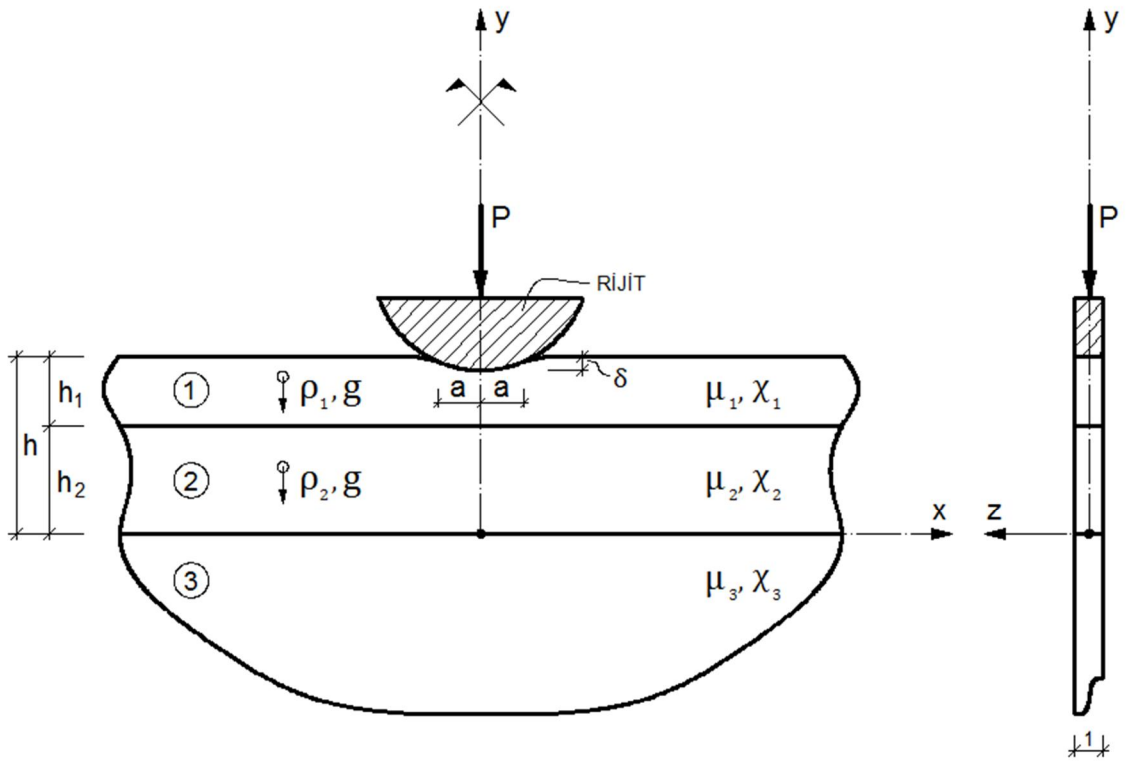
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tau_{xy}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi-1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ &\quad \left. \left[\alpha (A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\chi-1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (94)$$

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Rijit dairesel bir panç aracılığıyla P tekil yükü ile simetrik olarak yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan, homojen, izotrop, elastik özellikleri ve yükseklikleri farklı, yapışık olmayan iki elastik tabakanın sürekli temas problemi elastisite teorisine göre çözülmüştür. Problemden bütün yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca rijit panç $(-a, +a)$ aralığında (1) nolu tabaka ile temas halindedir. Çözümde tabakaların kütle kuvvetleri dikkate alınırken elastik yarı sonsuz düzlemin kütle kuvveti ihmal edilmiştir.

Tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem x eksenine boyunca $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır. Problem y eksenine göre simetrik olduğundan hesapların $(0, +\infty)$ aralığında yapılması yeterlidir. Problem düzlem hal için inceleneceğinden z eksenine doğrultusundaki kalınlık birim olarak alınmıştır.



Şekil 1. Rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan elastik tabakalar

2.2. Kullanılacak Denklemler

Problemde h , h_1 ve h_2 sırasıyla tabakaların toplam yüksekliğini, (1) nolu tabakanın yüksekliğini ve (2) nolu tabakanın yüksekliğini göstermektedir. Ayrıca μ_i, χ_i ($i=1,2,3$); tabakalara ve elastik yarı sonsuz düzleme ait malzeme sabitlerini, ρ_i ($i=1,2$); (1) ve (2) nolu tabakaların yoğunluklarını ve g yerçekimi ivmesini ifade etmektedir. Kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumda problemin çözümünde kullanılacak denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir.

(1) nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, \quad h_2 \leq y \leq h)$:

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (95)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[A_1 + \left(\frac{\chi_1}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\chi_1}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\alpha (A_1 + A_2 y) - \left(\frac{3 - \chi_1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \\ & \left[\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{3 - \chi_1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\alpha (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi_1 + 1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \\ & \left[-\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{\chi_1 + 1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_1} \tau_{xy_1}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\alpha (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi_1 - 1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \\ & \left[\alpha (A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\chi_1 - 1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (99)$$

(2) nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq h_2)$:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(B_1 + B_2 y)e^{-\alpha y} + (B_3 + B_4 y)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (100)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[B_1 + \left(\frac{\chi_2}{\alpha} + y \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-B_3 + \left(\frac{\chi_2}{\alpha} - y \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_2} \sigma_{x_2}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\alpha (B_1 + B_2 y) - \left(\frac{3 - \chi_2}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \\ & \left[\alpha (B_3 + B_4 y) + \left(\frac{3 - \chi_2}{2} \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_2} \sigma_{y_2}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{\chi_2 + 1}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[-\alpha (B_3 + B_4 y) + \left(\frac{\chi_2 + 1}{2} \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_2} \tau_{xy_2}(x, y) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{\chi_2 - 1}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \right. \\ & \left. \left[\alpha (B_3 + B_4 y) - \left(\frac{\chi_2 - 1}{2} \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \end{aligned} \quad (104)$$

(3) nolu elastik yarı sonsuz düzlem için $(0 \leq x < \infty, \quad -\infty < y \leq 0)$:

$$u_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(C_1 + C_2 y)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (105)$$

$$v_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-C_1 + \left(\frac{\chi_3}{\alpha} - y \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (106)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \sigma_{x_3}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\alpha(C_1 + C_2 y) + \left(\frac{3 - \chi_3}{2} \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (107)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \sigma_{y_3}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\alpha(C_1 + C_2 y) + \left(\frac{1 + \chi_3}{2} \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (108)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \tau_{xy_3}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\alpha(C_1 + C_2 y) - \left(\frac{\chi_3 - 1}{2} \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (109)$$

Yukarıdaki denklemlerde geçen A_i , B_i ($i=1, \dots, 4$) ve C_j ($j=1, 2$) bilinmeyen katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından belirlenecektir.

2.3. Problemin Sınır Şartları

$u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme bileşenlerini, $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ de gerilme bileşenlerini göstermek üzere problemin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (110)$$

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \begin{cases} -p(x) ; & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & ; & (a < x < \infty) \end{cases} \quad (111)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h_2) = 0 \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (112)$$

$$\tau_{xy_2}(x, h_2) = 0 \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (113)$$

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) = \sigma_{y_2}(x, h_2) \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (114)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h_2) - v_2(x, h_2)] = 0 \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (115)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0 \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (116)$$

$$\tau_{xy_3}(x,0)=0 \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (117)$$

$$\sigma_{y_2}(x,0)=\sigma_{y_3}(x,0) \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (118)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_2(x,0)-v_3(x,0)]=0 \quad ; \quad (0 \leq x < \infty) \quad (119)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h)]=f(x) \quad ; \quad (0 \leq x < a) \quad (120)$$

(111) ifadesindeki $p(x)$ rijit pañç ile (1) nolu tabaka arasındaki bilinmeyen temas gerilmesini, (120) ifadesindeki $f(x)$ ise rijit dairesel pañçın profilini tanımlayan fonksiyonun türevini ifade etmektedir. Yine bu ifadelerde geçen a ise rijit pañç ile (1) nolu tabaka arasındaki yarı değme uzunluğunu göstermektedir.

2.4. Katsayıların Belirlenmesi

Yukarıda (95-109) denklemleri ile verilmiş olan gerilme ve yer değıştirme ifadelerinin (110-119) denklemleri ile gösterilen sınır şartlarında yerine yazılması ve ters Fourier dönüşüm alınması sonucunda A_i , B_i ($i=1,\dots,4$) ve C_j ($j=1,2$) katsayılarını içeren on bilinmeyenli on cebrik denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir.

$$-2\alpha A_1 + (1 - 2\alpha h - \chi_1)A_2 + 2\alpha e^{2\alpha h} A_3 + (2\alpha h + 1 - \chi_1)e^{2\alpha h} A_4 = 0 \quad (121)$$

$$\begin{aligned} & -2\alpha A_1 - (2\alpha h + 1 + \chi_1)A_2 - 2\alpha e^{2\alpha h} A_3 + \\ & (1 + \chi_1 - 2\alpha h)e^{2\alpha h} A_4 = -\frac{e^{\alpha h}}{\mu_1} \int_0^a p(t) \cos(\alpha t) dt \end{aligned} \quad (122)$$

$$-2\alpha A_1 + (1 - 2\alpha h_2 - \chi_1)A_2 + 2\alpha e^{2\alpha h_2} A_3 + (2\alpha h_2 + 1 - \chi_1)e^{2\alpha h_2} A_4 = 0 \quad (123)$$

$$-2\alpha B_1 + (1 - 2\alpha h_2 - \chi_2)B_2 + 2\alpha e^{2\alpha h_2} B_3 + (2\alpha h_2 + 1 - \chi_2)e^{2\alpha h_2} B_4 = 0 \quad (124)$$

$$\begin{aligned}
& -2\alpha A_1 - (2\alpha h_2 + 1 + \chi_1) A_2 - 2\alpha e^{2\alpha h_2} A_3 + (1 - 2\alpha h_2 + \chi_1) e^{2\alpha h_2} A_4 + \\
& 2\alpha \frac{\mu_2}{\mu_1} B_1 + (2\alpha h_2 + 1 + \chi_2) \frac{\mu_2}{\mu_1} B_2 + 2\alpha e^{2\alpha h_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} B_3 + \\
& (2\alpha h_2 - 1 - \chi_2) e^{2\alpha h_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} B_4 = 0
\end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned}
& A_1 + \left(\frac{\chi_1}{\alpha} + h_2 \right) A_2 - e^{2\alpha h_2} A_3 + \left(\frac{\chi_1}{\alpha} - h_2 \right) e^{2\alpha h_2} A_4 - B_1 - \left(\frac{\chi_2}{\alpha} + h_2 \right) B_2 + \\
& e^{2\alpha h_2} B_3 + \left(h_2 - \frac{\chi_2}{\alpha} \right) e^{2\alpha h_2} B_4 = 0
\end{aligned} \tag{126}$$

$$-2\alpha B_1 + (1 - \chi_2) B_2 + 2\alpha B_3 + (1 - \chi_2) B_4 = 0 \tag{127}$$

$$2\alpha C_1 + (1 - \chi_3) C_2 = 0 \tag{128}$$

$$-2\alpha B_1 - (1 + \chi_2) B_2 - 2\alpha B_3 + (1 + \chi_2) B_4 + 2\alpha \frac{\mu_3}{\mu_2} C_1 - (1 + \chi_3) \frac{\mu_3}{\mu_2} C_2 = 0 \tag{129}$$

$$B_1 + \frac{\chi_2}{\alpha} B_2 - B_3 + \frac{\chi_2}{\alpha} B_4 + C_1 - \frac{\chi_3}{\alpha} C_2 = 0 \tag{130}$$

Bu on denklemden A_i , B_i ($i=1, \dots, 4$) ve C_j ($j=1, 2$) katsayıları, bilinmeyen değme gerilmesine bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned}
\alpha A_1 = & \frac{P}{\Delta} [e^{-3\alpha h - 4\alpha h_2} (-16\alpha^3 h_2^3 e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} [-(1 + \chi_2) + m_1(1 + \chi_1)](1 + \chi_3) + e^{2\alpha h_2} [-m_1(1 + \chi_1) \\
& (e^{2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h) + (e^{2\alpha h_2} - e^{2\alpha h}) \chi_1)((-1 + e^{4\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (1 - \\
& 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h) + (e^{2\alpha h_2} - e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h)) \chi_1)[1 + \chi_2] \\
& ((1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) m_2[1 + \chi_2] + (-1 + e^{4\alpha h_2})[1 + \chi_3))] + 4\alpha^2 h_2^2 [e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (1 + \chi_2)((1 - \\
& 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) m_2[1 + \chi_2] + [-1 + e^{4\alpha h_2} - 2e^{2\alpha h_2} (1 + 2\alpha h) + 2e^{2\alpha h_2} \chi_1](1 + \chi_3)) + \\
& m_1(1 + \chi_1) e^{4\alpha h_2} (4m_2(1 + \chi_2) e^{2\alpha h} + (e^{2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h) + (-e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2}) \chi_1) \\
& (1 + \chi_3))] - 2\alpha h_2 (-2m_1(1 + \chi_1) (-m_2(e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} - e^{2\alpha h + 6\alpha h_2} + e^{6\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h) + e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} \\
& (1 + 2\alpha h) + (e^{6\alpha h_2} - e^{2\alpha h + 4\alpha h_2}) \chi_1)(1 + \chi_2) + e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + (1 + \chi_2) \\
& (e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) m_2(1 + 2\alpha h - \chi_1)(1 + \chi_2) - (2e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} + e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (1 + 2\alpha h) \\
& - e^{2\alpha h + 6\alpha h_2} (1 + 2\alpha h) + e^{6\alpha h_2} (-2 + 4\alpha h) + (2e^{6\alpha h_2} - e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} + e^{2\alpha h + 6\alpha h_2} - 2e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} \\
& (1 + 2\alpha h)) \chi_1)(1 + \chi_3))] \tag{131}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & \frac{P}{\Delta} [2e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} (4\alpha^2 h_2^2 e^{2\alpha h_2} ((e^{2\alpha h} - e^{2\alpha h_2}) m_1(1 + \chi_1) - 2e^{2\alpha h} (1 + \chi_2))(1 + \chi_3) - (e^{2\alpha h} \\
& - e^{2\alpha h_2}) (-1 + e^{2\alpha h_2}) m_1(1 + \chi_1) ((1 + e^{2\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{2\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + (1 + \chi_2) \\
& ((1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) (-e^{2\alpha h_2} + e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h)) m_2(1 + \chi_2) - (-1 + e^{4\alpha h_2}) (e^{2\alpha h_2} - e^{2\alpha h} (1 + \\
& 2\alpha h))(1 + \chi_3)) - 2\alpha h_2 (1 + \chi_2) (m_2 (-2(e^{4\alpha h_2} - e^{2\alpha h + 2\alpha h_2}) m_1(1 + \chi_1) + e^{2\alpha h} (1 - 2e^{2\alpha h_2} + \\
& e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_2)) - (e^{2\alpha h} - 2e^{4\alpha h_2} - e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} + e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (2 + 4\alpha h))(1 + \chi_3))] \tag{132}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha A_3 = & \frac{P}{\Delta} [e^{-3\alpha h - 4\alpha h_2} (-16\alpha^3 h_2^3 e^{4\alpha h_2} (-1 + \chi_2) + m_1(1 + \chi_1))(1 + \chi_3) - m_1(1 + \chi_1) (e^{2\alpha h_2} \\
& (-1 + 2\alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h) + (e^{2\alpha h_2} - e^{2\alpha h}) \chi_1) ((-1 + e^{4\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (1 - 2e^{2\alpha h_2} \\
& + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + (-1 + e^{2\alpha h_2}) (e^{2\alpha h_2} - e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h) + (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h)) \chi_1 (\\
& 1 + \chi_2) ((-1 + e^{2\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (1 + e^{2\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + 4\alpha^2 h_2^2 e^{2\alpha h_2} ((1 + \chi_2) ((1 - \\
& 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{4\alpha h_2} + 2e^{2\alpha h_2} (1 - 2\alpha h) - 2\chi_1 e^{2\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + m_1 \\
& (1 + \chi_1) e^{4\alpha h_2} (4m_2(1 + \chi_2) e^{2\alpha h} + (e^{2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + 2\alpha h) + (-e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2}) \\
& \chi_1)(1 + \chi_3))] - 2\alpha h_2 e^{2\alpha h_2} (-2m_1(1 + \chi_1) (-m_2(1 - e^{4\alpha h_2} + e^{2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + \\
& 2\alpha h) + (-e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2}) \chi_1)(1 + \chi_2) + (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + (1 + \chi_2) ((1 - 2e^{2\alpha h_2} \\
& + e^{4\alpha h_2}) m_2(-1 + \chi_1 + 2\alpha h)(1 + \chi_2) + (1 - 2e^{2\alpha h_2} - 2\alpha h + e^{4\alpha h_2} (2\alpha h - 1) + 2e^{2\alpha h} (1 + \\
& 2\alpha h) + (-1 - 2e^{2\alpha h} + e^{4\alpha h_2} + 2e^{2\alpha h_2} (1 - 2\alpha h)) \chi_1)(1 + \chi_3)))] \quad (133)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & \frac{P}{\Delta} [-2e^{-3\alpha h - 4\alpha h_2} [-4\alpha^2 h_2^2 ((e^{4\alpha h_2} - e^{2\alpha h + 2\alpha h_2}) m_1(1 + \chi_1) - 2e^{4\alpha h_2} (1 + \chi_2))(1 + \chi_3) - \\
& (e^{2\alpha h} - e^{2\alpha h_2}) (-1 + e^{2\alpha h_2}) m_1(1 + \chi_1) ((1 + e^{2\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{2\alpha h_2})(1 + \chi_3)) - \\
& (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2} (-1 + 2\alpha h))(1 + \chi_2) ((1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_3)) \\
& + 2\alpha h_2 e^{2\alpha h_2} (1 + \chi_2) (m_2(-2(e^{2\alpha h} - e^{2\alpha h_2}) m_1(1 + \chi_1) + (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_2)) - \\
& (1 + 2e^{2\alpha h} - e^{4\alpha h_2} + e^{2\alpha h_2} (-2 + 4\alpha h))(1 + \chi_3))] \quad (134)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha B_1 = & \frac{P}{\Delta} [-2e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} (e^{2\alpha h_2} (-1 + \alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + \alpha h) - (e^{2\alpha h} - e^{2\alpha h_2}) \alpha h_2)(1 + \chi_1) ((1 - \\
& e^{2\alpha h_2})(\chi_2 - 1) (-1 + \chi_3) + m_2(1 + \chi_2)) + 2\alpha h_2 ((1 + e^{2\alpha h_2}) m_2(1 + \chi_2) + (-1 + \chi_2 e^{2\alpha h_2}) \\
& (1 + \chi_3))] \quad (135)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \frac{P}{\Delta} [4e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} (e^{2\alpha h_2} (-1 + \alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + \alpha h) - (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2}) \alpha h_2)(1 + \chi_1) (-1 + e^{2\alpha h_2}) \\
& (-1 + \chi_3) + m_2(1 + \chi_2)) + 2\alpha h_2 e^{2\alpha h_2} (1 + \chi_3)] \quad (136)
\end{aligned}$$

$$\alpha B_3 = \frac{P}{\Delta} [-2e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} (e^{2\alpha h_2} (-1 + \alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + \alpha h) - (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2}) \alpha h_2) (1 + \chi_1) ((1 - e^{2\alpha h_2}) (-1 + \chi_2) (-1 + \chi_3) + m_2 (1 + \chi_2)) + 2\alpha h_2 ((1 + e^{2\alpha h_2}) m_2 (1 + \chi_2) + (e^{2\alpha h_2} - \chi_2) (1 + \chi_3))] \quad (137)$$

$$B_4 = \frac{P}{\Delta} [4e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} (e^{2\alpha h_2} (-1 + \alpha h) + e^{2\alpha h} (1 + \alpha h) - (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2}) \alpha h_2) (1 + \chi_1) (2\alpha h_2 (1 + \chi_3) + (-1 + e^{2\alpha h_2}) ((1 + \chi_3) + m_2 (1 + \chi_2)))] \quad (138)$$

$$\alpha C_1 = \frac{P}{\Delta} [-4e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} (-1 + e^{2\alpha h_2} + \alpha h_2 (1 + e^{2\alpha h_2})) (e^{2\alpha h_2} (1 - \alpha h) - e^{2\alpha h} (1 + \alpha h) + \alpha h_2 (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2})) (1 + \chi_1) (1 + \chi_2) (\chi_3 - 1)] \quad (139)$$

$$C_2 = \frac{P}{\Delta} [-8e^{-3\alpha h - 2\alpha h_2} ((-1 + e^{2\alpha h_2} + \alpha h_2 (1 + e^{2\alpha h_2})) (e^{2\alpha h_2} (1 - \alpha h) - e^{2\alpha h} (1 + \alpha h) + \alpha h_2 (e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2})) (1 + \chi_1) (1 + \chi_2))] \quad (140)$$

Bu ifadelerde geçen m_1 , m_2 , P ve Δ büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$m_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (141)$$

$$m_2 = \frac{\mu_3}{\mu_2} \quad (142)$$

$$P = -\frac{1}{\mu_1} \int_0^a p(t) \cos(\alpha t) dt \quad (143)$$

$$\begin{aligned}
\Delta = & 4e^{-4\alpha h-4\alpha h_2} [16e^{2\alpha h+4\alpha h_2} \alpha^3 h_2^3 (-(1+\chi_2)+m_1(1+\chi_1))(1+\chi_3) - (e^{4\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - 4\alpha h \\
& e^{2\alpha h+2\alpha h_2})m_1(1+\chi_1)((-1+e^{4\alpha h_2})m_2(1+\chi_2) + (1-2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1+\chi_3)) + (e^{4\alpha h} + \\
& e^{4\alpha h_2} - 2e^{2\alpha h+2\alpha h_2})(1+2\alpha^2 h^2))(1+\chi_2)((1-2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})m_2(1+\chi_2) + (-1+e^{4\alpha h_2}) \\
& (1+\chi_3)) - 4\alpha^2 h^2 (e^{2\alpha h+4\alpha h_2}(1+\chi_2)((1-2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})m_2(1+\chi_2) + (-1+e^{4\alpha h_2} - \\
& 8\alpha h e^{2\alpha h_2})(1+\chi_3)) - m_1(1+\chi_1)(-4e^{2\alpha h+4\alpha h_2} m_2(1+\chi_2) + (e^{6\alpha h_2} - e^{4\alpha h+2\alpha h_2} - 4\alpha h \\
& e^{2\alpha h+4\alpha h_2})(1+\chi_3)) - 4\alpha h_2 e^{2\alpha h_2} (m_1(1+\chi_1)((-e^{4\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - e^{2\alpha h} - 4e^{2\alpha h+2\alpha h_2} \alpha h + \\
& e^{2\alpha h+4\alpha h_2})m_2(1+\chi_2) + (e^{2\alpha h}(1-2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1+\chi_3)) - (1+\chi_2)(2e^{2\alpha h}(1-2e^{2\alpha h_2} \\
& + e^{4\alpha h_2})m_2 \alpha h(1+\chi_2) + (e^{4\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - 2e^{2\alpha h} \alpha h + 2e^{2\alpha h+4\alpha h_2} \alpha h - 2e^{2\alpha h+2\alpha h_2}(1+2\alpha^2 h^2)) \\
& (1+\chi_3)))] \tag{144}
\end{aligned}$$

2.5. İntegral Denklemin Elde Edilmesi

Rijit panç altındaki $p(x)$ temas gerilme yayılışının bilinmeyen olduğu daha önceki kısımlarda belirtilmişti. Bu gerilme yayılışını elde edebilmek için, katsayıların belirlenmesinde kullanılmayan (120) nolu sınır şartından faydalanılacaktır. (120) nolu sınır şartının açık formda yazılmış şekli aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)] = & \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\chi_1}{\alpha} + y \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} \right. \\
& \left. \left[-A_3 + \left(\frac{\chi_1}{\alpha} - y \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right\} (-\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha = f(x) \tag{145}
\end{aligned}$$

Bu ifadede A_i ($i=1, \dots, 4$) katsayıları yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, y)]$ ifadesi en geniş şekliyle teşkil edilmiş olur. Buradan $y \rightarrow h$ limitine geçilirken dikkatli davranmak gerekmektedir. Çünkü $y \rightarrow h$ limitine geçilirken (145) ifadesi ile gösterilen integralde pay ve paydada $e^{4\alpha h}$ lı ifadeler gelmekte, pay payda ile bölününce C bir sabit olmak üzere,

$$C \int_0^{\infty} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (146)$$

gibi iraksak bir integral ortaya çıkmaktadır. Bu durumu gidermek için önce paydaki $e^{3\alpha h}$, 1 terimleri ayırıp bunların payda ile bölünmesinden ortaya çıkan;

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (147)$$

integralini kapalı formda hesapladıktan sonra limit işlemine geçmek gerekir. Bu anlatılanlar sırasıyla yapılır ve (120) nolu sınır şartında yerine yazılırsa, gerekli düzenlemelerin de yapılması ile,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, h)] &= \frac{1 + \chi_1}{4\pi\mu_1} \lim_{y \rightarrow h} \int_0^a p(t) dt \int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\ &+ \frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^a p(t) dt \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta} [(1 + \chi_1) e^{-5\alpha h - 4\alpha h_2} (-4\alpha^2 h_2^2 e^{\alpha h + 2\alpha h_2} (m_1 \right. \\ &(1 + \chi_1)(e^{4\alpha h} - 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) + 4e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (1 + \chi_2))(1 + \\ &\chi_3) - 4\alpha h_2 (1 + \chi_2) e^{\alpha h + 2\alpha h_2} (m_2 (-m_1 (1 + \chi_1)(e^{4\alpha h} - 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} \\ &+ e^{4\alpha h_2}) + (1 + \chi_2) e^{2\alpha h} (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})) + (-e^{2\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - \\ &e^{4\alpha h} + e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} - 4\alpha h e^{2\alpha h + 2\alpha h_2})(1 + \chi_3) + e^{\alpha h} (m_1 (1 + \chi_1)(e^{4\alpha h} \\ &- 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})) (m_2 (1 + \chi_2)(-1 + e^{4\alpha h_2}) + (1 + \chi_3)(1 - 2e^{2\alpha h_2} \\ &+ e^{4\alpha h_2})) + (1 + \chi_2)(e^{4\alpha h} - e^{4\alpha h_2} + 4\alpha h e^{2\alpha h + 2\alpha h_2}) ((m_2 (1 + \chi_2)(1 - \\ &2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) + (1 + \chi_3)(-1 + e^{4\alpha h_2}))) - 1 \} [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha \\ &= f(x) \end{aligned} \quad (148)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede geçen büyüklükler daha önce tanımlanmıştır. (148) nolu ifadede geçen,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha \quad (149)$$

integralinin değeri integral dönüşüm tablolarından kolaylıkla bulunabilir (Erdelyi vd., 1954). Buna göre,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha(h-y)} [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha = \frac{t+x}{(y-h)^2 + (t+x)^2} - \frac{t-x}{(y-h)^2 + (t-x)^2} \quad (150)$$

olarak elde edilip $y \rightarrow h$ limitine geçilirse, gerekli kısaltmalarında yapılması sonucunda (148) ifadesi aşağıdaki gibi bir integral denkleme indirgenmiş olur.

$$\int_0^a \left[\frac{1}{t+x} - \frac{1}{t-x} + K(x,t) \right] p(t) dt = \frac{4\pi\mu_1}{1+\chi_1} f(x) \quad (0 \leq x < a) \quad (151)$$

Bu ifadedeki,

$$\begin{aligned} K(x,t) = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\Delta^*} [e^{-5\alpha h - 4\alpha h_2} (-4\alpha^2 h_2^2 e^{\alpha h + 2\alpha h_2} (m_1(1+\chi_1)(e^{4\alpha h} - 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) + \right. \\ 4e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (1+\chi_2))(1+\chi_3) - 4\alpha h_2(1+\chi_2)e^{\alpha h + 2\alpha h_2} (m_2(-m_1(1+\chi_1)(e^{4\alpha h} - \\ 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) + (1+\chi_2)e^{2\alpha h} (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})) + (-e^{2\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - e^{4\alpha h} \\ + e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} - 4\alpha h e^{2\alpha h + 2\alpha h_2})(1+\chi_3) + e^{\alpha h} (m_1(1+\chi_1)(e^{4\alpha h} - 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) \\ (m_2(1+\chi_2)(-1 + e^{4\alpha h_2}) + (1+\chi_3)(1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})) + (1+\chi_2)(e^{4\alpha h} - e^{4\alpha h_2} + \\ 4\alpha h e^{2\alpha h + 2\alpha h_2}))(m_2(1+\chi_2)(1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}) + (1+\chi_3)(-1 + e^{4\alpha h_2}))) - 1] \\ \left. [\sin \alpha(t+x) - \sin \alpha(t-x)] d\alpha \right\} \quad (152) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (152) ifadesinde geçen Δ^* büyüklüğü ise,

$$\begin{aligned}
\Delta^* = & e^{-4\alpha h - 4\alpha h_2} [16e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} \alpha^3 h_2^3 (-1 + \chi_2) + m_1(1 + \chi_1))(1 + \chi_3) - (-e^{4\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - 4\alpha h \\
& e^{2\alpha h + 2\alpha h_2})m_1(1 + \chi_1)((-1 + e^{4\alpha h_2})m_2(1 + \chi_2) + (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_3)) + (e^{4\alpha h} + \\
& e^{4\alpha h_2} - 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2})(1 + 2\alpha^2 h^2))(1 + \chi_2)((1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{4\alpha h_2}) \\
& (1 + \chi_3)) - 4\alpha^2 h^2 (e^{2\alpha h + 4\alpha h_2}(1 + \chi_2)((1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{4\alpha h_2} - \\
& 8\alpha h e^{2\alpha h_2})(1 + \chi_3)) - m_1(1 + \chi_1)(-4e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} m_2(1 + \chi_2) + (e^{6\alpha h_2} - e^{4\alpha h + 2\alpha h_2} - 4\alpha h \\
& e^{2\alpha h + 4\alpha h_2})(1 + \chi_3))) - 4\alpha h_2 e^{2\alpha h_2} (m_1(1 + \chi_1)((-e^{4\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - e^{2\alpha h} - 4e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} \alpha h + \\
& e^{2\alpha h + 4\alpha h_2})m_2(1 + \chi_2) + (e^{2\alpha h} (1 - 2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(1 + \chi_3)) - (1 + \chi_2)(2e^{2\alpha h} (1 - 2e^{2\alpha h_2} \\
& + e^{4\alpha h_2})m_2 \alpha h (1 + \chi_2) + (e^{4\alpha h} + e^{4\alpha h_2} - 2e^{2\alpha h} \alpha h + 2e^{2\alpha h + 4\alpha h_2} \alpha h - 2e^{2\alpha h + 2\alpha h_2} (1 + 2\alpha^2 h^2)) \\
& (1 + \chi_3)))] \quad (153)
\end{aligned}$$

şeklinde verilmektedir. Simetri nedeniyle rijit pañç altındaki gerilme yayılışının,

$$p(t) = p(-t) \quad (154)$$

olduğu göz önünde bulundurulur, $z = \alpha h$ ve $\xi = h_2 / h$ değişken dönüşümü yapılırsa tekil integral denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\int_{-a}^a \left[\frac{1}{t-x} + k(x,t) \right] p(t) dt = -\frac{4\pi\mu_1}{1+\chi_1} f(x) \quad (0 \leq x < a) \quad (155)$$

Bu denklemde,

$$\begin{aligned}
k(x,t) = & \frac{1}{h} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\Delta^{**}} [e^{-5z-4z\xi} (-4z^2 \xi^2 e^{z+2z\xi} (m_1(1+\chi_1)(e^{4z} - 2e^{2z+2z\xi} + e^{4z\xi}) + 4e^{2z+2z\xi} \\
& (1+\chi_2))(1+\chi_3) - 4z\xi(1+\chi_2)e^{z+2z\xi} (m_2(-m_1(1+\chi_1)(e^{4z} - 2e^{2z+2z\xi} + e^{4z\xi}) \\
& + (1+\chi_2)e^{2z}(1-2e^{2z\xi} + e^{4z\xi}))) + (-e^{2z} + e^{4z\xi} - e^{4z} + e^{2z+4z\xi} - 4ze^{2z+2z\xi}) \\
& (1+\chi_3) + e^z(m_1(1+\chi_1)(e^{4z} - 2e^{2z+2z\xi} + e^{4z\xi}))(m_2(1+\chi_2)(-1 + e^{4z\xi}) + (1+ \\
& \chi_3)(1 - 2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})) + (1+\chi_2)(e^{4z} - e^{4z\xi} + 4ze^{2z+2z\xi}))(m_2(1+\chi_2)(1 - 2e^{2z\xi} \\
& + e^{4z\xi}) + (1+\chi_3)(-1 + e^{4z\xi}))) - 1 \} \sin \left[(t-x) \frac{z}{h} \right] \quad (156)
\end{aligned}$$

olarak verilmektedir. Burada,

$$\begin{aligned}
\Delta^{**} = & e^{-4z-4z\xi} [16e^{2z+4z\xi} z^3 \xi^3 (- (1 + \chi_2) + m_1(1 + \chi_1))(1 + \chi_3) - (-e^{4z} + e^{4z\xi} - 4ze^{2z+2z\xi}) \\
& m_1(1 + \chi_1)((-1 + e^{4z\xi})m_2(1 + \chi_2) + (1 - 2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})(1 + \chi_3)) + (e^{4z} + e^{4z\xi} - 2e^{2z+2z\xi}) \\
& (1 + 2z^2))(1 + \chi_2)((1 - 2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{4z\xi})(1 + \chi_3)) - 4z^2(e^{2z+4z\xi}(1 + \\
& \chi_2)((1 - 2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})m_2(1 + \chi_2) + (-1 + e^{4z\xi} - 8ze^{2z\xi})(1 + \chi_3)) - m_1(1 + \chi_1)(-4e^{2z+4z\xi} \\
& m_2(1 + \chi_2) + (e^{6z\xi} - e^{4z+2z\xi} - 4ze^{2z+4z\xi})(1 + \chi_3))] - 4z\xi e^{2z\xi} (m_1(1 + \chi_1)(-e^{4z} + e^{4z\xi} - \\
& e^{2z} - 4ze^{2z+2z\xi} + e^{2z+4z\xi})m_2(1 + \chi_2) + (e^{2z}(1 - 2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})(1 + \chi_3)) - (1 + \chi_2)(2e^{2z} \\
& (1 - 2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})m_2z(1 + \chi_2) + (e^{4z} + e^{4z\xi} - 2ze^{2z} + 2ze^{2z+4z} - 2e^{2z+2z\xi}(1 + 2z^2\xi^2)) \\
& (1 + \chi_3))] \tag{157}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (155) ifadesindeki $k(x, t)$, $-a \leq x \leq a$ kapalı aralığında sınırlı olup integral denklemin Fredholm çekirdeğidir. Probleme ilişkin denge şartı olarak;

$$\int_{-a}^a p(t) dt = P \tag{158}$$

ifadesi yazılabilir. $p(x)$ temas gerilme yayılışının hesaplanabilmesi için (155) nolu integral denklem ile (158) nolu denge denklemi birlikte çözülmelidir.

2.6. İntegral Denklemin Sayısal Çözümü

İntegral denklemin sayısal çözümünü kolaylaştırmak için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$x = as, \quad t = ar, \quad \phi(r) = \frac{p(ar)}{P/h}, \quad M(s) = \frac{m(as)}{P/h} \tag{159}$$

Bu ifadede geçen $m(as)$ büyüklüğü,

$$m(as) = -\frac{4\pi\mu_1}{1+\chi_1} f(as) \quad (160)$$

olarak tanımlanmaktadır. Tanımlanan bu büyüklükler (155-158) denklemlerinde yerlerine yazılırsa (155) ve (158) ifadeleri,

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{r-s} + N(s,r) \right] \phi(r) dr = M(s) \quad (-1 \leq s \leq 1) \quad (161)$$

$$\frac{a}{h} \int_{-1}^1 \phi(r) dr = 1 \quad (162)$$

şeklinde yazılabilir. (161) ifadesinde,

$$N(s,r) = ak(as,ar) \quad (163)$$

olarak verilmektedir.

İntegral denklemin sayısal çözümü için rijit pançın yüzey profilini tanımlayan $F(x)$ fonksiyonunun bilinmesi gerekmektedir. Çünkü her bir rijit panç profiline göre integral denklemin sayısal çözümü farklı olmaktadır.

Rijit panç profilinin dairesel olması halinde $F(x)$ fonksiyonu,

$$F(x) = h - \delta - \left[(R^2 - x^2)^{1/2} - R \right] \quad (164)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadede R dairenin yarıçapını, δ ise bir sabit olup pançın altındaki tabakada meydana gelen en büyük yer değiştirmeyi göstermektedir. Buna göre,

$$f(x) = \frac{d}{dx} [F(x)] = -\frac{x}{(R^2 - x^2)^{1/2}} \quad (165)$$

olarak hesaplanır. Değme gerilmeleri değmenin bittiği noktadan itibaren sıfır olduğundan $g(\pm 1) = 0$ olur. Bu durumda (161) nolu singüler integral denklemin indisi “-1” dir. Buna göre singüler integral denklemin sayısal çözümü aşağıdaki şekilde aranabilir (Erdoğan ve Gupta, 1972).

$$\phi(r) = g(r)(1-r^2)^{1/2}, \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad (166)$$

Burada $g(r)$, $(-1 \leq r \leq 1)$ kapalı aralığında sınırlıdır. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılarak, (161) ve (162) denklemleri aşağıdaki hale indirgenebilir.

$$\sum_{i=1}^n (1-r_i^2) \left[\frac{1}{r_i - s_j} + N(s_j, r_i) \right] g(r_i) = \frac{n+1}{\pi} M(s_j), \quad (j = 1, \dots, n+1) \quad (167)$$

$$\frac{a}{h} \sum_{i=1}^n (1-r_i^2) g(r_i) = \frac{n+1}{\pi} \quad (168)$$

Bu ifadelerde,

$$r_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (169)$$

$$s_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2} \frac{\pi}{n+1}\right), \quad (j = 1, \dots, n+1) \quad (170)$$

olarak verilmektedir. Eğri yüzeyli rijit panç hallerinde, temas gerilmesinin yanısıra temas yüzeyi de bilinmeyendir. (167) ve (168) denklem sistemindeki extra denklem (161) ifadesi ile gösterilen orijinal integral denklemin uygunluk şartına karşılık gelir. Bu durumda (167) ifadesindeki $(1+n/2)$ 'inci denklem otomatik olarak sağlanır. Böylece (167) ve (168) ifadeleri ile verilmiş denklemlerden $g(r_i)$, $(i=1, \dots, n)$ ve temas yüzeyinin yarı uzunluğu olan a ' ya bağlı $n+1$ bilinmeyenli bir denklem takımı elde edilmiş olur. Bu denklem takımının çözümünden, temas gerilme yayılımı ve temas yüzeyinin yarı uzunluğu hesaplanabilir. Ancak bu hesaplar yapılırken interpolasyon işleminin yapılması gerekmektedir. Önce seçilen bir temas bölgesi (a) için (167) nolu denklem takımının

çözümünden $g(r_i)$ ' ler hesaplanır ve bulunan değerler (168) denkleminde yerine yazılarak bu eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir. Eğer eşitlik sağlanmıyorsa (a) ' ya artımlar verilerek yukarıdaki işlemler tekrarlanır. Bu şekilde yapılacak işlemler sonucunda bulunacak $g(r_i)$ değerleri (166) ifadesinde yerine yazılarak, $\phi(r)$ boyutsuz temas gerilmeleri ve temas yüzeyinin yarı uzunluğu a belirlenmiş olur.

2.7. Gerilme ve Yer Değiştirmelerin Bulunması

Elastik yarı sonsuz düzleme oturan bileşik tabaka problemine ait kütle kuvvetli haldeki gerilme ve yer değiştirmelerin özel çözümleri bulunarak kütle kuvvetsiz haldeki gerilme ve yer değiştirmelerin homojen kısımları ile toplanacaktır. Böylece bu probleme ilişkin kullanılacak olan gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilecektir.

(1) nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, \quad h_2 \leq y \leq h)$:

$$u_1 = u_1(x) \quad (171)$$

$$v_1 = v_1(y) \quad (172)$$

Yukarıdaki fonksiyonların seçilmesi ve kütle kuvvetleri olarak $X = 0$ ve $Y = \rho_1 g$ alınarak Navier denklemlerinde yerine konulması ile,

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0 \quad (173)$$

$$\frac{du_1}{dx} = a \quad (174)$$

$$u_1(x) = ax + b \quad (175)$$

$$(\tilde{\lambda}_1 + 2\mu_1) \frac{d^2 v_1}{dy^2} = \rho_1 g \quad (176)$$

$$\frac{d^2 v_1}{dy^2} = \frac{\rho_1 g}{(\hat{\lambda}_1 + 2\mu_1)} \quad (177)$$

$$\frac{dv_1}{dy} = \frac{\rho_1 g}{(\hat{\lambda}_1 + 2\mu_1)} y + c = \frac{\chi_1 - 1}{\chi_1 + 1} \frac{\rho_1 g y}{\mu_1} + c \quad (178)$$

$$v_1(y) = \frac{\chi_1 - 1}{\chi_1 + 1} \frac{\rho_1 g y^2}{2\mu_1} + cy + d \quad (179)$$

olarak elde edilir. Problemin geometrisine bağlı olarak aşağıdaki sınır şartları yazılabilir.

$$u_1(0) = 0 \quad (180)$$

$$v_1(h) = 0 \quad (181)$$

$$\sigma_{y_1} = \rho_1 g (y - h), \quad (h_2 \leq y \leq h) \quad (182)$$

$$\int_{h_2}^h \sigma_{x_1} dy = 0 \quad (183)$$

Yukarıdaki sınır şartları altında bilinmeyen katsayılar aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$a = \left(\frac{3 - \chi_1}{8\mu_1} \right) \left(\frac{\rho_1 g h_1}{2} \right) \quad (184)$$

$$b = 0 \quad (185)$$

$$c = -\frac{\rho_1 g}{\mu_1} \left[\frac{1 + \chi_1}{16} h_1 + \frac{\chi_1 - 1}{\chi_1 + 1} \left(h_2 + \frac{h_1}{2} \right) \right] \quad (186)$$

$$d = 0 \quad (187)$$

Katsayıların yerlerine konulması ile gerilme ve yer değiştirmeler,

$$\sigma_{x_1} = \frac{3 - \chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\rho_1 g}{2} (2y - h - h_2) \quad (188)$$

$$\tau_{xy_1} = 0 \quad (189)$$

$$u_1 = \left(\frac{3 - \chi_1}{8\mu_1} \right) \left(\frac{\rho_1 g h_1}{2} \right) x \quad (190)$$

$$v_1 = -\frac{\rho_1 g y}{2\mu_1} \left[\frac{1 + \chi_1}{8} h_1 + \frac{\chi_1 - 1}{\chi_1 + 1} (h_2 + h - y) \right] \quad (191)$$

olarak elde edilirler.

(2) nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq h_2)$:

Problemin geometrisine bağlı olarak aşağıdaki sınır şartları yazılabilir.

$$u_2(0) = 0 \quad (192)$$

$$v_2(h_2) = 0 \quad (193)$$

$$\sigma_{y_2} = -\rho_1 g h_1 + \rho_2 g (y - h_2), \quad (0 \leq y \leq h_2) \quad (194)$$

$$\int_0^{h_2} \sigma_{x_2} dy = 0 \quad (195)$$

(1) nolu tabakaya ilişkin çözümler (2) nolu tabaka için de benzer şekilde yapıldığında gerilme ve yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_{x_2} = \frac{3 - \chi_2}{1 + \chi_2} \frac{\rho_2 g}{2} (2y - h_2) \quad (196)$$

$$\tau_{xy_2} = 0 \quad (197)$$

$$u_2 = \left(\frac{3 - \chi_2}{8\mu_2} \right) \left(\frac{\rho_2 g h_2}{2} + \rho_1 g h_1 \right) x \quad (198)$$

$$v_2 = \frac{\chi_2 - 1}{\chi_2 + 1} \frac{\rho_2 g y}{2\mu_2} (y - h_2) - \frac{1 + \chi_2}{8\mu_2} y \left(\rho_1 g h_1 + \rho_2 g \frac{h_2}{2} \right) \quad (199)$$

(3) nolu elastik yarı sonsuz düzlem için $(0 \leq x < \infty, \quad -\infty < y \leq 0)$:

$$\sigma_{x_3} = 0 \quad (200)$$

$$\sigma_{y_3} = -(\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) \quad (201)$$

$$\tau_{xy_3} = 0 \quad (202)$$

$$u_3 = \left(\frac{3 - \chi_3}{8\mu_3} \right) (\rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1) x \quad (203)$$

$$v_3 = -\frac{1 + \chi_3}{8\mu_3} (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) y \quad (204)$$

şeklinde yazılabilirler. Gerilme ve yer değiştirme ifadelerindeki h indisi kütle kuvvetinin etkisinin olmadığı, ö indisi yalnız kütle kuvvetinin etkisinin olduğu durumu göstermek üzere gerilme ve yer değiştirme ifadelerinin,

$$u(x, y) = u_h(x, y) + u_{\bar{o}}(x, y) \quad (205)$$

$$v(x, y) = v_h(x, y) + v_{\bar{o}}(x, y) \quad (206)$$

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_{x_h}(x, y) + \sigma_{x_{\bar{o}}}(x, y) \quad (207)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sigma_{y_h}(x, y) + \sigma_{y_{\bar{o}}}(x, y) \quad (208)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \tau_{xy_h}(x, y) + \tau_{xy_{\bar{o}}}(x, y) \quad (209)$$

şeklinde olacağı açıktır. O halde yer değiştirme ve gerilme ifadeleri tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem için ayrı ayrı aşağıdaki gibi yazılabilir.

(1) nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, \quad h_2 \leq y \leq h)$:

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A_1 + A_2 y)e^{-\alpha y} + (A_3 + A_4 y)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha + \left(\frac{3 - \chi_1}{8\mu_1} \right) \left(\frac{\rho_1 g h_1}{2} \right) x \quad (210)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[A_1 + \left(\frac{\chi_1 + y}{\alpha} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\chi_1 - y}{\alpha} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{\rho_1 g y}{2\mu_1} \left[\frac{\chi_1 - 1}{\chi_1 + 1} (y - h - h_2) - \frac{1 + \chi_1}{8} h_1 \right] \quad (211)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{x_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[\alpha (A_1 + A_2 y) - \left(\frac{3 - \chi_1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{3 - \chi_1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{2\mu_1} \frac{3 - \chi_1}{1 + \chi_1} \frac{\rho_1 g}{2} (2y - h - h_2) \quad (212)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \sigma_{y_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi_1 + 1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha (A_3 + A_4 y) + \left(\frac{\chi_1 + 1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{2\mu_1} \rho_1 g (y - h) \quad (213)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \tau_{xy_1}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (A_1 + A_2 y) + \left(\frac{\chi_1 - 1}{2} \right) A_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (A_3 + A_4 y) - \left(\frac{\chi_1 - 1}{2} \right) A_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (214)$$

(2) nolu tabaka için $(0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq h_2)$:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(B_1 + B_2 y)e^{-\alpha y} + (B_3 + B_4 y)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha + \left(\frac{3 - \chi_2}{8\mu_2} \right) \left(\frac{\rho_2 g h_2}{2} + \rho_1 g h_1 \right) x \quad (215)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[B_1 + \left(\frac{\chi_2}{\alpha} + y \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-B_3 + \left(\frac{\chi_2}{\alpha} - y \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{\chi_2 - 1}{\chi_2 + 1} \frac{\rho_2 g y}{2\mu_2} (y - h_2) - \frac{1 + \chi_2}{8\mu_2} y \left(\rho_1 g h_1 + \rho_2 g \frac{h_2}{2} \right) \quad (216)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{x_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[\alpha (B_1 + B_2 y) - \left(\frac{3 - \chi_2}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (B_3 + B_4 y) + \left(\frac{3 - \chi_2}{2} \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{2\mu_2} \frac{3 - \chi_2}{1 + \chi_2} \frac{\rho_2 g}{2} (2y - h_2) \quad (217)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \sigma_{y_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{\chi_2 + 1}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha (B_3 + B_4 y) + \left(\frac{\chi_2 + 1}{2} \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \cos(\alpha x) d\alpha + \frac{1}{2\mu_2} [-\rho_1 g h_1 + \rho_2 g (y - h_2)] \quad (218)$$

$$\frac{1}{2\mu_2} \tau_{xy_2}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[- \left[\alpha (B_1 + B_2 y) + \left(\frac{\chi_2 - 1}{2} \right) B_2 \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (B_3 + B_4 y) - \left(\frac{\chi_2 - 1}{2} \right) B_4 \right] e^{\alpha y} \right] \sin(\alpha x) d\alpha \quad (219)$$

(3) nolu elastik yarı sonsuz düzlem için $(0 \leq x < \infty, \quad -\infty < y \leq 0)$:

$$u_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(C_1 + C_2 y)e^{\alpha y}] \sin(\alpha x) d\alpha + \left(\frac{3 - \chi_3}{8\mu_3} \right) (\rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1) x \quad (220)$$

$$v_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-C_1 + \left(\frac{\chi_3}{\alpha} - y \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha - \frac{1 + \chi_3}{8\mu_3} (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) y \quad (221)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \sigma_{x_3}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\alpha (C_1 + C_2 y) + \left(\frac{3 - \chi_3}{2} \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (222)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_3} \sigma_{y_3}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[-\alpha (C_1 + C_2 y) + \left(\frac{1 + \chi_3}{2} \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2\mu_3} (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) \end{aligned} \quad (223)$$

$$\frac{1}{2\mu_3} \tau_{xy_3}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\alpha (C_1 + C_2 y) - \left(\frac{\chi_3 - 1}{2} \right) C_2 \right] e^{\alpha y} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (224)$$

2.7.1. Gerilme Çekirdeklerinin Yakınsama Kontrolü

Kısım 2.4.' te belirlenmiş olan A_i , B_i ($i=1, \dots, 4$) ve C_j ($j=1, 2$) katsayıları ile (161) ve (162) denklemlerinin çözümünden bulunan $p(x)$ temas gerilmesinin kısım 2.7.' de verilmiş olan gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yerlerine konularak bu ifadelerin çekirdeklerinin yakınsayıp yakınsamadığının kontrol edilmesi gerekmektedir. Çünkü gerilme ve yer değiştirmelerin doğru olarak hesaplanabilmesi için gerilme ve yer değiştirme çekirdeklerinin yakınsamaları gerekir. Aksi halde integral sınırları doğru olarak belirlenememekte dolayısıyla da gerilme ve yer değiştirmelere ait integraller sağlıklı olarak hesaplanamamaktadır.

Yapılan incelemeler sonucunda yalnız $y \rightarrow h$ durumunda $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ gerilmelerine ait çekirdeklere yakınsama durumunun bozulduğu gözlenmiştir. Diğer yerlerde ise gerilme ve yer değiştirmelere ait çekirdeklerin yakınsadığı yani sürekli olarak sifra yaklaşıkları belirlenmiştir.

$\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ gerilmelerine ait çekirdekleri bozan singüler (tekil) terimler aşağıdaki gibi elde edilmişlerdir.

$$\sigma_{x_1s}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a p(t) dt \int_0^\infty [1 - \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos \alpha(t+x) + \cos \alpha(t-x)] d\alpha \quad (225)$$

$$\sigma_{y_1s}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a p(t) dt \int_0^\infty [1 + \alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\cos \alpha(t+x) + \cos \alpha(t-x)] d\alpha \quad (226)$$

$$\tau_{x_1s}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a p(t) dt \int_0^\infty [\alpha(h-y)] e^{-\alpha(h-y)} [\sin \alpha(t+x) + \sin \alpha(t-x)] d\alpha \quad (227)$$

Bu singüler terimlerin kapalı integralleri ise (Sneddon, 1972);

$$\sigma_{x_1k}(x, y) = -(h-y) \int_0^a \left\{ \frac{(t+x)^2}{[(h-y)^2 + (t+x)^2]^2} + \frac{(t-x)^2}{[(h-y)^2 + (t-x)^2]^2} \right\} p(t) dt \quad (228)$$

$$\sigma_{y_1k}(x, y) = -(h-y)^3 \int_0^a \left\{ \frac{1}{[(h-y)^2 + (t+x)^2]^2} + \frac{1}{[(h-y)^2 + (t-x)^2]^2} \right\} p(t) dt \quad (229)$$

$$\tau_{x_1k}(x, y) = (h-y)^2 \int_0^a \left\{ \frac{(t+x)}{[(h-y)^2 + (t+x)^2]^2} - \frac{(t-x)}{[(h-y)^2 + (t-x)^2]^2} \right\} p(t) dt \quad (230)$$

olarak elde edilirler. Yakınsamayı bozan (225), (226) ve (227) ifadelerindeki singüler terimlerin gerilme ifadelerinden çıkarılarak, bunların kapalı integrallerinin ilave edilmesi sonucunda çekirdeklerde meydana gelen bozulmalar giderilmiş olur. Eğer bu işlemler sırasıyla yapılırsa sonuçta $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ ve $\tau_{xy}(x, y)$ gerilme ifadeleri aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$\sigma_{x_1}^*(x, y) = \sigma_{x_1}(x, y) - \sigma_{x_1s}(x, y) + \sigma_{x_1k}(x, y) \quad (231)$$

$$\sigma_{y_1}^*(x, y) = \sigma_{y_1}(x, y) - \sigma_{y_1s}(x, y) + \sigma_{y_1k}(x, y) \quad (232)$$

$$\tau_{x_1y_1}^*(x, y) = \tau_{x_1y_1}(x, y) - \tau_{x_1y_1s}(x, y) + \tau_{x_1y_1k}(x, y) \quad (233)$$

Gerilme ve yer değiştirmeleri sayısal olarak hesaplayabilmek için (159) ifadesi ile verilen boyutsuz büyüklükler ile $z = \alpha h$ ve $\xi = h_2 / h$ dönüşümleri kullanılarak ifadelerin boyutsuz hale getirilmeleri gerekir. Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri boyutsuz hale getirildikten sonra Mathematica programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı yardımıyla herhangi bir noktadaki gerilme ve yer değiştirmeler hesaplanabilir.

2.8. Tabakalar Arasındaki ve Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yükleri ve İlk Ayrılma Uzaklıkları

Tabakalar arasındaki ve alt tabaka (2 nolu tabaka) ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tayini için ara yüzeylerdeki $\sigma_y(x, y)$ temas gerilmelerinin belirlenmesi gerekmektedir. Temas yüzeyi boyunca $\sigma_y(x, y)$ gerilmelerinin belirlenebilmesi için kısım 2.3.' deki sınır şartları kullanılmalıdır. Bu sınır şartları altında kısım 2.4.' de hesaplanmış olan A_i ve B_i ($i=1, \dots, 4$) katsayılarının (213) ve (218) denklemlerinde yerlerine konulması, sırasıyla $y=h_2$ ve $y=0$ alınması durumunda temas yüzeylerindeki $\sigma_{y_1}(x, h_2)$ ve $\sigma_{y_2}(x, 0)$ normal gerilmeleri,

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) = -\rho_1 g h_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^a k_2(x, t) p(t) dt, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (234)$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = -\rho_1 g h_1 \left[1 + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1} \right] - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\pi} \int_0^a k_3(x, t) p(t) dt, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (235)$$

olarak elde edilirler. Bu ifadelerde,

$$\begin{aligned}
k_2(x,t) = & \int_0^\infty \frac{2}{\Delta^*} [-m_1(1+\chi_1)e^{-4\alpha h-5\alpha h_2} (-4(e^{\alpha h+6\alpha h_2} + e^{3\alpha h+4\alpha h_2})\alpha^3 h_2^3 (1+\chi_3) + e^{\alpha h+2\alpha h_2} (e^{2\alpha h_2} \\
& (-1+\alpha h) + e^{2\alpha h} (1+\alpha h))(-m_2(1+\chi_2)(-1+e^{4\alpha h_2} - (1+\chi_3)(1-2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2}))) \\
& + e^{\alpha h+2\alpha h_2} \alpha h_2 (-e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2} - e^{6\alpha h_2} - e^{2\alpha h+4\alpha h_2} + 4(\alpha h-1)e^{4\alpha h_2} + 4(\alpha h+1)e^{2\alpha h} \\
& e^{2\alpha h_2})m_2(1+\chi_2) + (1-2e^{2\alpha h_2} + e^{4\alpha h_2})(e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2})(1+\chi_3)) + 4\alpha^2 h_2^2 e^{\alpha h+4\alpha h_2} (m_2 \\
& (1+\chi_2)(e^{2\alpha h} + e^{2\alpha h_2}) + (e^{2\alpha h_2} (\alpha h-1) + e^{2\alpha h} (\alpha h+1))(1+\chi_3))] \\
& [\cos \alpha(t+x) + \cos \alpha(t-x)] d\alpha \tag{236}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3(x,t) = & \int_0^\infty \frac{4}{\Delta^*} [-e^{-3\alpha h-2\alpha h_2} (-1+e^{2\alpha h_2} + \alpha h_2(1+e^{2\alpha h_2}))((1-\alpha h)e^{2\alpha h_2} - (1+\alpha h)e^{2\alpha h} + \alpha h_2 \\
& (e^{2\alpha h+2\alpha h_2}))m_2(1+\chi_1)(1+\chi_2)] [\cos \alpha(t+x) + \cos \alpha(t-x)] d\alpha \tag{237}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. (234) ve (235) ifadelerindeki ρ_1 , ρ_2 ve g sırasıyla (1) nolu tabakanın yoğunluğunu, (2) nolu tabakanın yoğunluğunu ve yerçekimi ivmesini göstermektedir.

Simetri nedeniyle $p(t) = p(-t)$ olarak alınır, $z = \alpha h$ ve $\xi = h_2/h$ değişken dönüşümleri yapılırsa temas yüzeyi boyunca $\sigma_{y_1}(x, h_2)$ ve $\sigma_{y_2}(x, 0)$ normal gerilmeleri,

$$\sigma_{y_1}(x, h_2) = -\rho_1 g h_1 - \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a k_2^*(x, t) p(t) dt, \quad (0 \leq x < \infty) \tag{238}$$

$$\sigma_{y_2}(x, 0) = -\rho_1 g h_1 \left[1 + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1} \right] - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\pi h} \int_{-a}^a k_3^*(x, t) p(t) dt, \quad (0 \leq x < \infty) \tag{239}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned}
k_2^*(x,t) = & \int_0^\infty \frac{2}{\Delta^{**}} [-m_1(1+\chi_1)e^{-4z-5z\xi} (-4(e^{z+6z\xi} + e^{3z+4z\xi})z^3\xi^3(1+\chi_3) + e^{z+2z\xi}(e^{2z\xi} \\
& (-1+z) + e^{2z}(1+z))(-m_2(1+\chi_2)(-1+e^{4z\xi} - (1+\chi_3)(1-2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})) \\
& + e^{z+2z\xi}z\xi(-e^{2z} + e^{2z\xi} - e^{6z\xi} - e^{2z+4z\xi} + 4(z-1)e^{4z\xi} + 4(z+1)e^{2z}e^{2z\xi})m_2 \\
& (1+\chi_2) + (1-2e^{2z\xi} + e^{4z\xi})(e^{2z} + e^{2z\xi})(1+\chi_3)) + 4z^2\xi^2e^{z+4z\xi}(m_2(1+\chi_2) \\
& (e^{2z} + e^{2z\xi}) + (e^{2z\xi}(z-1) + e^{2z}(z+1))(1+\chi_3))] \cos\left[\frac{z}{h}(t-x)\right] dz \quad (240)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3^*(x,t) = & \int_0^\infty \frac{4}{\Delta^{**}} [-e^{-3z-2z\xi}(-1+e^{2z\xi} + z\xi(1+e^{2z\xi}))((1-z)e^{2z\xi} - (1+z)e^{2z} + z\xi(e^{2z+2z\xi})) \\
& m_2(1+\chi_1)(1+\chi_2)] \cos\left[\frac{z}{h}(t-x)\right] dz \quad (241)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. Kısım 2.6.' da (159) ifadesi ile tanımlanmış olan boyutsuz büyüklükler (238) ve (239) denklemlerinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\sigma_{y_1}(x, h_2)}{P/h} = -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 k_2(x, ar) \Phi(r) dr, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (242)$$

$$\frac{\sigma_{y_2}(x, 0)}{P/h} = -\frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1} \right] - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 k_3(x, ar) \Phi(r) dr, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (243)$$

olarak elde edilir. Burada λ yük faktörü olup,

$$\lambda = \frac{P}{\rho_1 g h h_1} \quad (244)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Kısım 2.6.' da açıklandığı gibi (161) ve (162) denklemlerinin ortak çözümü sonucunda $\phi(r)$ boyutsuz temas gerilmesi hesaplanabilir. Hesaplanan $\phi(r)$ değerlerinin (242) ve (243) ifadelerinde yerine konulması ve Gauss integrasyon formülasyonunun

kullanılması ile de tabakaların temas yüzeyi boyunca $\frac{\sigma_{y_1}(x, h_2)}{P/h}$ ve $\frac{\sigma_{y_2}(x, 0)}{P/h}$ boyutsuz temas gerilmeleri elde edilmiş olur.

(244) ifadesi ile tanımlanmış olan λ yük faktörünün belli bir kritik değere (λ_{cr}) ulaşması halinde tabakalar arasında ayrılmalar söz konusu olur. Bu nedenle (161) ve (162) denklemlerinin geçerli olabilmesi için $\frac{\sigma_{y_1}(x, h_2)}{P/h}$ ve $\frac{\sigma_{y_2}(x, 0)}{P/h}$ temas gerilmelerinin temas yüzeyi boyunca her yerde basınç olması gerekir. Bu da ancak $0 \leq \lambda \leq \lambda_{cr}$ olması ile sağlanabilir. $\lambda > \lambda_{cr}$ olması durumunda ise tabakalar arasında ayrılma başlar ve problem süreksiz temas problemine dönüşür. Dolayısıyla da sürekli temas durumundaki sınır şartları geçersiz olur.

Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığının belirlenebilmesi için (242) ve (243) denklemlerinin sıfıra eşitlenmesi gerekir.

$$-\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 k_2(x, ar) \Phi(r) dr = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (245)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \left[1 + \frac{\rho_2 h_2}{\rho_1 h_1} \right] - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{1}{\pi} \frac{a}{h} \int_{-1}^1 k_3(x, ar) \Phi(r) dr = 0, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (246)$$

Bu eşitliklerden yararlanılarak ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığı (noktası) birlikte bulunurlar. Bu eşitliği sağlayan x uzaklığı ilk ayrılma noktası (x_{cr}) ve buna karşılık gelen yük faktörü de kritik yük faktörü (λ_{cr}) olarak bulunur. İlk ayrılmayı meydana getiren kritik yük faktörünün,

$$\lambda_{cr} = \frac{P_{cr}}{\rho_1 g h h_1} \quad (247)$$

olduğu açıktır. Bu yük faktöründen daha büyük yük faktörleri için ($\lambda > \lambda_{cr}$) yukarıda belirtildiği gibi tabakalar arasında açılmalar meydana gelir. Bu durumda problemi süreksiz temas problemi olarak incelemek gerekir.

3. BULGULAR VE İRDELEME

3.1. Giriş

Bu bölümde, rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan iki elastik tabakanın sürekli temas problemine ilişkin çeşitli boyutsuz büyüklükler için bölüm 2’ de elde edilen ifadeler yardımıyla değme uzunlukları, değme gerilmeleri, y simetri ekseninde ortaya çıkan σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ile bu eksen yakınlarındaki τ_{xy} kayma gerilmelerinin değişimi incelenmiştir. Ayrıca x eksenı boyunca tabakalar arasındaki ve alt tabaka-elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki σ_x gerilmesinin değişimi ile tabakalar arasındaki ve alt tabaka-elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir. Bunların değişimleri tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

3.2. Değme Uzunlukları ve Değme Gerilmeleri

Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özellikleri, panç yarıçapı, yük oranı ve alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranına ait boyutsuz büyüklüklerin çeşitli değerleri için yarı değme uzunlukları ve değme gerilmeleri elde edilmiştir.

Şekil 2 ve 3’ de yarı değme uzunluklarının panç yarıçapı ve yük oranı ile değişimleri görülmektedir. Şekil 2’ de dairesel panç yarıçapının çeşitli değerleri için yarı değme uzunluklarının yük oranı ile değişimi verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi yük oranı arttıkça yarı değme uzunlukları azalmaktadır. Şekil 3’ de ise yük oranının çeşitli değerleri için yarı değme uzunluklarının panç yarıçapı ile değişimi görülmektedir. Şekilde de görüldüğü üzere panç yarıçapı arttıkça yarı değme uzunlukları da artmakta olup bu beklenen bir sonuçtur. Çeşitli yük oranı ve panç yarıçapı değerleri için yarı değme uzunluklarının değişimi Tablo 1’ de verilmiştir. Tablo 1’ deki verilerin Şekil 1 ve Şekil 2’ deki sonuçları desteklediği açıkça görülmektedir.

Malzeme sabitleri χ_1 , χ_2 ve χ_3 ' ün aynı değerleri alması durumunda, tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin poisson oranlarının da eşit olacağı aşikardır. Dolayısıyla μ_2/μ_1 ve μ_3/μ_2 kayma modülü oranlarının değişimi elastisite modülleri oranının değişimi (E_2/E_1 , E_3/E_2) olarak da değerlendirilebilir. Bu veriler ışığında Tablo 2, Şekil 4 ve Şekil 5' de de görüldüğü gibi μ_2/μ_1 ve μ_3/μ_2 oranlarının artması ile yarı değme uzunlukları azalmaktadır.

Tablo 3' de pañç yarıçapının çeşitli değerleri için, alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının değişimi görülmektedir. Buna göre alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı artırıldıkça yarı değme uzunluklarının arttığı görülmektedir.

Şekil 6-10' da çeşitli boyutsuz büyüklükler için pañç altındaki değme gerilmelerinin dağılımı verilmektedir. Bu şekillerden değme uzunlukları ile değme gerilmelerinin ters orantılı olduğu görülmektedir. Bunun nedeni ise değme uzunluğu arttıkça yük daha geniş bir alana yayılacağından değme gerilmesi azalmaktadır. Şekillerde göze çarpan bir diğer nokta ise değme gerilmelerinin en büyük değeri $x=0$ simetri ekseninde olmakta, buradan uzaklaştıkça değme gerilmeleri azalarak $x=\mp a$ noktalarında sıfır değerini almaktadır.

Şekil 6' da görüldüğü gibi pañç yarıçapı arttıkça yük daha geniş alana yayılacağından değme gerilmeleri azalmaktadır. Şekil 7' de ise $\mu_1/(P/h)$ yük oranının değişimine bağlı olarak değme gerilmesi yayılışı görülmektedir. Şekil incelendiğinde $\mu_1/(P/h)$ yük oranı arttıkça değme gerilmeleri artmaktadır.

Şekil 8-9' da tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranlarına bağlı olarak değme gerilmesinin dağılımı verilmektedir. $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$ alındığında μ_2/μ_1 ve μ_3/μ_2 kayma modülü oranlarının değişimi elastisite modülleri oranının değişimi (E_2/E_1 , E_3/E_2) olarak da değerlendirilebilir. μ_2/μ_1 ve μ_3/μ_2 oranları arttıkça, yani alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre arttıkça değme uzunluklarının azaldığı ve bunun sonucu olarak da değme gerilmelerinin arttığı görülmektedir.

Şekil 10' da alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranının çeşitli değerleri için değme gerilmesinin dağılımı incelenmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi alt

tabakanın yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı arttıkça değme gerilmeleri azalmaktadır.

Tablo 1. Dairesel panç yarıçapı ve yük oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 2$, $\mu_3 / \mu_2 = 2$)

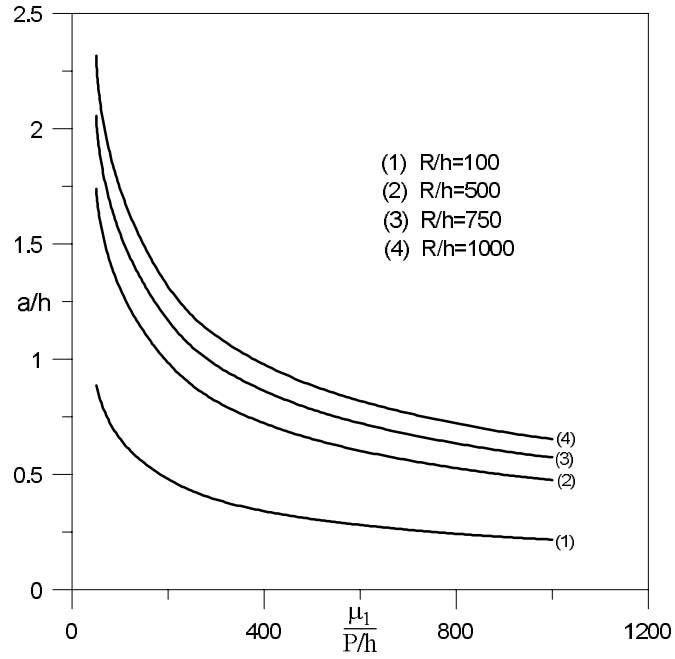
$\frac{\mu_1}{P/h}$	$\frac{R}{h} = 10$	$\frac{R}{h} = 50$	$\frac{R}{h} = 100$	$\frac{R}{h} = 250$	$\frac{R}{h} = 500$	$\frac{R}{h} = 750$	$\frac{R}{h} = 1000$
	a/h	a/h	a/h	a/h	a/h	a/h	a/h
10	0.6541	1.3043	1.7382	2.5392	3.3912	4.0241	4.5486
50	0.3069	0.6541	0.8861	1.3043	1.7382	2.0552	2.3149
100	0.21806	0.4762	0.6541	0.9747	1.3043	1.5433	1.7382
250	0.13815	0.3069	0.4287	0.6541	0.8861	1.0529	1.1883
500	0.0977	0.21806	0.3069	0.4762	0.6541	0.7822	0.8861
750	0.07978	0.17824	0.25142	0.39304	0.5442	0.6541	0.7429
1000	0.0691	0.15443	0.21806	0.3421	0.4762	0.5743	0.6541

Tablo 2. Tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R/h = 500$, $\mu_1 / (P/h) = 100$)

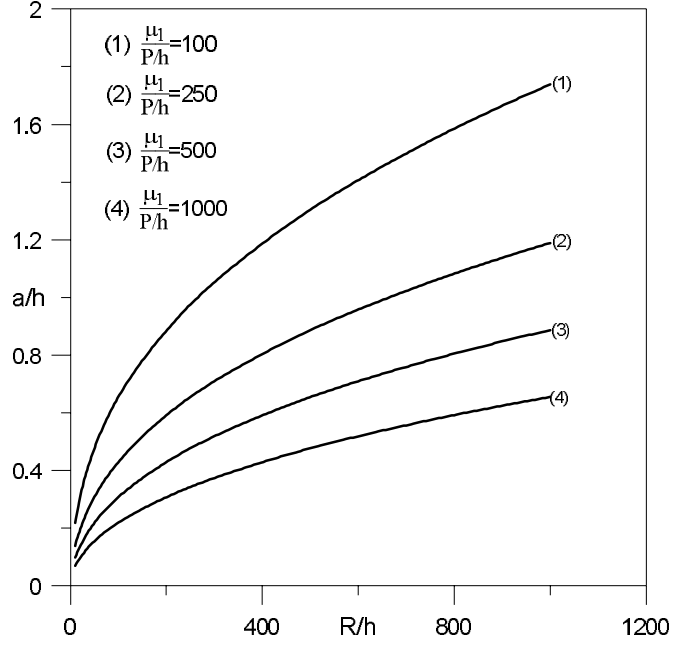
$\frac{\mu_3}{\mu_2}$	$\frac{\mu_2}{\mu_1}$							
	0.05	0.1	0.5	1	2	4	10	50
	a/h	a/h	a/h	a/h	a/h	a/h	a/h	a/h
0.05	28.9125	20.2902	8.9029	6.2289	4.3563	3.0602	1.9752	1.1992
0.1	20.3251	14.2906	6.3108	4.4462	3.1538	2.2757	1.5734	1.1308
0.5	9.1128	6.4652	2.9996	2.2196	1.7078	1.3936	1.1798	1.0602
1	6.5754	4.7186	2.3075	1.7805	1.4471	1.2509	1.1213	1.0486
2	4.8971	3.5851	1.8903	1.5281	1.3043	1.1752	1.0902	1.0423
4	3.8491	2.8972	1.6574	1.3925	1.2295	1.1357	1.0741	1.0391
10	3.1154	2.4311	1.5096	1.3082	1.1836	1.1115	1.0639	1.0371
50	2.6881	2.1654	1.4287	1.2623	1.1587	1.0985	1.0586	1.0359

Tablo 3. Panç yarıçapının çeşitli değerleri için yarı değme uzunluklarının tabaka yükseklikleri ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$, $\mu_1/(P/h) = 500$)

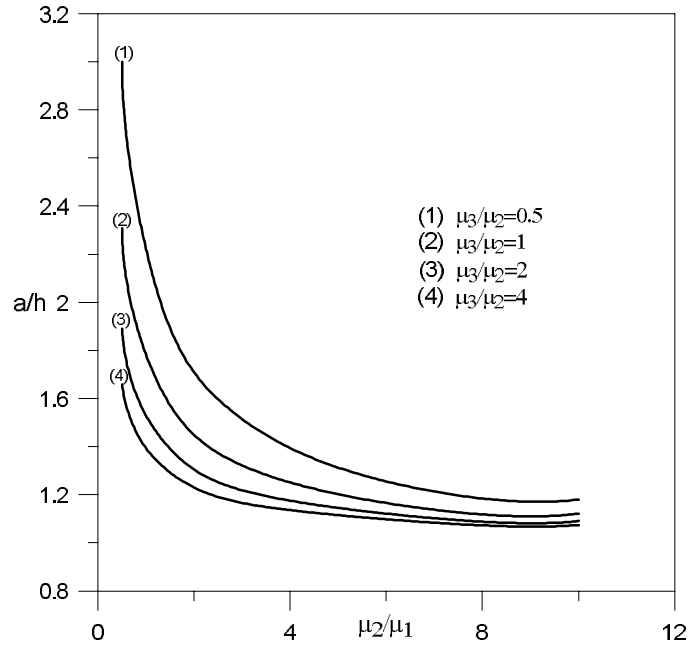
$\frac{h_2}{h}$	R/h=100	R/h=500	R/h=1000
	a/h	a/h	a/h
0.1	0.3167	0.7475	1.0801
0.2	0.3197	0.7619	1.0981
0.3	0.3236	0.7778	1.1159
0.4	0.3285	0.7932	1.1317
0.5	0.3343	0.8052	1.1432
0.6	0.3408	0.8115	1.1482
0.7	0.3466	0.8235	1.1487
0.8	0.3489	0.8263	1.1506



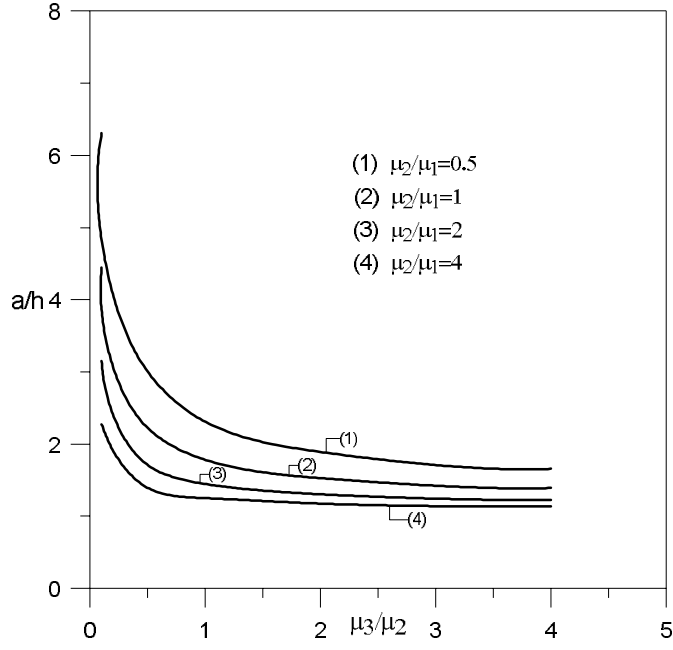
Şekil 2. Dairesel panç yarıçapına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



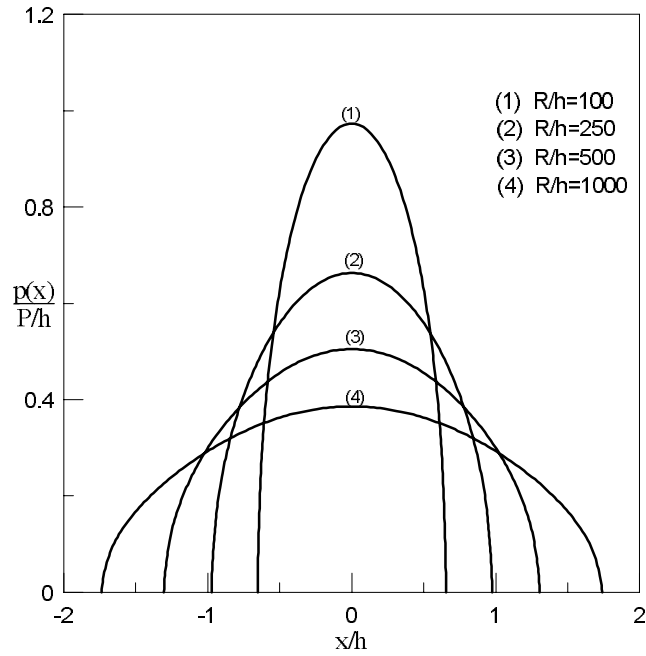
Şekil 3. Yük oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının dairesel panç yarıçapı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $\mu_2 / \mu_1 = 2$, $\mu_3 / \mu_2 = 2$)



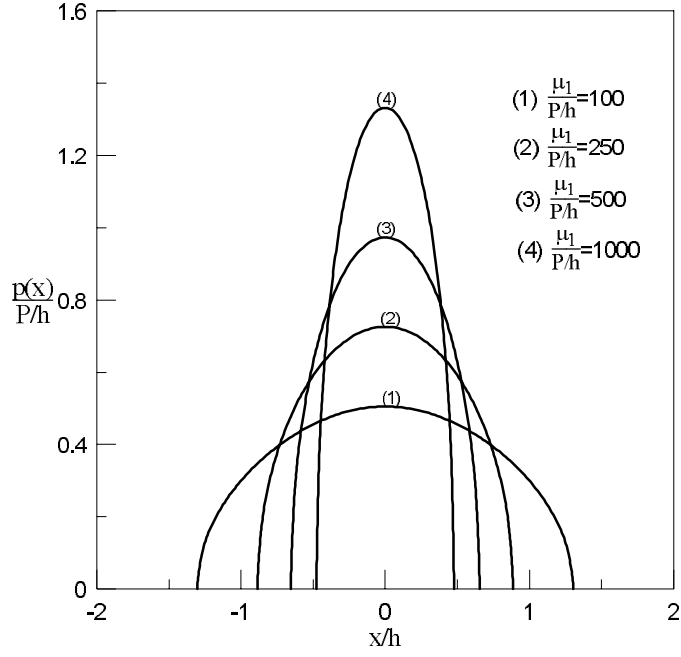
Şekil 4. Elastik yarı sonsuz düzlem ile alt tabakanın kayma modülü oranlarına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R / h = 500$, $\mu_1 / (P / h) = 100$)



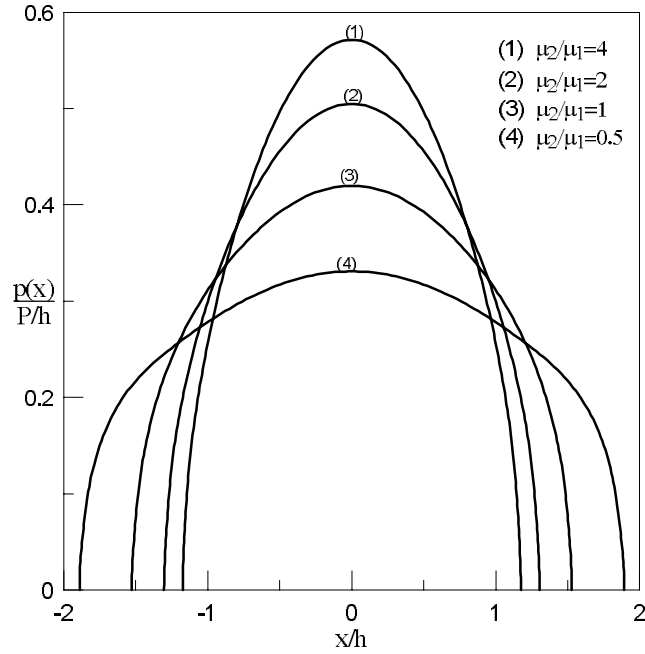
Şekil 5. Tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak yarı değme uzunluklarının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1=1$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $R/h = 500$, $\mu_1/(P/h) = 100$)



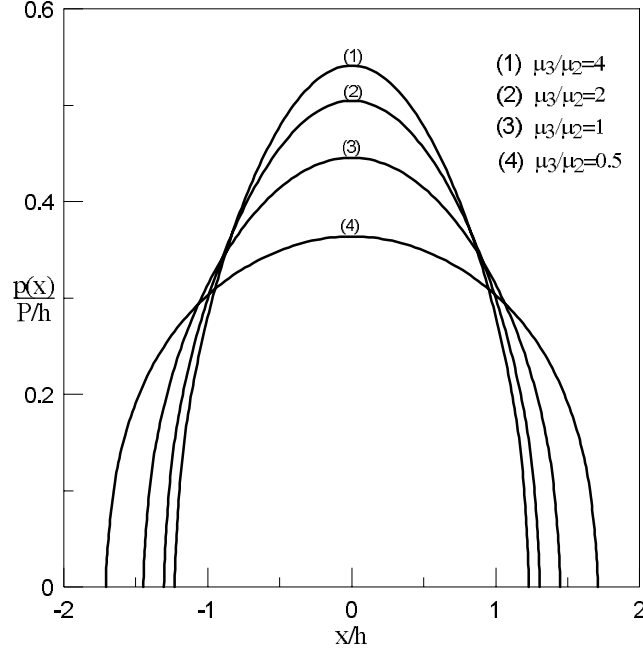
Şekil 6. Çeşitli panç yarıçapı değerleri için panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$, $\mu_1/(P/h) = 100$, $\mu_2/\mu_1 = 2$)



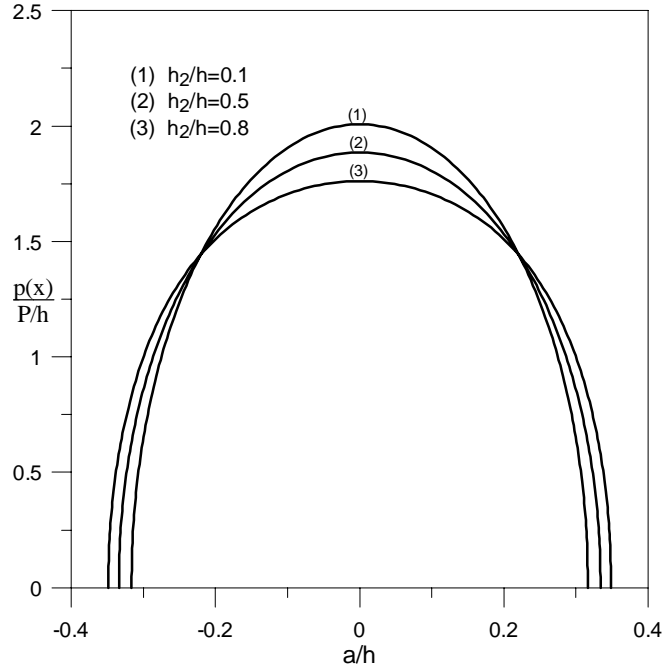
Şekil 7. Çeşitli yük oranı değerleri için panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 8. Tabakaların kayma modüllerinin oranlarına bağlı olarak panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $\mu_1/(P/h) = 100$, $R/h = 500$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 2$)



Şekil 9. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranlarına bağlı olarak panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $\mu_2 / \mu_1 = 2$, $h_2 / h_1 = 1$, $R / h = 500$, $\mu_1 / (P / h) = 100$)



Şekil 10. Alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranına bağlı olarak panç altındaki değme gerilmesi yayılışı ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $R / h = 100$, $\mu_1 / (P / h) = 500$, $\mu_2 / \mu_1 = 1$, $\mu_3 / \mu_2 = 1$)

3.3. Normal Gerilmelerin ve Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

Simetri eksenini boyunca (y eksenini), σ_x , σ_y normal gerilmeleri ve bu eksene yakın bir yerde ($x/h=0.5$ ' de) τ_{xy} kayma gerilmeleri incelenmiştir. Ayrıca x eksenini boyunca tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında σ_x gerilmesinin dağılımını elde edilmiştir.

3.3.1. σ_x Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

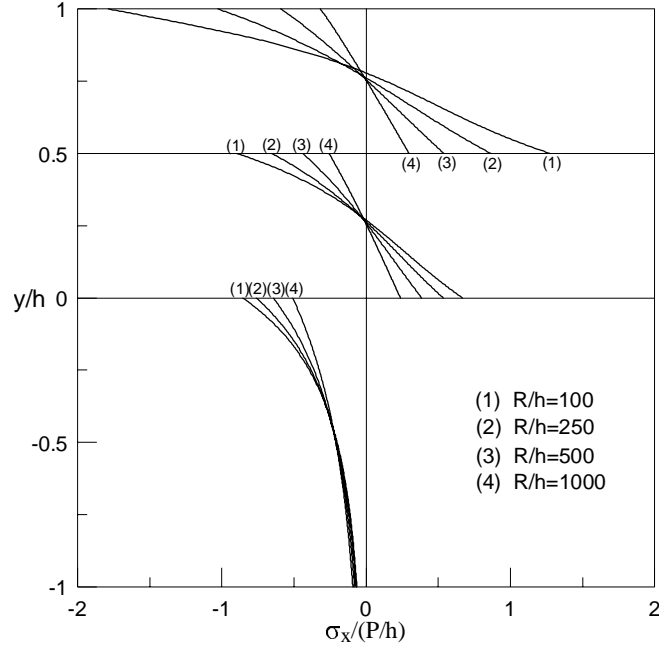
İlk olarak $x=0$ simetri eksenini boyunca σ_x normal gerilme değerleri çeşitli boyutsuz büyüklükler için hesaplanmıştır.

Şekil 11' de σ_x normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimini görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi panç yarıçapı küçüldükçe σ_x normal gerilmesinin değeri üst tabakada, alt tabakada ve elastik yarı sonsuz düzlemde artmaktadır. Üst tabakada tabakanın üst bölgesinde basınç gerilmeleri oluşmakta, tabakanın alt kısımlarına doğru inildikçe değeri azalarak sıfır olmakta daha sonra işaret değiştirerek çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Alt tabakada da benzer durum söz konusu olmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlem için ise gerilme en büyük değerini alt tabakaya değme yüzeyinde almakta ve derine inildikçe ($y \rightarrow -\infty$) her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfıra doğru yaklaşmaktadır. Şekil 11' de göze çarpan bir diğer sonuç ise üst ve alt tabakada çekme ve basınç bölgelerindeki gerilme alanlarının birbirine eşit olmasıdır. Ayrıca üst ve alt tabaka için panç yarıçapı arttıkça gerilme dağılımlarının lineerliğe yaklaştığı görülmektedir.

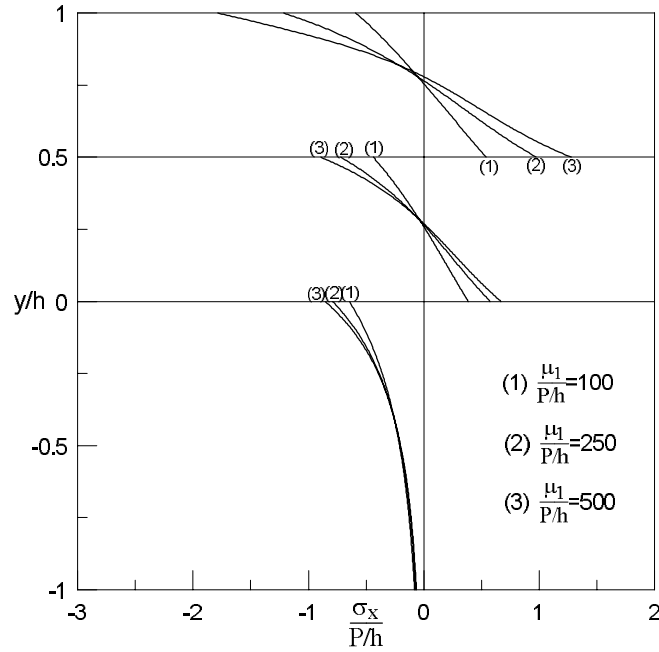
Şekil 12' de σ_x normal gerilmesinin yük oranı ile değişimini verilmektedir. Şekle bakıldığında yük oranı arttıkça üst tabakada, alt tabakada ve elastik yarı sonsuz düzlemde σ_x normal gerilmesinin arttığı görülmektedir. Yarıçap değişiminde olduğu gibi yük oranının değişiminde de tabakaların üst kısımlarında basınç gerilmeleri oluşmakta ve tabakaların alt kısımlarına doğru inildikçe azalarak belli bir değerde sıfır olup çekme gerilmesi olarak artmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlem için ise yine gerilme en büyük değerini alt tabaka ile değme yüzeyinde almakta ve derine inildikçe her yerde basınç

gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfıra doğru gitmektedir. Ayrıca üst ve alt tabakada çekme ve basınç bölgelerindeki gerilme alanlarının birbirine eşit olması ve yük arttıkça gerilme dağılımlarının lineerliğe yaklaşması Şekil 12’ de göze çarpan diğer hususlardır.

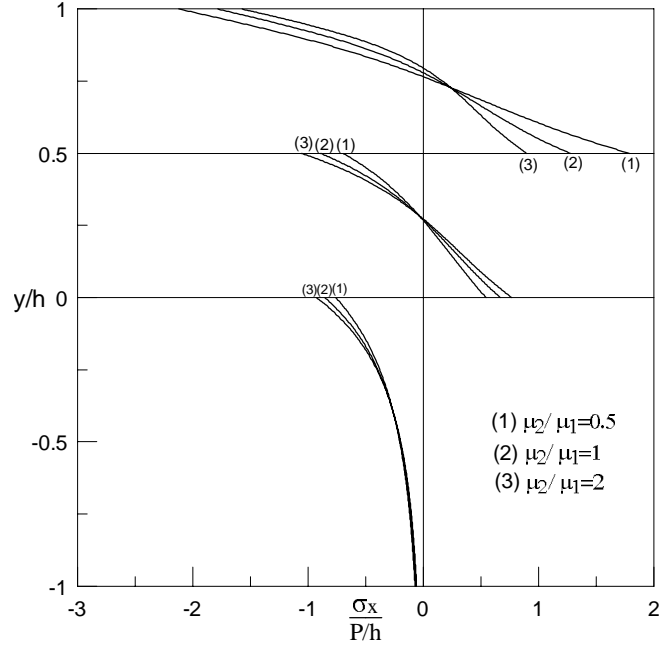
Şekil 13 ve Şekil 14’ de tabakaların ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranlarının çeşitli değerleri için σ_x normal gerilmesinin değişimi görülmektedir. Şekil 13’ te görüldüğü gibi alt tabakanın kayma modülünün üst tabakanın kayma modülüne oranı azaldıkça yani alttaki tabaka üstteki tabakaya oranla yumuşadıkça alttaki tabakada σ_x normal gerilmeleri azalmakta üstteki tabakadaki gerilmeler ise artmaktadır. Bu durum (Birinci, 1998)’ de de belirtildiği gibi elastik tabakanın rijitliğinin artması halinde söz konusu tabakada σ_x normal gerilmelerinin büyüyeceğini, tersi durumunda da azalacağını göstermektedir. Elastik yarı sonsuz düzlem için ise μ_2 / μ_1 oranı arttıkça gerilmelerin arttığı görülmektedir. Daha önceden de belirtildiği gibi bu durumda da tabakaların üst bölgelerinde basınç gerilmeleri alt bölgelerinde ise çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlem için ise her yerde basınç gerilmeleri hakim olup en büyük değerini değme yüzeyinde almakta ve derine inildikçe sıfıra yaklaşmaktadır. Üst tabakada μ_2 / μ_1 oranı küçüldükçe, alt tabakada ise μ_2 / μ_1 oranı büyüdükçe gerilme dağılımları lineerliğe yaklaşmaktadır. Yine üst ve alt tabakada çekme ve basınç bölgelerindeki gerilme alanlarının birbirine eşit olduğu görülmektedir. Şekil 14’ de elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün alt tabakanın kayma modülüne oranının çeşitli değerleri için σ_x normal gerilmesinin dağılımı görülmektedir. Bu durumda ise μ_3 / μ_2 oranı arttıkça yani alt tabakanın rijitliği elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğine göre azaldıkça elastik yarı sonsuz düzlemde gerilmeler artmakta tabakalarda ise azalmaktadır. Tabakalar ve elastik yarı sonsuz düzlem için çekme ve basınç bölgelerindeki değişim tabakaların daha önceki durumlarına benzer özelliktedir. Şekil 15’ de ise kütle kuvvetlerinin olması durumunda σ_x normal gerilmesinin değişimi incelenmiştir. Şekilde görüldüğü gibi tabakaların kütle kuvvetlerinin hesaba katılması durumunda tabakalar için σ_x normal gerilmeleri artmaktadır. Tabakaların kütle kuvvetleri arttıkça gerilmeler de buna bağlı olarak artmaktadır.



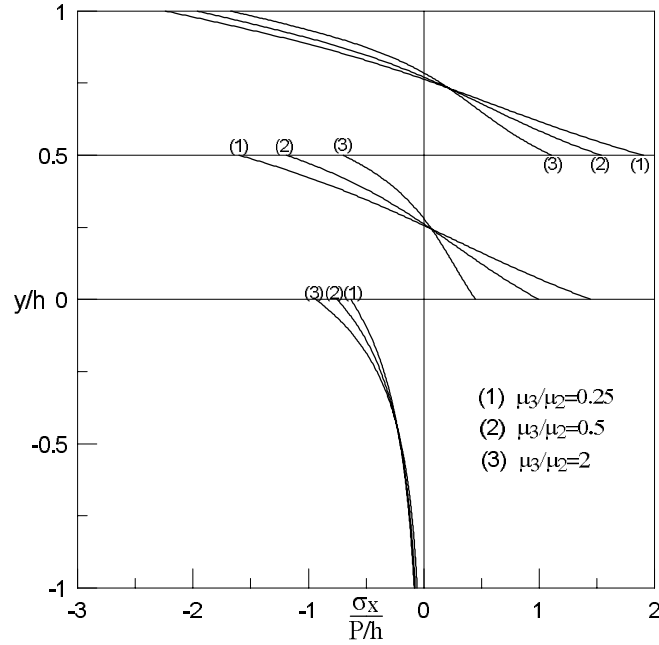
Şekil 11. $\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



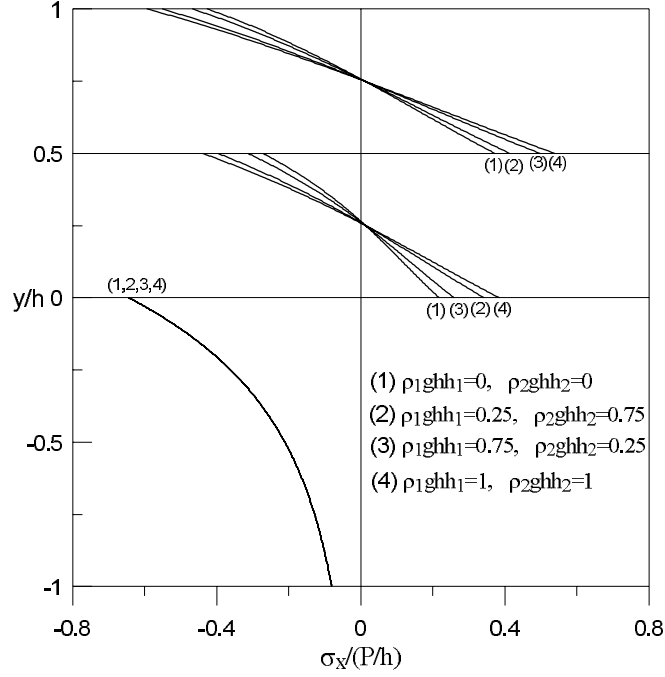
Şekil 12. $\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



Şekil 13. $\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\mu_1/(P/h) = 500$, $R/h = 500$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



Şekil 14. $\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 1$)



Şekil 15. $\sigma_x(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kütle kuvvetleri ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2, h_2/h_1 = 1, R/h = 100, \mu_1/(P/h) = 500, \mu_2/\mu_1 = 1, \mu_3/\mu_2 = 1$)

Şekil 16-20' de çeşitli boyutsuz büyüklükler için tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında x eksenini boyunca σ_x boyutsuz normal gerilmesinin değişimi incelenmiştir.

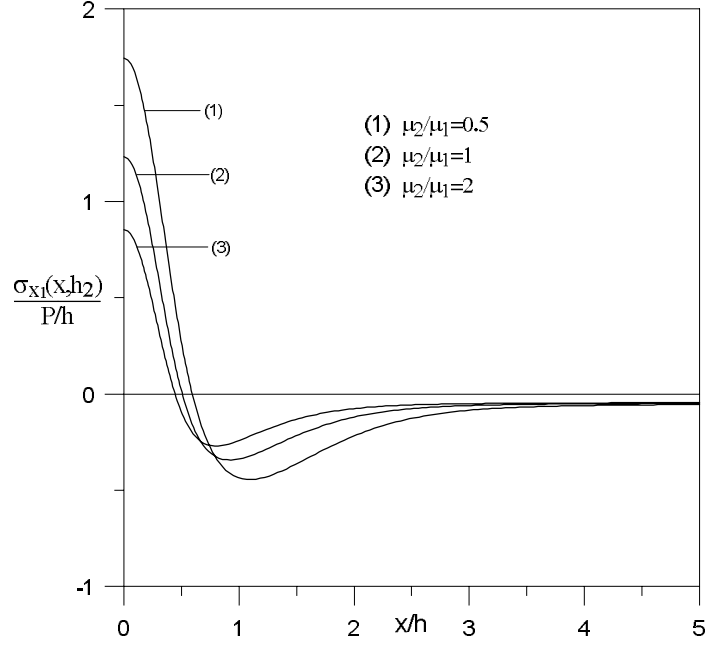
Şekil 16' da tabakaların kayma modülleri oranına bağlı olarak x eksenini boyunca tabakalar arasında oluşan σ_x gerilmesinin değişimi görülmektedir. Şekilde de görüldüğü gibi μ_2/μ_1 oranı arttıkça tabakalar arasındaki $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı maksimum değerler de azalmaktadır. Değme yüzeyinde $x=0$ ' dan itibaren çekme gerilmeleri oluşmakta ve x ekseninden uzaklaştıkça azalarak belli bir değerden sonra basınç gerilmeleri oluşmakta ve belli bir noktada maksimum değerine ulaştıktan sonra azalarak sifira yaklaşmaktadır. Göze çarpan bir diğer husus ise μ_2/μ_1 oranı arttıkça çekme gerilmeleri etkisini daha erken kaybetmekte, basınç gerilmelerinin maksimum değerine ulaştığı nokta ise y eksenine daha yakın olmaktadır.

Şekil 17' de ise tabakaların kayma modülleri oranlarına bağlı olarak x eksenini boyunca alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında oluşan σ_x gerilmesinin değişimi verilmektedir. Burada tabakalar arasında oluşan durumun tersi söz konusudur. Çünkü

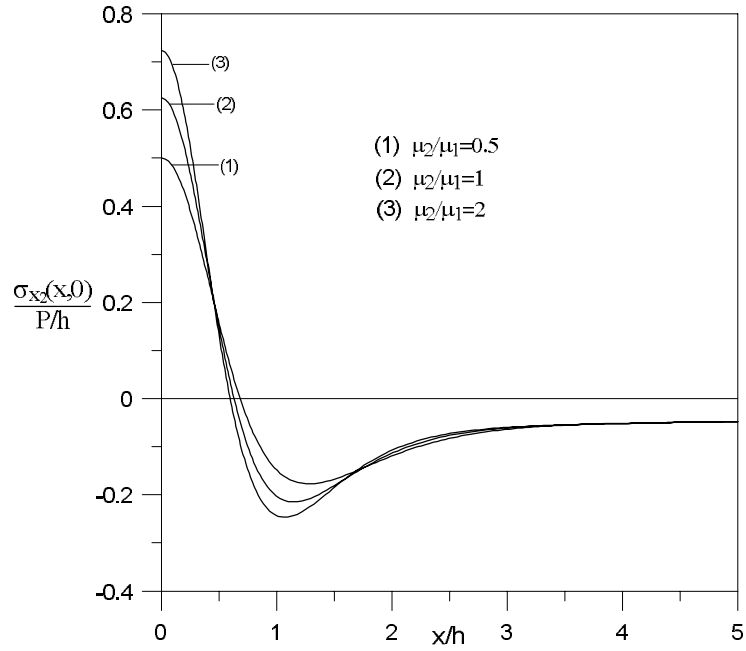
μ_2 / μ_1 oranı arttıkça alt tabakanın rijitliği artmakta, dolayısıyla $\sigma_{x_2}(x,0)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı maksimum değerler de artmaktadır. x eksenini boyunca gerilmenin değişimi tabakalar arasındaki durumla benzer olmakla beraber μ_2 / μ_1 oranı arttıkça basınç gerilmelerinin maksimum değerine ulaştığı nokta yine y eksenine daha yakın bir yerde olmaktadır.

Şekil 18 ve Şekil 19' da görüldüğü gibi alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı (μ_3 / μ_2) arttıkça $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ ve $\sigma_{x_2}(x,0)/(P/h)$ boyutsuz gerilmelerinin çekme bölgelerinde aldığı maksimum değerler azalmaktadır. Basınç bölgelerindeki maksimum değerler tabakalar arasında birbirine yakın çıkarken, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında azalmaktadır. Yine x ekseninden uzaklaştıkça gerilmelerin değişimi daha önce bahsedilen durumlarla benzer olmaktadır.

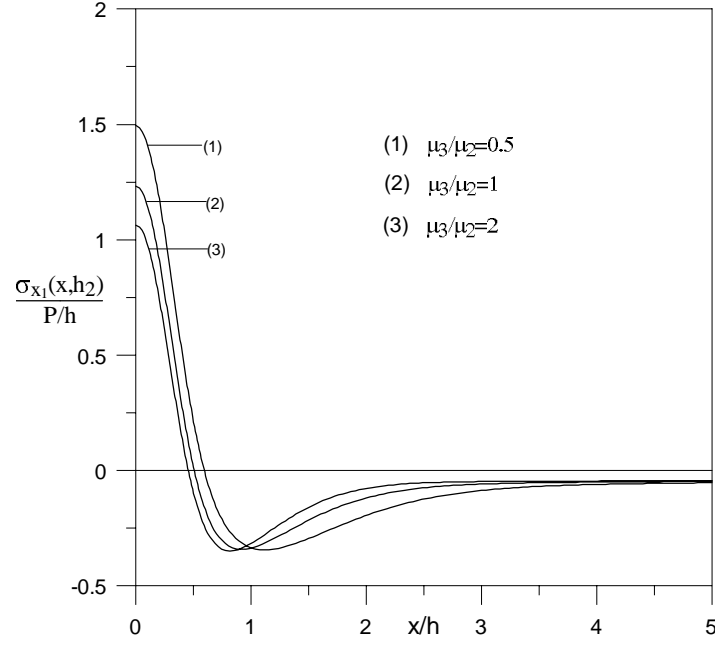
Şekil 20' de tabakaların kütle kuvvetlerinin olması durumuna ait çeşitli durumlar için tabakalar arasındaki σ_x gerilmesinin değişimi görülmektedir. Tabakaların kütle kuvvetleri artırıldıkça tabakalar arasında $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin çekme bölgesinde aldığı maksimum değer azalırken basınç bölgesinde aldığı maksimum değer artmaktadır. Şekilde dikkat çeken diğer bir durum ise tabakaların kütle kuvvetleri aynı oranda artırıldığında $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin basınç bölgesinde maksimum değerine ulaştığı nokta her durumda y eksenine eşit uzaklıkta olmasıdır.



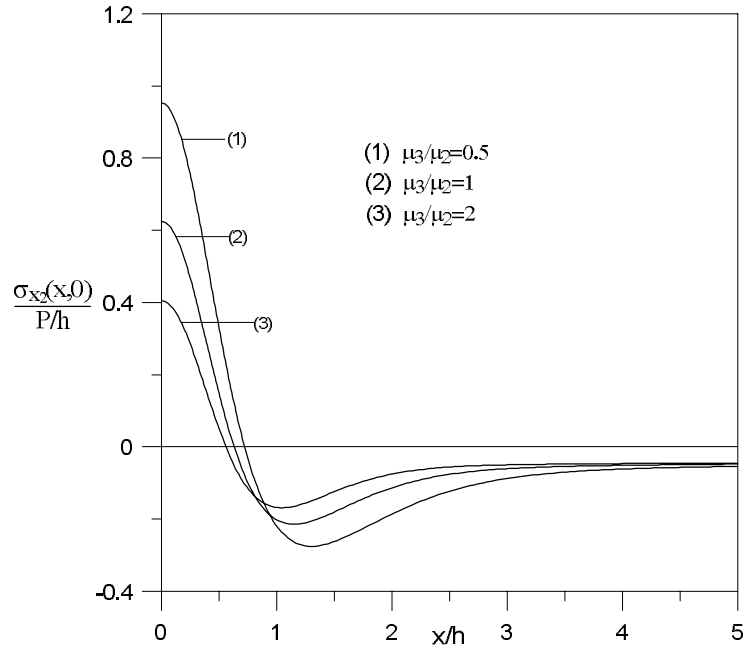
Şekil 16. Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($R/h=100$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



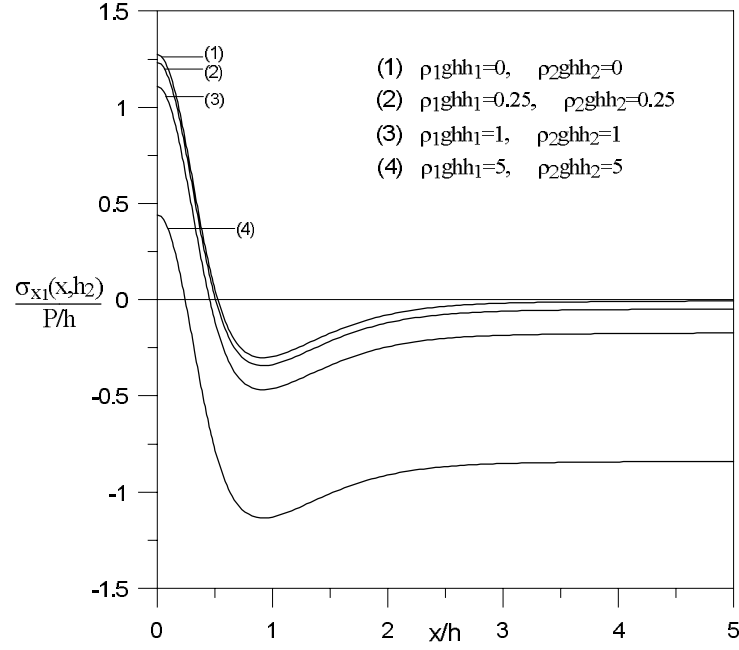
Şekil 17. Tabakaların kayma modüllerinin oranına bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($R/h=100$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$, $\mu_1/(P/h) = 500$)



Şekil 18. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($h_2/h_1=1$, $\chi_1=\chi_2=\chi_3=2$, $\mu_2/\mu_1=1$, $R/h=100$, $\mu_1/(P/h)=500$)



Şekil 19. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranına bağlı olarak $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($h_2/h=1$, $R/h=100$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\chi_1=\chi_2=\chi_3=2$, $\mu_1/(P/h)=500$)



Şekil 20. Tabakaların kütle kuvvetlerine bağlı olarak x eksenini boyunca $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin değişimi ($R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)

3.3.2. σ_y Normal Gerilmelerinin İncelenmesi

Şekil 22-26' da simetri eksenini boyunca σ_y boyutsuz normal gerilmesi dağılımını incelenmiştir. σ_y normal gerilmeleri en büyük değerlerini pançın değme yüzeyinde ($y=h$) almakta ve pançtan uzaklaştıkça (derine inildikçe) azalarak sifıra doğru yaklaşmaktadır. Üst tabaka ile alt tabakanın değme yüzeyinde ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin değme yüzeyinde gerilmeler aynı değerleri almış ve problemin tanımında verilen sınır şartlarının sağlandığı görülmüştür.

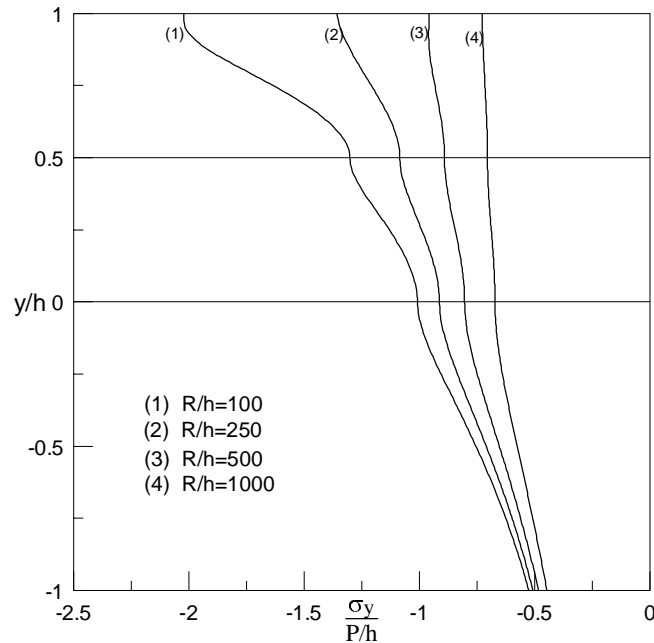
Şekil 21' de görüldüğü gibi panç yarıçapı arttıkça σ_y gerilmeleri azalmaktadır. Panç yarıçapının azalması durumunda ise gerilmeler artmaktadır. Elastisite teorisinden, tekil yükün altında düşey normal gerilmenin sonsuza gittiği bilinmektedir. Burada da yarıçapın azalması sonucu pançın değme yüzeyi azalmakta ve tekil yük haline yaklaşmaktadır.

Şekil 22' de yük oranının değişimine göre σ_y gerilmelerinin dağılışı görülmektedir. Şekil incelendiğinde yük oranı arttıkça σ_y gerilmelerinin arttığı görülmektedir. Şekil 23 ve

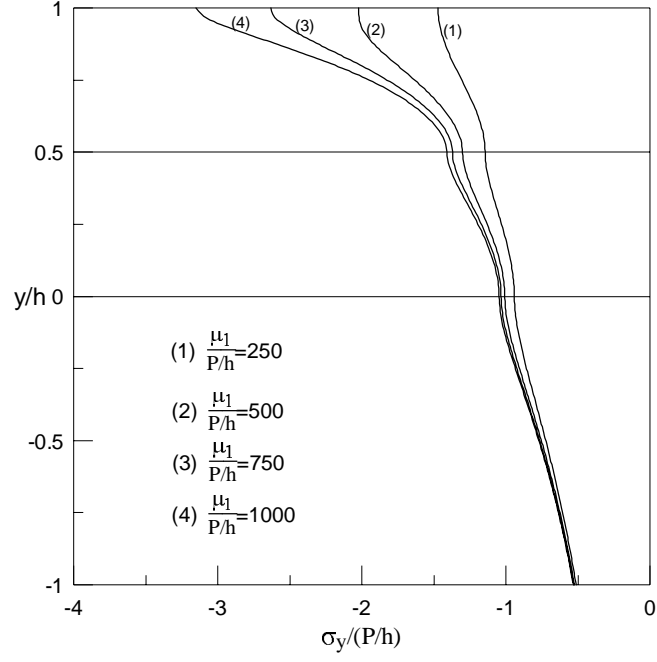
Şekil 24’ de ise tabakaların ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modüllerinin oranının çeşitli değerleri için σ_y gerilmesinin değişimi görülmektedir. Şekillerde de görüleceği üzere alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre arttıkça σ_y boyutsuz normal gerilmeleri artmaktadır.

Şekil 25’ de ise kütle kuvvetlerinin hesaba katılması durumunda σ_y normal gerilmesinin değişimi görülmektedir. Şekil incelendiğinde tabakaların kütle kuvvetleri dikkate alındığında gerilme dağılımı kesit boyunca yüzeyden derine inildikçe artmakta, kütle kuvvetleri dikkate alınmadığı zaman ise azalmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemin kütle kuvveti ihmal edildiği için her iki durumda da gerilme dağılımı giderek azalmaktadır.

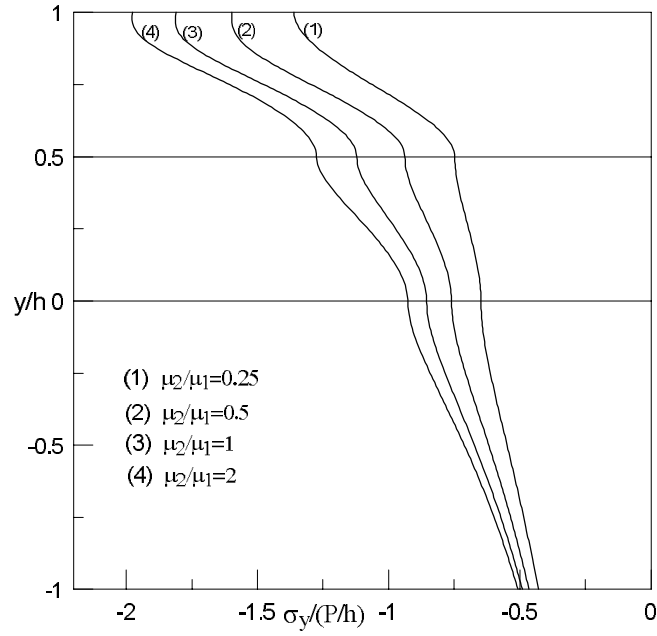
Şekil 26’ da alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranının çeşitli değerleri için σ_y normal gerilmesi dağılımının değişimi görülmektedir. Burada alt tabaka üst tabakaya göre daha rijit seçildiğinde ve alt tabakanın yüksekliği artırıldıkça temas yüzeyine yakın bölgelerde σ_y gerilmesinin arttığı gözlenmektedir.



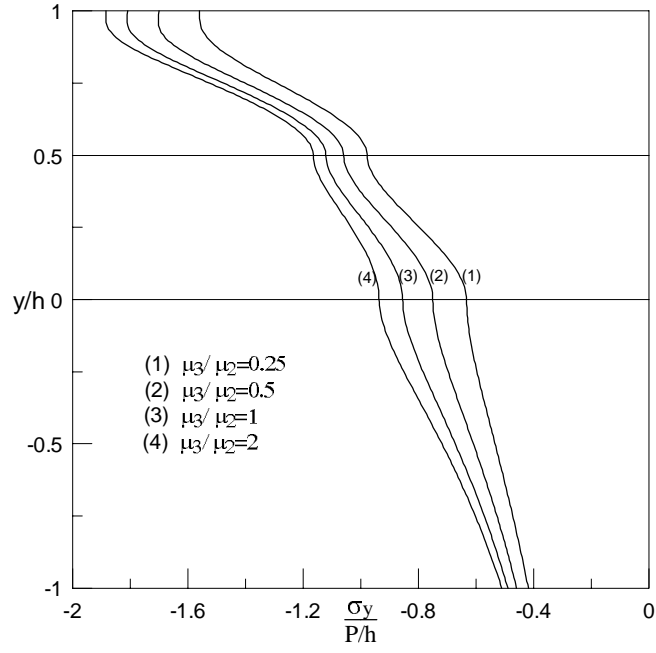
Şekil 21. $\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin panç yarıçapı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



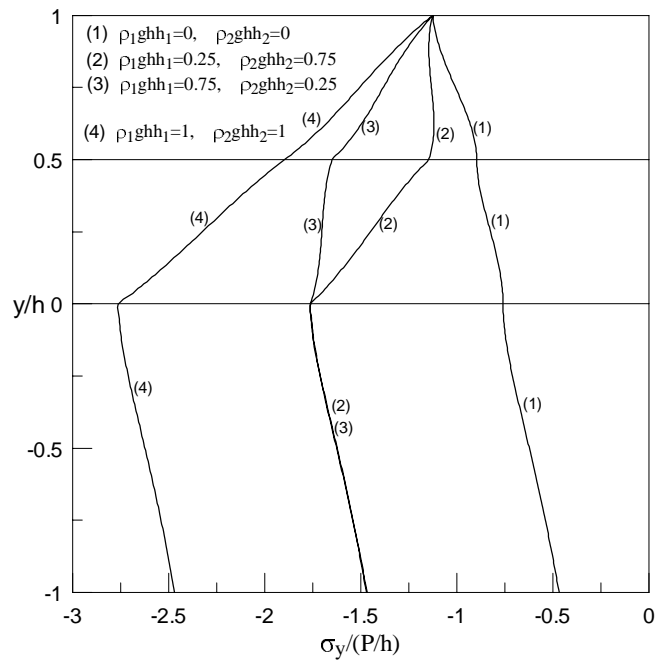
Şekil 22. $\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



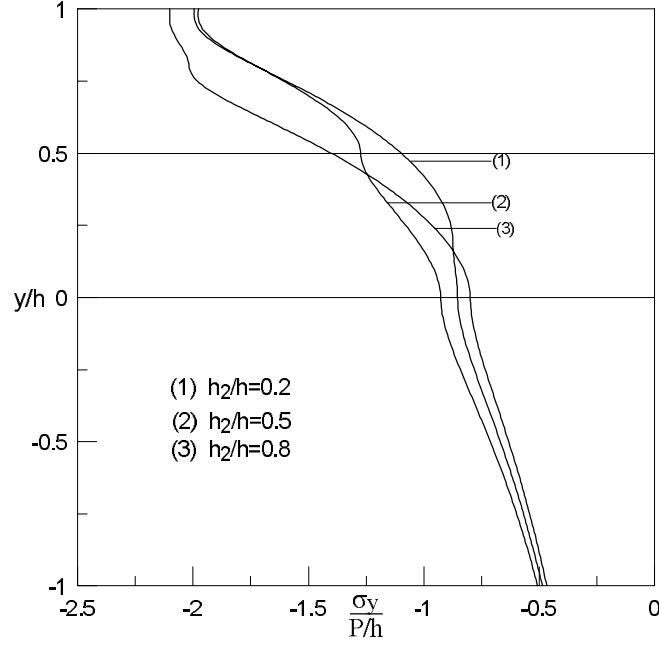
Şekil 23. $\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



Şekil 24. $\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 1$)



Şekil 25. $\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabakaların kütle kuvvetleri ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



Şekil 26. $\sigma_y(0, y)/(P/h)$ boyutsuz normal gerilmesinin tabaka yüksekliklerinin oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)

3.3.3. τ_{xy} Kayma Gerilmelerinin İncelenmesi

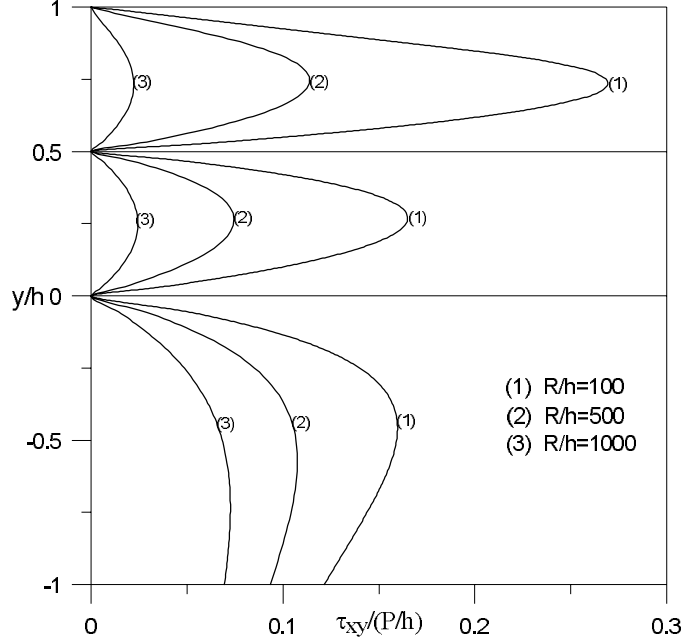
Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin simetri kesitinde kayma gerilmeleri sıfırdır. Bu nedenle kayma gerilmelerinin yayılışını görebilmek amacıyla $x/h=0.5$ gibi simetri eksenine yakın bir kesitte inceleme yapılmıştır.

Kayma gerilmeleri $\tau_{xy}(x, 0)$, $\tau_{xy}(x, h_2)$ ve $\tau_{xy}(x, h)$ değme yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin tanımında verilen sınır şartlarının sağlandığı görülmektedir.

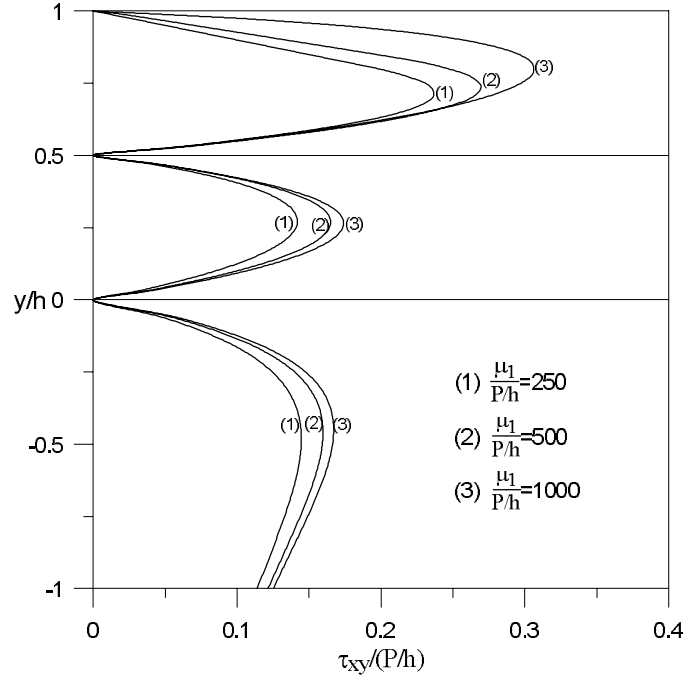
Şekil 27' de pañç yarıçapının değişimine bağlı olarak kayma gerilmesi yayılışı görülmektedir. Üst tabakada yarıçapın artmasıyla kayma gerilmeleri azalmaktadır. Burada kayma gerilmelerinin maksimum olduğu nokta tabakanın ortası olarak göze çarpmaktadır. Alt tabakada da benzer durumun geçerli olduğu görülmektedir. Yalnız alt tabaka pañç yarıçapı değişiminden üst tabaka kadar etkilenmemektedir. Elastik yarı sonsuz düzlem için yarıçap artışı kayma gerilmelerinin azalmasına neden olmaktadır. Ayrıca yarıçap değeri arttıkça elastik yarı sonsuz düzlemde kayma gerilmesinin maksimum değerini aldığı nokta alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin temas yüzeyinden uzaklaşmaktadır.

Şekil 28' de yük oranına bağlı olarak kayma gerilmesi yayılımının değişimi görülmektedir. Yük oranı arttıkça üst tabakada daha belirgin olmak üzere kayma gerilmeleri artmaktadır.

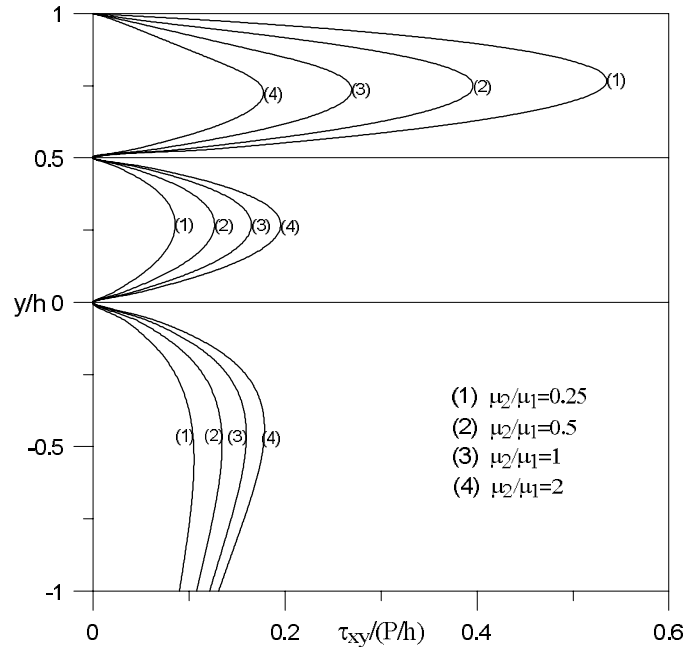
Şekil 29 ve Şekil 30' da ise tabakaların ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranının çeşitli değerleri için kayma gerilmesi yayılımının değişimleri görülmektedir. μ_2/μ_1 oranı arttıkça yani alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça üst tabakada kayma gerilmesinin değeri azalmakta, alt tabakada ise artmaktadır. Bunun nedeni ise üst tabakanın alt tabakaya oranla daha yumuşak olmasıdır. Elastik yarı sonsuz düzlemle alt tabakanın malzeme özellikleri aynı seçildiğinden burada da alt tabakadakine benzer bir durum söz konusu olmaktadır. μ_2/μ_1 oranı arttıkça tabakalarda kayma gerilmelerinin aldığı değerler birbirine yaklaşmakta, azaldıkça bu değerler birbirinden uzaklaşmaktadırlar. μ_3/μ_2 oranı arttıkça yani elastik yarı sonsuz düzlem tabakalara oranla rijitleştikçe elastik yarı sonsuz düzlemde kayma gerilmeleri artmakta, tabakalarda ise azalmaktadır.



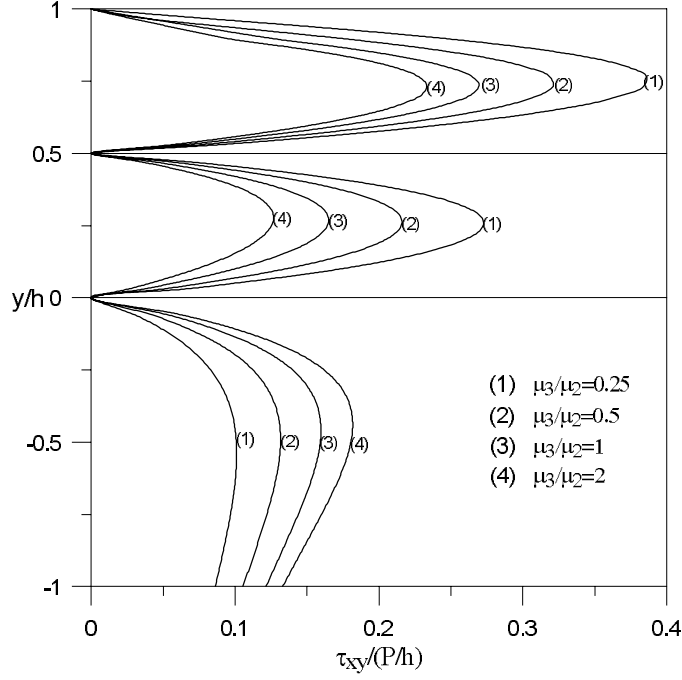
Şekil 27. $\tau_{xy}(0.5, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının panç yarıçapı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $\mu_3/\mu_2 = 1$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $h_2/h_1 = 1$)



Şekil 28. $\tau_{xy}(0.5, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının yük oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_2/\mu_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)



Şekil 29. $\tau_{xy}(0.5, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $\mu_3/\mu_2 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$)



Şekil 30. $\tau_{xy}(0.5, y)/(P/h)$ boyutsuz kayma gerilmesi dağılımının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 2$, $h_2/h_1 = 1$, $R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\mu_3/\mu_2 = 1$)

3.4. Tabakalar Arasındaki ve Alt Tabaka ile Elastik Yarı Sonsuz Düzlem Arasındaki İlk Ayrılma Yüklerinin ve Uzaklıklarının İncelenmesi

Bu kısımda çeşitli boyutsuz büyüklükler için tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları incelenmiştir.

Şekil 31 ve 32'de tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığının panç yarıçapı ile değişimi görülmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi her iki değme yüzeyinde de panç yarıçapı arttıkça ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları artmaktadır. Yani panç yarıçapı arttıkça her iki değme yüzeyinde de ayrılmalar daha zor gerçekleşmektedir. Şekiller beraber analiz edildiğinde ilk ayrılmanın tabakalar arasında meydana geldiği görülmektedir.

Şekil 33 ve 34' de ise tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükü ve uzaklığının $\mu_1/(P/h)$ yük oranı ile değişimi görülmektedir. Şekiller incelendiğinde yarıçap değişiminin aksine ilk ayrılma yükü ve ilk

ayrılma uzaklığı her iki değme yüzeyinde de yük oranı arttıkça azalmaktadır. Yani yük oranı artırıldıkça ayrılmalar daha kolay olmaktadır.

Şekil 35' de tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükü ve bu yükten daha küçük yük değerleri için tabakaların temas yüzeyleri boyunca boyutsuz temas gerilme yayılışları çeşitli boyutsuz büyüklükler için verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi kritik yükten daha küçük yüklerde tabakalar arasında ayrılma meydana gelmemektedir.

Tablo 4-5 ve Şekil 36-47' de malzeme özelliklerinin değişimine göre ilk ayrılma yüklerinin ve uzaklıklarının değişimi verilmektedir. Tablo ve şekiller incelendiğinde alt tabakanın kayma modülünün üst tabakanın kayma modülüne oranı artırıldıkça yani alt tabaka üst tabakaya oranla rijitleştikçe hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları azalmakta, dolayısıyla ayrılmalar daha kolay olmaktadır. Yine benzer olarak elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülünün alt tabakanın kayma modülüne oranı arttıkça yani elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya oranla artırıldıkça tabakalar arasında ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları azalmakta olup ayrılmalar daha kolay gerçekleşmektedir. Yapılan nümerik analizlerde tabakaların yükseklikleri aynı seçilmiş olup bu durum için ilk ayrılmalar daima tabakalar arasında gerçekleşmiştir.

Tablo 6-7' de ise tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak, tabaka yükseklikleri oranına ait çeşitli boyutsuz büyüklükler için tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının değişimi verilmektedir. Tablolardan da görülebileceği gibi h_2/h oranının artması ile yani alt tabakanın yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı artırıldıkça alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında genelde ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları artış göstermekle birlikte azalışlarında olduğu göze çarpmaktadır. Tabakalar arasında ise malzeme özelliklerinin çeşitli durumları için yine h_2/h oranı arttıkça ilk ayrılma yüklerinde artışlarla beraber azalışlar da görülebilmektedir. Tablolarda göze çarpan bir diğer husus ise alt tabaka yüksekliğinin üst tabakaya oranla daha küçük veya eşit seçilmesi ve alt tabaka üst tabakaya ve elastik yarı sonsuz düzleme oranla daha rijit seçilmesi durumunda ilk ayrılma alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında meydana gelmektedir. Ayrıca elastik yarı sonsuz düzlemde üst tabakaya doğru gidildikçe daha rijit malzemelerin seçilmesi durumunda gerek tabakalar arasında gerekse alt tabaka

elastik yarı sonsuz düzlem arasında ilk ayrılma yüklerinin diğer durumlara göre daha büyük olduğu yani ayrılmaların daha zor olduğu görülmektedir.

Tablo 4. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1=1$, $R/h=100$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)

μ_2/μ_1	$\mu_3/\mu_2=0.1$		$\mu_3/\mu_2=0.5$		$\mu_3/\mu_2=1$		$\mu_3/\mu_2=2$		$\mu_3/\mu_2=5$		$\mu_3/\mu_2=10$	
	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}
0.1	7.34	347.063	4.10	166.95	3.31	118.343	2.80	83.5115	2.44	58.5451	2.32	49.9833
0.25	5.35	270.986	3.10	139.777	2.53	99.2449	2.17	69.8606	1.94	50.1723	1.86	43.7309
0.5	4.38	258.537	2.59	139.172	2.11	94.9923	1.82	64.8572	1.65	46.8489	1.59	41.3274
4	3.22	193.986	1.21	96.3381	1.16	55.4769	1.13	42.5852	1.11	36.1775	1.10	34.2177
10	1.03	73.8963	1.04	43.3536	1.03	37.0934	1.02	33.6179	1.01	31.4038	1.00	30.6384
50	0.98	31.8626	0.97	29.9315	0.97	29.1694	0.97	28.6559	0.97	28.2647	0.97	28.1260

Tablo 5. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranına bağlı olarak alt tabaka-elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($h_2/h_1=1$, $R/h=100$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)

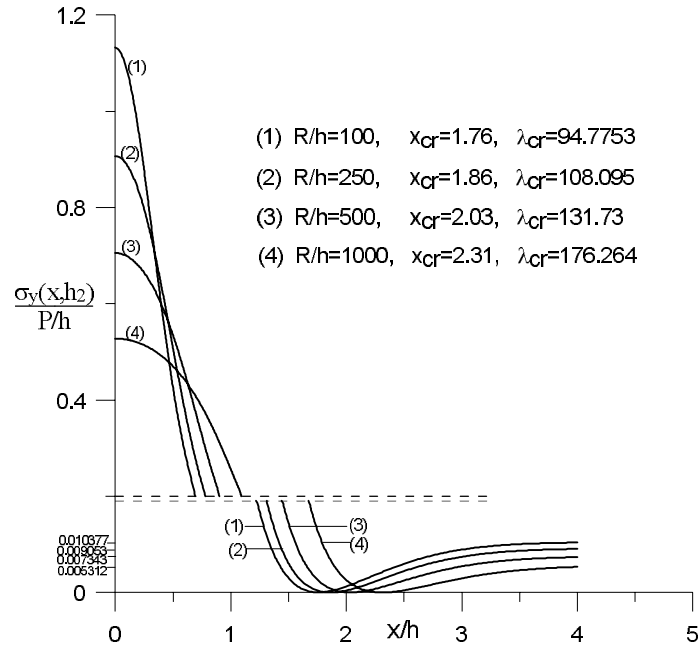
μ_2/μ_1	$\mu_3/\mu_2=0.1$		$\mu_3/\mu_2=0.5$		$\mu_3/\mu_2=1$		$\mu_3/\mu_2=2$		$\mu_3/\mu_2=5$		$\mu_3/\mu_2=10$	
	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}
0.1	7.35	632.474	4.11	306.572	3.32	219.487	2.81	156.831	2.45	111.126	2.33	95.1587
0.25	5.36	438.857	3.11	229.880	2.55	167.793	2.19	121.864	1.95	89.3619	1.87	78.2602
0.5	4.39	348.124	2.61	195.927	2.15	142.534	1.86	103.65	1.67	77.2894	1.61	68.4970
4	3.22	261.591	1.92	150.064	1.58	102.83	1.40	73.6904	1.28	56.4975	1.24	51.0689
10	3.09	252.984	1.82	143.238	1.51	96.6480	1.34	69.1730	1.23	53.3693	1.20	48.6384
50	3.01	248.098	1.77	139.115	1.47	92.8876	1.30	67.53	1.20	51.5193	1.17	46.8246

Tablo 6. Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değişimi ($R/h = 100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\rho_2/\rho_1 = 1$)

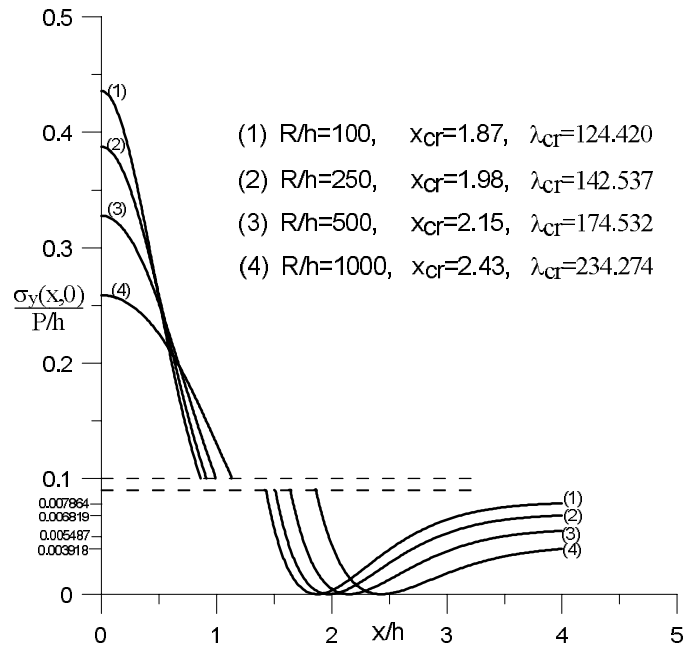
h_2/h	$\mu_2/\mu_1 = 0.1$		$\mu_2/\mu_1 = 5$		$\mu_2/\mu_1 = 5$		$\mu_2/\mu_1 = 0.1$		$\mu_2/\mu_1 = 1$	
	$\mu_3/\mu_2 = 5$		$\mu_3/\mu_2 = 0.1$		$\mu_3/\mu_2 = 5$		$\mu_3/\mu_2 = 0.1$		$\mu_3/\mu_2 = 1$	
	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}
0.3	2.93	79.1079	2.83	171.883	1.40	38.9436	9.19	356.894	2.18	90.0946
0.4	2.69	66.7458	2.92	295.916	1.25	36.2724	8.21	340.929	1.98	85.4375
0.5	2.44	58.5451	3.20	743.834	1.08	34.7553	7.34	347.063	1.76	94.7753
0.6	2.20	55.7632	0.90	60.0008	0.91	33.1813	6.66	409.229	1.40	112.274
0.7	1.94	61.5464	0.73	32.2948	0.72	28.6877	6.06	656.927	1.02	80.2824
0.8	1.59	82.3934	0.51	32.6157	0.50	30.7089	6.05	1186.91	0.78	52.2415

Tablo 7. Tabakaların ve elastik yarı sonsuz düzlemin malzeme özelliklerine bağlı olarak alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin ve uzaklıklarının alt tabaka yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı ile değişimi ($R/h=100$, $\mu_1/(P/h) = 500$, $\rho_2/\rho_1 = 1$)

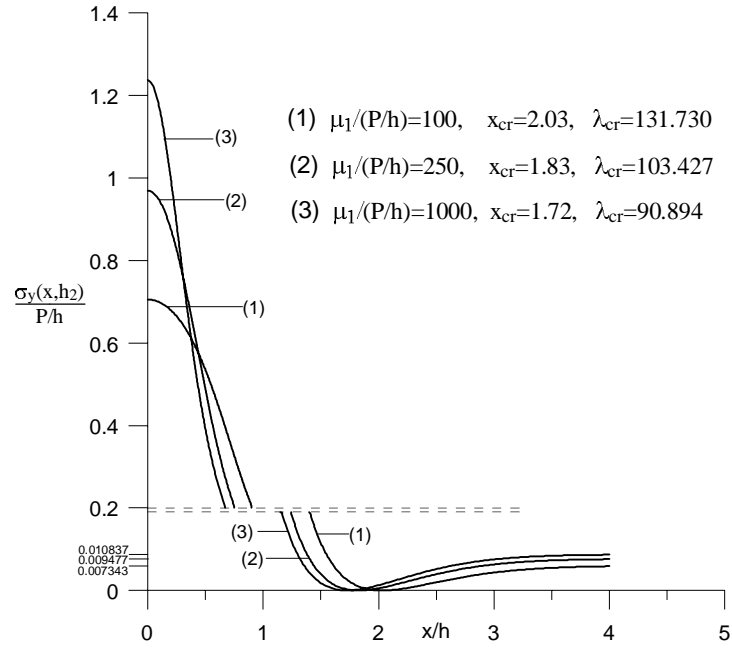
h_2/h	$\mu_2/\mu_1 = 0.1$		$\mu_2/\mu_1 = 5$		$\mu_2/\mu_1 = 5$		$\mu_2/\mu_1 = 0.1$		$\mu_2/\mu_1 = 1$	
	$\mu_3/\mu_2 = 5$		$\mu_3/\mu_2 = 0.1$		$\mu_3/\mu_2 = 5$		$\mu_3/\mu_2 = 0.1$		$\mu_3/\mu_2 = 1$	
	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}	x_{cr}	λ_{cr}
0.3	2.93	112.364	2.77	170.313	1.40	50.8345	9.18	505.856	2.17	119.852
0.4	2.69	109.167	2.84	191.435	1.29	48.7848	8.21	551.971	1.97	114.657
0.5	2.45	111.126	3.18	258.813	1.26	55.4970	7.35	632.474	1.87	124.420
0.6	2.23	123.424	3.66	379.795	1.31	82.6685	6.66	778.009	1.90	175.750
0.7	2.08	164.784	4.21	586.963	1.45	150.627	6.28	1073.79	2.10	310.767
0.8	2.04	310.151	4.79	1001.27	1.65	277.830	6.29	1730.85	2.38	571.672



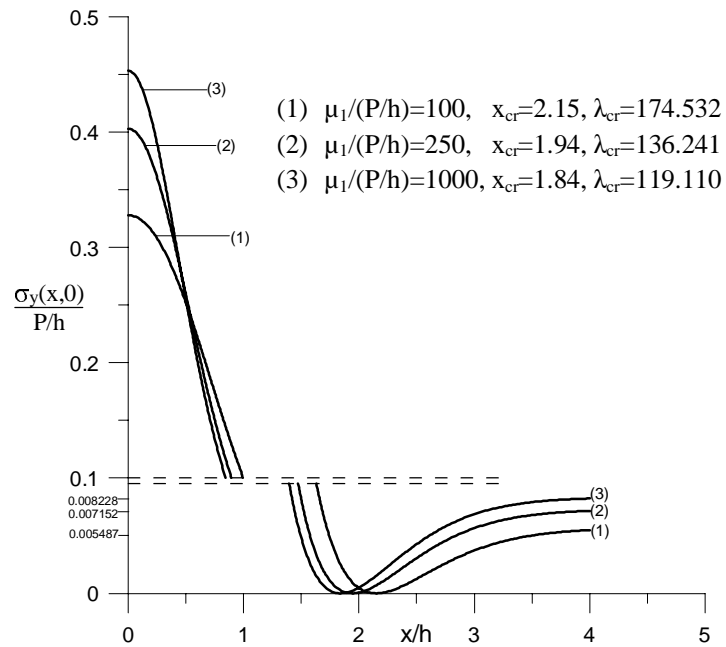
Şekil 31. $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının panç yarıçapı ile değişimi ($\mu_1/(P/h)=500$, $h_2/h_1=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\mu_3/\mu_2=1$, $\rho_2/\rho_1=1$)



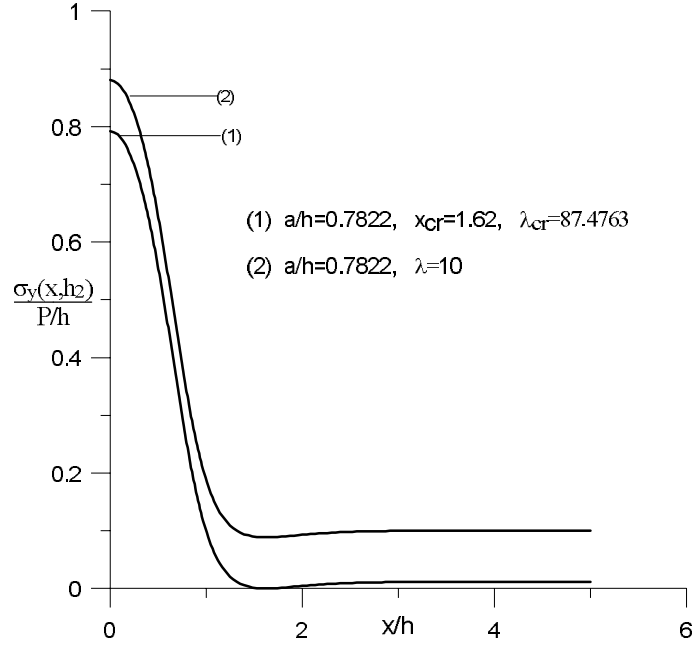
Şekil 32. $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının panç yarıçapı ile değişimi ($\mu_1/(P/h)=500$, $h_2/h_1=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\mu_3/\mu_2=1$, $\rho_2/\rho_1=1$)



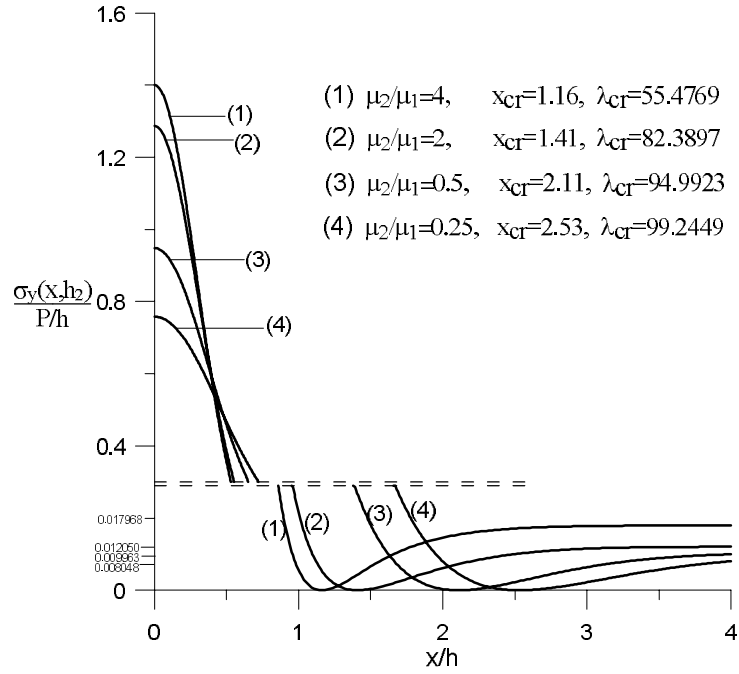
Şekil 33. $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\mu_3/\mu_2=1$, $\rho_2/\rho_1=1$)



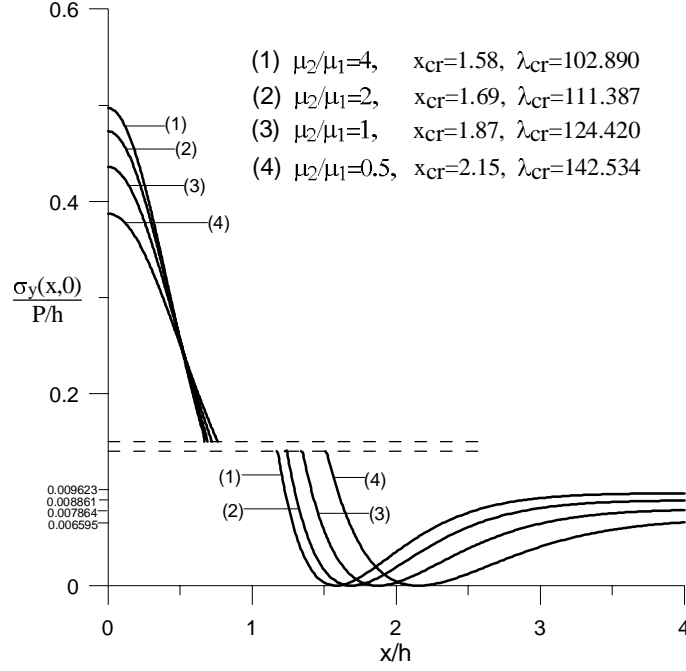
Şekil 34. $\sigma_y(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının yük oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\mu_3/\mu_2=1$, $\rho_2/\rho_1=1$)



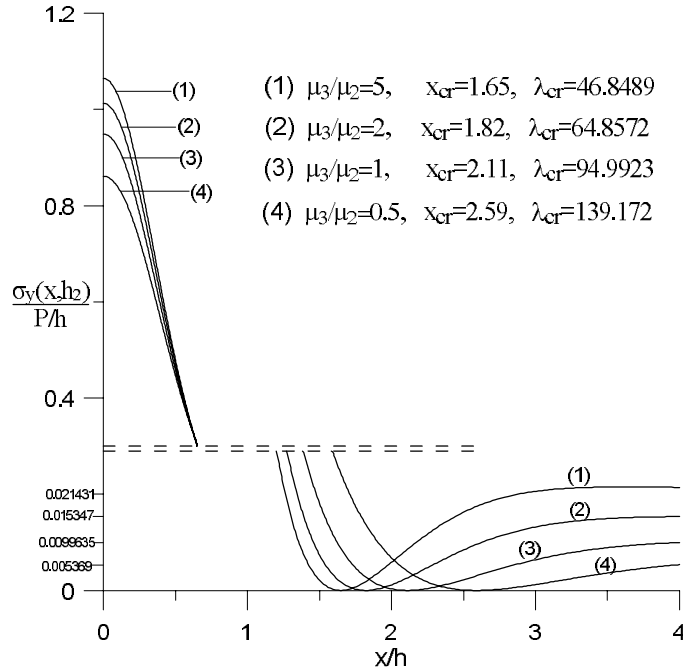
Şekil 35. Çeşitli λ yük değerleri için tabakalar arasındaki boyutsuz temas gerilme yayılışları ($R/h=500$, $\mu_1/(P/h)=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $\mu_3/\mu_2=1$, $\rho_2/\rho_1=1$)



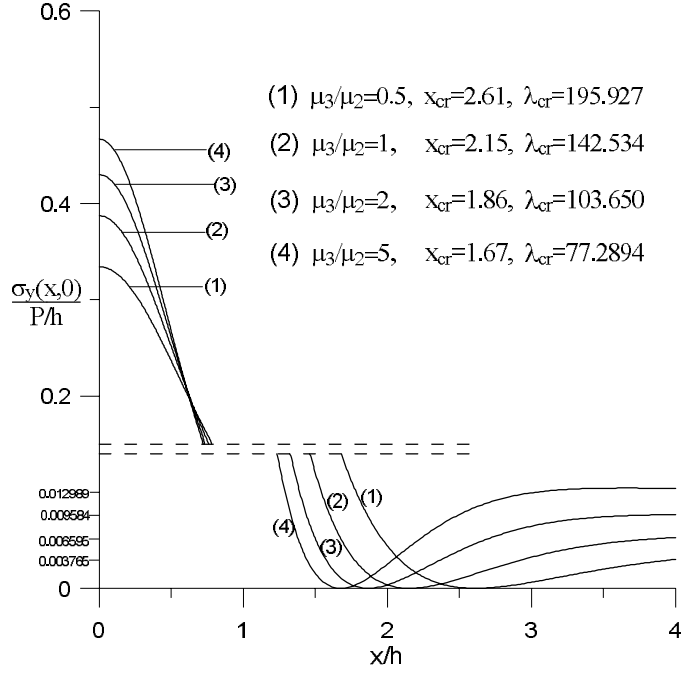
Şekil 36. $\sigma_y(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$, $\mu_3/\mu_2=1$)



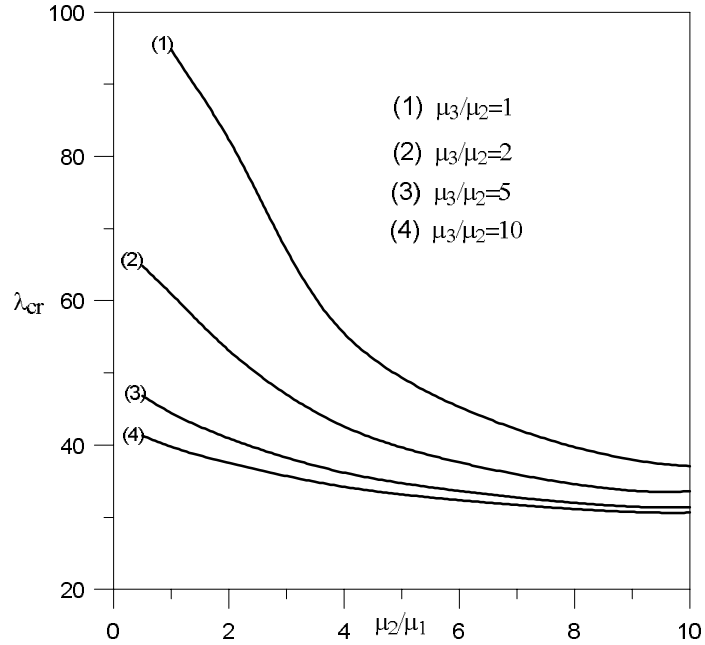
Şekil 37. $\sigma_y(x,0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$, $\mu_3/\mu_2=1$)



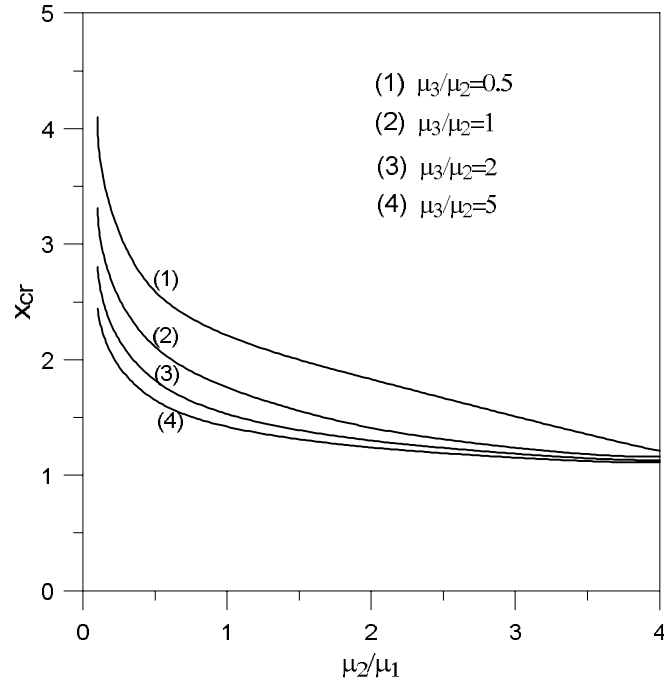
Şekil 38. $\sigma_y(x,h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$, $\mu_2/\mu_1=0.5$)



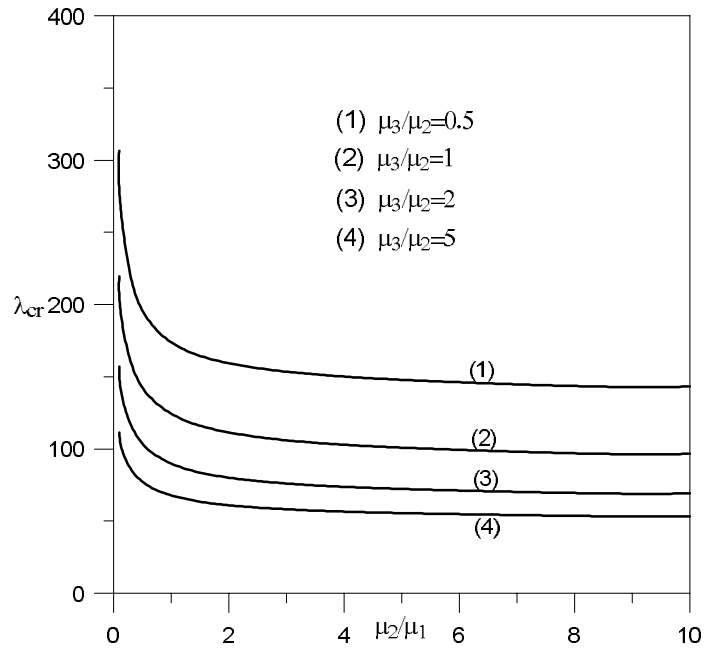
Şekil 39. $\sigma_y(x,0)/(P/h)$ boyutsuz gerilme dağılımının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$, $\mu_2/\mu_1=0.5$)



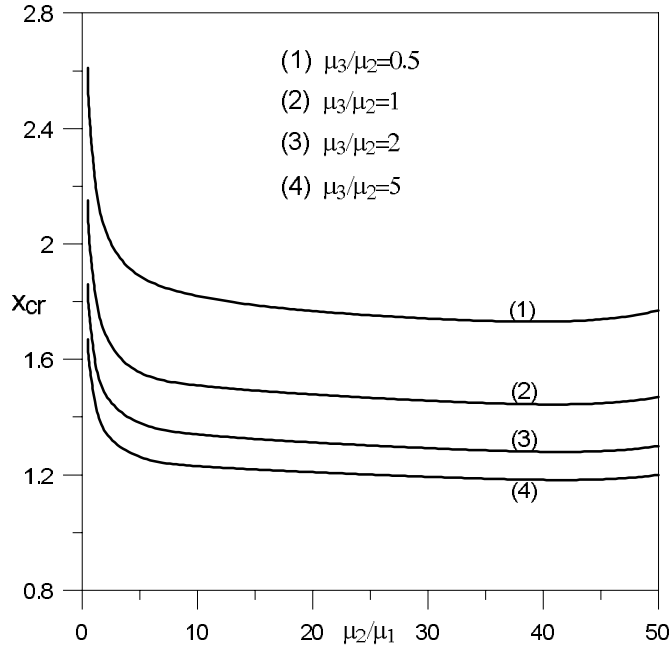
Şekil 40. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yüklerinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)



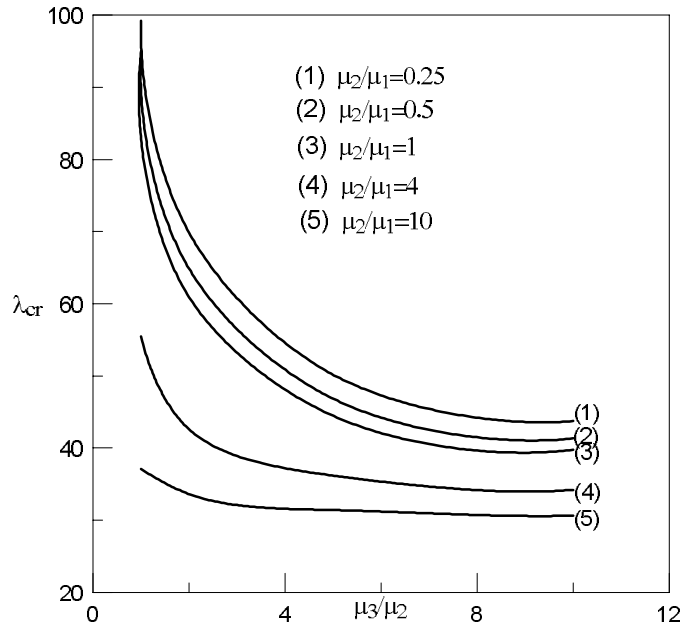
Şekil 41. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)



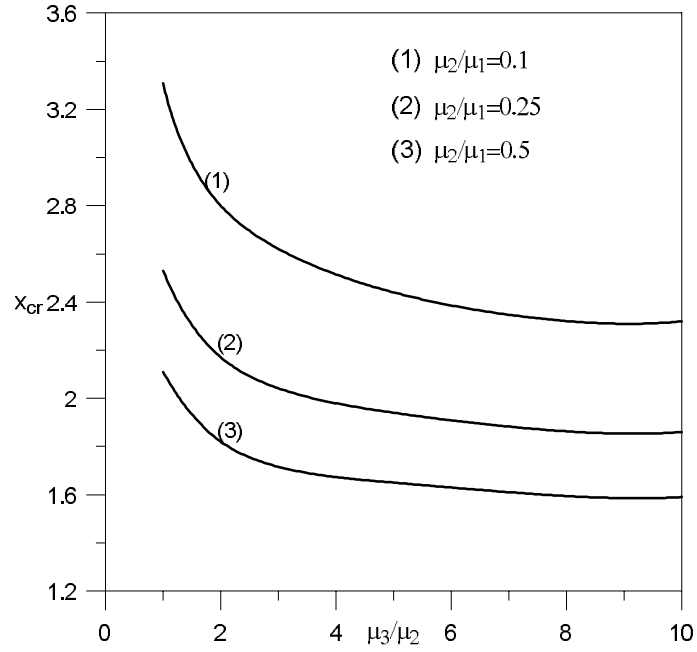
Şekil 42. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)



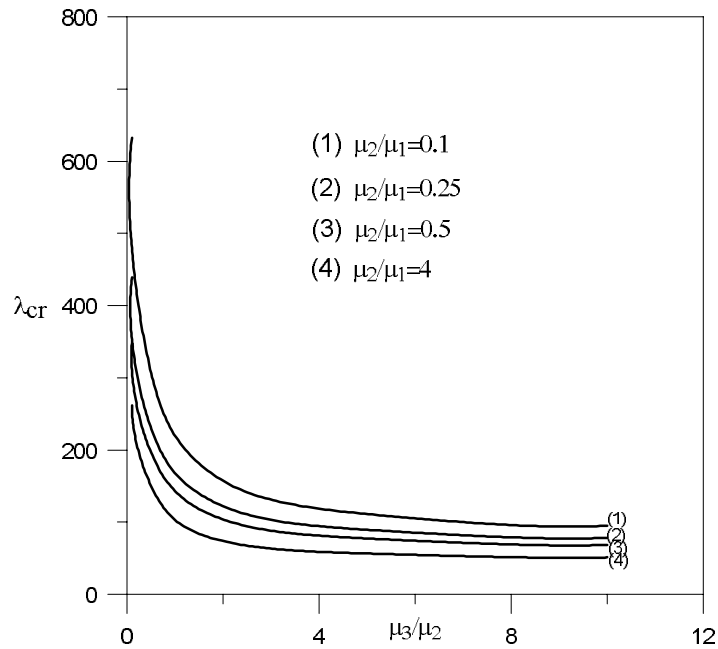
Şekil 43. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının tabakaların kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)



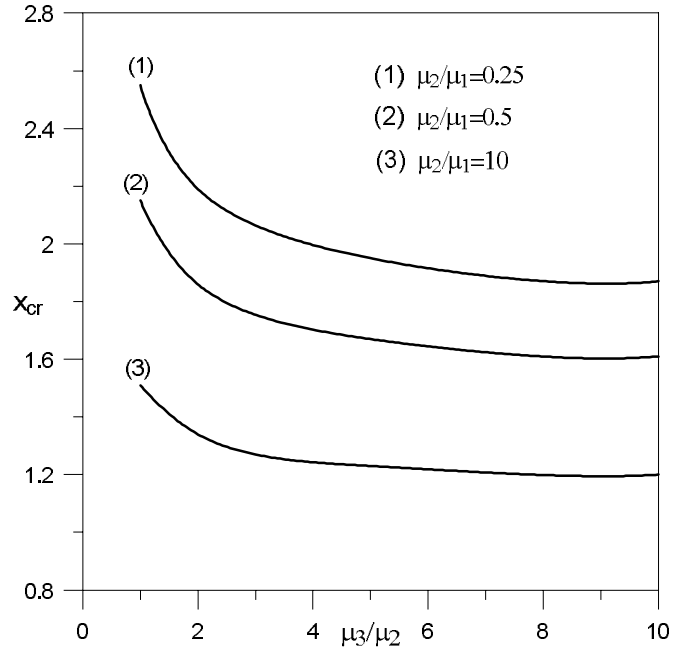
Şekil 44. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma yükünün alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)



Şekil 45. Tabakalar arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)



Şekil 46. Alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yüklerinin alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)



Şekil 47. Alt tabaka-elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma uzaklıklarının alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin kayma modülleri oranı ile değişimi ($R/h=100$, $h_2/h_1=1$, $\mu_1/(P/h)=500$, $\rho_2/\rho_1=1$)

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada; rijit dairesel bir panç aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzleme oturan, elastik sabitleri ve yükseklikleri farklı iki tabakanın sürekli temas problemi incelenmiştir. Söz konusu problemin incelenmesinde, öncelikle rijit dairesel panç altındaki bilinmeyen temas gerilmeleri ve yarı değme uzunlukları hesaplanmış, buna bağlı olarak da simetri eksenini üzerindeki boyutsuz normal gerilme dağılımları ve simetri eksenini yakınında ortaya çıkan boyutsuz kayma gerilmesi dağılımları hesaplanmıştır. Ayrıca çeşitli boyutsuz büyüklükler için x eksenini boyunca tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki σ_x boyutsuz normal gerilmesinin değişimini incelenmiştir. Yine bu çalışmada çeşitli boyutsuz büyüklükler için tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları elde edilmiştir. Bütün bu gerilme ve yer değiştirme değerlerinin panç yarıçapı, yük oranı, malzeme özellikleri, tabaka yükseklikleri oranı gibi boyutsuz büyüklüklerle olan değişimlerinin irdelenmesinden elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Panç yarıçapının artması durumunda pançın üst tabakaya değme uzunluğu artmakta, buna bağlı olarak temas gerilmeleri azalmaktadır. $\mu_1/(P/h)$ yük oranının artması durumunda ise değme uzunluğu azalmakta, temas gerilmeleri ise artmaktadır. Alt tabakanın rijitliğinin üst tabakaya göre azalması veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğinin alt tabakaya göre azalması durumlarında da pançın üst tabakaya değme uzunluğu artmakta, temas gerilmeleri ise azalmaktadır. Alt tabakanın yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı arttıkça değme uzunluğu artmakta, temas gerilmeleri buna bağlı olarak azalmaktadır. Pançın değme uzunluğu arttıkça, yük daha geniş bir alana yayıldığından panç altındaki temas gerilmeleri azalmaktadır. Temas gerilmeleri $x=0$ noktasında en büyük değerine ulaşmakta, temasın sona erdiği $x = \mp a$ noktalarında sıfır olmaktadır.

σ_x boyutsuz normal gerilmesinin dağılımını simetri eksenini ve x eksenini boyunca, σ_y boyutsuz normal gerilmesinin dağılımını y simetri eksenini boyunca, τ_{xy} boyutsuz kayma gerilmesinin dağılımını da y simetri eksenini yakınında $x/h=0.5$ kesiti boyunca araştırılmıştır. Simetri eksenini boyunca σ_x boyutsuz gerilme dağılımında her iki tabakada ayrı ayrı çekme

ve basınç bölgeleri meydana gelmekte, kirişlerin eğilme halinde olduğu gibi tabakaların da üst bölgelerinde basınç, alt bölgelerinde ise çekme gerilmeleri oluşmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlem için ise σ_x boyutsuz gerilmesi en büyük değerini alt tabakaya değme yüzeyinde almakta ve derine inildikçe ($y \rightarrow -\infty$) her yerde basınç gerilmesi olacak şekilde azalarak sıfır değerine yaklaşmaktadır. Panç yarıçapı arttıkça veya $\mu_1/(P/h)$ yük oranı azaldıkça σ_x boyutsuz normal gerilmesinin değeri tabakalarda ve elastik yarı sonsuz düzlemde azalmaktadır. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre azaldıkça alt tabakada ve elastik yarı sonsuz düzlemde σ_x boyutsuz normal gerilmeleri azalmakta, üst tabakadaki gerilmeler ise artmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya oranla azaldıkça; üst ve alt tabakada gerilmeler artmakta, elastik yarı sonsuz düzlemdeki gerilmeler ise azalmaktadır. Bu durumlar elastik tabakanın veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğinin artması halinde söz konusu tabaka veya düzlemdeki σ_x normal gerilmelerinin de artacağı sonucunu doğurmaktadır. σ_x boyutsuz normal gerilme dağılımlarında dikkat çeken bir diğer sonuç ise çekme ve basınç bölgelerindeki gerilme alanlarının birbirine eşit olmasıdır. Bu eşitliğin sağlanması denge koşulu için önemlidir. Tabakaların kütle kuvvetleri hesaba katılması durumunda tabakalarda σ_x boyutsuz normal gerilmeleri artmaktadır. Kütle kuvvetleri arttıkça gerilmelerde buna bağlı olarak artmaktadır. Panç yarıçapı arttıkça veya yük oranı azaldıkça tabakalardaki gerilme dağılımları lineerliğe yaklaşmaktadır. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre azaldıkça üst tabakadaki σ_x boyutsuz gerilme dağılımı lineerliğe yaklaşmakta, alt tabakada ise gerilme dağılımı lineerlikten uzaklaşmaktadır.

σ_x boyutsuz normal gerilmesinin x eksenini boyunca incelenmesi sonucunda, gerek tabakalar arasındaki gerekse alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki değme yüzeyinde $x=0$ 'dan itibaren çekme gerilmeleri oluşmakta ve x ekseninden uzaklaştıkça azalarak belli bir değerden sonra basınç gerilmeleri oluşmakta, belli bir noktada basınç gerilmeleri maksimum değerine ulaştıktan sonra azalarak sıfıra yaklaşmaktadır. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça tabakalar arasındaki $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı maksimum değerler azalırken, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin çekme ve basınç bölgelerinde aldığı maksimum değerler artmaktadır. Ayrıca alt tabakanın

rijitliği üst tabakaya göre arttıkça basınç gerilmelerinin maksimum değerine ulaştığı nokta hem tabakalar arasında hem de alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında y eksenine daha yakın olmaktadır. Elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre arttıkça, tabakalar arasındaki $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesi ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki $\sigma_{x_2}(x, 0)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin çekme bölgelerinde aldığı maksimum değerler azalmaktadır. Basınç bölgelerinde ise tabakalar arasında maksimum değerler birbirine yakın çıkarken, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında söz konusu değerler azalmaktadır. Tabakaların kütle kuvvetleri artırıldıkça $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin çekme bölgesinde aldığı maksimum değerler azalırken, basınç bölgesinde aldığı maksimum değerler artmaktadır. Ayrıca tabakaların kütle kuvveti aynı oranda artırıldığında, tabakalar arasındaki $\sigma_{x_1}(x, h_2)/(P/h)$ boyutsuz gerilmesinin basınç bölgesinde maksimum değerine ulaştığı noktalar y eksenine eşit uzaklıkta olmaktadır.

σ_y boyutsuz normal gerilmeleri en büyük değerini pançın değme yüzeyinde ($y=h$ 'da) almakta ve pançtan uzaklaştıkça (derine inildikçe) azalarak sıfır değerine yaklaşmaktadır. Tabakaların değme yüzeyinde ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlemin değme yüzeyinde gerilmeler aynı değerleri almakta, problemin tanımında verilen sınır şartları sağlanmaktadır. Panç ile üst tabaka arasındaki temas yüzeyinin küçük olması halinde değme bölgesinde tekil yük haline benzer bir singülarite nedeniyle σ_y boyutsuz normal gerilmeleri değme bölgesine yaklaştıkça hızla büyümektedir. Kesit boyunca derine inildikçe singülarite etkisini kaybetmekte ve gerilmeler azalarak sıfır değerine yaklaşmaktadır. Panç yarıçapının artması veya $\mu_1/(P/h)$ yük oranının azalması durumlarında σ_y boyutsuz normal gerilmesinin değerleri azalmaktadır. Alt tabakanın rijitliğinin üst tabakaya göre artması veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliğinin alt tabakaya göre artması durumlarında σ_y boyutsuz normal gerilmesi artmaktadır. Tabakaların kütle kuvvetlerinin hesaba katılması durumunda ise σ_y boyutsuz gerilme dağılımı kütle kuvvetsiz halin aksine yüzeyden derine inildikçe artış göstermektedir. Alt tabaka üst tabakaya göre daha rijit seçildiğinde ve alt tabakanın yüksekliği artırıldıkça temas yüzeyine yakın bölgelerde σ_y boyutsuz gerilmesi artmaktadır.

Kayma gerilmeleri $\tau_{xy}(x,0)$, $\tau_{xy}(x,h_2)$ ve $\tau_{xy}(x,h)$ değme yüzeyleri boyunca sıfır olmakta ve problemin tanımında verilen sınır şartları sağlanmaktadır. Tabakalarda kayma gerilmelerinin maksimum değeri tabakaların orta noktasında veya bu noktaya çok yakın bir yerde olmaktadır. Tabakalarda ve elastik yarı sonsuz düzlemde boyutsuz kayma gerilmeleri panç yarıçapı arttıkça azalırken, $\mu_1/(P/h)$ yük oranı arttıkça artmaktadır. Ayrıca elastik yarı sonsuz düzlemde panç yarıçapı arttıkça kayma gerilmesinin maksimum değerini aldığı nokta alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzemin temas yüzeyinden uzaklaşmaktadır. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre artırıldığında ve elastik yarı sonsuz düzlemle alt tabakanın malzeme özellikleri aynı seçildiğinde boyutsuz kayma gerilmeleri alt tabaka ve elastik yarı sonsuz düzlemde artarken üst tabakada azalmaktadır. Tabakaların malzeme özellikleri aynı seçilip elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre artırılırsa elastik yarı sonsuz düzlemde kayma gerilmesi değerleri artarken tabakalarda ise azalmaktadır.

Çeşitli boyutsuz büyüklükler için tabakalar arasındaki ve alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları belirlenmiştir. Yapılan nümerik analizler sonucu ilk ayrılmalar genelde tabakalar arasında gerçekleşmekte olup, alt tabakanın yüksekliği üst tabakanın yüksekliğine eşit veya daha küçük seçildiğinde ve alt tabakanın rijitliğinin üst tabakaya ve elastik yarı sonsuz düzleme göre daha fazla olması durumunda ilk ayrılma alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasında gerçekleşmektedir. Panç yarıçapı arttıkça her iki değme yüzeyinde de ilk ayrılma yükleri ve ilk ayrılma uzaklıkları artmaktadır. Yani panç yarıçapı arttıkça ayrılmalar daha zor olmaktadır. $\mu_1/(P/h)$ yük oranı arttıkça her iki değme yüzeyinde de ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları azalmakta, yani ayrılmalar daha kolay gerçekleşmektedir. Alt tabakanın rijitliği üst tabakaya göre arttıkça veya elastik yarı sonsuz düzlemin rijitliği alt tabakaya göre arttıkça ilk ayrılma yükleri ve uzaklıkları azalmaktadır. Alt tabakanın yüksekliğinin toplam tabaka yüksekliğine oranı giderek artırıldığında, alt tabaka ile elastik yarı sonsuz düzlem arasındaki ilk ayrılma yükleri genelde artış göstermekle birlikte azalışlarda olabilmektedir. Tabakalar arasında da benzer durum söz konusu olmaktadır. Ayrıca elastik yarı sonsuz düzlemde üst tabakaya doğru gidildikçe daha rijit malzemelerin seçilmesi durumunda gerek tabakalar arasında gerekse alt tabaka elastik yarı sonsuz düzlemde ilk ayrılma yükleri diğer durumlara göre daha büyük olmakta, yani ayrılmalar daha zor meydana gelmektedir.

5. KAYNAKLAR

- Adams, G.G. ve Bogy D.B., 1977. The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, ASME Journal of Applied Mechanics, 604-610.
- Adams, G.G., 1978. An Elastic Strip Pressed Against an Elastic Half Plane by a Steadily Moving Force, Journal of Applied Mechanics, 45,89-94.
- Adams, G.G. ve Zeid, I., 1984. An Elastic Punch Moving Across the Surface of a Semi-Infinite Solid, Journal of Applied Mechanics, 51, 622-629.
- Adıbelli H., Çömez, İ. ve Erdöl, R., 2009. Rijit Panç ile Bastırılmış ve Elastik Yarım Düzleme Oturmuş Ağırksız Çift Şeritte Sürtünmesiz Değme Problemi, XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, Haziran, Kayseri, Bildiriler Kitabı: 71-82.
- Agarwal, V.K., 1978. Axisymmetric Solution of the End-Problem for a Semi-Infinite Elastic Circular Cylinder and its Application to Joined Dissimilar Cylinders under Uniform Tension, International Journal of Engineering Science, 16, 985-998.
- Binienda, W.K. ve Pindera, M.J., 1994. Frictionless Contact of Layered Metal-Matrix and Polymer-Matrix Composite Half Plane, Composite Science and Technology, 50,119-128.
- Birinci, A., Kahya, V. ve Erdöl, R., 1997. Elastik Mesnete Oturan Bileşik Tabakalarda Sürekli Değme Problemi, TUMTMK, X. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, İstanbul, Bildiriler Kitabı: 165-173.
- Birinci, A., 1998. Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan ve Rijit Bir Blok Aracılığıyla Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 1999. Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical & Computational Applications, 4, 3, 262-272.
- Birinci, A. ve Erdöl, R., 2001. Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, Structural Engineering and Mechanics, 12, 1, 17-34.
- Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., 2002. Two Strips Problems Resting on an Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7, 3, 275-286.
- Blaibel, A.F. ve Geçit, M.R., 1989. Bending of a Semi-Infinite Elastic Strip Bonded to an Infinite Strip, International Journal of Engineering Science, 27, 7, 793-807.

- Caonway, H.D., 1971. The Effect of Friction on Normal Contact Stresses, ASME Journal of Applied Mechanics, 38, 1094-1095.
- Chen, W. H. ve Engel, P. A., 1972. Impact and Contact Stress Analysis in Multilayered Media, Internatinonal Journal of Solids and Structures, 8, 1257-1281.
- Civelek, M.B. ve Erdoğan, F., 1975. The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Gravity, ASME Journal of Applied Mechanics, 42, 97, 136-140.
- Comninou, M., Schmueser, D. ve Dundurs, J., 1980. Frictional Slip Between a Layer and a Substrate Caused by a Normal Load, International Journal of Engineering Science, 18, 131-137.
- Conway, H. D., 1971. The Effect of Friction on Normal Contact Stresses, ASME Journal of Applied Mechanics, 38, 1094-1095.
- Çakıroğlu. F.L. ve Erdöl, R., 1989. Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritte Sürekli Temas Problemi, 6. Ulusal Mekanik Kongresi, Bursa, Bildiriler Kitabı, Cilt I, 243-248.
- Çakıroğlu, F.L., 1990. Elastik Yarı Sonsuz Düzleme Oturan Bileşik Tabakaların Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., İnşaat Mühendisliği Bölümü, Trabzon.
- Çakıroğlu, A.O. ve Çakıroğlu, F.L., 1991. Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, International Journal of Engineering Science, 29, 1, 99-111.
- Çakıroğlu. F.L., Çakıroğlu. M. ve Erdöl, R., 2001. Contact Problems for two Elastic Layers Resting on Elastic Half-Plane, Journal of Engineering Mechanics, 127, 2, 113-118.
- Çömez, İ., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2003. Rijit Bir Panç Aracılığıyla Bastırılmış ve Alttan Tam Bağlı Ağırlıksız Çift Şeritte Değme Problemi, TUMTMK, XIII. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül, Gaziantep, Bildiriler Kitabı, 321-332.
- Çömez, İ., 2003. Rijit Bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırlıksız Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çömez, İ., 2009. Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Dempsey, J.P., Zhao, Z.G., Minnetyan, L. ve Li, H., 1990. Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, International Journal of Mechanics, 57, 974-980.
- Dhaliwal, R.S., 1970. Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation, Internatinonal Journal of Engineering Science, 8, 273-288.

- Dhaliwal, R.S. ve Rau, I.S., 1970. Axisymmetric Boussinesq Problem for a Thick Elastic Layer under a Punch of Arbitrary Profile, Internatinonal Journal of Engineering Science, 8, 843-856.
- Dhaliwal, R.S. ve Rau, I.S., 1972. Further Considerations on The Axisymmetric Boussinesq Problem, Internatinonal Journal of Engineering Science, 10, 659-663.
- Erdelyi, A., Magnus, W., Oberthettinger, F. ve Tricomi, F.G., 1954. Tables of Integral Transforms, Mc Graw Hill, New York.
- Erdoğan, F. ve Gupta, G.D., 1972. On the Numerical Solution of Singular Integral Equations, Quarterly Journal of Applied Mathematics, 29, 525-534.
- Erdoğan F. ve Ratwani, M., 1974. The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by two Elastic Quarter Planes, ASME Journal of Aplied Mechanics, 41, 673-677.
- Fabrikant, V.I. ve Sankar, T.S., 1984. On Contact Problems in an Inhomogeneous Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 159-166.
- Fabrikant, V.I. ve Sankar, T.S., 1986. Concentrated Force Underneath a Punch Bounded to a Transversely Isotropic Half-Space, Internatinonal Journal of Engineering Science, 24, 1, 111-117.
- Galin, L.A., 1961. Contact Problems in the Theory of Elasticity, İngilizce Çeviri: Moss, H., North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Geçit, M.R. ve Erdoğan, F., 1978. Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Axisymmetric Loading, International Journal of Solids and Structures, 14, 771-785.
- Geçit, M.R., 1980. A Tensionless Contact Without Friction Between an Elastic Layer and an Elastic Foundation, International Journal of Solids and Structures, 16, 387-396.
- Geçit, M.R. ve Gökpınar, S., 1985. Frictionless Contact Between an Elastic Lyer and a Rigid Rounded Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 10, 3, 245-251.
- Geçit, M.R., 1986. The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer Indented by an Elastic Cylinder, International Journal of Engineering Science, 24, 1571-1584.
- Geçit, M.R. ve Yapıcı, H., 1986. Contact problem for an Elastic Layer Resting on Rigid Flat Support, The Arabian Journal for Science and Engineering, 11, 3, 235-242.
- Guler, M.A. ve Erdoğan, F., 2007. The Frictional Sliding Contact Problems of Rigid Parabolic and Cylindrical Stamps on Graded Coatings, International Journal of Mechanical Sciences, 49, 2, 161-182.

- Johnson, K.L., 1985. Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kahya, V., Birinci A. ve Erdöl R., 2001. Frictionless Contact Problem Between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical & Computational Applications, 6, 1, 13-22.
- Kahya, V., 2003. İki Tabakalı Elastik Ortamda Sürekli ve Süreksiz Değme Problemlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Kahya, V., Ozsahin, T.S., Birinci, A. ve Erdöl, R., 2007. A Receding Contact Problem for an Anisotropic Elastic Medium Consisting of a Layer and a Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 44, 5695-5710.
- Keer, L.M. ve Chantaramungkorn, K., 1972. Loss of Contact Between an Elastic Layer and Half- Space, Journal of Elasticity, 2,3, 191-197.
- Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai, K.C., 1972. Problems Involving of a Receding Contact Between a Layer and a Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 39, 1115-1120.
- Keer, L.M. ve Miller, G.R., 1983. Contact Between an Elastically Supported Circular Plate an Rigid Indenter, International Journal of Engineering Science, 21, 681-690.
- Keer, L.M., Lee, J.C. ve Mura, T., 1984. A Contact Problem for the Elastic Quarter Space, International Journal of Solids and Structures, 20, 2, 513-524.
- King, R.B. ve O'Sullivan, T.C., 1987. Sliding Contact Stress in a Two-Dimensional Layered Elastic Half-Space, International Journal of Solids and Structures, 23, 5, 581-597.
- Loboda, V.V. ve Tauchert, T.R., 1985. The Elastic Contact Problem for Dissimilar Orthotropic Semi-Infinite and Infinite Strips, International Journal of Engineering Science, 23, 12, 1337-1349.
- Muskhelishvili, N.I., 1953. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen.
- Nowell, D. ve Hills, D.A., 1988. Contact Problems Incorporating Elastic Layers, International Journal of Solids and Structures, 24, 1, 105-111.
- Özşahin, T.Ş., 2000. Rijit İki Blok Üzerine Bileşik Tabakada Sürekli ve Süreksiz Temas Problemi, Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Özşahin, T.Ş., Kahya, V. ve Çakıroğlu, A.O., 2007. Contact Problem For an Elastic Layered Composite Resting On Rigid Flat Supports, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 1,2, 154-159.

- Sabin, G.C.W. ve Kaloni, P.N., 1989. Contact Problem of a Rigid Indentor with Rotational Friction in Second Order Elasticity, International Journal of Engineering Science, 27, 3, 203-217.
- Sneddon, I.N., 1951. Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Sneddon, I.N., 1972. The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York.
- Spence, D.A., 1975. The Hertz Contact Problem with Finite Friction, Journal of Elasticity, 5, 297-319.
- Uffliand, I.S., 1965. Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity, North Carolina State College Translation Series, Raleigh, North Carolina.
- Urquhart, E.E. ve Pindera, M.J., 1994. Incipient Separation Between a Frictionless Flat Punch and an Anisotropic Multilayered Half Plane, International Journal of Solids and Structures, 31, 18, 2445-2461.
- Weitsman, Y., 1969. On the Unbounded Between Plates and an Elastic Half Space, ASME Journal of Applied Mechanics, 36, 198-202.

ÖZGEÇMİŞ

Erdal ÖNER, 1988 yılında Bayburt' da doğdu. İlköğrenimini Bayburt Veysel Efendi İlköğretim Okulu' nda, orta öğrenimini Bayburt Anadolu Lisesi' nde tamamladı. 2005 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı ve 2009 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Şubat 2010' da Bayburt Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. Bekar olan ÖNER, iyi derecede İngilizce bilmekte ve halen Bayburt Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümündeki görevine devam etmektedir.