

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN SONSUZ UZUN ELASTİK KİRİŞİN HAREKETLİ  
YÜK ALTINDA DİNAMİK DAVRANIŞI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İnş. Müh. Muhittin TURAN**

**ARALIK 2012**

**TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN SONSUZ UZUN ELASTİK KİRİŞİN HAREKETLİ**  
**YÜK ALTINDA DİNAMİK DAVRANIŞI**

**İnş. Müh. Muhittin TURAN**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**  
**“İNŞAAT YÜKSEK MÜHENDİSİ”**  
**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10.12.2012**  
**Tezin Savunma Tarihi : 26.12.2012**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA**

**Trabzon 2012**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında**

**Muhittin TURAN tarafından hazırlanan**

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN SONSUZ UZUN ELASTİK KİRİŞİN HAREKETLİ  
YÜK ALTINDA DİNAMİK DAVRANIŞI**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 11/12/2012 gün ve 1485 sayılı  
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**olarak kabul edilmiştir.**

**Jüri Üyeleri**

**Başkan : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ**



**Üye : Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA**



**Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan GEDİKLİ**



**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ**

**Enstitü Müdürü**

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

“Elastik Zemine Oturan Sonsuz Uzun Elastik Kirişin Hareketli Yük Altında Dinamik Davranışı” isimli tez çalışmasını bana öneren ve her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım danışman Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA'ya minnet ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Tez çalışmam boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Ragıp ERDÖL'e, Sayın Prof. Dr. A. Osman ÇAKIROĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Ümit UZMAN'a, Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ'ye ve Sayın Doç. Dr. T. Şükrü ÖZŞAHİN'e teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardımlarını esirgemeyen Arş. Gör. Gökhan ADIYAMAN'a, Arş. Gör. Hasan SESLİ'ye ve Arş. Gör. Mustafa ERGÜN'e ayrıca teşekkür etmek isterim.

Öğrenim hayatım süresince bana her türlü desteği veren ve beni sabırla destekleyen anneme, babama ve kardeşlerime müteşekkir olduğumu belirtir, çalışmamın ülkemize faydalı olmasını temenni ederim.

Muhittin TURAN  
Trabzon 2012

## **TEZ BEYANNAMESİ**

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Elastik Zemine Oturan Sonsuz Uzun Elastik Kirişin Hareketli Yük Altında Dinamik Davranışı” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA'nın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 10/12/2012

Muhittin TURAN

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ .....	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IX
TABLolar LİSTESİ .....	XI
SEMBOLLER DİZİNİ .....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş .....	1
1.2. Literatür Taraması .....	1
1.3. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı.....	7
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	8
2.1. Problemin Tanımı .....	8
2.2. Teorik Formülasyon.....	8
2.2.1. Rezidü Teoremi ile Kompleks İntegrasyon .....	12
2.3. Özel Haller.....	19
2.3.1. Statik Hal ( $\alpha =0, \beta=0$ ).....	19
2.3.2. Sönümsüz Hal ( $\beta=0$ ).....	20
2.3.2.1. $\alpha <1, \beta=0$ Hali.....	20
2.3.2.2. $\alpha =1, \beta=0$ Hali.....	21
2.3.2.3. $\alpha >1, \beta=0$ Hali.....	21
2.3.3. Hafif Sönüm Hali ( $\beta \ll 1$ ) .....	23
2.3.3.1. $\alpha <1, \beta \ll 1$ Hali .....	23
2.3.3.2. $\alpha =1, \beta \ll 1$ Hali .....	27
2.3.3.3. $\alpha >1, \beta \ll 1$ Hali .....	28
2.3.4. Kritik Sönüm Hali ( $\beta = \beta_{cr}$ ).....	32
2.3.5. Kritik Üstü Sönüm Hali ( $\beta > \beta_{cr}$ ) .....	36

2.4.	Hareketli Yükn Altında Oluşan Yer Değişirme, Eğilme Momenti ve Kesme Kuvvetinin Hesabı .....	40
2.4.1.	Statik Hal ( $\alpha =0, \beta=0$ ) .....	42
2.4.2.	Sönümsüz Hal ( $\beta=0$ ) .....	43
2.4.2.1.	$\alpha <1, \beta=0$ Hali .....	43
2.4.2.2.	$\alpha =1, \beta=0$ Hali .....	43
2.4.2.3.	$\alpha >1, \beta=0$ Hali .....	44
2.4.3.	Hafif Sönüm Hali ( $\beta \ll 1$ ) .....	44
2.4.3.1.	$\alpha <1, \beta \ll 1$ Hali .....	44
2.4.3.2.	$\alpha =1, \beta \ll 1$ Hali .....	45
2.4.3.3.	$\alpha >1, \beta \ll 1$ Hali .....	45
2.4.4.	Kritik Sönüm Hali ( $\beta = \beta_{cr}$ ) .....	46
2.4.5.	Kritik Üstü Sönüm Hali ( $\beta > \beta_{cr}$ ) .....	47
2.5.	Hareketli Yükn Kütlesinin Etkisi.....	48
3.	BULGULAR VE İRDELEME .....	49
4.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	67
5.	KAYNAKLAR .....	68
ÖZGEÇMİŞ		

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

ELASTİK ZEMİNE OTURAN SONSUZ UZUN ELASTİK KİRİŞİN HAREKETLİ YÜK  
ALTINDA DİNAMİK DAVRANIŞI

Muhittin TURAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Volkan KAHYA  
2012, 71 Sayfa

Bu tez çalışmasında elastik zemine oturan sonsuz kirişin hareketli yük altında dinamik analizi analitik olarak incelenmiştir. Çözümde kompleks fourier dönüşümü, rezidü integral teoremi ile birlikte kullanılmıştır. Hareketli yük altında kirişin dinamik davranışının çeşitli parametrelere (hız, yay sabiti, sönüm) göre değişimi incelenmiştir.

Birinci bölümde elastik zemine oturan kirişlerin hareketli yük altında davranışı ile ilgili çalışmalar sunulmuştur.

İkinci bölümde sistemde oluşan moment, yer değiştirme ve kesme kuvvetinin denklemleri ayrı ayrı elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde kiriş üzerindeki yükün konumuna göre moment, yer değiştirme ve kesme kuvvetleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Hareketli Yük, Analitik Çözüm, Rezidü Teoremi, Fourier Dönüşümü, Sonsuz Kiriş, Elastik Zemin.



Master Thesis

SUMMARY

DYNAMIC BEHAVIOR OF INFINITE ELASTIC BEAM ON ELASTIC FOUNDATION  
UNDER MOVING LOAD

Muhittin TURAN

Karadeniz Technical University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Civil Engineering Graduate Program  
Supervisor: Assistant Prof. Volkan KAHYA  
2012, 71 Pages

In this study, dynamic analysis of an infinite elastic beam on elastic foundation under moving load is investigated analytically. The complex Fourier transform and the residue integral theorem are used in the solution. Dynamic behavior of the beam under moving load is investigated for various parameters such as speed, spring constant and damping.

In the first chapter, studies related to behavior of beams on elastic foundations under moving loads are presented.

In the second part, the equations for moment, displacement and shear force of the beam are obtained.

In the third chapter, depending on the position of the load on the beam, displacements, moments and shear forces are obtained.

In the fourth chapter, the conclusions of the study are presented and some recommendations are given.

**Key Words:** Moving Load, Analytical Solution, Residue Theorem, Fourier Transform, Infinite Beam, Elastic Foundation.

## ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Hareketli tekil kuvvet altında elastik zemine oturan sonsuz kiriş .....	8
Şekil 2.2. Sabit ve hareketli koordinat sistemi.....	8
Şekil 2.3. Kompleks kutuplar.....	13
Şekil 2.4. Kritik sönüm için kompleks kutuplar ( $a_2 = 0$ ).....	32
Şekil 2.5. Kritik üstü sönüm hali için kompleks kutuplar.....	36
Şekil 3.1. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0$ ) .....	50
Şekil 3.2. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0.1$ ).....	50
Şekil 3.3. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 2$ ).....	51
Şekil 3.4. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0$ ) .....	52
Şekil 3.5. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0.1$ ) .....	53
Şekil 3.6. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 2$ ).....	53
Şekil 3.7. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0$ ).....	54
Şekil 3.8. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0.1$ ).....	55
Şekil 3.9. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 2$ ).....	55
Şekil 3.10. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 0.5$ ).....	56
Şekil 3.11. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 1$ ) .....	57
Şekil 3.12. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 2$ ).....	57

Şekil 3.13. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 0.5$ ) .....	58
Şekil 3.14. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 1$ ).....	59
Şekil 3.15. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 2$ ).....	59
Şekil 3.16. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 0.5$ ).....	60
Şekil 3.17. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 1$ ).....	61
Şekil 3.18. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 2$ ).....	61
Şekil 3.19. Yükün hızına göre farklı sönüm değerleri için oluşan yer değiştirmeler .....	62
Şekil 3.20. Yükün hızına göre farklı sönüm değerleri için oluşan moment .....	62
Şekil 3.21. Yükün hızına göre farklı sönüm değerleri için oluşan kesme kuvvetleri .....	63
Şekil 3.22. Hıza bağlı olarak kritik sönüm değerleri .....	64
Şekil 3.23. Zeminin yatak katsayısına bağlı olarak $v_0/P$ değişimi.....	65
Şekil 3.24. Zeminin yatak katsayısına bağlı olarak $c_{cr}$ değişimi.....	66
Şekil 3.25. Zeminin yatak katsayısına bağlı olarak $M_0/P$ değişimi.....	66

## TABLolar LİSTESİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
Tablo 2.1. (31) denkleminin $\alpha$ ve $\beta$ değerlerine göre kökleri.....	38
Tablo 2.2. $\alpha$ ve $\beta$ değerlerine göre kritik üstü sönüm durumu için boyutsuz yer değiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin sayısal değerleri .....	47

## SEMBOLLER DİZİNİ

$E$	Elastisite modülü
$I$	Atalet momenti
$EI$	Eğilme rijitliği
$t$	Zaman
$v(x,t)$	Kirişin düşey yer değiştirmesi
$k$	Winkler zemininin yatak katsayısı
$m$	Hareketli yükün kütlesi
$\mu$	Kirişin birim uzunluğuna gelen kütlesi
$\omega_b$	Kirişin açısal sönüm frekansı
$M(x,t)$	Eğilme momenti
$M_0$	En büyük statik eğilme momenti
$T(x,t)$	Kesme kuvveti
$T_0$	En büyük statik kesme kuvveti
$\alpha$	Boyutsuz hız
$\beta$	Boyutsuz sönüm
$P$	Hareketli yükün şiddeti
$c$	Yükün hızı
$\delta(x)$	Dirac-delta fonksiyonu
$v(s)$	Kirişin boyutsuz yer değiştirmesi (çökme)
$M(s)$	Kirişin boyutsuz momenti
$T(s)$	Kirişin boyutsuz kesme kuvveti
$v_0$	En büyük statik yer değiştirme
$c_{cr}$	Kritik hız

**Not:** Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

## **1. GENEL BİLGİLER**

### **1.1. Giriş**

Günümüzde, hızlı ve güvenli ulaşım için ülkeler önemli miktarda kaynak ayırmaktadırlar. Can ve malların hızlı ve güvenli olarak bir yerden bir yere nakli için üretilen araçların, yapı ve bunun temeli üzerinde meydana getireceği etkilerin doğru tahmin edilebilmesi gerek ekonomik açıdan ve gerekse can güvenliği açısından oldukça önem arz etmektedir. Bundan dolayı 100 yıla yakın bir süredir araştırmacılar, hareketli yüklerin yapılar üzerindeki etkileri konusunda önemli miktarda çalışma yapmışlardır. Şüphesiz bunda Japonya ve bazı Avrupa ülkelerindeki hızlı tren uygulamalarının rolü oldukça büyüktür. 1970'lerden itibaren bilgisayar teknolojisinin yaygınlaşması ve analiz tekniklerindeki köklü değişimle birlikte modern köprü ve demiryolları tasarımında önemli aşama kaydedilmiştir.

Hareketli yük etkisi altındaki bir sistemin dinamik davranışını önceden kestirmek oldukça güçtür. Hareketli yükler, özellikle yüksek hızlarda, yapıda şiddetli titreşimlere ve dinamik gerilmelere sebep olurlar. Özellikle hareketli yüklerin etkisi altında kalan köprü ve demiryolu gibi son derece yüksek maliyetli yapılarda bakım giderlerini azaltacak ve işletme ömrünü yükseltecek tedbirlerin alınması yapının dinamik davranışının doğru olarak tespiti ile mümkündür.

### **1.2. Literatür Taraması**

Elastik zemine oturan sonsuz uzun kiriş modeli, karayolu ve demiryolu sistemlerinin modellenmesinde problemi basitleştirmesi sebebiyle bilim insanları tarafından tercih edilmektedir. Elastik zemin, Winkler yay modeli, Pasternak modeli veya Kelvin modeli şeklinde bir boyutlu olarak modellenebilmektedir.

Hareketli yük altında elastik zemine oturan kiriş ilk olarak Timoshenko, (1926) tarafından çözülmüştür. Bunu Dörr (1943) ve Kenney'in (1954) katkıları takip etmiştir. Harmonik yük altındaki elastik zemine oturan kiriş problemi Mathews (1958) tarafından ele alınmıştır. Goloskokov ve Filippov (1962) harmonik yükün yaylı kütle ile sisteme

uygulanması durumunu incelemişlerdir. Yükün zamanla şiddetinin değişmesi durumu ise Fryba (1957) tarafından ele alınmıştır.

Achenbach ve Sun (1965), sabit hızla hareket eden tekil yüke maruz Winkler zemini üzerine oturtulmuş sonsuz kirişin dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Çözümde kompleks Fourier dönüşümünü kullanan yazarlar, yükün hızı ve sönüm katsayısının kiriş davranışına etkileri üzerinde durmuşlardır.

Steele (1967), sabit hızla hareket eden yüklere maruz elastik zemine oturan sönümsüz kirişin hem lineer hem de lineer olmayan çözümlerini yaparak arasındaki farkları incelemiştir.

Kerr (1972), sıcaklıktan dolayı rayda meydana gelebilecek eksenel kuvvetin etkilerini incelemek amacıyla hareketli yüke maruz ve elastik Winkler zeminine oturan kiriş problemini ele almıştır. Çalışmada, eksenel yükün kritik hız üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Chonan (1975), hareketli yük ve eksenel kuvvete maruz elastik mesnetli Timoshenko kirişinin titreşim analizini yapmıştır. Eksenel kuvvet hareketli yük ile beraber etkimesi durumunda rezonans karakteristiklerini incelemiştir.

Houedec (1980), sabit hızla hareket eden yük altında Westergaard zemini üzerine oturan elastik kirişi incelemiştir. Yük spektrumunu, Fransa'daki yollardan elde edilen deneysel verilere göre hazırlamış ve harmonik ve rastgele yükler için ayrı ayrı analizler yapmıştır. Çalışmada, yumuşak zeminli sistemde rastgele yüklerin oluşturduğu yer değiştirmenin, harmonik yüklerin oluşturduğu yer değiştirmeden daha yüksek çıktığı görülmüştür.

Saito ve Terasawa (1980), Pasternak zeminine oturan kirişin hareketli yük altında dinamik titreşimini incelemişlerdir. Hareket denklemi, iki boyutlu elastik teoriye dayandırılarak çözülmüştür. Dinamik çözümler, üstel Fourier dönüşümü kullanılarak elde edilmiştir. Yazarlar çalışma sonuçlarını Timoshenko ve Bernoulli-Euler kiriş teorilerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmış ve zamanla oluşan yer değiştirmelerin grafiklerini vermişlerdir.

Prasad (1981), elastik zemine oturan eksenel gerilmeli kirişin hareketli yük altında dinamik davranışını incelemiştir. Yazar çalışmasında, Bernoulli-Euler kirişinden elde ettiği sonuçları Timoshenko kirişiyle karşılaştırmıştır.

Jaiswal ve Iyengar (1997), hareketli kütle-osilatör modeli altındaki demiryolu rayının dinamik analizini yapmışlardır. Demiryolunu, Winkler zemini üzerine oturtulmuş sonsuz

uzun Bernoulli-Euler kirişi olarak modelleyerek, kütlelerin sayısının ve aralığının dinamik davranışa etkisini, kritik hızı ve rezonans frekansını çalışmışlardır. Son olarak, hareketli çizgisel kütleli osilatörün sebep olduğu dinamik davranışla ilgili grafikler sunmuşlardır.

Gavrilov (1999), hem analitik hem de sayısal metodlar kullanarak, elastik zemin üzerine oturan sonsuz kirişin hareketli tekil yük altında dinamik davranışını incelemiştir.

Metrikine ve Popp (1999), elastik zemine oturan kirişin hareketli harmonik yük altında dinamik titreşimini incelemiştir. Çalışmada, elastik zemin yaylarla modellenmiş ve analizler Fourier dönüşümleri kullanılarak elde edilmiştir.

Heelis vd. (1999), Winkler zeminine oturtulmuş Bernoulli-Euler kirişi şeklinde modelledikleri ray sisteminde dalga yayılmasını incelemiştir. Hareketli yük hızına ve rayın sönümüne bağlı olarak yer değiştirmelerin büyüklüğünü hesaplamışlar ve çalışma sonuçlarını deneysel çalışmaların sonuçları ile karşılaştırmışlardır.

Metrikine ve Popp (2000), üniform hareketli tekil yükü yüklenmiş viskoelastik zemin üzerine oturtulmuş elastik kirişin dinamik davranışlarını incelemiştir. Yazarlar, kritik hızın çeşitli parametrelere göre değişimini incelemiştir.

Sun (2001), hareketli çizgisel yüke maruz kirişlerin dinamik yer değiştirmesini ele almıştır. Elastik zemine oturan kirişin dinamik yer değiştirmelerini Fourier dönüşümleri ve rezidü teoremi yardımıyla hesaplamıştır.

Andersen vd. (2001), lineer viskoz sönümleyicilerle modellenmiş lineer elastik Kelvin zemini üzerine oturtulmuş sonsuz Euler kirişinin hareketli yük altındaki davranışlarını sonlu elemanlar metodu ile elde etmişlerdir. Galilean koordinat dönüşümü kullanılarak homojen kirişin analitik çözümünü yapmışlardır. Yansıtmayan sınır şartlarının kirişin uç noktalarında modellenebilmesi için gerekli denklemler, türetmişlerdir. Analitik sonuçlar ile sonlu elemanlar metodundan çıkan sonuçları karşılaştırmışlardır.

Sun (2002), hareketli yüke maruz viskoelastik zeminli kirişin kapalı formda çözümünü Green fonksiyonları yardımıyla elde etmiştir. İntegrallerin çözümü için rezidü teoremini kullanmış ve kirişin yer değiştirmesini ters Fourier dönüşümü kullanarak hesaplamıştır. Kapalı formda elde edilen sonuçlarla sayısal hesaplamalardan elde edilen sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğunu vurgulamış ve grafiklerle göstermiştir.

Shamalta ve Metrikine (2002), hareketli trenin beton döşemeye gömülmüş raylar üzerinde oluşturduğu dinamik yer değiştirmeleri bir boyutlu ve iki boyutlu modeller üzerinde çalışmışlardır. Yükün ray boyunca harmonik olarak değişimler gösterdiğini kabul ederek sistemde meydana gelen yer değiştirmeleri Fourier dönüşümü yardımıyla



hesaplamışlardır. Çeşitli hızlar için gerilmeleri, raydaki yer değiştirmeleri, kritik hızı ve frekansı hesaplamışlardır.

Andersen vd. (2002), Kelvin zemini üzerine oturtulmuş pürüzlü yüzeye sahip sonsuz Bernoulli-Euler kirişi boyunca sabit hızla hareket eden bir serbestlik dereceli aracın stokastik analizi üzerine çalışmışlardır. Kirişin ve aracın hareketli yük altındaki davranışlarını incelemişlerdir.

Bitzenbauer ve Dinkel (2002), elastik zemine oturan sonsuz uzun elastik kirişin dinamik davranışını incelemişlerdir. Bu çalışmada, kirişin yüzeyindeki pürüzlülüğün dinamik davranışa etkileri üzerinde durulmuş ve araçla kiriş arasındaki karşılıklı etkileşimin bütün parametreleri göz önünde bulundurulmuştur.

Shamalta ve Metrikine (2003), elastik zemine oturan plağın hareketli yük altındaki davranışını Fourier integral dönüşüm tekniği ile incelemişlerdir. Aynı problem bir boyutlu olarak da çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Vostroukhov ve Metrikine (2003), hareketli trene maruz demiryolunun dinamik davranışını teorik olarak incelemişlerdir. Elastik zemin Kelvin-Voigt modeli olarak ele alınmış ve trenin hızına bağlı olarak kirişin düşey yer değiştirmesi kapalı formda Fourier dönüşüm tekniğini kullanılarak hesaplanmıştır.

Chen ve Huang (2003), demiryolunu, viskoelastik zemine oturan sonlu ve sonsuz Timoshenko kirişi olarak modellemişlerdir. Bu kirişin, sabit hızla hareket eden harmonik yüke maruz kalması durumunda bazı temel dinamik karakteristikleri incelemişlerdir. Rezonans hızı (kritik hız) ve frekansı arasındaki ilişkiyi örneklerle açıklamışlardır.

Kim (2004), Winkler tipi elastik zemin üzerindeki sonsuz Euler-Bernoulli kirişinin statik aksel yük ve hareketli harmonik yük altında stabilitesini ve titreşimini incelemiştir. Formülasyonları elde ederken yükün hızının sabit olduğunu kabul etmiştir. Zamana ve harekete bağlı olarak çift katlı Fourier dönüşümü kullanmış ve yük hızı, yük frekansı ve sönüm için maksimum yer değiştirme ve kritik hızla ilgili sonuçlar vermiştir.

Kargarnovin ve Younesian (2004), Pasternak zemini üzerindeki üniform kesitli ve sonsuz uzunluklu Timoshenko kirişinin hareketli harmonik yük altında dinamik davranışını ele almışlardır. Hareket denklemlerini rezidü integral teoremi ve kompleks Fourier dönüşümü ile çözmüşlerdir. Kiriş boyunca kesme kuvvetini, eğilme momentini ve yer değiştirmeleri hesaplamışlardır.

Kim (2005), aksel basınç kuvvetini ve dönel atalet etkilerini göz önüne alarak, elastik zemine oturan sonsuz uzun Rayleigh kirişinin hareketli yük altında yer değiştirme

ve stabilitesini incelemiştir. Yazar, kirişin harmonik yük altında dinamik davranışını Fourier dönüşümlerini kullanarak elde etmiş ve eksenel basınç, yük hızı, yük frekansive sönüm için maksimum yer değiştirme ve kritik hızı incelemiştir.

Kargarnovin vd. (2005), hareketli harmonik yüke maruz nonlinear viskoelastik zemine oturan sonsuz kirişin davranışını çalışmışlardır. Frekans alanında uygulanabilir basit bir çözüm tekniği sunmuşlardır. Ana denklemleri kompleks Fourier dönüşümü ile kapalı formda Rezidü teoremi ve Green fonksiyonları yardımıyla elde etmişlerdir. Kirişin uzunluğu boyunca eğilme momentini ve yer değiştirmelerini hesaplamışlardır. Yük hızının ve frekansının kiriş davranışını nasıl değiştirdiğini göstermişlerdir.

Younesian vd. (2005), harmonik yük altında viskoelastik zemine oturan Timoshenko kirişinin titreşim analizini yapmışlardır. Çözümde, Green fonksiyonlarını kullanarak kirişin eğilme momentini ve yer değiştirmesini integral formda elde etmişlerdir.

Kim ve Cho (2006), hareketli yükün sabit büyüklükte ve sabit hızda olması durumunda elastik zemin üzerindeki kirişin burkulmasını ve titreşimini incelemiştir. Çözümde Fourier dönüşümü kullanmışlar ve kirişin titreşimini ve yer değiştirmesini etkileyen sebepleri incelemiştir. Kritik hız, kritik frekans ve eksenel burkulma hakkında açıklamalar yapmışlardır.

Mallik vd. (2006), sabit hızla hareket eden tekil yüke maruz elastik zeminli üniform kirişin dinamik davranışını çalışmışlardır. Çözümde Fourier dönüşümü kullanmışlar ve kiriş eğilme momenti ve maksimum yer değiştirmesi için sayısal sonuçlar sunmuşlardır.

Wang vd. (2007), elastik zemine oturan kirişin sabit hızla hareket eden yük altında dinamik davranışını incelemiştir. Yazarlar zemini yaylarla modellemişler ve Bernoulli-Euler kirişini kullanmışlardır.

Jin ve Wen (2008), kurplu demiryolunda trenin rayda oluşturduğu dinamik davranışı sayısal metotlar kullanarak incelemiştir. Ayrıca yazarlar demiryolunda kullanılan desteklerin dinamik davranışa etkilerini incelemiştir.

Nguyen ve Duhamel (2008), hareketli harmonik yüke maruz ve Winkler zemini üzerindeki sonsuz uzun Bernoulli-Euler kirişini incelemiştir. Sonlu elemanlar metodu ile sistemi hem lineer hem de nonlinear olarak modellemişler ve elde edilen grafikleri sunmuşlardır.

Çalım (2009), zamana bağlı hareketli yüklere maruz Pasternak tipi viskoelastik temel üzerinde kirişlerin dinamik davranışını ele almıştır. Yazar, Timoshenko kiriş teorisini

kullanarak ana denklemlerini elde etmiş ve elde ettiği adi diferansiyel denklemleri Laplace dönüşümleri ile hesaplamıştır.

Dimitrovava ve Varandas (2009), rijitliği ani olarak değişen zemin üzerine oturtulmuş, sabit hızla hareket eden kuvvete maruz kirişin dinamik analizini yapmışlardır. Ani değişimi sonlu uzunluktaki kirişin ortasına yerleştirmişlerdir. Bu modelin çözümünde iki analitik yaklaşım uygulamışlardır. İlk olarak, sistemin tepkilerini sonlu integral dönüşüm teknikleri ile elde etmişlerdir. İkinci olarak sistemin dinamik tepkilerini kirişin iki yarısının sürekli sınır şartlarıyla bağlantılı olarak elde etmişlerdir. Bulunan değerler yardımıyla sistemdeki ani rijitlik değişiminin kritik hız üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Bu analizlerden elde ettikleri sonuçları, yüksek hızlı trenlerin zeminde oluşturduğu titreşimlerle birlikte karşılaştırmalı olarak göstermişlerdir.

Awodola ve Oni (2010), hareketli tekil kütleyle maruz değişken rijitlikli elastik zemin üzerindeki prizmatik olmayan Euler-Bernoulli kirişinin dinamik davranışını incelemişlerdir. Tekil ve değişken katsayılı dördüncü dereceden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için, Struble asimptotik tekniğini ve genelleştirilmiş Galerkin metodunu kullanarak işlemleri yapmışlardır. Sayısal sonuçları grafiklerle göstermişlerdir.

Dimitrovova (2010), homojen viskoelastik zemine oturan sonlu veya sonsuz uzunlukta farklı kalınlıklı kirişin sabit hızla hareket eden yük altında enine titreşimini incelemiştir. Yazar çalışmasında, farklı kalınlıktaki kirişin birleştiği noktadaki süreksizliğe dikkat çekmiştir. Problemin ana denklemleri normal-mod analizi ile çözülmüştür. Sistemin doğal frekansı, genel dinamik rijitlik matrisinden sayısal olarak elde edilmiştir. Sayısal uygulama için genel bir prosedür sunulmuş ve bunun hızlı demiryollarının titreşim analizinde doğrudan kullanılabilmesi vurgulanmıştır.

Kuo ve Huang (2010), analitik metod kullanarak elastik zemine oturan sonsuz uzun kirişin yerine yeterli uzunlukta elastik zemine oturan sonlu kiriş modellemişlerdir. Bu çalışmada, elastik zemine oturan sonlu kirişin uzunluğunu daha önceki çalışmalarda olduğu gibi deneme yanılma yöntemiyle elde etmişlerdir. Hareketli yük altında, elastik zemine oturan sonlu kirişin dinamik davranışı, sonsuz uzun kirişin dinamik davranışına benzemektedir.

Khaloo ve Zarfam (2012), elastik zemine oturan kirişin hareketli yük altında üç boyutlu dinamik davranışını incelemişlerdir. Aracın ağırlığını hareketli tekil yük olarak modellemişler ve yanal olarak rüzgarın etkisi ile depremin etkisini göz önünde

bulundurmşlardır. Kirişin oturduğu zemini, alttan ve yandan olmak üzere Winkler tipi yaylar şeklinde modellemişlerdir. Çözümde modal analiz metodunu kullanmışlardır.

Basu ve Kameswara (2012), viskoelastik zemin üzerine oturtulmuş ve sabit hızla hareket eden tekil yüke maruz sonsuz kirişin dinamik davranışı için analitik çözümler geliştirmişlerdir. Kiriş tepkileri olarak yer değiştirmeyi, eğilme momentini, kesme kuvvetini ve temas basıncını incelemişlerdir. Zemini modellerken iki parametre göz önünde tutulmuştur. Bunlar sırasıyla zeminin basınç rijitliği ve kesme rijitliğidir. Bu model ile Winkler yay modeline göre daha doğru sonuçlar elde ettiklerini vurgulamışlardır. Kirişin dinamik tepkilerini hareketli yükün hızına ve sistemin sönümüne bağlı olarak elde etmişlerdir.

### **1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı**

Bu tez çalışmasında, elastik zemine oturan sonsuz kirişin hareketli yük altında dinamik analizi incelenmiştir. Çözümde kompleks Fourier dönüşümü, rezidü integral teoremi ile birlikte kullanılmıştır. Yük hızı, sönüm, yay sabiti gibi parametrelerin dinamik davranışa etkileri incelenmiştir.

Birinci bölümde elastik zemine oturan kirişlerle ilgili yapılan çalışmalar özetlenmiştir.

İkinci bölümde farklı sönüm ve farklı hız durumları için sistemde oluşan moment, yer değiştirme ve kesme kuvvetinin denklemleri ayrı ayrı elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde farklı durumlar için yükün kiriş üzerindeki boyutsuz konumuna göre boyutsuz moment, yer değiştirme ve kesme kuvveti grafikleri çizilmiş, dinamik değerlerin nasıl değiştiği üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

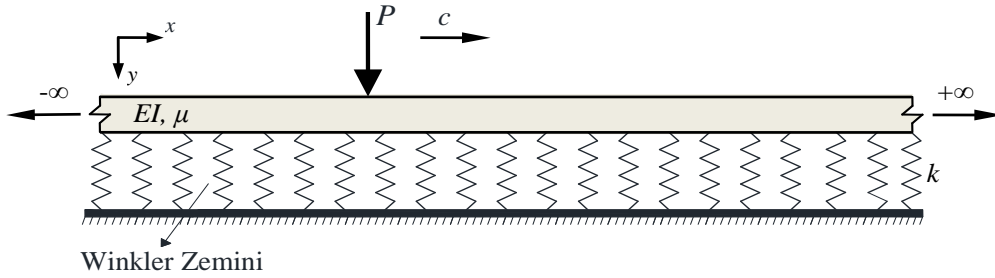
## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1. Problemin Tanımı

Elastik Winkler zemini üzerine oturan sabit kesitli sonsuz uzun elastik kiriş ele alınmıştır (Şekil 2.1). Kiriş üzerinde  $P$  tekil yükü  $c$  sabit hızıyla düzgün doğrusal hareket etmektedir. Probleme ait hareket denklemi

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + kv(x,t) = P\delta(x-ct) \quad (1)$$

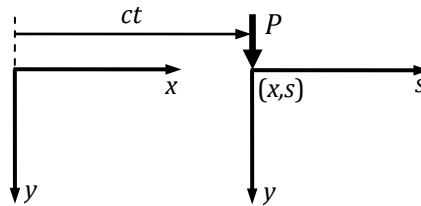
şeklindedir. Burada;  $EI$  kirişin eğilme rijitliğini,  $v(x,t)$  kirişin düşey yer değiştirmesini,  $\mu$  kirişin birim uzunluğuna gelen kütlesini,  $\omega_b$  kirişin açısız sönüm frekansını,  $k$  yatak katsayısını,  $P$  yükün şiddetini,  $\delta$  dirac-delta fonksiyonunu,  $c$  yükün hızını ifade etmektedir.



Şekil 2.1. Hareketli tekil kuvvet altında elastik zemine oturan sonsuz kiriş

### 2.2. Teorik Formülasyon

(1) ifadesiyle verilen kısmi diferansiyel denklemin çözümü için  $(x,y)$  koordinat takımı yerine yükle birlikte hareket eden yeni bir koordinat takımı tanımlanmıştır (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Sabit ve hareketli koordinat sistemi

Çözüm için

$$s = \lambda(x - ct) \quad (2)$$

dönüşümü yapılınsın (Fryba, 1972). Burada

$$\lambda = \left( \frac{k}{4EI} \right)^{1/4} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır (Fryba, 1972).

$(x,y)$  koordinat takımı yerine  $(s,y)$  koordinat takımının tanımlanmasıyla  $v(x,t)$  çözümü için

$$v(x,t) = v_0 v(s) \quad (4)$$

yazılabilir. Burada  $v(s)$  kirişin boyutsuz yer değiştirmesi,  $v_0$  ise kirişin statik yer değiştirmesi olup

$$v_0 = \frac{P}{8\lambda^3 EI} = \frac{P\lambda}{2k} \quad (5)$$

şeklinde tanımlıdır (Fryba, 1972).

(2) ve (4) ifadeleri (1) denkleminde uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{d^4 v(s)}{ds^4} + 4 \frac{\mu c^2}{4EI\lambda^2} \frac{d^2 v(s)}{ds^2} - 2 \frac{\mu c}{EI\lambda^3} \omega_b \frac{dv(s)}{ds} + \frac{k}{EI\lambda^4} v(s) = \frac{P\bar{\delta}(s)}{EI\lambda^4 v_0} \quad (6)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin elde edilmesinde aşağıdaki eşitliklerden yararlanılmıştır.

$$\bar{\delta}(s) = \frac{1}{\lambda} \delta(x) \quad (7)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \lambda, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\lambda c, \quad \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = v_0 \lambda^4 \frac{d^4 v(s)}{ds^4} \quad (8)$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\lambda c v_0 \frac{dv(s)}{ds}, \quad \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \lambda^2 c^2 v_0 \frac{d^2 v(s)}{ds^2}$$

(6) ifadesini daha sade bir hale getirebilmek için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$\alpha = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\lambda} \left( \frac{\mu}{EI} \right)^{1/2}$$

$$\beta = \left( \frac{\mu}{k} \right)^{1/2} \omega_b \quad (9)$$

$$c_{cr} = 2\lambda \left( \frac{EI}{\mu} \right)^{1/2}$$

Bu ifadelerde  $\alpha$  boyutsuz hız parametresi,  $\beta$  boyutsuz sönüm,  $c_{cr}$  kritik hızdır. (3), (5), (7) ve (9) ifadeleri (6) denklemindeki ifadelerde yerine yazılır ve

$$2 \frac{\mu c}{EI \lambda^3} \omega_b = 4 \frac{c}{2\lambda} \left( \frac{\mu}{EI} \right)^{1/2} \left( \frac{\mu}{EI} \right)^{1/2} \frac{\omega_b}{\lambda^2} = 4 \alpha 2 \left( \frac{\mu}{k} \right)^{1/2} \omega_b = 8 \alpha \beta$$

$$\frac{k}{EI \lambda^4} = \frac{k}{EI} \frac{k}{4EI} = 4 \quad (10)$$

$$\frac{P \delta(x)}{EI \lambda^4 v_0} = \frac{P \delta(x)}{EI \lambda^4 \frac{P}{8 \lambda^3 EI}} = 8 \frac{\delta(x)}{\lambda} = 8 \bar{\delta}(s)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{d^4 v(s)}{ds^4} + 4\alpha^2 \frac{d^2 v(s)}{ds^2} - 8\alpha\beta \frac{dv(s)}{ds} + 4v(s) = 8\bar{\delta}(s) \quad (11)$$

ifadesi elde edilir. (11) denklemi  $s$  değişkenine bağlı bir adi diferansiyel denklemdir. Bu denklem aşağıdaki sınır şartları altında çözülecektir.

$$v(s) = v'(s) = v''(s) = v'''(s) \Big|_{s \rightarrow \pm\infty} = 0 \quad (12)$$

Burada (')  $x$ 'e göre türevleri ifade etmektedir. (11) denkleminin çözümü için Fourier integral dönüşümü kullanılacaktır. Fourier dönüşüm çifti aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$V(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(s) e^{-iqs} ds \quad , \quad v(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(q) e^{isq} dq \quad (13)$$

Yukarıdaki ifadelerden birincisi Fourier dönüşümünü, ikincisi ise ters Fourier dönüşümünü göstermektedir. (11) diferansiyel denklemine Fourier dönüşümü uygulanır ve

$$F \left[ \frac{dv(s)}{ds}, s \rightarrow q \right] = iqV(q)$$

$$F \left[ \frac{d^2 v(s)}{ds^2}, s \rightarrow q \right] = -q^2 V(q)$$

$$F \left[ \frac{d^3 v(s)}{ds^3}, s \rightarrow q \right] = -iq^3 V(q)$$

$$F \left[ \frac{d^4 v(s)}{ds^4}, s \rightarrow q \right] = q^4 V(q)$$

$$F [a v(s), s \rightarrow q] = a V(q)$$

$$F [\delta(s), s \rightarrow q] = 1$$
(14)



olduğu dikkate alınır, gerekli düzenlemelerden sonra

$$q^4 V(q) - 4\alpha^2 q^2 V(q) - i8\alpha\beta q V(q) + 4V(q) = 8 \quad (15)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden

$$V(q) = \frac{8}{q^4 - 4\alpha^2 q^2 - i8\alpha\beta q + 4} \quad (16)$$

elde edilir. (16) denkleminin ters Fourier dönüşümü uygulanarak  $v(s)$  için

$$v(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isq}}{q^4 - 4\alpha^2 q^2 - i8\alpha\beta q + 4} dq \quad (17)$$

ifadesi elde edilir. Bu integralin hesaplanmasında rezidü teoremi kullanılacaktır.

### 2.2.1. Rezidü Teoremi ile Kompleks İntegrasyon

(17) integrali rezidü teoremi yardımıyla hesaplanacaktır. Bunun için ifade aşağıdaki şekilde yazılır.

$$v(s) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(q) dq = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq \quad (18)$$

Burada

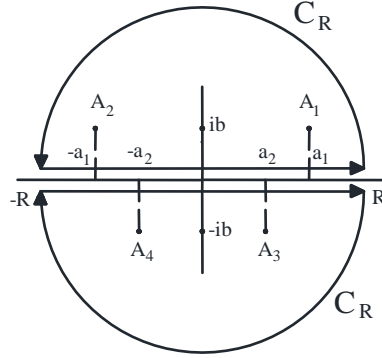
$$Q(q) = q^4 - 4\alpha^2 q^2 - i8\alpha\beta q + 4 \quad (19)$$

şeklinde tanımlıdır.

$Q(q)$  kompleks değişkenli fonksiyonun kutupları aşağıdaki gibi kabul edilsin (Fryba, 1972).

$$A_1 = a_1 + ib, \quad A_2 = -a_1 + ib \quad (20)$$

$$A_3 = a_2 - ib, \quad A_4 = -a_2 - ib$$



şekil 2.3. Kompleks kutuplar (Fryba, 1972)

Kutupların kompleks düzlemde gösterimi şekil 2.3’de verilmiştir. (20) ifadeleri dikkate alınarak  $Q(q)$  ifadesi

$$Q(q) = q^4 - 4\alpha^2 q^2 - i8\alpha\beta q + 4 = (q - A_1)(q - A_2)(q - A_3)(q - A_4) \quad (21)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafı açılır ve dereceleri aynı olan elemanların katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned} q^4 - 4\alpha^2 q^2 - i8\alpha\beta q + 4 &= q^4 - q^3 (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ &\quad + q^2 (A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_1 A_4 + A_2 A_3 + A_2 A_4 + A_3 A_4) \\ &\quad - q (A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_4 + A_1 A_3 A_4 + A_2 A_3 A_4) + A_1 A_2 A_3 A_4 \end{aligned} \quad (22)$$

$$A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_1 A_4 + A_2 A_3 + A_2 A_4 + A_3 A_4 = -4\alpha^2 \quad (23)$$

$$A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_4 + A_1 A_3 A_4 + A_2 A_3 A_4 = i8\alpha\beta \quad (24)$$

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = 4 \quad (25)$$

ifadeleri elde edilir.

(20)'de verilen  $A_1, A_2, A_3, A_4$  yukarıdaki eşitliklerde yerine yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$2b^2 - a_1^2 - a_2^2 = -4\alpha^2 \quad (26)$$

$$2bi(a_2^2 - a_1^2) = -8\alpha\beta i \quad (27)$$

$$(a_1^2 + b^2)(a_2^2 + b^2) = 4 \quad (28)$$

(27) denklemini (26)'da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a_1^2 = 2\alpha^2 + b^2 + \frac{2\alpha\beta}{b} \quad (29)$$

$$a_2^2 = 2\alpha^2 + b^2 - \frac{2\alpha\beta}{b} \quad (30)$$

ifadeleri elde edilir. (29) ve (30) denklemleri (28) denkleminde yerine yazılırsa

$$b^6 + 2\alpha^2 b^4 + (\alpha^4 - 1)b^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0 \quad (31)$$

ifadesi elde edilir. (31) denkleminin 6 tane kökü vardır ve bu köklerden sadece pozitif olanı işlemlerimizde kullanılacaktır. Descartes Kuralına göre (31) eşitliğinin  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  şartlarını sağlayan köklerinden bir tanesi her zaman pozitif olmalıdır. (31) ifadesinden elde edilen  $b > 0$  kökü (29) ve (30)'da yerine yazılarak  $a_1$  ve  $a_2$  değerleri elde edilir.

$A_j$  değerlerinin hesaplanmasından sonra Cauchy Rezidü teoremiyle (17) integrali aşağıdaki şekilde hesaplanır. (17) ifadesi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq \quad (32)$$

şeklinde yazılır. Burada  $R$  yarımlairenin yarıçapıdır. Cauchy Rezidü teoremine göre  $-R$ ,  $+R$  ve  $C_R$  yarımlairesinden oluşan (Şekil 2.3) bir  $C$  kapalı bölgesinin integrali

$$\oint_C \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^{+R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq + \int_{C_R} \frac{e^{isq}}{Q(q)} dq \right] = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q) \Big|_{q=A_j} \quad (33)$$

şeklindedir. Burada,  $C_R$  yarıml düzlemde bütün kutupların etrafından geçen yarıml dairedir

ve  $\text{res } F(q) \Big|_{q=A_j}$  ise  $F(q)$ 'nin  $A_j$  kutbundaki rezidüsüdür.

Jordan teoremine göre

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} F(q) dq \right| = 0 \quad (34)$$

olduğundan (Fryba, 1972)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(q) dq = \pm 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res } F(q) \Big|_{q=A_j} \quad (35)$$

şeklindedir. Burada;

$s > 0$  için integral üst yarıml düzlemde olduğundan işaret (+) pozitif alınır.

$s < 0$  için integral alt yarıml düzlemde olduğundan işaret (-) negatif alınır.

(35) ifadesi dikkate alınarak  $v(s)$  'nin integrali

$$v(s) = \frac{4}{\pi} 2\pi i \sum_{j=1}^2 \operatorname{res} F(q) \Big|_{q=A_j} \quad s > 0$$

$$v(s) = -\frac{4}{\pi} 2\pi i \sum_{j=3}^4 \operatorname{res} F(q) \Big|_{q=A_j} \quad s < 0$$
(36)

şeklinde elde edilir. Buradan

$$v(s) = 8i \left( \frac{e^{isA_1}}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_1 - A_4)} + \frac{e^{isA_2}}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3)(A_2 - A_4)} \right) \quad s > 0$$

$$v(s) = -8i \left( \frac{e^{isA_3}}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)(A_3 - A_4)} + \frac{e^{isA_4}}{(A_4 - A_1)(A_4 - A_2)(A_4 - A_3)} \right) \quad s < 0$$
(37)

olarak elde edilir. (37) ifadesinde  $A_j$  'ler yerine yazılır ve

$$D_1 = a_1 b \quad D_2 = b^2 - \frac{1}{4}(a_1^2 - a_2^2)$$

$$D_3 = a_2 b \quad D_4 = b^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 - a_2^2)$$
(38)

kısaltmaları yapılırsa yer değiştirme ifadeleri

$$v(s) = \frac{2}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-bs} (D_1 \cos a_1 s + D_2 \sin a_1 s) \quad s > 0$$

$$v(s) = \frac{2}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{bs} (D_3 \cos a_2 s - D_4 \sin a_2 s) \quad s < 0$$
(39)

şeklinde elde edilir.

Eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadeleri

$$M(x,t) = -EI \frac{\partial v^2(x,t)}{\partial x^2} = M_0 M(s) \quad (40)$$

$$T(x,t) = -EI \frac{\partial v^3(x,t)}{\partial x^3} = T_0 T(s)$$

şeklindedir. Burada  $M(s)$  ve  $T(s)$  ifadeleri boyutsuz moment ve kesme kuvveti,  $M_0$  ve  $T_0$  ifadeleri ise statik haldeki moment ve kesme kuvveti olup

$$M_0 = \frac{P}{4\lambda}, \quad T_0 = P \quad (41)$$

şeklinde tanımlıdır. (39) ile verilen  $v(s)$  yer değiştirme ifadeleri dikkate alınarak  $s > 0$  için

$$v'(s) = -\frac{2b}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-bs} (D_1 \cos a_1 s + D_2 \sin a_1 s)$$

$$+ \frac{2}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} e^{-bs} (-a_1 D_1 \sin a_1 s + a_1 D_2 \cos a_1 s)$$

$$v''(s) = \frac{e^{-bs}}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} \left( (2b^2 D_1 - 4a_1 b D_2 - 2a_1^2 D_1) \cos a_1 s \right. \quad (42)$$

$$\left. + (2b^2 D_2 + 4a_1 b D_2 - 2a_1^2 D_2) \sin a_1 s \right)$$

$$v'''(s) = \frac{e^{-bs}}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} \left[ (-2b^3 D_1 + 6a_1 b^2 D_2 + 6a_1^2 b D_1 - 2a_1^3 D_2) \cos a_1 s \right.$$

$$\left. + (-2b^3 D_2 - 6a_1 b^2 D_1 + 6a_1^2 b D_2 + 2a_1^3 D_1) \sin a_1 s \right]$$

şeklinde elde edilir.

(42) eşitliklerinin (40)'da yerine yazılmasıyla

$$M(s) = -\frac{1}{2}v''(s) = \frac{e^{-bs}}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} \left( (a_1^2 D_1 + 2a_1 b D_2 - b^2 D_1) \cos a_1 s \right. \\ \left. + (a_1^2 D_2 - 2a_1 b D_1 - b^2 D_2) \sin a_1 s \right) \quad (43)$$

$$T(s) = -\frac{1}{8}v'''(s) = \frac{e^{-bs}}{4a_1(D_1^2 + D_2^2)} \left( (a_1^3 D_2 - 3a_1^2 b D_1 - 3a_1 b^2 D_2 + b^3 D_1) \cos a_1 s \right. \\ \left. + (a_1^3 D_1 + 3a_1^2 b D_2 - 3a_1 b^2 D_1 - b^3 D_2) \sin a_1 s \right) \quad (44)$$

şeklinde moment ve kesme kuvveti elde edilir.  $s < 0$  için ise

$$v'(s) = \frac{2b}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{bs} (D_3 \cos a_2 s - D_4 \sin a_2 s) \\ + \frac{2}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} e^{bs} (-a_2 D_3 \sin a_2 s - a_2 D_4 \cos a_2 s) \\ v''(s) = \frac{e^{bs}}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} \left( (2b^2 D_3 - 4a_2 b D_4 - 2a_2^2 D_3) \cos a_2 s \right. \\ \left. - (2b^2 D_4 + 4a_2 b D_3 - 2a_2^2 D_4) \sin a_2 s \right) \quad (45)$$

$$v'''(s) = \frac{e^{bs}}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} \left( (2a_2^3 D_4 - 6a_2^2 b D_3 - 6a_2 b^2 D_4 + 2b^3 D_3) \cos a_2 s \right. \\ \left. + (2a_2^3 D_3 + 6a_2^2 b D_4 - 6a_2 b^2 D_3 - 2b^3 D_4) \sin a_2 s \right)$$

şeklinde elde edilen ifadeler (40)'da yerine yazılırsa moment ve kesme kuvveti ifadeleri

$$M(s) = -\frac{1}{2}v''(s) = \frac{e^{bs}}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} \left( (a_2^2 D_3 + 2a_2 b D_4 - b^2 D_3) \cos a_2 s \right. \\ \left. - (a_2^2 D_4 - 2a_2 b D_3 - b^2 D_4) \sin a_2 s \right) \quad (46)$$

$$T(s) = -\frac{1}{8}v'''(s) = -\frac{e^{bs}}{4a_2(D_3^2 + D_4^2)} \left( (a_2^3 D_4 - 3a_2^2 b D_3 - 3a_2 b^2 D_4 + b^3 D_3) \cos a_2 s \right. \\ \left. + (a_2^3 D_3 + 3a_2^2 b D_4 - 3a_2 b^2 D_3 - b^3 D_4) \sin a_2 s \right) \quad (47)$$

şeklinde elde edilir.

### 2.3. Özel Haller

#### 2.3.1. Statik Hal ( $\alpha=0, \beta=0$ )

(31) denkleminde  $\alpha = 0, \beta = 0$  olarak alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir. Bu denklemin kökleri sırası ile verilmiş ve işlemlerde pozitif kök kullanılmıştır.

$b^6 - b^2 = 0$  denkleminin kökleri

$$b_1 = -1, b_{2,3} = 0, b_{4,5} = \pm i, b_6 = 1 \quad (48)$$

şeklindedir. Pozitif kök  $b = 1$  olduğundan (29) ve (30) ifadeleri yardımıyla

$$a_1 = 1, a_2 = 1 \quad (49)$$

şeklinde hesaplanır.  $b, a_1$  ve  $a_2$  değerleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$v(s) = e^{-|s|} (\cos s + \sin |s|) \quad (50)$$

$$M(s) = e^{-|s|} (\cos s - \sin |s|) \quad (51)$$

$$T(s) = -\text{sign } s \cdot \frac{1}{2} e^{-|s|} \cos s \quad (52)$$

olarak elde edilirler.



### 2.3.2. Sönümsüz Hal ( $\beta=0$ )

#### 2.3.2.1. $\alpha < 1, \beta=0$ Hali

(31) denkleminde  $\beta = 0$  yazılırsa; aşağıdaki ifade elde edilir.

$$b^6 + 2\alpha^2 b^4 + (\alpha^4 - 1)b^2 = 0 \quad (53)$$

Bu denklemin kökleri

$$b_{1,2} = 0, b_{3,4} = \pm\sqrt{1-\alpha^2}, b_{5,6} = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$$

şeklindedir. Pozitif kök  $b = \sqrt{1-\alpha^2}$  (29) ve (30)'da yerine yazılırsa

$$a_1 = a_2 = \sqrt{1+\alpha^2} \quad (54)$$

şeklinde elde edilir. Bunların yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti ifadelerinde yerine yazılmasıyla;

$$v(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^4}} e^{-\sqrt{1-\alpha^2}|s|} \left( \sqrt{1+\alpha^2} \cos(\sqrt{1+\alpha^2}s) + \sqrt{1-\alpha^2} \sin(\sqrt{1+\alpha^2}|s|) \right) \quad (55)$$

$$M(s) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^4}} e^{-\sqrt{1-\alpha^2}|s|} \left( \sqrt{1+\alpha^2} \cos(\sqrt{1+\alpha^2}s) - \sqrt{1-\alpha^2} \sin(\sqrt{1+\alpha^2}|s|) \right) \quad (56)$$

$$T(s) = -\frac{1}{2\sqrt{1-\alpha^4}} e^{-\sqrt{1-\alpha^2}|s|} \left( \text{sign } s \cdot \sqrt{1-\alpha^4} \cos(\sqrt{1+\alpha^2}s) + \alpha^2 \sin(\sqrt{1+\alpha^2}s) \right) \quad (57)$$

olarak elde edilirler.

### 2.3.2.2. $\alpha=1, \beta=0$ Hali

Bu durumda kritik hız, hareketli yükün hızına eşittir ve  $b=0, a_1=a_2=2^{1/2}$  olarak elde edilmiştir. Sönüm sıfır olduğundan kiriş stabilitesini kaybeder ve yer değiştirme, moment, kesme kuvveti sonsuza gider.

### 2.3.2.3. $\alpha>1, \beta=0$ Hali

(31) denkleminde  $\beta=0$  yazılırsa (53) eşitliğinin  $\alpha>1$  için pozitif kökü  $b=0$  olmaktadır.  $b=0$  için (29) ve (30) ifadelerinde  $0/0$  belirsizliği ortaya çıkmaktadır. Bu sebeple  $b$  kökü için Kenney (1954) tarafından verilen aşağıdaki seri yaklaşımı kullanılır (Fryba, 1972).

$$b = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{8\beta^2\alpha^4}{(\alpha^2 - 1)^2} \right) + \dots \right\} \quad (58)$$

(58) ifadesi (29) ve (30) denklemlerinde yerine yazıldığında ortaya çıkan  $a_1$  ve  $a_2$  ifadelerinde  $\beta \rightarrow 0$  limitine gidilirse,

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left( 2\alpha^2 + b^2 \pm \frac{2\alpha\beta}{b} \right)^{1/2} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ 2\alpha^2 + \left( \frac{\alpha\beta}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{8\beta^2\alpha^4}{(\alpha^2 - 1)^2} \right) + \dots \right\} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{2\alpha\beta}{\frac{\alpha\beta}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{8\beta^2\alpha^4}{(\alpha^2 - 1)^2} \right) + \dots \right\}} \right]^{1/2} \\ &= \left( 2\alpha^2 \pm \frac{2\alpha\beta}{\frac{\alpha\beta}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}}} \right)^{1/2} = \left( 2\alpha^2 \pm 2(\alpha^4 - 1)^{1/2} \right)^{1/2} = \sqrt{\alpha^2 + 1} \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \end{aligned} \quad (59)$$

şeklinde  $a_1$  ve  $a_2$  elde edilir.

Yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti ifadeleri ise  $b$ ,  $a_1$  ve  $a_2$  yerine yazılarak

$$\begin{aligned} v(s) &= -\frac{2}{a_1\sqrt{\alpha^4-1}}\sin a_1s \\ &= -\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)\sqrt{\alpha^4-1}}\sin\left(\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)s\right) \quad s > 0 \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} v(s) &= -\frac{2}{a_2\sqrt{\alpha^4-1}}\sin a_2s \\ &= -\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)\sqrt{\alpha^4-1}}\sin\left(\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)s\right) \quad s < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(s) &= -\frac{a_1}{\sqrt{\alpha^4-1}}\sin a_1s \\ &= -\frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)}{\sqrt{\alpha^4-1}}\sin\left(\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)s\right) \quad s > 0 \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} M(s) &= -\frac{a_2}{\sqrt{\alpha^4-1}}\sin a_2s \\ &= -\frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)}{\sqrt{\alpha^4-1}}\sin\left(\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)s\right) \quad s < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(s) &= -\frac{a_1^2}{4\sqrt{\alpha^4-1}}\cos a_1s \\ &= -\frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)^2}{4\sqrt{\alpha^4-1}}\cos\left(\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)s\right) \quad s > 0 \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} T(s) &= -\frac{a_2^2}{4\sqrt{\alpha^4-1}}\cos a_2s \\ &= -\frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)^2}{4\sqrt{\alpha^4-1}}\cos\left(\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-\sqrt{\alpha^2-1}}{\sqrt{\alpha^4-1}}\right)s\right) \quad s < 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilirler.

### 2.3.3. Hafif Sönüm Hali ( $\beta \ll 1$ )

#### 2.3.3.1. $\alpha < 1, \beta \ll 1$ Hali

$\beta$  sifira yakın bir değer olduğu için karesini aldığımızda değeri daha da küçülecektir. Bundan dolayı (31) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$b^6 + 2\alpha^2 b^4 + (\alpha^4 - 1)b^2 = 0 \quad (63)$$

Bu denklemin kökleri

$$b_{1,2} = 0, b_{3,4} = \pm\sqrt{-1-\alpha^2}, b_{5,6} = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$$

şeklindedir. Pozitif kök  $b \approx \sqrt{1-\alpha^2}$  (29) ve (30)'da yerine yazılırsa

$$a_1, a_2 \approx \sqrt{1+\alpha^2 \pm \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}} \quad (64)$$

elde edilir. Bunların (39), (43), (44), (46), (47)'de yerlerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned}
v(s) &= \frac{2e^{-bs}}{a_1 \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right)^2 \right]} \\
&\quad \left( \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \cos(a_1 s) + \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \sin(a_1 s) \right) \\
&= \frac{2e^{-\sqrt{1-\alpha^2}s}}{\sqrt{1+\alpha^2 + \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left( 2(1-\alpha^2)^2 + \alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2} \right)}} \\
&\quad \left( \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \cos \left( \sqrt{1+\alpha^2 \pm \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}} s \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \sin \left( \sqrt{1+\alpha^2 \pm \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}} s \right) \right) \quad s > 0 \quad (65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(s) &= \frac{2e^{bs}}{a_2 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right)^2 \right]} \\
&\quad \left( \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \cos a_2 s - \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \sin a_2 s \right) \\
&= \frac{2e^{\sqrt{1-\alpha^2}s}}{\sqrt{1+\alpha^2 - \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left( 2(1-\alpha^2)^2 - \alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2} \right)}} \\
&\quad \left( \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \cos \left( \sqrt{1+\alpha^2 - \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}} s \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \sin \left( \sqrt{1+\alpha^2 - \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}} s \right) \right) \quad s < 0 \quad (66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(s) &= \frac{e^{-bs}}{a_1 \left( (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right)^2 \right)} \\
&\quad \left( \left( a_1^2 \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} + 2a_1 b \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - b^2 \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right) \cos a_1 s \right. \\
&\quad \left. + \left( a_1^2 \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) - 2 \left( (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - b^2 \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \right) \sin a_1 s \quad s > 0 \tag{67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(s) &= \frac{e^{bs}}{a_2 \left( 2(1-\alpha^2)^2 - \alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2} \right)} \\
&\quad \left( \left( a_2^2 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} + 2 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) - b^2 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right) \cos a_2 s \right. \\
&\quad \left. - \left( a_2^2 D_4 - 2 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right] \right) \right. \\
&\quad \left. - b^2 \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \right) \sin a_2 s \quad s < 0 \tag{68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{e^{-bs}}{4a_1 \left( 2(1-\alpha^2)^2 + \alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2} \right)} \\
&\left( \left( a_1^3 \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) - 3a_1 \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right] \right) \right. \\
&\left. - 3a_1b^2 \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) + b^3 \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right) \cos a_1s \\
&+ \left( a_1^3 \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} + 3a_1^2b \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \right. \\
&\left. - 3a_1b^2 \left[ (1-\alpha^4) + 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
&\left. - b^3 \left( (1-\alpha^2) - \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \right) \sin a_1s \quad s > 0 \tag{69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(s) &= -\frac{e^{bs}}{4a_2 \left( 2(1-\alpha^2)^2 - \alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2} \right)} \\
&\left( \left( a_2^3 \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) - 3a_2^2b \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right) \right. \\
&\left. - 3a_2b^2 \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) + b^3 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right) \cos a_2s \\
&+ \left( a_2^3 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} + 3a_2^2b \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \right. \\
&\left. - 3a_2b^2 \left[ (1-\alpha^4) - 2\alpha\beta(1-\alpha^2)^{1/2} \right]^{1/2} \right. \\
&\left. - b^3 \left( (1-\alpha^2) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)^{1/2}} \right) \right) \sin a_2s \quad s < 0 \tag{70}
\end{aligned}$$

şeklinde yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti elde edilirler.

### 2.3.3.2. $\alpha=1, \beta \ll 1$ Hali

(31) denkleminde  $\alpha = 1$  yazılırsa

$$b^6 + 2b^4 - \beta^2 = 0 \quad (71)$$

elde edilir. Bu denklemin pozitif kökü  $b \approx 2^{-1/4} \beta^{1/2}$  şeklinde yaklaşık alınır (Fryba, 1972)

$$a_1 = a_2 \approx (2^{1/2} \pm 2^{-1/4} \beta^{1/2}) \quad (72)$$

olarak elde edilir. Bunların yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti ifadelerinde yerine yazılmasıyla

$$v(s) = \frac{2e^{-2^{-1/4} \beta^{1/2} s}}{(2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta)(2^{1/2} \beta + 2^{3/4} \beta^{3/2} + \beta^2)} \left( (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) \cos((2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) s) + 2^{-1/2} \beta \sin((2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) s) \right) \quad s > 0 \quad (73)$$

$$v(s) = \frac{2e^{2^{-1/4} \beta^{1/2} s}}{(2^{1/4} \beta^{1/2} - 2^{-1/2} \beta)(2^{1/2} \beta + 2^{3/4} \beta^{3/2} + \beta^2)} \left( (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) \cos((2^{1/4} \beta^{1/2} - 2^{-1/2} \beta) s) + 2^{-1/2} \beta \sin((2^{1/4} \beta^{1/2} - 2^{-1/2} \beta) s) \right) \quad s < 0 \quad (74)$$

$$M(s) = \frac{e^{-2^{-1/4} \beta^{1/2} s}}{a_1(2^{1/2} \beta + 2^{3/4} \beta^{3/2} + \beta^2)} \left( (a_1^2(2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) + 2a_1 b 2^{-1/2} \beta - b^2(2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta)) \cos a_1 s + (a_1^2 2^{-1/2} \beta - 2a_1 b(2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) - b^2 2^{-1/2} \beta) \sin a_1 s \right) \quad s > 0 \quad (75)$$



$$\begin{aligned}
M(s) &= \frac{e^{2^{-1/4} \beta^{1/2} s}}{a_2 (2^{1/2} \beta + 2^{3/4} \beta^{3/2} + \beta^2)} \\
&\quad \left( \left( a_2^2 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) + 2a_2 b 2^{-1/2} \beta - b^2 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) \right) \cos a_2 s \right. \\
&\quad \left. - \left( a_2^2 2^{-1/2} \beta - 2a_2 b (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) - b^2 2^{-1/2} \beta \right) \sin a_2 s \right) \quad s < 0 \quad (76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{e^{-2^{-1/4} \beta^{1/2} s}}{4a_1 (2^{1/2} \beta + 2^{3/4} \beta^{3/2} + \beta^2)} \\
&\quad \left( \left( a_1^3 2^{-1/2} \beta - 3a_1^2 b (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3a_1 b^2 2^{-1/2} \beta + b^3 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) \right) \cos a_1 s \right. \\
&\quad \left. + \left( a_1^3 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) + 3a_1^2 b 2^{-1/2} \beta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3a_1 b^2 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) - b^3 2^{-1/2} \beta \right) \sin a_1 s \right) \quad s > 0 \quad (77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(s) &= -\frac{e^{2^{-1/4} \beta^{1/2} s}}{4a_2 (2^{1/2} \beta + 2^{3/4} \beta^{3/2} + \beta^2)} \\
&\quad \left( \left( a_2^3 2^{-1/2} \beta - 3a_2^2 b (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3a_2 b^2 2^{-1/2} \beta + b^3 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) \right) \cos a_2 s \right. \\
&\quad \left. + \left( a_2^3 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) + 3a_2^2 b 2^{-1/2} \beta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3a_2 b^2 (2^{1/4} \beta^{1/2} + 2^{-1/2} \beta) - b^3 2^{-1/2} \beta \right) \sin a_2 s \right) \quad s < 0 \quad (78)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

### 2.3.3.3. $\alpha > 1, \beta \ll 1$ Hali

Bu hal sönümsüz sistemdeki  $\alpha > 1, \beta = 0$  haline benzemektedir. Oradaki gibi  $b=0$  olduğu için,  $b$  (58) eşitliğinden faydalanılarak türetebilir.  $\beta$  sifıra yakın bir değer olduğu için (58) eşitliğinde  $\beta$ 'nin karesi sıfır kabul edilmiştir. Bu durumda  $b$ 'nin yaklaşık değeri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$b \approx \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^4 - 1}} \quad (79)$$

Bulunan bu değer (29) ve (30) denklemlerinde yerine yazılırsa  $a_1$  ve  $a_2$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$a_1 = a_2 \approx \sqrt{\alpha^2 + 1} \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (80)$$

Bunların yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti ifadelerinde yerine yazılmasıyla,

$$v(s) = \frac{2e^{-bs}}{a_1 \left( \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right) \right)} \left( \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) \cos a_1 s + \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \sin a_1 s \right) \quad s > 0 \quad (81)$$

$$v(s) = \frac{2e^{bs}}{a_2 \left( \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right)^2 \right)} \left( \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) \cos a_2 s - \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \sin a_2 s \right) \quad s < 0 \quad (82)$$

$$\begin{aligned}
M(s) = & \frac{e^{-bs}}{a_1 \left( \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right)^2 \right)} \\
& \left( \left( a_1^2 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) + 2a_1 b \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right. \right. \\
& \left. \left. - b^2 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) \right) \cos a_1 s \right. \\
& \left. + \left( a_1^2 \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} - 2a_1 b \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - b^2 \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right) \sin a_1 s \right) \quad s > 0
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
M(s) = & \frac{e^{bs}}{a_2 \left( \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right)^2 \right)} \\
& \left( \left( a_2^2 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) + 2a_2 b \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right. \right. \\
& \left. \left. - b^2 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) \right) \cos a_2 s \right. \\
& \left. - \left( a_2^2 \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} - 2a_2 b \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - b^2 \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4 - 1)^{3/2}}{\alpha^4 - 1} \right) \sin a_2 s \right) \quad s < 0
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
T(s) = & \frac{e^{-bs}}{4a_1 \left( \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} \right)^2 \right)} \\
& \left( \left( a_1^3 \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} - 3a_1^2 b \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3a_1 b^2 \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} + b^3 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) \right) \cos a_1 s \right. \\
& + \left( a_1^3 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) + 3a_1^2 b \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} \right. \\
& \left. \left. - 3a_1 b^2 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} + \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) - b^3 \frac{\alpha^2 \beta^2 - (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} \right) \sin a_1 s \right) \quad s > 0 \quad (85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(s) = & - \frac{e^{bs}}{4a_2 \left( \alpha^2 \beta^2 \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} \right)^2 \right)} \\
& \left( \left( a_2^3 \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} - 3a_2^2 b \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 3a_2 b^2 \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} + b^3 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) \right) \cos a_2 s \right. \\
& + \left( a_2^3 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) + 3a_2^2 b \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} \right. \\
& \left. \left. - 3a_2 b^2 \alpha \beta \left( \frac{1}{(\alpha^2-1)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha^2+1)^{1/2}} \right) - b^3 \frac{\alpha^2 \beta^2 + (\alpha^4-1)^{3/2}}{\alpha^4-1} \right) \sin a_2 s \right) \quad s < 0 \quad (86)
\end{aligned}$$

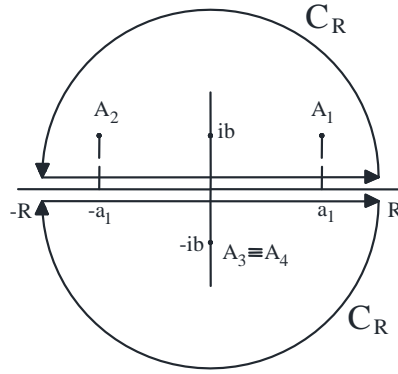
şeklinde elde edilirler.

### 2.3.4. Kritik Sönüm Hali ( $\beta=\beta_{cr}$ )

Kritik sönüm durumunda  $a_2$  her zaman sıfırdır (Şekil 2.4). (30) eşitliğinden

$$\alpha \beta_{cr} = \frac{1}{2} b (2\alpha^2 + b^2) \quad (87)$$

olarak elde edilir.



Şekil 2.4. Kritik sönüm için kompleks kutuplar ( $a_2 = 0$ )

(87) denklemi (31) denkleminde yerine yazılırsa,

$$b^6 + 2\alpha^2 b^4 + (\alpha^4 - 1)b^2 - \left[ \frac{1}{2} b (2\alpha^2 + b^2) \right]^2 = 0 \quad (88)$$

ifadesi elde edilir.  $b^2$  yerine  $t$  yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$t^3 + 2\alpha^2 t^2 - \frac{1}{4} (2\alpha^2 + t)^2 t + (\alpha^4 - 1)t = 0 \quad (89)$$

elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$t = b^2 = 0, \quad t = b^2 = \frac{2}{3} (-\alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 + 3}), \quad t = b^2 = \frac{2}{3} (-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})$$

şeklindedir. Çözüm için dikkate alınacak pozitif kök ise

$$b^2 = \frac{2}{3} \left( -\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right) \quad (90)$$

şeklindedir. (90) denklemi (87) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \beta_{cr} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3} \left( -\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right)} \left[ 2\alpha + \frac{1}{\alpha} \left( \frac{2}{3} \left( -\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right) \right) \right] \\ &= \frac{2^{1/2}}{3^{3/2}} \sqrt{\left( -\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right)} \left( 2\alpha + \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^4 + 3} \right) \end{aligned} \quad (91)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemde görüldüğü gibi kritik sönümün değeri yükün hızına ( $\alpha$  parametresi) bağlıdır. (90) ile verilen  $b$  değeri yerine yazılırsa

$$a_1^2 = \frac{4}{3} \left( 2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right), \quad a_2 = 0 \quad (92)$$

elde edilir. Şekil 2.4 dikkate alınarak  $s > 0$  için Cauchy teoremi yardımıyla

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{2e^{-\sqrt{\frac{2}{3} \left( -\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right)} s}}{\sqrt{\frac{4}{3} \left( 2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right) \left( \frac{8}{9} \alpha^4 + 3 \right)}} \\ &\quad \left( \sqrt{\frac{8}{9} \left( -\alpha^4 + 3 + \alpha^2 \sqrt{\alpha^4 + 3} \right)} \cos \left( \sqrt{\frac{4}{3} \left( 2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right)} s \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left( -4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{4}{3} \left( 2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right)} s \right) \right) \quad s > 0 \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned}
M(s) &= \frac{e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})s}}{\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})\left(\frac{8}{9}\alpha^4 + 3\right)}} \\
&\left( \left( \left( \frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \right)^{3/2} \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) - 3\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})} \right. \right. \\
&\left. \frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3}) - 3\sqrt{\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3})} \sqrt{\frac{2}{3}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})} \right. \\
&\left. \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) + \frac{2}{3}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})^{3/2} \sqrt{\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3})} \right) \\
&\cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})}s\right) \\
&+ \left( \frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \right)^{3/2} \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) - 2\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3}) \\
&- \frac{2}{3}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \sin\left(\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})}s\right) \quad s > 0 \quad (94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})s}}{4\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})\left(\frac{8}{9}\alpha^4 + 3\right)}} \\
&\left( \left( \left( \frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \right)^{3/2} \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) - 3\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})} \right. \right. \\
&\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3}) - 3\sqrt{\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3})} \sqrt{\frac{2}{3}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})} \\
&\left. \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) + \frac{2}{3}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})^{3/2} \sqrt{\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3})} \right) \\
&\cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})}s\right) + \left( \left( \frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \right)^{3/2} \sqrt{\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3})} \right. \\
&+ 3\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})} \sqrt{\frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3})} \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \\
&- 3\sqrt{\frac{2}{3}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})} \frac{8}{9}(-\alpha^4 + 3 + \alpha^2\sqrt{\alpha^4 + 3}) \\
&\left. - \left( \frac{2}{3}(-\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \right)^{3/2} \frac{1}{3}(-4\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3}) \right) \sin\left(\sqrt{\frac{4}{3}(2\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3})}s\right) \quad s > 0 \quad (95)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilirler.

$s < 0$  için ise yarım düzlemde çift kutup vardır ( $A_3 = A_4$ ). Bu durumda rezidüler

$$j = 3 \text{ için; } \operatorname{res} F(q)|_{q=A_3} = \frac{e^{isA_3}}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \left[ is - \frac{2A_3 - A_1 - A_2}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]$$

$$j = 4 \text{ için; } \operatorname{res} F(q)|_{q=A_4} = \frac{e^{isA_4}}{(A_4 - A_1)(A_4 - A_2)} \left[ is - \frac{2A_4 - A_1 - A_2}{(A_4 - A_1)(A_4 - A_2)} \right]$$
(96)

şeklinde elde edilir. Bunlar (36)'da yerine yazılırsa,

$$v(s) = -8i \left( \frac{e^{isA_3}}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \left[ is - \frac{2A_3 - A_1 - A_2}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \right] \right. \\ \left. + \frac{e^{isA_4}}{(A_4 - A_1)(A_4 - A_2)} \left[ is - \frac{2A_4 - A_1 - A_2}{(A_4 - A_1)(A_4 - A_2)} \right] \right)$$
(97)

ifadesi elde edilir. Şekil 2.4'e göre kompleks fonksiyonun kutupları

$$A_1 = a_1 + ib, \quad A_2 = -a_1 + ib, \quad A_3 = A_4 = -ib$$
(98)

şeklindedir. Buların (97)'de yerine yazılmasıyla

$$v(s) = \frac{2e^{bs}}{(\alpha^4 + 3)} \left( b - (\alpha^4 + 3)^{1/2} s \right)$$
(99)

elde edilir.  $v(s)$  denkleminin birinci, ikinci ve üçüncü türevi aşağıda verilmiştir.

$$v'(s) = \frac{2be^{bs}}{(\alpha^4 + 3)} \left( b - (\alpha^4 + 3)^{1/2} s \right) - \frac{2e^{bs}}{(\alpha^4 + 3)} (\alpha^4 + 3)^{1/2}$$

$$v''(s) = \frac{2be^{bs}}{(\alpha^4 + 3)} \left[ b^2 - 2(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} s \right]$$

$$v'''(s) = \frac{2b^2e^{bs}}{(\alpha^4 + 3)} \left[ b^2 - 3(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} s \right]$$
(100)



Bunların moment ve kesme kuvveti ifadelerinde yerine yazılmasıyla

$$M(s) = -\frac{1}{2}v''(s) = -\frac{be^{bs}}{(\alpha^4 + 3)} \left[ b^2 - 2(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} s \right] \quad (101)$$

$$T(s) = -\frac{1}{8}v'''(s) = -\frac{b^2 e^{bs}}{4(\alpha^4 + 3)} \left[ b^2 - 3(\alpha^4 + 3)^{1/2} - b(\alpha^4 + 3)^{1/2} s \right] \quad (102)$$

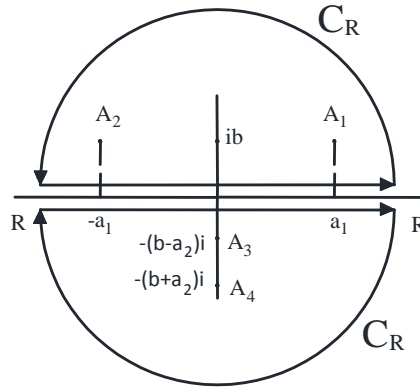
olarak elde edilirler.

### 2.3.5. Kritik Üstü Sönüm Hali ( $\beta > \beta_{cr}$ )

Şekil 2.5' e göre kompleks değişkenli fonksiyonunun kutupları aşağıdaki gibi yazılır (Fryba, 1972).

$$A_1 = a_1 + ib \quad , \quad A_2 = -a_1 + ib \quad (103)$$

$$A_3 = -(b - a_2)i \quad , \quad A_4 = -(b + a_2)i$$



Şekil 2.5. Kritik üstü sönüm hali için kompleks kutuplar

$a_1$ ,  $a_2$  ve  $b$ 'nin değerlerini bulabilmek için (21) eşitliği tekrar kullanılmıştır. (21) eşitliğinde işlemler yapıp oluşan denklemde dereceleri aynı olan elemanların katsayıları birbirine eşitlenerek aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\begin{aligned}
A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_3 + A_2A_4 + A_3A_4 &= -4\alpha^2 \\
A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + A_1A_3A_4 + A_2A_3A_4 &= i8\alpha\beta \\
A_1A_2A_3A_4 &= 4
\end{aligned} \tag{104}$$

(103)'de verilen  $A_1, A_2, A_3, A_4$  denklemlerde yerine yazılarak

$$2b^2 - a_1^2 + a_2^2 = -4\alpha^2 \tag{105}$$

$$b(a_1^2 + a_2^2) = 4\alpha\beta \tag{106}$$

$$(a_1^2 + b^2)(-a_2^2 + b^2) = 4 \tag{107}$$

elde edilir. (105) ve (106) denklemleri  $a_1^2$  ve  $a_2^2$ 'ye göre ortak çözümlürse

$$a_1^2 = 2\alpha^2 + b^2 + \frac{2\alpha\beta}{b} \tag{108}$$

$$a_2^2 = \frac{2\alpha\beta}{b} - 2\alpha^2 - b^2 \tag{109}$$

elde edilir. Bunların (107)'de yerine yazılmasıyla,

$$\left(2\alpha^2 + b^2 + \frac{2\alpha\beta}{b} + b^2\right) \left(2\alpha^2 + b^2 - \frac{2\alpha\beta}{b} + b^2\right) = 4 \tag{110}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde (31) denklemi tekrar elde edilir. Daha öncekilere benzer işlemler yapılarak  $b, a_1$  ve  $a_2$  hesaplanır.

Tablo 2.1'de  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin özel durumları için (108), (109) ve (31) denklemlerinin yaklaşık çözümleri verilmiştir.

Tablo 2.1. (31) denkleminin  $\alpha$  ve  $\beta$  değerlerine göre kökleri

$\alpha$	$\beta$	$b$	$a_1$	$a_2$
0	2	1	1	i
0.25	2	1.0248	1.4666	0.4466i
0.5	2	1.0604	1.8736	0.5114
0.75	2	1.0746	2.2520	0.7155
1	2	1.0630	2.6254	0.7956
1.25	2	1.0304	3.0065	0.8159
1.5	2	0.9820	3.4021	0.8035
1.75	2	0.9242	3.8149	0.7713
2	2	0.8625	4.2449	0.7290
2.5	2	0.7431	5.1487	0.6364
3	2	0.6412	6.0931	0.5512
3.5	2	0.5590	7.0610	0.4819
4	2	0.4934	8.0419	0.4297

Tablo 2.1'e göre örneğin;  $\alpha = 0.5$  ve  $\beta = 2$  için  $b = 1.0604$  olarak hesaplanır. Bu değer (108) ve (109) denklemlerinde yerine yazılarak  $\alpha_1 = 1.8736$ ,  $\alpha_2 = 0.5114$  değerleri bulunur.  $\alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\alpha > 1$  için örneklerin çoğaltılabilmesi mümkündür.

$s > 0$  olması durumunda Şekil 2.3 ve Şekil 2.5'e bakıldığında denklemin kompleks köklerinden  $A_1$  ve  $A_2$  birbirine eşit olduğu için yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti ifadeleri (39), (43) ve (44) ile verildiği gibidir.

$s < 0$  için ise rezidüler;

$$j = 3 \text{ için; } \operatorname{res} F(q) \Big|_{q=A_3} = \frac{e^{isA_3}}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)(A_3 - A_4)} \quad (111)$$

$$j = 4 \text{ için; } \operatorname{res} F(q) \Big|_{q=A_4} = \frac{e^{isA_4}}{(A_4 - A_1)(A_4 - A_2)(A_4 - A_3)}$$

şeklindedir. Bu ifadeler (36)'da yerine yazılırsa yer değiştirme fonksiyonu

$$v(s) = -8i \left( \frac{e^{isA_3}}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)(A_3 - A_4)} + \frac{e^{isA_4}}{(A_4 - A_1)(A_4 - A_2)(A_4 - A_3)} \right) \quad (112)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadede  $A_j$ 'ler yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} v(s) &= -8i \left( \frac{e^{isA_3}}{8a_2^2ib - (2ia_1^2a_2 + 2ia_2^3 + 8ia_2b^2)} + \frac{e^{isA_4}}{8a_2^2ib + (2ia_1^2a_2 + 2ia_2^3 + 8ia_2b^2)} \right) \\ &= - \left( \frac{e^{isA_3}}{a_2^2b - \left( \frac{1}{4}a_1^2a_2 + \frac{1}{4}a_2^3 + a_2b^2 \right)} + \frac{e^{isA_4}}{a_2^2b + \left( \frac{1}{4}a_1^2a_2 + \frac{1}{4}a_2^3 + a_2b^2 \right)} \right) \end{aligned} \quad (113)$$

ifadesi elde edilir. (113) ifadesini daha da kısaltmak için aşağıdaki büyüklükleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1b & D_2 &= b^2 - \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2) \\ D_3 &= a_2b & D_4 &= b^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2) \end{aligned} \quad (114)$$

(114) ifadesi yerine konur ve düzenlenirse

$$v(s) = \frac{1}{a_2(D_4^2 - D_3^2)} \left[ (D_3 + D_4)e^{(b-a_2)s} - (D_4 - D_3)e^{(b+a_2)s} \right] \quad (115)$$

şeklinde yer değiştirme elde edilir.  $v(s)$  ifadesi için

$$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{1}{a_2(D_4^2 - D_3^2)} \left[ (D_3 + D_4)(b - a_2)e^{(b-a_2)s} - (D_4 - D_3)(b + a_2)e^{(b+a_2)s} \right] \\ v''(s) &= \frac{1}{a_2(D_4^2 - D_3^2)} \left[ (D_3 + D_4)(b - a_2)^2 e^{(b-a_2)s} - (D_4 - D_3)(b + a_2)^2 e^{(b+a_2)s} \right] \\ v'''(s) &= \frac{1}{a_2(D_4^2 - D_3^2)} \left[ (D_3 + D_4)(b - a_2)^3 e^{(b-a_2)s} - (D_4 - D_3)(b + a_2)^3 e^{(b+a_2)s} \right] \end{aligned} \quad (116)$$

türevleri moment ve kesme kuvveti ifadelerinde yerine yazılırsa

$$M(s) = -\frac{1}{2}v''(s) = -\frac{1}{2a_2(D_4^2 - D_3^2)} \left( (D_3 + D_4)(b - a_2)^2 e^{(b-a_2)s} - (D_4 - D_3)(b + a_2)^2 e^{(b+a_2)s} \right) \quad s < 0 \quad (117)$$

$$T(s) = -\frac{1}{8}v'''(s) = -\frac{1}{8a_2(D_4^2 - D_3^2)} \left( (D_3 + D_4)(b - a_2)^3 e^{(b-a_2)s} - (D_4 - D_3)(b + a_2)^3 e^{(b+a_2)s} \right) \quad s < 0 \quad (118)$$

şeklinde boyutsuz moment ve kesme kuvveti ifadeleri elde edilir.

#### 2.4. Hareketli Yükün Altında Oluşan Yer Değişirme, Eğilme Momenti ve Kesme Kuvvetinin Hesabı

Hareketli yük altında ( $s=0$  noktasında) boyutsuz yer değişirme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri; (39), (43), (44), (46), (47)'de  $s$  yerine sıfır yazılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v(+0) = \frac{2D_1}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} \quad s > 0 \quad (119)$$

$$v(-0) = \frac{2D_3}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} \quad s < 0 \quad (120)$$

$$M(+0) = \frac{a_1^2 D_1 + 2a_1 b D_2 - b^2 D_1}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} \quad s > 0 \quad (121)$$

$$M(-0) = \frac{a_2^2 D_3 + 2a_2 b D_4 - b^2 D_3}{a_2(D_3^2 + D_4^2)} \quad s < 0 \quad (122)$$

$$T(+0) = \frac{a_1^3 D_2 - 3a_1^2 b D_1 - 3a_1 b^2 D_2 + b^3 D_1}{4a_1(D_1^2 + D_2^2)} \quad s > 0 \quad (123)$$

$$T(-0) = -\frac{a_2^3 D_4 - 3a_2^2 b D_3 - 3a_2 b^2 D_4 + b^3 D_3}{4a_2 (D_3^2 + D_4^2)} \quad s < 0 \quad (124)$$

$v(+0) = v(-0)$ ,  $M(+0) = M(-0)$  olduğundan (66) ifadesinde

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(2\alpha^2 + b^2 + \frac{2\alpha\beta}{b}\right)^{1/2} b & D_2 &= b^2 - \frac{\alpha\beta}{b} \\ D_3 &= \left(2\alpha^2 + b^2 - \frac{2\alpha\beta}{b}\right)^{1/2} b & D_4 &= b^2 + \frac{\alpha\beta}{b} \end{aligned} \quad (125)$$

değerleri yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{2D_1}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} = \frac{2a_1 b}{a_1(D_1^2 + D_2^2)} = \frac{2b}{(D_1^2 + D_2^2)} \\ &= \frac{2b}{\left(2\alpha^2 + b^2 + \frac{2\alpha\beta}{b}\right)b^2 + \left(b^2 - \frac{\alpha\beta}{b}\right)^2} = \frac{2b}{2b^4 + 2\alpha^2 b^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2}} \end{aligned} \quad (126)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$M(0) = \frac{2b(\alpha^2 + b^2)}{2b^4 + 2\alpha^2 b^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2}} \quad (127)$$

şeklinde elde edilir. Kesme kuvveti için (123) denkleminde (29), (30) ve (38) ifadeleri yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
T(+0) &= \frac{a_1^3 D_2 - 3a_1^2 b D_1 - 3a_1 b^2 D_2 + b^3 D_1}{4a_1 (D_1^2 + D_2^2)} = \frac{a_1^2 D_2 - 3a_1 b D_1 - 3b^2 D_2 + b^4}{4(D_1^2 + D_2^2)} \\
&= \frac{\left(2\alpha^2 + b^2 + \frac{2\alpha\beta}{b}\right)\left(b^2 - \frac{\alpha\beta}{b}\right) - 3b^2\left(2\alpha^2 + b^2 + \frac{2\alpha\beta}{b}\right) - 3b^2\left(b^2 - \frac{\alpha\beta}{b}\right) + b^4}{4\left[\left(2\alpha^2 + b^2 - \frac{2\alpha\beta}{b}\right)b^2 + \left(b^2 + \frac{\alpha\beta}{b}\right)^2\right]} \\
&= \frac{-\left(2b^4 + 2\alpha^2 b^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2} + \alpha\beta b + \frac{\alpha^3 \beta}{b^2}\right)}{2\left(2b^4 + 2\alpha^2 b^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2}\right)} = -\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + b^2)}{b\left(2b^4 + 2\alpha^2 b^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2}\right)} \right] \quad (128)
\end{aligned}$$

Aynı şekilde (124) denkleminde (29), (30) ve (38) ifadeleri yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$T(-0) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + b^2)}{b\left(2b^4 + 2\alpha^2 b^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2}\right)} \right] \quad (129)$$

Buna göre kesme kuvveti için

$$T(\pm 0) = \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + b^2)}{b\left(2b^4 + 2\alpha^2 b^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{b^2}\right)} \right] \quad (130)$$

şeklinde tek bir ifade yazılabilir. Aşağıda özel durumlar için (126), (127) ve (130) eşitlikleri kullanılarak sistemin dinamik davranışı hakkında bazı bilgilere ulaşılmıştır.

#### 2.4.1. Statik Hal ( $\alpha=0, \beta=0$ )

(126), (127) ve (130) denklemlerinde  $\alpha=0, \beta=0$  ve  $b=1$  yazılırsa yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti

$$v(0) = M(0) = 1, \quad T(\pm 0) = \mp \frac{1}{2} \quad (131)$$

şeklinde elde edilir.

#### 2.4.2. Sönümsüz Hal ( $\beta=0$ )

##### 2.4.2.1. $\alpha < 1, \beta=0$ Hali

(126), (127) ve (130) denklemlerinde  $\beta=0$ ,  $b = (1 - \alpha^2)^{1/2}$  yazılırsa

$$v(0) = M(0) = (1 - \alpha^2)^{-1/2}, \quad T(\pm 0) = \mp \frac{1}{2} \quad (132)$$

şeklinde yer değiştirme, moment, kesme kuvveti elde edilir.

##### 2.4.2.2. $\alpha=1, \beta=0$ Hali

(126), (127) ve (130) denklemlerinde  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$  ve  $b=0$  yerine yazılırsa,  $\alpha=1$  noktasında süreksizlik oluştuğu görülür. Bu nedenle  $\alpha=1$ 'in hemen solu için (132) ifadesinden

$$\alpha \rightarrow 1_- \quad V(0) = M(0) = \infty, \quad T(\pm 0) = \mp \frac{1}{2} \quad (133)$$

elde edilir.  $\alpha=1$ 'in hemen sağında ise (135) ifadesinden

$$\alpha \rightarrow 1_+ \quad V(0) = M(0) = 0, \quad T(\pm 0) = -\infty \quad (134)$$

şeklinde elde edilir.



### 2.4.2.3. $\alpha > 1, \beta = 0$ Hali

(126), (127) ve (130) denklemlerinde  $\beta = 0, b = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}}$  yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$V(0) = M(0) = 0, \quad T(\pm 0) = \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\alpha^2}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}} \right] \quad (135)$$

### 2.4.3. Hafif Sönüm Hali ( $\beta \ll 1$ )

#### 2.4.3.1. $\alpha < 1, \beta \ll 1$ Hali

(126), (127) ve (130) denklemlerinde  $b = (1 - \alpha^2)^{1/2}$  yazılırsa

$$V(0) = \frac{2(1 - \alpha^2)^{1/2}}{2(1 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(1 - \alpha^2) + \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2}} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta^2 / (1 - \alpha^2)^2 \right]} \quad (136)$$

$$M(0) = \frac{2(1 - \alpha^2)^{1/2}(\alpha^2 + 1 - \alpha^2)}{2(1 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(1 - \alpha^2) + \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2}} = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta^2 / (1 - \alpha^2)^2 \right]} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} T(\pm 0) &= \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + 1 - \alpha^2)}{(\alpha^2 - 1)^{1/2} \left[ 2(1 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(1 - \alpha^2) + \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2} \right]} \right] \\ &= \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\alpha\beta}{2(1 - \alpha^2)^{3/2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(1 - \alpha^2)^{1/2}}} \right] \end{aligned} \quad (138)$$

şeklinde yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti ifadeleri elde edilir.

### 2.5.3.2. $\alpha=1, \beta \ll 1$ Hali

(126), (127) ve (130) denklemlerinde  $b = 2^{-1/4} \beta^{1/2}$ ,  $\alpha=1$  yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{2(2^{-1/4} \beta^{1/2})}{2(2^{-1} \beta^2) + 2\alpha^2(2^{-1/2} \beta) + \frac{\alpha^2 \beta^2}{(2^{-1/2} \beta)}} \\ &= \frac{2^{3/4} \beta^{1/2}}{\beta(\beta + 2^{3/2})} = \frac{2^{3/4}}{\beta^{1/2}(\beta + 2^{3/2})} \end{aligned} \quad (139)$$

$$\begin{aligned} M(0) &= \frac{2(2^{-1/4} \beta^{1/2})(2^{-1/2} \beta + \alpha^2)}{2(2^{-1} \beta^2) + 2\alpha^2(2^{-1/2} \beta) + \frac{\alpha^2 \beta^2}{(2^{-1/2} \beta)}} \\ &= \frac{2^{3/4}(1 + 2^{-1/2} \beta)}{\beta^{1/2}(\beta + 2^{3/2})} \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} T(\pm 0) &= \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\beta(2^{-1/2} \beta + 1)}{2^{-1/4} \beta^{1/2}(\beta^2 + 2^{3/2} \beta)} \right] \\ &= \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{2^{1/4}(2^{-1/2} \beta + 1)}{\beta^{1/2}(\beta + 2^{3/2})} \right] \end{aligned} \quad (141)$$

şeklinde yer değiştirme, moment, kesme kuvveti elde edilir.

### 2.4.3.3. $\alpha > 1, \beta \ll 1$ Hali

(126), (127) ve (130) denklemlerinde  $b = \frac{\alpha \beta}{(\alpha^4 - 1)^{1/2}}$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
v(0) &= \frac{2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha^4-1)^{1/2}}}{2 \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha^4-1)^2} + 2\alpha^2 \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^4-1)} + \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2}} \\
&= \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^4-1)^{3/2} \left[ 1 + 2 \frac{\alpha^4\beta^2}{(\alpha^4-1)^2} + 2 \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha^4-1)^3} \right]}
\end{aligned} \tag{142}$$

$$\begin{aligned}
M(0) &= \frac{2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha^4-1)^{1/2}} \left( \alpha^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^4-1)} \right)}{2 \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha^4-1)^2} + 2\alpha^2 \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^4-1)} + \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2}} \\
&= \frac{2\alpha\beta \left( \alpha^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^4-1)} \right)}{(\alpha^4-1)^{3/2} \left[ 1 + 2 \frac{\alpha^4\beta^2}{(\alpha^4-1)^2} + 2 \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha^4-1)^3} \right]}
\end{aligned} \tag{143}$$

$$\begin{aligned}
T(\pm 0) &= \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\alpha\beta \left( \alpha^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^4-1)} \right)}{\frac{\alpha\beta}{(\alpha^4-1)^{1/2}} \left( 2 \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha^4-1)^2} + 2\alpha^2 \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^4-1)} + \frac{\alpha^2\beta^2}{b^2} \right)} \right] \\
&= \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\alpha^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^4-1)}}{(\alpha^4-1)^{1/2} \left( 1 + 2 \frac{\alpha^4\beta^2}{(\alpha^4-1)^2} + 2 \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha^4-1)^3} \right)} \right]
\end{aligned} \tag{144}$$

şeklinde yer değiştirme, moment, kesme kuvveti elde edilir.

#### 2.4.4. Kritik Sönüm Hali ( $\beta=\beta_{cr}$ )

(126), (127) ve (130) denklemlerinde (90) ve (91) ifadeleri yerine yazılırsa

$$V(0) = \frac{2^{3/2} \left( -\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right)^{1/2}}{3^{1/2} (\alpha^4 + 3)} \quad (145)$$

$$M(0) = \frac{2^{3/2} \left[ \alpha^2 + 2\sqrt{\alpha^4 + 3} \right]}{3^{3/2} (\alpha^4 + 3)} \left[ -\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + 3} \right]^{1/2} \quad (146)$$

$$T(\pm 0) = \mp \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{4\alpha^4 + 5\alpha^2 (\alpha^4 + 3)^{1/2} + 6}{9(\alpha^4 + 3)} \right] \quad (147)$$

şeklinde yer değiştirme, moment, kesme kuvveti elde edilir.

#### 2.4.5. Kritik Üstü Sönüm Hali ( $\beta > \beta_{cr}$ )

Tablo 2.1'deki  $b$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  değerleri kullanılarak (114)'de  $D_1, D_2, D_3, D_4$  hesaplanır ve bu değerler (119)'dan (124)'e kadar olan denklemlerde yerine yazılır ve Tablo 2.2 oluşturulur.

Tablo 2.2.  $\alpha$  ve  $\beta$  değerlerine göre kritik üstü sönüm durumu için boyutsuz yer değiştirme, moment ve kesme kuvvetlerinin sayısal değerleri

$\alpha$	$\beta$	$\nu$	<b>M</b>	<b>T(+0)</b>	<b>T(-0)</b>
0	2	1	1	-0.5	0.5
0.25	2	0.7959	0.8856	-0.6054	0.3946
0.5	2	0.5328	0.7324	-0.6628	0.3372
0.75	2	0.3634	0.6240	-0.7026	0.2974
1	2	0.2545	0.5421	-0.7399	0.2601
1.25	2	0.1799	0.4720	-0.7778	0.2222
1.5	2	0.1265	0.4064	-0.8161	0.1839
1.75	2	0.0879	0.3442	-0.8526	0.1474
2	2	0.0604	0.2865	-0.8851	0.1149
2.5	2	0.0282	0.1915	-0.9335	0.0665
3	2	0.0135	0.1266	-0.9620	0.0380
3.5	2	0.0068	0.0853	-0.9777	0.0223
4	2	0.0036	0.0592	-0.9863	0.0137

## 2.5. Hareketli Yükün Kütlesinin Etkisi

Yükün kütlesini dikkate alırsak (1) denkleminin sağ tarafı aşağıdaki gibi tekrar düzenlenir.

$$P(x,t) = \delta(x-ct) \left[ P - m \frac{d^2v(ct,t)}{dt^2} \right] \quad (142)$$

Bu denklemde 'm' yükün kütlesidir.  $\frac{d^2v(ct,t)}{dt^2}$  ifadesi ise yükün ivmesi olup aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{d^2v(ct,t)}{dt^2} = \frac{1}{4} \left[ c^2 \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x^2} + 2c \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial t^2} \right]_{x=ct} \quad (143)$$

(2), (4) ve (8) denklemleri yardımıyla

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x^2} &= \lambda^2 v_0 \frac{d^2v(s)}{ds^2} \\ \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial x \partial t} &= -\lambda^2 c v_0 \frac{d^2v(s)}{ds^2} \\ \frac{\partial^2v(x,t)}{\partial t^2} &= \lambda^2 c^2 v_0 \frac{d^2v(s)}{ds^2} \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

elde edilir. Bunların (143)'te yerine yazılmasıyla

$$\frac{d^2v(ct,t)}{dt^2} = 0 \quad (145)$$

olarak elde edilir. Buna göre sonsuz uzunluktaki kirişte hareketli tekil kuvvetin kütlesinin davranışa etkisinin olmadığı sonucuna ulaşılır (Fryba, 1972).

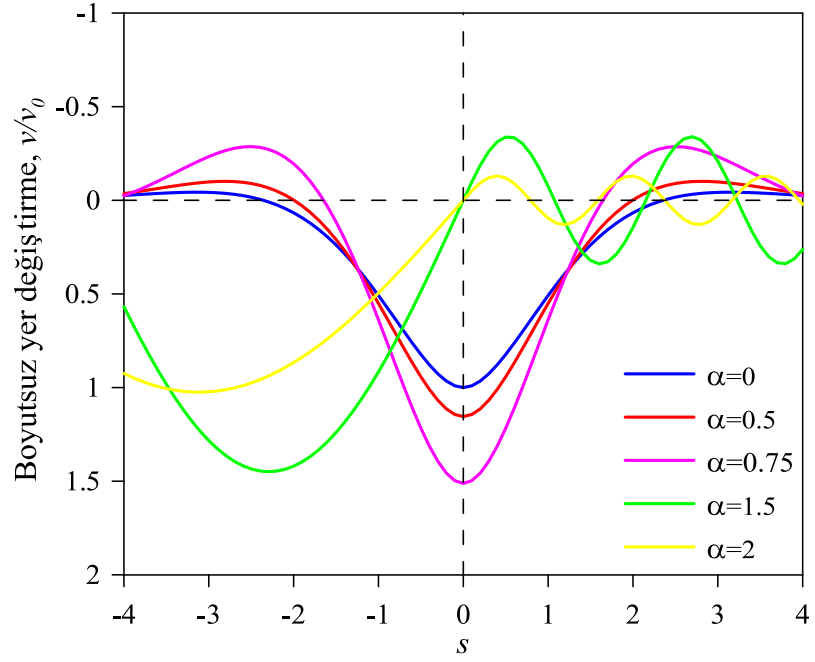
### 3. BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde, elastik zemine oturan sonsuz uzun elastik kirişlerin hareketli yük altındaki dinamik davranışı ile ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. Sayısal hesaplamalarda elastisite modülü  $E=21000 \text{ kN/cm}^2$ , kesit atalet momenti  $I=1862 \text{ cm}^4$  ve birim uzunluğa gelen kütle  $\mu=125 \text{ kg/m}$  olarak alınmıştır. Sayısal sonuçların elde edilebilmesi için MATLAB programı kullanılmıştır.

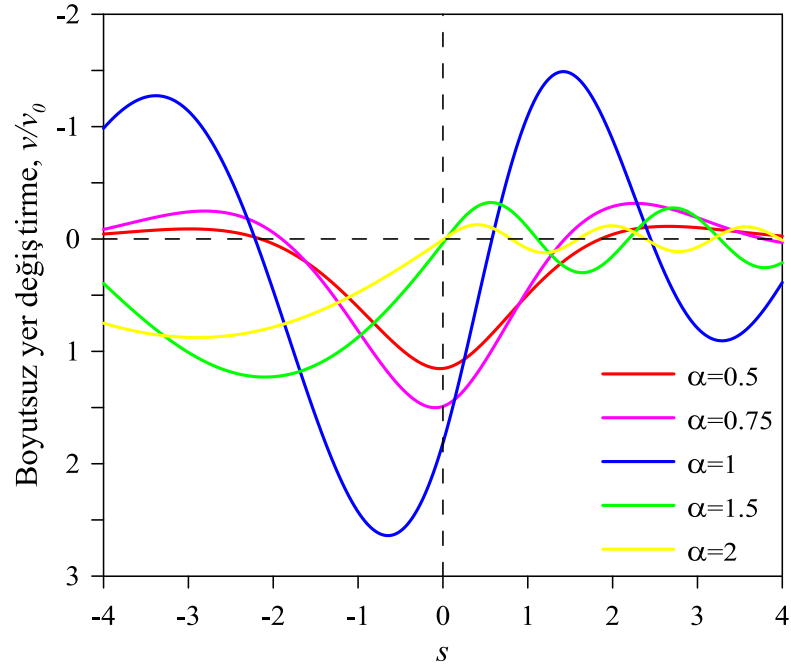
Şekil 3.1'de sönüm olmaması durumunda yükün hızına bağlı olarak elastik kirişte meydana gelen boyutsuz yer değiştirmeler verilmiştir. Şekle göre, yük hızının kritik hızdan küçük olması ( $\alpha < 1$ ) durumunda yer değiştirme profili simetrik çıkmakta ve en büyük yer değiştirme yükün altında meydana gelmektedir.  $\alpha < 1$  hızlarında hız arttıkça yer değiştirmede artmaktadır. Sistemde sönüm olmadığı için ( $\beta = 0$ ) yük hızının kritik hıza eşit olması ( $\alpha = 1$ ) rezonansa sebep olur ve yer değiştirmeler sonsuza gider. Bu durum (29), (30), (38) ve (39) nolu denklemler incelendiğinde açıkça görülmektedir. Yük hızının kritik hızın üzerine çıkması ( $\alpha > 1$ ) durumunda ise yer değiştirme profili artık simetrik olmamakta ve en büyük yer değiştirme yükün gerisinde meydana gelmektedir.  $\alpha > 1$  için yük altında yer değiştirme sıfır olmakta, yükün önünde ise periyodik salınım hareketi yapmaktadır.  $\alpha > 1$  hızlarında hız arttıkça yer değiştirmeler azalmaktadır.

Şekil 3.2'de hafif sönümlü halde ( $\beta < \beta_{cr}$ ) yükün hızına bağlı olarak elastik kirişte meydana gelen boyutsuz yer değiştirme değerleri verilmiştir. Sistemde hafif sönüm olması halinde  $\alpha < 1$  için yer değiştirme profili simetrik olmakta ve hız arttıkça yer değiştirmeler artmaktadır.  $\alpha = 1$  olması durumu rezonans haline karşılık geldiğinden sistemde en büyük yer değiştirmeler meydana gelmektedir.  $\alpha > 1$  olması halinde ise yük altında yer değiştirme sıfır olmakta, yükün gerisinde en büyük yer değiştirme meydana gelmektedir. Daha önce  $\beta = 0$  halinde  $\alpha > 1$  için yapılan değerlendirmeler burada da aynen geçerlidir.

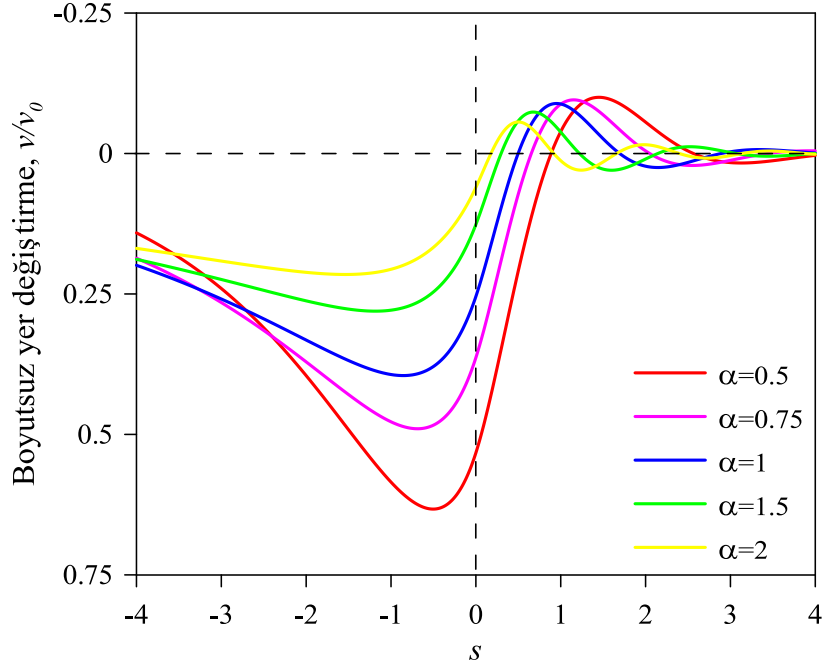
Şekil 3.3'de kritik üstü sönüm halinde ( $\beta > \beta_{cr}$ ) yükün hızına bağlı olarak elastik kirişte meydana gelen boyutsuz yer değiştirme değerleri verilmiştir. Kritik üstü sönüm halinde yer değiştirme profili simetrik olmamaktadır.  $\beta = 0$  ve  $\beta < \beta_{cr}$ 'den farklı olarak kritik üstü hızlarda yük altında yer değiştirme meydana gelmektedir. En büyük yer değiştirme, tüm hızlarda, yükün gerisinde ortaya çıkmaktadır. Hız arttıkça yer değiştirmeler azalmaktadır. Yükün önünde yer değiştirmeler, sönümün de etkisiyle sifira gitmektedir.



Şekil 3.1. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0$ )



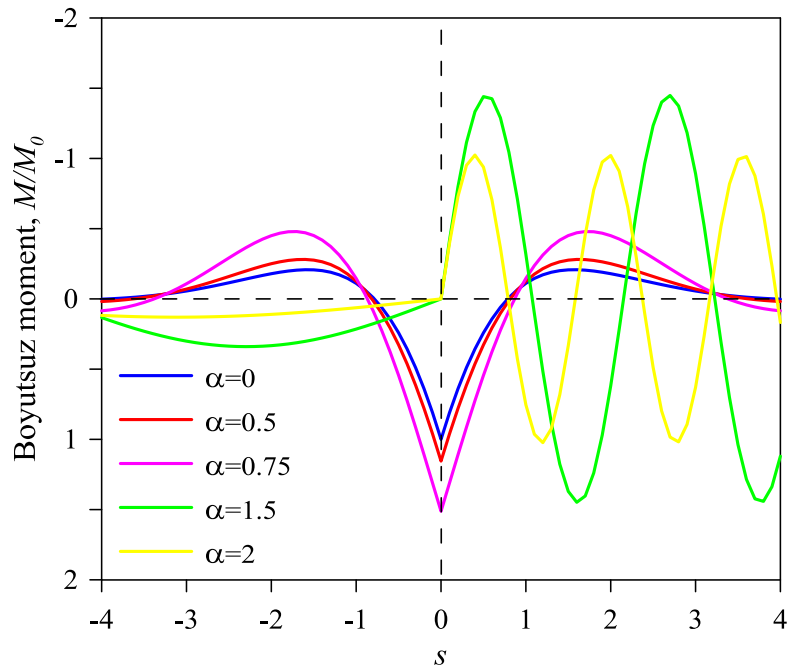
Şekil 3.2. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0.1$ )



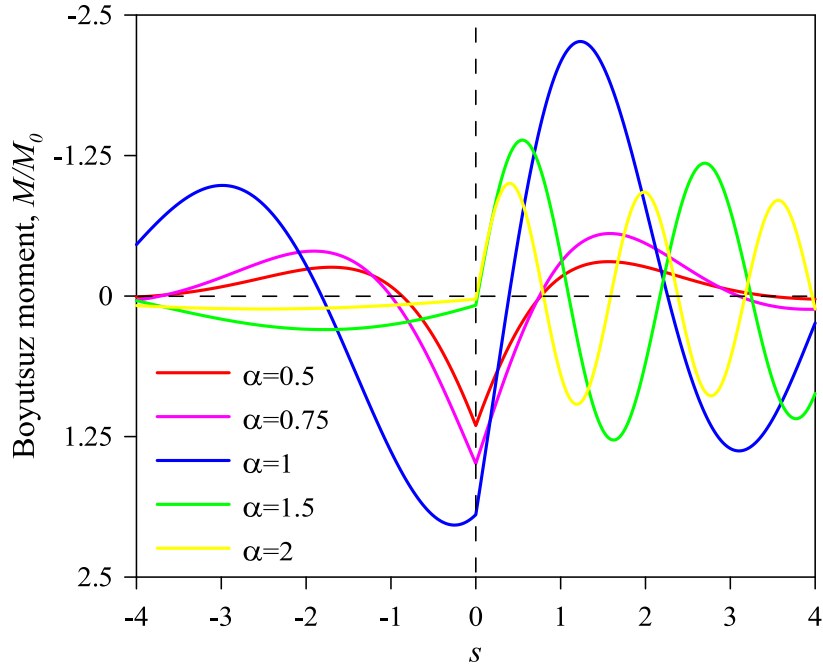
Şekil 3.3. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik giriş boyunca değişimi ( $\beta = 2$ )



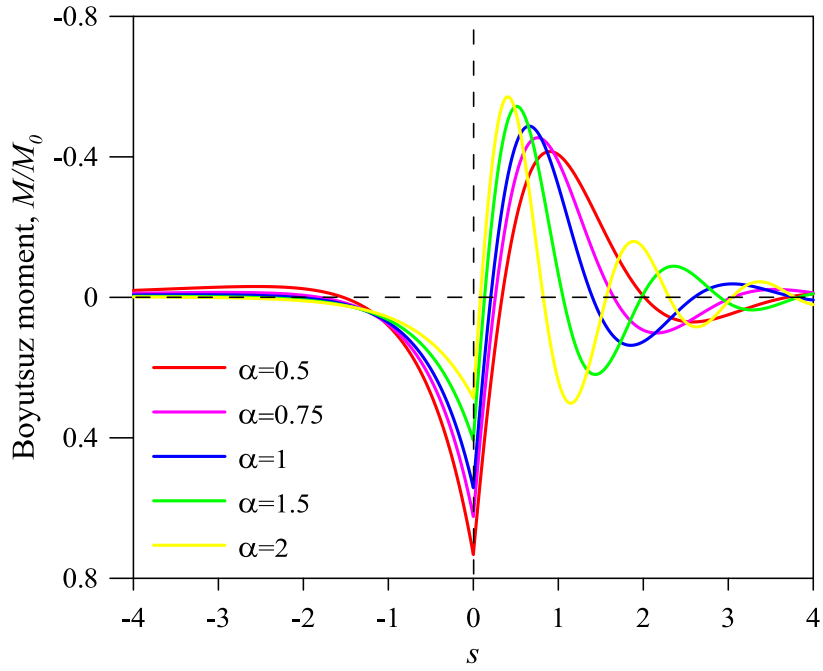
Şekil 3.4-3.6'da çeşitli hız değerleri için sırasıyla  $\beta=0$ , 0.1 ve 2 olması hallerinde boyutsuz momentin değişimi görülmektedir. Sönümsüz halde  $\alpha < 1$  için en büyük moment yükün altında,  $\alpha > 1$  için ise yükün önünde oluşmaktadır.  $\alpha < 1$  için hız arttıkça moment artmakta,  $\alpha > 1$  için ise azalmaktadır. Benzer değerlendirmeler hafif sönüm için de geçerlidir.  $\alpha < 1$  için moment profili simetriktir. Hafif sönüm halinde  $\alpha=1$ 'de en büyük moment değerleri elde edilmiştir. Sönümsüz halde ise bu değer sonsuza gideceği aşıkardır.  $\beta > \beta_{cr}$  için yükün altındaki moment değerleri  $\alpha$  arttıkça azalmaktadır. Yükün önünde meydana gelen en büyük moment ise  $\alpha$  arttıkça artmaktadır.



Şekil 3.4. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz momentin elastik giriş boyunca değişimi ( $\beta = 0$ )

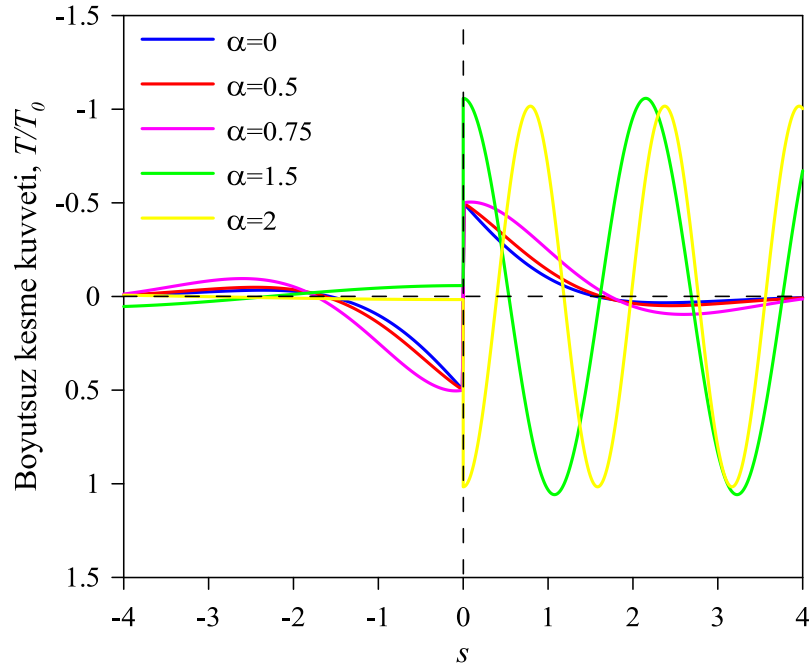


Şekil 3.5. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0.1$ )

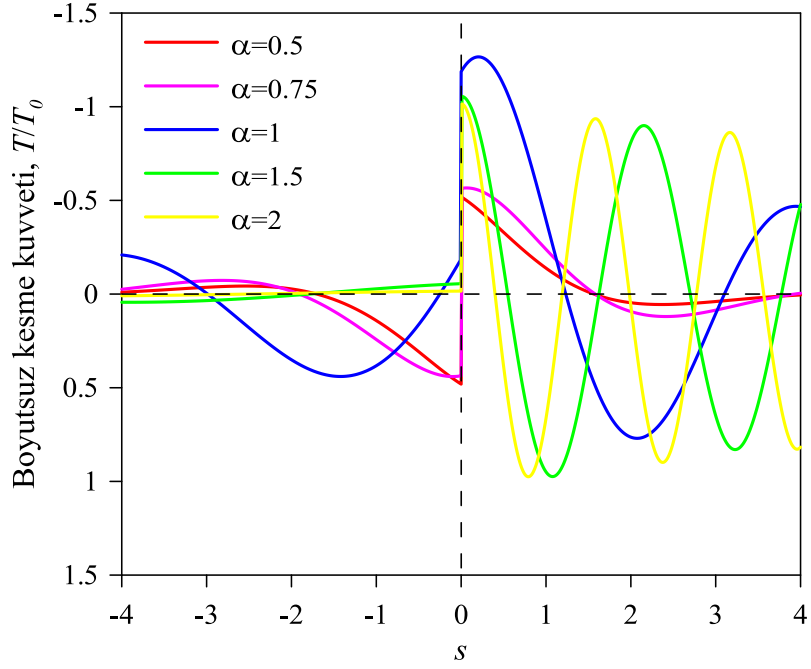


Şekil 3.6. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 2$ )

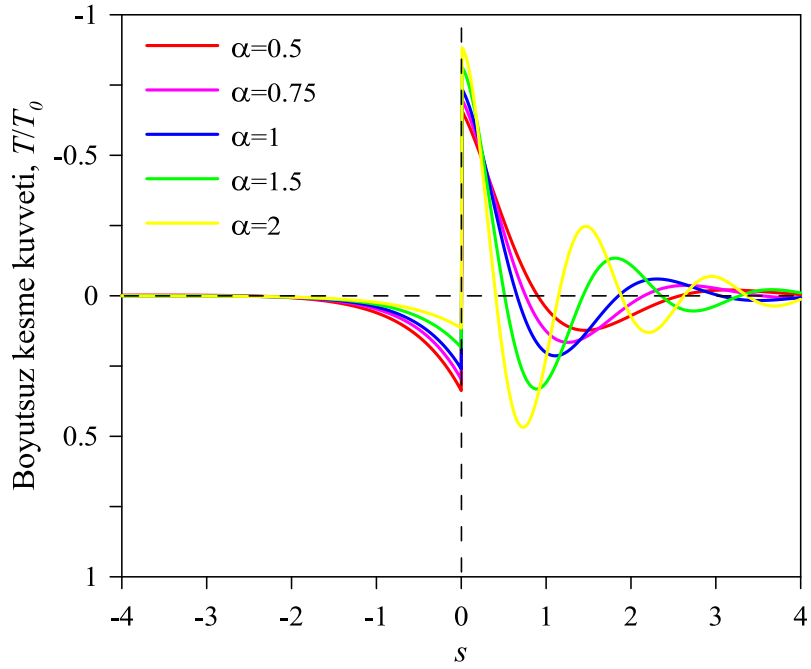
Şekil 3.7-3.9'da hıza bağlı olarak  $\beta=0$ ,  $\beta=0.1$  ve  $\beta=2$  için kesme kuvvetinin değişimi verilmiştir. Sönümsüz ve hafif sönüm durumlarında  $\alpha < 1$  için kesme kuvveti dağılımı anti-simetriktir ve hız arttıkça kesme kuvveti artmaktadır.  $\alpha > 1$  için ise kesme kuvveti dağılımı anti-simetrik olmamakta ve yükün önünde daha büyük kesme kuvveti meydana gelmektedir.  $\beta > \beta_{cr}$  durumunda kesme kuvveti dağılımında anti-simetri yoktur. Yükün önünde daha büyük kesme kuvveti ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.7. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik giriş boyunca değişimi ( $\beta = 0$ )



Şekil 3.8. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 0.1$ )

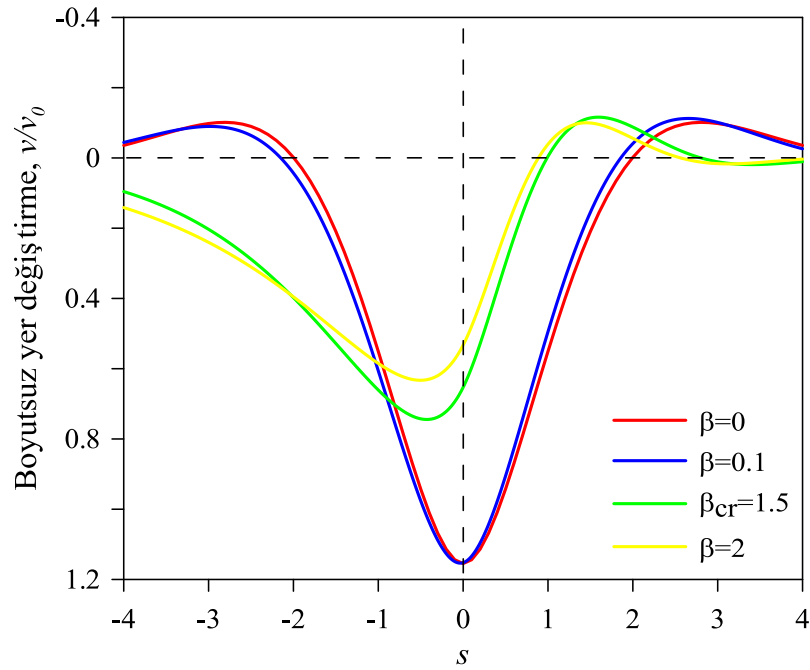


Şekil 3.9. Çeşitli hız değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\beta = 2$ )

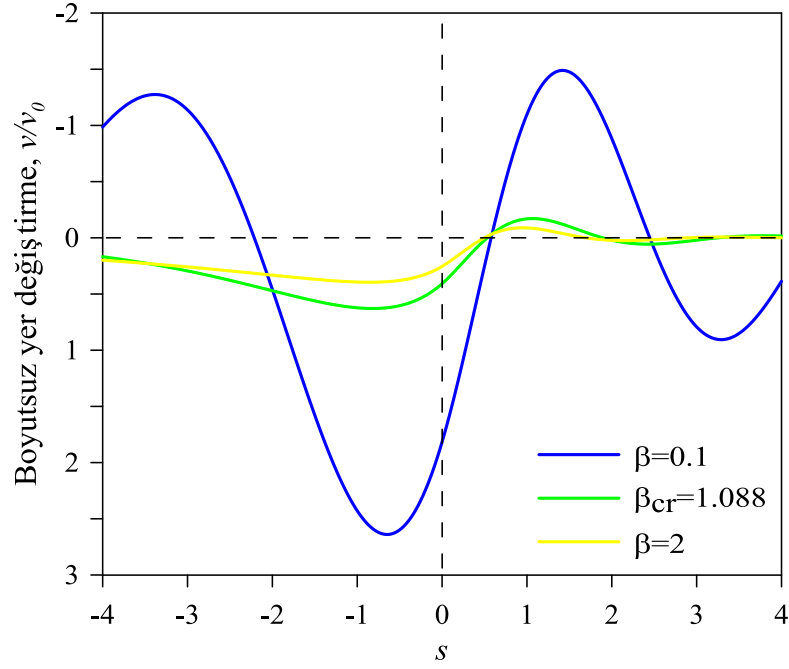
Hafif sönüm halinde  $\alpha=1$  durumunda yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti en büyük değerine ulaşmaktadır. Ancak  $\beta > \beta_{cr}$  için böyle bir durum söz konusu değildir.

Şekil 3.10-3.12’de sönümün yer değiştirme üzerindeki etkileri incelenmiştir. Yük hızı sırayla  $\alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$  ve  $\alpha > 1$  olacak şekilde seçilmiştir.  $\alpha < 1$  için sönümsüz ve hafif sönüm hallerinde daha öncede belirtildiği gibi yer değiştirme grafiği simetrik olmakta ve en büyük yer değiştirme yükün altında meydana gelmektedir. Sönümün artması durumunda ( $\beta \geq \beta_{cr}$ ) en büyük yer değiştirme yükün gerisinde oluşmakta ve simetri de bozulmaktadır. Beklendiği üzere sönüm arttıkça yer değiştirme azalmaktadır.

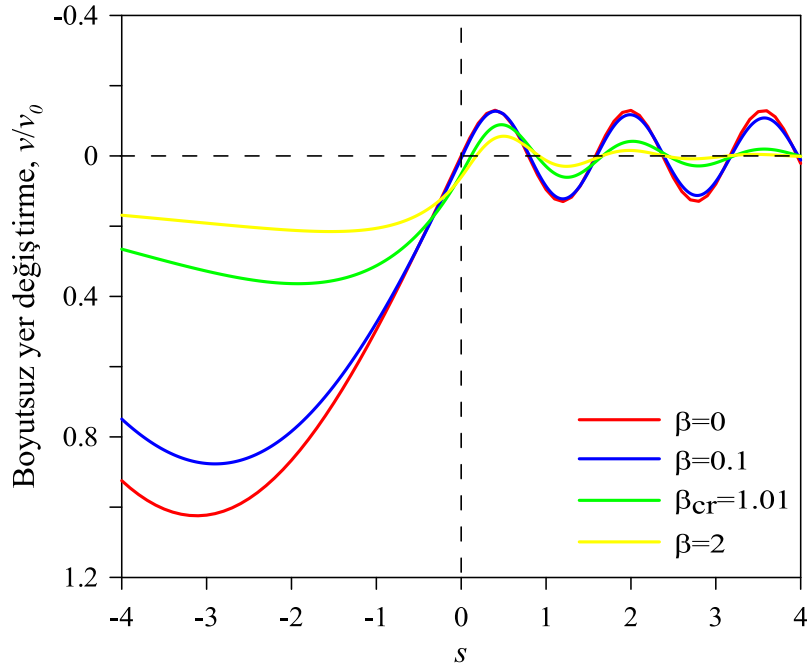
$\alpha = 1$  durumu rezonansa karşılık gelmektedir. Sönümün artması yer değiştirmenin aldığı sonlu değeri azaltmaktadır.  $\alpha > 1$  için her sönüm değerinde en büyük yer değiştirme yükün gerisinde oluşmaktadır. Sönüm arttıkça yer değiştirmenin azaldığı burada daha belirgin olarak gözlemlenmektedir.



Şekil 3.10. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik giriş boyunca değişimi ( $\alpha = 0.5$ )

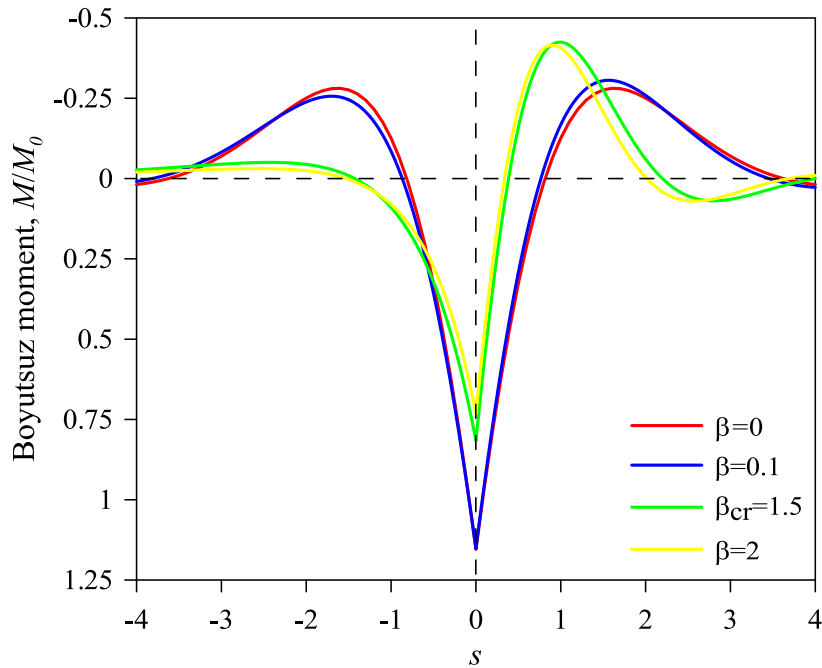


Şekil 3.11. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 1$ )

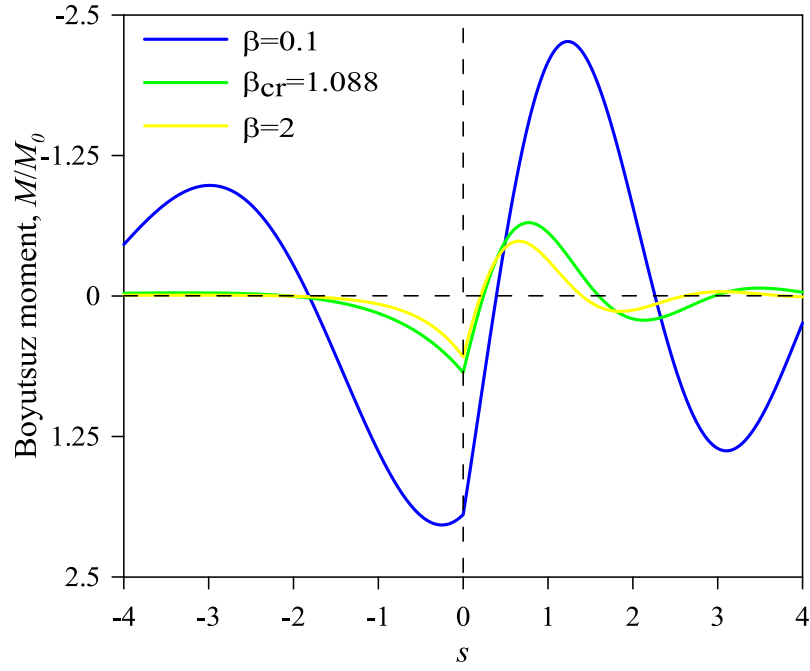


Şekil 3.12. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz yer değiştirmenin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 2$ )

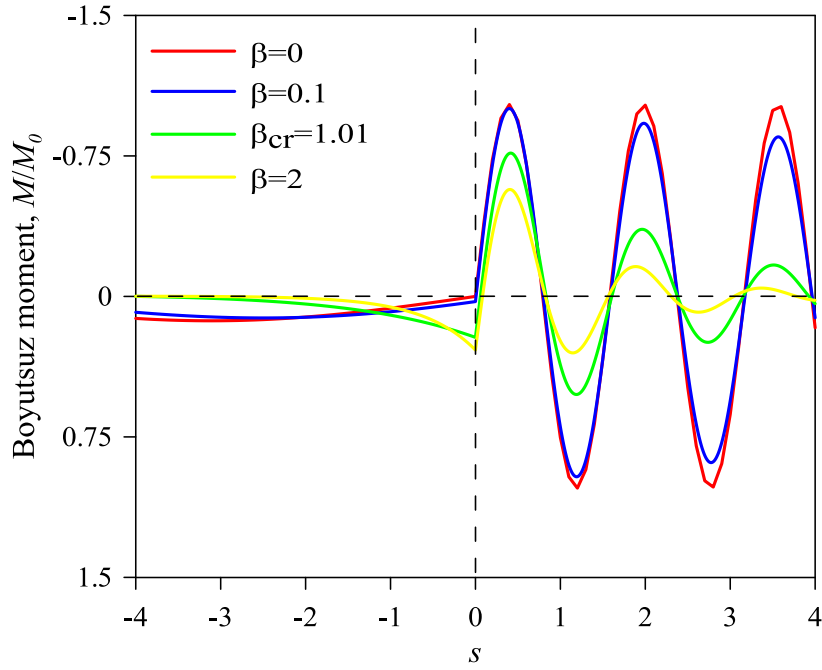
Şekil 3.13-3.15'te momentin, sönümle değişimi görülmektedir.  $\alpha < 1$  için  $\beta < \beta_{cr}$  değerlerinde simetrik  $\beta \geq \beta_{cr}$  değerlerinde ise simetrik olmayan moment dağılımı elde edilmektedir. Sönümsüz ve hafif sönümlü ( $\beta < \beta_{cr}$ ) durumda moment grafikleri birbirine benzer olmaktadır. Aynı şekilde  $\beta \geq \beta_{cr}$  durumundaki grafiklerde incelendiğinde grafikler arasındaki benzerlik dikkat çekmektedir.  $\alpha \geq 1$  durumunda moment grafiklerinde herhangi bir simetri yoktur.  $\alpha = 1$  için  $\beta < \beta_{cr}$  veya  $\beta \geq \beta_{cr}$  değerlerinde grafikler arasında benzerlik söz konusu değildir.  $\alpha > 1$  için simetriklik söz konusu değildir ve  $\alpha < 1$ 'de yapılan yorumlar geçerlidir.



Şekil 3.13. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 0.5$ )



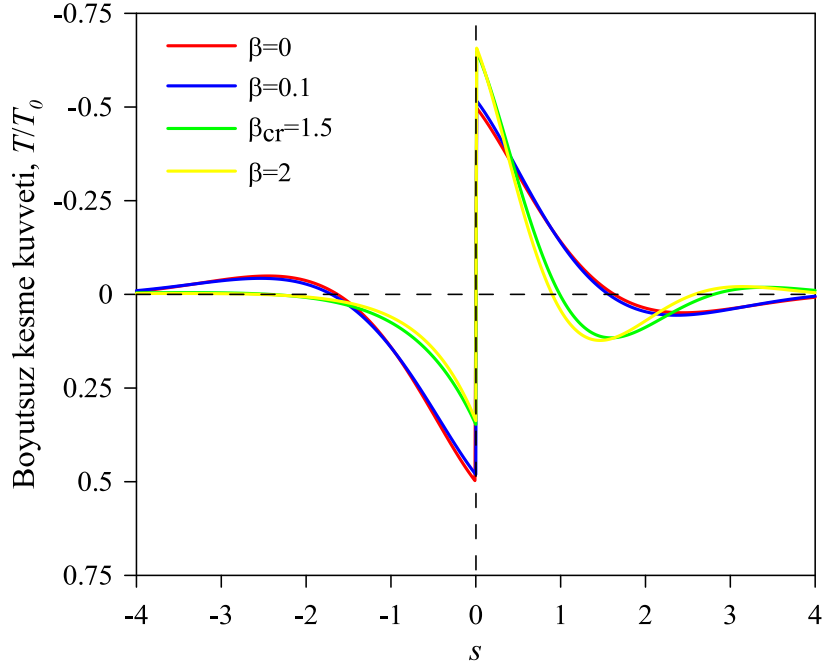
Şekil 3.14. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 1$ )



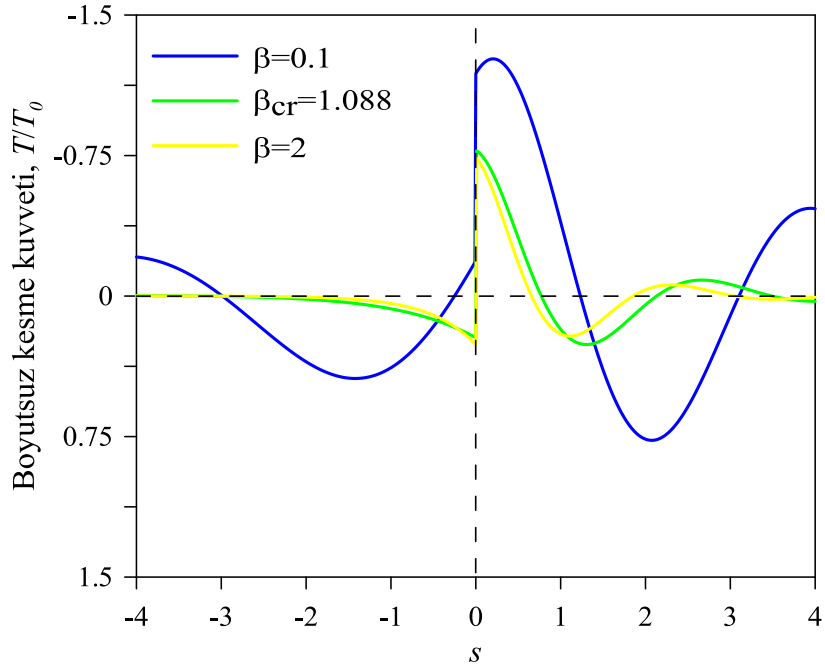
Şekil 3.15. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz momentin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 2$ )



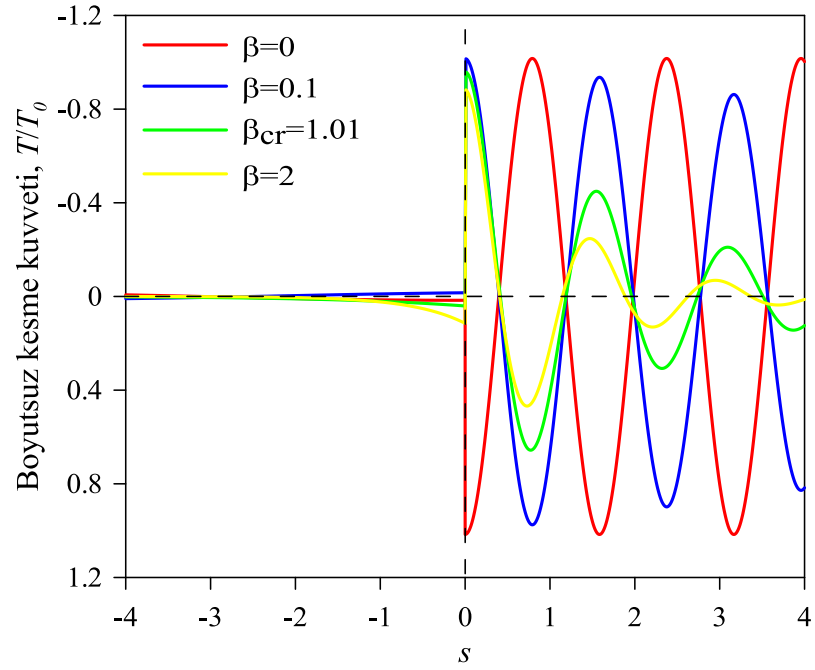
Şekil 3.16-3.18’de kesme kuvvetinin çeşitli sönüm değerleri için değişimi verilmiştir.  $\alpha < 1$  için kesme kuvveti grafiği anti-simetrik olmaktadır. Sönüm arttıkça yükün hemen önünde ( $T(+0)$ ) daha büyük kesme kuvveti meydana gelmektedir.  $\alpha \geq 1$  için ise grafikteki anti-simetri ortadan kalkmakta yükün ilerisinde daha büyük kesme kuvveti değerleri ortaya çıkmaktadır.



Şekil 3.16. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 0.5$ )

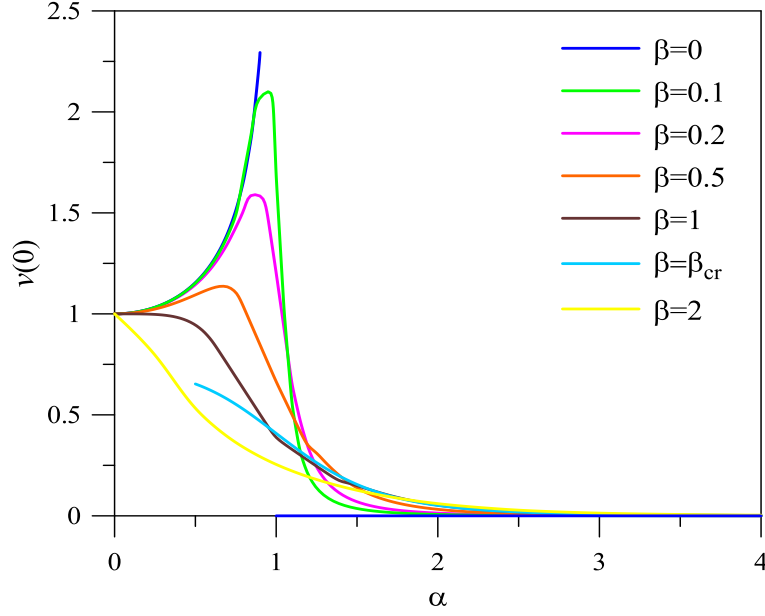


Şekil 3.17. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 1$ )

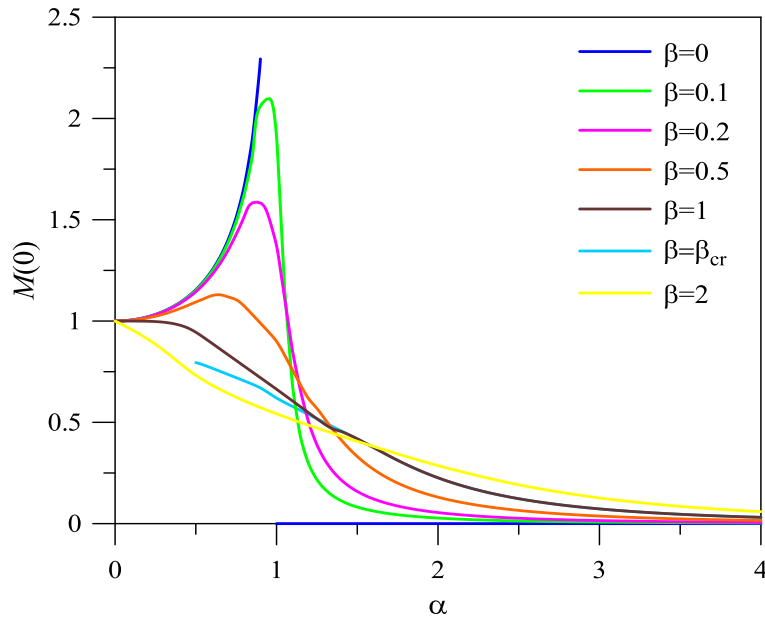


Şekil 3.18. Çeşitli sönüm değerleri için boyutsuz kesme kuvvetinin elastik kiriş boyunca değişimi ( $\alpha = 2$ )

Şekil 3.19’da hareketli yükün altında meydana gelen yer değiştirmenin, Şekil 3.20’de ise hareketli yükün altında meydana gelen momentin hızla değişimi görülmektedir.  $\alpha < 1$  ve  $\beta < \beta_{cr}$  değerlerinde hız arttıkça yer değiştirme ve moment artmakta;  $\alpha > 1$  için ise azalmaktadır.  $\alpha = 1$  rezonansa karşılık gelmekte olup  $\beta = 0$  halinde yer değiştirme ve moment tanımsızdır.  $\beta \neq 0$  için ise  $\beta$  arttıkça yer değiştirme azalmaktadır.  $\beta > \beta_{cr}$  değerlerinde ise hız arttıkça yer değiştirme ve moment azalmaktadır.

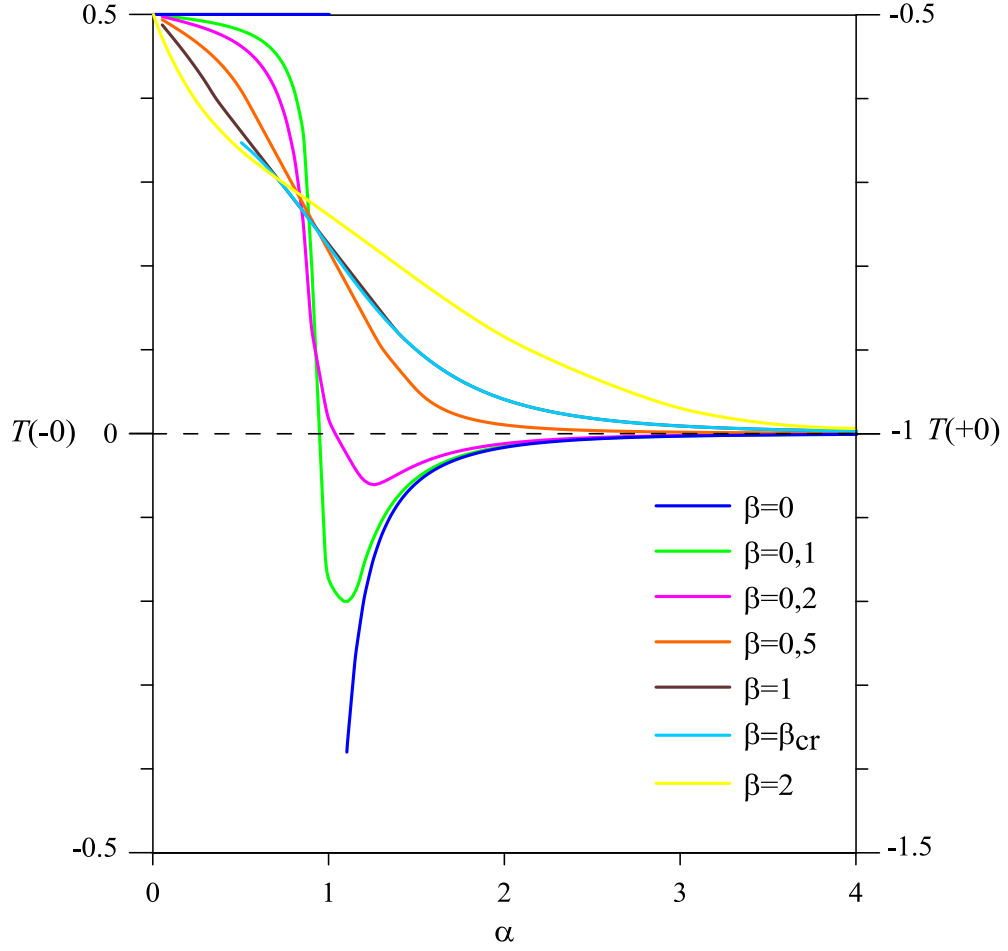


Şekil 3.19. Yükün hızına göre farklı sönüm değerleri için oluşan yer değiştirmeler



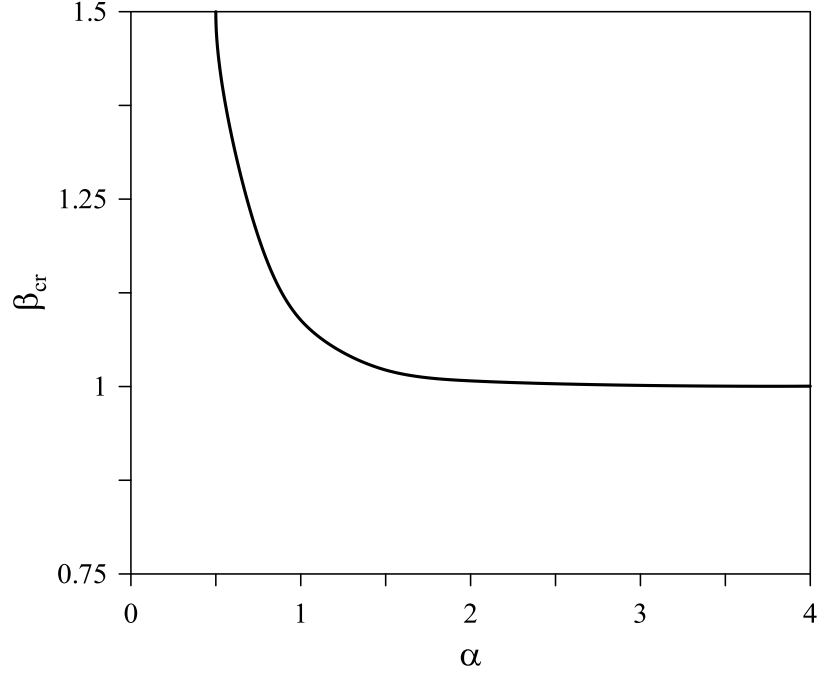
Şekil 3.20. Yükün hızına göre farklı sönüm değerleri için oluşan moment

Şekil 21’de hareketli yükün etki ettiği noktanın hemen solunda ve sağında meydana gelen kesme kuvveti değerleri görülmektedir.  $T(-0)$  yükün arkasındaki kesme kuvvetini  $T(+0)$  yükün önündeki kesme kuvvetini ifade etmektedir. Yükün arkasında hıza bağlı olarak kesme kuvvetindeki azalma miktarı kadar yükün önünde artış meydana gelmektedir. Yani yükün arkasında kesme kuvveti azalırken yükün önünde kesme kuvveti artmaktadır.



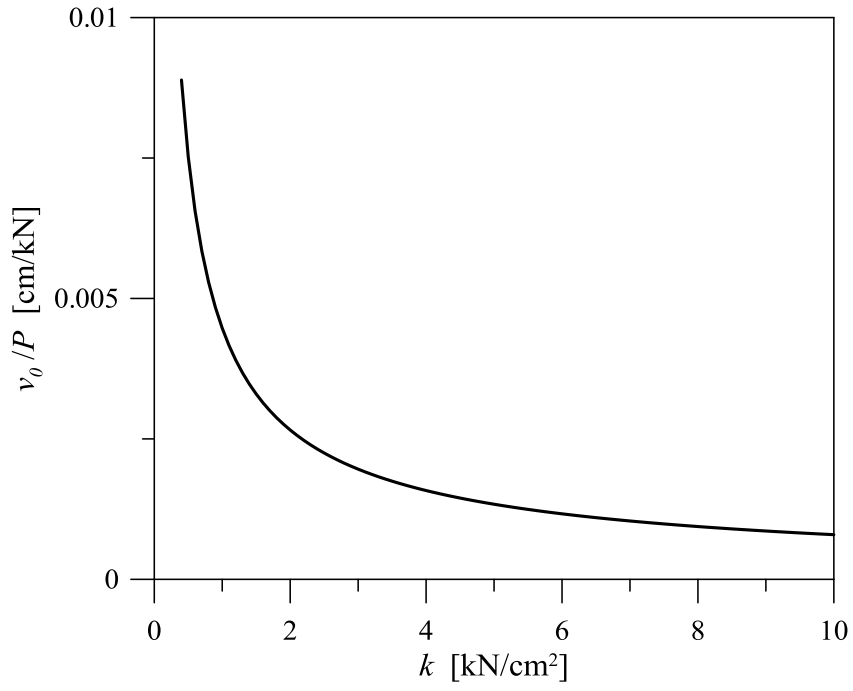
Şekil 3.21. Yükün hızına göre farklı sönüm değerleri için oluşan kesme kuvvetleri

Şekil 3.22’de hıza bağlı olarak kritik sönümün değişimi görülmektedir. Şekilden görüldüğü üzere hız arttıkça kritik sönümün değeri azalmaktadır.

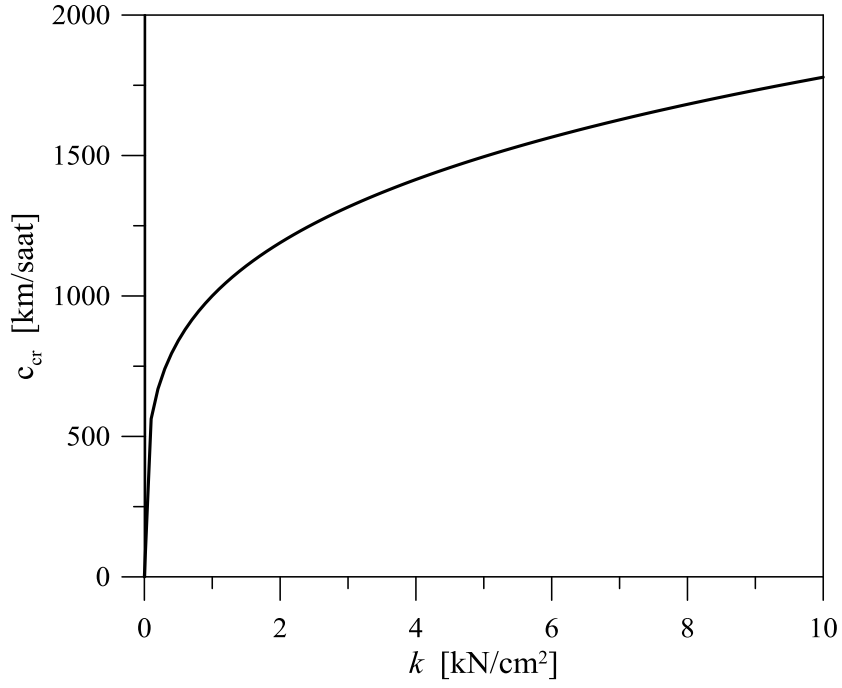


Şekil 3.22. Hıza bağlı olarak kritik sönüm değerleri

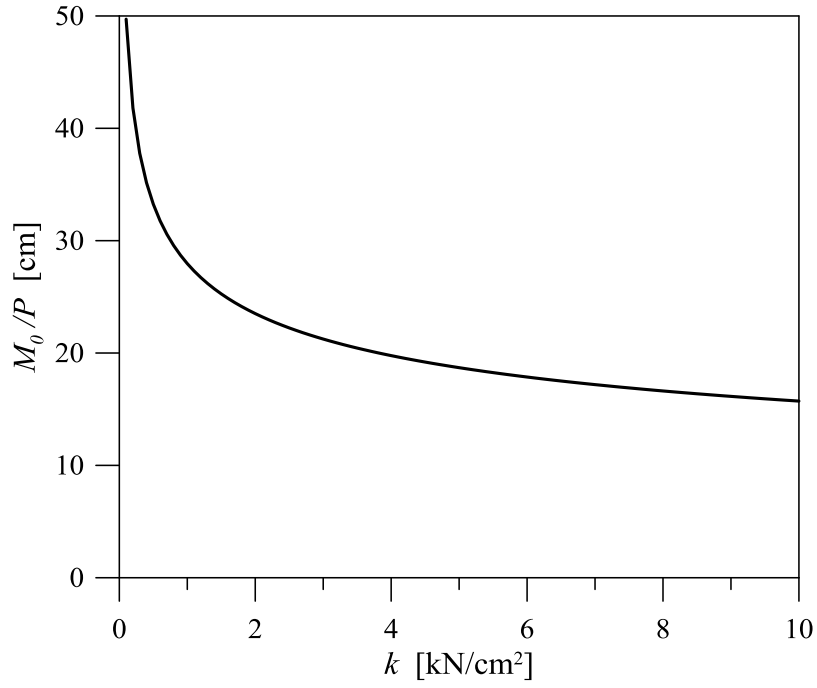
Şekil 3.23-3.25'te elastik zemine ait yay rijitliğine (yatak katsayısı) bağlı olarak yer değiştirme, kritik hız ve momentin değişimi verilmiştir. Şekillere göre, yatak katsayısının değeri arttıkça (zemin sertleştikçe) yer değiştirme ve moment azalmakta, kritik hız ise artmaktadır. Kritik hızın artması sert zeminlerde daha yüksek hızlarda rezonansın gerçekleşeceği anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle, yüksek hızlarda yumuşak zeminler daha çok tehlike arz etmektedir.



Şekil 3.23. Zeminin yatak katsayısına bağlı olarak  $v_0/P$  değişimi



Şekil 3.24. Zeminin yatak katsayısına bağlı olarak  $c_{cr}$  değişimi



Şekil 3.25. Zeminin yatak katsayısına bağlı olarak  $M_0/P$  değişimi

#### 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, elastik zemine oturan sonsuz uzun elastik kirişin hareketli yük altında dinamik davranışı incelenmiştir. Fourier dönüşümü ve rezidü teoremi kullanılarak sistemin boyutsuz moment, yer değiştirme ve kesme kuvveti ifadeleri elde edilmiştir. Bu ifadeler MATLAB programında kodlanarak sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmadan aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

1.  $\beta < \beta_{cr}$  ve  $\alpha < 1$  için yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti profilleri statik yüklemesine benzer olmaktadır (Yer değiştirme ve moment simetrik, kesme kuvveti anti-simetrik). Bu durumda en kritik kesit, yükün altındaki kesittir.  $\alpha < 1$  için hız arttıkça en büyük yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti artmaktadır.
2.  $\beta < \beta_{cr}$  için en tehlikeli durum  $\alpha = 1$  rezonans halidir. Bu durumda bütün davranış parametreleri en büyük değerlerine ulaşmaktadır.
3.  $\alpha > 1$  için en büyük yer değiştirmeler yükün gerisinde ortaya çıkmaktadır.  $\beta < \beta_{cr}$  için yük altında yer değiştirme sıfır iken  $\beta \geq \beta_{cr}$  için sonlu bir değere sahiptir.  $\alpha > 1$  için moment ve kesme kuvveti açısından yükün hemen altındaki ve önündeki kesitler ön plana çıkmaktadır.
4. Kritik hız, zemine ait yay rijitliği arttıkça artmaktadır. Buna göre yumuşak zeminler yüksek hızlarda daha çok dikkat edilmesi gereken zeminlerdir.
5. Hız arttıkça kritik sönüm azalmaktadır.
6. Yükün harmonik olmaması yani şiddetinin zamanla değişmemesi durumunda hareketli yükün kütlelerinin sonsuz uzun kirişlerin dinamik davranışına etkisi yoktur. Yükün harmonik olması durumunda ise bu etki mutlaka hesaba katılmalıdır.

İleriye yönelik olarak;

1. Zemin rijitliğinin değişken olması durumu ve/veya kiriş rijitliğinin aniden değişimi durumu incelenebilir.
2. Yükün harmonik olması ve hızın değişken (artan, azalan) olması durumu ve yükün atalet etkileri incelenebilir
3. Çekme almayan Winkler zemin modeli incelenebilir.
4. Çözüm metodu olarak sonlu elemanlar metodu göz önüne alınabilir.



## 5. KAYNAKLAR

- Achenbach, J.D. ve Sun, C.T., 1965. Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam, International Journal of Solids and Structures, 1, 570050, 353-370.
- Andersen, L., Neilsen, S.R.K. ve Iwankiewicz, R., 2002. Vehicle Moving Along an Infinite Beam with Random Surface Irregularities on a Kelvin Foundation, Journal of Applied Mechanics, 69, 69-75.
- Andersen, L., Nielsen, S.R.K. ve Kirkegaard, P.H., 2001. Finite Element Modelling of Infinite Euler Beams on Kelvin Foundations Exposed to Moving Loads in Convected Co-ordinates, Journal of Sound and Vibration, 241, 4, 587-604.
- Awodola, T.O. ve Oni, S.T., 2010. Dynamic Response Under a Moving Load of an Elastically Supported Non-Prismatic Bernoulli-Euler Beam on Variable Elastic Foundation, Latin American Journal of Solids and Structures, 7, 3–20.
- Basu, D. ve Kameswara Rao, N. S. V., 2012. Analytical Solutions for Euler–Bernoulli Beam on Visco-Elastic Foundation Subjected to Moving Load, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Accepted.
- Bitzenbauer, J. ve Dinkel, J., 2002. Dynamic Interaction Between a Moving Vehicle and an Infinite Structure Excited by Irregularities – Fourier Transforms Solution, Archive of Applied Mechanics, 72, 199-211.
- Çalım, F.F., 2009. Dynamic Analysis of Beams on Viscoelastic Foundation, European Journal of Mechanics A/Solids, 28, 469–476.
- Chen, Y.H. ve Huang Y.H., 2003. Dynamic Characteristics of Infinite and Finite Railways to Moving Loads, Journal of Engineering Mechanics, 129, 9, 987-995.
- Chonan, S., 1975. The Elastically Supported Timoshenko Beam Subjected to an Axial Force and a Moving Load, International Journal of Mechanical Sciences, 17, 570051, 573-581.
- Dimitrovova, Z. ve Varandas, J.N., 2009. Critical Velocity of a Load Moving on a Beam with a Sudden Change of Foundation Stiffness: Applications to High-Speed Trains, Computers and Structures, 87, 1224–1232.
- Dimitrovova, Z., 2010. A General Procedure for the Dynamic Analysis of Finite and Infinite Beams on Piece-Wise Homogeneous Foundation Under Moving Loads, Journal of Sound and Vibration, 329, 2635–2653.
- Dörr, J., 1943. Der Unendliche, Federnd Gebettete Balken Unter Dem Einfluss Einer Gleichförmig Bewegten Last, Ingenieur-Archiv, 3, 167-192.

- Fryba, L., 1957. Infinite Beam on an Elastic Foundation Subjected to a Moving Load, Aplikace Matematiky, 2, 105-132.
- Fryba, L., 1972. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, First Edition, Noordhoff International Publishing, Groningen, The Netherlands.
- Gavrilov, S., 1999. Non-Stationary Problems in Dynamics of a String on an Elastic Foundation Subjected to a Moving Load, Journal of Sound and Vibration, 222, 3, 345-361.
- Goloskokov, E.G. ve Filippov, A.P., 1962. Steady-State Vibration of Beams on Elastic Foundation Under the Action of Load Moving at Constant Speed, Trudy Laboratorii Gidravlicheskih Mashin AN USSR, 10, 19-26.
- Heelis, M.E., Collop, A.C., Chapman, D.N. ve Krylov, V., 1999. Predicting and Measuring Vertical Track Displacements on Soft Subgrades, The International Conference on Railway Engineering, London.
- Houedec, D.L., 1980. Response of a Roadway Lying on an Elastic Foundation to Random Traffic Loads, Journal of Applied Mechanics, 47, 145-149.
- Jaiswal, O.R. ve Iyengar, R.N., 1997. Dynamic Response of Railway Tracks to Oscillatory Moving Masses, Journal of Engineering Mechanics, 123, 7, 753-757.
- Jin, X.S. ve Wen, Z.F., 2008. Effect of Discrete Track Support by Sleepers on Rail Corrugation at a Curved Track, Journal of Sound and Vibration, 315, 279-300.
- Kargarnovin, M.H. ve Younesian, D., 2004. Dynamics of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation Under Moving Load, Mechanics Research Communications, 31, 713-723.
- Kargarnovin, M.H., Younesian, D., Thompson, D.J. ve Jones, C.J.C., 2005. Response of Beams on Nonlinear Viscoelastic Foundations to Harmonic Moving Loads, Computers and Structures, 83, 1865-1877.
- Kenney, J.T., 1954. Steady-State Vibrations of Beams on Elastic Foundation for Moving Load, Journal Appl. Mech., 4, 359-364.
- Kerr, A.D., 1972. The Continuously Supported Rail Subjected to an Axial Force and a Moving Load, International Journal of Mechanical Sciences, 14, 71-78.
- Khaloo, A.R. ve Zarfam, R., 2012. Vibration Control of Beams on Elastic Foundation Under a Moving Vehicle and Random Lateral Excitations, Journal of Sound and Vibration, 331, 1217-1232.
- Kim, S.-K., 2005. Stability and Dynamic Response of Rayleigh Beam-Columns on an Elastic Foundation Under Moving Loads of Constant Amplitude and Harmonic Variation, Engineering Structures, 27, 869-880.

- Kim, S.-M. ve Cho, Y.-H., 2006. Vibration and Dynamic Buckling of Shear Beam-Columns on Elastic Foundation Under Moving Harmonic Loads, International Journal of Solids and Structures, 43, 393-412.
- Kim, S.-M., 2004. Vibration and Stability of Axial Loaded Beams on Elastic Foundation Under Moving Harmonic Loads, Engineering Structures, 26, 95-105.
- Kuo, C.-M. ve Huang, C.-H., 2010. Effective Length of Beam on Elastic Foundation under a Moving Load, Computer Modeling in Engineering and Sciences, 65, 3, 245-258.
- Mallik, A.K., Chandra, S. ve Singh, A.B., 2006. Steady-State Response of an Elastically Supported Infinite Beam to a Moving Load, Journal of Sound and Vibration, 291, 1148-1169.
- Mathews, P.M., 1958. Vibrations of a Beam on Elastic Foundation, I,II. Zeitschr. Angew. Math. Mech., 3/4, 105-115.
- Metrikine, A.V. ve Popp, K., 1999. Vibration of a Periodically Supported Beam on an Elastic Half-Space, European Journal of Mechanics - A/Solids, 18, 679-701.
- Metrikine, A.V. ve Popp, K., 2000. Steady-State Vibrations of an Elastic Beam on a Visco-Elastic Layer Under Moving Load, Archive of Applied Mechanics, 70, 399-408.
- Nguyen, V.H. ve Duhamel, D., 2008. Finite Element Procedures for Nonlinear Structures in Moving Coordinates; Part 2: Infinite Beam Under Moving Harmonic Loads, Computers and Structures, 86, 2056-2063.
- Prasad, B., 1981. On the Response of a Timoshenko Beam under Initial Stress to a Moving Load, International Journal of Engineering Science, 19, 570048, 615-628.
- Saito, H. ve Terasawa, T., 1980. Steady-State Vibrations of a Beam on a Pasternak Foundation for Moving Loads, Journal of Applied Mechanics, 47, 879-883.
- Shamalta, M. ve Metrikine, A.V., 2002. Comparison of the Dynamic Response of one-end two-dimensional Models for an Embedded Railway Track to a Moving Load, Heron, 47, 4, 243-262.
- Shamalta, M. ve Metrikine, A.V., 2003. Analytical Study of the Dynamic Response of an Embedded Railway Track to a Moving Load, Archive of Applied Mechanics, 73, 131-146.
- Steele, C.R., 1967. Nonlinear Effects in the Problem of the Beam on a Foundation with a Moving Load, International Journal of Solids and Structures, 3, 473575, 565-585.
- Sun, L., 2001. Dynamic Displacement Response of Beam-Type Structures to Moving Line Load, International Journal of Solids and Structures, 38, 8869-8878.
- Sun, L., 2002. A Closed-Form Solution of Beam on Viscoelastic Subgrade Subjected to Moving Loads, Computers and Structures, 80, 1, 1-8.

- Timoshenko, S.P., 1926. Statical and Dynamical Stresses in Rails, Proc. Intern. Congr. Appl. Mech, 407-418.
- Vostroukhov, A.V. ve Metrikine, A.V., 2003. Periodically Supported Beam on a Visco-Elastic Layer as a Model for Dynamic Analysis of a High-Speed Railway Track, International Journal of Solids and Structures, 40, 5723-5752.
- Wang, H.P., Li, J. ve Zhang, K., 2007. Vibration Analysis of the Maglev Guideway with the Moving Load, Journal of Sound and Vibration, 305, 621-640.
- Younesian, D., Kargarnovin, M.H., Thompson, D.J. ve Jones, C.J.C., 2005. Parametrically Excited Vibration of a Timoshenko Beam on Random Viscoelastic Foundation Subjected to a Harmonic Moving Load, Nonlinear Dynamics, 45, 75-93.

## ÖZGEÇMİŞ

Muhittin TURAN, 1987 yılında Trabzon'da doğdu. İlköğrenimini Pelitli Mareşal Fevzi Çakmak İlköğretim Okulu'nda, orta öğrenimini Trabzon Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı ve 2009 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2010 yılında Bayburt Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2011 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'nda ÖYP kapsamında görevlendirilen Turan, İngilizce bilmekte olup halen görevine devam etmektedir.